ALGÈBRE. — *K-théorie algébrique. Localisation de formes quadratiques.*

Note (*) de M. **Max Karoubi**, transmise par M. Henri Cartan.

Soit A un anneau muni d'une involution $a \mapsto \bar{a}$ et soit ε un élément du centre de A tel que $\varepsilon_\infty \bar{\varepsilon} = 1$. On a défini dans ([6]) et ([7]) des groupes ${}_\varepsilon L_n(A)$ analogues aux groupes $K_n(A)$ de Quillen et qui sont, *grosso modo*, des groupes de Grothendieck de la catégorie des A-modules munis de formes ε-quadratiques ([5]). Si S est un ensemble d'éléments centraux réguliers de A stable par multiplication, on se propose de comparer les groupes ${}_\varepsilon L_n(A)$ et ${}_\varepsilon L_n(A_S)$, où A_S désigne l'anneau localisé de A vis-à-vis du système multiplicatif S. Pour des petites valeurs de n, cette comparaison se fera grâce à des « suites exactes de localisation » généralisant celle de Bass et Heller en K-théorie ordinaire ([3]).

1. Formes quadratiques sur des modules de S-torsion. — Soit $\mathscr{T}_S$ la sous-catégorie pleine de la catégorie des A-modules (à droite) dont les objets M sont de S-torsion et admettent une présentation finie

$$0 \to P_1 \to P_0 \to M \to 0,$$

où les P_i sont des A-modules projectifs de type fini. Si on note K (A, S) le groupe de Grothendieck (avec « suites exactes ») de cette catégorie, on a la suite exacte de Bass et Heller :

$$K_1(A) \to K_1(A_S) \to K(A, S) \to K(A) \to K(A_S)$$

que nous nous proposons de généraliser en « L-théorie ». Pour cela, il nous faut donner un sens aux notions de forme quadratique ou hermitienne sur un objet M de $\mathscr{T}_S$

Définition 1. — *Une forme ε-hermitienne sur* M *est un homomorphisme* Z-*bilinéaire* $\varphi : M \times M \to A_S/A$ *tel que* :

(i) $\varphi(x, y\lambda) = \varphi(x, y)\lambda$ *pour* $\lambda \in A$ et (ii) $\overline{\varphi(y, x)} = \varepsilon\varphi(x, y)$.

Soit $\hat{M} = \mathrm{Hom}(M, A_S/A) \approx \mathrm{Ext}(M, A) \approx \mathrm{Hom}(M, A/sA)$ si $sM = 0$. La forme ε-hermitienne φ est alors dite *non dégénérée* si l'homomorphisme $\tilde{\varphi}$ de M dans $\hat{M}$ défini par

$$\tilde{\varphi}(x)(y) = \varphi(y, x)$$

est un isomorphisme.

Soit Λ un sous-groupe additif de A tel que $\{ a \mid a = b - \bar{\varepsilon}\bar{b} \} \subset \Lambda \subset \{ a \mid \bar{a} = -\varepsilon a \}$, $x \Lambda \bar{x} \subset \Lambda$ et soit Λ_S le groupe « localisé » (i. e. le sous-groupe additif de A_S formé des fractions λ/s, où $\lambda \in \Lambda$ et $s \in S$ avec $s = \bar{s}$). Soient $A'_S = A_S/A$ et $\Lambda'_S = \Lambda_S/\Lambda$. Une *forme ε-quadratique* attachée à Λ et φ est la donnée d'une fonction $q : M \to A'_S/\Lambda'_S$ telle que :

(i) $q(x\lambda) = \bar{\lambda}\, q(x)\, \lambda$; (ii) $q(x+y) - q(x) - q(y) = \{ \varphi(x, y) \}$, où $\{ \varphi(x, y) \}$ désigne la classe de $\varphi(x, y)$ dans A'_S/Λ'_S; (iii) $\varphi(x, x) = q(x) + \bar{\varepsilon}\, \overline{q(x)}$. La forme quadratique q est dite non dégénérée si φ est non dégénérée.

Exemple 1. — Si A = Z, $\varepsilon = 1$, $\Lambda = 0$ et S = Z − { 0 }, la notion de forme quadratique sur les objets de $\mathscr{T}_S$ (qui ne sont autres que les groupes abéliens finis) a été développée par Durfee dans sa thèse ([4]) [*cf.* aussi ([8]), ([10])].

Exemple 2. — Soit φ une forme ε-hermitienne et soit φ_0 une forme sesquilinéaire telle que $\varphi(x, y) = \varphi_0(x, y) + \bar{\varepsilon}\,\overline{\varphi_0(y, x)}$. Alors $q(x) = \{\varphi_0(x, x)\}$ définit une forme quadratique sur M. Une forme ainsi issue d'une forme sesquilinéaire φ_0 sera dite *hyperquadratique*.

Exemple 3. — Considérons une suite exacte

$$0 \to E \xrightarrow{\alpha} {}^{t}E \xrightarrow{\beta} M \to 0$$

avec ${}^{t}E = \operatorname{Hom}(M, A)$, ${}^{t}\alpha = \varepsilon\alpha$ et α_S isomorphisme. On peut alors munir M de la forme ε-hermitienne φ définie par $\varphi(\beta(x), \beta(y)) = \langle \alpha_S^{-1}(x), y \rangle$. Si $\alpha = \alpha_0 + \bar{\varepsilon}\,{}^{t}\alpha_0$ on peut même munir M de la forme quadratique q définie par $q(x) = \langle (\alpha_S^{-1}\,\alpha_S\,\alpha_S^{-1})(x), x \rangle$.

Remarque. — Cette définition de forme quadratique est directement inspirée des travaux de Wall [10] et Bak [1].

2. Sous-modules lagrangiens et le groupe ${}_{\varepsilon}U(A, S)$. — Soit M un module de S-torsion muni d'une forme ε-quadratique comme ci-dessus, et soit L un sous-module de type fini de M. On dit que L est *isotrope* si $L \subset L^{\perp}$, $q|_{L} = 0$ et si M/L est un objet de $\mathscr{T}_S$. Il est dit *lagrangien* si on a en outre $L = L^{\perp}$. Si M est hyperquadratique, L est dit *hyperisotrope* (resp. *hyperlagrangien*) si L est isotrope (resp. lagrangien) et s'il existe un choix de φ_0 tel que $(\tilde{\varphi}^{-1}\,\tilde{\varphi}_0)(L) \subset L$.

Remarque. — Cette distinction entre modules quadratique et hyperquadratique et entre sous-modules isotrope et hyperisotrope, etc. n'a évidemment d'intérêt que lorsque 2 n'est pas inversible dans A.

Considérons maintenant l'ensemble des triples (M, L_1, L_2), où M est un module hyperquadratique et où L_1 et L_2 sont des sous-modules lagrangiens de M. Le groupe ${}_{\varepsilon}U(A, S)$ est le quotient du groupe libre engendré par les classes d'isomorphie de tels triples par le sous-groupe engendré par les relations suivantes :

(i) $(M, L_1, L_2) + (M', L'_1, L'_2) = (M \oplus M', L_1 \oplus L'_1, L_2 \oplus L'_2)$;

(ii) $(M, L_1, L_2) + (M, L_2, L_3) = (M, L_1, L_3)$;

(iii) $(M, L_1, L_2) = (L^{\perp}/L, L_1/L, L_2/L)$ si L est un sous-module hyperisotrope contenu dans L_1 et L_2 (ce qui assure que $L^{\perp}/L$ est hyperquadratique).

Théorème 2. — *On a une suite exacte*

$${}_{\varepsilon}L_1(A) \to {}_{\varepsilon}L_1(A_S) \to {}_{\varepsilon}U(A, S) \to {}_{\varepsilon}L(A) \to {}_{\varepsilon}L(A_S).$$

Ce théorème se démontre comme le théorème de Bass et Heller (dont il est la généralisation : considérer $A = B \times B^0$) en explicitant des isomorphismes réciproques entre le groupe ${}_{\varepsilon}U(A, S)$ et le groupe de Grothendieck du foncteur ${}_{\varepsilon}Q(A) \to {}_{\varepsilon}Q(A_S)$ avec les notations de [5]. Si A est un anneau de Dedekind ou un anneau de la forme $\mathbf{Z}\,\pi$, une suite exacte analogue a été démontrée par Bak et Scharlau [2].

3. Applications.

Théorème 3. — *Reprenons les notations du paragraphe précédent et considérons un homomorphisme* $i : A \to B$ *tel que* $T = i(S)$ *soit formé d'éléments réguliers de* B *et tel que* $A/sA \approx B/i(s)B$ *pour tout élément* s *de* S. *On a alors évidemment* ${}_{\varepsilon}U(A, S) \approx {}_{\varepsilon}U(B, T)$, *d'où une suite exacte de « Mayer-Vietoris »* :

$${}_{\varepsilon}L_1(A_S) \oplus {}_{\varepsilon}L_1(B) \to {}_{\varepsilon}L_1(B_T) \to {}_{\varepsilon}L(A) \to {}_{\varepsilon}L(A_S) \oplus {}_{\varepsilon}L(B) \to {}_{\varepsilon}L(B_T).$$

Remarque. — Si A est un anneau de Dedekind ou de la forme $\mathbf{Z}\,\pi$, une suite exacte analogue a été aussi démontrée par Wall [11] et par Bak et Scharlau [2].

THÉORÈME 4. — *Posons* ${}_\varepsilon W(A) = \operatorname{Coker}(K(A) \to {}_\varepsilon L(A))$ (c'est le « groupe de Witt » de A). *Supposons que pour tout élément s de* S *il existe des éléments* x_i *du centre de* $A/s\,A$ *tels que* $x_1\bar{x}_1 + \ldots + x_n\bar{x}_n = -1$ *dans* $A/s\,A$. *Alors* ${}_\varepsilon W(A) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}' \approx {}_\varepsilon W(A_S) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}'$, *en posant* $\mathbf{Z}' = \mathbf{Z}[1/2]$.

COROLLAIRE 5. — *Soient* $A' = A \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}'$ *et* $A'' = A \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$. *Alors*

$${}_\varepsilon W(A) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}' \approx {}_\varepsilon W(A') \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}' \approx {}_\varepsilon W(A'') \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}'.$$

De manière plus précise, les noyaux et conoyaux des homomorphismes ${}_\varepsilon W(A) \to {}_\varepsilon W(A')$ [resp. ${}_\varepsilon W(A') \to {}_\varepsilon W(A'')$] *sont des groupes d'exposant* 16 (resp. 8) *au plus.*

Ce corollaire permet d'étendre aux anneaux généraux certains théorèmes démontrés dans [6] et [7] avec l'hypothèse supplémentaire que 2 était inversible dans A. En particulier, le théorème 5.13 et le corollaire 5.14 de [7] sont vrais sans cette hypothèse. Dans un autre ordre d'idée, les techniques de Bass permettent de démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 6. — *Soit* A *un anneau noethérien régulier avec* 2 *inversible dans* A. *On a alors un isomorphisme naturel*

$${}_\varepsilon L_1(A[x, x^{-1}]) \approx {}_\varepsilon L_1(A) \oplus {}_\varepsilon U(A),$$

où ${}_\varepsilon U(A)$ *est le groupe de Grothendieck du foncteur hyperbolique* [7] (l'anneau $A[x, x^{-1}]$ étant muni de l'involution $\sum a_n x^n \mapsto \sum \bar{a}_n x^n$).

Exemple. — Si F est un corps de caractéristique $\neq 2$ muni de l'involution triviale, on a ainsi ${}_1L_1(F[x, x^{-1}]) \approx {}_1L_1(F) \oplus {}_1U(F)$, avec ${}_1L_1(F) \approx \mathbf{Z}/2 \times F^*/(F^*)^2$ et ${}_1U(F) \approx \mathbf{Z}/2$.

Remarque. — Un théorème analogue a été démontré indépendamment par Ranicki [9].

(*) Séance du 12 novembre 1973.

(1) A. BAK (*Thèse*, non publiée).
(2) A. BAK et W. SCHARLAU, *Witt groups of orders and Finite groups* (à paraître).
(3) H. BASS, *Algebraic K-theory*, Benjamin, 1967.
(4) A. H. DURFEE, *Diffeomorphism classification of isolated hypersurface singularities* (*Thèse*, Cornell University).
(5) M. KAROUBI et O. VILLAMAYOR, *K-théorie algébrique et K-théorie topologique*, II (à paraître dans *Math. Scand.*).
(6) M. KAROUBI, *Comptes rendus*, 273, série A, 1971, p. 1030.
(7) M. KAROUBI, *Périodicité de la K-théorie hermitienne* (*Springer Lecture Notes*, n° 343, p. 301).
(8) M. KNESER et D. PUPPE, *Math. Z.*, 58, 1953, p. 376-384.
(9) A. A. RANICKI, *Algebraic L-theory IV Polynomial extension rings* (à paraître).
(10) C. T. C. WALL, *Foundations of algebraic L-theory* (*Springer Lecture Note* n° 343, p. 266).
(11) C. T. C. WALL, *On the classification of hermitian forms IV Global rings* (à paraître).
(12) C. T. C. WALL, *Bull. Lond. Math. Soc.*, 4, 1962, p. 156-160.

Université de Paris VII,
U. E. R. de Mathématiques,
2, place Jussieu,
75005 Paris.