MAX KAROUBI

Localisation de formes quadratiques. II

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4e série, tome 8, nº 1 (1975), p. 99-155.

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1975_4_8_1_99_0>

Ann. scient. Éc. Norm. Sup.,
4ᵉ série, t. 8, 1975, p. 99-155.

LOCALISATION DE FORMES QUADRATIQUES. II

PAR MAX KAROUBI

A Monsieur Henri Cartan
pour son 70ᵉ anniversaire

Dans le premier article de cette série [35], nous avons établi une suite exacte reliant les groupes ${}_\varepsilon L_i(A)$ et ${}_\varepsilon L_i(A_S)$ pour $i = 0, 1$ qui était de la forme

$$ {}_\varepsilon L_1(A) \to {}_\varepsilon L_1(A_S) \to {}_\varepsilon U(A, S) \to {}_\varepsilon L(A) \xrightarrow{\alpha} {}_\varepsilon L(A_S)$$

(en posant ${}_\varepsilon L = {}_\varepsilon L_0$). Dans cet article, nous nous intéressons au conoyau de l'homomorphisme α et plus particulièrement au conoyau de l'homomorphisme ${}_\varepsilon W(A) \to {}_\varepsilon W(A_S)$ entre les groupes de Witt, qui en est déduit. Dans un certain nombre de cas favorables, nous montrons que ce conoyau est isomorphe à un sous-groupe du groupe de Witt de la catégorie des A-modules de dimension homologique $\leqq 1$ qui sont de S-torsion.

De manière plus précise, nous démontrons ici une suite exacte courte

$$ {}_\varepsilon V(A) \to {}_\varepsilon V(A_S) \to {}_\varepsilon \overline{L}(A, S),$$

où ${}_\varepsilon V(B)$ est le « groupe relatif » introduit dans [14] et déterminé (à une extension près) par la suite exacte

$$ {}_\varepsilon L_1(B) \to K_1(B) \to {}_\varepsilon V(B) \to {}_\varepsilon L(B) \to K(B)$$

(d'après le point de vue de Wall [31], on peut aussi le définir comme le groupe de Grothendieck de la catégorie des modules quadratiques « basiques »). Le groupe ${}_\varepsilon \overline{L}(A, S)$ est le « groupe L » d'une certaine catégorie de modules quadratiques de torsion, groupe qu'on peut expliciter dans un certain nombre de cas.

Si A est un anneau de Dedekind muni de l'involution triviale par exemple et si $A_S = F$ est son corps des fractions, on retrouve un résultat classique : la suite

$$0 \to W(A) \to W(F) \xrightarrow{\rho} \bigoplus_{\mathfrak{p}} W(A, \mathfrak{p})$$

est exacte. Dans cette suite, $\mathfrak{p}$ parcourt l'ensemble des idéaux maximaux de A et $W(A, \mathfrak{p}) \approx W(A/\mathfrak{p})$ si $A/\mathfrak{p}$ est de caractéristique $\neq 2$ [*voir* l'appendice 1 pour le calcul de $W(A, \mathfrak{p})$ lorsque $A/\mathfrak{p}$ est de caractéristique 2]. Pour $A = \mathbf{Z}$, par exemple, cette suite exacte devient

$$0 \to W(\mathbf{Z}) \to W(\mathbf{Q}) \to \mathbf{Z}/8 \oplus (\bigoplus_{p \text{ premier}} W(F_p)) \to 0.$$

Bien entendu, ce dernier résultat n'est pas vraiment nouveau. Du travail de Kneser-Puppe [18], Wilkens [34], Durfee [9], Wall [33], etc., il résulte en effet que toute forme quadratique sur un groupe abélien fini induit une classe de formes quadratiques sur $\mathbf{Q}^n$, n assez grand, bien définies à une forme unimodulaire près. C'est à cette occasion qu'on a vu, pour la première fois semble-t-il, une relation entre les formes quadratiques sur des $\mathbf{Q}$-modules et les formes quadratiques sur des modules de torsion convenables.

La surjectivité de l'homomorphisme ρ en général est une question délicate qui, à notre connaissance, n'a pu être résolue que dans un certain nombre de cas favorables (corps de nombres [21], anneaux euclidiens [27]). En utilisant le théorème de périodicité en K-théorie hermitienne ([14], [15]), nous pouvons calculer Coker ρ en termes du groupe symplectique de A et du groupe des classes d'idéaux de A. Des calculs plus précis seront effectués dans le troisième article de cette série en faisant appel davantage à la topologie algébrique.

Nos méthodes nous permettent également de calculer le groupe ${}_\varepsilon V(A[x, x^{-1}])$ pour tout anneau A (des résultats analogues ont été obtenus indépendamment par A. Ranicki [25]). Si A est noethérien régulier et si 2 est inversible dans A, nous obtenons exactement ${}_\varepsilon L(A) \oplus {}_\varepsilon V(A)$. Il en résulte que l'anneau de Witt de $A[x_1, \ldots, x_n, x_1^{-1}, \ldots, x_n^{-1}]$ est une algèbre sur $W(A)$ engendrée par des éléments u_i, $i = 1, \ldots, n$ soumis aux relations $(u_i)^2 = 1$ et $u_i u_j = u_j u_i$. Dans un ordre d'idées légèrement différent, si k est un corps fini de caractéristique 2, nous démontrons que le groupe de Witt $W(k[x, x^{-1}])$ est isomorphe à $W(k) \oplus k^{(N)}$, soit $\mathbf{Z}/2 \oplus k^{(N)}$.

D'un point de vue plus « géométrique », nos résultats théoriques nous permettent de calculer également la « L-théorie » des sphères sur des corps algébriquement clos k de caractéristique $\neq 2$. De manière précise, si k_n désigne l'algèbre quotient de $k[x_1, \ldots, x_{n+1}]$ par l'idéal engendré par $(x_1)^2 + \ldots + (x_{n+1})^2 - 1$, nous montrons que $L(k_n)$ est périodique par rapport à n de période 8 et est en fait indépendant de k. Si k est le corps des nombres complexes, on retrouve les groupes classiques $K_{\mathbf{R}}(S^n)$ de la K-théorie topologique réelle.

1. La deuxième suite exacte d'une localisation

De manière parallèle au groupe ${}_\varepsilon U(A, S)$ défini dans le premier article de cette série, nous allons construire des groupes ${}_\varepsilon L(A, S)$ et ${}_\varepsilon \overline{L}(A, S)$ qui vont s'insérer dans la suite exacte courte décrite dans l'introduction.

Considérons donc de nouveau la catégorie $\mathscr{T}_S$ dont les objets sont les A-modules de S-torsion et de dimension homologique $\leqq 1$. Le groupe ${}_\varepsilon L(A, S)$ est alors le quotient du groupe libre engendré par les classes de modules ε-quadratiques dans cette catégorie par le sous-groupe engendré par les relations suivantes :

1° $[M \oplus M'] = [M] + [M']$;

2° Si L est un sous-module isotrope de M, on a $[M] = [L^{\perp}/L] + [H(L)]$ où $H(L) = L \oplus \hat{L}$ est le module ε-hyperbolique associé à L.

1.1. LEMME. — *Tout élément de* ${}_{\varepsilon}L(A, S)$ *peut s'écrire* $[M]-[M']$. *Pour que* $[M]-[M'] = 0$, *il faut et il suffit qu'il existe un module quadratique* P *et des sous-modules isotropes* $L \subset M \oplus P$ *et* $L' \subset M' \oplus P$ *tels que les modules ε-quadratiques* $L^{\perp}/L \oplus H(L)$ *et* $L'^{\perp}/L' \oplus H(L')$ *soient isomorphes.*

Démonstration. — Considérons la relation $\mathscr{R}$ entre M et M′ décrite dans cet énoncé et vérifions que c'est bien une relation d'équivalence.

Seule la transitivité n'est pas évidente. Supposons donc que M′ soit en relation avec M″. Il existe alors un module ε-quadratique P_1 et des sous-modules isotropes $L'_1 \subset M' \oplus P_1$ et $L''_1 \subset M'' \oplus P_1$ tels que

$$L_1'^{\perp}/L'_1 \oplus H(L'_1) \approx L_1''^{\perp}/L''_1 \oplus H(L''_1).$$

La situation peut être ainsi schématisée par le tableau suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
M \oplus P & \mathscr{R} & M' \oplus P & \qquad & M' \oplus P_1 & \mathscr{R} & M'' \oplus P_1 \\
\cup & & \cup & & \cup & & \cup \\
L & & L' & & L'_1 & & L''_1
\end{array}$$

Considérons le module $P'_1 = P \oplus M' \oplus P_1$ et les sous-modules isotropes

$$L \oplus L'_1 \subset (M \oplus P) \oplus (M' \oplus P_1) \approx M \oplus P'_1$$

et

$$L' \oplus L''_1 \subset (M' \oplus P) \oplus (M'' \oplus P_1) \approx M'' \oplus P'_1.$$

On a alors

$$\begin{aligned}(L \oplus L'_1)^{\perp}/(L \oplus L'_1) \oplus H(L \oplus L'_1) &\approx L^{\perp}/L \oplus L_1'^{\perp}/L'_1 \oplus H(L) \oplus H(L'_1) \\ &\approx L'^{\perp}/L' \oplus L_1''^{\perp}/L''_1 \oplus H(L') \oplus H(L''_1) \approx (L' \oplus L''_1)^{\perp}/(L' \oplus L''_1) \oplus H(L' \oplus L''_1).\end{aligned}$$

Désignons par Γ l'ensemble des classes d'isomorphie d'objets de $\mathscr{T}_S$ munis de formes ε-quadratiques. En fait, Γ est un monoïde abélien pour la somme directe des modules ε-quadratiques et on peut considérer sur $\Gamma \times \Gamma$ la relation d'équivalence suivante :

$$(M, M_1) \sim (M', M'_1) \quad \Leftrightarrow \quad (M \oplus M'_1)\,\mathscr{R}\,(M' \oplus M_1).$$

Les homomorphismes

$${}_{\varepsilon}L(A, S) \to \Gamma \times \Gamma/\sim,$$

$$\Gamma \times \Gamma/\sim \;\to {}_{\varepsilon}L(A, S),$$

définis respectivement par

$$[M]-[M'] \mapsto \text{classe de } (M, M')$$

et

$$[\text{classe de } (M, M')] \mapsto [M]-[M']$$

sont clairement bien définis et sont des homomorphismes inverses l'un de l'autre. ∎

Remarque. — Un lemme analogue s'applique bien entendu au groupe K (A, S) : tout élément de K (A, S) peut s'écrire $[M]-[M']$ où M et M′ sont des modules de torsion de dimension homologique $\leqq 1$. Pour que $[M]-[M'] = 0$, il faut et il suffit qu'il existe un objet P de $\mathcal{T}_S$ et des sous-modules $L \subset M \oplus P$ et $L' \subset M' \oplus P$ tels que les modules $L \oplus (M \oplus P)/L$ et $L' \oplus (M' \oplus P)/L'$ soient des objets de $\mathcal{T}_S$ isomorphes.

Considérons maintenant l'ensemble des classes d'isomorphie de triples (E, g_1^0, g_2^0) où E est un A-module projectif de type fini et où g_i^0, $i = 1, 2$, représente une classe de morphismes $E \to {}^tE$ modulo $\{ h-\bar{\varepsilon}\, {}^th \}$ qui induise une forme ε-quadratique non dégénérée sur E_S.

1.2. LEMME. — *Le groupe ${}_\varepsilon V(A_S)$ est le quotient du groupe libre engendré par l'ensemble précédent par le sous-groupe engendré par les relations suivantes :*

$$(E, g_1^0, g_2^0)+(F, h_1^0, h_2^0) = (E \oplus F, g_1^0 \oplus h_1^0, g_2^0 \oplus h_2^0),$$

$$(E, g_1^0, g_2^0)+(E, g_2^0, g_3^0) = (E, g_1^0, g_3^0),$$

$$(E, g_1^0, g_2^0) = (E, s^2 g_1^0, s^2 g_2^0)$$

pour tout élément s de S.

Démonstration. — Soit ${}_\varepsilon V'(A_S)$ le groupe quotient par les relations précédentes. On a un homomorphisme évident ${}_\varepsilon V'(A_S) \to {}_\varepsilon V(A_S)$. Puisque la catégorie $\mathcal{P}(A)$ est cofinale dans la catégorie $\mathcal{P}(A_S)$, le groupe ${}_\varepsilon V(A_S)$ peut être décrit comme groupe quotient à partir de triples (E, g_1^0, g_2^0) où $E \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{P}(A)$ et où $g_{is}^0 : E_S \to {}^tE_S$ sont tels que $g_{is} = g_{is}^0+\bar{\varepsilon}\, {}^tg_{is}^0$ soient des isomorphismes. On peut alors définir un homomorphisme ${}_\varepsilon V(A_S) \to {}_\varepsilon V'(A_S)$ en associant à tout triple (E, g_1^0, g_2^0) la classe du triple $(E, s^2 g_1^0, s^2 g_2^0)$ pour s assez grand. Il est clair que les homomorphismes ainsi définis sont inverses l'un de l'autre. ■

Nous allons déduire du lemme 1.2 un homomorphisme fondamental

$${}_\varepsilon V(A_S) \to {}_\varepsilon L(A, S).$$

En effet, si $d(E, g_1^0, g_2^0)$ est un élément de ${}_\varepsilon V'(A_S) \approx {}_\varepsilon V(A_S)$, on peut écrire deux suites exactes :

$$0 \to E \xrightarrow{g_i} {}^tE \to M_i \to 0, \qquad i = 1, 2,$$

avec $g_i = g_i^0+\bar{\varepsilon}\, {}^tg_i^0$. D'après le paragraphe 1 de [35], M_i peut être muni d'une structure de A-module quadratique de S-torsion.

On peut alors associer à $d(E, g_1^0, g_2^0)$ l'élément $[M_1]-[M_2]$ du groupe ${}_\varepsilon L(A, S)$. Pour voir que cet homomorphisme est bien défini, il suffit de voir ce qu'il advient de $[M_1]-[M_2]$ lorsqu'on remplace les g_i^0 par $s^2 g_i^0$. Dans ce cas, on a des diagrammes commutatifs déjà utilisés maintes fois dans [35] :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & E \arrow[r, "s^2 g_i"] \arrow[d, "s"'] & {}^tE \arrow[r] & M_i' \arrow[r] & 0 \\ & E \arrow[r, "g_i"] & {}^tE \arrow[u, "s"'] & & \end{tikzcd}$$

Ceux-ci montrent que

$$[M'_i] = [M_i] + [H(L)]$$

avec

$$L = \operatorname{Coker}(E \xrightarrow{s} E) = E/sE.$$

Donc

$$[M'_1] - [M'_2] = [M_1] + [H(L)] - [M_2] - [H(L)] = [M_1] - [M_2].$$

Exemple. — Considérons l'élément $d(E, g_1^0, g_2^0)$ de ${}_1V(Z')$, $Z' = \mathbf{Z}[1/2]$, défini par $E = \mathbf{Z}$, $g_1^0 : \mathbf{Z} \xrightarrow{\approx} {}^t\mathbf{Z}$ et $g_2^0 = -g_1^0$. Alors $M_1 = \mathbf{Z}/2$ est muni de la forme bilinéaire $\varphi : \mathbf{Z}/2 \times \mathbf{Z}/2 \to \mathbf{Z}/2$ définie par $\varphi(x, y) = xy$ et de la forme quadratique $q : \mathbf{Z}/2 \to \mathbf{Z}/4$ définie par $q(1) = 1$ et $q(0) = 0$. De même $M_2 = \mathbf{Z}/2$ est muni des formes $-\varphi = \varphi$ et $-q \neq q$. Bien entendu ces modules ne sont pas hyperquadratiques dans le sens du paragraphe 1 de [35].

D'autre part, rappelons (*cf.* § 1 de [35]) qu'un module quadratique M est dit résoluble s'il existe E et g^0 tel qu'on ait une suite exacte

$$0 \to E \xrightarrow{g} {}^tE \to M \to 0,$$

avec $g = g^0 + \bar{\varepsilon}\, {}^tg^0$ et tel que les formes quadratique et hermitienne sur M soient induites par g et g^0. Si L est un sous-module isotrope de M, $L^\perp/L$ est aussi résoluble d'après le paragraphe 1 de [35]. De même, pour tout module N, $N \oplus \hat{N}$ est résoluble. Ceci nous permet de considérer le groupe ${}_\varepsilon\overline{L}(A, S)$ construit de manière analogue au groupe ${}_\varepsilon L(A, S)$ à partir de modules ε-quadratiques résolubles.

1.3. Proposition. — *Si 2 est inversible dans* A, *l'application naturelle*

$${}_\varepsilon\overline{L}(A, S) \to {}_\varepsilon L(A, S)$$

est injective.

Démonstration. — Si P est un module ε-quadratique, $P \oplus P^- \approx H(P)$ est hyperésoluble. Si $[M] - [M'] = 0$ dans ${}_\varepsilon L(A, S)$ avec M et M′ résolubles, il existe un module P et des sous-modules isotropes $L \subset M \oplus P$ et $L' \subset M' \oplus P$ tels que

$$L^\perp/L \oplus H(L) \approx L'^\perp/L' \oplus H(L').$$

En remplaçant P par $P \oplus P^-$, on obtient donc un isomorphisme entre les modules résolubles $L^\perp/L \oplus P^- \oplus H(L)$ et $L'^\perp/L' \oplus P^- \oplus H(L')$, ce qui démontre la proposition. ■

Remarque 1. — Si A est un anneau de Dedekind, on démontrera dans le paragraphe 2 que l'homomorphisme ${}_\varepsilon\overline{L}(A, S) \to {}_\varepsilon L(A, S)$ est aussi injectif (2 n'étant pas nécessairement inversible dans A).

Remarque 2. — Des exemples appropriés montrent que l'homomorphisme

$$_{\varepsilon}\overline{\mathrm{L}}(\mathrm{A}, \mathrm{S}) \to {}_{\varepsilon}\mathrm{L}(\mathrm{A}, \mathrm{S})$$

n'est pas surjectif en général.

On se propose de comparer maintenant les groupes $_{\varepsilon}\overline{\mathrm{L}}(\mathrm{A}, \mathrm{S})$ et $_{\varepsilon}\mathrm{V}(\mathrm{A}_{\mathrm{S}})$. Pour cela, nous allons introduire un groupe intermédiaire $_{\varepsilon}\mathrm{V}(\mathrm{A}, \mathrm{S})$ qu'on définit comme suit. Considérons l'ensemble des couples (E, g^0) où E est un A-module projectif de type fini et où $g^0 : \mathrm{E} \to {}^t\mathrm{E}$ est une classe de morphismes tels que $g_{\mathrm{S}} : \mathrm{E}_{\mathrm{S}} \to {}^t\mathrm{E}_{\mathrm{S}}$ soit un isomorphisme avec $g = g^0 + \bar{\varepsilon}\,{}^t g^0$ (donc g^0_{S} définit une forme ε-quadratique non dégénérée sur E_{S}). Le groupe $_{\varepsilon}\mathrm{V}(\mathrm{A}, \mathrm{S})$ est alors le quotient du groupe libre engendré par les classes d'isomorphie de tels couples par le sous-groupe engendré par les relations suivantes :

$$(\mathrm{E}, g^0) + (\mathrm{F}, h^0) = (\mathrm{E} \oplus \mathrm{F}, g^0 \oplus h^0);$$
$$(\mathrm{E}, g) = (\mathrm{E}, h)$$

s'il existe une décomposition de E en $\mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$ ainsi qu'un morphisme

$$\alpha : \quad \mathrm{F} \oplus \mathrm{G} \to \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$$

de la forme

$$\begin{pmatrix} s & \lambda \\ 0 & s \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} s & 0 \\ \lambda & s \end{pmatrix},$$

tel que

$$s^2 g^0 = {}^t\alpha\, h^0\, \alpha \bmod \mathrm{Im}(1 - \bar{\varepsilon}\mathrm{T}).$$

On note $[\mathrm{E}, g^0]$ la classe du couple (E, g^0) dans $_{\varepsilon}\mathrm{V}(\mathrm{A}, \mathrm{S})$.

On a un homomorphisme évident de $_{\varepsilon}\mathrm{L}(\mathrm{A})$ dans $_{\varepsilon}\mathrm{V}(\mathrm{A}, \mathrm{S})$: c'est celui qui associe au module ε-quadratique E la classe de la paire (E, g^0) dans $_{\varepsilon}\mathrm{V}(\mathrm{A}, \mathrm{S})$, g^0 représentant la forme quadratique sur E.

Par ailleurs, considérons un élément $d(\mathrm{E}, g^0_1, g^0_2)$ de $_{\varepsilon}\mathrm{V}(\mathrm{A}_{\mathrm{S}})$. Comme il a été dit plus haut, on peut supposer que E est un A-module projectif de type fini et que les g^0_i sont des morphismes de E dans ${}^t\mathrm{E}$. Alors la différence $[\mathrm{E}, g^0_1] - [\mathrm{E}, g^0_2]$ est un élément de $_{\varepsilon}\mathrm{V}(\mathrm{A}, \mathrm{S})$. Pour vérifier que cette correspondance définit bien un homomorphisme de $_{\varepsilon}\mathrm{V}(\mathrm{A}_{\mathrm{S}})$ dans $_{\varepsilon}\mathrm{V}(\mathrm{A}, \mathrm{S})$, il suffit de voir que

$$[\mathrm{E}, s^2 g^0_1] - [\mathrm{E}, s^2 g^0_2] = [\mathrm{E}, g^0_1] - [\mathrm{E}, g^0_2],$$

ce qui est évidemment conséquence du lemme suivant :

1.4. Lemme. — *Soit*

$$\tau_0 : \quad \mathrm{E} \oplus {}^t\mathrm{E} \to {}^t(\mathrm{E} \oplus {}^t\mathrm{E}) \approx {}^t\mathrm{E} \oplus \mathrm{E}$$

la forme ε-quadratique définie par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a alors la relation suivante dans le groupe ${}_{\varepsilon}\mathrm{V}(\mathrm{A}, \mathrm{S})$:

$$[\mathrm{E}, s^2 g^0] + [\mathrm{E} \oplus {}^t\mathrm{E}, \tau_0] = [\mathrm{E}, g^0] + [\mathrm{E} \oplus {}^t\mathrm{E}, s\tau_0].$$

Démonstration. — Une conséquence immédiate des définitions est que $[\mathrm{E}, g^0] = [\mathrm{E}, h^0]$ s'il existe $\alpha : \mathrm{E_S} \to \mathrm{E_S}$ de classe 0 dans le groupe $\mathrm{K}_1(\mathrm{A_S})$ tel que

$$g^0 = {}^t\alpha\, h^0\, \alpha \bmod \mathrm{Im}(1 - \bar{\varepsilon}\mathrm{T}).$$

En effet, on peut toujours trouver un couple (F, k^0) tel que $\mathrm{E} \oplus \mathrm{F} \approx \mathrm{A}^{2n} \approx \mathrm{H}(\mathrm{A}^n)$ et utiliser le fait qu'un élément de classe 0 dans $\mathrm{K}_1(\mathrm{A_S})$ est le produit de matrices élémentaires. Considérons maintenant dans $\mathrm{E} \oplus \mathrm{E} \oplus {}^t\mathrm{E}$ les formes définies par les matrices

$$\begin{pmatrix} s^2 g^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} g^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans la catégorie $\mathscr{P}(\mathrm{A_S})$ on a alors l'identité

$$\begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^2 g^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

ce qui démontre évidemment le lemme puisque la matrice

$$\begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est produit de matrices élémentaires. ∎

De manière générale, soit $g^0 : \mathrm{E} \to {}^t\mathrm{E}$ et $h^0 : \mathrm{E} \to {}^t\mathrm{E}$ des morphismes comme ci-dessus. On dira qu'ils sont *homotopes* si, mod $\mathrm{Im}(1 - \bar{\varepsilon}\mathrm{T})$, on peut écrire $h^0 = {}^t\alpha\, g^0\, \alpha$ dans la catégorie $\mathscr{P}(\mathrm{A_S})$ où la classe de α est égale à 0 dans $\mathrm{K}_1(\mathrm{A_S})$. En particulier, si on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \xrightarrow{g_i} & {}^t\mathrm{E} \\ {\scriptstyle \alpha_i}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle {}^t\alpha_i} \\ \mathrm{F} & \xrightarrow{h} & {}^t\mathrm{F} \end{array}$$

avec $i = 1, 2$, où α_1 est homotope à α_2 (i. e. $[\alpha_{1\mathrm{S}}^{-1}\, \alpha_{2\mathrm{S}}] = 0$ dans $\mathrm{K}_1(\mathrm{A_S})$), on a $[\mathrm{E}, g_1] = [\mathrm{E}, g_2]$ dans le groupe ${}_{\varepsilon}\mathrm{V}(\mathrm{A}, \mathrm{S})$.

1.5. Lemme. — *Tout élément de* ${}_{\varepsilon}\mathrm{V}(\mathrm{A}, \mathrm{S})$ *peut s'écrire* $[\mathrm{E}, g^0] - [\mathrm{F}, k^0]$. *Pour que* $[\mathrm{E}, g^0] = [\mathrm{F}, k^0]$ *il faut et il suffit qu'il existe* $[\mathrm{H}, l^0]$ *et un isomorphisme* $\beta : \mathrm{E} \oplus \mathrm{H} \to \mathrm{F} \oplus \mathrm{H}$ *tel que* $g^0 \oplus l^0$ *et* ${}^t\beta(k^0 \oplus l^0)\beta$ *soient homotopes dans le sens précédent.*

Démonstration. — La relation $\mathscr{R}$ entre les couples (E, g^0) et (F, k^0) décrite dans ce lemme est clairement une relation d'équivalence dans l'ensemble Γ des classes d'isomorphie de couples. Considérons alors sur $\Gamma\times\Gamma$ la relation

$$(a, b) \sim (c, d) \iff (a+d)\mathcal{R}(b+c).$$

Alors $\Gamma\times\Gamma/\sim$ s'identifie à ${}_\varepsilon V(A, S)$ au moyen de deux applications évidentes. ■

1.6. COROLLAIRE. — *Considérons le diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccccc} {}_\varepsilon L(A) & \xrightarrow{u} & {}_\varepsilon V(A, S) & \to & \operatorname{Coker} u \to 0 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \gamma \\ {}_\varepsilon V(A) & \xrightarrow{v} & {}_\varepsilon V(A_S) & \longrightarrow & \operatorname{Coker} v \to 0 \end{array}$$

Alors γ *est une application injective.*

Démonstration. — Soit $d(E, g_1^0, g_2^0)$ un élément de ${}_\varepsilon V(A_S)$. Sans restreindre la généralité, on peut supposer que E est un objet de $\mathcal{P}(A)$ et que g_1^0 est un morphisme de E dans ${}^tE$ induisant un isomorphisme g_1. Supposons maintenant que la classe de $[E, g_2^0]$ soit égale à 0 dans Coker u. Il existe donc un couple (F, k^0) tel que $k : F \to {}^tF$ soit un isomorphisme, un couple (G, l) et un isomorphisme $\beta : E\oplus G \to F \oplus G$ tel que ${}^t\beta(k^0\oplus l^0)\beta$ soit homotope à $g_2^0\oplus l^0$. Quitte à ajouter à E et F un module hyperbolique, on peut supposer que E et F sont isomorphes et les identifier par cet isomorphisme. En posant ainsi $E = F$, l'élément $d(E, g_1^0, g_2^0)$ peut s'écrire :

$$d(E\oplus G, g_1^0\oplus l^0, {}^t\beta^{-1}(k^0\oplus l^0)\beta^{-1}) = d(E\oplus G, g_1^0\oplus l^0, k^0\oplus l^0)+\partial_S(\beta^{-1}),$$

où

$$\partial_S : \quad K_1(A_S) \to {}_\varepsilon V(A_S).$$

Donc

$$d(E, g_1^0, g_2^0) = v(y) \qquad \text{avec} \quad y = d(E, g_1^0, k^0)+\partial(\beta^{-1}),$$

où $\partial : K_1(A) \to {}_\varepsilon V(A)$, puisque β est un isomorphisme dans la catégorie $\mathcal{P}(A)$. ■

1.7. LEMME. — *Considérons un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{g^0} & {}^tE \\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle {}^t\alpha} \\ F & \xrightarrow{h^0} & {}^tF \end{array}$$

où α *est un quasi-isomorphisme. Alors, dans le groupe* ${}_\varepsilon V(A, S)$ *on a la relation*

$$[E, g^0] = [F, h^0]-[H(F), \tau^0]+[E\oplus {}^tF, \gamma^0],$$

où

$$\gamma^0 : \quad E\oplus {}^tF \to {}^t(E\oplus {}^tF) \approx {}^tE\oplus F$$

est défini par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

Démonstration. — Soit $\alpha' : F \to E$ un morphisme tel que $\alpha\alpha' = s\,\mathrm{Id}_F$ et $\alpha'\alpha = s\,\mathrm{Id}_E$. On a alors le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} E \oplus H(F) & \xrightarrow{g^0 \oplus \sigma^0} & {}^tE \oplus {}^t(H(F)) \\ {\scriptstyle \alpha \oplus}\downarrow{\scriptstyle \delta} & & \uparrow{\scriptstyle {}^t\alpha \oplus {}^t\delta} \\ F \oplus H(E) & \xrightarrow{h^0 \oplus \tau^0} & {}^tF \oplus {}^t(H(E)) \end{array}$$

en posant

$$\tau^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \delta = \begin{pmatrix} \alpha' & 0 \\ 0 & {}^t\alpha \end{pmatrix}$$

et

$$\sigma^0 = \begin{pmatrix} {}^t\alpha' & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha' & 0 \\ 0 & {}^t\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ s & 0 \end{pmatrix}$$

Le morphisme

$$\alpha \oplus \delta : \quad E \oplus (F \oplus {}^tF) \to F \oplus (E \oplus {}^tE)$$

se représente par la matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha' & 0 \\ 0 & 0 & {}^t\alpha \end{pmatrix}$$

homotope à

$$\begin{pmatrix} 0 & -s & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {}^t\alpha \end{pmatrix}.$$

Donc le morphisme $g^0 \oplus \sigma^0$ est homotope à

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -s & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {}^t\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & s^2 h_0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Par conséquent

$$[E, g^0] + [H(F), s\tau^0] = [F, s^2 h^0] + [E \oplus {}^tF, \gamma^0],$$

soit

$$[E, g^0] = [F, h^0] - [H(F), \tau^0] + [E \oplus {}^tF, \gamma^0]$$

d'après le lemme 1.4. ■

On peut définir maintenant un homomorphisme

$$\sigma : \quad {}_\varepsilon V(A, S) \to {}_\varepsilon\overline{L}(A, S),$$

en posant simplement $\sigma([E, g^0]) = \operatorname{coker} g$ où $g = g^0 + \bar{\varepsilon}\,{}^tg^0$ et où Coker g est muni des formes ε-quadratique et hermitienne explicitées dans le paragraphe 1 de [35]. Pour voir que cet homomorphisme est bien défini, supposons que E s'écrive $F \oplus G$ et considérons un morphisme $h^0 = {}^t k g^0 k$ où k est un endomorphisme de $F \oplus G$ de la forme

$$\begin{pmatrix} s & \lambda \\ 0 & s \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} s & 0 \\ \lambda & s \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$[\text{Coker } h] = [\text{Coker } g] + [\text{H}(\text{Coker } k)]$$

dans le groupe ${}_\varepsilon\overline{\text{L}}(\text{A}, \text{S})$. Puisque $[\text{Coker } k]$ est indépendant de λ dans le groupe $\text{K}(\text{A}, \text{S})$, l'homomorphisme σ est bien défini.

L'homomorphisme $h : \text{K}(\text{A}, \text{S}) \to {}_\varepsilon\overline{\text{L}}(\text{A}, \text{S})$ induit par le foncteur hyperbolique se factorise à travers un homomorphisme $h' : \text{K}(\text{A}, \text{S}) \to \text{Coker}\, u$ où $u : {}_\varepsilon\text{L}(\text{A}) \to {}_\varepsilon\text{V}(\text{A}, \text{S})$. De manière plus précise, on peut identifier $\text{K}(\text{A}, \text{S})$ au groupe relatif $\text{K}(\mathscr{S})$. Soit donc $d(\text{G}_1, \text{G}_2, \alpha)$ un élément de $\text{K}(\mathscr{S})$. Soit s un élément de S tel que $s\alpha$ soit un morphisme de $\mathscr{P}(\text{A})$. On pose alors

$$h'(d(\text{G}_1, \text{G}_2, \alpha)) = [\text{G}_1 \oplus {}^t\text{G}_2, \gamma^0] - [\text{G}_1 \oplus {}^t\text{G}_1, s\tau^0] - [\text{G}_2 \oplus {}^t\text{G}_2, s\tau^0],$$

où

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ s^2\alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

D'après le lemme 1.4, l'expression ci-dessus est indépendante du choix de s (remarquer que

$$[\text{G} \oplus {}^t\text{G}, ss'\tau^0] - [\text{G} \oplus {}^t\text{G}, s\tau^0] = [\text{G} \oplus {}^t\text{G}, s'\tau^0] - [\text{G} \oplus {}^t\text{G}, \tau^0]).$$

D'après le même lemme, l'expression est égale à 0 dans Coker u si $\text{G}_1 = \text{G}_2$ et $\alpha = \text{Id}$; en outre elle ne dépend que de la classe d'homotopie algébrique de α. Donc h' est bien définie et rend commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} \text{Coker } u \arrow[r] & \overline{\text{L}}(\text{A}, \text{S}) \\ \text{K}(\mathscr{S}) \arrow[u, "h'"] \arrow[r, "\approx"] & \text{K}(\text{A}, \text{S}) \arrow[u, "h"'] \end{tikzcd}$$

En particulier, si on peut choisir $s = 1$, on en déduit que la classe de $[\text{G}_1 \oplus {}^t\text{G}_2, \gamma^0]$ dans Coker u ne dépend que de la classe du module Coker (α) dans le groupe $\text{K}(\text{A}, \text{S})$.

1.8. Proposition. — *On a une suite exacte*

$${}_\varepsilon\text{L}(\text{A}) \xrightarrow{u} {}_\varepsilon\text{V}(\text{A}, \text{S}) \xrightarrow{\sigma} {}_\varepsilon\overline{\text{L}}(\text{A}, \text{S}) \to 0.$$

Démonstration. — On va définir un homomorphisme en sens inverse

$$\sigma' : {}_\varepsilon\overline{\text{L}}(\text{A}, \text{S}) \to \text{Coker}\, u$$

de la manière suivante. Soit M un A-module quadratique de S-torsion résoluble qui est donc défini par une suite exacte

$$0 \to \text{E} \xrightarrow{g} {}^t\text{E} \to \text{M} \to 0,$$

avec $g = g^0 + \bar{\varepsilon}\, {}^t g^0$. Pour définir l'homomorphisme, il convient de vérifier d'abord que la classe de $[E, g^0]$ dans le groupe Coker u est indépendante de la résolution choisie. Soit donc

$$0 \to E' \xrightarrow{g'} {}^t E' \to M' \to 0,$$

une autre résolution avec $g' = g'^0 + \bar{\varepsilon}\, {}^t g'^0$. On en déduit une résolution

$$0 \to E \oplus E' \xrightarrow{g \oplus (-g')} {}^t E \oplus {}^t E' \to M \oplus M^- \to 0$$

de $M \oplus M^-$. Puisque $M \oplus M^-$ contient un sous-module lagrangien, on peut factoriser $g^0 \oplus (-g'^0) \bmod \operatorname{Im}(1 - \bar{\varepsilon}\, T)$ sous la forme

$$\begin{tikzcd} E \oplus E' \arrow[r, "g^0 \oplus (-g'^0)"] \arrow[d, "\alpha"'] & {}^t(E \oplus E') \\ F \arrow[r, "h^0"] & {}^t F \arrow[u, "{}^t\alpha"'] \end{tikzcd}$$

où h est un isomorphisme. D'après le lemme 1.7, on a donc la relation

$$[E \oplus E', g^0 \oplus (-g'^0)] = [F, h^0] - [H(F), \tau^0] + [E \oplus E' \oplus {}^t F, \gamma^0]'$$

soit

$$[E \oplus E', g^0 \oplus (-g'^0)] = [E \oplus E' \oplus {}^t F, \gamma^0]$$

dans Coker u. On a d'autre part les suites exactes

$$0 \to E \oplus E' \xrightarrow{\alpha} F \to M \to 0,$$

$$0 \to E \oplus E \xrightarrow{\alpha_1} F_1 \to M \to 0,$$

où F_1 et α_1 sont construits de la même manière que F et α en remplaçant g'^0 par g^0. D'après la remarque qui précède la proposition, on a donc

$$[E \oplus E' \oplus {}^t F, \gamma^0] = [E \oplus E \oplus {}^t F_1, \gamma_1^0]$$

dans Coker u avec des notations évidentes. On a ainsi

$$[E \oplus E', g^0 \oplus (-g'^0)] = [E \oplus E, g^0 \oplus (-g^0)]$$

dans Coker u. En changeant les signes, on en déduit bien

$$[E, g^0] = [E', g'^0]$$

dans Coker u.

Considérons enfin un sous-module isotrope L de M. D'après le paragraphe 1 de [35], on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & E \arrow[r, "g^0"] \arrow[d, "\alpha"'] & {}^t E \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & F \arrow[r, "h^0"] & {}^t F \arrow[r] \arrow[u, "{}^t\alpha"'] & L^{\perp}/L \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

D'après le lemme 1.7, on a donc la relation

$$[E, g^0] = [F, h^0] + [E \oplus {}^tF, \gamma^0]$$

dans Coker u. Puisque $[E \oplus {}^tF, \gamma^0]$ provient de la résolution de H (L), on en déduit

$$\sigma'(M) = \sigma'(L^{\perp}/L) + \sigma'(H(L))$$

avec un abus d'écriture évident. Donc σ' est bien défini : c'est clairement l'inverse de l'homomorphisme Coker $u \to {}_\varepsilon\overline{L}(A, S)$. ■

1.9. THÉORÈME. — *On a une suite exacte*

$${}_\varepsilon V(A) \to {}_\varepsilon V(A_S) \to {}_\varepsilon\overline{L}(A, S).$$

Démonstration. — C'est une conséquence évidente des diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd} {}_\varepsilon L(A) \arrow[r, "u"] & {}_\varepsilon V(A, S) \arrow[r] & \overline{L}(A, S) \\ {}_\varepsilon V(A) \arrow[u] \arrow[r, "v"] & {}_\varepsilon V(A_S) \arrow[u, "r"] \arrow[r] & \overline{L}(A, S) \arrow[u, equal] \end{tikzcd}$$

où r induit une injection de Coker v dans Coker u (cor. 1.6). ■

1.10. COROLLAIRE. — *Supposons* 2 *inversible dans* A. *On a alors la suite exacte*

$${}_\varepsilon V(A) \to {}_\varepsilon V(A_S) \to {}_\varepsilon L(A, S).$$

En effet, si 2 est inversible dans A, l'homomorphisme ${}_\varepsilon L(A, S) \to {}_\varepsilon\overline{L}(A, S)$ est injectif (prop. 1.3). ■

1.11. PROPOSITION. — *Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd} K_1(A) \arrow[r] \arrow[d, "\partial"] & K_1(A_S) \arrow[r] \arrow[d, "\partial_S"] & K(A, S) \arrow[d] \\ {}_\varepsilon V(A) \arrow[r] & {}_\varepsilon V(A_S) \arrow[r] & {}_\varepsilon L(A, S) \end{tikzcd}$$

Démonstration. — Soient E un A-module projectif de type fini et u un endomorphisme de E tel que u_S soit un isomorphisme. Si g_0 est une forme ε-quadratique arbitraire sur E qui induit une forme non dégénérée sur E_S, on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "{}^tu g_0 u"] \arrow[d, "u"] & {}^tE \\ E \arrow[r, "g_0"] & {}^tE \arrow[u, "{}^tu"] \end{tikzcd}$$

Puisque

$$\partial_S(E, u) = d(E, {}^tug^0u, g^0)$$

et que

$$[\mathrm{Coker}\ {}^t ugu] = [\mathrm{Coker}\ g] + [\mathrm{H}(\mathrm{Coker}(u))],$$

on a bien le diagramme commutatif annoncé. ■

D'après la suite exacte

$${}_\varepsilon\mathrm{L}_1(\mathrm{B}) \to \mathrm{K}_1(\mathrm{B}) \to {}_\varepsilon\mathrm{V}(\mathrm{B}) \to {}_\varepsilon\mathrm{L}(\mathrm{B}) \to \mathrm{K}(\mathrm{B}),$$

valable pour tout anneau involutif B, le conoyau de l'homomorphisme $\mathrm{K}_1(\mathrm{B}) \to {}_\varepsilon\mathrm{V}(\mathrm{B})$ est isomorphe au noyau de l'homomorphisme ${}_\varepsilon\mathrm{L}(\mathrm{B}) \to \mathrm{K}(\mathrm{B})$. On le note ${}_\varepsilon\mathrm{W}'(\mathrm{B})$ (au lieu de ${}_\varepsilon\mathrm{L}'(\mathrm{B})$ comme dans [14]) : c'est le « cogroupe de Witt » de B. En revenant aux notations précédentes, si on pose

$${}_\varepsilon\overline{\mathrm{W}}(\mathrm{A}, \mathrm{S}) = \mathrm{Coker}[\mathrm{K}(\mathrm{A}, \mathrm{S}) \to {}_\varepsilon\overline{\mathrm{L}}(\mathrm{A}, \mathrm{S})],$$

on déduit de la proposition 1.11 la suite

$${}_\varepsilon\mathrm{W}'(\mathrm{A}) \to {}_\varepsilon\mathrm{W}'(\mathrm{A}_\mathrm{S}) \to {}_\varepsilon\overline{\mathrm{W}}(\mathrm{A}, \mathrm{S}).$$

1.12. PROPOSITION. — *La suite précédente est exacte modulo la 2-torsion. De manière plus précise, le noyau de l'homomorphisme* ${}_\varepsilon\mathrm{W}'(\mathrm{A}_\mathrm{S}) \to {}_\varepsilon\overline{\mathrm{W}}(\mathrm{A}, \mathrm{S})$ *est engendré par les formes non dégénérées sur des* A-*modules projectifs de type fini* E *tels que* E_S *soit libre.* (*modules* « S-*libres* »).

Démonstration. — Soit x un élément de ${}_\varepsilon\mathrm{W}'(\mathrm{A}_\mathrm{S})$ dont la classe dans ${}_\varepsilon\overline{\mathrm{W}}(\mathrm{A}, \mathrm{S})$ est nulle. Notons ${}_\varepsilon\mathrm{V}'(\mathrm{A}, \mathrm{S})$ la contre-image de ${}_\varepsilon\mathrm{W}'(\mathrm{A}_\mathrm{S})$ par l'homomorphisme canonique ${}_\varepsilon\mathrm{V}(\mathrm{A}, \mathrm{S}) \to {}_\varepsilon\mathrm{L}(\mathrm{A}_\mathrm{S})$ et ${}_\varepsilon\mathrm{L}'(\mathrm{A})$ la contre-image de ${}_\varepsilon\mathrm{V}'(\mathrm{A}, \mathrm{S})$ par l'homomorphisme ${}_\varepsilon\mathrm{L}(\mathrm{A}) \to {}_\varepsilon\mathrm{V}(\mathrm{A}, \mathrm{S})$. On a donc ainsi la suite exacte et le diagramme commutatif suivants :

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{K}(\mathrm{A}, \mathrm{S}) \arrow[d, "\mathrm{H}"] \\
{}_\varepsilon\mathrm{L}'(\mathrm{A}) \arrow[r, "i"] & {}_\varepsilon\mathrm{V}'(\mathrm{A}, \mathrm{S}) \arrow[r, "j"] \arrow[d] & {}_\varepsilon\overline{\mathrm{L}}(\mathrm{A}, \mathrm{S}) \arrow[d] \\
 & {}_\varepsilon\mathrm{W}'(\mathrm{A}_\mathrm{S}) \arrow[r] \arrow[d] & {}_\varepsilon\overline{\mathrm{W}}(\mathrm{A}, \mathrm{S}) \arrow[d] \\
 & 0 & 0
\end{tikzcd}$$

Soit y un élément de ${}_\varepsilon\mathrm{V}'(\mathrm{A}, \mathrm{S})$ dont la classe dans ${}_\varepsilon\mathrm{W}'(\mathrm{A}_\mathrm{S})$ est égale à x. Alors l'image de y dans ${}_\varepsilon\overline{\mathrm{L}}(\mathrm{A}, \mathrm{S})$ est celle d'un élément $[\mathrm{M}] - [\mathrm{N}]$ de $\mathrm{K}(\mathrm{A}, \mathrm{S})$ par H. Choisissons des résolutions

$$0 \to \mathrm{F}_1 \xrightarrow{\alpha} \mathrm{F}_2 \to \mathrm{M} \to 0,$$

$$0 \to \mathrm{G}_1 \xrightarrow{\beta} \mathrm{G}_2 \to \mathrm{N} \to 0,$$

de M et N et considérons l'élément

$$[F_1 \oplus {}^tF_2, \gamma^0] - [F_1 \oplus {}^tF_1, \tau_0] - [G_1 \oplus {}^tG_2, \theta^0] + [G_1 \oplus {}^tG_1, \tau^0]$$

où γ^0 et θ^0 sont définis par les matrices

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}, \qquad \theta^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \beta & 0 \end{pmatrix}.$$

Il est clair que l'image de cet élément dans ${}_\varepsilon\overline{\mathrm{L}}(\mathrm{A}, \mathrm{S})$ est égale à $j(y)$ et que son image dans ${}_\varepsilon\mathrm{W}'(\mathrm{A}_\mathrm{S})$ est égale à zéro. Quitte à modifier y en lui retranchant cet élément, on peut donc supposer que l'image de y dans ${}_\varepsilon\overline{\mathrm{L}}(\mathrm{A}, \mathrm{S})$ est nulle. Donc $y = i(z)$ où z est bien du type annoncé. ■

Remarque. — L'application qui associe à un module de S-torsion M l'élément $[F_1 \oplus {}^tF_2, \gamma^0] - [F_1 \oplus {}^tF_1, \tau^0]$ définit en fait un homomorphisme de $\mathrm{K}(\mathrm{A}, \mathrm{S})$ dans ${}_\varepsilon\mathrm{V}(\mathrm{A}, \mathrm{S})$ qui rend commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{K}(\mathrm{A}, \mathrm{S}) \arrow[d] \arrow[dr] & \\ {}_\varepsilon\mathrm{V}(\mathrm{A}, \mathrm{S}) \arrow[r] & {}_\varepsilon\overline{\mathrm{L}}(\mathrm{A}, \mathrm{S}) \end{tikzcd}$$

1.13. COROLLAIRE. — *Supposons que l'homomorphisme* $\mathrm{K}(\mathrm{A}) \longrightarrow \mathrm{K}(\mathrm{A}_\mathrm{S})$ *soit injectif. Alors la suite*

$${}_\varepsilon\mathrm{W}'(\mathrm{A}) \to {}_\varepsilon\mathrm{W}'(\mathrm{A}_\mathrm{S}) \to {}_\varepsilon\overline{\mathrm{W}}(\mathrm{A}, \mathrm{S})$$

est exacte.

Parallèlement à l'homomorphisme $\mathrm{K}_1(\mathrm{B}) \longrightarrow {}_\varepsilon\mathrm{V}(\mathrm{B})$, il est bon de considérer l'homomorphisme « discriminant » ${}_\varepsilon\mathrm{V}(\mathrm{B}) \xrightarrow{\Delta} \mathrm{K}_1(\mathrm{B})$: il associe à $d(\mathrm{E}, g_1^0, g_2^0)$ la classe de $g_2^{-1} g_1$ (*cf.* [14]).

1.14. PROPOSITION. — *Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd} {}_\varepsilon\mathrm{V}(\mathrm{A}) \arrow[r] \arrow[d, "\Delta"] & {}_\varepsilon\mathrm{V}(\mathrm{A}_\mathrm{S}) \arrow[r] \arrow[d, "\Delta"] & {}_\varepsilon\overline{\mathrm{L}}(\mathrm{A}, \mathrm{S}) \arrow[d] \\ \mathrm{K}_1(\mathrm{A}) \arrow[r] & \mathrm{K}_1(\mathrm{A}_\mathrm{S}) \arrow[r] & \mathrm{K}(\mathrm{A}, \mathrm{S}) \end{tikzcd}$$

Démonstration. — Soit $d(\mathrm{E}, g_1^0, g_2^0)$ un élément de ${}_\varepsilon\mathrm{V}(\mathrm{A}_\mathrm{S})$. Sans restreindre la généralité, on peut supposer que g_1 et g_2 sont des morphismes de $\mathscr{P}(\mathrm{A})$. L'élément de $\mathrm{K}(\mathrm{A}, \mathrm{S})$ qui lui correspond par l'homomorphisme à travers ${}_\varepsilon\overline{\mathrm{L}}(\mathrm{A}, \mathrm{S})$ est donc

$$[\mathrm{Coker}\, g_1] - [\mathrm{Coker}\, g_2].$$

Par l'homomorphisme à travers $\mathrm{K}_1(\mathrm{A}_\mathrm{S})$ on obtient $[\mathrm{Coker}\, s g_2^{-1} g_1] - [\mathrm{Coker}\, s]$ pour s assez grand. Mais on a les suites exactes

$$0 \to \mathrm{Coker}\, g_1 \to \mathrm{Coker}\, s g_2^{-1} g_1 \to \mathrm{Coker}\, s g_2^{-1} \to 0,$$
$$0 \to \mathrm{Coker}\, s g_2^{-1} \to \mathrm{Coker}\, s \longrightarrow \mathrm{Coker}\, g_2 \longrightarrow 0,$$

d'où l'égalité des deux éléments obtenus dans le groupe $\mathrm{K}(\mathrm{A}, \mathrm{S})$. ■

Si 2 est inversible dans A, les deux suites exactes d'une localisation peuvent être connectées de la manière suivante. Notons Σ A (au lieu de SA comme dans [13]) la suspension de l'anneau A. Alors l'anneau des polynômes laurentiens $A_z = A[z, z^{-1}]$ muni de l'involution $z \mapsto z^{-1}$ se plonge dans SA par l'homomorphisme qui associe au polynôme $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$ la classe de la matrice infinie (*cf.* [12]) :

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_{-1} & a_{-2} & \dots \\ a_1 & a_0 & a_{-1} & \dots \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}.$$

La première suite exacte d'une localisation se prolonge à droite en une suite

$$\begin{array}{ccccc} {}_{\varepsilon}L(A) & \longrightarrow & {}_{\varepsilon}L(A_S) & \longrightarrow & {}_{\varepsilon}U(\Sigma A, S) \\ \wr\wr & & \wr\wr & & \\ {}_{\varepsilon}L_1(\Sigma A) & \to & {}_{\varepsilon}L_1(\Sigma A_S) & \to & {}_{\varepsilon}U(\Sigma A, S) \end{array}$$

Par ailleurs, on peut définir un homomorphisme

$${}_{\varepsilon}L(A, S) \to {}_{\varepsilon}U(\Sigma A, S)$$

composé des homomorphismes

$${}_{\varepsilon}L(A, S) \xrightarrow{\mu} {}_{\varepsilon}U(A_z, S) \to {}_{\varepsilon}U(\Sigma A, S).$$

De manière précise, si M est un objet de $\mathcal{T}_S$ muni d'une forme ε-quadratique, l'homomorphisme μ lui associe la classe du triple $(M_z \oplus M_z^-, L_1, L_2)$ où $M_z = M \underset{A}{\otimes} A_z$, $L_1 = \{ (x, x) \}$ et $L_2 = \{ zx, x \}$ où $x \in M_z$.

1.15. Proposition. — *L'homomorphisme* μ *est bien défini par la formule précédente. En outre, le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccccc} {}_{\varepsilon}V(A) & \to & {}_{\varepsilon}V(A_S) & \longrightarrow & {}_{\varepsilon}L(A, S) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ {}_{\varepsilon}L(A) & \to & {}_{\varepsilon}L(A_S) & \to & {}_{\varepsilon}U(\Sigma A, S) \end{array}$$

Démonstration. — Soit $P = M_3 \oplus M\bar{z}$ et soit α un automorphisme de P. Montrons que l'élément $d(P, N, \alpha(N))$ du groupe ${}_{\varepsilon}U(A_z, S)$ est indépendant du choix du sous-module lagrangien N de P. En effet, si N_1 et N_2 sont deux tels choix, on a

$$d(P, N_1, \alpha(N_1)) - d(P, N_2, \alpha(N_2)) = d(P \oplus P, N_1 \oplus \alpha(N_2), \alpha(N_1) \oplus N_2).$$

Les modules étant tous hyperquadratiques, les automorphismes $\alpha \oplus 1$ et $1 \oplus \alpha$ de $P \oplus P$ sont stablement homotopes. Donc la classe de l'élément précédent est nulle d'après le lemme 2.4 et le corollaire 2.5 de [35]. Ceci étant dit, soit L un sous-module isotrope de M et soit N le sous-module lagrangien de $M_z \oplus M_z^-$ formé des couples $(x+y, y-x)$ où $x \in L_z$ et $y \in L_z^{\perp}$. Soit L' le sous-module de N formé des couples (x, y) où $x \in L_z$ et

$y \in L_z$. Si on pose

$$\alpha = \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

on a

$$\alpha(N) \cap N = L'.$$

Donc

$$d(P, L_1, L_2) = d(P, N, \alpha(N)) = d(L'^{\perp}/L', N/L', \alpha(N)/L') = d(L_z^{\perp}/L_z \oplus L_z^{-\perp}/L_z, R_1, R_2),$$

où R_1 est la diagonale dans $L_z^{\perp}/L_z \oplus L_z^{-\perp}/L_z$ et où R_2 est l'image de R_1 par la classe de α. Ceci démontre que μ est bien défini [noter que si M est hyperbolique $d(P, L_1, L_2) = 0$]. Il reste à démontrer la commutativité du diagramme. Celle-ci est évidemment impliquée par la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} {}_\varepsilon V(A, S) & \rightarrow & {}_\varepsilon L(A, S) \\ \downarrow & & \downarrow \\ {}_\varepsilon L(A_S) & \rightarrow & {}_\varepsilon U(A_z, S) \end{array}$$

Soit donc $[H, g]$ un élément de ${}_\varepsilon V(A, S)$. Dans la catégorie ${}_\varepsilon Q(A_{zS})$, le module quadratique $(H_z \oplus H_z, g \oplus (-g))$ est isomorphe au module quadratique $H_z \oplus {}^tH_z$ muni de la forme

$$\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix},$$

au moyen d'une isométrie $b : H_z \oplus H_z \to H_z \oplus {}^tH_z$ définie par la matrice

$$b = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ g & -g \end{pmatrix}.$$

On obtient ainsi un diagramme commutatif (qui définit w) :

$$\begin{array}{ccc} H_z \oplus H_z & \xrightarrow{b} & H_z \oplus {}^tH_z = F_2 \\ {\scriptstyle w' = (z,1)} \uparrow & & \uparrow {\scriptstyle w} \\ E = H_z \oplus H_z & \xrightarrow{b} & H_z \oplus {}^tH_z = F_1 \end{array}$$

où le triple (F_1, F_2, w) induit l'élément de ${}_\varepsilon L(\mathscr{S}_z)$ image de la classe du module quadratique (H, g) par l'homomorphisme

$${}_\varepsilon L(A_S) \to {}_\varepsilon L_1(A_{zS}) \to {}_\varepsilon L(\mathscr{S}_z)$$

(*cf.* § 2). Si on applique les considérations [35] p. 377 où on définit l'homomorphisme D', l'élément de ${}_\varepsilon U(A_z, S)$ qui correspond à (F_1, F_2, w) est $d(P, L_1, L_2)$ avec

$$P = \operatorname{Coker}({}^tb\,\varphi\, b) = \operatorname{Coker}(g \oplus (-g)) = M_z \oplus M_z^-,$$

$$L_1 = \operatorname{Im}({}^tF_1 \xrightarrow{{}^tb} {}^tE \xrightarrow{\beta} P),$$

$$L_2 = \operatorname{Im}({}^tF_2 \xrightarrow{{}^tb\,{}^tw} {}^tE \xrightarrow{\beta} \rho) = \operatorname{Im}({}^tF_2 \xrightarrow{{}^tw'\,{}^tb} {}^tE \xrightarrow{\beta} P).$$

Donc $L_2 = \alpha(L_1)$, ce qui démontre l'assertion. ∎

Supposons encore 2 inversible dans A. On se propose de définir un homomorphisme

$$ {}_{\varepsilon}L(A, S) \to {}_{-\varepsilon}U(A), $$

analogue à un homomorphisme défini par Misčhenko [22]. Considérons un objet M de $\mathscr{T}_S$ muni d'une forme ε-quadratique φ_0. Il existe donc une résolution projective

$$ 0 \to Q \xrightarrow{\alpha} P \to M \to 0. $$

On en déduit la résolution projective de $\hat{M}$:

$$ 0 \to {}^tP \xrightarrow{{}^t\alpha} {}^tQ \xrightarrow{\beta'} \hat{M} \to 0. $$

Si $\varphi_0 : M \longrightarrow \hat{M}$ représente la forme ε-quadratique sur M, on peut construire des morphismes $\chi : P \longrightarrow {}^tQ$ et $\eta : Q \longrightarrow {}^tP$ qui rendent commutatif le diagramme

$$ \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Q \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\eta"] & P \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\chi"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_0"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & {}^tP \arrow[r, "{}^t\alpha"] & {}^tQ \arrow[r, "\beta'"] & \hat{M} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} $$

On en déduit un deuxième diagramme commutatif

$$ \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Q \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\bar{\varepsilon}{}^t\gamma"'] & P \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\gamma"] & M \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & {}^tP \arrow[r, "{}^t\alpha"] & {}^tQ \arrow[r, "\beta'"] & \hat{M} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} $$

avec $\gamma = \chi + \bar{\varepsilon}\, {}^t\eta$, $\varphi = \varphi_0 + \bar{\varepsilon}\, {}^t\varphi_0$. Munissons maintenant $P \oplus {}^tP$ de la forme $(-\varepsilon)$-hyperbolique canonique et considérons le sous-module R de $P \oplus {}^tP$ image de Q par l'homomorphisme

$$ Q \xrightarrow{\binom{\alpha}{{}^t\gamma}} P \oplus {}^tP. $$

Alors R est un sous-module lagrangien de $P \oplus {}^tP$. En effet, on a la suite

$$ 0 \to Q \xrightarrow{\binom{\alpha}{{}^t\gamma}} P \oplus {}^tP \xrightarrow{\tau} {}^tP \oplus P \xrightarrow{({}^t\alpha,\, \gamma)} {}^tQ \to 0, $$

avec

$$ \tau = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\bar{\varepsilon} & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Im}\begin{pmatrix} \alpha \\ {}^t\gamma \end{pmatrix} = \operatorname{Ker}(({}^t\alpha, \gamma).\tau). $$

Par définition, l'élément de ${}_{-\varepsilon}U(A)$ associé à M est $d(P \oplus {}^tP, R, P \oplus O)$. Montrons que cet élément est indépendant de la résolution choisie. En effet, si

$$ 0 \to Q_1 \xrightarrow{\alpha_1} P_1 \to M \to 0 $$

est une autre résolution de M, il suffit de considérer le cas où $P_1 = P \oplus S$, $Q_1 = Q \oplus S$, le diagramme étant donc de la forme

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \rightarrow & Q \oplus S & \xrightarrow{\alpha_1 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} & P \oplus S & \xrightarrow{(\beta,\, 0)} & M \rightarrow 0 \\
& \Big\uparrow {\scriptstyle \binom{1}{0}} & & \Big\uparrow {\scriptstyle \binom{1}{0}} & & \\
0 \longrightarrow & Q & \xrightarrow{\alpha} & P & \xrightarrow{\beta} & M \rightarrow 0
\end{array}$$

En considérant les morphismes transposés, on obtient le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \rightarrow & Q \oplus S & \xrightarrow{\alpha_1} & P \oplus S & \xrightarrow{(\beta,\, 0)} & M & \rightarrow 0 \\
& \Big\downarrow {\scriptstyle \bar{\varepsilon}{}^t\delta} & & \Big\downarrow {\scriptstyle \delta} & & \Big\downarrow {\scriptstyle \varphi} & \\
0 \rightarrow & {}^tP \oplus {}^tS & \xrightarrow{{}^t\alpha_1} & {}^tQ \oplus {}^tS & \xrightarrow{(\beta',\, 0)} & \hat{M} & \rightarrow 0
\end{array}$$

le morphisme δ étant de la forme

$$\begin{pmatrix} \gamma & a \\ b & c \end{pmatrix}.$$

La commutativité du diagramme implique les relations

$$\gamma\alpha = \bar{\varepsilon}\,{}^t\alpha\,{}^t\gamma, \qquad b\,\alpha = \bar{\varepsilon}\,{}^ta, \qquad {}^tc = \varepsilon\, c.$$

On en déduit l'identité $uv = w$ avec

$$u: \quad {}^tP \oplus {}^tS \oplus P \oplus S \rightarrow {}^tP \oplus {}^tS \oplus P \oplus S,$$

$$v: \quad Q \oplus S \rightarrow {}^tP \oplus {}^tS \oplus P \oplus S$$

et w, définis par les matrices

$$u = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \bar{\varepsilon}\,{}^tb \\ 0 & 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} \bar{\varepsilon}\,{}^t\gamma & 0 \\ 0 & c \\ \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad w = \begin{pmatrix} \bar{\varepsilon}\,{}^t\gamma & \bar{\varepsilon}\,{}^tb \\ \bar{\varepsilon}^t\, a & \bar{\varepsilon}\,{}^tc \\ \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Puisque $w\,(Q \oplus S)$ est le sous-module de Lagrange associé à α_1 et à $\bar{\varepsilon}\,{}^t\delta$ et que u est homotope à l'identité, la classe du triple

$$({}^tP \oplus {}^tS \oplus P \oplus S,\ w(Q \oplus S),\ O \oplus O \oplus P \oplus S)$$

est égale à

$$d(P \oplus {}^tP,\ R \oplus O) + d(S \oplus {}^tS,\ R',\ S \oplus O),$$

où R' est l'image de S par l'homomorphisme de S dans $S \oplus {}^tS$ défini par $x \mapsto (x, c(x))$. Puisque R' se projette isomorphiquement sur S, on en déduit

$$d(S \oplus {}^tS,\ R',\ S \oplus O) = 0.$$

Donc l'élément de ${}_{-\varepsilon}\mathrm{U}(\mathrm{A})$ construit par la résolution précédente est bien indépendant de cette résolution.

Supposons maintenant que M contienne un sous-module lagrangien L. On a donc la suite exacte

$$0 \to \mathrm{Q} \xrightarrow{\alpha'} \mathrm{P}' \to \mathrm{L} \to 0,$$

où $\mathrm{P}' = \beta^{-1}(\mathrm{L})$. En identifiant $\hat{\mathrm{L}}$ et M/L (car $\mathrm{L} = \mathrm{L}^{\perp}$), on a aussi une suite exacte

$$0 \to {}^t\mathrm{P}' \xrightarrow{{}^t\alpha'} {}^t\mathrm{Q} \to \mathrm{M}/\mathrm{L} \to 0.$$

En fait, l'homomorphisme ${}^t\mathrm{Q} \to \mathrm{M}/\mathrm{L}$ se relève en un homomorphisme ${}^t\mathrm{Q} \to \mathrm{M}\,(\approx \hat{\mathrm{M}})$. On en déduit une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Q} \oplus {}^t\mathrm{P}' \xrightarrow{\alpha_1} \mathrm{P}' \oplus {}^t\mathrm{Q} \to \mathrm{M} \to 0,$$

où α_1 est définie maintenant par une matrice du type

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} \alpha' & h \\ 0 & {}^t\alpha' \end{pmatrix}.$$

Par transposition, on obtient aussi la suite exacte

$$0 \to {}^t\mathrm{P}' \oplus \mathrm{Q} \xrightarrow{{}^t\alpha_1} {}^t\mathrm{Q} \oplus \mathrm{P}' \to \hat{\mathrm{M}} \to 0,$$

l'homomorphisme de P′ dans M étant l'homomorphisme composé

$$\mathrm{P}' \to \mathrm{L} \subsetneq \mathrm{M} \underset{\approx}{\xrightarrow{\varphi}} \hat{\mathrm{M}}.$$

Si on choisit $\varphi_0 = \varphi/2$, on peut prendre $\lambda : \mathrm{P}' \oplus {}^t\mathrm{Q} \to {}^t\mathrm{Q} \oplus \mathrm{P}'$ défini par la matrice

$$\chi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

En localisant, on voit que $\eta : \mathrm{Q} \oplus {}^t\mathrm{P}' \to {}^t\mathrm{P}' \oplus \mathrm{Q}$ doit être de la forme

$$\eta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1/2 & \bigstar \end{pmatrix}.$$

Donc γ est de la forme

$$\gamma = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\varepsilon}/2 \\ 1/2 & \bigstar \end{pmatrix}.$$

Par suite $\bar{\varepsilon}\,{}^t\gamma$ est un isomorphisme et l'élément de ${}_{-\varepsilon}\mathrm{U}(\mathrm{A})$ obtenu est $d(\mathrm{E} \oplus {}^t\mathrm{E}, {}^t\mathrm{E}, \mathrm{E})$ avec $\mathrm{E} = \mathrm{P}' \oplus {}^t\mathrm{Q}$.

En nous aidant de ce qui précède, montrons que la correspondance qui associe à un objet ε-quadratique M de $\mathscr{T}_{\mathrm{S}}$ cet élément de ${}_{-\varepsilon}\mathrm{U}(\mathrm{A})$ définit en fait un homomorphisme

$${}_{\varepsilon}\mathrm{L}(\mathrm{A}, \mathrm{S}) \to {}_{-\varepsilon}\mathrm{U}(\mathrm{A}).$$

En effet, le calcul que nous venons d'effectuer montre que si M contient un sous-module lagrangien L, l'élément de ${}_{-\varepsilon}\mathrm{U}(\mathrm{A})$ qui lui correspond est l'image de $[\mathrm{Q}] - [\mathrm{P}']$ par l'homomorphisme de K (A) dans ${}_{-\varepsilon}\mathrm{U}(\mathrm{A})$ qui associe à la classe d'un objet F la classe du triple $(\mathrm{F} \oplus {}^t\mathrm{F}, \mathrm{F}, {}^t\mathrm{F})$. En particulier, cet élément de ${}_{-\varepsilon}\mathrm{U}(\mathrm{A})$ ne dépend que de la classe de L dans le groupe K (A, S). Ceci étant dit, il nous reste à montrer que si L est un sous-module isotrope de M, alors M a même image dans ${}_{-\varepsilon}\mathrm{U}(\mathrm{A})$ que $\mathrm{L}^{\perp}/\mathrm{L} \oplus \mathrm{H}(\mathrm{L})$. Mais l'image de $\mathrm{M} \oplus \mathrm{M}^-$ est celle de H (M) et celle de $\mathrm{L}^{\perp}/\mathrm{L} \oplus \mathrm{M}^-$ est celle de $\mathrm{H}(\mathrm{L}^{\perp})$ car $\mathrm{L}^{\perp}$ est un sous-module lagrangien de $\mathrm{L}^{\perp}/\mathrm{L} \oplus \mathrm{M}^-$. Donc l'image de M est l'image de

$$\mathrm{L}^{\perp}/\mathrm{L}+\mathrm{H}(\mathrm{M})-\mathrm{H}(\mathrm{L}^{\perp}) = \mathrm{L}^{\perp}/\mathrm{L}+\mathrm{H}(\mathrm{L}).$$

Nous venons ainsi de construire un complexe

$${}_{\varepsilon}\mathrm{V}(\mathrm{A}) \to {}_{\varepsilon}\mathrm{V}(\mathrm{A}_{\mathrm{S}}) \to {}_{\varepsilon}\mathrm{L}(\mathrm{A}, \mathrm{S}) \to {}_{-\varepsilon}\mathrm{U}(\mathrm{A}) \to {}_{-\varepsilon}\mathrm{U}(\mathrm{A}_{\mathrm{S}}).$$

1.16. CONJECTURE. — *La suite précédente est une suite exacte* (*rappelons que les morphismes ne sont tous définis que si* 2 *est inversible dans* A).

1.17. PROPOSITION. — *Le diagramme suivants est commutatifs :*

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathrm{K}_1(\mathrm{A}) & \to & \mathrm{K}_1(\mathrm{A}_{\mathrm{S}}) & \to & \mathrm{K}(\mathrm{A}, \mathrm{S}) & \longrightarrow & \mathrm{K}(\mathrm{A}) & \longrightarrow & \mathrm{K}(\mathrm{A}_{\mathrm{S}}) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
{}_{\varepsilon}\mathrm{V}(\mathrm{A}) & \to & {}_{\varepsilon}\mathrm{V}(\mathrm{A}_{\mathrm{S}}) & \to & {}_{\varepsilon}\mathrm{L}(\mathrm{A}, \mathrm{S}) & \to & {}_{-\varepsilon}\mathrm{U}(\mathrm{A}) & \to & {}_{-\varepsilon}\mathrm{U}(\mathrm{A}_{\mathrm{S}}) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{K}_1(\mathrm{A}) & \to & \mathrm{K}_1(\mathrm{A}_{\mathrm{S}}) & \to & \mathrm{K}(\mathrm{A}, \mathrm{S}) & \longrightarrow & \mathrm{K}(\mathrm{A}) & \longrightarrow & \mathrm{K}(\mathrm{A}_{\mathrm{S}})
\end{array}$$

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate des considérations qui précèdent. ■

Remarque. — Le théorème de périodicité de [14] implique un isomorphisme

$${}_{-\varepsilon}\mathrm{U}(\mathrm{B}) \approx {}_{\varepsilon}\mathrm{V}^1(\mathrm{B})$$

(du moins si 2 est inversible dans B). La conjecture prend alors la forme d'une suite exacte peut-être plus naturelle :

$${}_{\varepsilon}\mathrm{V}(\mathrm{A}) \to {}_{\varepsilon}\mathrm{V}(\mathrm{A}_{\mathrm{S}}) \to {}_{\varepsilon}\mathrm{L}(\mathrm{A}, \mathrm{S}) \to {}_{\varepsilon}\mathrm{V}^1(\mathrm{A}) \to {}_{\varepsilon}\mathrm{V}^1(\mathrm{A}_{\mathrm{S}}).$$

Cependant les relations entre le théorème de périodicité et la suite exacte d'une localisation restent obscures pour l'instant.

2. Applications de la deuxième suite exacte d'une localisation aux anneaux de Dedekind

Soit A un anneau de Dedekind. Pour alléger la discussion qui va suivre, nous supposerons que A est muni de l'antiinvolution triviale. Comme il est bien connu (*cf.* Bass [4]), la catégorie $\mathscr{T}_{\mathrm{S}}$ des A-modules de S-torsion (avec $\mathrm{S} \subset \mathrm{A}-\{0\}$) s'identifie à $\oplus \mathscr{T}_{\mathfrak{p}}$ où $\mathscr{T}_{\mathfrak{p}}$ désigne la catégorie des A-modules de $\mathfrak{p}^{\infty}$-torsion, $\mathfrak{p}$ parcourant l'ensemble des idéaux maximaux rencontrant S. On en déduit

$$\mathrm{K}(\mathrm{A}, \mathrm{S}) \approx \bigoplus_{\mathfrak{p}} \mathrm{K}(\mathrm{A}/\mathfrak{p}) \qquad \text{et} \qquad {}_\varepsilon\mathrm{L}(\mathrm{A}, \mathrm{S}) \approx \bigoplus_{\mathfrak{p}} {}_\varepsilon\mathrm{L}(\mathrm{A}, \mathfrak{p}),$$

où ${}_\varepsilon\mathrm{L}(\mathrm{A}, \mathfrak{p})$ peut se définir de manière analogue à ${}_\varepsilon\mathrm{L}(\mathrm{A}, \mathrm{S})$ en partant de la catégorie des A-modules de $\mathfrak{p}^\infty$ torsion ou celle des $\mathrm{A}_\mathfrak{p}$-modules de $\mathfrak{p}^\infty$-torsion (*cf.* appendice 4 de [35]). Il nous faut donc calculer ${}_\varepsilon\mathrm{L}(\mathrm{A}, \mathfrak{p})$. L'idéal $\mathfrak{p}$ étant fixé, désignons par $\mathscr{T}_\mathfrak{p}^{(n)}$ la catégorie des A-modules de $\mathfrak{p}^r$-torsion, $r \leqq n$ et par ${}_\varepsilon\mathrm{L}(\mathrm{A}, \mathfrak{p}^{(n)})$ le groupe ${}_\varepsilon\mathrm{L}(\mathscr{T}_\mathfrak{p}^{(n)})$.

2.1. THÉORÈME. — *Les homomorphismes évidents* ${}_\varepsilon\mathrm{L}(\mathrm{A}, \mathfrak{p}^{(n)}) \to {}_\varepsilon\mathrm{L}(\mathrm{A}, \mathfrak{p})$ *sont injectifs. Si on écrit* $(2) = \mathfrak{p}^s$, *on a alors*

$${}_\varepsilon\mathrm{L}(\mathrm{A}, \mathfrak{p}^{(n)}) \approx {}_\varepsilon\mathrm{L}(\mathrm{A}, \mathfrak{p}^{(n+1)}) \approx {}_\varepsilon\mathrm{L}(\mathrm{A}, \mathfrak{p})$$

pour $n \geqq s+1$. *En particulier, si la caractéristique du corps* $\mathrm{A}/\mathfrak{p}$ *est* $\neq 2$, *on a un isomorphisme*

$${}_\varepsilon\mathrm{L}(\mathrm{A}, \mathfrak{p}) \approx {}_\varepsilon\mathrm{L}(\mathrm{A}, \mathfrak{p}^{(0)})$$

[*on convient que* ${}_\varepsilon\mathrm{L}(\mathrm{A}, \mathfrak{p}^{(0)}) = {}_\varepsilon\mathrm{L}(\mathrm{A}/\mathfrak{p})$].

Démonstration. — Mettons d'abord en évidence des relations d'orthogonalité qui seront utiles par la suite. Si L et L′ sont deux objets de $\mathscr{T}_\mathfrak{p}$ contenus dans un module quadratique M de $\mathfrak{p}^\infty$-torsion, il en est de même de $\mathrm{L}+\mathrm{L}'$ et de $\mathrm{L} \cap \mathrm{L}'$ car A est de dimension homologique 1. Bien entendu, on a les égalités

$$(\mathrm{L} \cap \mathrm{L}')^\perp = \mathrm{L}^\perp + \mathrm{L}'^\perp \qquad \text{et} \qquad (\mathrm{L}+\mathrm{L}')^\perp = \mathrm{L}^\perp \cap \mathrm{L}'^\perp.$$

Montrons maintenant que l'homomorphisme ${}_\varepsilon\mathrm{L}(\mathscr{T}_\mathfrak{p}^{(n)}) \to {}_\varepsilon\mathrm{L}(\mathrm{A}, \mathfrak{p})$ est injectif pour tout n. Pour $\mathscr{C} = \mathscr{T}_\mathfrak{p}^{(n)}$ ou $\mathscr{T}_\mathfrak{p}$, considérons le « groupe de Witt » ${}_\varepsilon\mathrm{W}(\mathscr{C})$: c'est le conoyau de l'homomorphisme $\mathrm{K}(\mathscr{C}) \to {}_\varepsilon\mathrm{L}(\mathscr{C})$. Une description explicite du groupe ${}_\varepsilon\mathrm{W}(\mathscr{C})$ peut être formulée ainsi. Un module quadratique S est dit *presque hyperbolique* s'il existe un sous-module lagrangien L de S. Il est dit *stablement hyperbolique* s'il existe un module presque hyperbolique T tel que $\mathrm{S} \oplus \mathrm{T}$ soit presque hyperbolique. Le groupe ${}_\varepsilon\mathrm{W}(\mathscr{C})$ est alors le quotient de l'ensemble des objets de $\mathscr{C}$ munis de formes ε-quadratiques par la relation d'équivalence suivante :

$$\mathrm{M} \sim \mathrm{M}' \iff \mathrm{M} \oplus \mathrm{M}'^- \quad \text{est stablement hyperbolique}$$

[${}_\varepsilon\mathrm{W}(\mathscr{C})$ est bien un groupe, l'opposé de M étant M^-]. Cette description est bien entendu valable dans un cadre plus général et permet de décrire de la même manière le groupe de Witt :

$${}_\varepsilon\mathrm{W}(\mathrm{A}, \mathrm{S}) = \mathrm{Coker}(\mathrm{K}(\mathrm{A}, \mathrm{S}) \to {}_\varepsilon\mathrm{L}(\mathrm{A}, \mathrm{S})).$$

Dans le cas où $\mathscr{C} = \mathscr{T}_\mathfrak{p}^{(n)}$ ou $\mathscr{T}_\mathfrak{p}$, on peut montrer qu'un module stablement hyperbolique est en fait presque hyperbolique. En effet, soit S tel que $\mathrm{S} \oplus \mathrm{T}$ soit presque hyperbolique et tel que T soit presque hyperbolique. Soit L (resp. L′) un sous-module lagrangien de $S \oplus T$ (resp. T). Alors $((L+L') \cap L'^{\perp})/L'$ est un sous-module lagrangien de

$$L'^{\perp}/L' = S$$

d'après les formules d'orthogonalité ci-dessus (on considère L′ plongé dans $S \oplus T$). Ceci montre que les homomorphismes

$${}_{\varepsilon}W(\mathscr{T}_{\mathfrak{p}}^{(n)}) \to {}_{\varepsilon}W(\mathscr{T}_{\mathfrak{p}}^{(n+1)}) \qquad \text{et} \qquad {}_{\varepsilon}W(\mathscr{T}_{\mathfrak{p}}^{(n)}) \to {}_{\varepsilon}W(\mathscr{T}_{\mathfrak{p}})$$

sont toujours injectifs. Il en est donc de même des homomorphismes

$${}_{\varepsilon}L(\mathscr{T}_{\mathfrak{p}}^{(n)}) \to {}_{\varepsilon}L(\mathscr{T}_{\mathfrak{p}}^{(n+1)}) \qquad \text{et} \qquad {}_{\varepsilon}L(\mathscr{T}_{\mathfrak{p}}^{(n)}) \to {}_{\varepsilon}L(\mathscr{T}_{\mathfrak{p}})$$

d'après les diagrammes

$$\begin{tikzcd}
K(\mathscr{T}_{\mathfrak{p}}^{(n)}) \arrow[r] \arrow[d, shift left, "i_n"] & K(\mathscr{T}_{\mathfrak{p}}^{(n+1)}) \arrow[d, shift left, "i_n"] \\
{}_{\varepsilon}L(\mathscr{T}_{\mathfrak{p}}^{(n)}) \arrow[r] \arrow[u, shift left, "j_n"] \arrow[d] & {}_{\varepsilon}L(\mathscr{T}_{\mathfrak{p}}^{(n+1)}) \arrow[u, shift left, "j_n"] \arrow[d] \\
{}_{\varepsilon}W(\mathscr{T}_{\mathfrak{p}}^{(n)}) \arrow[r] \arrow[d] & {}_{\varepsilon}W(\mathscr{T}_{\mathfrak{p}}^{(n+1)}) \arrow[d] \\
0 & 0
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
K(\mathscr{T}_{\mathfrak{p}}^{(n)}) \arrow[r] \arrow[d, shift left, "i_n"] & K(\mathscr{T}_{\mathfrak{p}}) \arrow[d, shift left, "i"] \\
{}_{\varepsilon}L(\mathscr{T}_{\mathfrak{p}}^{(n)}) \arrow[r] \arrow[u, shift left, "j_n"] \arrow[d] & {}_{\varepsilon}L(\mathscr{T}_{\mathfrak{p}}) \arrow[u, shift left, "j"] \arrow[d] \\
{}_{\varepsilon}W(\mathscr{T}_{\mathfrak{p}}^{(n)}) \arrow[r] \arrow[d] & {}_{\varepsilon}W(\mathscr{T}_{\mathfrak{p}}) \arrow[d] \\
0 & 0
\end{tikzcd}$$

où $j_n\, i_n$ et $j\, i$ sont la multiplication par 2.

Pour achever la démonstration du théorème, il reste à démontrer la surjectivité de l'homomorphisme ${}_{\varepsilon}L(\mathscr{T}_{\mathfrak{p}}^{(n)}) \to {}_{\varepsilon}L(\mathscr{T}_{\mathfrak{p}}^{(n+1)})$ pour $n \geqq s+1$. Pour cela, considérons un module M de $\mathfrak{p}^{(n+1)}$-torsion. Pour x et $y \in M$, on peut interpréter $q(x)$ et $\varphi(x, y)$ comme des éléments de $A \bmod \mathfrak{p}^{2(n+1)}$ en choisissant une uniformisante p de $A_{\mathfrak{p}}$. On a donc

$$p^{n+s+1}\, q(x) = \varphi(p^n x, x) = 0 \bmod \mathfrak{p}^{2(n+1)}.$$

Donc

$$q(x) = 0 \bmod \mathfrak{p}^{n-s+1} = 0 \bmod \mathfrak{p}^2$$

puisque $n \geqq s+1$. Si $L = \mathfrak{p}^n M$, on a donc $q|_L = 0$ et $L \subset L^{\perp}$. Par conséquent

$$[M] = [L^{\perp}/L] + [H(L)]$$

et $[M]$ appartient bien à l'image de l'homomorphisme ${}_{\varepsilon}L(A, \mathfrak{p}^{(n)}) \to {}_{\varepsilon}L(A, \mathfrak{p}^{(n+1)})$ puisque $L^{\perp}/L$ et $H(L)$ sont des $\mathfrak{p}^n$-torsion au plus. ■

Remarque 1. — Si $2 = 0$ dans A, on convient que $s = \infty$. Alors chaque groupe ${}_{\varepsilon}L(A, \mathfrak{p}^{(n)})$ est contenu dans ${}_{\varepsilon}L(A, \mathfrak{p})$ mais ne lui est pas égal en général. Un calcul du groupe de Witt $W(A, \mathfrak{p})$, lorsque $A/\mathfrak{p}$ est un corps parfait de caractéristique 2 (i. e. tout élément de $A/\mathfrak{p}$ admet une racine carrée), est proposé dans l'appendice 1.

Remarque 2. — Si (2) = $\mathfrak{p}$ dans $A\mathfrak{p}$ et si $A/\mathfrak{p}$ est parfait, le groupe $W(A, \mathfrak{p}) \approx W(A, \mathfrak{p}^{(2)})$ est aussi calculé dans l'appendice 1. Par exemple, $W(\mathbf{Z}, 2) \approx \mathbf{Z}/8 \oplus \mathbf{Z}/2$. La signification de ces deux facteurs est explicitée plus loin.

2.2. LEMME. — *Si* A *est un anneau de Dedekind, les homomorphismes*

$$_{\varepsilon}\overline{L}(A, S) \to {}_{\varepsilon}L(A, S) \qquad \textit{et} \qquad {}_{\varepsilon}\overline{W}(A, S) \to {}_{\varepsilon}W(A, S)$$

sont injectifs.

Démonstration. — Si M est un A-module résoluble dont la classe dans $_{\varepsilon}W(A, S)$ est nulle, il existe d'après les considérations précédentes un sous-module de Lagrange inclus dans M. Donc la classe de M dans $_{\varepsilon}\overline{W}(A, S)$ est nulle, ce qui montre que le deuxième homomorphisme est injectif.

Considérons maintenant le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
K(A, S) & \rightarrow & K(A, S) \\
\downarrow & & \downarrow \\
{}_{\varepsilon}\overline{L}(A, S) & \rightarrow & {}_{\varepsilon}L(A, S) \\
\downarrow & & \downarrow \\
{}_{\varepsilon}\overline{W}(A, S) & \rightarrow & {}_{\varepsilon}W(A, S)
\end{array}$$

D'après un argument déjà utilisé plus haut, les homomorphismes

$$K(A, S) \to {}_{\varepsilon}\overline{L}(A, S) \qquad \text{et} \qquad K(A, S) \to {}_{\varepsilon}L(A, S)$$

sont injectifs car

$$K(A, S) \approx \bigoplus_{\mathfrak{p}} K(A, \mathfrak{p}) \approx \bigoplus_{\mathfrak{p}} K(A/\mathfrak{p})$$

est un groupe libre et que l'homomorphisme composé

$$K(A, S) \to {}_{\varepsilon}L(A, S) \to K(A, S)$$

est la multiplication par 2. Donc

$$_{\varepsilon}\overline{L}(A, S) \to {}_{\varepsilon}L(A, S)$$

est un homomorphisme injectif. ■

2.3. COROLLAIRE. — *Si* A *est un anneau de Dedekind et si* $S \subset A - \{0\}$, *on a la suite exacte*

$$_{\varepsilon}V(A) \to {}_{\varepsilon}V(A_S) \to {}_{\varepsilon}L(A, S).$$

Si l'homomorphisme $K(A) \to K(A_S)$ *est injectif, on a en outre la suite exacte*

$$_{\varepsilon}W'(A) \to {}_{\varepsilon}W'(A_S) \to {}_{\varepsilon}W(A, S).$$

Remarque 1. — Ce corollaire n'est vraiment nouveau que lorsque 2 n'est pas inversible dans A (*cf.* th. 1.9).

Remarque 2. — Si A est un anneau de Dedekind quelconque, le conoyau de l'homomorphisme ${}_1V(A) \to {}_1V(F)$ s'injecte dans le conoyau de l'homomorphisme

$${}_1V(\hat{A}) \to {}_1V(\hat{F})$$

avec les notations de [35] § 3.

On en déduit la suite exacte

$${}_1V(A) \to {}_1V(F) \to \bigoplus_{\mathfrak{p}} {}_1L(A, \mathfrak{p}).$$

Cependant, l'homomorphisme ${}_1V(F) \to {}_1L(A, \mathfrak{p})$ n'est pas surjectif en général. Il suffit de trouver un exemple d'anneau d'entiers algébriques A où on rend 2 inversible tel qu'il existe un idéal $\mathfrak{p}$ avec $A/\mathfrak{p}$ corps fini de caractéristique différente de 2 avec $[A]-[\mathfrak{p}]$ non nul dans le groupe K (A). Ceci résulte en effet du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} {}_\varepsilon L(A, \mathfrak{p}) & \to & {}_{-\varepsilon}U(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ K(A/\mathfrak{p}) & \longrightarrow & K(A) \end{array}$$

construit à la fin du paragraphe précédent.

Un défaut des suites exactes précédentes est qu'elles ne font pas intervenir simultanément les groupes de Witt W (A), W (A_S) et W (A, S). Nous allons y remédier dans un cas particulier important, celui où l'homomorphisme $K(A) \to K(A_S)$ est surjectif (A étant maintenant quelconque). En effet, dans ce cas, l'homomorphisme ${}_\varepsilon V(A, S) \to {}_\varepsilon L(A_S)$ est aussi surjectif puisque tout module sur A_S est stablement le localisé d'un module sur A.

2.4. Lemme. — *Soit* A *un anneau muni d'une antiinvolution quelconque tel que*

$$K(A) \to K(A_S)$$

soit surjectif. Il existe alors un homomorphisme et un seul de ${}_\varepsilon W(A_S)$ *dans* ${}_\varepsilon \overline{W}(A, S)$ *qui rend commutatif le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} {}_\varepsilon V(A, S) & \to & {}_\varepsilon \overline{L}(A, S) \\ \downarrow & & \downarrow \\ {}_\varepsilon W(A_S) & \to & {}_\varepsilon \overline{W}(A, S) \end{array}$$

Démonstration. — Soit F un A-module quadratique de la forme E_S et soit $g^0 : E \to {}^tE$ un morphisme de $\mathscr{P}(A)$ qui représente la forme ε-quadratique sur F. Montrons d'abord que la classe de Coker g (avec $g = g^0 + \bar{\varepsilon}\, {}^tg^0$) dans le groupe ${}_\varepsilon \overline{W}(A, S)$ ne dépend que de la classe de (E, g^0) dans le groupe ${}_\varepsilon \overline{L}(A_S)$. En effet, si (E', g'^0) est un autre choix et si on stabilise éventuellement, il existe un quasi-isomorphisme $\alpha : E \to E'$ tel que

$$g^0 = {}^t\alpha\, g'^0\, \alpha \bmod \operatorname{Im}(1 - \bar{\varepsilon}\, T).$$

D'après le paragraphe 1 de [35], on a donc

$$[\operatorname{Coker} g] = [\operatorname{Coker} g'] + [\mathrm{H}(\mathrm{L})]$$

dans le groupe ${}_{\varepsilon}\overline{\mathrm{L}}(\mathrm{A}, \mathrm{S})$ avec $\mathrm{L} = \operatorname{Coker} \alpha$. Donc

$$[\operatorname{Coker} g'] = [\operatorname{Coker} g]$$

dans le groupe ${}_{\varepsilon}\overline{\mathrm{W}}(\mathrm{A}, \mathrm{S})$. Enfin, si F est hyperbolique, on a stablement $\mathrm{F} = \mathrm{H}(\mathrm{G}_{\mathrm{S}})$ et l'image de F dans ${}_{\varepsilon}\overline{\mathrm{W}}(\mathrm{A}, \mathrm{S})$ est nulle. Donc l'homomorphisme ${}_{\varepsilon}\mathrm{W}(\mathrm{A}_{\mathrm{S}}) \to {}_{\varepsilon}\overline{\mathrm{W}}(\mathrm{A}, \mathrm{S})$ est bien défini. Puisque l'homomorphisme ${}_{\varepsilon}\mathrm{V}(\mathrm{A}, \mathrm{S}) \to {}_{\varepsilon}\mathrm{W}(\mathrm{A}_{\mathrm{S}})$ est surjectif, l'unicité est évidente. ■

2.5. Théorème. — *Supposons que l'homomorphisme* $\mathrm{K}(\mathrm{A}) \to \mathrm{K}(\mathrm{A}_{\mathrm{S}})$ *soit surjectif. On a alors la suite exacte*

$${}_{\varepsilon}\mathrm{W}(\mathrm{A}) \to {}_{\varepsilon}\mathrm{W}(\mathrm{A}_{\mathrm{S}}) \to {}_{\varepsilon}\overline{\mathrm{W}}(\mathrm{A}, \mathrm{S}) \to 0.$$

Si 2 *est inversible dans* A, *on a la suite exacte*

$${}_{\varepsilon}\mathrm{W}(\mathrm{A}) \to {}_{\varepsilon}\mathrm{W}(\mathrm{A}_{\mathrm{S}}) \to {}_{\varepsilon}\mathrm{W}(\mathrm{A}, \mathrm{S}).$$

Enfin, si A *est un anneau de Dedekind* [auquel cas la condition de surjectivité $\mathrm{K}(\mathrm{A}) \to \mathrm{K}(\mathrm{A}_{\mathrm{S}})$ est automatiquement satisfaite quel que soit le système multiplicatif S], *on a la suite exacte*

$${}_{\varepsilon}\mathrm{W}(\mathrm{A}) \to {}_{\varepsilon}\mathrm{W}(\mathrm{A}_{\mathrm{S}}) \to {}_{\varepsilon}\mathrm{W}(\mathrm{A}, \mathrm{S}).$$

où l'homomorphisme ${}_{\varepsilon}\mathrm{W}(\mathrm{A}) \to {}_{\varepsilon}\mathrm{W}(\mathrm{A}_{\mathrm{S}})$ *est injectif si* $\varepsilon = 1$ *et si l'involution est triviale.*

Démonstration. — Soit F un A_{S}-module quadratique représenté par une paire (E, g^0). Si $\operatorname{Coker} g$ est hyperbolique, on peut factoriser g sous la forme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{E} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\alpha"'] & {}^t\mathrm{E} \\ \mathrm{F} \arrow[r, "g'", "\approx"'] & {}^t\mathrm{F} \arrow[u, "{}^t\alpha"'] \end{tikzcd}$$

Donc E est isomorphe à F_{S} où F est un A-module quadratique. Ceci démontre que la suite

$${}_{\varepsilon}\mathrm{W}(\mathrm{A}) \to {}_{\varepsilon}\mathrm{W}(\mathrm{A}_{\mathrm{S}}) \to {}_{\varepsilon}\overline{\mathrm{W}}(\mathrm{A}, \mathrm{S}) \to 0$$

est exacte.

Si 2 est inversible dans A, l'homomorphisme ${}_{\varepsilon}\overline{\mathrm{W}}(\mathrm{A}, \mathrm{S}) \to {}_{\varepsilon}\mathrm{W}(\mathrm{A}, \mathrm{S})$ est injectif (prop. 1.3), ce qui démontre la deuxième suite exacte. Enfin, si A est un anneau de Dedekind, l'homomorphisme ${}_{\varepsilon}\overline{\mathrm{W}}(\mathrm{A}, \mathrm{S}) \to {}_{\varepsilon}\mathrm{W}(\mathrm{A}, \mathrm{S})$ est aussi injectif d'après le corollaire 2.3 et il est de même de ${}_{1}\mathrm{W}(\mathrm{A}) \to {}_{1}\mathrm{W}(\mathrm{A}_{\mathrm{S}})$ d'après [35] § 3.

Pour conclure cette étude théorique, il nous faut voir dans quelle mesure l'homomorphisme ${}_{\varepsilon}\mathrm{W}(\mathrm{A_S}) \to {}_{\varepsilon}\mathrm{W}(\mathrm{A}, \mathrm{S})$ est surjectif. Ceci est évidemment la partie difficile de la théorie et a déjà donné lieu à beaucoup de publications ([21, [27], [30]). Nous nous proposons de montrer comment le théorème de périodicité de [14] et [29] permet de considérer la situation de façon nouvelle. Nous supposerons désormais que A est un anneau de Dedekind.

2.6. THÉORÈME. — *Soit* F *un corps complet à valuation discrète et soit* A *son anneau de valuation. On a alors la suite exacte*

$$ {}_{\varepsilon}\mathrm{W}(\mathrm{A}) \to {}_{\varepsilon}\mathrm{W}(\mathrm{F}) \to {}_{\varepsilon}\mathrm{W}(\mathrm{A}, \mathfrak{p}) \to 0, $$

où $\mathfrak{p}$ *désigne l'idéal maximal de* A. *Si l'antiinvolution sur* A *est triviale, on a aussi la suite exacte* (*où on pose* $\mathrm{W} = {}_{1}\mathrm{W}$)

$$ 0 \to \mathrm{W}(\mathrm{A}) \to \mathrm{W}(\mathrm{F}) \to \mathrm{W}(\mathrm{A}, \mathfrak{p}) \to 0, $$

où $\mathrm{W}(\mathrm{A}, \mathfrak{p}) \approx \mathrm{W}(\mathrm{A}/\mathfrak{p})$ *si la caractéristique de* $\mathrm{A}/\mathfrak{p}$ *est* $\neq 2$ (dans le cas contraire, *voir* l'appendice 1) ([1]).

Démonstration. — D'après ce qui précède et d'après le théorème 3.14 de [35], il suffit de démontrer que l'homomorphisme ${}_{\varepsilon}\mathrm{W}(\mathrm{F}) \to {}_{\varepsilon}\mathrm{W}(\mathrm{A}, \mathfrak{p})$ est surjectif. Soit donc M un élément de ${}_{\varepsilon}\mathrm{W}(\mathrm{A}, \mathfrak{p})$. En décomposant M en somme directe orthogonale de modules de torsion, on peut sans restreindre la généralité supposer que M est un $\mathrm{A}/\mathfrak{p}^n$-module libre de base (e_i), $i = 1, \ldots, r$ (en fait $r = 1$ ou 2 suffisent). Les formes quadratique et sesquilinéaire seront considérées dans A mod $\mathfrak{p}^{2n}$ (*cf.* l'appendice 1). Posons

$$ a_i = q(e_i) \qquad \text{et} \qquad a_{ij} = \varphi(e_i, e_j) $$

[noter que $\varphi(e_i, e_i) = q(e_i) + \bar{\varepsilon}\,\overline{q(e_i)}$, ce qui détermine $\varphi(e_i, e_i)$ en fonction de $q(e_i)$]. Soient maintenant $\tilde{a}_i$ et $\tilde{a}_{ij}$, $i > j$, des relèvements quelconques de a_i et a_{ij} dans l'anneau A grâce à la projection $\mathrm{A} \to \mathrm{A}/\mathfrak{p}^{2n}$. On posera

$$ \tilde{a}_{ij} = \varepsilon\,\overline{\tilde{a}}_{ji} \quad \text{pour } i < j \qquad \text{et} \qquad \tilde{a}_{ii} = \tilde{a}_i + \bar{\varepsilon}\,\overline{\tilde{a}}_i. $$

Soit θ_0 la matrice $n \times n$ à coefficients dans A définie par

$$ \theta_0 = \bar{\varepsilon} \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 & \tilde{a}_{12} & \ldots & \tilde{a}_{1n} \\ 0 & \tilde{a}_2 & \ldots & \tilde{a}_{2n} \\ 0 & \ldots & \ldots & \tilde{a}_n \end{pmatrix}. $$

Alors $\theta = \theta_0 + \bar{\varepsilon}\,{}^t\theta_0 = (\tilde{a}_{ij})$ définit un endomorphisme injectif de A^n (car θ est non dégénérée). En identifiant A^n à ${}^t\mathrm{A}^n$, on peut donc écrire la suite exacte

$$ 0 \to \mathrm{A}^n \xrightarrow{\alpha} {}^t\mathrm{A}^n \xrightarrow{\beta} \mathrm{M} \to 0. $$

([1]) Ce théorème est dû essentiellement à Springer [30].

De manière précise, si on choisit une uniformisante p de A, on peut écrire $\theta = up^n$ où u est une matrice inversible à coefficients dans A (car u est inversible mod p). On pose alors

$$\alpha = p^n \theta^{-1} p^n = \bar{p}^n u^{-1} \qquad \text{et} \qquad \beta = \text{réduction mod } \mathfrak{p}.$$

D'après le paragraphe 1, la forme quadratique sur M est définie par

$$q(\beta(m)) = \langle \theta_0(m), m \rangle \operatorname{mod} \mathfrak{p}^{2n}.$$

De même,

$$\varphi(\beta(m), \beta(m')) = \langle \theta(m), m' \rangle \operatorname{mod} \mathfrak{p}^{2n},$$

ce qu'on vérifie matriciellement en posant

$$\langle x, y \rangle = \sum \bar{x}_i y_i$$

pour x et $y \in A^n$. ■

Remarque. — D'après Bak et Bass [6], on a ${}_\varepsilon W(A) \approx {}_\varepsilon W(A/\mathfrak{p})$, du moins si $1/2 \in A$. En particulier, W (A/𝔭) est un W (A)-module libre de rang 1. Comme l'homomorphisme $W(F) \to W(A, \mathfrak{p})$ est de manière évidente un homomorphisme de W (A)-modules, on en déduit le corollaire suivant :

2.7. COROLLAIRE. — *Supposons que* A/𝔭 *soit de caractéristique* $\neq 2$. *Alors* W (F) *est un* W (A)-*module libre de rang* 2 *et de base les formes quadratiques* x^2 *et* px^2, p *étant une uniformisante quelconque de* A.

Considérons maintenant le cas où A/𝔭 est de caractéristique 2. Si $2 = 0$ dans A, A peut s'écrire $k[[x]]$ où $k = A/\mathfrak{p}$, l'uniformisante étant x. On a alors

$$F = k[x, x^{-1}] = \left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n x^n \right\},$$

où $a_n = 0$ pour $n \in \mathbf{Z}$ assez petit. Puisque F est de caractéristique 2, W (F) est un groupe de 2-torsion et la suite du théorème se scinde, soit $W(F) \approx \mathbf{Z}/2 \oplus W(A, \mathfrak{p})$ [*voir* l'appendice 1 pour le calcul de W (A, 𝔭) lorsque A/𝔭 est parfait].

Pour $2 \neq 0$ dans A, le problème du scindage de la suite semble assez délicat. Si $A = \mathbf{Z}_2$ par exemple, il résulte des calculs de l'appendice 1 que $W(\mathbf{Z}_2, 2)$ est engendré par $[F_0]$ et $[G]$ avec les relations $8[F_0] = 0$ et $2([G]-[F_0]) = 0$. Pour vérifier que la suite est scindée dans le cas $A = \mathbf{Z}_2$, il suffit donc de considérer les formes quadratiques $\tilde{F}_0 = \langle x^2 \rangle$ et $\tilde{G} = \langle 2x^2 \rangle$ et vérifier les relations ci-dessus pour $\tilde{F}_0$ et $\tilde{G}$, ce qui se fait de manière élémentaire en appliquant les techniques de l'appendice 1 par exemple et en remarquant que les nombres entiers 2-adiques de la forme $1+8\lambda$ admettent une racine carrée. On en déduit le résultat classique $W(\mathbf{Q}_2) \approx \mathbf{Z}/2 \oplus \mathbf{Z}/2 \oplus \mathbf{Z}/8$, les générateurs étant $[F_0]$, $[\tilde{G}]-[\tilde{F}_0]$ et la forme quadratique induite par $W(\mathbf{Z}_2)$, soit $H = \langle e_1, e_2 \rangle$ avec

$$q(e_1) = q(e_2) = \varphi(e_1, e_2) = 1.$$

Remarque. — Si A est un anneau de Dedeking muni d'une antiinvolution, on démontre de même que $W(A, S) \approx \bigoplus_{\mathfrak{p}} W(A, \mathfrak{p})$ où $\mathfrak{p}$ parcourt l'ensemble des idéaux maximaux invariants par l'involution et tels que $\mathfrak{p} \cap S \neq \varnothing$. En effet, si $\mathfrak{p}$ est un idéal maximal tel que $\overline{\mathfrak{p}} \neq \mathfrak{p}$, la catégorie des modules quadratiques sur $\mathcal{T}_{\mathfrak{p} \times \overline{\mathfrak{p}}}$ s'identifie à la catégorie des modules de $\mathfrak{p}^\infty$-torsion. Ceci permet d'écrire le théorème suivant :

2.8. THÉORÈME. — *Soit* A *un anneau de Dedekind avec* $1/2 \in A$ *et soit* $S \subset A - \{0\}$. *On a alors la suite exacte*

$$ {}_\varepsilon W(A) \to {}_\varepsilon W(A_S) \to {}_\varepsilon W(A, S) \to {}_\varepsilon W^1(A) \to {}_\varepsilon W^1(A_s) \to 0, $$

où ${}_\varepsilon W(A, S) \approx \bigoplus_{\mathfrak{p}} {}_\varepsilon W(A, \mathfrak{p})$, $\mathfrak{p}$ *parcourant l'ensemble des idéaux maximaux invariants par l'antiinvolution.*

Démonstration. — Commençons par considérer le cas où on remplace A par $\hat{A} = \varprojlim A/s$ et A_S par $\hat{A}_S$. Dans ce cas, $\hat{A} = \prod_{\mathfrak{p}} A_{\mathfrak{p}}$, $A_{\mathfrak{p}}$ étant le complété $\mathfrak{p}$-adique de A. D'après le théorème précédent appliqué à chacun des corps $F_{\mathfrak{p}}$, on a donc la suite exacte

$$ {}_\varepsilon W(\hat{A}) \to {}_\varepsilon W(\hat{A}_S) \to {}_\varepsilon W(\hat{A}, S) \to 0. $$

Montrons maintenant que ${}_\varepsilon W^1(\hat{A}) = 0$. En effet, d'après le théorème de périodicité ([15], [29]), on a une suite exacte (qui fait partie d'une suite exacte à 12 termes; *cf.* [14] et [15]) :

$$ {}_\varepsilon W(B) \to k(B) \to {}_{-\varepsilon}W_1(B) \to {}_\varepsilon W^1(B) \to k'(B) \to {}_{-\varepsilon}W'(B) \to {}_\varepsilon W(B) $$

pour tout anneau avec involution B tel que $1/2 \in B$. Si B est noethérien régulier (ce qui est le cas pour $B = A$ ou $\hat{A}$), on a

$$ {}_\varepsilon W^1(B) \approx {}_\varepsilon W'^1(B). $$

Dans cette suite le groupe $k(B)$ [resp. $k'(B)$] représente l'ensemble des éléments de $K(B)$ symétriques (resp. antisymétriques) vis-à-vis de l'involution induite par la dualité, modulo l'ensemble des éléments de la forme $x + \overline{x}$ (resp. $x - \overline{x}$). Si $B = \hat{A}$, on a $k'(B) = 0$ puisque B est principal. Par ailleurs, si F est un corps, il est bien connu (*cf.* [6], [13], [34] par exemple) que ${}_{-\varepsilon}W_1(F)$ est au plus le groupe $\mathbf{Z}/2$ de générateur la matrice

$$ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \overline{\varepsilon} & 0 \end{pmatrix}. $$

En fait, ${}_{-\varepsilon}W_1(F)$ est l'image de l'homomorphisme

$$ \mathbf{Z}/2 \approx k(F) \to {}_{-\varepsilon}W_1(F). $$

Donc

$$\operatorname{Coker}[k(A_{\mathfrak{p}}) \to {}_{-\varepsilon}W_1(A_{\mathfrak{p}})] \approx \operatorname{Coker}[k(A/\mathfrak{p}) \to {}_{-\varepsilon}W_1(A/\mathfrak{p})] = 0;$$

par suite

$$\operatorname{Coker}(k(\hat{A}) \to {}_{-\varepsilon}W_1(\hat{A})) \approx {}_{\varepsilon}W^1(\hat{A}) = 0.$$

On démontre de même que ${}_{\varepsilon}W^1(\hat{A}_S) = 0$.

Considérons maintenant la suite exacte de Mayer-Vietoris, construite dans [35] § 2 qui est associée au diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \to & \hat{A} \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_S & \to & \hat{A}_S \end{array}$$

$${}_{\varepsilon}L(A) \to {}_{\varepsilon}L(\hat{A}) \oplus {}_{\varepsilon}L(A_S) \to {}_{\varepsilon}L(\hat{A}_S) \to {}_{\varepsilon}L^1(A) \to {}_{\varepsilon}L^1(\hat{A}) \oplus {}_{\varepsilon}L^1(A_S).$$

En fait, on a

$${}_{\varepsilon}L^1(\hat{A}) = {}_{\varepsilon}L^1(\hat{A}_S) = 0$$

dans cette suite d'après ce qui précède. En comparant cette suite avec la suite analogue en K-théorie [où $K^1(A) = K^1(A) = K^1(A_S) = 0$], on obtient le diagramme

$$\begin{tikzcd}
0 & 0 & 0 & & & \\
{}_{\varepsilon}W(A) \arrow[r] \arrow[u] & {}_{\varepsilon}W(\hat{A}) \oplus {}_{\varepsilon}W(A_S) \arrow[r] \arrow[u] & {}_{\varepsilon}W(\hat{A}_S) \arrow[r] \arrow[u] & {}_{\varepsilon}W^1(A) \arrow[r, dashed] & {}_{\varepsilon}W^1(A_S) \arrow[r] & 0 \\
{}_{\varepsilon}L(A) \arrow[r] \arrow[u] & {}_{\varepsilon}L(\hat{A}) \oplus {}_{\varepsilon}L(A_S) \arrow[r] \arrow[u] & {}_{\varepsilon}L(\hat{A}_S) \arrow[r] \arrow[u] & {}_{\varepsilon}L^1(A) \arrow[r] \arrow[u, "\approx"'] & {}_{\varepsilon}L^1(A_S) \arrow[r] \arrow[u, "\approx"'] & 0 \\
K(A) \arrow[r] \arrow[u] & K(\hat{A}) \oplus K(A_S) \arrow[r] \arrow[u] & K(\hat{A}_S) \arrow[r] \arrow[u] & 0 & &
\end{tikzcd}$$

De ce diagramme, il résulte trivialement que la suite

$${}_{\varepsilon}W(\hat{A}) \oplus {}_{\varepsilon}W(A_S) \to {}_{\varepsilon}W(\hat{A}_S) \to {}_{\varepsilon}W^1(A) \to {}_{\varepsilon}W^1(A_S)$$

est exacte. Puisque $\operatorname{Coker}({}_{\varepsilon}W(\hat{A}) \to {}_{\varepsilon}W(\hat{A}_S)) \approx {}_{\varepsilon}W(A, S)$ d'après l'étude qui précède, on a la suite exacte

$${}_{\varepsilon}W(A_S) \to {}_{\varepsilon}W(A, S) \to {}_{\varepsilon}W^1(A) \to {}_{\varepsilon}W^1(A_S) \to 0,$$

ce qui achève la démonstration du théorème. ■

Exemple. — Si $A = \mathbf{R}[x, y]/(x^2+y^2-1)$ et si F est le corps des fractions de A, le conoyau de $W(F) \to W(A, S)$ est égal à $\mathbf{Z}$ d'après [21], p. 94. On a donc $W^1(A) \approx \mathbf{Z}$.

D'après [14] (*voir* aussi Gelfand et Mišcenko [10]), l'isomorphisme est obtenu en plongeant A dans l'anneau B des fonctions continues sur le cercle et en remarquant que le groupe W^1 de l'algèbre de Banach B est isomorphe à $K^1_{\mathbf{R}}(S^1) \approx \mathbf{Z}$.

2.9. THÉORÈME. — *Soit* A *un anneau de Dedekind muni de l'involution triviale tel que* $\tilde{K}(A)/2\tilde{K}(A) = 0$ (*par exemple* A *principal*) *et tel que* 2 *soit inversible dans* A. *On a alors la suite exacte*

$$0 \to W(A) \to W(A_S) \to W(A, S) \to {}_{-1}W_1(A) \to {}_{-1}W_1(A_S) \to 0.$$

Démonstration. — Avec les hypothèses faites, l'homomorphisme $W(A) \longrightarrow k(A)$ est surjectif. En effet, si $\mathfrak{p}$ est un idéal maximal tel que $\mathfrak{p} \approx {}^t\mathfrak{p}$, un isomorphisme quelconque de $\mathfrak{p}$ sur ${}^t\mathfrak{p}$ est nécessairement égal à son transposé puisque $\mathfrak{p}$ est de rang 1. De même l'homomorphisme $W(A_S) \longrightarrow k(A_S)$ est surjectif. D'après les calculs précédents, on a donc

$${}_1W^1(B) \approx {}_{-1}W_1(B)$$

pour $B = A$ ou A_S puisque

$$\tilde{K}(A)/2\tilde{K}(A) = \tilde{K}(A_S)/2\tilde{K}(A_S) = 0.$$

2.10. THÉORÈME. — *Soit* A *un anneau euclidien muni de l'involution triviale avec* $1/2 \in A$. *On a alors la suite exacte* (*cf.* [27]) :

$$0 \to W(A) \to W(A_S) \to W(A, S) \to 0.$$

Démonstration. — D'après un théorème général de Bak [1], le groupe ${}_{-1}W_1(A)$ est engendré par les matrices 2×2 du type

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Puisque ces matrices représentent des transformations orthogonales, a ou $b = 0$. Si $b = 0$, la classe de la matrice dans le groupe ${}_{-1}W_1(A)$ est nulle. Si $a = 0$, on se ramène au premier cas en multipliant par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent ${}_1W^1(A) = 0$, ce qui démontre le théorème. ■

En suivant le schéma tracé dans [21], on peut appliquer le théorème 2.10 pour classifier stablement les formes quadratiques sur $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{Q}$. En effet, en considérant tout d'abord $S = \{2^n\}$, on peut écrire la suite exacte (avec $\mathbf{Z}' = \mathbf{Z}_S = \mathbf{Z}[1/2]$) :

$$0 \to W(\mathbf{Z}) \to W(\mathbf{Z}') \to W(\mathbf{Z}, S) \to 0,$$

où $W(\mathbf{Z}, S) \approx \mathbf{Z}/8 \oplus \mathbf{Z}/2$ d'après l'appendice 1. Grâce au théorème de Hasse-Minkowski, il est facile de voir que les formes quadratiques $u = \langle x^2 \rangle$ et $v = \langle 2x^2 \rangle$ engendrent $W(\mathbf{Z}')$ et que $2(u-v) = 0$. Donc $W(\mathbf{Z}') \approx \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/2$ (le groupe $\mathbf{Z}/2$ étant détecté par le discriminant). L'homomorphisme $W(\mathbf{Z}') \longrightarrow W(\mathbf{Z}, S)$ est précisément la somme de l'identité sur le facteur $\mathbf{Z}/2$ et de la projection de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{Z}/8$. Donc $W(\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$ et est engendré par une forme quadratique dont l'image dans W (Z') est huit fois la forme quadratique $\langle x^2 \rangle$ (*cf.* [21] pour une description explicite de cette forme quadratique).

Pour calculer W (Q), on peut partir de la suite exacte

$$0 \to W(Z') \to W(Q) \to \bigoplus_{p \text{ impair premier}} W(Z/p) \to 0.$$

En fait, cette suite exacte est scindée. L'homomorphisme de W (Q) dans W (Z') $\approx$ Z $\oplus$ Z/2 inverse à gauche de l'homomorphisme W (Z') $\to$ W (Q) se définit ainsi. L'homomorphisme W (Q) $\to$ Z est la signature. Par ailleurs, si q est une forme quadratique rationnelle, on peut écrire :

$$\det q = \pm 2^{\nu_2(q)} 3^{\nu_3(q)} \dots$$

et l'élément $\nu_2(q)$ mod 2 définit le second invariant. En conclusion, on a donc

$$W(Q) \approx Z \oplus Z/2 \oplus (\bigoplus_{p \text{ premier impair}} W(Z/p)),$$

ce qui est compatible avec les calculs de [21] et [28].

Remarque. — Il est bien connu que la signature d'une forme quadratique non dégénérée sur Z est divisible par 8, résultat qu'on retrouve par la suite exacte précédente. En fait, notre méthode montre que la signature mod 8 d'une forme quadratique sur Q est déterminée par son image dans W (Z, S) et même W (Z, 2) $\simeq$ W (Z_2, 2). On retrouve ainsi un résultat récent de Durfee [9]. Cette signature mod 8 est en fait déterminée par une somme de Gauss (*cf.* quelques pages plus loin et l'appendice 4 de [21]).

2.11. THÉORÈME (comparer avec [20]). — *Soit* F *un corps commutatif de caractéristique* $\neq 2$. *On a alors la suite exacte scindée de* W (F)-*modules :*

$$0 \to W(F[x]) \to W(F(x)) \to \bigoplus_{\mathfrak{p}} W(F[x], \mathfrak{p}) \to 0,$$

où $\mathfrak{p}$ *parcourt l'ensemble des idéaux maximaux de* F [x].

Une démonstration de ce théorème ainsi qu'une interprétation de $\bigoplus_{\mathfrak{p}} W(F[x], \mathfrak{p})$ en termes d'endomorphismes auto-adjoints d'un espace vectoriel muni d'une forme quadratique non dégénérée est proposée dans l'appendice 2.

La philosophie générale de ce paragraphe sur les anneaux de Dedekind est que le calcul de ${}_{-\varepsilon}W_1(A)$ et de $k'(A) = \tilde{K}(A)/2\tilde{K}(A)$ permet de calculer le conoyau de ${}_{\varepsilon}W(A_S) \to {}_{\varepsilon}W(A, S)$ (comparer avec [21], p. 94). Réciproquement, on a les théorèmes 2.12 et 2.13 suivants :

2.12. THÉORÈME. — *Soit* A *un anneau de Dedekind avec* $1/2 \in A$ *muni de l'involution triviale. Alors l'homomorphisme* $k(A) \to W_1(A)$ *est un isomorphisme* [*noter que* $k(A) \approx Z/2 \oplus 2$ Torsion (K (A))]. (Un théorème analogue a été démontré par Bass [6].)

Démonstration. — Puisque $1/2 \in A$, le groupe ${}_1W(F_{\mathfrak{p}})$ est égal à zéro pour tout idéal maximal $\mathfrak{p}$. Donc

$${}_{-1}W(A, S) \approx \bigoplus_{\mathfrak{p}} {}_{-1}W(A, \mathfrak{p}) \approx \bigoplus_{\mathfrak{p}} [\text{Coker}[{}_{-1}W(A_{\mathfrak{p}}) \to {}_{-1}W(F_{\mathfrak{p}})] = 0.$$

Puisque ${}_{-1}W^1(F) = 0$ également, on a donc ${}_{-1}W^1(A) = 0$ d'après le théorème 2.8. Considérons maintenant un bout de la suite exacte des 12 :

$$ {}_{-1}W_0(A) \to k(A) \to {}_1W_1(A) \to {}_{-1}W^1(A). $$

Pour achever la démonstration du théorème, il suffit de montrer que l'homomorphisme ${}_{-1}W_0(A) \longrightarrow k(A)$ est réduit à 0 si 2 est inversible dans A. Mais ${}_{-1}W(A) \subset {}_{-1}W_0(F) = 0$ dans ce cas. ■

Si F est un corps de nombres et si 2 est inversible dans A, le conoyau de l'homomorphisme $W(F) \longrightarrow W(A, S)$ a été calculé avec précision dans [21], p. 94. On trouve le groupe fini $k'(A) = \tilde{K}(A)/2\tilde{K}(A)$. En comparant avec le théorème 2.8, on déduit le théorème suivant :

2.13. THÉORÈME. — *Soit* A *un anneau de Dedekind arithmétique* (*i. e. tel que* F *soit un corps de nombres*) *avec* 2 *inversible dans* A. *Alors le groupe*

$$ {}_{-1}L_1(A) = {}_{-1}W_1(A) = Sp(A)/[Sp(A), Sp(A)] $$

est nul. (Un théorème analogue a été démontré par Bak [1]; noter que $SK_1(A) = 0$ d'après [5].)

Démonstration. — On écrit la suite exacte

$$ {}_1W(A) \to k(A) \to {}_{-1}W_1(A) \to {}_1W^1(A) \overset{\approx}{\to} k'(A), $$

où on remarque que ${}_1W(A) \longrightarrow k(A)$ est surjectif. ■

Pour conclure cette série d'applications, montrons comment les considérations qui précèdent sont reliées aux sommes de Gauss étudiées dans [21], appendice 4, par exemple. Pour cela nous devons supposer que A/s est un groupe fini pour tout élément s de A (par exemple A est l'anneau des entiers algébriques d'un corps de nombres). Soit U le groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1 et soit

$$ \chi : \quad A_S/A \to U, $$

un homomorphisme de groupes tel que si N est un sous A-module fini non nul de A_S/A, on ait $\chi(N) \neq 1$. Des exemples sont donnés plus loin. Dans ce cas, on a

$$ \sum_{n \in N} \chi(n) = \sum_{u \in \chi(N)} \sum_{\chi(n) = u} \chi(n). $$

Puisque χ est un homomorphisme de groupes, le nombre de n tels que $\chi(n) = u$ est égal à 0 ou au nombre des n tels que $\chi(n) = 1$. Si on pose

$$ \rho = \operatorname{Card}(N \cap \chi^{-1}(1)), $$

la somme précédente est donc égale à $\rho \sum_{u \in G} u$ où G est le groupe fini $\chi(N)$. Puisque ce groupe est un sous-groupe fini de U distinct de 1, on a évidemment

$$ \rho \sum_{u \in G} u = 0. $$

Nous allons déduire de χ un homomorphisme de W (A, S) dans U. Si M est un A-module quadratique de S-torsion (ici $\varepsilon = 1$ et l'involution est triviale), on peut poser

$$s(\mathrm{M}) = \frac{1}{\sqrt{|\mathrm{M}|}} \sum_{m \in \mathrm{M}} \chi(q(m)),$$

où $q : \mathrm{M} \to \mathrm{A_S/A}$ est la forme quadratique donnée.

2.14. Théorème. — *La correspondance* $\mathrm{M} \to s(\mathrm{M})$ *induit un homomorphisme* (*noté encore* s) *de* W (A, S) *dans* U.

Démonstration. — Si M et M′ sont deux modules quadratiques, on a

$$\begin{aligned} s(\mathrm{M}\oplus\mathrm{M}') &= \frac{1}{\sqrt{|\mathrm{M}\oplus\mathrm{M}'|}} \sum_{(m, m') \in \mathrm{M}\times\mathrm{M}'} \chi(q(m)+q(m')) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{|\mathrm{M}|}} \sum_{m \in \mathrm{M}} \chi(q(m))\right)\left(\frac{1}{\sqrt{|\mathrm{M}'|}} \sum_{m' \in \mathrm{M}'} \chi(q'(m')) = s(\mathrm{M})\, s(\mathrm{M}')\right). \end{aligned}$$

Supposons maintenant que M soit presque hyperbolique. Il existe donc un sous-module lagrangien L de M qu'on peut insérer dans une suite exacte

$$0 \to \mathrm{L} \xrightarrow{i} \mathrm{M} \xrightarrow{j} \hat{\mathrm{L}} \to 0.$$

Choisissons une section ensembliste $j' : \hat{\mathrm{L}} \to \mathrm{M}$, soit $jj' = \mathrm{Id}$. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \sum_{m \in \mathrm{M}} \chi(q(m)) &= \sum_{\substack{x \in \mathrm{L} \\ y \in \hat{\mathrm{L}}}} \chi(q(i(x)+j'(y))) \\ &= \sum_{y \in \hat{\mathrm{L}}} \sum_{x \in \mathrm{L}} \chi(q(j'(y)))\, \chi(\varphi(i(x), j'(y))) \end{aligned}$$

(φ désignant la forme bilinéaire associée à q)

$$= \sum_{y \in \hat{\mathrm{L}}} \chi(q(j'(y))) \sum_{x \in \mathrm{L}} \chi(\varphi(i(x), j'(y))).$$

Si $y \neq 0$, l'expression $\sum_{x \in \mathrm{L}} \chi(\varphi(i(x), j'(y)))$ peut s'écrire $\sum_{x \in \mathrm{L}} \chi(f(x))$ où $f : \mathrm{L} \to \mathrm{A_S/A}$ est l'application A-linéaire non nulle définie par

$$f(x) = \varphi(i(x), j'(y)) = y(x)$$

(d'après la définition de j). Donc

$$\sum_{x \in \mathrm{L}} \chi(\varphi(i(x), j'(y))) = 0$$

puisque $\mathrm{Im} f$ est un sous-module non nul de $\mathrm{A_S/A}$. Par conséquent

$$\sum_{m \in \mathrm{M}} \chi(q(m)) = \sum_{x \in \mathrm{L}} \chi(\varphi(i(x), 0) = |\mathrm{L}| = \sqrt{|\mathrm{M}|}.$$

De cette discussion, il résulte donc que s définit un homomorphisme de W (A, S) dans $\mathbf{C}^*$. Si on calcule $s(\mathrm{M} \oplus \mathrm{M}^-)$ on trouve

$$\frac{1}{|\mathrm{M}|} \sum_{m \in \mathrm{M}} \chi(q(m)) \sum_{m \in \mathrm{M}} \chi(-q(m)) = s(\mathrm{M})\, \overline{s(\mathrm{M})},$$

qui doit être égal à 1 puisque $\mathrm{M} \oplus \mathrm{M}^-$ est presque hyperbolique. Donc s définit bien un homomorphisme de W (A, S) dans U.

Exemple 1. — Soit $\mathrm{A} = \mathbf{Z}$, $\mathrm{F} = \mathbf{Q}$. Alors l'exemple classique qui a d'ailleurs inspiré ce qui précède est celui où $\chi : \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \to \mathrm{U}$ est défini par $\chi(r) = e^{2i\pi r}$. Alors il est démontré dans [21] que l'homomorphisme composé $\mathrm{W}(\mathbf{Q}) \to \mathrm{W}(\mathbf{Z}, \mathrm{S}) \to \mathrm{U}$ est défini par $\mathrm{M} \mapsto e^{i\pi\sigma/4}$ où σ est la signature de la forme quadratique définie sur M (théorème de Milgram).

Exemple 2. — Soit F un corps de nombres et soit A l'anneau des entiers algébriques de F. Considérons des homomorphismes $f : \mathrm{F} \to \mathbf{Q}$ et $g : \mathrm{A} \to \mathbf{Z}$ tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{F} & \to & \mathbf{Q} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathrm{A} & \to & \mathbf{Z} \end{array}$$

soit commutatif. Alors $(x, y) \mapsto f(xy)$ est une forme bilinéaire symétrique sur le $\mathbf{Z}$-module libre A. Si on suppose que cette forme est non dégénérée, on en déduit un homomorphisme h de F/A dans $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ tel que $h(\mathrm{M}) \neq 0$ si M est un sous-module de F/A différent de 0. En composant cet homomorphisme avec l'homomorphisme de $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ dans U défini plus haut, on obtient bien un caractère $\chi : \mathrm{F}/\mathrm{A} \to \mathrm{U}$ avec les propriétés requises. En fait, dans cette situation, il est facile de voir qu'on peut définir un « homomorphisme de Gysin » $\mathrm{W}(\mathrm{A}, \mathrm{S}) \to \mathrm{W}(\mathbf{Z}, \mathrm{S}')$ où $\mathrm{S} = \mathrm{A} - \{0\}$ et $\mathrm{S}' = \mathbf{Z} - \{0\}$. L'homomorphisme $\mathrm{W}(\mathrm{A}, \mathrm{S}) \to \mathrm{U}$ est simplement l'homomorphisme composé $\mathrm{W}(\mathrm{A}, \mathrm{S}) \to \mathrm{W}(\mathbf{Z}, \mathrm{S}') \to \mathrm{U}$. On peut alors considérer le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{W}(\mathrm{F}) & \xrightarrow{\varphi} & \mathrm{W}(\mathrm{A}, \mathrm{S}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{W}(\mathbf{Q}) & \to & \mathrm{W}(\mathbf{Z}, \mathrm{S}') \end{array}$$

Si F n'a pas de places réelles par exemple, l'image de W (F) dans W (**Q**) est contenue dans la 2-torsion. Par conséquent, d'après le théorème de Milgram, l'homomorphisme composé $\mathrm{W}(\mathrm{F}) \xrightarrow{\varphi} \mathrm{W}(\mathrm{A}, \mathrm{S}) \to \mathrm{U}$ est nul, ce qui permet de définir un caractère $\operatorname{Coker} \varphi \to \mathrm{U}$. Il serait intéressant de l'expliciter en termes de classes d'idéaux de A.

3. Applications de la deuxième suite exacte d'une localisation à la L-théorie des polynômes laurentiens et à la L-théorie des sphères

Dans le paragraphe 3 de [35] nous avons calculé le groupe ${}_\varepsilon\mathrm{L}_1(\mathrm{A}[x, x^{-1}])$ du moins si 2 est inversible dans A. Nous nous proposons de calculer de même le groupe ${}_\varepsilon\mathrm{V}(\mathrm{A}[x, x^{-1}])$, cette fois-ci sans aucune hypothèse sur A. Des résultats analogues ont été obtenus indépendamment par A. Ranicki [25]. De manière précise, nous nous proposons de démontrer le théorème suivant :

3.1. THÉORÈME. — *On a la suite exacte*

$$0 \to {}_\varepsilon V(A) \to {}_\varepsilon V(A[x]) \oplus {}_\varepsilon V(A[x^{-1}]) \to {}_\varepsilon V(A[x, x^{-1}]) \to {}_\varepsilon L(A) \to 0.$$

L'énoncé de ce théorème est à rapprocher de celui d'un théorème analogue de Bass : on a une suite exacte

$$0 \to K_1(A) \to K_1(A[x]) \oplus K_1(A[x^{-1}]) \to K_1(A[x, x^{-1}]) \to K(A) \to 0.$$

En considérant l'anneau $A \times A^0$, on voit aisément que le théorème 3.1 est une généralisation du théorème de Bass. En fait, la méthode de démonstration va être sensiblement la même.

Considérons la catégorie ${}_\varepsilon\mathscr{L}\mathscr{N}\mathrm{il}(A)$ dont les objets sont les paires (E, ν_0) où E est un A-module projectif de type fini muni d'une forme ε-quadratique non dégénérée et où ν_0 est une classe d'endomorphismes de E (modulo les endomorphismes « symétriques gauches » $\mu - \mu^*$) tels que $\nu_0 + \nu_0^* = \nu$ soit nilpotent. Un morphisme $f : (E, \nu_0) \longrightarrow (E', \nu_0')$ dans cette catégorie est une isométrie $f : E \longrightarrow E'$ telle que la classe de ν_0 soit égale à celle de $f^* \nu_0' f$. Si ψ désigne la forme ε-hermitienne sur E, ν_0 détermine une forme ε-quadratique (dégénérée) sur E définie par

$$r(v) = \psi(v, \nu_0 v).$$

De même ν détermine une forme hermitienne associée à r qui est définie par la formule

$$\chi(v, v') = \psi(v, \nu v').$$

Dans le même esprit, la forme ε-quadratique sur E dont ψ est la forme hermitienne associée est définie par la formule

$$s(v) = \psi(v, \lambda_0 v)$$

où $\lambda_0 : E \to E$ est un certain morphisme tel que $\lambda_0 + \lambda_0^* = 1$.

Soit maintenant L un sous-module facteur direct de M. On dit qu'il est isotrope pour le couple (M, ν_0) s'il est isotrope pour les formes ψ, s, r, χ explicitées plus haut et si L est stable par ν. Dans ce cas, $H(L) = L \oplus {}^tL$ peut être considéré comme objet de ${}_\varepsilon\mathscr{L}\mathscr{N}\mathrm{il}(A)$ en choisissant comme nouvel endomorphisme ν_0 l'endomorphisme défini par la matrice

$$\nu_0' = \begin{pmatrix} \nu & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De même, le nouvel endomorphisme ν est défini par la matrice

$$\nu' = \begin{pmatrix} \nu & 0 \\ 0 & {}^t\nu \end{pmatrix}.$$

Les formes quadratique et hermitienne considérées sur M se « restreignent » alors à $L^\perp/L$ en sorte que $L^\perp/L$ peut être considéré comme un objet de ${}_\varepsilon\mathscr{L}\mathscr{N}\mathrm{il}(A)$ avec ν_0'' comme endomorphisme associé.

Si (E, ν_0) est un objet de ${}_\varepsilon\mathscr{L}\mathscr{N}\mathrm{il}\,(A)$, on peut définir une structure de $A[x]$-module de torsion sur E en posant $x\,v = \nu(v)$. Si on pose $\overline{M} = M \otimes_A A[x]$, on a une suite exacte

$$0 \to \overline{M} \xrightarrow{x-\nu} \overline{M} \xrightarrow{\beta} M \to 0,$$

avec $\beta(\sum a_p x^p) = \sum \nu^p(a_p)$. On voit alors que la structure de $A[x]$-module de M est induite par celle de $\overline{M}$, ce qui montre que M est de dimension homologique 1. En fait, on peut munir E d'une structure de $A[x]$-module *quadratique* de torsion en définissant des formes φ et q à valeurs dans $A[x, x^{-1}]/A[x]$ par les formules

$$\varphi(v, v') = x^{-1}\varphi_{-1}(v, v') + x^{-2}\varphi_{-2}(v, v') + \ldots,$$
$$q(v) = x^{-1}q_{-1}(v) + x^{-2}q_{-2}(v) + \ldots,$$

avec

$$\begin{array}{llll} \varphi_{-1}(v, v') = \psi(v, v'), & & \varphi_{-n-1}(v, v') = \psi(v, \nu^n v'), & \\ \varphi_{-2}(v, v') = \psi(v, \nu v'), & & & \\ q_{-1}(v) & = s(v) = \psi(v, \lambda_0 v), & q_{-2}(v) & = \psi(v, \nu_0 v), \\ q_{-3}(v) & = \psi(v, \nu\lambda_0 \nu v), & q_{-4}(v) & = \psi(v, \nu\nu_0\nu v), \\ q_{-2n-1}(v) & = \psi(v, \nu^n\lambda_0\nu^n v), & q_{-2n-2}(v) & = \psi(v, \nu^n\nu_0\nu^n v). \end{array}$$

On vérifie aisément que φ et q sont déterminées entièrement par φ_{-1}, q_{-1} et q_{-2}. Réciproquement, une forme ε-quadratique de torsion sur un $A[x]$-module E permet de construire un objet de ${}_\varepsilon\mathscr{L}\mathscr{N}\mathrm{il}\,(A)$ d'après ces formules. Les modules isotropes au sens précisé plus haut sont donc simplement des modules isotropes pour les formes φ et q.

Soit ${}_\varepsilon\mathrm{LNil}\,(A)$ le quotient du groupe libre engendré par les classes d'isomorphie d'objets (E, ν_0) de ${}_\varepsilon\mathscr{L}\mathscr{N}\mathrm{il}\,(A)$ par les relations

$$(E, \nu_0) + (E', \nu'_0) = (E \oplus E', \nu_0 \oplus \nu'_0),$$
$$(E, \nu_0) = (H(L), \nu'_0) + (L^\perp/L, \nu''_0)$$

si L est un sous-module isotrope de l'objet (E, ν_0) et où ν'_0 et ν''_0 sont les endomorphismes explicités plus haut.

3.2. Proposition. — *La correspondance explicitée plus haut définit un isomorphisme de* ${}_\varepsilon\mathrm{LNil}\,(A)$ *sur* ${}_\varepsilon L(A[x], S)$, S *étant le système multiplicatif* (x^n).

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate des définitions et de la proposition 3.10 de [35]. ■

Soit $g : E \to {}^tE$ l'isomorphisme de E sur son dual déduit de la forme ψ. On définit alors un morphisme γ de ${}_\varepsilon\mathrm{LNil}\,(A)$ dans ${}_\varepsilon V(A[x])$ en associant au couple (E, ν_0) la classe du triple $(E, g\lambda_0, g(\lambda_0 - \nu_0 x))$. D'après l'appendice 2 de [35], cet homomorphisme est bien défini.

3.3. Théorème. — *On a la suite exacte*

$$0 \to {}_\varepsilon L(A) \to {}_\varepsilon\mathrm{LNil}(A) \xrightarrow{\gamma} {}_\varepsilon V(A[x]) \to {}_\varepsilon V(A) \to 0.$$

Démonstration. — L'homomorphisme ${}_\varepsilon\mathrm{L}(\mathrm{A}) \to {}_\varepsilon\mathrm{LNil}(\mathrm{A})$ est évident : on associe à un objet E la classe du couple (E, 0). On a donc

$${}_\varepsilon\mathrm{LNil}(\mathrm{A}) = {}_\varepsilon\mathrm{L}(\mathrm{A}) \oplus {}_\varepsilon\widetilde{\mathrm{LNil}}(\mathrm{A}).$$

On a de même

$${}_\varepsilon\mathrm{V}(\mathrm{A}[x]) = {}_\varepsilon\mathrm{V}(\mathrm{A}) \oplus {}_\varepsilon\tilde{\mathrm{V}}(\mathrm{A}[x])$$

et il suffit donc de démontrer que γ induit un isomorphisme $\tilde{\gamma}$: ${}_\varepsilon\widetilde{\mathrm{LNil}}(\mathrm{A}) \approx {}_\varepsilon\tilde{\mathrm{V}}(\mathrm{A}[x])$.

(*a*) $\tilde{\gamma}$ *est surjectif.* — Soit $d(\mathrm{E}, g_1^0, g_2^0)$ un élément de ${}_\varepsilon\mathrm{V}(\mathrm{A}[x])$. Sans restreindre la généralité, on peut supposer que E provient d'un A-module hyperbolique (noté encore E) et que g_1^0 représente la forme quadratique canonique sur E. On peut donc écrire :

$$g_2^0 = g_1^0 + \alpha_1^0 x + \ldots + \alpha_n^0 x^n.$$

Considérons maintenant $\mathrm{F} = \mathrm{E} \oplus {}^t\mathrm{E}$ muni de la forme hyperbolique canonique $h : \mathrm{F} \to {}^t\mathrm{F}$ définie par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit $u : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ et $v : \mathrm{E} \to {}^t\mathrm{E}$. Dans l'ensemble des morphismes de $\mathrm{E} \oplus \mathrm{F}$ dans ${}^t\mathrm{E} \oplus {}^t\mathrm{F}$, soit de $\mathrm{E} \oplus \mathrm{E} \oplus {}^t\mathrm{E}$ dans ${}^t(\mathrm{E} \oplus \mathrm{E} \oplus {}^t\mathrm{E}) \approx {}^t\mathrm{E} \oplus {}^t\mathrm{E} \oplus \mathrm{E}$, on a l'identité

$$\begin{pmatrix} 1 & {}^tu & {}^tv \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_2^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u & 1 & 0 \\ v & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_2^0 + {}^tuv & 0 & {}^tu \\ v & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si $n > 1$, on peut choisir $u = x$ et $v = \alpha_n^0 x^{n-1}$, ce qui permet de réduire le degré de g_2^0 sans changer la classe de $d(\mathrm{E}, g_1^0, g_2^0)$. Par récurrence sur n, on se ramène ainsi au cas où $n = 1$, soit $g_2^0 = g_1^0 + \alpha_1^0 x$, donc $g_2 = g_1 + \alpha_1 x$. En posant $g = g_1$, $\lambda_0 = g^{-1} g_1^0$ et $\nu_0 = g^{-1}\alpha_1^0$, on a bien $\nu_0 + \nu_0^* = g^{-1}\alpha_1$ qui est nilpotent.

(*b*) $\tilde{\gamma}$ *est injectif.* — Définissons un homomorphisme de ${}_\varepsilon\tilde{\mathrm{V}}(\mathrm{A}[x])$ dans ${}_\varepsilon\widetilde{\mathrm{LNil}}(\mathrm{A})$ par composition des morphismes

$${}_\varepsilon\tilde{\mathrm{V}}(\mathrm{A}[x]) \approx {}_\varepsilon\tilde{\mathrm{V}}(\mathrm{A}[x^{-1}]) \to {}_\varepsilon\mathrm{V}(\mathrm{A}[x, x^{-1}]) \to {}_\varepsilon\mathrm{L}(\mathrm{A}[x], \mathrm{S}) \xrightarrow{\approx} {}_\varepsilon\mathrm{LNil}(\mathrm{A}) \to {}_\varepsilon\widetilde{\mathrm{LNil}}(\mathrm{A}).$$

Pour démontrer (*b*), donc le théorème, il suffit de vérifier que l'homomorphisme γ, composé par le morphisme de ${}_\varepsilon\tilde{\mathrm{V}}(\mathrm{A}[x])$ dans ${}_\varepsilon\widetilde{\mathrm{LNil}}(\mathrm{A})$, est l'identité de ${}_\varepsilon\widetilde{\mathrm{LNil}}(\mathrm{A})$. Soit donc (E, ν_0) un objet de ${}_\varepsilon\mathscr{L}\mathscr{N}\mathrm{il}(\mathrm{A})$. On a un isomorphisme $g : \mathrm{E} \to {}^t\mathrm{E}$ et des morphismes $\lambda_0, \nu_0 : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ avec les notations précédentes. Posons

$$\overline{\mathrm{E}} = \mathrm{E} \underset{\mathrm{A}}{\otimes} \mathrm{A}[x].$$

On a alors la suite exacte

$$0 \to \overline{\mathrm{E}} \xrightarrow{\alpha = g(x - \nu)} {}^t\overline{\mathrm{E}} \xrightarrow{\beta} \mathrm{E} \to 0,$$

où β est défini par la formule

$$\beta\left(\sum_{p=0}^{n} a_p x^p\right) = \sum_{p=0}^{n} \nu^p g^{-1}(a_p).$$

Posons

$$\alpha_0 = g(\lambda_0 x - \nu_0).$$

La forme quadratique de torsion sur E est induite par β et les formes sur ${}^t\overline{\mathrm{E}}$ déduites de $\alpha^{-1} = \theta$ et de $\theta_0 = \theta\alpha_0\theta = (1-\nu x^{-1})^{-1} x^{-1}(\lambda_0 x - \nu_0)(1-\nu x^{-1})^{-1} x^{-1} g^{-1}$. Par ailleurs l'homomorphisme β admet une section $\beta' : \mathrm{E} \to {}^t\overline{\mathrm{E}}$ définie par

$$\beta'(a) = g(a) + \mathrm{O}\,x + \mathrm{O}\,x^2 + \ldots$$

Si ψ désigne la forme ε-hermitienne initiale sur E, on a $\psi(a, b) = \langle a, gb \rangle$. D'après les formules du § 1 de [35], les formes φ et q sur le $\mathrm{A}[x]$-module de torsion E sont définies par les formules

$$\varphi(a, b) = \langle \theta\beta'(a), \beta'(b) \rangle = \langle (1-\nu x^{-1})^{-1} x^{-1} a, gb) \rangle = \langle x^{-1} a, gb \rangle + \ldots,$$

donc

$$\varphi_{-1}(a, b) = \psi(a, b).$$

Par ailleurs

$$q(a) = \langle \theta_0(\beta'(a)), \beta'(a) \rangle = \langle x^{-2}(1-\nu x^{-1})^{-1}(\lambda_0 x - \nu_0)(1-\nu x^{-1})^{-1} x, gx \rangle,$$

soit

$$q_{-1}(a) = \psi(\lambda_0 a, a) = \psi(a, \lambda_0 a)$$

et

$$q_{-2}(a) = \psi(\nu - \nu_0)\,a, a) = \psi(a, \nu_0 a) \bmod \mathrm{Im}(1 - \bar{\varepsilon}\mathrm{T}).$$

[Noter que $\nu\lambda_0 + \lambda_0\nu = \nu + (\nu\lambda_0 - \lambda_0^* \nu^*)$].

D'après ce calcul, si on compose les deux homomorphismes, on obtient la différence $(\mathrm{E}, \nu_0) - (\mathrm{E}, 0)$. La composition des deux homomorphismes est donc l'identité sur le groupe $\widetilde{\mathrm{LNil}}(\mathrm{A})$.

Le théorème 3.3 est démontré. ■

Remarque. — La démonstration de la surjectivité de $\tilde{\gamma}$ est essentiellement inspirée de [14] (théorème 1.1) où on démontre l'invariance homotopique du groupe ${}_\varepsilon\mathrm{W}'(\mathrm{A})$ (si 2 est inversible dans A).

Démonstration du théorème 3.1. — Posons

$${}_\varepsilon\hat{\mathrm{V}}(\mathrm{A}[x, x^{-1}]) = \mathrm{Ker}[{}_\varepsilon\mathrm{V}(\mathrm{A}[x, x^{-1}]) \to {}_\varepsilon\mathrm{LNil}(\mathrm{A}) \to {}_\varepsilon\mathrm{L}(\mathrm{A})].$$

D'après ce qui précède, on a une suite exacte scindée

$$0 \to {}_\varepsilon\mathrm{V}(\mathrm{A}[x]) \to {}_\varepsilon\hat{\mathrm{V}}(\mathrm{A}[x, x^{-1}]) \to {}_\varepsilon\widetilde{\mathrm{LNil}}(\mathrm{A}) \to 0.$$

On en déduit bien la suite exacte annoncée :

$$0 \to {}_{\varepsilon}\mathrm{V}(\mathrm{A}) \to {}_{\varepsilon}\mathrm{V}(\mathrm{A}[x]) \oplus {}_{\varepsilon}\mathrm{V}(\mathrm{A}[x^{-1}]) \to {}_{\varepsilon}\mathrm{V}(\mathrm{A}[x, x^{-1}]) \to {}_{\varepsilon}\mathrm{L}(\mathrm{A}) \to 0.$$

En effet l'homomorphisme ${}_{\varepsilon}\mathrm{V}(\mathrm{A}[x, x^{-1}]) \to {}_{\varepsilon}\mathrm{L}(\mathrm{A})$ admet aussi une section : on associe à l'objet E muni de la forme quadratique g^0 le triple $(\mathrm{E}, g_1^0, g_2^0)$ avec $g_1^0 = xg^0$ et $g_2^0 = g^0$. ■

Soit Nil (A) le groupe Nil de Bass [4] et soit

$$\widetilde{\mathrm{Nil}}(\mathrm{A}) = \mathrm{Ker}[\mathrm{Nil}(\mathrm{A}) \to \mathrm{K}(\mathrm{A})].$$

Le foncteur hyperbolique induit un homomorphisme Nil (A) $\to {}_{\varepsilon}\mathrm{LNil}(\mathrm{A})$ donc de $\widetilde{\mathrm{Nil}}(\mathrm{A})$ dans ${}_{\varepsilon}\widetilde{\mathrm{LNil}}(\mathrm{A})$.

3.4. PROPOSITION. — *Si* 2 *est inversible dans* A, *l'homomorphisme* $\widetilde{\mathrm{Nil}}(\mathrm{A}) \to {}_{\varepsilon}\widetilde{\mathrm{LNil}}(\mathrm{A})$ *est surjectif.*

Démonstration. — D'après ce qui précède, il suffit de vérifier la surjectivité du morphisme

$$\tilde{\mathrm{K}}_1(\mathrm{A}[x]) \to {}_{\varepsilon}\tilde{\mathrm{V}}(\mathrm{A}[x]),$$

où on pose

$$\tilde{\mathrm{K}}_1(\mathrm{A}[x]) = \mathrm{Ker}[\mathrm{K}_1(\mathrm{A}[x]) \to \mathrm{K}_1(\mathrm{A})].$$

Soit donc $d(\mathrm{E}, g_1, g_2)$ un élément de V (A $[x]$). Sans restreindre la généralité, on peut supposer que g_1 est une forme hyperbolique sur E et que g_2 peut s'écrire $g_1(1+\nu x)$ où ν est nilpotent auto-adjoint pour g_1. Il suffit de noter maintenant l'identité

$$g_1(1+\nu x) = (1+\nu x)^{1/2} g_1 (1+\nu x)^{1/2}$$

(*cf.* [13] [14]). ■

Remarque. — Compte tenu des diverses identifications, la proposition 3.4 n'est autre qu'une paraphrase de l'isomorphisme ${}_{\varepsilon}\mathrm{W}'(\mathrm{A}[x]) \approx {}_{\varepsilon}\mathrm{W}'(\mathrm{A})$ démontré dans [14] si 2 est inversible dans A.

3.5. COROLLAIRE. — *Si* A *est un anneau noethérien régulier tel que* 2 *soit inversible dans* A, *on a* ${}_{\varepsilon}\widetilde{\mathrm{LNil}}(\mathrm{A}) = 0$ *ainsi que la suite exacte scindée*

$$0 \to {}_{\varepsilon}\mathrm{V}(\mathrm{A}) \to {}_{\varepsilon}\mathrm{V}(\mathrm{A}[x, x^{-1}]) \to {}_{\varepsilon}\mathrm{L}(\mathrm{A}) \to 0.$$

Si 2 n'est pas inversible dans A, le calcul de ${}_{\varepsilon}\mathrm{LNil}(\mathrm{A})$ est difficile en général même si A est noethérien régulier. Considérons par exemple le cas où A est un corps parfait F de caractéristique 2. D'après l'appendice 1, on a

$$\mathrm{W}(\mathrm{F}[x], \mathrm{S}) \approx \mathbf{Z}/2 \oplus \mathrm{F} \oplus \mathrm{F} \oplus \ldots$$

si $\mathrm{S} = (x^n)$. Donc

$$\mathrm{L}(\mathrm{F}[x], \mathrm{S}) \approx \mathrm{LNil}(\mathrm{A}) \approx \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/2 \oplus \mathrm{F} \oplus \mathrm{F} \oplus \ldots$$

On en déduit

$$\widetilde{\mathrm{LNil}}(\mathrm{F}) \approx \operatorname{Coker} \tilde{\mathrm{K}}_1(\mathrm{F}[x]) \to \tilde{\mathrm{V}}(\mathrm{F}[x]) \approx \tilde{\mathrm{W}}'(\mathrm{F}[x]) \approx \tilde{\mathrm{W}}(\mathrm{F}[x]) \approx \mathrm{F} \oplus \mathrm{F} \oplus \ldots,$$

soit le théorème suivant :

3.6. Théorème. — *Soit* F *un corps parfait de caractéristique* 2. *Alors*

$$\mathrm{W}(\mathrm{F}[x]) \approx \mathrm{W}(\mathrm{F}) \oplus \mathrm{F} \oplus \mathrm{F} \oplus \ldots \approx \mathbf{Z}/2 \oplus \mathrm{F} \oplus \mathrm{F} \oplus \ldots$$

3.7. Corollaire. — *Soit* F *un corps parfait de caractéristique* 2. *On a alors la suite exacte scindée :*

$$0 \to \mathrm{W}(\mathrm{F}[x]) \to \mathrm{W}(\mathrm{F}[x, x^{-1}]) \to \mathrm{W}(\mathrm{F}[x], \mathrm{S}) \to 0,$$

avec

$$\mathrm{W}(\mathrm{F}[x], \mathrm{S}) \approx \mathrm{W}(\mathrm{F}[x]) \approx \mathbf{Z}/2 \oplus \mathrm{F} \oplus \mathrm{F} \oplus \ldots$$

3.8. Corollaire. — *Soit* F *un corps parfait de caractéristique* 2. *On a alors la suite exacte*

$$0 \to \mathrm{W}(\mathrm{F}[x]) \to \mathrm{W}(\mathrm{F}(x)) \to \bigoplus_{\mathfrak{p}} \mathrm{W}(\mathrm{F}[x], \mathfrak{p}),$$

où $\mathfrak{p}$ *parcourt l'ensemble des polynômes irréductibles normalisés de* F $[x]$ *et où*

$$\mathrm{W}(\mathrm{F}[x], \mathfrak{p}) \approx \mathbf{Z}/2 \oplus \mathrm{F}[x]/\mathfrak{p} \oplus \mathrm{F}[x]/\mathfrak{p} \oplus \ldots$$

Revenons au cas général d'un anneau A. On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \to & \mathrm{K}_1(\mathrm{A}) & \to & \mathrm{K}_1(\mathrm{A}[x]) \oplus \mathrm{K}_1(\mathrm{A}[x^{-1}]) & \to & \mathrm{K}_1(\mathrm{A}[x, x^{-1}]) & \to & \mathrm{K}(\mathrm{A}) & \to 0 \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
0 \to & {}_\varepsilon\mathrm{V}(\mathrm{A}) & \to & {}_\varepsilon\mathrm{V}(\mathrm{A}[x]) \oplus {}_\varepsilon\mathrm{V}(\mathrm{A}[x^{-1}]) & \to & {}_\varepsilon\mathrm{V}(\mathrm{A}[x, x^{-1}]) & \to & {}_\varepsilon\mathrm{L}(\mathrm{A}) & \to 0 \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
0 \to & {}_\varepsilon\mathrm{W}'(\mathrm{A}) & \to & {}_\varepsilon\mathrm{W}'(\mathrm{A}[x]) \oplus {}_\varepsilon\mathrm{W}'(\mathrm{A}[x^{-1}]) & \to & {}_\varepsilon\mathrm{W}'(\mathrm{A}[x, x^{-1}]) & \to & {}_\varepsilon\mathrm{W}(\mathrm{A}) & \to 0 \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
& 0 & & 0 & & 0 & & 0 &
\end{array}$$

Puisque les deux premières suites sont exactes et scindées en un sens évident, il en est de même de la troisième suite qui s'en déduit en prenant les conoyaux. Ceci est particulièrement intéressant lorsque 2 est inversible dans A car, dans ce cas,

$${}_\varepsilon\mathrm{W}'(\mathrm{A}) \approx {}_\varepsilon\mathrm{W}'(\mathrm{A}[x]) \approx {}_\varepsilon\mathrm{W}'(\mathrm{A}[x^{-1}]).$$

On en déduit le théorème suivant :

3.9. Théorème. — *Supposons que* 2 *soit inversible dans* A. *On a alors un isomorphisme naturel*

$${}_\varepsilon\mathrm{W}'(\mathrm{A}[x, x^{-1}]) \approx {}_\varepsilon\mathrm{W}'(\mathrm{A}) \oplus {}_\varepsilon\mathrm{W}(\mathrm{A}).$$

On peut préciser un peu plus l'énoncé de ce théorème. En effet, l'homomorphisme β de ${}_\varepsilon\mathrm{W}(\mathrm{A})$ dans ${}_\varepsilon\mathrm{W}'(\mathrm{A}[x, x^{-1}])$ inverse à droite de l'homomorphisme de ${}_\varepsilon\mathrm{W}'(\mathrm{A}[x, x^{-1}])$

dans ${}_{\varepsilon}\mathrm{W}(\mathrm{A})$ associe au module E muni de la forme ε-hermitienne $g : \mathrm{E} \to {}^{t}\mathrm{E}$ l'élément de ${}_{\varepsilon}\mathrm{W}'(\mathrm{A}[x, x^{-1}])$ défini par la différence $(\mathrm{E}, gx)-(\mathrm{E}, g)$ avec des notations évidentes. Par conséquent, β est un homomorphisme de « ${}_{\varepsilon}\mathrm{W}(\mathrm{A})$-modules » défini simplement par le cup-produit par l'élément de ${}_{1}\mathrm{W}(\mathbf{Z}'[x, x^{-1}])$ égal à $(\mathbf{Z}', x)-(\mathbf{Z}', 1)$ avec $\mathbf{Z}' = \mathbf{Z}[1/2]$. L'isomorphisme précédent est donc un isomorphisme de ${}_{\varepsilon}\mathrm{W}(\mathrm{A})$-modules [si A n'est pas commutatif, la notion de ${}_{\varepsilon}\mathrm{W}(\mathrm{A})$-module peut se préciser au moyen du cup-produit « externe » :

$$ {}_{\varepsilon}\mathrm{W}(\mathrm{A}) \times {}_{1}\mathrm{W}'(\mathbf{Z}'[x, x^{-1}]) \to {}_{\varepsilon}\mathrm{W}'(\mathrm{A}[x, x^{-1}])]. $$

3.10. COROLLAIRE. — *Supposons* 2 *inversible dans* A. *Alors* ${}_{\varepsilon}\mathrm{W}(\mathrm{A})$ *est un invariant d'homotopie de* A, *c'est-à-dire* ${}_{\varepsilon}\mathrm{W}(\mathrm{A}) \approx {}_{\varepsilon}\mathrm{W}(\mathrm{A}[x])$.

En effet, ${}_{\varepsilon}\mathrm{W}'(\mathrm{A})$ est un invariant d'homotopie de A, et il en est de même par conséquent du foncteur $\mathrm{A} \mapsto {}_{\varepsilon}\mathrm{W}'(\mathrm{A}[x, x^{-1}])$. Puisque ${}_{\varepsilon}\mathrm{W}(\mathrm{A})$ est un facteur direct naturel de ${}_{\varepsilon}\mathrm{W}'(\mathrm{A}[x, x^{-1}])$, ${}_{\varepsilon}\mathrm{W}(\mathrm{A})$ est aussi un invariant d'homotopie de A. ∎

D'après le théorème de périodicité de [15] et [29] le noyau de l'homomorphisme ${}_{\varepsilon}\mathrm{V}(\mathrm{B}) \to \mathrm{K}_1(\mathrm{B})$ s'identifie à ${}_{-\varepsilon}\mathrm{W}_2(\mathrm{B})$. Par des arguments semblables aux précédents, on en déduit la suite exacte

$$ 0 \to {}_{-\varepsilon}\mathrm{W}_2(\mathrm{A}) \to {}_{-\varepsilon}\mathrm{W}_2(\mathrm{A}[x]) \oplus {}_{-\varepsilon}\mathrm{W}_2(\mathrm{A}[x^{-1}]) \to {}_{-\varepsilon}\mathrm{W}_2(\mathrm{A}[x, x^{-1}]) \to {}_{\varepsilon}\mathrm{W}'(\mathrm{A}) \to 0. $$

En considérant la double suspension de A et en supposant de nouveau 2 inversible dans A, on en déduit un isomorphisme

$$ {}_{\varepsilon}\mathrm{W}(\mathrm{A}[x, x^{-1}]) \approx {}_{\varepsilon}\mathrm{W}(\mathrm{A}) \oplus {}_{-\varepsilon}\mathrm{W}'^{2}(\mathrm{A}). $$

En particulier, si A est noethérien régulier, on a

$$ {}_{-\varepsilon}\mathrm{W}'^{2}(\mathrm{A}) \approx {}_{\varepsilon}\mathrm{W}(\mathrm{A}). $$

D'après [14], on en déduit

$$ {}_{\varepsilon}\mathrm{W}(\mathrm{A}[x, x^{-1}]) \approx {}_{\varepsilon}\mathrm{W}(\mathrm{A}) \oplus {}_{\varepsilon}\mathrm{W}(\mathrm{A}), $$

isomorphisme qui peut d'ailleurs aussi se démontrer directement à partir du théorème 3.9 en utilisant le fait que

$$ \mathrm{K}(\mathrm{A}[x, x^{-1}]) \approx \mathrm{K}(\mathrm{A}). $$

En raisonnant par récurrence sur le nombre de variables, on en déduit le théorème suivant :

3.11. THÉORÈME. — *Soit* A *un anneau noethérien régulier tel que* 2 *soit inversible dans* A. *Posons*

$$ \mathrm{A}_n = \mathrm{A}[x_1, \ldots, x_n, x_1^{-1}, \ldots, x_n^{-1}]. $$

Alors le cup-produit naturel

$$ {}_{\varepsilon}\mathrm{W}(\mathrm{A}) \otimes {}_{1}\mathrm{W}(\mathbf{Z}'_n) \to {}_{\varepsilon}\mathrm{W}(\mathrm{A}_n), $$

est un isomorphisme. En particulier, si A *est commutatif,* $\mathrm{W}(\mathrm{A}_n)$ *est l'algèbre de dimension* 2^n *sur* $\mathrm{W}(\mathrm{A})$ *engendrée par des éléments* u_i *soumis aux relations* $u_i u_j = u_j u_i$ *et* $(u_i)^2 = 1$.

En effet, les éléments u_i sont simplement les classes des formes quadratiques $a \mapsto x_i a^2$.

Soit encore A un anneau noethérien régulier muni d'une involution et tel que 2 soit inversible dans A. On pose

$$\mathrm{A}_n = \mathrm{A}[x_1, \ldots, x_{n+1}]/\mathrm{I}_{n+1},$$

où I_{2p+1} est l'idéal engendré par $x_1 x_2 + \ldots + x_{2p-1} x_{2p} + (x_{2p+1})^2 - 1$ et où I_{2p} est l'idéal engendré par $x_1 x_2 + \ldots + x_{2p-1} x_{2p} - 1$.

Si on rend x_1 inversible dans A_n, l'anneau localisé A'_n s'identifie à $\mathrm{A}[x_1, x_3, x_4, \ldots, x_{n+1}, x_1^{-1}]$ (car on calcule x_2 à l'aide des autres variables). Donc

$${}_\varepsilon\mathrm{L}(\mathrm{A}'_n) \approx {}_\varepsilon\mathrm{L}(\mathrm{A}[x_1, x_1^{-1}]) \approx {}_\varepsilon\mathrm{U}^1(\mathrm{A})$$

et

$${}_\varepsilon\mathrm{L}_1(\mathrm{A}'_n) \approx {}_\varepsilon\mathrm{L}_1(\mathrm{A}[x_1, x_1^{-1}]) \approx {}_\varepsilon\mathrm{U}(\mathrm{A}).$$

La suite exacte d'une localisation devient donc

$${}_\varepsilon\mathrm{L}_1(\mathrm{A}_n) \to {}_\varepsilon\mathrm{L}_1(\mathrm{A}_1) \to {}_\varepsilon\mathrm{U}(\mathrm{A}_n, \mathrm{S}) \to {}_\varepsilon\mathrm{L}(\mathrm{A}_n) \to {}_\varepsilon\mathrm{L}(\mathrm{A}_1).$$

Pour calculer le groupe ${}_\varepsilon\mathrm{U}(\mathrm{A}_n, \mathrm{S})$ pour $n \geqq 2$, considérons l'homomorphisme

$$h: \quad \mathrm{A}_{n-2}[x_1, x_2]/(x_1)^r \to \mathrm{A}_n/(x_1)^r$$

défini par

$$h(x_1) = x_1, \qquad h(x_2) = x_2, \qquad h(x_p) = x_p/\sqrt{1 - x_1 x_2} \quad \text{pour } p \geqq 2.$$

Il est clair que h est un isomorphisme et que $\varprojlim_r \mathrm{A}_n/(x_1)^r$ s'identifie ainsi à $\mathrm{A}_{n-2}[x_2][[x_1]]$.

Le groupe ${}_\varepsilon\mathrm{U}(\mathrm{A}_n, \mathrm{S})$ s'identifie ainsi au groupe ${}_\varepsilon\mathrm{U}(\mathrm{B}_n, \mathrm{T})$ où $\mathrm{B}_n = \mathrm{A}_{n-2}[x_2][[x_1]]$ et où T est le système multiplicatif $(x_1)^r$ d'après le théorème 2.9 de [35].

D'après le même théorème et l'invariance homotopique des groupes U, L, etc., on a donc

$${}_\varepsilon\mathrm{U}(\mathrm{A}_n, \mathrm{S}) \approx {}_\varepsilon\mathrm{U}(\mathrm{A}_{n-2}),$$

ce qui permet d'écrire la suite exacte

$${}_\varepsilon\mathrm{L}_1(\mathrm{A}_n) \to {}_\varepsilon\mathrm{L}_1(\mathrm{A}_1) \to {}_\varepsilon\mathrm{U}(\mathrm{A}_{n-2}) \xrightarrow{\beta} {}_\varepsilon\mathrm{L}(\mathrm{A}_n) \to {}_\varepsilon\mathrm{L}(\mathrm{A}_1).$$

On peut comparer cette suite exacte à la suite obtenue en localisant $\mathrm{A}[x_1, \ldots, x_{n+1}]$ par rapport au même système $(x_1)^r$. On obtient alors la suite

$${}_\varepsilon\mathrm{L}_1(\mathrm{A}) \to {}_\varepsilon\mathrm{L}_1(\mathrm{A}_1) \to {}_\varepsilon\mathrm{U}(\mathrm{A}) \to {}_\varepsilon\mathrm{L}(\mathrm{A}) \hookrightarrow {}_\varepsilon\mathrm{L}(\mathrm{A}_1).$$

On en déduit aussitôt que β induit un isomorphisme entre

$${}_\varepsilon\tilde{\mathrm{U}}(\mathrm{A}_{n-2}) \approx \mathrm{Coker}[{}_\varepsilon\mathrm{U}(\mathrm{A}) \to \mathrm{U}(\mathrm{A}_{n-2})] \approx \mathrm{Ker}[{}_\varepsilon\mathrm{U}(\mathrm{A}_{n-2}) \to {}_\varepsilon\mathrm{U}(\mathrm{A})]$$

et

$${}_\varepsilon\tilde{\mathrm{L}}(\mathrm{A}_n) \approx \mathrm{Coker}[{}_\varepsilon\mathrm{L}(\mathrm{A}) \to {}_\varepsilon\mathrm{L}(\mathrm{A}_n)] \approx \mathrm{Ker}[{}_\varepsilon\mathrm{L}(\mathrm{A}_n) \to {}_\varepsilon\mathrm{L}(\mathrm{A})].$$

Ce raisonnement s'étend à la situation suivante. Soit F un foncteur L, K, V ou U. En remplaçant A par Σ A, on a alors la suite exacte

$$\mathrm{F}(\mathrm{A}_n) \to \mathrm{F}(\mathrm{A}_1) \to \check{\mathrm{F}}(\mathrm{A}_{n-2}[x_1, x_1^{-1}]) \to \mathrm{F}^1(\mathrm{A}_n) \to \mathrm{F}^1(\mathrm{A}_1),$$

où

$$\check{F}(A_{n-2}[x_1, x_1^{-1}]) = \mathrm{Coker}[F(A_{n-2}) \to F(A_{n-2}[x_1, x_1^{-1}])].$$

Comme précédemment, on en déduit un isomorphisme ${}_\varepsilon\tilde{L}(A_{n-2}) \approx {}_\varepsilon\tilde{V}^1(A_n)$ en appliquant ce qui précède au foncteur $F = {}_\varepsilon V$.

3.12. Théorème. — *On a des isomorphismes*

$$ {}_\varepsilon\tilde{L}(A_n) \approx {}_{-\varepsilon}\tilde{U}(A_{n+2}) \approx {}_{-\varepsilon}\tilde{L}(A_{n+4}) \approx {}_\varepsilon\tilde{L}(A_{n+8}),$$

$$ {}_\varepsilon\tilde{U}(A_n) \approx {}_{-\varepsilon}\tilde{U}(A_{n+4}) \approx {}_\varepsilon\tilde{U}(A_{n+8}).$$

En particulier, les groupes ${}_\varepsilon U(A_n)$ *et* ${}_\varepsilon L(A_n)$ *sont périodiques par rapport à n de période* 8 [*noter que les groupes* $K(A_n)$ *sont périodiques de période* 2].

Démonstration. — D'après le théorème de « périodicité » de [14], on a un isomorphisme

$$ {}_\varepsilon L(A_n) \approx {}_\varepsilon V^1(A_{n+2}) \approx {}_{-\varepsilon}U(A_{n+2}).$$

On en déduit évidemment le théorème en utilisant le deuxième isomorphisme

$$ {}_\varepsilon U(A_n) \approx {}_\varepsilon L(A_{n+2}). \quad \blacksquare$$

Si A est un corps k de caractéristique différente de 2, on peut calculer effectivement les groupes ${}_\varepsilon\tilde{L}(A_n)$ et ${}_\varepsilon\tilde{U}(A_n)$ pour $n = 0$, 1 et $\varepsilon = 1, -1$. Ceci permet de calculer ${}_\varepsilon\tilde{L}(A_n)$ et ${}_\varepsilon\tilde{U}(A_n)$ en fonction de $L(k) = {}_1L(k)$ et $W(k) = {}_1W(k)$ grâce au tableau suivant.

Tableau

n mod 8	${}_1\tilde{L}(A_n)$	${}_{-1}\tilde{L}(A_n)$	${}_1\tilde{U}(A_n)$	${}_{-1}\tilde{U}(A_n)$
0	$L(k)$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Z}/2$	0
1	$W(k)$	0	0	0
2	$\mathbf{Z}/2$	0	$\mathbf{Z}$	$L(k)$
3	0	0	0	$W(k)$
4	$\mathbf{Z}$	$L(k)$	0	$\mathbf{Z}/2$
5	0	$W(k)$	0	0
6	0	$\mathbf{Z}/2$	$L(k)$	$\mathbf{Z}$
7	0	0	$W(k)$	0

En particulier, si k est un corps algébriquement clos, on constate que les groupes ${}_1L(k_n)$ sont isomorphes aux groupes $K_{\mathbf{R}}(S^n)$ de la K-théorie topologique. Si k est le corps des nombres complexes, la sphère de k^{n+1} d'équation $(x_1)^2 + \ldots + (x_{n+1})^2 = 1$ a même type d'homotopie que la sphère compacte S^n. En utilisant les algèbres de Clifford, on peut constater que l'application naturelle ${}_1L(k_n) \to K_{\mathbf{R}}(S^n)$ est un isomorphisme [11].

Concluons ce paragraphe par une analogie topologique (qui peut d'ailleurs être largement développée dans l'esprit de [12]). Si A est l'anneau des fonctions continues à valeurs complexes sur un espace compact X, le groupe ${}_1L(A)$ [resp. ${}_1W(A)$, ${}_1W'(A)$] s'identifie à $K_{\mathbf{R}}(X)$ (resp. Coker $[K_{\mathbf{C}}(X) \to K_{\mathbf{R}}(X)]$, resp. Ker $[K_{\mathbf{R}}(X) \to K_{\mathbf{C}}(X)]$). L'analogue de l'anneau $A[x, x^{-1}]$ est l'anneau des fonctions continues sur $X \times S^1$ (poser $x = e^{i\theta}$). En poursuivant cette analogie, on devrait donc avoir comme analogue de l'isomorphisme

$$W'(A \mid x, x^{-1} \mid) \approx W'(A) \oplus W(A),$$

l'isomorphisme

$$\operatorname{Ker}[K_{\mathbf{R}}^{-1}(X) \to K_{\mathbf{C}}^{-1}(X)] \approx \operatorname{Coker}[K_{\mathbf{C}}(X) \to K_{\mathbf{R}}(X)].$$

Mais ceci résulte immédiatement de la suite exacte de Bott (*cf.* [11]) :

$$K_{\mathbf{C}}(X) \to K_{\mathbf{R}}(X) \to K_{\mathbf{R}}^{-1}(X) \to K_{\mathbf{C}}^{-1}(X).$$

Une autre manière de voir les choses est de considérer la suite exacte

$${}_1\tilde{L}_1(A[x, x^{-1}]) \to \tilde{K}_1(A[x, x^{-1}]) \to {}_1L(A) \to \tilde{L}(A[x, x^{-1}]) \to \tilde{K}(A[x, x^{-1}]),$$

où on pose

$$F(A[x, x^{-1}]) = \operatorname{Coker}(F(A) \to F(A[x, x^{-1}]));$$

$F = L, K$, etc., qui résulte de l'isomorphisme

$${}_\varepsilon\tilde{V}(A[x, x^{-1}]) \approx {}_\varepsilon\tilde{L}(A)$$

démontré plus haut si 2 est inversible dans A. L'analogue de cette suite est encore la suite exacte de Bott écrite ci-dessus.

APPENDICE 1

Calcul de $W(A, \mathfrak{p})$ lorsque $A/\mathfrak{p}$ est un corps parfait de caractéristique 2

Dans le calcul ci-dessous, nous allons supposer que A est un anneau principal local (ce qui ne restreint pas la généralité en passant au complété $\mathfrak{p}$-adique) d'idéal maximal $\mathfrak{p} = (p)$. Par conséquent, on peut écrire $(2) = \mathfrak{p}^s$ pour un certain s [on convient que $s = \infty$ si $(2) = 0$]. Nous n'obtiendrons des résultats complets que dans les cas extrêmes où $s = 1$ et $s = \infty$.

D'après les calculs du paragraphe 2, on peut écrire

$$W(A, \mathfrak{p}) = \bigcup_n W(A, \mathfrak{p}^{(n)}) \approx W(A, \mathfrak{p}^{(s+1)})$$

pour $n \geqq s+1$. Les éléments de $W(A, \mathfrak{p}^{(n)})$ s'explicitent comme des classes de modules de type fini sur $A/\mathfrak{p}^n$ munis de formes quadratiques $q : M \to A/\mathfrak{p}^{2n}$. De manière précise, cette fonction q doit satisfaire aux conditions suivantes :

1° $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$, $\lambda \in A/\mathfrak{p}^n$, $x \in M$;

2° La forme bilinéaire symétrique

$$(x, y) \mapsto \varphi(x, y) = q(x+y) - q(x) - q(y)$$

induit un isomorphisme de M sur

$$\hat{M} \approx \mathrm{Hom}(M, A/\mathfrak{p}^{2n}) \approx \mathrm{Hom}(M, A/\mathfrak{p}^{n}).$$

Notons que la fonction $\lambda \to \lambda^2$ peut être interprétée comme une fonction de $A/\mathfrak{p}^n$ dans $A/\mathfrak{p}^{2n}$, ce qui justifie la première relation et explique que q prenne ses valeurs dans $A/\mathfrak{p}^{2n}$ et non dans $A/\mathfrak{p}^r$ avec $r > 2n$. Si $n > s$, on a

$$2\, p^n q(x) = \varphi(p^n x, x) = 0;$$

donc q prend en fait ses valeurs dans $A/\mathfrak{p}^{n+s} \subset A/\mathfrak{p}^{2n}$. D'autre part, si M est un module libre et si (e_i) est une base de M, q est entièrement déterminée par les $q(e_i)$ et les

$$\varphi(e_i, e_j) = a_{ij}$$

pour $i < j$. En effet, il suffit de poser

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2\, q(e_i) + p \sum_{i<j} a_{ij} x_i x_j$$

pour $x = \sum x_i e_i$.

Puisque A est principal, tout module de type fini et de torsion M est somme directe de modules du type $A/\mathfrak{p}^n$. La forme bilinéaire sur M étant non dégénérée, on peut décomposer M en somme directe orthogonale de modules M_i où les M_i sont de la forme $A/\mathfrak{p}^n \oplus A/\mathfrak{p}^n$ avec $\varphi(e_1, e_2) = p^n \bmod p^{2n}$ ou de la forme $A/\mathfrak{p}^n$ avec $q(e_1) = \lambda_1 \bmod p^{2n}$ (les e_i étant des vecteurs de base des modules libres sur $A/\mathfrak{p}^n$ considérés). Si on suppose $s > n$, il faut même exclure l'éventualité où $M = A/\mathfrak{p}^n$ puisque

$$\varphi(e_1, e_1) = 2\lambda_1 = p^s \lambda_1 = 0 \bmod p^{n+1}.$$

Considérons maintenant un module de base e_1, e_2 (on écrira simplement $M = \langle e_1, e_2 \rangle$) avec

$$M = A/\mathfrak{p}^n \oplus A/\mathfrak{p}^n \qquad \text{et} \qquad \varphi(e_1, e_2) = p^n,$$
$$q(e_1) = a, \qquad q(e_2) = b \bmod p^{2n}.$$

Pour α et $\beta \in A/\mathfrak{p}^n$, on a

$$q(\alpha a + \beta b) = \alpha^2 a + \beta^2 b + \alpha\beta\, p^n.$$

Puisque $A/\mathfrak{p}$ est parfait, on peut choisir α et β premiers entre eux, en sorte que

$$q(\alpha e_1 + \beta e_2) = 0 \bmod p.$$

On peut ainsi supposer que $a \equiv 0 \bmod \mathfrak{p}$. Si $a \equiv 0 \bmod \mathfrak{p}^2$, le module $L^{\perp}/L$ avec $L = \{ \lambda p e_1, \lambda \in A/\mathfrak{p}^n \}$ appartient clairement à $W(A, \mathfrak{p}^{(n-1)})$. Si $a \not\equiv 0 \bmod \mathfrak{p}^2$, on peut supposer, par changement de coordonnées, que $a = p + p^2\lambda$ et $b = \mu$. On notera $M_{\lambda,\mu}$ le module quadratique ainsi obtenu.

LEMME. — *Si* $s \geqq 2n$, *on a* $M_{\lambda,\mu} + M_{\lambda',\mu} = 0 \bmod W(A, \mathfrak{p}^{n-1})$. *En particulier* $M_{\lambda,\mu}$ *est indépendant de* $\lambda \bmod W(A, \mathfrak{p}^{(n-1)})$ [*on convient que* $W(A, \mathfrak{p}^{(0)}) = W(A/\mathfrak{p})$].

Démonstration. — Soit

$$M_{\lambda,\mu} = \langle e_1, e_2 \rangle, \qquad M_{\lambda',\mu} = \langle e_3, e_4 \rangle,$$

avec

$$q(e_1) = p + p^2\lambda, \qquad q(e_2) = \mu, \qquad q(e_3) = p + p^2\lambda', \qquad q(e_4) = \mu$$

et

$$\varphi(e_1, e_2) = \varphi(e_3, e_4) = p^n \bmod p^{2n}.$$

Soit L le sous-module engendré par $e_2 + e_4$. On a alors

$$q(e_2 + e_4) = 2\mu = p^{s}\mu = 0$$

puisque $s \geqq 2n$. De plus $L^{\perp}/L$ est un $A/\mathfrak{p}^n$-module libre de base $f_1 = e_2$ et $f_2 = e_1 + e_3$ avec

$$q(f_1) = \mu, \qquad q(f_2) = p^2(\lambda + \lambda') \qquad \text{et} \qquad \varphi(f_1, f_2) = p^n.$$

Si $L' = \{p^{n-1} f_2\}$, on a encore $L' \subset L'^{\perp}$ et $L'^{\perp}/L'$ est un $A/\mathfrak{p}^{n-1}$-module libre de base $g_1 = p f_1$ et $g_2 = f_2$ avec

$$q(g_1) = p^2 \mu \bmod p^{2n} = \mu \bmod p^{2(n-1)},$$
$$q(g_2) = \lambda + \lambda' \bmod p^{2(n-1)},$$
$$\varphi(g_1, g_2) = p^{n-1} \bmod p^{2(n-1)}.$$

Si $n = 1$, on modifie l'argument de manière évidente. Le lemme est démontré. ∎

Remarque. — Cette démonstration permet de montrer en même temps que $M_{\lambda,\mu} + M_{\lambda,\mu} = 0$ dans $W(A, \mathfrak{p}^{(n)})$ si $s \geqq 2n$. Donc $W(A, \mathfrak{p}^{(n)})$ est un groupe de 2-torsion si $n \leqq s/2$.

THÉORÈME. — *Si $s \geqq 2n$, on a*

$$W(A, \mathfrak{p}^{(n)})/W(A, \mathfrak{p}^{(n-1)}) \approx A/\mathfrak{p}$$

ainsi qu'un scindage naturel

$$W(A, \mathfrak{p}^{(n)}) \approx \mathbf{Z}/2 \oplus \Big(\bigoplus_{1 \leqq r \leqq n} W(A, \mathfrak{p}^{(r)})/W(A, \mathfrak{p}^{(r-1)})\Big) = \mathbf{Z}/2 \oplus (A/\mathfrak{p})^n.$$

En particulier, si $2 = 0$ *dans* A, *on a*

$$W(A, \mathfrak{p}) \approx \mathbf{Z}/2 \oplus \Big(\bigoplus_{n=1}^{\infty} A/\mathfrak{p}\Big).$$

Démonstration. — D'après le lemme précédent, on a

$$M_{\lambda,\mu} = M_{0,\mu} \bmod W(A, \mathfrak{p}^{(n-1)})$$

et

$$M_{\lambda,\mu} + M_{\lambda',\mu'} = M_{0,\mu} + M_{0,\mu'} \bmod W(A, \mathfrak{p}^{(n-1)}).$$

Soient

$$M_{0,\mu} = \langle e_1, e_2 \rangle \qquad \text{et} \qquad M_{0,\mu'} = \langle e_3, e_4 \rangle,$$

avec

$$q(e_1) = p, \qquad q(e_2) = \mu, \qquad \varphi(e_1, e_2) = p^n,$$
$$q(e_3) = p, \qquad q(e_4) = \mu', \qquad \varphi(e_3, e_4) = p^n.$$

Alors $q(e_1 + e_3) = 2p = 0$. Si $L = \{ e_1 + e_3 \}$, $L^{\perp}/L$ est un $A/\mathfrak{p}^n$-module libre de base $f_1 = e_1$ et $f_2 = e_2 + e_4$ avec

$$q(f_1) = p, \qquad q(f_2) = \mu + \mu' \qquad \text{et} \qquad \varphi(f_1, f_2) = p^n.$$

Ainsi la correspondance $\mu \to M_{0,\mu}$ définit un homomorphisme surjectif de $A/\mathfrak{p}^{2n}$ dans $W(A, \mathfrak{p}^{(n)})/W(A, \mathfrak{p}^{(n-1)})$ dont on va maintenant calculer le noyau. Si $\mu = p\,\mu'$, on peut trouver α et β pour que $q(\alpha e_1 + \beta e_2) = 0 \bmod p^2$. En considérant $L^{\perp}/L$ avec $L = \{ \alpha e_1 + \beta e_2 \}$, on voit que M appartient à $W(A, \mathfrak{p}^{(n-1)})$. Réciproquement, montrons que $M_{0,\mu} \notin W(A, \mathfrak{p}^{(n-1)})$ si $\mu \neq 0 \bmod p$. En effet, dans le cas contraire, il existerait un module P de $\mathfrak{p}^{n-1}$-torsion au plus tel que $G = M_{0,\mu} \oplus P$ soit presque hyperbolique. Soit donc L un lagrangien de G. Puisque $M_{0,\mu}$ ne contient pas de vecteurs isotropes $\neq 0$, les éléments de L doivent s'écrire sous la forme $px + y$ où $x \in M_{0,\mu}$ et $y \in P$. Pour $z \in M_{0,\mu}$, $p^{n-1} z$ est donc orthogonal à L et par suite appartient à $L^{\perp} = L$. Si $z \neq 0 \bmod p$, on obtient ainsi une contradiction. On a bien démontré que

$$A/\mathfrak{p} \approx W(A/\mathfrak{p}^{(n)})/W(A, \mathfrak{p}^{(n-1)}).$$

Si $n = 1$, on modifie l'argument de manière évidente. On obtient ainsi une suite

$$A/\mathfrak{p}^{2n} \xrightarrow{u} W(A, \mathfrak{p}^{(n)}) \xrightarrow{v} A/\mathfrak{p},$$

où l'homomorphisme composé est la réduction mod $\mathfrak{p}$. Pour achever la démonstration du théorème, il suffit de trouver une flèche $A/\mathfrak{p} \xrightarrow{w} A/\mathfrak{p}^{2n}$ avec $s \geqq 2n$ telle que $uvw = \mathrm{Id}$. Soit

$$t: \quad A/\mathfrak{p} \to A/\mathfrak{p}^{2n}$$

l'homomorphisme composé

$$A/\mathfrak{p} \xrightarrow{t_1} A/\mathfrak{p} \xrightarrow{t_2} A/\mathfrak{p}^{2n},$$

où t_1 et t_2 sont définis par les formules

$$t_1(x) = \sqrt[r]{x}, \qquad t_2(y) = y^r \quad (\bmod\ \mathfrak{p}^{2n}),$$

où r est de la forme 2^{α} avec $2^{\alpha} \geqq 2n$. Il est clair que c'est l'homomorphisme cherché. Puisque $W(A/\mathfrak{p}) = \mathbf{Z}/2$ [21], le théorème est démontré. ■

Envisageons maintenant l'autre cas extrême où $p = 2$ (soit $s = 1$). La méthode précédente ne convient pas alors puisque $s < 2n$ pour tout entier n.

LEMME. — *On a un isomorphisme* $W(A, \mathfrak{p}^{(2)})/W(A, \mathfrak{p}^{(1)}) \approx \mathbf{Z}/2$.

Démonstration. — Comme il a été dit au début, tout module quadratique est somme directe orthogonale de modules du type

$$M = A/\mathfrak{p}^n \oplus A/\mathfrak{p}^n$$

où $M = A/\mathfrak{p}^n$. Montrons d'abord que les modules du premier type (avec $n = 2$) ont leur classe dans le sous-groupe $W(A, \mathfrak{p}^{(1)})$. En effet, on a pour tout $x \in M$,

$$p^3 q(x) = pq(px) = \varphi(px, px) = \varphi(p^2 x, x) = 0.$$

Donc M est de la forme $\langle e_1, e_2 \rangle$ avec

$$q(e_1) = p, \qquad q(e_2) = p\lambda, \qquad \varphi(e_1, e_2) = p^2 \bmod p^4.$$

Par conséquent, il existe α et β premiers entre eux tels que $q(\alpha e_1 + \beta e_2) = 0 \bmod p^2$. En considérant $L^{\perp}/L$ avec $L = \{\alpha e_1 + \beta e_2\}$, on voit ainsi que la classe de M appartient à $W(A, \mathfrak{p}^{(1)})$. Soit maintenant $M = \langle e_1 \rangle$ avec $q(e_1) = p \bmod p^4$, soit

$$\varphi(e_1, e_1) = p^2 \bmod p^4.$$

Alors $M \notin W(A, \mathfrak{p}^{(1)})$. En effet, s'il existait un module de $\mathfrak{p}$-torsion tel que $M \oplus P$ soit presque hyperbolique, M devrait contenir des vecteurs isotropes non nuls d'après l'argument utilisé à la fin de la démonstration du théorème précédent. Si N est un autre module de la forme $A/\mathfrak{p}^2$, on a $[M \oplus N] \in W(A, \mathfrak{p}^{(1)})$ d'après ce qui précède. Par suite $W(A, \mathfrak{p}^{(2)})/W(A, \mathfrak{p}^{(1)}) \approx \mathbf{Z}/2$. Nous montrerons plus loin que $\mathbf{Z}/2$ est en fait facteur direct dans $W(A, \mathfrak{p}^{(2)}) \approx W(A, \mathfrak{p})$.

THÉORÈME. — *Si* $2 = \mathfrak{p}$, *on a une suite exacte*

$$0 \to A/\mathfrak{p} \to W(A, \mathfrak{p}^{(1)})/W(A, \mathfrak{p}^{(0)}) \xrightarrow{r} \mathbf{Z}/2 \to 0$$

[rappelons que $W(A, \mathfrak{p}^{(0)}) \approx W(A/\mathfrak{p}) \approx \mathbf{Z}/2$].

Démonstration. — Les modules dont les classes engendrent $W(A, \mathfrak{p}^{(1)})$ sont maintenant des espaces vectoriels de dimension finie sur $A/\mathfrak{p}$ et ils ont donc un rang mod 2 bien défini. Si M est un module quadratique « classique » [i. e. si $M \in W(A, \mathfrak{p}^{(0)})$] son rang est pair, ce qui permet de définit r. L'homomorphisme r est surjectif, comme on le voit en considérant le module $\langle e_1 \rangle$ avec $q(e_1) = 1 \bmod p^2$. Par ailleurs, on peut définir un homomorphisme de $A/\mathfrak{p}^2$ dans $W(A, \mathfrak{p}^{(1)})$ par la formule

$$\lambda \mapsto E_\lambda = M_{0,\lambda},$$

soit $q(e_1) = p$, $q(e_2) = \lambda$ et $\varphi(e_1, e_2) = p \bmod p^2$; cet homomorphisme induit un isomorphisme de $(A/\mathfrak{p}^2)/\mathfrak{p}(A/\mathfrak{p}^2) \approx A/\mathfrak{p}$ sur $W(A, \mathfrak{p}^{(1)})/W(A, \mathfrak{p}^{(0)})$.

LEMME. — *Soit* $\lambda \in A/\mathfrak{p}$ *et soit* F_λ *le module de rang un* $\langle e_1 \rangle$ *défini par*

$$q(e_1) = 1 + p\lambda^2 \bmod p^2.$$

On a alors la formule

$$F_\lambda + F_\mu = E_{-\lambda^2 - \mu^2 + 1}.$$

Démonstration. — Nous allons d'abord démontrer la formule dans le cas $\mu = 1$. Dans ce cas,

$$F_\lambda \oplus F_1 = \langle e_1, e_2 \rangle$$

avec

$$q(e_1) = 1 + 2\lambda^2, \qquad q(e_2) = -1 \qquad \text{et} \qquad \varphi(e_1, e_2) = 0.$$

Soit $f_1 = e_1 + e_2$ et $f_2 = e_2$. On a alors

$$q(f_1) = 2\lambda^2 = -2\lambda^2, \qquad q(f_2) = -1 \qquad \text{et} \qquad \varphi(f_1, f_2) = -2 = 2.$$

Si $\lambda = 0$, on a bien $F_\lambda \oplus F_1 = E_0$. Si $\lambda \neq 0$, on peut considérer f_1/λ et λf_2 pour en déduire $F_\lambda + F_1 = E_{-\lambda^2}$. En particulier $F_1 + F_1 = E_{-1}$. Si λ et μ sont maintenant quelconques, on écrit

$$F_\lambda + F_1 = E_{-\lambda^2} \qquad \text{et} \qquad F_\lambda + F_1 = E_{-\lambda^2},$$

d'où, en additionnant,

$$F_\lambda + F_\mu + E_{-1} = E_{-\lambda^2} + E_{-\mu^2},$$

soit

$$F_\lambda + F_\mu = E_{-\lambda^2 - \mu^2 + 1}. \quad \blacksquare$$

COROLLAIRE. — *On a une décomposition en somme directe*

$$W(A, \mathfrak{p}) \approx W(A, \mathfrak{p}^{(1)}) \oplus \mathbf{Z}/2.$$

Démonstration. — Soit G le module $A/\mathfrak{p}^2$ avec la forme quadratique q définie par $q(e_1) = 1 \bmod p^3$. On vérifie alors aisément que $[G \oplus G] = [E_1]$. Donc $[G] - [F_0]$ est d'ordre 2 dans le groupe $W(A, \mathfrak{p})$, ce qui démontre le scindage de la suite

$$0 \to W(A, \mathfrak{p}^{(1)}) \to W(A, \mathfrak{p}) \to \mathbf{Z}/2 \to 0. \quad \blacksquare$$

COROLLAIRE. — *Le groupe* $W(\mathbf{Z}, 2)$ *est isomorphe à* $\mathbf{Z}/8 \oplus \mathbf{Z}/2$. *Plus généralement, si* $A/\mathfrak{p}$ *est fini, si* $p = 2$, *le groupe* $W(A, \mathfrak{p})$ *est la somme directe de* $\mathbf{Z}/8 \oplus \mathbf{Z}/2$ *et d'un groupe de* 4-*torsion au plus et de cardinal* 2^{n-1} *où* 2^n *est le cardinal de* $A/\mathfrak{p}$.

Puisque $W(A, \mathfrak{p})$ est un groupe de 8-torsion au plus d'après le théorème et le lemme précédents, $\mathbf{Z}/8$ est bien un facteur direct de $W(A, \mathfrak{p}^{(1)})$. Soit $\rho : W(A, \mathfrak{p}^{(1)}) \to \mathbf{Z}/8$ une application surjective quelconque. Alors $\rho[F_\lambda] = 1 \bmod 2$ car, pour un certain μ, $\rho([F_\lambda] - [F_0]) = \rho([F_\mu])$ est un élément d'ordre 4 de $\mathbf{Z}/8$. Par conséquent, l'homomorphisme composé $W(A, \mathfrak{p}^{(1)}) \to \mathbf{Z}/8 \to \mathbf{Z}/2$ coïncide essentiellement avec r et le noyau de ρ est donc un groupe de 4-torsion au plus. $\blacksquare$

Remarque. — Le calcul de ${}_{-1}W(A, \mathfrak{p})$ n'est pas intéressant en général. En effet, si $2 = 0$ dans A, on a

$${}_{-1}W(A, \mathfrak{p}) = {}_{1}W(A, \mathfrak{p}).$$

Si $2 \neq 0$ dans A, on a ${}_{-1}W(A, \mathfrak{p}) = 0$ d'après le théorème 2.5 ($F_\mathfrak{p}$ étant un corps de caractéristique $\neq 2$).

Terminons cet appendice par une parenthèse sur la possibilité de mettre une structure multiplicative sur les groupes $L(A, \mathfrak{p}^{(1)})$ et $W(A, \mathfrak{p}^{(1)})$ lorsque $2 = \mathfrak{p}$ (le corps $A/\mathfrak{p}$ n'étant plus nécessairement parfait). Si E_1 et E_2 sont deux modules de $\mathfrak{p}$-torsion munis des formes quadratiques q_1 et q_2 et si φ_1 et φ_2 sont les formes bilinéaires associées, on peut mettre une structure de module quadratique sur $E_1 \oplus E_2$ en posant

$$q\Big(\sum_i x_i \otimes y_i\Big) = \sum_i q_1(x_i)\, q_2(y_i) + \sum_{i<j} \frac{\varphi_1(x_i, x_j)\, \varphi_2(y_i, y_j)}{2}$$

(pour justifier la division par 2, il convient de considérer q_i et φ_i comme des fonctions à valeurs dans A mod 4).

Un calcul simple montre que

$$q((x+y)\otimes z - x\otimes z - y\otimes z)$$

est bien égal à 0 et que

$$q(u+v) = q(u)+q(v)+\varphi(u, v),$$

où φ est la forme bilinéaire définie par

$$\varphi(x_1\otimes y_1, x_2\otimes y_2) = \frac{\varphi_1(x_1, x_2)\,\varphi_2(y_1, y_2)}{2}.$$

Il en résulte que q est bien définie par la formule précédente.

Donc $L(A, \mathfrak{p}^{(1)})$ est un anneau commutatif avec F_0 comme élément unité. Si L_1 est un sous-module lagrangien de M_1, on vérifie aisément que $L_1 \otimes M_2$ est un sous-module lagrangien de $M_1 \otimes M_2$. Donc la structure d'anneau de $L(A, \mathfrak{p})$ passe au quotient et permet de munir aussi $W(A, \mathfrak{p})$ d'une structure d'anneau avec élément unité.

Supposons maintenant que $A/\mathfrak{p}$ soit un corps parfait. La structure d'anneau de $W(A, \mathfrak{p}^{(1)})$ peut être entièrement déterminée par les formules suivantes qu'on vérifie aisément :

$$F_\lambda \otimes F_\mu = F_{\lambda+\mu}, \qquad F_\lambda \otimes E_\mu = E_{(1+2\lambda^2)\mu}, \qquad E_\lambda \otimes E_\mu = E_{p\lambda\mu}.$$

Puisque tout élément de $W(A, \mathfrak{p}^{(1)})$ peut s'écrire E_λ ou F_0+E_λ, la structure multiplicative est entièrement déterminée par celle sur les E_λ, compte tenu de la relation $F_0 \oplus F_0 = E_1$. De manière plus précise, soit $g : W(A, \mathfrak{p}^{(1)}) \to A/\mathfrak{p}^2$ l'application définie par $g(E_\lambda) = 2\lambda$ et $g(F_0) = 1$. Il est clair que g induit une application surjective de $W(A, \mathfrak{p}^{(1)})$ sur le sous-anneau de $A/\mathfrak{p}^2$ engendré par 1 et $\mathfrak{p}\, A/\mathfrak{p}^2$. Son noyau est l'idéal $W(A/\mathfrak{p})$ avec la structure d'anneau triviale. En particulier, si $A = \mathbf{Z}$ et $\mathfrak{p} = (2)$, $W(A, \mathfrak{p}^{(1)})$ n'est autre que $\mathbf{Z}/8$ muni de sa structure d'anneau usuelle.

APPENDICE 2

Endomorphismes auto-adjoints d'un espace vectoriel

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps K de caractéristique $\neq 2$ muni de l'involution triviale. Soit φ une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur E et soit f un endomorphisme de E qui est auto-adjoint pour cette forme. Nous nous intéressons ici au problème suivant : Existe-t-il un lagrangien L de E (i. e. un sous-espace L tel que $L = L^\perp$) qui soit stable par f? Une condition nécessaire est évidemment que E soit isomorphe à un module hyperbolique. Nous allons voir cependant que cette condition n'est pas suffisante en général.

Avant de résoudre ce problème, nous allons le traduire dans l'esprit de cet article. L'ensemble des couples (E, f), où E est un espace vectoriel de dimension finie et où f est un endomorphisme, sont les objets d'une catégorie $\mathscr{C}$ dont les morphismes sont les diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\alpha} & E' \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f'} \\ E & \xrightarrow{\alpha} & E' \end{array}$$

On posera souvent E au lieu de (E, f) lorsqu'il n'y aura pas de risque de confusion. En fait, $\mathscr{C}$ est une catégorie hermitienne, le foncteur de dualité étant défini par $(E, f) \mapsto ({}^tE, {}^tf)$. Comme il est bien connu, la catégorie $\mathscr{C}$ est équivalente à la catégorie $\mathscr{T}$ des K [X]-modules de type fini et de torsion. Il suffit de poser $X v = f(v)$ pour $v \in E$. Considérons alors sur $\mathscr{T}$ le foncteur

$$E \mapsto \operatorname{Ext}_{K[X]}(E, K[X]) \approx \operatorname{Hom}_{K[X]}(E, K(X)/K[X])$$

et identifions $\mathscr{C}$ et $\mathscr{T}$ par l'équivalence précédente.

LEMME. — *Le foncteur*

$$E \mapsto {}^tE = \operatorname{Hom}_K(E, K)$$

est isomorphe au foncteur

$$E \mapsto \overline{E} = \operatorname{Hom}_{K[X]}(E, K(X)/K[X]).$$

Démonstration. — On peut associer à toute fraction rationnelle son « résidu à l'infini » : c'est le coefficient de X^{-1} dans le développement de la fraction rationnelle considérée dans le corps de fractions de K [[X]]. On obtient ainsi un K-homomorphisme

$$\text{Rés}: \quad K(X)/K[X] \to K,$$

d'où on déduit un K-homomorphisme θ_E de $\overline{E}$ dans ${}^tE$ naturel en E. Pour démontrer que θ_E est un isomorphisme, on peut sans restreindre la généralité supposer que K est algébriquement clos, en sorte que le polynôme caractéristique de f puisse s'écrire $(X-\lambda_1)^{n_1} \dots (X-\lambda_r)^{n_r}$. Il est alors bien connu (décomposition de Jordan) que $E \approx \bigoplus_i E_i$ où $E_i \approx K[X]/(X-\mu_i)^{p_i}$ avec $\{\mu_1, \dots, \mu_s\} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$. Pour démontrer le lemme, il suffit donc de se restreindre au cas où $E \approx K[X]/(X-\lambda)^p$. Par extensions successives, on peut aussi supposer que $p = 1$. Dans ce cas, un élément h de $\overline{E}$ est déterminé par $h(1) = \sigma/(X-\lambda)$ dont le résidu est σ. Le lemme est démontré. ■

Remarque. — On peut aussi expliciter un homomorphisme en sens inverse de ${}^tE$ sur $\overline{E}$. Pour toute forme linéaire k sur E, considérons l'élément h de $\overline{E}$ défini par

$$h(v) = \tilde{k}((X-\tilde{f})^{-1}(\tilde{v})) \in K(X)/K[X]$$

où $\tilde{v} = v \otimes 1 \in E \underset{K}{\otimes} K(X)$, $\tilde{f} = f \otimes 1$ et où $\tilde{k}$ est l'homomorphisme composé

$$E \underset{K}{\otimes} K(X) \xrightarrow{k \otimes 1} K \underset{K}{\otimes} K(X) \to K(X)/K[X].$$

Pour vérifier que cette correspondance est bien l'inverse de la précédente, il suffit de remarquer que le « résidu » du vecteur $(X-\tilde{f})^{-1}(\tilde{v})$ est égal à v.

COROLLAIRE. — *Les catégories hermitiennes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{T}$ sont équivalentes.*

Montrons comment ce corollaire permet de démontrer simplement la suite exacte scindée de Milnor :

$$\begin{array}{l} 0 \to W(K[X]) \to W(K(X)) \to \bigoplus_{\mathfrak{p}} W(F[X]/\mathfrak{p}) \to 0, \\ \qquad\quad \wr\wr \\ \qquad\; W(F) \end{array}$$

considérée en 2.11. D'après ce qui précède, nous pouvons en effet identifier $\bigoplus_{\mathfrak{p}} W(F[X]/\mathfrak{p})$ au « groupe de Witt » des catégories $\mathscr{C}$ où $\mathscr{T}$. Soit donc E un espace vectoriel de dimension finie muni d'une forme φ non dégénérée que nous interprétons comme un isomorphisme de E sur son dual ${}^t E$. Soit f un endomorphisme auto-adjoint de E. Si on pose $E^{\cdot} = E \otimes K[X]$, on a la suite exacte

$$0 \to E^{\cdot} \xrightarrow{\psi} {}^t E^{\cdot} \xrightarrow{\theta} E \to 0,$$

où $\psi = \varphi \otimes X - \varphi f \otimes 1$ et $\theta(v \otimes P) = P(f)(v)$. En localisant par rapport au système multiplicatif $S = K[X] - \{0\}$, on obtient bien une forme non dégénérée sur $\tilde{E} = E^{\cdot} \underset{K[X]}{\otimes} K(X)$. La correspondance $E \mapsto \tilde{E}$ est clairement additive. Si L est un lagrangien dans E, la classe du module quadratique dans $W(K(X))$ appartient à l'image de l'homomorphisme

$$u : \quad W(K) \approx W(K[X]) \to W(K(X))$$

d'après le paragraphe 1 de [35]. On a donc défini ainsi un homomorphisme de $W(A, S)$ (avec $A = K[X]$ et $S = A - \{0\}$) dans le groupe $W(K(X))/\mathrm{Im}(u)$ qui est par construction inverse à droite de l'homomorphisme

$$W(K(X))/\mathrm{Im}(u) \to W(A, S)$$

défini en 2.5.

Revenons maintenant au problème posé au début de cet appendice. D'après le paragraphe 2, l'existence d'un lagrangien de E stable par f équivaut à la nullité de la classe de E dans le groupe de Witt de la catégorie $\mathscr{C}$, soit précisément $W(A, S)$. Il suffit donc de calculer cette classe en exploitant l'équivalence des catégories $\mathscr{C}$ et $\mathscr{T}$. Pour cela écrivons explicitement la décomposition en facteurs irréductibles du polynôme caractéristique de f, soit $p_f(X) = p_1(X)^{n_1} \dots p_r(X)^{n_r}$. A cette décomposition de p_f est associée canoniquement une décomposition en somme directe orthogonale de E, soit $E = \bigoplus_{i=1}^{r} E_i$ où E_i est de dimension $n_i d_i$ où d_i est le degré du polynôme p_i et peut être regardé comme un module sur l'algèbre $K[X]/(p_i)^{n_i}$. Si K_i désigne le corps $K[X]/(p_i)$, on a un diagramme commutatif d'algèbres

$$\begin{array}{ccc} K[X]/(p_i)^{n_i} & \to & K[X]/(p_i) \\ \wr\wr & & \wr\wr \\ K_i[Y]/(Y)^{n_i} & \to & K_i[Y]/(Y) \sim K_i \end{array}$$

(*cf.* [36]). On est ainsi ramené à étudier les modules quadratiques non dégénérés sur l'anneau $A_i = K_i[Y]$ qui sont de Y-torsion. On peut évidemment leur associer des espaces vectoriels sur le corps K_i munis de formes quadratiques en remarquant de nouveau que

$$\mathrm{Hom}_{A_i}(E_i, A_i/Y^{n_i}) \approx \mathrm{Hom}_{K_i}(E_i, K_i)$$

par l'application projection

$$K_i[Y]/Y^{n_i} \to K_i[Y]/Y_1 \approx K_i$$

(qui joue ici un rôle analogue à l'homomorphisme « résidu » défini précédemment).

LEMME. — *L'homomorphisme ainsi défini est en fait un isomorphisme entre les groupes de Witt* $W(A_i, S_i)$ *et* $W(K_i)$ *avec* $S_i = (Y^{n_i})$.

Démonstration. — D'après le paragraphe 2, on sait déjà que $W(K_i) \approx W(A_i, S_i)$ par une application définie en sens inverse. Il suffit de remarquer maintenant que l'application composée

$$W(K_i) \to W(A_i, S_i) \to W(K_i)$$

est l'identité. ■

Désignons par q_i les formes quadratiques ainsi définies sur chaque K_i-espace vectoriel E_i. Le lemme précédent permet de démontrer ainsi le théorème que nous avions en vue :

THÉORÈME. — *Pour qu'il existe un lagrangien* L *de* E *stable par f, il faut et il suffit que chaque* K_i*-espace vectoriel* E_i, *muni de la forme quadratique explicitée plus haut, admette un lagrangien* L_i.

COROLLAIRE. — *Supposons que le polynôme caractéristique de f ait toutes ses racines* λ_i *dans* K. *Pour qu'il existe un lagrangien* L *de* E *stable par f, il faut et il suffit que chaque sous-espace caractéristique* E_i, *muni de la forme quadratique induite, admette un lagrangien* L_i (*soit* $[E_i] = 0$ *dans* W(K)).

COROLLAIRE. — *Supposons* K *algébriquement clos et supposons que le polynôme caractéristique de f s'écrive :*

$$p_f(X) = \prod (X - \lambda_i)^{n_i}.$$

Pour qu'il existe un lagrangien de E *stable par f, il faut et il suffit que chaque entier* n_i *soit pair.*

APPENDICE 3

« Relèvement » des modules de torsion

Soit A un anneau avec anti-involution quelconque avec $1/2 \in A$ et soit S un système multiplicatif contenu dans le centre de A, invariant par l'anti-involution dont les éléments sont non-diviseurs de zéro. Soit M un A-module de dimension homologique $\leqq 1$ et de S-torsion. Nous nous proposons de voir à quelles conditions il existe une résolution de M de la forme

$$0 \to E \xrightarrow{\alpha} {}^tE \xrightarrow{\beta} M \to 0,$$

où ${}^t\alpha = \varepsilon\alpha$ et où E est A-projectif de type fini, la forme ε-hermitienne φ de M étant induite par le morphisme α, soit

$$\varphi(\beta(v), \beta(w)) = \langle \alpha^{-1}(v), w \rangle \in A_S/A.$$

Une condition nécessaire pour qu'il en soit ainsi est que la classe de M dans le groupe de Witt ${}_{\varepsilon}W(A, S)$ appartienne à l'image de l'homomorphisme ${}_{\varepsilon}W(A_S) \to {}_{\varepsilon}W(A, S)$ considéré dans le paragraphe 2. Nous nous proposons de montrer dans cet appendice que cette condition est aussi suffisante et d'en déduire des conséquences intéressantes dans le cas où A est un anneau de Dedekind. Nous commencerons par étudier le cas où $[M] = 0$ dans le groupe ${}_{\varepsilon}W(A, S)$.

LEMME. — *Soit* $[M] = 0$ *dans le groupe* ${}_{\varepsilon}W(A, S)$. *Il existe alors une résolution de* M :

$$0 \to E \xrightarrow{\alpha} {}^tE \xrightarrow{\beta} M \to 0,$$

où ${}^t\alpha = \varepsilon\alpha$ *et où la forme* ε*-hermitienne de* M *est induite par* β.

Démonstration. — Supposons d'abord que M soit un module presque hyperbolique, i. e. qu'il existe $L \subset M$ tel que $L = L^{\perp}$. Soit

$$0 \to Q \xrightarrow{\gamma} P \xrightarrow{\delta} L \to 0,$$

une résolution de L où Q et P sont projectifs de type fini. On en déduit un diagramme commutatif

$$(1)\qquad \begin{tikzcd}[row sep=small] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & Q \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & Q \oplus {}^tP \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_1"] & {}^tP \arrow[r] \arrow[d, "\bar{\varepsilon}{}^t\gamma"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & P \arrow[r] \arrow[d, "\delta"'] & {}^tQ \oplus P \arrow[r] \arrow[d, "\beta_1"] & {}^tQ \arrow[r] \arrow[d, "\theta"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & L \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & \hat{L} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & \end{tikzcd}$$

où α_1 est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & \bar{\varepsilon}{}^t\gamma \\ \gamma & v \end{pmatrix}.$$

En considérant le « dual » de ce diagramme et en identifiant M et $\hat{M}$ grâce à la forme ε-hermitienne φ, on obtient un deuxième diagramme commutatif

$$(2)\qquad \begin{tikzcd}[row sep=small] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & Q \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & Q \oplus {}^tP \arrow[r] \arrow[d, "\bar{\varepsilon}\,{}^t\alpha_1"] & {}^tP \arrow[r] \arrow[d, "\bar{\varepsilon}{}^t\gamma"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & P \arrow[r] \arrow[d, "\delta"'] & {}^tQ \oplus P \arrow[r] \arrow[d, "\beta_2"] & {}^tQ \arrow[r] \arrow[d, "\theta"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & L \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & \hat{L} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & \end{tikzcd}$$

Dans le diagramme (1), on peut donc remplacer α_1 par $\alpha = (\alpha_1 + \bar{\varepsilon}\,{}^t\alpha_1)/2$ et β_1 par $(\beta_1 + \beta_2)/2$ sans changer l'exactitude et la commutativité. Ainsi, on peut supposer sans restreindre la généralité que la suite exacte

$$0 \to Q \oplus {}^tP \xrightarrow{\alpha} {}^tQ \oplus P \xrightarrow{\beta} M \to 0$$

est « auto-duale », c'est-à-dire qu'on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & Q \oplus {}^tP & \xrightarrow{\alpha} & {}^tQ \oplus P & \xrightarrow{\beta} & M & \to 0 \\ & \| & & \| & & \|\tilde{\varphi} & \\ 0 \to & Q \oplus {}^tP & \xrightarrow{\alpha} & {}^tQ \oplus P & \xrightarrow{\beta'} & \hat{M} & \to 0 \end{array}$$

où β' est le morphisme de ${}^tQ \oplus P$ dans $\hat{M} = \mathrm{Ext}_A(M, A)$ induit par la suite exacte précédente. D'après le paragraphe 1 de [35], ceci exprime exactement que la forme ε-hermitienne de M est induite par α.

Supposons maintenant que M soit stablement presque hyperbolique, c'est-à-dire qu'il existe P tel que $M \oplus H(P)$ soit presque hyperbolique. D'après ce qui précède, on a donc une résolution de $M \oplus H(P)$ de la forme

$$0 \to F \xrightarrow{u} {}^tF \xrightarrow{\tau} M \oplus H(P) \to 0,$$

où ${}^tu = \varepsilon u$ et où la forme hermitienne de $M \oplus H(P)$ est induite par u. Le sous-module P de $M \oplus H(P)$ est tel que $P^{\perp}/P \approx M$. D'après le paragraphe 1 de [35], on en déduit la résolution annoncée

$$0 \to E \xrightarrow{\alpha} {}^tE \to M \to 0,$$

où $E \approx \tau^{-1}(P)$. ■

THÉORÈME. — *Reprenons les hypothèses précédentes sur* A *et* S *mais supposons seulement que* [M] *appartienne à l'image de l'homomorphisme* ${}_\varepsilon W(A_S) \to {}_\varepsilon W(A, S)$. *Il existe alors une résolution de M :*

$$0 \to E \xrightarrow{\alpha} {}^tE \xrightarrow{\beta} M \to 0,$$

où la forme ε-hermitienne de M *est induite par* β.

Démonstration. — Soit

$$0 \to F \to {}^tF \to N \to 0,$$

une résolution de N où N est un A-module de S-torsion tel que $[N] = [M]$ dans ${}_\varepsilon W(A, S)$. Par conséquent, le module $M \oplus N^-$ est stablement presque hyperbolique et on peut trouver une résolution de $M \oplus N^-$ de la forme

$$0 \to G \to {}^tG \to M \oplus N^- \to 0,$$

d'après le lemme. On en déduit une résolution du même type

$$0 \to G \oplus F \to {}^tG \oplus {}^tF \xrightarrow{\sigma} M \oplus N^- \oplus N \to 0,$$

de $M \oplus N^- \oplus N$. Soit H la diagonale de $N^- \oplus N \subset M \oplus N^- \oplus N$. On a alors $H^\perp/H \approx M$ et, d'après le paragraphe 1 de [35], il existe une résolution de M de la forme annoncée

$$0 \to E \xrightarrow{\alpha} {}^tE \to M \to 0,$$

où $E = \sigma^{-1}(H)$. ■

COROLLAIRE. — *Soit* A *un anneau de Dedekind tel que* $1/2 \in A$ *et tel que*

$$k'(A) = {}_{-\varepsilon}W_1(A) = 0.$$

Soit $S = \{ \lambda\bar{\lambda}$ *où* $\lambda \in A - \{0\}\}$ *et soit* M *un* A-*module de* S-*torsion. Il existe alors une résolution de* M :

$$0 \to E \xrightarrow{\alpha} {}^tE \xrightarrow{\beta} M \to 0,$$

qui induit la forme ε-*hermitienne de* M.

C'est en effet une conséquence de ce qui précède, du théorème 2.8 et de la suite exacte des 12 utilisée déjà dans le paragraphe 2 ([14], [15]).

Remarque. — Pour $A = Z$ et $\varepsilon = 1$, Durfee [9] a montré un résultat analogue (2). Il serait évidemment souhaitable de généraliser le théorème et le corollaire précédent pour $1/2 \notin A$.

EXERCICE. — Montrer que la condition $1/2 \in A$ peut être remplacée par la condition légèrement moins restrictive : il existe un élément μ du centre de A tel que $\mu + \bar{\mu} = 1$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. BAK, *Solution to the Congruence Subgroup Problem for* λ-*Hermitian Forms* (à paraître).

[2] A. BAK, *Weak Approximation for Central Extensions of Quadratic Elementary Groups* (à paraître).

[3] A. BAK et W. SCHARLAU, *Witt Groups of Orders and Finite Groups* (à paraître).

[4] H. BASS, *Algebraic* K-*Theory*, Benjamin, 1967.

[5] H. BASS, J. MILNOR et J. P. SERRE, *Solution of the Congruence Subgroup Problem for* SL_n ($n \geq 3$) *and* Sp_{2n} ($n \geq 2$) (*Publ. I. H. E. S.*, n° 33, 1967, p. 59-137).

[6] H. BASS, *Unitary Algebraic* K-*Theory* (*Lecture Notes in Math.*, n° 343, 1973, p. 57-209).

[7] H. BASS, *Some Problems in "Classical" Algebraic* K-*Theory* (*Lecture Notes in Math.*, n° 342, 1973, p. 3-70).

[8] S. E. CAPPELL, *Mayer-Vietoris Sequences in Hermitian* K-*Theory* (*Lecture Notes in Math.*, n° 342, 1973, p. 478-512).

[9] A. H. DURFEE, *Diffeomorphism Classification of Isolated Hypersurface Singularities* (*thèse*, Cornell University).

[10] I. M. GEL'FAND et A. S. MIŠČENKO, *Quadratic Forms over Commutative Group Rings and the* K-*Theory* (*Funt. Anal. and Appl.*, vol. 3, 1969, p. 277-281).

[11] M. KAROUBI, *Algèbres de Clifford et* K-*théorie* (*Ann. sc. Éc. Norm. Sup.*, 4e série, t. 1, 1968, p. 161-270).

(2) Notons cependant que notre méthode permet de retrouver le résultat de Durfee pour les groupes finis de torsion *impaire* sans utiliser les théorèmes de classification des formes quadratiques sur les groupes abéliens finis.

[12] M. KAROUBI, *La périodicité de Bott en* K-*théorie générale* (*Ann. sc. Éc. Norm. Sup.*, 4e série, t. 4., 1971, p. 63-95).

[13] M. KAROUBI et O. VILLAMAYOR, K-*théorie algébrique et* K-*théorie topologique*, II, (*Math. Scand.* 32, 1973, p. 57-86).

[14] M. KAROUBI, *Périodicité de la* K-*théorie hermitienne* (*Lecture Notes in Math.*, n° 343, 1973, p. 301-411).

[15] M. KAROUBI, *Théorie de Quillen et homologie du groupe orthogonal* (à paraître).

[16] M. KNEBUSCH, *Grothendieck und Wittringe von Nichtausgearteten Symmetrischen Bilinearformen* (S-*Ber. Heidelberger Akad. Wiss.*, vol. 3, 1969-1970, Abh Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1970).

[17] M. KNEBUSCH et W. SCHARLAU, *Quadratische Formen und Quadratische Reziprozitätsgesetze über Algebraischen Zahlkörpen* (*Math. Z.*, vol. 121, 1971, p. 346-368).

[18] M. KNESER et D. PUPPE, *Quadratische Formen und Verschlingungs-Invarianten von Knoten* (*Math. Z.* vol. 58, 1953, p. 376-384).

[19] J. MILNOR, *Introduction to Algebraic* K-*Theory* (*Annals of Math. Studies*, vol. 72, 1971).

[20] J. MILNOR, *Algebraic* K-*Theory and Quadratic Forms* (*Invent. Math.*, vol. 9, 1970, p. 318-344).

[21] J. MILNOR et D. HUSEMOLLER, *Symmetric Bilinear Forms*, Springer, 1973.

[22] A. S. MIŠČENKO, *Homotopy Invariants of Non-Simply Connected Manifolds*, I, *Rational Invariants* (*Izv. Akad. Nauk.*, *S. S. S. R.*, ser. Math., vol. 34, 1970, p. 501-514).

[23] S. P. NOVIKOV, *The Algebraic Construction and Properties of Hermitian Analogues of* K-*Theory for Rings with Involution from the Point of View of Hamiltonian Formalism. Some Applications to Differential Topology and the Theory of Characteristic Classes* (I, *Izv. Akad. Nauk. S. S. S. R.*, ser Math., vol. 34, 1970, p. 253-288, II, *ibid.*, p. 485-500).

[24] O. T. O'MEARA, *Introduction to Quadratic Forms*, Springer, 1963.

[25] A. A. RANICKI, *Algebraic* L-*Theory* IV., *Polynomial Extension Rings. Commentarii Math, Helv.*, vol. 49, 2, 1974, p. 137-167.

[26] W. SCHARLAU, *Quadratic Reciprocity Laws* (*J. Number Theory*, vol. 4, 1972, p. 78-97).

[27] W. SCHARLAU, *Remarks on Symmetric Bilinear Forms over Euclidean Domains* (à paraître).

[28] J. P. SERRE, *Cours d'arithmétique*, Presses Universitaires de France, Paris, 1970.

[29] R. SHARPE, *On the Structure of the Unitary Steinberg Group* (à paraître).

[30] T. A. SPRINGER, *Quadratic Forms over Fields with a Discrete Valuation.* (I, *Indag. Math.*, vol. 17, 1955, p. 352-362).

[31] C. T. C. WALL, *On the Classification of Hermitian Forms.* IV, *Global Rings* (à paraître).

[32] C. T. C. WALL, *On the Axiomatic Foundations of the Theory of Hermitian Forms* (*Proc. Cambridge Phil. Soc.*, vol. 67, 1970, p. 243-250).

[33] C. T. C. WALL, *Quadratic Forms on Finite Groups* (*Bull. Lond. Math. Soc.*, vol. 4, 1972, p. 156-160).

[34] M. KAROUBI, *Comptes rendus*, 279, série A, 1974, p. 487-490.

[35] M. KAROUBI, (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 4e série, t. 7, 1974, p. 359-404).

[36] J.-P. SERRE, *Corps locaux*, Hermann, Paris (1968).

(Manuscrit reçu le 13 décembre 1974.)

Max KAROUBI,
U. E. R. de Mathématiques,
Université de Paris VII,
2, place Jussieu,
75230 Paris Cedex.