Annals of Mathematics, **112** (1980), 259-282

Le théorème fondamental de la K-théorie hermitienne

Par MAX KAROUBI

Cet article est la suite naturelle de [9] dont nous reprenons les notations et la terminologie. Rappelons en d'abord les définitions essentielles.

Soit A un anneau "hermitien", c'est-à-dire un anneau unitaire muni d'une antiinvolution notée $z \mapsto \bar{z}$ et soit ε un élément du centre de A tel que $\varepsilon\bar{\varepsilon} = 1$. Pour tout entier r, on définit le "groupe orthogonal" ${}_\varepsilon O_{r,r}(A)$ comme le groupe formé des matrices $2r \times 2r$ dont l'écriture par blocs de matrices $r \times r$ est

$$X = \begin{pmatrix} M & N \\ P & Q \end{pmatrix}$$

avec $X \cdot X^* = X^* \cdot X = I$ où X^* est la matrice

$$\begin{pmatrix} {}^t\bar{Q} & \varepsilon\,{}^t\bar{N} \\ \bar{\varepsilon}\,{}^t\bar{P} & {}^t\bar{M} \end{pmatrix} .$$

Ce groupe est le groupe des isométries de A^{2r} muni de la forme "ε-hyperbolique" standard. Soit ${}_\varepsilon O(A) = \lim {}_\varepsilon O_{r,r}(A)$. On démontre aisément que le sous-groupe des commutateurs ${}_\varepsilon O'(A)$ de ${}_\varepsilon O(A)$ est parfait. Par conséquent, nous pouvons appliquer la construction $+$ de Quillen [5] à l'espace classifiant $B_\varepsilon O(A)$ du groupe discret ${}_\varepsilon O(A)$. L'espace $B_\varepsilon O(A)^+$ obtenu a des groupes d'homotopie non triviaux en général qu'on notera ${}_\varepsilon L_n(A)$ pour $n > 0$. Pour $n = 0$, on définira ${}_\varepsilon L_0(A)$ comme le groupe de Grothendieck de la catégorie des A-modules projectifs de type fini munis de formes ε-hermitiennes non dégénérées. Notons que

$$\begin{aligned} {}_\varepsilon L_1(A) &= H_1({}_\varepsilon O(A); \mathbf{Z}) \approx {}_\varepsilon O(A)/{}_\varepsilon O'(A) , \\ {}_\varepsilon L_2(A) &= H_2({}_\varepsilon O'(A); \mathbf{Z}) , \\ {}_\varepsilon L_3(A) &= H_3({}_\varepsilon \widetilde{O}'(A); \mathbf{Z}) , \end{aligned}$$

où ${}_\varepsilon \widetilde{O}'(A)$ est le revêtement universel du groupe parfait ${}_\varepsilon O'(A)$ [12].

L'inclusion de $\mathrm{GL}_r(A)$ dans $O_{r,r}(A)$ définie par

0003-486X/80/0112-2/0259/024 \$ 01.20/1

$$M \longmapsto \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & {}^t\bar{M}^{-1} \end{pmatrix}$$

induit par passage à la limite inductive un homomorphisme de $\mathrm{GL}(A)$ dans ${}_\varepsilon O(A)$, d'où une application $B\mathrm{GL}(A)^+ \to B_\varepsilon O(A)^+$. On définit de même un homomorphisme $K_0(A) \to {}_\varepsilon L_0(A)$ qui est induit par le foncteur "hyperbolique". On note ${}_\varepsilon \mathfrak{U}(A)$ la fibre homotopique de l'application

$$K_0(A) \times B\mathrm{GL}(A)^+ \longrightarrow {}_\varepsilon L_0(A) \times B_\varepsilon O(A)^+ ,$$

$K_0(A)$ et ${}_\varepsilon L_0(A)$ étant munis de la topologie discrète. De même on note ${}_\varepsilon \mathfrak{V}(A)$ la fibre homotopique de l'application

$${}_\varepsilon L_0(A) \times B_\varepsilon O(A)^+ \longrightarrow K_0(A) \times B\mathrm{GL}(A)^+$$

induite par le foncteur "oubli" et par l'inclusion naturelle de ${}_\varepsilon O_{r,r}(A)$ dans $\mathrm{GL}_{2r}(A)$. Le but de cet article est de démontrer le théorème suivant et quelques unes de ses conséquences:

THEOREME. *Supposons qu'il existe un élément* λ *du centre de* A *tel que* $\lambda + \bar{\lambda} = 1$ (cette hypothèse est par exemple satisfaite si $1/2 \in A$). *Alors les espaces* ${}_\varepsilon \mathfrak{V}(A)$ *et* $\Omega\, {}_{-\varepsilon}\mathfrak{U}(A)$ *ont le même type d'homotopie.*(1)

Si on néglige les phénomènes de 2-torsion (en localisant par rapport au système multiplicatif (2^n)), il n'est pas difficile de voir que ce théorème est en fait équivalent au théorème de périodicité des groupes ${}_\varepsilon W_n(A) \otimes \mathbf{Z}[1/2]$ démontré dans l'article précédent [9]. Ce théorème doit donc être considéré comme une extension du théorème de périodicité.

En fait, l'analogue de ce théorème en K-théorie topologique hermitienne démontré en [7, § 3] pour une algèbre de Banach involutive inclut les théorèmes de périodicité de Bott classiques dans le cas réel ou complexe.

La déviation de "périodicité" entre les groupes ${}_\varepsilon W_n(A)$ et ${}_\varepsilon W_{n+4}(A)$ est mieux comprise dans une suite exacte à douze termes dont voici les éléments. On pose

$${}_\varepsilon W_n(A) = \mathrm{Coker}\big(K_n(A) \longrightarrow {}_\varepsilon L_n(A)\big) , \qquad \text{("groupe de Witt")}$$

$${}_\varepsilon W'_n(A) = \mathrm{Ker}\big({}_\varepsilon L_n(A) \longrightarrow K_n(A)\big) , \qquad \text{("cogroupe de Witt")}$$

$$k_n(A) = \{x \in K_n(A) \mid \bar{x} = x\}/\{x \in K_n(A)/\exists y \text{ avec } x = y + \bar{y}\} ,$$

$$k'_n(A) = \{x \in K_n(A) \mid \bar{x} = -x\}/\{x \in K_n(A)/\exists y \text{ avec } x = y - \bar{y}\} .$$

Dans ces notations, l'application $x \mapsto \bar{x}$ désigne l'involution de $K_n(A)$ induite par l'automorphisme $M \mapsto {}^t\bar{M}^{-1}$ de $\mathrm{GL}(A)$ et par la dualité dans $K_0(A)$ (cf. [9]).

(1) Note ajoutée à la correction des épreuves: Une généralisation de ce théorème a été démontrée récemment par C. Giffen.

THEOREME (suite exacte des douze). *On a la suite exacte à douze termes*

$$\begin{array}{ccccccccccc}
k_n(A) & \to & {}_\varepsilon W_{n+1}(A) & \to & {}_{-\varepsilon}W'_{n-1}(A) & \to & k'_n(A) & \to & {}_\varepsilon W'_n(A) & \to & {}_\varepsilon W_n(A) \\
\uparrow & & & & & & & & & & \downarrow \\
{}_{-\varepsilon}W_n(A) & \leftarrow & {}_{-\varepsilon}W'_n(A) & \leftarrow & k'_n(A) & \leftarrow & {}_\varepsilon W'_{n-1}(A) & \leftarrow & {}_{-\varepsilon}W_{n+1}(A) & \leftarrow & k_n(A)
\end{array} .$$

On notera qu'en tensorisant cette suite exacte par $\mathbf{Z}' = \mathbf{Z}[1/2]$, on retrouve bien le théorème de périodicité ${}_\varepsilon W_n(A) \otimes \mathbf{Z}' \approx {}_{-\varepsilon}W_{n+2}(A) \otimes \mathbf{Z}'$.

Le plan de cet article est le suivant: dans le premier paragraphe, nous montrons que ${}_\varepsilon\mathcal{U}(A)$ et ${}_\varepsilon\mathcal{V}(A)$ ont en fait le type d'homotopie de $\Omega_\varepsilon\mathcal{L}(U_A)$ et $\Omega_\varepsilon\mathcal{L}(V_A)$ pour des anneaux U_A et V_A convenables (on pose en général $\mathcal{K}(A) = K_0(A) \times B\mathrm{GL}(A)^+$ et ${}_\varepsilon\mathcal{L}(A) = {}_\varepsilon L_0(A) \times B_\varepsilon O(A)^+$ pour alléger les notations). Si on pose ${}_\varepsilon U_n(A) = \pi_n({}_\varepsilon\mathcal{U}(A))$ et ${}_\varepsilon V_n(A) = \pi_n({}_\varepsilon\mathcal{V}(A))$, ces anneaux permettent de décrire sans ambigüité des "cup-produits"

$$\begin{aligned}
{}_\varepsilon U_n(A) \times {}_\eta L_p(B) &\longrightarrow {}_{\varepsilon\eta}U_{n+p}(A \otimes_{\mathbf{Z}} B) , \\
{}_\varepsilon V_n(A) \times {}_\eta L_p(B) &\longrightarrow {}_{\varepsilon\eta}V_{n+p}(A \otimes_{\mathbf{Z}} B)
\end{aligned}$$

jouissant de bonnes propriétés formelles analogues à celles décrites en [10].

Le deuxième paragraphe est plus technique et est consacré au calcul des deux groupes particuliers ${}_{-1}D_0(\mathbf{Z}) = {}_{-1}L_2(U_{U_{\mathbf{Z}}})$ et ${}_{-1}E_{-2}(\overline{\mathbf{Z}}) = {}_{-1}L_0(V_{\overline{\mathbf{Z}}})$, $\overline{\mathbf{Z}}$ désignant l'anneau $\mathbf{Z}[x]$ muni de l'involution $x \mapsto 1 - x$. L'intérêt de ces deux groupes est que le "cup-produit" par certains de leurs éléments permettra de définir les équivalences d'homotopie ${}_\varepsilon\mathcal{V}(A) \to \Omega_{-\varepsilon}\mathcal{U}(A)$ et $\Omega_{-\varepsilon}\mathcal{U}(A) \to {}_\varepsilon\mathcal{V}(A)$ (cf. le § 3). Fort curieusement, les considérations topologiques développées en [7, § 3] semblent nécessaires pour déterminer l'involution canonique sur ces deux groupes.

Dans le troisième paragraphe nous démontrons le théorème fondamental proprement dit en nous appuyant sur la structure multiplicative de la K-théorie hermitienne. L'existence d'un élément λ dans le centre de A tel que $\lambda + \overline{\lambda} = 1$ est tout à fait essentielle dans une partie de nos constructions. En outre cette existence permet de décrire toute transformation naturelle $L_*(A) \to D_*(A)$ ou $E_*(A)$ à partir d'un cup-produit.

Enfin, dans le paragraphe 4 nous démontrons la suite exacte des 12 en déterminant en même temps les homomorphismes qui y figurent.

I. Les anneaux U_A et V_A

1.1. Nous allons tout d'abord rappeler une construction, dûe essentiellement à Wagoner [13], des groupes "relatifs" $K_n(\varphi)$ (resp. ${}_\varepsilon L_n(\varphi)$) associés à un homomorphisme d'anneaux (resp. d'anneaux hermitiens)

$$\varphi: B \longrightarrow D .$$

A un tel homomorphisme, on peut en effet associer le produit fibré $\Gamma(\varphi)$ de CD et SB au-dessus de SD

$$\begin{tikzcd} \Gamma(\varphi) \arrow[r] \arrow[d] & CD \arrow[d] \\ SB \arrow[r] & SD \end{tikzcd}$$

et $\mathcal{K}(\Gamma(\varphi))$ (resp. ${}_\varepsilon\mathcal{L}(\Gamma(\varphi))$) a le type d'homotopie de la fibre homotopique de l'application $\mathcal{K}(SB) \to \mathcal{K}(SD)$ (resp. ${}_\varepsilon\mathcal{L}(SB) \to {}_\varepsilon\mathcal{L}(SD)$). En particulier $\Omega\mathcal{K}(\Gamma(\varphi))$ (resp. $\Omega_\varepsilon\mathcal{L}(\Gamma(\varphi))$) a le type d'homotopie de la fibre homotopique de $\mathcal{K}(B) \to \mathcal{K}(D)$ (resp. ${}_\varepsilon\mathcal{L}(B) \to {}_\varepsilon\mathcal{L}(D)$).

Il est clair que ces identifications sont compatibles avec les structures multiplicatives. Par exemple, supposons donnés deux bimorphismes dans le sens de [7], [10]

$$E \times B \longrightarrow B' \qquad \text{et} \qquad E \times D \longrightarrow D'$$

tels que le diagramme

$$\begin{tikzcd} E \times B \arrow[r] \arrow[d, "1\times\varphi"'] & B' \arrow[d, "\varphi'"] \\ E \times D \arrow[r] & D' \end{tikzcd}$$

commute. On en déduit un bimorphisme

$$E \times \Gamma(\varphi) \longrightarrow \Gamma(\varphi')$$

qui rend commutatifs les diagrammes suivants:

$$\begin{tikzcd} E \times \Gamma(\varphi) \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma(\varphi') \arrow[d] \\ E \times SB \arrow[r] & SB' , \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} E \times \tilde{D} \arrow[r] \arrow[d] & \tilde{D}' \arrow[d] \\ E \times \Gamma(\varphi) \arrow[r] & \Gamma(\varphi') . \end{tikzcd}$$

On en déduit la commutativité à homotopie près des diagrammes

$$\begin{tikzcd} {}_\varepsilon\mathcal{L}(E) \wedge {}_\eta\mathcal{L}(\Gamma(\varphi)) \arrow[r] \arrow[d] & {}_{\varepsilon\eta}\mathcal{L}(\Gamma(\varphi')) \arrow[d] \\ {}_\varepsilon\mathcal{L}(E) \wedge {}_\eta\mathcal{L}(SB) \arrow[r] & {}_{\varepsilon\eta}\mathcal{L}(SB') , \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} {}_\varepsilon\mathcal{L}(E) \wedge {}_\eta\mathcal{L}(D) \arrow[r] \arrow[d] & {}_{\varepsilon\eta}\mathcal{L}(D') \arrow[d] \\ {}_\varepsilon\mathcal{L}(E) \wedge {}_\eta\mathcal{L}(\Gamma(\varphi)) \arrow[r] & {}_{\varepsilon\eta}\mathcal{L}(\Gamma(\varphi')) . \end{tikzcd}$$

1.2. Dans l'introduction nous avons défini ${}_\varepsilon\mathcal{U}(A)$ (resp. ${}_\varepsilon\mathcal{V}(A)$) comme la fibre homotopique de l'application continue

$$\mathcal{K}(A) \longrightarrow {}_\varepsilon\mathcal{L}(A) \quad \left(\text{resp. } {}_\varepsilon\mathcal{L}(A) \longrightarrow \mathcal{K}(A)\right) .$$

Avec cette définition il n'est pas évident que les groupes d'homotopie ${}_\varepsilon\mathcal{U}_*(A) = \pi_*({}_\varepsilon\mathcal{U}(A))$ et ${}_\varepsilon V_*(A) = \pi_*({}_\varepsilon\mathcal{V}(A))$ soient en fait des "modules" sur $L_*(A)$ (par exemple si A est commutatif). Il est donc important de remarquer que ${}_\varepsilon\mathcal{U}(A)$ et ${}_\varepsilon\mathcal{V}(A)$ peuvent être interprétés à homotopie près comme des espaces du type $\Omega_\varepsilon\mathcal{L}(U_A)$ et $\Omega_\varepsilon\mathcal{L}(V_A)$ où U_A et V_A sont des *anneaux* canoniquement associés à A.

De manière précise, considérons l'inclusion

$$A \times A^0 \longrightarrow M_2(A)$$

définie par

$$(a, d) \longmapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{d} \end{pmatrix}$$

où A^0 désigne l'anneau opposé à A. Si on munit $M_2(A)$ (resp. $A \times A^0$) de l'antiinvolution définie par

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \bar{d} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{a} \end{pmatrix}$$

(resp. $(a, d) \mapsto (d, a)$), on voit que l'inclusion précédente est compatible avec les antiinvolutions. En outre ${}_\varepsilon O_{n,n}(A \times A^0) \approx \mathrm{GL}_{2n}(A)$, ${}_\varepsilon O_{n,n}(M_2(A)) \approx {}_\varepsilon O_{2n,2n}(A)$ et, modulo ces isomorphismes, l'inclusion de $\mathrm{GL}_{2n}(A)$ dans ${}_\varepsilon O_{2n,2n}(A)$ est induite par le foncteur hyperbolique. De même, ${}_\varepsilon L_0(A \times A^0) \approx K_0(A)$ et ${}_\varepsilon L_0(M_2(A)) \approx {}_\varepsilon L_0(A)$ (cf. [4] par exemple). Ainsi, l'espace ${}_\varepsilon\mathfrak{U}(A)$ s'identifie à la fibre homotopique de l'application

$${}_\varepsilon\mathcal{L}(A \times A^0) \longrightarrow {}_\varepsilon\mathcal{L}(M_2(A)) .$$

Si on désigne par φ l'inclusion de $A \times A^0$ dans $M_2(A)$ et par U_A l'anneau $\Gamma(\varphi)$ defini en 1.1, on a ainsi ${}_\varepsilon\mathfrak{U}(A) \sim \Omega{}_\varepsilon\mathcal{L}(U_A)$.

De manière parallèle, désignons par V_A l'anneau $\Gamma(\varphi)$ de 1.1 pour $\varphi\colon A \to A \times A^0$ défini par $\varphi(a) = (a, \bar{a})$. Alors ${}_\varepsilon\mathcal{V}(A)$ a le type d'homotopie de $\Omega{}_\varepsilon\mathcal{L}(V_A)$.

1.3. Les anneaux U_A et V_A possèdent un certain nombre de propriétés formelles immédiates que nous allons décrire. Tout d'abord, on a évidemment $U_{A\times B} \approx U_A \times U_B$, $U_A^0 \approx (U_A)^0$. Par conséquent, ${}_\varepsilon\mathcal{L}(U_{A\times A^0}) \sim {}_\varepsilon\mathcal{L}(U_A \times U_A^0) \sim \mathcal{K}(U_A)$. D'autre part, la projection (non compatible avec les antiinvolutions) de U_A sur le facteur SA induit une équivalence d'homotopie entre $\mathcal{K}(U_A)$ et $\mathcal{K}(SA)$. En particulier, $\Omega\mathcal{K}(U_A) \sim \mathcal{K}(A)$. Des propriétés analogues sont valables pour l'anneau V_A. En particulier, $\mathcal{K}(V_A) \sim \mathcal{K}(A)$.

L'intérêt principal des anneaux U_A et V_A est cependant que cette construction peut être itérée. Par exemple, la fibre homotopique $\mathcal{D}(A)$ de l'application

$$\mathcal{K}(A) \sim {}_\varepsilon\mathfrak{U}(A \times A^0) \longrightarrow {}_\varepsilon\mathfrak{U}(M_2(A)) \sim {}_\varepsilon\mathfrak{U}(A)$$

peut être interprétée comme $\Omega^2(\mathcal{L}(U_A^2))$ avec $U_A^2 = U_{U_A}$. En fait, nous montrerons plus loin que ${}_\varepsilon\mathcal{D}(A)$ a le type d'homotopie de ${}_{-\varepsilon}\mathcal{L}(A)$. Si on définit par récurrence l'anneau U_A^n par la formule $U_A^n = U_{U_A}^{n-1}$, on voit ainsi que le type d'homotopie de $\Omega^n({}_\varepsilon\mathcal{L}(U_A^n))$ est périodique de période 4 par rapport à n: c'est une autre façon d'exprimer le théorème fondamental de la K-théorie hermitienne; (cf. le § 3). On notera que $\Omega^n(\mathcal{K}(U_A^n)) \sim \mathcal{K}(A)$.

De manière duale, définissons l'anneau V_A^n par la formule de récurrence $V_A^n = V_{V_A}^{n-1}$. On peut alors interpréter la fibre homotopique ${}_\varepsilon\mathcal{G}(A)$ de l'application

$$ {}_\varepsilon\mathcal{V}(A) \longrightarrow {}_\varepsilon\mathcal{V}(A \times A^0) \sim \Omega\mathcal{K}(A) $$

comme $\Omega^2\mathcal{L}(V_A^2)$. Nous montrerons plus loin que ${}_\varepsilon\mathcal{G}(A)$ a le type d'homotopie de $\Omega^2{}_{-\varepsilon}\mathcal{L}(A)$, c'est-à-dire en délaçant, ${}_\varepsilon\mathcal{L}(V_A^2) \sim {}_{-\varepsilon}\mathcal{L}(A)$. Ainsi, le type d'homotopie de ${}_\varepsilon\mathcal{L}(V_A^n)$ est aussi périodique de période 4 par rapport à n.

Enfin, supposons donné un bimorphisme

$$ \theta: E \times A \longrightarrow A' \,. $$

On en déduit un bimorphisme

$$ E \times M_2(A) \longrightarrow M_2(A') $$

par la formule évidente

$$ \left[\theta, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right] \longmapsto \begin{pmatrix} \theta(e, a) & \theta(e, b) \\ \theta(e, c) & \theta(e, d) \end{pmatrix} . $$

De même on a un bimorphisme

$$ E \times (A \times A^0) \longrightarrow A' \times A'^0 $$

par la formule

$$ [\theta, (a, d)] \longrightarrow (\theta(e, a), \theta(\bar{e}, d)) \,. $$

Le diagramme

$$ \begin{array}{ccc} E \times (A \times A^0) & \longrightarrow & (A' \times A'^0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ E \times M_2(A) & \longrightarrow & M_2(A') \end{array} $$

étant commutatif, on se retrouve ainsi dans la situation générale décrite en 1.1 avec $B = A \times A^0$ et $D = M_2(A)$, ce qui permet de définir un bimorphisme

$$ E \times U_A \longrightarrow U_{A'} $$

donc, par récurrence sur n, un bimorphisme

$$ E \times U_A^n \longrightarrow U_{A'}^n \,. $$

On définit de même un bimorphisme

$$ E \times V_A^n \longrightarrow V_A^n \,. $$

En particulier, les groupes $\pi_*({}_\varepsilon\mathcal{L}_*(U_A^n))$ et $\pi_*({}_\varepsilon\mathcal{L}(\mathcal{V}_A^n))$ sont des $L_*(\mathbf{Z})$-modules et des $L_*(\mathbf{Z}')$-modules (avec $\mathbf{Z}' = \mathbf{Z}[1/2]$) si 2 est inversible dans A.

1.4. Examinons maintenant les anneaux U_{V_A} et V_{U_A}. Par définition, U_A est le produit fibré

$$\begin{tikzcd} U_A \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"'] & CM_2(A) \arrow[d] \\ SA \times SA^0 \arrow[r] & SM_2(A) \end{tikzcd}$$

et le noyau de φ est $\widetilde{M_2(A)}$. Donc on a la fibration homotopique

$$_\varepsilon\mathcal{L}(A) \sim {}_\varepsilon\mathcal{L}(\widetilde{M_2(A)}) \longrightarrow {}_\varepsilon\mathcal{L}(U_A) \longrightarrow \mathcal{L}(SA \times SA^0) \sim \mathcal{K}(SA) .$$

D'autre part, si $\wedge = A \times A^0$, la projection φ' définie par la composition des homomorphismes:

$$\varphi' \colon U_\wedge \to S\wedge \times S\wedge^0 \approx SA \times SA^0 \times SA^0 \times SA \overset{j}{\approx} (SA \times SA^0) \times (SA^0 \times SA) \xrightarrow{i} SA \times SA^0 ,$$

où i et j sont définis par $i(a, b, c, d) = (a, b)$ et $j(a, b, c, d) = (a, c, b, d)$, induit une équivalence d'homotopie de $_\varepsilon\mathcal{L}(U_\wedge) \sim \mathcal{K}(U_A)$ vers $_\varepsilon\mathcal{L}(S\wedge) \sim \mathcal{K}(SA)$ d'après la suite exacte d'homotopie des espaces fibrés. En outre, on a le diagramme commutatif à homotopie près (avec $\theta(a) = (a, a)$):

$$\begin{tikzcd} U_A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\theta"'] & SA \times SA^0 \arrow[d, equal] \\ U_A \times U_A^0 \arrow[r, "\varphi'"] & SA \times SA^0 . \end{tikzcd}$$

Par conséquent la fibre homotopique de $_\varepsilon\mathcal{L}(U_A) \to {}_\varepsilon\mathcal{L}(SA \times SA^0)$, c'est-à-dire $_\varepsilon\mathcal{L}(A)$, a le type d'homotopie de la fibre homotopique de $_\varepsilon\mathcal{L}(U_A) \to {}_\varepsilon\mathcal{L}(U_A \times U_A)$. Donc $\Omega\mathcal{L}(V_{U_A}) \sim {}_\varepsilon\mathcal{L}(A)$, cette équivalence d'homotopie étant compatible avec les structures de "L_*-modules" dans un sens évident.

De manière symétrique, considérons maintenant le produit fibré

$$\begin{tikzcd} V_A \arrow[r] \arrow[d, "\psi"'] & CA \times CA^0 \arrow[d] \\ SA \arrow[r] & SA \times SA^0 . \end{tikzcd}$$

Le noyau de ψ est $\tilde{A} \times \tilde{A}^0$. Donc on a la fibration homotopique

$$\mathcal{K}(A) \sim {}_\varepsilon\mathcal{L}(A \times A^0) \sim {}_\varepsilon\mathcal{L}(\tilde{A} \times \tilde{A}^0) \longrightarrow {}_\varepsilon\mathcal{L}(V_A) \longrightarrow {}_\varepsilon\mathcal{L}(SA)$$

où $\theta \colon A \times A^0 \to V_A$ est déduit du diagramme précédent.

D'autre part, on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} (A \times A^0) \times (A \times A^0)^0 \arrow[r, "\theta \times \theta^0"] \arrow[d] & V_A \times V_A^0 \arrow[d] \\ M_2(A) \times M_2(A)^0 \arrow[r, "\theta"] & V_{M_2}(A) \approx M_2(V_A) . \end{tikzcd}$$

Considérons maintenant l'homomorphisme $h: A \times A^0 \to V_A \times V_A^0$ défini par la composition des homomorphismes

$$A \times A^0 \xrightarrow{i} A \times A^0 \times A^0 \times A \approx (A \times A^0) \times (A \times A^0)^0 \xrightarrow{\theta \times \theta^0} V_A \times V_A^0$$

où $i(a, b) = (a, 0, b, 0)$. Alors la suite exacte d'homotopie des espaces fibrés montre que h induit une équivalence d'homotopie entre $\mathcal{K}(A) \sim {}_\varepsilon\mathcal{L}(A \times A^0)$ et $\mathcal{K}(V_A) \sim {}_\varepsilon\mathcal{L}(V_A \times V_A^0)$. En outre on a le diagramme commutatif déduit du diagramme précédent:

$$\begin{array}{ccc} A \times A^0 & \xrightarrow{h} & V_A \times V_A^0 \\ {\scriptstyle h_1'}\big\downarrow {\scriptstyle \times h_2'} & & \big\downarrow {\scriptstyle \varphi'} \\ M_2(A) \times M_2(A)^0 & \xrightarrow{\theta} & V_{M_2(A)} \approx M_2(V_A) \end{array}$$

où $h_i'(x) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Puisque h_1' et h_2' induisent une équivalence d'homotopie entre $\mathcal{K}(A) \sim {}_\varepsilon\mathcal{L}(A \times A^0)$ et $\mathcal{K}(M_2(A)) \sim {}_\varepsilon\mathcal{L}(M_2(A) \times M_2(A)^0)$, on en déduit que les fibres homotopiques de θ et φ' ont le même type d'homotopie. Or la fibre homotopique de φ' (resp. θ) a le type d'homotopie de $\mathcal{L}(U_{V_A})$ (resp. $\mathcal{L}(M_2(SA)) \sim \Omega^{-1}\mathcal{L}(A)$). Donc $\Omega_\varepsilon\mathcal{L}(U_{V_A}) \sim {}_\varepsilon\mathcal{L}(A)$, cette équivalence d'homotopie étant aussi compatible avec les structures de L_*-modules.

1.5. Des considérations tout à fait analogues (en fait plus faciles à démontrer) peuvent s'appliquer au cas où A est une algèbre de Banach munie d'une antiinvolution. On note $\mathcal{K}^{\text{top}}(A) = K_0(A) \times B\mathrm{GL}(A)^{\text{top}}$ (resp. ${}_\varepsilon\mathcal{L}^{\text{top}}(A) = {}_\varepsilon L_0(A) \times B_\varepsilon O(A)^{\text{top}}$) l'espace classifiant de la K-théorie topologique (resp. de la K-théorie hermitienne topologique). De même, on note ${}_\varepsilon\mathfrak{U}^{\text{top}}(A)$ (resp. ${}_\varepsilon\mathfrak{V}^{\text{top}}(A)$) la fibre homotopique de $\mathcal{K}^{\text{top}}(A) \to {}_\varepsilon\mathcal{L}^{\text{top}}(A)$ (resp. ${}_\varepsilon\mathcal{L}^{\text{top}}(A) \to \mathcal{K}^{\text{top}}(\bar{U}_A)$). Cette fibre a aussi le type d'homotopie de $\Omega_\varepsilon\mathcal{L}^{\text{top}}(\bar{U}_A)$ (resp. $\mathcal{L}^{\text{top}}(\bar{V}_A)$) où $\bar{U}_A$ (resp. $\bar{V}_A$) est le produit fibré

$$\begin{array}{ccc} \bar{U}_A & \longrightarrow & \bar{C}M_2(A) \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \bar{S}(A \times A^0) & \longrightarrow & \bar{S}M_2(A) \end{array} \qquad \left(\text{resp. } \begin{array}{ccc} \bar{V}_A & \longrightarrow & \bar{C}(A \times A^0) \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \bar{S}A & \longrightarrow & \bar{S}(A \times A^0) \end{array}\right)$$

où $\bar{C}$ et $\bar{S}$ désignent le cône et la suspension topologique des algèbres de Banach considérées. Comme dans le cas algébrique, on a des équivalences d'homotopie $\Omega_\varepsilon\mathcal{L}^{\text{top}}(\bar{V}_{U_A}) \sim \Omega_\varepsilon\mathcal{L}^{\text{top}}(\bar{U}_{V_A}) \sim {}_\varepsilon\mathcal{L}^{\text{top}}(A)$ compatibles avec les structures de L_*-modules. En outre les morphismes évidents du cône et de la suspension algébrique vers le cône ou la suspension topologique permettent de définir des applications continues ${}_\varepsilon\mathfrak{U}(A) \to {}_\varepsilon\mathfrak{U}^{\text{top}}(A)$, ${}_\varepsilon\mathfrak{V}(A) \to {}_\varepsilon\mathfrak{V}^{\text{top}}(A)$, etc.

Le théorème fondamental de la K-théorie hermitienne *topologique* (cf.

[7], § 3 et 4) exprime que les espaces ${}_\varepsilon\mathcal{V}^{\text{top}}(A)$ et $\Omega_{-\varepsilon}\mathcal{U}^{\text{top}}(A)$ ont le même type d'homotopie, l'équivalence d'homotopie étant compatible avec les structures de L_*-modules (cf. [7], p. 367). Nous nous servirons de ce fait dans les paragraphes 2 et 3.

II. Les groupes ${}_{-1}D_0(\mathbf{Z})$ et ${}_{-1}E_{-2}(\bar{\mathbf{Z}})$ et leur involution canonique

2.1. En 1.3 nous avons désigné par ${}_\varepsilon\mathcal{D}(A)$ la fibre homotopique de l'application

$$\mathcal{K}(A) \sim {}_\varepsilon\mathcal{U}(A \times A^0) \longrightarrow {}_\varepsilon\mathcal{U}(M_2(A)) \sim {}_\varepsilon\mathcal{U}(A)$$

qui peut être interprétée comme $\Omega^2_\varepsilon\mathcal{L}(U^2_A)$ avec $U^2_A = U_{U_A}$. De manière symétrique, nous allons désigner par ${}_\varepsilon\mathcal{E}(A)$ la fibre homotopique de l'application

$${}_\varepsilon\mathcal{V}(A) \longrightarrow {}_\varepsilon\mathcal{V}(A \times A^0) \sim \Omega\mathcal{K}(A)$$

qui peut être interprétée comme $\Omega^2({}_\varepsilon\mathcal{L}(V^2_A))$ avec $V^2_A = V_{V_A}$. On posera

$$\begin{aligned} {}_\varepsilon D_n(A) &= \pi_n({}_\varepsilon\mathcal{D}(A)) , \\ {}_\varepsilon E_n(A) &= \pi_n({}_\varepsilon\mathcal{E}(A)) \end{aligned}$$

pour $n \geqq 0$. Pour $n < 0$, on posera ${}_\varepsilon D_n(A) = {}_\varepsilon D_0(S^{-n}A)$ et ${}_\varepsilon E_n(A) = {}_\varepsilon E_0(S^{-n}A)$. Dans les considérations qui vont suivre, nous allons nous consacrer au calcul particulier de ${}_{-1}D_0(\mathbf{Z})$ (pour la forme paramètre maximum (cf. [9]) et de ${}_{-1}E_{-2}(\bar{\mathbf{Z}})$, $\bar{\mathbf{Z}}$ désignant l'anneau des polynômes $\mathbf{Z}[x]$, avec $\bar{x} = 1 - x$, ainsi que de leur involution canonique (cf. [9], § 1). Dans le cas où il existe λ dans le centre de A tel que $\lambda + \bar{\lambda} = 1$ (cas qui nous intéresse le plus ici), cette involution peut être interprétée comme le "cup-produit" par l'élément de ${}_1L_0(\bar{\mathbf{Z}})$ associé à la forme quadratique $\langle -x \rangle$ (de forme hermitienne associée -1). Ceci a un sens car tous les groupes considérés sont des "L_*-modules".

2.2. La suite exacte

$$K_2(\mathbf{Z}) \longrightarrow {}_{-1}L_2(\mathbf{Z}) \longrightarrow {}_{-1}U_1(\mathbf{Z}) \longrightarrow K_1(\mathbf{Z}) \longrightarrow {}_{-1}L_1(\mathbf{Z})$$

se réduit à ${}_{-1}W_2(\mathbf{Z}) \approx \operatorname{Ker} {}_{-1}U_1(\mathbf{Z}) \to K_1(\mathbf{Z})$. Puisque ${}_{-1}W_2(\mathbf{Z}) \simeq {}_1W_0(\mathbf{Z}) \approx \mathbf{Z}$ à des éléments de 2 torsion près [9], on a ${}_{-1}W_2(\mathbf{Z}) = \mathbf{Z} \oplus 2$ torsion. Comme nous l'avons montré en [9], le facteur $\mathbf{Z}$ est déterminé par l'homomorphisme ${}_{-1}W_2(\mathbf{Z}) \to {}_{-1}W_2^{\text{top}}(\mathbf{C}) \approx \mathbf{Z}$ (on trouve le double du générateur canonique de ${}_{-1}W_2^{\text{top}}(\mathbf{C})$). Notons au passage qu'on aurait pu aussi envoyer ${}_{-1}W_2(\mathbf{Z})$ dans ${}_{-1}W_2^{\text{top}}(\mathbf{R}) \approx \pi_1(\operatorname{Sp}(\mathbf{R})) \approx \pi_1(U) \approx \mathbf{Z}$. En effet, l'homomorphisms canonique

$$\mathbf{Z} \approx {}_{-1}W_2^{\text{top}}(\mathbf{R}) \longrightarrow {}_{-1}W_2^{\text{top}}(\mathbf{C}) \approx \mathbf{Z}$$

est la multiplication par 2 (au signe près). Donc le générateur de la partie libre de ${}_{-1}W_2(\mathbf{Z})$ a comme image un générateur de ${}_{-1}W_2^{\text{top}}(\mathbf{R}) \approx \mathbf{Z}$. De même, la comparaison des deux suites exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & {}_{-1}W_2(\mathbf{Z}) & \longrightarrow & {}_{-1}U_1(\mathbf{Z}) & \longrightarrow & \mathbf{Z}/2 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \longrightarrow & {}_{-1}W_2^{\mathrm{top}}(\mathbf{R}) & \longrightarrow & {}_{-1}U_1^{\mathrm{top}}(\mathbf{R}) & \longrightarrow & \mathbf{Z}/2 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

montre que ${}_{-1}U_1(\mathbf{Z}) \approx \mathbf{Z} \oplus 2$ torsion et qu'un générateur de la partie libre a comme image un générateur de ${}_{-1}U_1^{\mathrm{top}}(\mathbf{R}) \approx {}_1V_0^{\mathrm{top}}(\mathbf{R}) \approx \mathbf{Z}$ [7].

2.3. Considérons maintenant la suite exacte

$$K_1(\mathbf{Z}) \longrightarrow {}_{-1}U_1(\mathbf{Z}) \longrightarrow {}_{-1}D_0(\mathbf{Z}) \longrightarrow K_0(\mathbf{Z}) \longrightarrow {}_{-1}U_0(\mathbf{Z}) .$$

Dans cette suite, nous avons besoin de connaître de manière précise l'homomorphisme $\mathbf{Z} \approx K_0(\mathbf{Z}) \to {}_{-1}U_0(\mathbf{Z})$. Pour cela nous allons donner une définition équivalente du foncteur $A \mapsto {}_\varepsilon U_0(A)$ qui a son intérêt propre.

D'une manière générale considérons tout d'abord un homomorphisme $\varphi\colon A \to B$ d'anneaux hermitiens. A cet homomorphisme on peut associer la catégorie ${}_\varepsilon Q'_\varphi$ dont les objets sont les triples (E, F, α), où E et F sont des objets de ${}_\varepsilon Q_A$ (cf. [9] § 1) et où $\alpha\colon \varphi E \to \varphi F$ est un isomorphisme, $\varphi\colon {}_\varepsilon Q_A \to {}_\varepsilon Q_B$ désignant le foncteur extension des scalaires. Un morphisme dans cette catégorie entre un triple (E, F, α) et un triple (E', F', α') est donné par des morphismes directs $u\colon E \to E'$ et $v\colon F \to F'$ ainsi qu'un isomorphisme $E'/u(E) \xrightarrow{\eta} F'/v(F)$ tels que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccccc} \varphi E & \xrightarrow{\varphi u} & \varphi E' & \longrightarrow & \varphi(E'/u(E)) \\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\alpha'} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi\eta} \\ \varphi F & \xrightarrow{\varphi v} & \varphi F' & \longrightarrow & \varphi(F'/v(F)) \end{array}$$

(en d'autres termes α' s'identifie à $\alpha \oplus \varphi(\eta)$). Nous avons un foncteur évident de cette catégorie dans la catégorie ${}_\varepsilon Q'_A$ [9] et le foncteur composé ${}_\varepsilon Q'_\varphi \to {}_\varepsilon Q'_A \to {}_\varepsilon Q'_B$ admet une transformation naturelle vers le foncteur constant. On en déduit une application continue

$$B_\varepsilon Q'_\varphi \longrightarrow {}_\varepsilon\mathfrak{S}(\varphi)$$

où ${}_\varepsilon\mathfrak{S}(\varphi)$ désigne la fibre homotopique de $B_\varepsilon Q'_A \to B_\varepsilon Q'_B$. Cette application continue n'est pas une équivalence d'homotopie en général (c'est cependant le cas si l'homomorphisme $A \to B$ est une surjection).

2.4. LEMME. *Soient (E, F, α) et (F, G, β) deux objets de ${}_\varepsilon Q'_\varphi$. Alors l'image de l'objet $(E, G, \beta\alpha)$ dans le groupe $\pi_0({}_\varepsilon\mathfrak{S}(\varphi))$ est la somme des images de (E, F, α) et (F, G, β).*

Démonstration. Commençons par montrer que la somme des images de (E, F, α) et (F, E, α^{-1}) est égale à 0. En effet, cette somme est homotope à $(E \oplus F \oplus E,\ E \oplus F \oplus E,\ \delta)$ où δ est définie par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

et il est bien connu (cf. [6] par exemple) que δ est un commutateur. Un tel élément est dans l'image de $\pi_0(\Omega_\varepsilon Q'_B)$ par l'application $\Omega_\varepsilon Q'_B \to {}_\varepsilon\mathfrak{S}(\varphi)$. En effet, on peut le représenter par le "lacet"

$$(0, 0) \xrightarrow{\bar{\delta}} (H, H) \xleftarrow{i} (0, 0)$$

où $H = E \oplus F \oplus E$, où $\bar{\delta}$ est associé à l'isomorphisme δ et où i est associé à l'automorphisme identique. Pour démontrer la première assertion, on est ainsi ramené à prouver que la correspondance qui associe à un élément σ de $\mathrm{Aut}(R)$ la classe du lacet

$$(0, 0) \xrightarrow{\bar{\sigma}} (R, R) \longleftarrow (0, 0)$$

ou

$$\begin{tikzcd} (R, R) \arrow[r, "{(\sigma, 1)}"] & (R, R) \\ (0, 0) \arrow[r] \arrow[u, "i"] & (0, 0) \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

est un homomorphisme de $\mathrm{Aut}(R)$ dans $\pi_1(B_\varepsilon Q'_B)$ (qui est abélien), ce qui est évident par composition.

Pour démontrer le lemme, on est donc ramené à prouver que l'objet $(E \oplus F,\ F \oplus G,\ \alpha \oplus \beta) + (F \oplus G,\ E \oplus F,\ \gamma)$ où γ est la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha^{-1}\beta^{-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

représente 0. Ceci est une conséquence du fait que $\alpha \oplus \beta \oplus \gamma$ est stablement un produit de commutateurs lorsqu'on identifie $E \oplus F \oplus F \oplus G$ à $F \oplus G \oplus E \oplus F$.

2.5. PROPOSITION. *Soit* ${}_\varepsilon L_0(\varphi)$ *le groupe de Grothendieck du foncteur* $\varphi\colon {}_\varepsilon Q_A \to {}_\varepsilon Q_B$. *Alors la correspondance* $(E, F, \alpha) \mapsto$ *image de* (E, F, α) *dans* $\pi_0({}_\varepsilon\mathfrak{S}(\varphi))$ *induit un isomorphisme de* ${}_\varepsilon L_0(\varphi)$ *sur* $\pi_0({}_\varepsilon\mathfrak{S}(\varphi))$.

Démonstration. Le lemme montre que l'homomorphisme ${}_\varepsilon L_0(\varphi) \to \pi_0({}_\varepsilon\mathfrak{S}(\varphi))$ est bien défini. La proposition résulte alors du lemme des cinq appliqué au diagramme [6]

$$\begin{tikzcd} {}_\varepsilon L_1(A) \arrow[r] \arrow[d, "\approx"] & {}_\varepsilon L_1(B) \arrow[r] \arrow[d, "\approx"] & {}_\varepsilon L_0(\varphi) \arrow[r] \arrow[d] & {}_\varepsilon L_0(A) \arrow[r] \arrow[d, "\approx"] & {}_\varepsilon L_0(B) \arrow[d, "\approx"] \\ \pi_0(\Omega B_\varepsilon Q'_A) \arrow[r] & \pi_0(\Omega B_\varepsilon Q'_B) \arrow[r] & \pi_0({}_\varepsilon\mathfrak{S}(\varphi)) \arrow[r] & \pi_0(B_\varepsilon Q'_A) \arrow[r] & \pi_0(B_\varepsilon Q'_B) \end{tikzcd}$$

2.6. Comme application de ce qui précède, nous allons pouvoir expliciter le groupe ${}_\varepsilon U_0(A)$ et l'homomorphisme $K_0(A) \to {}_\varepsilon U_0(A)$. En effet, ${}_\varepsilon U_0(A)$ n'est autre que le groupe de Grothendieck du foncteur

$$ {}_\varepsilon Q(A \times A^0) \longrightarrow {}_\varepsilon Q(M_2(A)) $$

soit, à équivalence près, le groupe de Grothendieck du foncteur hyperbolique $\mathcal{P}(A) \longrightarrow {}_\varepsilon Q(A)$. Tout élément de ${}_\varepsilon U(A)$ s'écrit donc comme la classe d'un triple (E, F, α) où E et F sont deux A-modules projectifs et où $\alpha\colon H(E) \to H(F)$ est un isomorphisme. L'homomorphisme $K(A) \to {}_\varepsilon U(A)$ s'explicite comme l'homomorphisme composé

$$ K(A) \approx {}_\varepsilon U(A \times A^0) \longrightarrow {}_\varepsilon U(M_2(A)) \approx {}_\varepsilon U(A) . $$

Il associe à un module projectif E, la classe du triple $(E, {}^tE, \alpha)$ où α est l'isomorphisme canonique de $H(E)$ sur $H({}^tE)$. En particulier l'homomorphisme $K(\mathbf{Z}) \to {}_{-1}U_0(\mathbf{Z})$ associe au générateur de $K(\mathbf{Z})$ l'élément de ${}_{-1}U_0(\mathbf{Z})$ défini par la classe de $(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}, \alpha)$ où α est la matrice symplectique

$$ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . $$

Il est bien connu que cette matrice est stablement un produit de commutateurs (pour la forme paramètre maximum; cf. [9, § 1]). Donc l'homomorphisme $K(\mathbf{Z}) \to {}_{-1}U_0(\mathbf{Z})$ est réduit à 0.

D'autre part, le générateur de $K_1(\mathbf{Z}) \approx \mathbf{Z}/2$ est dans l'image de l'homomorphisme ${}_1L_1(\mathbf{Z}) \to K_1(\mathbf{Z})$: considérer le matrice

$$ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} $$

dans le groupe ${}_1O_{1,1}(\mathbf{Z})$ (pour la forme paramètre maximum). En raison du diagramme commutatif

$$ \begin{array}{ccc} {}_1L_1(\mathbf{Z}) \otimes K_0(\mathbf{Z}) & \longrightarrow & L_1(\mathbf{Z}) \otimes {}_{-1}U_0(\mathbf{Z}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ K_1(\mathbf{Z}) & \longrightarrow & {}_{-1}U_1(\mathbf{Z}) \end{array} $$

il en résulte que l'homomorphisme $K_1(\mathbf{Z}) \to {}_{-1}U_1(\mathbf{Z})$ est réduit à zéro (toujours pour la forme paramètre maximum).

2.7. Ainsi la suite exacte

$$ K_1(\mathbf{Z}) \longrightarrow {}_{-1}U_1(\mathbf{Z}) \longrightarrow {}_{-1}D_0(\mathbf{Z}) \longrightarrow K_0(\mathbf{Z}) \longrightarrow {}_{-1}U_0(\mathbf{Z}) $$

devient

$$ 0 \longrightarrow {}_{-1}U_1(\mathbf{Z}) \longrightarrow {}_{-1}D_0(\mathbf{Z}) \longrightarrow K_0(\mathbf{Z}) \longrightarrow 0 . $$

Il en résulte que ${}_{-1}D_0(\mathbf{Z})$ est isomorphe à $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \oplus$ (2 torsion). D'autre part, nous pouvons développer des considérations parallèles dans le cadre topologique. De manière précise, pour toute algèbre de Banach involutive A, on peut définir ${}_{\varepsilon}\mathfrak{U}^{\mathrm{top}}(A)$ comme la fibre homotopique de l'application continue

$$K(A) \times B\mathrm{GL}(A)^{\mathrm{top}} \longrightarrow {}_{\varepsilon}L(A) \times B_{\varepsilon}O(A)^{\mathrm{top}}$$

(cf. 1.5). De même ${}_{\varepsilon}\mathfrak{D}^{\mathrm{top}}(A)$ est la fibre homotopique de l'application continue

$$K(A) \times B\mathrm{GL}(A)^{\mathrm{top}} \sim \mathfrak{U}^{\mathrm{top}}(A \times A^{0}) \longrightarrow \mathfrak{U}^{\mathrm{top}}\big(M_2(A)\big)\ .$$

Dans le cas où A est le corps $\mathbf{R}$ des nombres réels (muni de sa topologie usuelle), on peut calculer le groupe ${}_{-1}D_0^{\mathrm{top}}(\mathbf{R}) = \pi_0\big({}_{-1}\mathfrak{D}^{\mathrm{top}}(\mathbf{R})\big)$. En effet, les mêmes suites exactes que dans le cas discret permettent de montrer que ${}_{-1}D_0^{\mathrm{top}}(\mathbf{R}) \approx \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ et que l'homomorphisme "évident" ${}_{-1}D_0(\mathbf{Z}) \rightarrow {}_{-1}D_0^{\mathrm{top}}(\mathbf{R})$ applique la partie libre isomorphiquement sur ${}_{-1}D_0^{\mathrm{top}}(\mathbf{R})$.

2.8. Les renseignements que nous venons d'obtenir ne sont pas suffisants cependant pour notre propos. De manière plus précise, il nous faut déterminer quel est l'effet de l'involution canonique ([9], § 1) sur le groupe ${}_{-1}D_0(\mathbf{Z})$ ce qui est en fait la partie la plus délicate de cette étude. La suite exacte

$$0 \longrightarrow {}_{-1}U_1(\mathbf{Z}) \longrightarrow {}_{-1}D_0(\mathbf{Z}) \longrightarrow K_0(\mathbf{Z}) \longrightarrow 0$$

nous permet de voir qu'à isomorphisme près, l'involution sur la partie libre $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ de ${}_{-1}D_0(\mathbf{Z})$ est soit définie par la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

soit définie par la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nous allons démontrer que ${}_{-1}D_0(\mathbf{Z})$ est en fait muni de la deuxième involution. Puisque les parties libres de ${}_{-1}D_0(\mathbf{Z})$ et de ${}_{-1}D_0^{\mathrm{top}}(\mathbf{R})$ sont isomorphes, il suffit de préciser l'involution sur ${}_{-1}D_0^{\mathrm{top}}(\mathbf{R}) \approx \mathbf{Z}^2$. En appliquant les considérations de 1.5 et le théorème fondamental de la K-théorie hermitienne topologique ([7], § 3 et 4) on démontre les isomorphismes suivants:

$${}_{-1}D_0^{\mathrm{top}}(\mathbf{R}) \approx {}_{-1}L_2^{\mathrm{top}}(\bar{U}_{\mathbf{R}}^2) \approx {}_{-1}U_1^{\mathrm{top}}(\bar{U}_{\mathbf{R}}) \approx {}_{1}V_0^{\mathrm{top}}(\bar{U}_{\mathbf{R}}) \approx {}_{1}L_0(\mathbf{R})\ .$$

Ces isomorphismes sont des isomorphismes de L_*-modules. Donc l'involution cherchée est obtenue en considérant dans ${}_{1}L_0(\mathbf{R}) = \mathbf{Z}^2$ l'involution induite par $(E, q) \mapsto (E, -q)$ (où $-q$ est la forme quadratique opposée à q sur l'espace vectoriel E). Soit (i, j) la base de ${}_{1}L_0(\mathbf{R})$ formée des formes quadratiques $t \mapsto t^2$ et $t \mapsto -t^2$ respectivement. Alors il est clair que dans la base $(i - j, j)$ l'involution se présente par la matrice,

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.9. On peut procéder de manière tout à fait analogue pour déterminer le groupe ${}_{-1}E_{-2}(\bar{\mathbf{Z}})$ (du moins à la 2-torsion près; cf. 2.1). Pour tout anneau hermitien A, on a la suite exacte

$${}_{\varepsilon}V_{n-1}(A) \longrightarrow K_n(A) \longrightarrow {}_{\varepsilon}E_{n-2}(A) \longrightarrow {}_{\varepsilon}V_{n-2}(A) \longrightarrow K_{n-1}(A)\ .$$

En particulier, pour $A = \bar{\mathbf{Z}}$, $\varepsilon = -1$ et $n = 0$, on a la suite exacte

$${}_{-1}V_{-1}(\bar{\mathbf{Z}}) \longrightarrow K(\bar{\mathbf{Z}}) \longrightarrow {}_{-1}E_{-2}(\bar{\mathbf{Z}}) \longrightarrow {}_{-1}V_{-2}(\bar{\mathbf{Z}}) \longrightarrow K_{-1}(\bar{\mathbf{Z}})\ .$$

Le groupe ${}_{-1}V_{-1}(\bar{\mathbf{Z}})$ est au plus de 2-torsion et $K(\bar{\mathbf{Z}}) \approx \mathbf{Z}$. Donc ${}_{1}E_{-2}(\bar{\mathbf{Z}}) \approx \mathbf{Z} \oplus {}_{-1}V_{-2}(\bar{\mathbf{Z}}) \approx \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \oplus (2\ \text{torsion})$. Pour préciser ce calcul, il nous faut cependant déterminer l'effet de l'involution canonique sur le groupe ${}_{-1}E_{-2}(\bar{\mathbf{Z}})$, du moins sur sa partie libre.

Comme dans le cas du groupe ${}_{-1}D_0(\mathbf{Z})$, nous pouvons comparer la situation algébrique et la situation topologique. En effet, on a les isomorphismes suivants de L_*-modules

$${}_{-1}E^{\mathrm{top}}_{-2}(\mathbf{R}) \approx {}_{-1}L_0(\bar{V}^2_{\mathbf{R}}) \approx {}_{-1}V^{\mathrm{top}}_{-1}(\bar{V}_{\mathbf{R}}) \approx {}_{1}U^{\mathrm{top}}_{0}(\bar{V}_{\mathbf{R}}) \approx {}_{1}L_0(\mathbf{R})\ .$$

Comme dans le cas du groupe ${}_{-1}D_0(\mathbf{Z})$, on peut donc affirmer que dans une base convenable, l'involution canonique sur le groupe ${}_{-1}E^{\mathrm{top}}_{-2}(\mathbf{R})$ se présente sous la même forme matricielle

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'autre part, on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
V_{-1}(\bar{\mathbf{Z}}) & \longrightarrow & K_0(\bar{\mathbf{Z}}) & \longrightarrow & {}_{-1}E_{-2}(\bar{\mathbf{Z}}) & \longrightarrow & {}_{-1}V_{-2}(\bar{\mathbf{Z}}) & \longrightarrow & K_{-1}(\bar{\mathbf{Z}}) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
V^{\mathrm{top}}_{-1}(\mathbf{R}) & \longrightarrow & K_0(\mathbf{R}) & \longrightarrow & {}_{-1}E^{\mathrm{top}}_{-2}(\mathbf{R}) & \longrightarrow & {}_{-1}V^{\mathrm{top}}_{-2}(\mathbf{R}) & \longrightarrow & K^{\mathrm{top}}_{-1}(\mathbf{R})
\end{array}$$

qui se simplifie en

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & K_0(\bar{\mathbf{Z}}) & \longrightarrow & {}_{-1}E_{-2}(\bar{\mathbf{Z}}) & \longrightarrow & {}_{-1}V_{-2}(\bar{\mathbf{Z}}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \approx\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & K_0(\mathbf{R}) & \longrightarrow & {}_{-1}E^{\mathrm{top}}_{-2}(\mathbf{R}) & \longrightarrow & {}_{-1}V^{\mathrm{top}}_{-2}(\mathbf{R}) & \longrightarrow & 0\ .
\end{array}$$

D'après les calculs explicites faits en [9, § 3], l'homomorphisme

$${}_{-1}W_{-2}(\bar{\mathbf{Z}}) \approx {}_{-1}V_{-2}(\bar{\mathbf{Z}}) \longrightarrow {}_{-1}V^{\mathrm{top}}_{-2}(\mathbf{R}) \approx {}_{-1}W^{\mathrm{top}}_{-2}(\mathbf{R})$$

est surjectif. Par conséquent, l'homomorphisme

$${}_{-1}E_{-2}(\bar{\mathbf{Z}}) \longrightarrow {}_{-1}E^{\mathrm{top}}_{-2}(\mathbf{R})$$

induit un isomorphisme sur les parties libres (compatible avec les involutions). Il en résulte que l'involution sur la partie libre de ${}_{-1}E_{-2}(\overline{\mathbf{Z}})$ est bien défini par la matrice précédente.

III. Demonstration du théorème fondamental

3.1. Choisissons une fois pour toutes un élément σ de ${}_{-1}D_0(\mathbf{Z})$ (pour la forme paramètre maximum) correspondant à l'élément unité de ${}_1L_0(\mathbf{R})$. Le choix d'un tel élément permet de définir une application

$$ {}_\varepsilon\mathcal{L}(A) \longrightarrow {}_{-\varepsilon}\mathcal{D}(A) $$

à partir du bimorphisme $A \times U^2_{\mathbf{Z}} \to U^2_A$ et de l'accouplement

$$ {}_\varepsilon\mathcal{L}(A) \wedge {}_{-1}\mathcal{D}(\mathbf{Z}) \longrightarrow {}_{-\varepsilon}\mathcal{D}(A) $$

qu'on en déduit. Si on remplace A par $A \times A^0$, l'application

$$ \mathcal{K}(A) \sim {}_\varepsilon\mathcal{L}(A \times A^0) \longrightarrow {}_{-\varepsilon}\mathcal{D}(A \times A^0) \sim \mathcal{K}(A) $$

qu'on obtient est faiblement homotope à l'identité car l'image de σ dans $\pi_0(\mathcal{D}(U^2_{\mathbf{Z}} \times U^2_{\mathbf{Z}^0})) = \pi_0(\mathcal{K}(\mathbf{Z}))$ est l'élément unité de $\pi_0(\mathcal{K}(\mathbf{Z})) = K_0(\mathbf{Z})$.

D'autre part, en remplaçant l'anneau A par l'anneau V_A, on définit une application

$$ {}_\varepsilon\mathcal{V}(SA) \sim {}_\varepsilon\mathcal{L}(V_A) \longrightarrow {}_{-\varepsilon}\mathcal{D}(V_A) \sim {}_{-\varepsilon}\mathcal{L}(U^2_{V_A}) \sim \Omega_{-\varepsilon}\mathcal{L}(U_A) \sim {}_{-\varepsilon}\mathcal{U}(A) . $$

En outre on a le diagramme commutatif à homotopie faible près

$$ \begin{array}{ccccccc} \Omega\mathcal{K}(SA) & \longrightarrow & {}_\varepsilon\mathcal{V}(SA) & \longrightarrow & {}_\varepsilon\mathcal{L}(SA) & \longrightarrow & \mathcal{K}(SA) \\ \| & & \Big| & & \Big| & & \| \\ \Omega\mathcal{K}(SA) & \longrightarrow & {}_{-\varepsilon}\mathcal{U}(A) & \longrightarrow & {}_{-\varepsilon}\mathcal{D}(SA) & \longrightarrow & \mathcal{K}(SA) \end{array} $$

provenant de la suite exacte

$$ 0 \longrightarrow \tilde{A} \times \tilde{A}^0 \longrightarrow V_A \longrightarrow SA \longrightarrow 0 $$

à laquelle on applique les foncteurs ${}_\varepsilon\mathcal{L}$ et ${}_{-\varepsilon}\mathcal{D}$. Enfin, on a aussi les diagrammes commutatifs à homotopie faible près

$$ \begin{array}{ccc} {}_\varepsilon\mathcal{V}(SA) & \longrightarrow & {}_{-\varepsilon}\mathcal{U}(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ {}_\varepsilon\mathcal{V}(SA \times SA^0) & \longrightarrow & {}_{-\varepsilon}\mathcal{U}(A \times A^0) \\ \wr & & \wr \\ \mathcal{K}(A) & \xrightarrow{\mathrm{Id}} & \mathcal{K}(A) , \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{K}(A) & \xrightarrow{\mathrm{Id}} & \mathcal{K}(A) \\ \wr & & \wr \\ {}_\varepsilon\mathcal{V}(SA \times SA^0) & \longrightarrow & {}_{-\varepsilon}\mathcal{U}(A \times A^0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ {}_\varepsilon\mathcal{V}(SA) & \longrightarrow & {}_{-\varepsilon}\mathcal{U}(A) \end{array} $$

d'après 1.3 et d'après ce qui a été dit au début de ce paragraphe sur l'application ${}_\varepsilon\mathcal{L}(A) \to {}_{-\varepsilon}\mathcal{D}(A)$ lorsqu'on remplace A par $A \times A^0$.

3.2. En remplaçant A par des suspensions itérées, on obtient ainsi des homomorphismes

$$ {}_{\varepsilon}V_n(A) \longrightarrow {}_{-\varepsilon}U_{n+1}(A) $$

rendant commutatifs les diagrammes

$$\begin{tikzcd} {}_{\varepsilon}V_n(A) \arrow[rr] \arrow[dr] & & {}_{-\varepsilon}U_{n+1}(A) \arrow[dl] \\ & K_{n+1}(A) & \end{tikzcd} \quad , \qquad \begin{tikzcd} & K_{n+1}(A) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ {}_{\varepsilon}V_n(A) \arrow[rr] & & {}_{-\varepsilon}U_{n+1}(A) \end{tikzcd} .$$

On notera ici que les homomorphismes composés

$$ K_{n+1}(A) \longrightarrow {}_{\varepsilon}V_n(A) \longrightarrow K_{n+1}(A) \text{ et } K_{n+1}(A) \longrightarrow {}_{-\varepsilon}U_{n+1}(A) \longrightarrow K_{n+1}(A) $$

sont de la forme $x \mapsto x - \bar{x}$ où $\bar{x}$ désigne le transformé de x par l'involution canonique de $K_{n+1}(A)$ (cf. 4.1).

D'après la construction de l'application continue ${}_{\varepsilon}\mathcal{V}(SA) \to {}_{-\varepsilon}\mathcal{U}(A)$, l'homomorphisme ${}_{\varepsilon}V_n(A) \to {}_{-\varepsilon}U_{n+1}(A)$ induit un isomorphisme entre les parties libres pour $\varepsilon = 1$, $n = 0$ et $A = \mathbf{R}$ (muni de la topologie discrète) ou $\mathbf{Z}$ (pour la forme paramétre maximum). Examinons maintenant l'autre cas particulier où $\varepsilon = -1$, $n = -2$ et $A = \mathbf{R}$. On a alors le diagramme commutatif (aux éléments de 2-torsion près):

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Z} \approx {}_{1}V(\mathbf{R}) \arrow[r, "\approx"] \arrow[d, "\times 2"] & {}_{-1}U_1(\mathbf{R}) \arrow[d, "\times 2"] & {}_{-1}W_2(\mathbf{R}) \arrow[l, "\times 2"'] \arrow[d, "\times 4"] \\ \mathbf{Z} + (2\text{-torsion}) \approx {}_{-1}V_{-2}(\mathbf{R}) \arrow[r, "\approx"] & {}_{1}U_{-1}(\mathbf{R}) & {}_{1}W_0(\mathbf{R}) \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Dans ce diagramme les flèches verticales sont définies par le cup-produit avec le générateur canonique de ${}_{-1}L_{-2}(\mathbf{R}) \approx \mathbf{Z}$ (cf. [9]). D'après les calculs faits en [9], ${}_{1}V_0(\mathbf{R}) \approx \mathbf{Z} \approx {}_{-1}V_{-2}(\mathbf{R})$ modulo 2-torsion et la flèche ${}_{1}V(\mathbf{R}) \to {}_{-1}V_{-2}(\mathbf{R})$ est essentiellement la multiplication par 2. D'après les calculs faits en [9], la flèche ${}_{-1}W_2(\mathbf{R}) \to {}_{1}W_0(\mathbf{R}) \approx \mathbf{Z}$ est la multiplication par 4 sur les parties libres. Il s'en suit que la flèche ${}_{1}U_1(\mathbf{R}) \to {}_{-1}U_{-1}(\mathbf{R})$ est la multiplication par 2 sur les parties libres. Puisque ${}_{1}V(\mathbf{R}) \to {}_{-1}U_1(\mathbf{R})$ est un isomorphisme sur la partie libre, il en est donc de même de la flèche ${}_{-1}V_{-2}(\mathbf{R}) \to {}_{1}U_{-1}(\mathbf{R})$.

3.3. Nous allons procéder de manière tout à fait analogue pour construire une application en sens inverse

$$ {}_{-\varepsilon}\mathcal{U}(A) \longrightarrow {}_{-\varepsilon}\mathcal{V}(SA) . $$

Ici l'hypothèse qu'il existe un élément λ du centre de A tel que $\lambda + \bar{\lambda} = 1$ est tout à fait essentielle pour nos constructions.

Comme en 3.1, choisissons un élément r de ${}_{-1}E_{-2}(\bar{\mathbf{Z}})$ correspondant à l'élément unité de ${}_{1}L_0(\mathbf{R})$ par l'homomorphisme ${}_{-1}E_{-2}(\bar{\mathbf{Z}}) \to {}_{-1}L_0(\mathbf{R})$ défini en

2.9. Dans la décomposition ${}_{-1}E_{-2}(\bar{\mathbf{Z}}) = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \oplus$ (2-torsion), r n'est autre que le couple (0, 1) à la 2-torsion près. S'il existe $\lambda \in A$ tel que $\lambda + \bar{\lambda} = 1$, on a un bimorphisme

$$A \times \bar{\mathbf{Z}} \longrightarrow A$$

donc un accouplement

$${}_{\varepsilon}\mathcal{L}(A) \times {}_{-1}\mathcal{E}_{-2}(\bar{\mathbf{Z}}) \longrightarrow {}_{-\varepsilon}\mathcal{E}_{-2}(A) .$$

De manière analogue à ce qui a été fait en 3.1, on peut ainsi définir des applications de "L_*-modules"

$${}_{\varepsilon}\mathcal{L}(A) \longrightarrow {}_{-1}\mathcal{E}_{-2}(A) \quad \text{et} \quad {}_{\varepsilon}\mathcal{U}(A) \longrightarrow {}_{-\varepsilon}\mathcal{V}(SA)$$

qui rendent commutatif à homotopie faible près le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\Omega_{\varepsilon}\mathcal{L}(A) \arrow[r] \arrow[d] & {}_{\varepsilon}\mathcal{U}(A) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{K}(A) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Id}"] & {}_{\varepsilon}\mathcal{L}(A) \arrow[d] \\
\Omega_{-\varepsilon}\mathcal{E}_{-2}(SA) \arrow[r] & {}_{-\varepsilon}\mathcal{V}(SA) \arrow[r] & \mathcal{K}(A) \arrow[r] & {}_{-\varepsilon}\mathcal{E}_{-2}(A) .
\end{tikzcd}$$

Il faut noter ici que l'application naturelle ${}_{-1}E_{-2}(\bar{\mathbf{Z}}) \to {}_{-1}E_{-2}(\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^0) \approx K_0(\mathbf{Z}) \approx \mathbf{Z}$ envoie r sur 1 car l'application composée

$$K_0(\mathbf{Z}) \approx {}_{-1}E_{-2}(\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^0) \longrightarrow {}_{-1}E_{-2}(\mathbf{Z}) \longrightarrow {}_{-1}E_{-2}(\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^0) \approx K_0(\mathbf{Z})$$

est la multiplication par 2; donc on a aussi les diagrammes commutatifs (à homotopie faible près),

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{K}(A) \arrow[r, "\mathrm{Id}"] \arrow[d] & \mathcal{K}(A) \arrow[d] \\
{}_{\varepsilon}\mathcal{U}(A) \arrow[r] & {}_{-\varepsilon}\mathcal{V}(SA) ,
\end{tikzcd} \qquad
\begin{tikzcd}
{}_{\varepsilon}\mathcal{U}(A) \arrow[r] \arrow[d] & {}_{-\varepsilon}\mathcal{V}(SA) \arrow[d] \\
\mathcal{K}(A) \arrow[r, "\mathrm{Id}"] & \mathcal{K}(A) .
\end{tikzcd}$$

3.4. Par construction, l'homomorphisme

$${}_{1}L_0(\bar{\mathbf{Z}}) \longrightarrow {}_{-1}E_{-2}(\bar{\mathbf{Z}})$$

est un isomorphisme sur la partie libre. Il en est donc de même de l'homomorphisme

$${}_{1}U_{-1}(\bar{\mathbf{Z}}) \longrightarrow {}_{-1}V_{-2}(\bar{\mathbf{Z}}) .$$

Montrons qu'il en est de même de l'homomorphisme

$${}_{-1}U_1(\bar{\mathbf{Z}}) \longrightarrow {}_{1}V_0(\bar{\mathbf{Z}}) .$$

En effet, on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & {}_{1}V_0(\bar{\mathbf{Z}}) & \\
{}_{-1}L_2(\bar{\mathbf{Z}}) \arrow[ur, "\times 2"] \arrow[r, "\times 2"'] & {}_{-1}U_1(\bar{\mathbf{Z}}) \arrow[u] \arrow[r] & K_1(\bar{\mathbf{Z}}) \\
\mathbf{Z} \arrow[u, phantom, "\cup"] & \mathbf{Z} \arrow[u, phantom, "\cup"] & \mathbf{Z}/2 \arrow[u, equal]
\end{tikzcd}$$

où deux flèches sont essentilement la multiplication par 2 sur un facteur $\mathbf{Z}$ (comparer avec la situation topologique de nouveau).

3.5. *Démonstration du théorème fondamental.* Soit A un anneau hermitien tel qu'il existe $\lambda \in Z(A)$ avec $\lambda + \bar{\lambda} = 1$. Nous allons démontrer plus précisément que les applications composées

$$ {}_\varepsilon\mathcal{V}(SA) \longrightarrow {}_{-\varepsilon}\mathcal{U}(A) \longrightarrow {}_\varepsilon\mathcal{V}(SA) $$

et

$$ {}_\varepsilon\mathcal{U}(A) \longrightarrow {}_{-\varepsilon}\mathcal{V}(SA) \longrightarrow {}_\varepsilon\mathcal{U}(A) $$

sont des équivalences d'homotopie. Pour cela, il suffit de démontrer que les homomorphismes composés ${}_\varepsilon V_{n-1}(A) \to {}_{-\varepsilon}U_n(A) \to {}_\varepsilon V_{n-1}(A)$ et ${}_\varepsilon U_n(A) \to {}_{-\varepsilon}V_{n-1}(A) \to {}_\varepsilon U_n(A)$ sont des isomorphismes. Pour le premier, on remarque le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
{}_\varepsilon V_{n-1}(A) \arrow[r] \arrow[d] & {}_{-\varepsilon}U_n(A) \arrow[r] \arrow[d] & {}_\varepsilon V_{n-1}(A) \arrow[d] \\
{}_\varepsilon L_{n-1}(A) \arrow[r] \arrow[d] & {}_{-\varepsilon}D_{n-1}(A) \arrow[r] \arrow[d] & {}_\varepsilon V_{n-1}(A) \arrow[d] \\
K_{n-1}(A) \arrow[r, "\mathrm{Id}"] \arrow[d] & K_{n-1}(A) \arrow[r, "\mathrm{Id}"] \arrow[d] & K_{n-1}(A) \arrow[d] \\
{}_\varepsilon V_n(A) \arrow[r] & {}_{-\varepsilon}U_{n-1}(A) \arrow[r] & {}_\varepsilon V_n(A) .
\end{tikzcd}$$

L'homomorphisme composé

$$ \varphi\colon {}_\varepsilon L_{n-1}(A) \longrightarrow {}_{-\varepsilon}D_{n-1}(A) \longrightarrow {}_\varepsilon L_{n-1}(A) $$

est un homomorphisme de L_*-modules. Il est donc de la forme $\varphi(x) = x \smile u$ ou u est un élément bien déterminé de ${}_1L_0(\bar{\mathbf{Z}})$. La signature de u est déterminée par l'effet de l'homomorphisme précédent pour $A = \mathbf{R}$, $n = 1$, $\varepsilon = 1$. Dans ce cas nous savons qu'aux éléments de 2-torsion près

$$ {}_1V_0(\mathbf{R}) \approx {}_{-1}U_1(\mathbf{R}) \approx {}_1V_0(\mathbf{R}) . \tag{3.1} $$

Donc la signature de u est ± 1 et u est de la forme $\pm 1 + \mu$ où μ est un élément de 2-torsion donc *nilpotent*. Ainsi l'homomorphisme composé

$$ {}_\varepsilon L_{n-1}(A) \longrightarrow {}_{-\varepsilon}D_{n-1}(A) \longrightarrow {}_\varepsilon L_{n-1}(A) $$

est un isomorphisme.

Il en est donc de même de l'homomorphisme composé

$$ {}_\varepsilon V_{n-1}(A) \longrightarrow {}_{-\varepsilon}U_n(A) \longrightarrow {}_\varepsilon V_{n-1}(A) . $$

Dans l'autre sens on a aussi un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
K_{n+1}(A) & \xrightarrow{\mathrm{Id}} & K_{n+1}(A) & \xrightarrow{\mathrm{Id}} & K_{n+1}(A) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
{}_{\varepsilon}L_{n+1}(A) & \longrightarrow & {}_{-\varepsilon}E_{n-1}(A) & \longrightarrow & {}_{\varepsilon}L_{n+1}(A) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
{}_{\varepsilon}U_{n}(A) & \longrightarrow & {}_{-\varepsilon}V_{n-1}(A) & \longrightarrow & {}_{\varepsilon}U_{n}(A) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
K_{n}(A) & \xrightarrow{\mathrm{Id}} & K_{n}(A) & \xrightarrow{\mathrm{Id}} & K_{n}(A) .
\end{array}$$

De nouveau, l'homomorphisme composé

$${}_{\varepsilon}L_{n+1}(A) \longrightarrow {}_{-\varepsilon}E_{n-1}(A) \longrightarrow {}_{\varepsilon}L_{n+1}(A)$$

est un homomorphisme de L_*-modules. Pour démontrer que c'est un isomorphisme, il suffit de le vérifier modulo la 2-torsion pour $A = \mathbf{R}$, $n = -1$, $\varepsilon = 1$, c'est-à-dire de vérifier les isomorphismes

$${}_{1}U_{-1}(\mathbf{R}) \xrightarrow{\approx} {}_{-1}V_{-2}(\mathbf{R}) \xrightarrow{\approx} {}_{1}U_{-1}(\mathbf{R})$$

ce qui résulte de 2.9.

IV. La suite exacte des 12

4.1. Le théorème fondamental démontré dans le paragraphe 3 permet d'écrire les deux suites exactes suivantes avec isomorphisme des termes du milieu

$$\begin{array}{ccccccccc}
{}_{\varepsilon}L_{n+1}(A) & \longrightarrow & K_{n+1}(A) & \longrightarrow & {}_{\varepsilon}V_{n}(A) & \longrightarrow & {}_{\varepsilon}L_{n}(A) & \longrightarrow & K_{n}(A) \\
 & & & & \wr & & & & \\
K_{n+2}(A) & \longrightarrow & {}_{-\varepsilon}L_{n+2}(A) & \longrightarrow & {}_{-\varepsilon}U_{n+1}(A) & \longrightarrow & K_{n+1}(A) & \longrightarrow & {}_{-\varepsilon}L_{n+1}(A) .
\end{array}$$

Explicitons l'homomorphisme composé $K_{n+1}(A) \to {}_{\varepsilon}V_{n}(A) \approx {}_{-\varepsilon}U_{n+1}(A) \to K_{n+1}(A)$. Pour cela on considère le diagramme

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & & K_{n+1}(A) & \to & {}_{\varepsilon}V_{n}(A) & \approx & {}_{-\varepsilon}U_{n+1}(A) & \to & K_{n+1}(A) \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
{}_{-\varepsilon}L_{n+1}(A\times A^0) & \xrightarrow{\sigma} & K_{n+1}(A\times A^0) & \to & {}_{\varepsilon}V_{n}(A\times A^0) & \approx & {}_{-\varepsilon}U_{n+1}(A\times A^0) & \to & K_{n+1}(A\times A^0)
\end{array}$$

où les flèches verticales sont induites par l'homomorphisme de A vers $A \times A^0$ défini par $x \mapsto (x, \bar{x})$. La deuxième suite permet d'identifier ${}_{\varepsilon}V_{n}(A \times A^0)$ et ${}_{-\varepsilon}U_{n+1}(A \times A^0)$ à $K_{n+1}(A)$, l'isomorphisme entre ${}_{\varepsilon}V_{n}(A)$ et ${}_{-\varepsilon}U_{n+1}(A)$ ayant été précisément choisi en sorte qu'il devienne l'identité lorsqu'on remplace A par $A \times A^0$. Il suffit donc d'expliciter l'homomorphisme composé

$$K_{n+1}(A) \xrightarrow{\tau} K_{n+1}(A \times A^0) \longrightarrow \operatorname{Coker} \sigma \approx K_{n+1}(A) .$$

Pour cela on remarque qu'au niveau des groupes linéaires, τ s'écrit

$\alpha \mapsto (\alpha, \bar{\alpha})$ tandis que l'identification de $\operatorname{Coker} \sigma$ avec $K_{n+1}(A)$ se fait grâce à l'application $(u, v) \mapsto u \oplus {}^t v$. Ainsi l'homomorphisme composé est induit par $\alpha \mapsto \alpha \oplus {}^t\bar{\alpha}$. Puisque l'involution canonique sur $K_{n+1}(A)$ est induite par $\alpha \mapsto {}^t\bar{\alpha}^{-1}$, il en résulte finalement que l'homomorphisme composé $K_{n+1}(A) \to {}_\varepsilon V_n(A) \approx {}_{-\varepsilon}U_{n+1}(A) \to K_{n+1}(A)$ est défini par $x \mapsto x - \bar{x}$ (en désignant encore par — l'involution canonique sur $K_{n+1}(A)$).

4.2. Comme en [9], on désigne par ${}_\varepsilon W_n(A)$ le "groupe de Witt" de A, c'est-à-dire $\operatorname{Coker} K_n(A) \to {}_\varepsilon L_n(A)$ et par $W'_n(A)$ le "cogroupe de Witt" de A, c'est-à-dire $\operatorname{Ker} {}_\varepsilon L_n(A) \to K_n(A)$. Enfin, on désigne par $k_n(A)$ (resp. $k'_n(A)$) le groupe de cohomologie de degré pair (resp. impair) de $\mathbf{Z}/2$ opérant sur $K_n(A)$ grâce à l'involution canonique $x \mapsto \bar{x}$. De manière explicite, $k_n(A)$ est le quotient du sous-groupe de $K_n(A)$ formé des éléments symétriques ($x = \bar{x}$) par le sous-groupe formé des éléments s'écrivant $y + \bar{y}$. De même, $k'_n(A)$ est le quotient du sous-groupe de $K_n(A)$ formé des éléments antisymétriques ($x = -\bar{x}$) par le sous-groupe formé des éléments s'écrivant $y - \bar{y}$.

4.3. THEOREME (suite exacte des 12). *Soit A un anneau hermitien avec un élément λ dans son centre tel que $\lambda + \bar{\lambda} = 1$. On a alors une suite exacte à 12 termes*

$$\begin{tikzcd}
k_{n+1}(A) \arrow[r, "j"] & {}_{-\varepsilon}W_{n+2}(A) \arrow[r, "\beta"] & {}_\varepsilon W'_n(A) \arrow[r, "d"] & k'_{n+1}(A) \arrow[r, "j'"] & {}_{-\varepsilon}W'_{n+1}(A) \arrow[r, "c"] & {}_{-\varepsilon}W_{n+1}(A) \arrow[d, "r"] \\
{}_\varepsilon W_{n+1}(A) \arrow[u, "r"] & {}_\varepsilon W'_{n+1}(A) \arrow[l, "c"'] & k'_{n+1}(A) \arrow[l, "j'"'] & {}_{-\varepsilon}W'_n(A) \arrow[l, "d"'] & {}_\varepsilon W_{n+2}(A) \arrow[l, "\beta"'] & k_{n+1}(A) \arrow[l, "j"']
\end{tikzcd},$$

où les homomorphismes j, β, d, j', c et r sont explicités dans la démonstration ci-dessous.

Démonstration. Nous allons d'abord définir les homomorphismes j, β, d, j', c et r à partir des deux suites exactes

$$\begin{tikzcd}
{}_\varepsilon L_{n+1}(A) \arrow[r, "f_{n+1}"] & K_{n+1}(A) \arrow[r, "\partial_{n+1}"] & {}_\varepsilon V_n(A) \arrow[r, "g_n"] \arrow[d, "v_n"', shift right] \arrow[d, phantom, "\approx"] & {}_\varepsilon L_n(A) \arrow[r, "f_n"] & K_n(A) \\
K_{n+2}(A) \arrow[r, "h_{n+2}"] & {}_{-\varepsilon}L_{n+2}(A) \arrow[r, "\delta_{n+2}"] & {}_{-\varepsilon}U_{n+1}(A) \arrow[r, "e_n"] \arrow[u, "u_{n+1}"', shift right] & K_{n+1}(A) \arrow[r, "h_{n+1}"] & {}_{-\varepsilon}L_{n+1}(A)
\end{tikzcd}.$$

Définition de j. Soit $[x] \in k_{n+1}(A)$, classe d'un élément x de $K_{n+1}(A)$ tel que $x = \bar{x}$. Alors $(e_n v_n \partial_{n+1})(x) = x - x = 0$. Donc $(v_n \partial_{n+1})(x) = \delta_{n+2}(z)$ où $z \in {}_{-\varepsilon}L_{n+2}(A)$. La classe de z dans ${}_{-\varepsilon}W_{n+2}(A) = \operatorname{Coker} h_{n+2}$ ne dépend pas du choix de x. En effet, si x' est un autre choix, $x - x' = f_{n+1}(y)$ et $\partial_{n+1}(x) = \partial_{n+1}(x')$. Donc j est bien défini par la formule $j([x]) =$ classe de z.

Définition de β. Soit $w \in {}_{-\varepsilon}W_{n+2}(A) = \operatorname{Coker} h_{n+2}$ représenté par $w' \in {}_{-\varepsilon}L_{n+2}(A)$. Alors on définit $\beta(w) = \big((g_n u_{n+1} \delta_{n+2})' w'\big) \in {}_\varepsilon W'_n(A)$.

Définition de d ("homomorphisme discriminant"). Soit $t \in {}_{\varepsilon}W_n'(A)$. Alors $t = g_n(s)$ et $(e_n v_n)(s) \in \operatorname{Ker} h_{n+1} \subset \operatorname{Ker} f_{n+1} h_{n+1}$, donc est antisymétrique. Sa classe dans $k'_{n+1}(A)$ est indépendante du choix de s puisque $(e_n v_n \partial_{n+1})(x) = z - \bar{z}$. On définit d par $d(t) =$ classe de $(e_n v_n)(s)$.

Définition de j'. Soit $[x] \in k'_{n+1}(A)$, classe d'un élément x de $K_{n+1}(A)$ tel que $x = -\bar{x}$. Alors $h_{n+1}(x) \in {}_{-\varepsilon}W'_{n+1}(A)$ et ne dépend que de la classe de x dans $k'_{n+1}(A)$. On peut donc définir j' par la formule $j'([x]) = h_{n+1}(x)$.

Définition de c. L'homomorphisme c est simplement induit par l'homomorphisme quotient ${}_{\varepsilon}L_{n+1}(A) \to {}_{\varepsilon}W_{n+1}(A)$.

Définition de r ("homomorphisme rang"). L'homomorphisme r est induit par l'homomorphisme "oubli" ${}_{\varepsilon}L_{n+1}(A) \to K_{n+1}(A)$.

Démontrons maintenant l'exactitude de la suite des 12, ce qui se réduit en fait à une chasse au diagramme un peu fastidieuse.

—*Exactitude en $k_{n+1}(A)$.*

· Puisque $\partial_{n+1} f_{n+1} = 0$, on a $j \cdot r = 0$.

· Réciproquement, soit $[x] \in k_{n+1}(A)$, classe d'un élément x de $K_{n+1}(A)$ tel que $j([x]) = 0$. Ceci implique $\partial_{n+1}(x) = 0$, donc $x = f_{n+1}(y)$, soit $[x] = r([y])$.

—*Exactitude en ${}_{-\varepsilon}W_{n+2}(A)$.*

· Puisque $g_n \cdot \partial_{n+1} = 0$, on a $\beta \cdot j = 0$.

· Réciproquement, soit $y \in {}_{-\varepsilon}W_{n+2}(A)$ tel que $\beta(y) = 0$. Alors y est classe d'un élément y' de ${}_{-\varepsilon}L_{n+2}(A)$ tel que $(g_n u_{n+1} \delta_{n+2})(y') = 0$. Donc $(u_{n+1} \cdot \delta_{n+2})(y') = \partial_{n+1}(x)$ avec $x - \bar{x} = (e_n v_n \partial_{n+1})(x) = 0$. Donc $y = j([x])$.

—*Exactitude en ${}_{\varepsilon}W_n'(A)$.*

· Puisque $e_n \cdot \delta_{n+2} = 0$, on a $d \cdot \beta = 0$.

· Réciproquement, soit $t \in {}_{\varepsilon}W_n'(A)$ tel que $d(t) = 0$. Alors $t \in \operatorname{Ker}(f_n)$ et il existe $v \in {}_{\varepsilon}V_n(A)$ tel que $(e_n u_n)(t) = y - \bar{y}$ et $g_n(v - \partial_{n+1}(y)) = t$. Il existe donc $u \in {}_{-\varepsilon}L_{n+2}(A)$ tel que $\delta_{n+2}(u) = v_n(v - \partial_{n+1}(y))$ et $(g_n u_{n+1} \delta_{n+2})([u]) = t$.

—*Exactitude en $k'_{n+1}(A)$.*

· Puisque $h_{n+1} \cdot e_n = 0$, on a $j' \cdot d = 0$.

· Réciproquement, soit $[x] \in k'_{n+1}(A)$, classe d'un élément x de $K_{n+1}(A)$ tel que $j'([x]) = 0$, soit $\mathrm{h}_{n+1}(x) = 0$. Alors $x = e_n(y)$ et $[x] = d(g_n u_{n+1}(y))$.

—*Exactitude en ${}_{-\varepsilon}W'_{n+1}(A)$.*

· Puisque l'homomorphisme composé $K_{n+1}(A) \to {}_{-\varepsilon}L_{n+1}(A) \to {}_{\varepsilon}W_{n+1}(A)$ est nul il en est de même de $c \cdot j'$.

· Réciproquement, soit $t \in {}_{-\varepsilon}W'_{n+1}(A)$ tel que $c(t) = 0$. Alors $t = h_{n+1}(z)$ avec $z + \bar{z} = 0$. Donc $t = j'([z])$.

—*Exactitude en* ${}_{-\varepsilon}W_{n+1}(A)$.

· On a $r \cdot c = 0$ par définition de ${}_{-\varepsilon}W'_{n+1}(A)$.

· Réciproquement, soit $t \in {}_{-\varepsilon}W_{n+1}(A)$ tel que $r(t) = 0$. Alors t est la classe d'un élément x de ${}_{-\varepsilon}L_{n+1}(A)$ dont l'image dans $K_{n+1}(A)$ s'écrit $y + \bar{y}$. Il s'en suit que $x - h_{n+1}(y)$ a une image dans $K_{n+1}(A)$ réduite à 0. Donc $t = [x - h_{n+1}(y)] \in \operatorname{Im}(c)$.

4.4. Nous allons maintenant déterminer de manière plus précise les homomorphismes de la suite exacte des 12 et plus explicitement β, rj et dj' du moins pour les anneaux A tels que $1/2 \in A$. Le premier homomorphisme est le plus facile à déterminer car c'est un homomorphisme de L_*-modules. Si on munit $\mathbf{Z}[x]$ de l'involution $x \mapsto 1 - x$, on voit ainsi que $\beta(t) = t \smile u$ où u est un élément de ${}_{-1}W_{-2}(\mathbf{Z}[x]) \approx \mathbf{Z} +$ 2-torsion correspondant à un générateur de la partie libre. En particulier, l'image de u dans ${}_{-1}W_{-2}(\mathbf{Z}') \approx {}_1W_0(\mathbf{Z}')$ par l'homomorphisme $\mathbf{Z}[x] \to \mathbf{Z}' = \mathbf{Z}[1/2]$ défini par $x \mapsto 1/2$ est bien déterminée (au signe près: cf. [9], § 3).

4.5. La détermination des homomorphismes rj et dj' est plus délicate. Considérons l'homomorphisme composé

$$\sigma\colon {}_\varepsilon L_n(A) \longrightarrow k_n(A) \longrightarrow {}_\varepsilon W_{n+1}(A) .$$

Puisque c'est un homomorphisme de "L_*-modules", on voit que $\sigma(t) = t \smile u$ où u est égal à 0 ou à la classe de l'automorphisme -1 de $\mathbf{Z}'$ (car $1/2 \in A$ et que l'image de ${}_1W_1(\mathbf{Z}[x]) \to {}_1W_1(\mathbf{Z}')$ se réduit au groupe à 2 éléments). Pour voir que u n'est pas trivial, il suffit donc de regarder le cas où $A = F$ un corps de caractéristique $\neq 2$, $n = 0$, $\varepsilon = 1$. Dans ce cas on a les suites exactes

$$\begin{gathered} {}_{-1}L_0(F) \longrightarrow K_0(F) \longrightarrow {}_{-1}V_{-1}(F) \longrightarrow {}_{-1}L_{-1}(F) \longrightarrow K_{-1}(F) , \\ K_1(F) \longrightarrow {}_1L_1(F) \longrightarrow {}_1U_0(F) \longrightarrow K_0(F) \longrightarrow {}_1L_0(F) , \end{gathered}$$

qui se réduisent à

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbf{Z}/2 & \longrightarrow & {}_{-1}V_{-1}(F) & \longrightarrow & {}_{-1}L_{-1}(F) & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \wr\!\wr & & & & \\ 0 & \longrightarrow & {}_1W_1(F) & \longrightarrow & U_0(F) & \longrightarrow & 0 . & & \end{array}$$

On en déduit que l'homomorphisme $\mathbf{Z}/2 \approx k_0(F) \to {}_1W_1(F) \approx \mathbf{Z}/2$ est un isomorphisme. Puisque l'homomorphisme ${}_1L_0(F) \to k_0(F)$ est surjectif, l'homomorphisme ${}_1L_0(F) \to k_0(F) \to {}_1W_1(F)$ n'est pas nul. On en déduit finalement la proposition suivante.

4.6. PROPOSITION. *L'homomorphisme composé*

$${}_\varepsilon W_n(A) \longrightarrow k_n(A) \longrightarrow {}_\varepsilon W_{n+1}(A)$$

est induit par le cup-produit par $\{-1\} \in {}_1W_1(\mathbf{Z}')$. *En particulier, l'homomorphisme*

$$rjr\colon {}_\varepsilon W_n(A) \longrightarrow k_n(A) \longrightarrow {}_\varepsilon W_{n+1}(A) \longrightarrow k_{n+1}(A)$$

est composé de $r\colon {}_\varepsilon W_n(A) \to k_n(A)$ *et de l'homomorphisme de* $k_n(A)$ *dans* $k_{n+1}(A)$ *induit par le cup-produit par* $\langle -1 \rangle \in k_1(\mathbf{Z})$.

4.7. Pour déterminer partiellement l'homomorphisme dj', on peut utiliser l'idée suivante. En remplaçant l'anneau A par l'anneau V_A, on obtient les isomorphismes

$$\begin{aligned}
&{}_\varepsilon L_n(V_A) \approx V_n(A)\ ,\\
&{}_\varepsilon K_n(V_A) \approx K_{n+1}(A)\ ,\\
&{}_\varepsilon W_n(V_A) \approx \mathrm{Coker}[K_{n+1}(A) \longrightarrow {}_\varepsilon V_n(A)] \approx {}_\varepsilon W'_n(A)\ .
\end{aligned}$$

L'homomorphisme "rang" ${}_\varepsilon W_n(V_A) \to k_n(V_A)$ s'identifie ainsi à l'homomorphisme "discriminant" ${}_\varepsilon W'_n(A) \to k'_{n+1}(A)$. De même l'homomorphisme $j\colon k_n(V_A) \to {}_\varepsilon W_{n+1}(V_A)$ s'identifie à $j'\colon k'_{n+1}(A) \to {}_\varepsilon W'_{n+1}(A)$. On en déduit finalement la proposition suivante.

4.8. Proposition. *L'homomorphisme composé*

$${}_\varepsilon W'_n(A) \xrightarrow{d} k'_{n+1}(A) \xrightarrow{j'} {}_\varepsilon W'_{n+1}(A)$$

est induit par le cup-produit par $\langle -1 \rangle \in {}_1W_1(\mathbf{Z}')$. *En particulier l'homomorphisme*

$$dj'd\colon {}_\varepsilon W'_n(A) \longrightarrow k'_{n+1}(A) \longrightarrow {}_\varepsilon W'_{n+1}(A) \longrightarrow k'_{n+2}(A)$$

est composé de $d\colon {}_\varepsilon W'_n(A) \to k'_{n+1}(A)$ *et de l'homomorphisme de* $k'_{n+1}(A)$ *dans* $k'_{n+2}(A)$ *induit par le cup-produit par* $\{-1\} \in k_1(\mathbf{Z})$.

4.9. Un certain nombre d'applications de la suite exacte des 12 sont décrites dans [7, §4] dans le cadre de la K-théorie polynomiale. Ces applications se transcrivent sans peine dans le cadre de la K-théorie de Quillen. Par exemple, $K_3(\mathbf{Z})$ a au moins 48 éléments ([7], p. 383). En fait, d'après Lee et Szczarba, [14] $K_3(\mathbf{Z}) \approx \mathbf{Z}/48$. On peut ainsi en déduire que $K_3(\mathbf{Q}) \approx \mathbf{Z}/48$ et que l'homomorphisme $K_3(\mathbf{Z}) \to K_3(\mathbf{R})$ est injectif (par comparaison à la K-théorie hermitienne topologique).

4.10. Pour conclure ce paragraphe nous allons établir une autre suite exacte qui permet de comparer ${}_\varepsilon L_n(A)$ et ${}_{-\varepsilon}L_{n+2}(A)$. Pour cela on introduit la "théorie" $\mathcal{K}SC(A)$ fibre homotopique de

$$\mathcal{K}(A) \xrightarrow{h} \mathcal{K}(A)$$

où $h = 1 - t$, t étant l'involution canonique de $\mathcal{K}(A)$ (cette théorie est l'analogue en K-théorie algébrique de la théorie d'Anderson et Green [1], [2]).

De manière plus précise, h est composée des applications

$$\mathcal{K}(A) \longrightarrow {}_\varepsilon\mathcal{U}(A) \longrightarrow \mathcal{K}(A)$$

soit à homotopie près

$${}_\varepsilon\mathcal{U}(A \times A^0) \longrightarrow {}_\varepsilon\mathcal{U}\big(M_2(A)\big) \longrightarrow {}_\varepsilon\mathcal{U}\big(M_2(A) \times M_2(A)^0\big) .$$

Puisque la fibre homotopique de l'application $\mathcal{K}(A) \to {}_\varepsilon\mathcal{U}(A)$ (resp. ${}_\varepsilon\mathcal{U}(A) \to \mathcal{K}(A)$) est ${}_{-\varepsilon}\mathcal{L}(A)$ (resp. ${}_\varepsilon\mathcal{L}_1(A) = \Omega_\varepsilon\mathcal{L}(A)$), on a la fibration homotopique

$${}_{-\varepsilon}\mathcal{L}(A) \longrightarrow \mathcal{K}SC(A) \longrightarrow {}_\varepsilon\mathcal{L}_1(A)$$

d'où la suite exacte

$$\longrightarrow {}_\varepsilon L_{n+2}(A) \xrightarrow{\gamma} {}_{-\varepsilon}L_n(A) \longrightarrow KSC_n(A) \longrightarrow {}_\varepsilon L_{n+1}(A) \longrightarrow {}_{-\varepsilon}L_{n-1}(A) \longrightarrow .$$

Puisque γ est un homomorphisme de "L_*-modules", cet homomorphisme est en fait défini par le cup-produit par un générateur du facteur libre de ${}_{-1}L_{-2}(Z') \approx {}_1W_0(Z') \approx \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/2$. On remarquera d'autre part que l'homomorphisme composé

$$K_{n+1}(A) \longrightarrow KSC_n(A) \longrightarrow {}_\varepsilon L_{n+1}(A)$$

coïncide avec l'homomorphisme induit par le foncteur hyperbolique.

Université de Paris, VII.

Bibliographie

[1] D. W. Anderson, The real K-theory of classifying spaces, Proc. Nat. Acad. Sci. **51** (1964), 634-636.

[2] P. S. Green, A cohomology theory based upon self-conjugacies of complex vector bundles, Bull. A. M. S. **70** (1964), 522-524.

[3] D. Grayson, Higher Algebraic K-theory II (after D. Quillen), Springer Lecture Note N^0 **551** (1976), 217-240.

[4] D. Guin, Thèse de 3^e Cycle 1977, Université Louis Pasteur, IRMA, Strasbourg (France).

[5] J. C. Hausmann et D. Husemoller, Acyclic maps, L'enseignement mathématique N^0 **25** (1979), 53-75.

[6] M. Karoubi et O. Villamayor, K-théorie algébrique et K-théorie topologique I et II, Math. Scand. **28** (1971), 265-307 et **32** (1973), 57-86.

[7] M. Karoubi, Périodicité de la K-théorie hermitienne, Springer Lecture Note N^0 **343** (1973), 301-411.

[8] ———, Localisation de formes quadratiques I et II, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. **7** (1974), 359-404 et **8** (1975), 99-155.

[9] ———, Théorie de Quillen et homologie du groupe orthogonal (ce volume).

[10] J. L. Loday, K-théorie algébrique et représentation de groupes, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. **9** (1976), 309-377.

[11] ———, Higher Witt groups. A survey, Springer Lecture Note N^0 **551** (1976), 311-335.

[12] D. Quillen, Higher Algebraic K-theory I, Springer Lecture Note N^0 **341** (1973), 85-147.

[13] J. B. Wagoner, Delooping classifying spaces in algebraic K-theory, Topology **11** (1972), 349-370.

[14] R. Lee et R. H. Szczarba, The group $K_3(\mathbf{Z})$ is cyclic of order 48, Ann. of Math. **104** (1976), 31-60.

(Received February 5, 1979)