Bertrand Lemaire
Mathématiques, bât. 425
Université de Paris Sud
91405 Orsay cedex
bertrand.lemaire@math.u-psud.fr

ENDOSCOPIE ET CHANGEMENT DE CARACTÉRISTIQUE

D'après J.-L. Waldspurger

Dans son article *Endoscopie et changement de caractéristique* [W2], Waldspurger montre qu'une "certaine conjecture de transfert" pour les algèbres de Lie en caractéristique positive implique la même conjecture en caractéristique nulle. Comme conséquence de ce résultat, il obtient que le lemme fondamental (pour les algèbres de Lie) en caractéristique positive implique le lemme fondamental en caractéristique nulle. Rappelons que dans un travail antérieur [W1], Waldspurger a montré qu'en caractéristique nulle, le lemme fondamental implique la conjecture de transfert pour les groupes. Tout cela n'est valable que si la caractéristique résiduelle du corps local en question est grande par rapport au rang du groupe. Dans [W2], Waldspurger prouve en fait que sous cette hypothèse, une "certaine conjecture de transfert" pour les algèbres de Lie ne dépend pas vraiment du corps local mais seulement de son corps résiduel. Notons qu'en caractéristique nulle, cette hypothèse n'est pas vraiment gênante puisque dans les situations relatives à un corps de nombres que l'on a en vue, elle est vérifiée en presque toutes les places finies.

1. Le principe de la démonstration (introduction)

1.1. Dans tout ce papier, F désigne un corps commutatif localement compact non archimédien, de caractéristique résiduelle p. On note $\mathfrak{o}_F$ son anneau d'entiers, $\mathfrak{p}_F$ l'idéal maximal de $\mathfrak{o}_F$, et $\kappa_F = \mathfrak{o}_F/\mathfrak{p}_F$ le corps résiduel. On note ω_F la valuation sur F normalisée par $\omega_F(F^\times) = \mathbb{Z}$, et l'on pose $|x|_F = q^{-\omega_F(x)}$ ($x \in F$) où q est le cardinal de κ_F. Pour toute extension algébrique E de F, on définit de la même manière $\mathfrak{o}_E$, $\mathfrak{p}_E$ et κ_E, et l'on note encore ω_F l'unique valuation de E prolongeant ω_F.

Si X est un espace topologique totalement discontinu, on note $C^\infty_{\mathrm{c}}(X)$ l'espace des fonctions complexes sur X qui sont localement constantes et à support compact. Si de plus X est compact (resp. fini), on écrit simplement $C^\infty(X)$ (resp. $C(X)$). Le dual algébrique $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(C^\infty_{\mathrm{c}}(X), \mathbb{C})$ est l'espace des distributions sur X ; on le note $\mathcal{D}(X)$.

Si Γ est un groupe opérant sur un ensemble X, on note $X^\Gamma \subset X$ le sous-ensemble formé des éléments fixés par Γ, et $\Gamma_X \subset \Gamma$ le sous-groupe $\{\gamma \in \Gamma : \gamma(x) = x, \forall x \in X\}$.

Pour tout groupe algébrique H défini sur un corps κ, on note $\mathfrak{h}$ (même lettre gothique) son algébre de Lie, vue comme espace affine défini sur κ.

1.2. Soit F comme en 1.1, et soit G un groupe algébrique réductif connexe défini sur F (fixé jusqu'à la fin du numéro 1.3). On pose $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$, et pour $r \in \mathbb{R}$, on note $\Phi_F(r)$ l'ensemble des *r-facettes généralisées* ([D] 3.2.2) de l'immeuble étendu $\mathfrak{I}(G,F)$. On rappelle que deux points x, $y \in \mathfrak{I}(G,F)$ sont dans la même r-facette généralisée ϕ si et seulement si $\mathfrak{g}(F)_{x,r} = \mathfrak{g}(F)_{y,r}$ et

$\mathfrak{g}(F)_{x,r^+} = \mathfrak{g}(F)_{y,r^+}$; on pose alors $\mathfrak{g}(F)_\phi = \mathfrak{g}(F)_{x,r}$ et $\mathfrak{g}(F)_{\phi^+} = \mathfrak{g}(F)_{x,r^+}$. Soient

$$\mathcal{S}_F = \bigoplus_{r\in\mathbb{R}} \mathcal{S}_F(r), \qquad \mathcal{S}_F(r) = \bigoplus_{\phi\in\Phi_F(r)} C(\mathfrak{g}(F)_\phi/\mathfrak{g}(F)_{\phi^+}).$$

Les inclusions $C(\mathfrak{g}(F)_\phi/\mathfrak{g}(F)_{\phi^+}) \subset C^\infty(\mathfrak{g}(F)_\phi) \subset C^\infty_{\mathrm{c}}(\mathfrak{g}(F))$ définissent une application linéaire $\mathcal{S}_F \to C^\infty_{\mathrm{c}}(\mathfrak{g}(F))$, $\varphi \mapsto \tilde{\varphi}$.

Si T est un tore défini sur une extension algébrique E de F, on note $\omega_{\mathfrak{t},F} : \mathfrak{t}(E) \to \mathbb{Q}\cup\{+\infty\}$ la valuation sur $\mathfrak{t}(E)$ définie par $\omega_{\mathfrak{t},F}(0) = +\infty$ et

$$\omega_{\mathfrak{t},F}(X) = \inf\{\omega_F(\alpha(X)) : \alpha \in \mathrm{X}^*(T)\} \qquad (X \in \mathfrak{t}(E) \smallsetminus \{0\}).$$

Et pour $s \in \mathbb{R}$, on pose $\mathfrak{t}(E)_s = \{X \in \mathfrak{t}(E) : \omega_{\mathfrak{t},F}(X) \geq s\}$ et $\mathfrak{t}(E)_{s^+} = \bigcup_{s'>s} \mathfrak{t}(E)_{s'}$.

1.3. Soit un élément $X \in \mathfrak{g}(F)$ semisimple régulier. Notons $T = G_X^\circ$ le centralisateur connexe de X dans $\mathfrak{g}$; c'est un tore maximal de G défini sur F. Via le choix d'une mesure $G(F)$-invariante $d\bar{g}_X$ sur l'espace homogène $T(F)\backslash G(F)$, pour $f \in C^\infty_{\mathrm{c}}(\mathfrak{g}(F))$, on définit l'intégrale orbitale

$$\Lambda^{G(F)}(f,X) = \Delta(X)\int_{T(F)\backslash G(F)} f(\mathrm{Ad}\, g^{-1}(X))d\bar{g}_X$$

où $\Delta(X)$ désigne le facteur de normalisation habituel : $\Delta(X) = |\det_F(\mathrm{ad}(X); \mathfrak{t}(F)\backslash\mathfrak{g}(F))|_F^{-\frac{1}{2}}$. L'intégrale ci-dessus est absolument convergente, et l'application $\varphi \mapsto \Lambda^{G(F)}(\tilde{\varphi}, X)$ est une forme linéaire sur $\mathcal{S}_F$.

On suppose que "p est grand par rapport au rang de G" ; en particulier, on suppose que T se déploie sur une extension modérément ramifiée de F. Posons $r(X) = \omega_{\mathfrak{t},F}(X)$, et soit une fonction $\varphi \in C(\mathfrak{g}(F)_\phi/\mathfrak{g}(F)_{\phi^+})$ pour un $r \in \mathbb{R}$ et une r-facette généralisée ϕ. Si $r(X) < r$, alors la $G(F)$-orbite de X n'intersecte pas le support de $\tilde{\varphi}$; par conséquent $\Lambda^{G(F)}(X, \tilde{\varphi}) = 0$. On peut donc supposer $r(X) \geq r$. On distingue alors deux cas :

Cas 1 : $r(X) > r$**.** D'après les travaux de DeBacker [D], il existe une fonction $\varphi_+ \in \oplus_{s>r}\mathcal{S}_F(s)$ telle que $\Lambda^{G(F)}(\tilde{\varphi}, X) = \Lambda^{G(F)}(\tilde{\varphi}_+, X)$.

Cas 2 : $r(X) = r$**.** Notons $G' \subset G$ le "r-centralisateur" de X dans G, c'est-à-dire le sous-groupe engendré par T et par les sous-groupes radiciels de G associés aux racines $\alpha \in \Sigma(G,T)$ telles que $\omega_{\mathfrak{t},F}(\alpha(X)) > r$. Le groupe G' est réductif connexe et défini sur F. D'après les travaux de Kim-Murnaghan [KM], il existe un élément $X' \in \mathfrak{g}'(F)$ semisimple régulier et une fonction $\varphi' \in \mathcal{S}'_F(r)$, tels que $\Lambda^{G(F)}(\tilde{\varphi}, X) = \Lambda^{G'(F)}(\tilde{\varphi}', X')$; où $\mathcal{S}'_F(r)$ désigne l'analogue de $\mathcal{S}_F(r)$ pour G'.

On peut donc ramener le "calcul" de $\Lambda^{G(F)}(X, \tilde{\varphi})$ à celui d'une intégrale orbitale semisimple régulière sur un groupe plus petit. L'idée est de montrer (par récurrence sur $r(X) - r$ et sur le rang de G) que les applications linéaires $\mathcal{S}_F(r) \to \oplus_{s>r}\mathcal{S}_F(s)$, $\varphi \mapsto \varphi_+$ et $\mathcal{S}_F(r) \to \mathcal{S}'_F(r)$, $\varphi \mapsto \varphi'$ ci-dessus, ne dépendent pas vraiment des données F, G, X, mais seulement de $\overline{\mathbb{F}}_q$, d'une donnée radicielle sur $\overline{\mathbb{F}}_q$ (etc.). Le même principe s'applique aux intégrales orbitales stables et aux intégrales orbitales endoscopiques.

1.4. Décrivons brièvement comment sont organisés les résultats.

Dans la section 2, le groupe de Galois Γ de l'extension modérément ramifiée maximale F^{mod} de F, est décrit en termes indépendants de F. Via le choix d'uniformisantes, on a une décomposition $\Gamma = I \rtimes \Theta$. On note $F^{\mathrm{nr}} = (F^{\mathrm{mod}})^I$ la sous-extension non ramifiée maximale de F^{mod}.

Dans la section 3, au lieu de se donner le groupe G défini sur F, on fixe une donnée de racines $\mathcal{D} = (\mathrm{X}^*, \Sigma, \Delta, \mathrm{X}_*, \check{\Sigma}, \check{\Delta})$ munie d'une action de Γ. On suppose que "p est grand par rapport au rang de $\mathcal{D}$" (i.e. le rang commun de X^* et de X_* sur $\mathbb{Z}$). On note W le groupe de Weyl de Σ. À cette donnée $\mathcal{D}$ est associée un groupe réductif connexe G, défini sur F et quasi-déployé sur F. On note V l'espace $\mathrm{X}_*\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}$. Le groupe Γ opère sur V via son action sur X_*, et le sous-espace $V^{\mathrm{nr}} = V^I \subset V$ s'identifie à un appartement de l'immeuble étendu $\mathfrak{I}(G, F^{\mathrm{nr}})$. L'action du stabilisateur $N(F^{\mathrm{nr}})$ de V^{nr} dans $G(F^{\mathrm{nr}})$ est décrite en termes indépendants de F ; en particulier, elle se factorise à travers un groupe $\mathbf{N}^{\mathrm{nr}}$ indépendant de F.

Dans la section 4, grâce aux travaux de Kottwitz, on attache à $\mathcal{D}$ un ensemble D de cocycles de Θ à valeurs dans $\mathbf{N}^{\mathrm{nr}}$, qui paramétrise l'ensemble $\mathrm{H}^1(\Theta, G(F^{\mathrm{nr}})) = \mathrm{H}^1(\Gamma, G(F^{\mathrm{mod}}))$. À chaque $d \in D$ est associé un cocycle $d_F \in \mathrm{Z}^1(\Theta, G(F^{\mathrm{nr}}))$, lequel définit un torseur intérieur ${}_d\xi : {}_dG \to G$ défini sur F^{nr}. Soit $d \in D$, vu comme un cocycle de Γ trivial sur I. L'espace V muni de l'action tordue $\Gamma \times V \to V$, $(\theta, v) \mapsto d(\gamma)\cdot\gamma(v)$, est noté ${}_dV$. Le sous-espace ${}_dW = ({}_dV)^\Gamma \subset V^{\mathrm{nr}}$ s'identifie à un appartement de l'immeuble étendu $\mathfrak{I}({}_dG, F)$.

Dans les sections 5 et 6, on décrit les quotients de la filtration de Moy-Prasad $\{{}_d\mathfrak{g}(F)_{v,r} : r \in \mathbb{R}\}$ dans ${}_d\mathfrak{g}(F) = \mathrm{Lie}({}_dG)(F)$ associée à un point $v \in {}_dW$, en termes indépendants de F. Notons $\mathbb{Z}_{(p)}$ le localisé de $\mathbb{Z}$ en p, et posons ${}_dW_{(p)} = {}_dW \cap (\mathrm{X}_* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{(p)})$; c'est un sous-ensemble dense de ${}_dW$. Pour $(v, r) \in {}_dW_{(p)} \times \mathbb{Z}_{(p)}$, on définit un $\overline{\mathbb{F}}_q$-espace vectoriel ${}_d\underline{\mathfrak{g}}_{v,r}$ muni d'une action de Θ, tel que le $\mathbb{F}_q$-espace vectoriel ${}_d\underline{\mathfrak{g}}_{v,r}^{\Theta}$ s'identifie canoniquement à ${}_d\mathfrak{g}(F)_{v,r}/{}_d\mathfrak{g}(F)_{v,r^+}$. L'espace $V^{\mathrm{nr}} \times \mathbb{R}$ est muni d'une décomposition en facettes, indépendante de F, vérifiant les propriétés suivantes : notons ${}_d\Phi$ l'ensemble de ces facettes qui sont invariantes pour l'action de Θ sur V^{nr} tordue par d. Pour toute facette $\phi \in {}_d\Phi$, l'intersection $\phi \cap ({}_dW_{(p)} \times \mathbb{Z}_{(p)})$ est dense dans $\phi \cap ({}_dW \times \mathbb{R})$; et pour tous (v, r), $(v', r') \in \phi \cap ({}_dW_{(p)} \times \mathbb{Z}_{(p)})$, on a ${}_d\mathfrak{g}(F)_{v,r} = {}_d\mathfrak{g}(F)_{v',r'}$, ${}_d\mathfrak{g}(F)_{v,r^+} = {}_d\mathfrak{g}(F)_{v',r'^+}$ et ${}_d\underline{\mathfrak{g}}_{v,r}^{\Theta} = {}_d\underline{\mathfrak{g}}_{v',r'}^{\Theta}$. On peut donc remplacer la paire d'indices "v, r" par un indice "ϕ" dans les notations. Posons ${}_d\mathcal{S} = \oplus_{\phi\in {}_d\Phi}\, {}_d\mathcal{S}_\phi$ avec ${}_d\mathcal{S}_\phi = C({}_d\underline{\mathfrak{g}}_\phi^\Theta)$. Via les identifications $C({}_d\underline{\mathfrak{g}}_\phi^\Theta) = C({}_d\mathfrak{g}(F)_\phi/{}_d\mathfrak{g}(F)_{\phi^+})$ pour $\phi \in {}_d\Phi$, on obtient une application linéaire ${}_d\mathrm{rea}_F : {}_d\mathcal{S} \to C_{\mathrm{c}}^\infty({}_d\mathfrak{g}(F))$.

Dans la section 7, on montre la version indépendante de F du **cas 1** de 1.3. Pour $X \in {}_d\mathfrak{g}(F)$ semisimple régulier, le centralisateur T_X de X dans ${}_dG$ est un tore maximal défini sur F, et l'espace homogène $T_X(F)\backslash {}_dG(F)$ est muni d'une mesure ${}_dG(F)$-invariante canonique ; la distribution $\Lambda^{{}_dG(F)}(\cdot, X)$ sur ${}_d\mathfrak{g}(F)$ est donc bien définie. À toute facette $\phi \subset V^{\mathrm{nr}} \times \mathbb{R}$ est associée un invariant $r(\phi) \in \mathbb{Z}_{(p)}$. Pour $r \in \mathbb{Z}_{(p)}$, posant ${}_d\mathcal{S}_r = \oplus_{\phi\in{}_d\Phi, r(\phi)\geq r}\, {}_d\mathcal{S}_\phi \subset {}_d\mathcal{S}$ et ${}_d\mathcal{S}_{r^+} = \oplus_{\phi\in{}_d\Phi, r(\phi)> r}\, {}_d\mathcal{S}_\phi \subset {}_d\mathcal{S}_r$, on montre qu'il existe une application linéaire ${}_dl_r^+ : {}_d\mathcal{S}_r \to {}_d\mathcal{S}_{r^+}$ telle que l'application ${}_d\mathrm{rea}_F \circ {}_dl_r^+$ "réalise" l'application $\varphi \mapsto \varphi_+$ de 1.3 (proposition 7.4).

Dans les sections 8 et 9, on montre la version indépendante de F du **cas 2** de 1.3. On commence par décrire le centralisateur d'un "bon élément" (au sens de [KM]) de ${}_d\mathfrak{g}(F)$, en termes indépendants de F. On considère des quadruplets $(\mathcal{D}', \psi, r, \underline{Z}')$ où $\mathcal{D}' = (\mathrm{X}'^*, \Sigma', \Delta', \mathrm{X}'_*, \check{\Sigma}', \check{\Delta}')$ est une donnée de racines munie d'une action de Γ ; ψ est une paire d'isomorphismes de $\mathbb{Z}$-modules $(\mathrm{X}'^* \to \mathrm{X}^*, \mathrm{X}'_* \to \mathrm{X}_*)$ en dualité ; $r \in \mathbb{Z}_{(p)}$; et $\underline{Z}' \in \underline{\mathfrak{t}}'(r)^\Gamma$ où $\underline{\mathfrak{t}}'(r)$ désigne le $\overline{\mathbb{F}}_q$-espace vectoriel $\mathrm{X}'_* \otimes_{\mathbb{Z}} \overline{\mathbb{F}}_q$ munie d'une certaine action tordue de Γ définie par r. On demande que $\mathcal{D}'$ s'identifie via ψ à un sous-système de Levi standard de $\mathcal{D}$; que pour tout $\gamma \in \Gamma$, il existe un $w_\psi(\gamma) \in W$ tel que $\psi \circ \gamma = w_\psi(\gamma) \circ \gamma \circ \psi$; et que l'ensemble $\{\alpha \in \Sigma : \alpha \circ \psi(\underline{Z}') = 0\}$ coïncide avec $\psi(\Sigma')$. Affectons d'un exposant "$'$" les objets attachés à $\mathcal{D}'$ comme précédemment. On a une application naturelle $\psi_{D'} : D' \to D$. Pour $d' \in D'$, posant $d = \psi_{D'}(d')$, on montre qu'il existe une application linéaire ${}_{d'}l'_r : {}_d\mathcal{S}_r \to {}_{d'}\mathcal{S}'_r$ telle que l'application ${}_{d'}\mathrm{rea}'_F \circ {}_{d'}l'_r$ "réalise" l'application $\varphi \mapsto \varphi'$ de 1.3 (proposition 9.3).

Dans la section 10 est montré le théorème principal de [W2]. On considère simultanément toutes les formes tordues ${}_dG$ pour $d \in D$. On sait que les classes de conjugaison stable semisimples régulières dans ${}_D\mathfrak{g}(F) = \coprod_{d\in D} {}_d\mathfrak{g}(F)$ sont paramétrées par l'ensemble $\mathcal{Z}_F = (\mathfrak{t}_{\mathrm{reg}}^{\mathrm{mod}}/W)^\Gamma$ où $\mathfrak{t}_{\mathrm{reg}}^{\mathrm{mod}}$ désigne l'ensemble des éléments W-réguliers de $\mathfrak{t}^{\mathrm{mod}} = \mathrm{X}_* \otimes_{\mathbb{Z}} F^{\mathrm{mod}}$. Pour $z_F \in \mathcal{Z}_F$, on note $\mathcal{O}_{\mathrm{st}}(z_F) \subset {}_D\mathfrak{g}(F)$ la classe de conjugaison stable associée à z_F. On construit (de manière indépendante de F) un ensemble $\mathcal{Z}$, et pour chaque $z \in \mathcal{Z}$, un groupe fini D_z, vérifiant les propriétés suivantes : il existe une application surjective $\zeta_F : \mathcal{Z}_F \to \mathcal{Z}$, et pour tout $z_F \in \mathcal{Z}_F$, il existe une application surjective $\delta_{z_F} : \mathcal{O}_{\mathrm{st}}(z_F) \to D_{\zeta_F(z_F)}$ dont les fibres sont exactement les classes de conjugaison ordinaire dans $\mathcal{O}_{\mathrm{st}}(z_F)$. Posons $\mathcal{S} = \oplus_{d\in D}\,{}_d\mathcal{S}$, $\mathcal{C}_F = \oplus_{d\in D}\, C_{\mathrm{c}}^\infty({}_d\mathfrak{g}(F))$, et notons rea_F l'application linéaire $\oplus_{d\in D}\,{}_d\mathrm{rea}_F : \mathcal{S} \to \mathcal{C}_F$. Pour $f \in \mathcal{C}_F$ et $X \in {}_D\mathfrak{g}(F)$ semisimple régulier, on pose $\Lambda^{{}_DG(F)}(f, X) = \Lambda^{{}_dG(F)}(f_d, X)$ où d est l'élément de D tel que $X \in {}_d\mathfrak{g}(F)$, et f_d est la composante de f sur ${}_d\mathfrak{g}(F)$. Pour $z \in \mathcal{Z}$ et $\delta \in D_z$, on montre qu'il existe une forme linéaire $\Lambda^{\mathcal{D}}(\cdot, z, \delta)$ sur $\mathcal{S}$ telle que pour tous $z_F \in \zeta_F^{-1}(z)$ et $X \in \delta_{z_F}^{-1}(\delta)$, on ait l'égalité $\Lambda^{{}_DG(F)}(\mathrm{rea}_F(\cdot), X) = \Lambda^{\mathcal{D}}(\cdot, z, \delta)$ (théorème 10.7).

Dans la section 11, on généralise le théorème principal au transfert endoscopique. On introduit la notion (indépendante de F) de *donnée endoscopique de* $\mathcal{D}$, c'est-à-dire un triplet $(\mathcal{D}_\natural, \eta, s)$ où $\mathcal{D}_\natural = (\mathrm{X}_\natural^*, \Sigma_\natural, \Delta_\natural, \mathrm{X}_{*,\natural}, \check{\Sigma}_\natural, \check{\Delta}_\natural)$ est une donnée de racines munie d'une action de Γ, etc. (cf. 11.1). Un tel triplet détermine un triplet endoscopique $(G_\natural, \hat{\eta}, s)$ de G. Mieux : $(G_\natural, \hat{\eta}, s)$ est un triplet endoscopique de ${}_dG$ pour tout $d \in D$. Affectons d'un indice "$\natural$" les objets relatifs à la donnée $\mathcal{D}_\natural$. De η se déduit un isomorphisme $\mathfrak{t}_\natural^{\mathrm{mod}} \to \mathfrak{t}^{\mathrm{mod}}$, qui n'est en général pas Γ-équivariant. Notons $\mathfrak{t}_{\natural,\mathcal{D}-\mathrm{reg}}^{\mathrm{mod}}$ l'image réciproque de $\mathfrak{t}_{\mathrm{reg}}^{\mathrm{mod}}$, et posons $\mathcal{Z}_{\natural,\mathcal{D}-\mathrm{reg},F} = (\mathfrak{t}_{\natural,\mathcal{D}-\mathrm{reg}}^{\mathrm{mod}}/W_\natural)^\Gamma$. On a une application naturelle $\eta_F : \mathcal{Z}_{\natural,\mathcal{D}-\mathrm{reg},F} \to \mathcal{Z}_F$, mais il n'existe en général pas d'application $\mathcal{Z}_\natural \to \mathcal{Z}$ qui lui corresponde. Pour résoudre cette difficulté, on construit (de manière indépendante de F) un ensemble $\mathcal{Y}$ muni d'applications $\eta_{\mathcal{Y}} : \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$ et $\epsilon : \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}_\natural$, et pour chaque $y \in \mathcal{Y}$, un groupe fini D_y muni d'identifications canoniques $D_{\eta_{\mathcal{Y}}(y)} = D_y = D_{\epsilon(y)}$, vérifiant les propriétés suivantes : il existe une application surjective $\tau_F : \mathcal{Z}_{\natural,\mathcal{D}-\mathrm{reg},F} \to \mathcal{Y}$ telle que $\eta_{\mathcal{Y}} \circ \tau_F = \zeta_F \circ \eta_F$ et $\epsilon \circ \tau_F = \zeta_{\natural,F}|_{\mathcal{Z}_{\natural,\mathcal{D}-\mathrm{reg},F}}$; et pour tout $z_{\natural,F} \in \mathcal{Z}_{\natural,\mathcal{D}-\mathrm{reg},F}$, posant $z_F = \eta_F(z_{\natural,F})$, $y = \tau_F(z_{\natural,F})$ et $z = \eta_{\mathcal{Y}}(y) = \zeta_F(z_F)$, il existe un $s_y \in \mathrm{Hom}(D_y, \mathbb{C}^\times)$ tel que pour $X \in \mathcal{O}_{\mathrm{st}}(z_F)$, le facteur de transfert de Langlands-Shelstad $\Delta(z_{\natural,F}, X)$ coïncide avec $s_y(\delta_{z_F}(X)^{-1})$. Pour $f \in \mathcal{C}_F$ et $z_{\natural,F} \in \mathcal{Z}_{\natural,\mathcal{D}-\mathrm{reg},F}$, on définit l'intégrale orbitale endoscopique

$$\Lambda^{{}_DG(F),G_\natural(F)}(f, z_{\natural,F}) = \sum_X \Delta(z_{\natural,F}, X)\Lambda^{{}_DG(F)}(f, X)$$

où X parcourt un système de représentants dans $\mathcal{O}_{\mathrm{st}}(X)$ des classes de conjugaison ordinaire. Pour $y \in \mathcal{Y}$, le théorème 10.7 implique qu'il existe une forme linéaire $\Lambda^{\mathcal{D},\mathcal{D}^\natural}(\cdot, y)$ sur $\mathcal{S}$ telle que pour tout $z_{\natural,F} \in \tau_F^{-1}(y)$, on ait l'égalité $\Lambda^{{}_DG(F),G_\natural(F)}(\mathrm{rea}_F(\cdot), z_{\natural,F}) = \Lambda^{\mathcal{D},\mathcal{D}_\natural}(\cdot, y)$ (proposition 11.4). On en déduit que la conjecture de transfert pour les fonctions dans l'image des applications rea_F et $\mathrm{rea}_{\natural,F}$, est indépendante de F (corollaire 11.4). Si maintenant les données $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}_\natural$ sont non ramifiées, en supposant toujours que p est grand par rapport au rang de $\mathcal{D}$, on obtient que le lemme fondamental pour les algèbres de Lie est une conjecture indépendante de F (corollaire 11.5).

2. L'extension modérément ramifiée maximale d'un corps local

2.1. Fixons un nombre premier p et une puissance $q = p^r$ de p. Fixons aussi une clôture algébrique $\overline{\mathbb{F}}_q$ de $\mathbb{F}_q$. Posons $\Theta = \hat{\mathbb{Z}}$ et notons θ_1 le générateur topologique canonique de Θ ($\theta_1 = 1$). Le groupe Θ s'identifie au groupe de Galois de $\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q$, θ_1 s'identifiant au Frobénius.

Notons $\mathcal{P}$ l'ensemble des entiers $e \geq 1$ qui sont premiers à p. Posons $I = \varprojlim_{e\in\mathcal{P}} \zeta_e(\overline{\mathbb{F}}_q)$ où, pour tout corps κ, $\zeta_e(\kappa)$ désigne le groupe des racines e-ièmes de l'unité dans κ; la limite projective étant prise par rapport aux morphismes de transition $\zeta_{ee'}(\overline{\mathbb{F}}_q) \to \zeta_e(\overline{\mathbb{F}}_q)$, $\mu \mapsto \mu^{e'}$ (e, $e' \in \mathcal{P}$). Pour $\sigma \in I$, on note σ_e l'image de σ dans $\zeta_e(\overline{\mathbb{F}}_q)$. Et pour $e \in \mathcal{P}$, on note $I(e)$ l'unique sous-groupe de I d'indice e. On munit I de l'action de Θ donnée par $\theta_1(\sigma) = \sigma^q$, et l'on pose $\Gamma = \Theta \ltimes I$.

Notons $\mathbb{Z}_{(p)}$ le localisé de $\mathbb{Z}$ en p, et

$$I \times \mathbb{Z}_{(p)} \to \overline{\mathbb{F}}_q^\times,\ (\sigma, r) \mapsto r(\sigma)$$

la forme bilinéaire définie comme suit : pour $(\sigma, r) \in I \times \mathbb{Z}_{(p)}$, on écrit $r = \frac{n}{e}$ avec $n \in \mathbb{Z}$ et $e \in \mathcal{P}$, et l'on pose $r(\sigma) = \sigma_e^{-n}$. Enfin, posons $\mathbf{F}^* = \mathbb{Z}_{(p)} \times \overline{\mathbb{F}}_q^\times$ et munissons $\mathbf{F}^*$ de l'action de Γ définie comme suit : pour $(r, x) \in \mathbb{Z}_{(p)} \times \overline{\mathbb{F}}_q^\times$ et $(\theta, \sigma) \in \Theta \ltimes I$, on pose $\theta(r, x) = (r, \theta(x))$ et $\sigma(r, x) = (r, r(\sigma)^{-1}x)$.

2.2 On suppose que κ_F est de cardinal q. Fixons une clôture séparable $\overline{F}$ de F, et notons F^{nr} (resp. F^{mod}) la sous-extension non ramifiée (resp. modérément ramifiée) maximale de $\overline{F}/F$. On a donc les inclusions $F \subset F^{\mathrm{nr}} \subset F^{\mathrm{mod}} \subset \overline{F}$. Posons $\overline{\kappa}_F = \kappa_{F^{\mathrm{nr}}} = \kappa_{\overline{F}}$. On a une identification canonique $\mathrm{Gal}(F^{\mathrm{nr}}/F) = \Theta$. Fixons un isomorphisme $\iota : \overline{\kappa}_F \to \overline{\mathbb{F}}_q$. Pour $e \in \mathcal{P}$, la composée de ι et de la réduction modulo $\mathfrak{p}_{F^{\mathrm{nr}}}$, induit une identification $\zeta_e(F^{\mathrm{nr}}) = \zeta_e(\overline{\mathbb{F}}_q)$. Fixons une uniformisante ϖ_1 de F, et pour tout $e \in \mathcal{P}$, fixons un élément $\varpi_{\frac{1}{e}} \in F^{\mathrm{mod}}$ de sorte que pour e, $e' \in \mathcal{P}$, on ait l'égalité $(\varpi_{\frac{1}{ee'}})^{e'} = \varpi_{\frac{1}{e}}$. Alors on a

$$F^{\mathrm{mod}} = \bigcup_{e \in \mathcal{P}} F^{\mathrm{nr}}(\varpi_{\frac{1}{e}}).$$

Pour $r \in \mathbb{Z}_{(r)}$, on écrit $r = \frac{n}{e}$ avec $n \in \mathbb{Z}$ et $e \in \mathcal{P}$, et l'on pose $\varpi_r = (\varpi_{\frac{1}{e}})^n$.

On identifie Γ au groupe de Galois $\mathrm{Gal}(F^{\mathrm{mod}}/F)$ de la manière suivante : le groupe Θ opère naturellement sur F^{nr} (via l'identification $\Theta = \mathrm{Gal}(F^{\mathrm{nr}}/F)$) ; le groupe I fixe tout élément de F^{nr} ; et pour $\sigma \in I$ et $e \in \mathcal{P}$, on a $\sigma(\varpi_{\frac{1}{e}}) = \sigma_e \varpi_{\frac{1}{e}}$. Pour $(\sigma, r) \in I \times \mathbb{Z}_{(p)}$, on a donc

$$r(\sigma) = \sigma(\varpi_{-r})\varpi_r.$$

On définit un homomorphisme $\mathbf{r}_F : F^{\mathrm{mod},\times} \to \mathbf{F}^*$ de la manière suivante : pour $e \in \mathcal{P}$, on pose $\mathbf{r}_F(\varpi_{\frac{1}{e}}) = (\frac{1}{e}, 1)$; et pour $x \in F^{\mathrm{mod}}$ tel que $\omega_F(x) = 0$, notant $\bar{x}$ l'image de x dans $\overline{\kappa}_F$, on pose $\mathbf{r}_F(x) = (0, \iota(\bar{x}))$. Notons $U^+_{F^{\mathrm{mod}}}$ le sous-groupe de $U_{F^{\mathrm{mod}}} = \mathfrak{o}^\times_{F^{\mathrm{mod}}}$ formé des x tels que $\omega_F(1 - x) > 0$. On a la suite exacte courte

$$1 \to U^+_{F^{\mathrm{mod}}} \to F^{\mathrm{mod},\times} \xrightarrow{\mathbf{r}_F} \mathbf{F}^* \to 1.$$

De plus, l'homomorphisme $\mathbf{r}_F$ est Γ-équivariant. On définit une section $s_F : \mathbb{Z}_{(p)} \to F^{\mathrm{mod},\times}$ de $\mathbf{r}$ au-dessus de $\mathbb{Z}_{(p)}$: pour $r \in \mathbb{Z}_{(p)}$, on pose $s_F(r) = \varpi_r$.

Pour $e \in \mathcal{P}$, on note $F^e \subset F^{\mathrm{mod}}$ le sous-corps fixé par $I(e)$; on a $F^e = F(\varpi_{\frac{1}{e}})$. Pour alléger l'écriture, on écrit $\mathfrak{o}^e$, $\mathfrak{p}^e$ au lieu de $\mathfrak{o}_{F^e}$, $\mathfrak{p}_{F^e}$. Et si $e = 1$, on remplace l'exposant "e" par un exposant "nr" : $\mathfrak{o}^{\mathrm{nr}}$, $\mathfrak{p}^{\mathrm{nr}}$.

2.3. On a adjoint à F (tel que κ_F soit de cardinal q) des données $\overline{F}$, ι et $\{\varpi_{\frac{1}{e}}\}_{e \in \mathcal{P}}$, obtenant ainsi un quadruplet $\underline{F} = (F, \overline{F}, \iota, \{\varpi_{\frac{1}{e}}\})$. Deux quadruplets $\underline{F} = (F, \overline{F}, \iota, \{\varpi_{\frac{1}{e}}\})$ et $\underline{F}' = (F', \overline{F}', \iota', \{\varpi'_{\frac{1}{e}}\})$ sont dits *isomorphes* s'il existe un isomorphisme de corps $\lambda : \overline{F} \to \overline{F}'$ tel que $\lambda(F) = F'$ (ce qui entraîne $\lambda(F^{\mathrm{nr}}) = F'^{\mathrm{nr}}$ et $\lambda(F^{\mathrm{mod}}) = F'^{\mathrm{mod}}$), $\iota' \circ \bar{\lambda}' = \bar{\lambda}$ où $\bar{\lambda} : \overline{\kappa}_F \to \overline{\kappa}_{F'}$ désigne l'isomorphisme de corps déduit de λ par restriction et passage aux quotients, et $\lambda(\varpi_{\frac{1}{e}}) = \varpi'_{\frac{1}{e}}$ pour tout $e \in \mathcal{P}$. On fixe un ensemble CL_q de représentants des classes d'isomorphisme de tels quadruplets. Pour alléger l'écriture, on considérera les éléments de CL_q comme des corps locaux F munis de "données supplémentaires occultes" $\overline{F}$, ι et $\{\varpi_{\frac{1}{e}}\}$.

3. Groupes et données radicielles

3.1. Soit une donnée de racines $\mathcal{D} = (\mathrm{X}^*, \Sigma, \Delta, \mathrm{X}_*, \check{\Sigma}, \check{\Delta})$ munie d'une action de Γ. C'est-à-dire que X^* et X_* sont des $\mathbb{Z}$-modules libres de type fini en dualité, Σ est un système de racines *réduit* dans X^*, $\Delta \subset \Sigma$ est une base de racines simples, et $\check{\Sigma}$ (resp. $\check{\Delta}$) est l'ensemble des coracines associé à Σ (resp. Δ) dans X_*. La base Δ détermine un sous-ensemble de racines positives $\Sigma^+ \subset \Sigma$. On note W le groupe de Weyl de Σ. Le rang de $\mathcal{D}$, noté $\mathrm{rg}(\mathcal{D})$, est par définition le rang commun de X^* et de X_* sur $\mathbb{Z}$.

De $\mathcal{D}$ se déduisent de la manière habituelle des données de racines $\mathcal{D}_{\mathrm{sc}} = (\mathrm{X}^*_{\mathrm{sc}}, \Sigma, \Delta, \mathrm{X}_{*,\mathrm{sc}}, \check{\Sigma}, \check{\Delta})$ et $\mathcal{D}_{\mathrm{der}} = (\mathrm{X}^*_{\mathrm{der}}, \Sigma, \Delta, \mathrm{X}_{*,\mathrm{der}}, \check{\Sigma}, \check{\Delta})$ munies d'une action de Γ. Ici, $\mathrm{X}_{*,\mathrm{sc}} \subset \mathrm{X}_*$ désigne le réseau engendré par $\check{\Delta}$, et $\mathrm{X}^*_{\mathrm{sc}} \subset \mathrm{X}^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ celui engendré par les poids fondamentaux ; et l'on pose $\mathrm{X}_{*,\mathrm{der}} = \mathrm{X}_* \cap (\mathrm{X}_{*,\mathrm{sc}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})$ et $\mathrm{X}^*_{\mathrm{der}} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{X}_{*,\mathrm{der}}, \mathbb{Z})$.

On suppose que p est "grand par rapport au rang de $\mathcal{D}$". Pour tout système de racines Σ' dans un espace vectoriel réel V' qu'il engendre, introduisons l'ensemble des coracines $\check{\Sigma}'$ dans l'espace dual de V', et le réseau $\check{\mathrm{X}}'$ engendré par $\check{\Sigma}'$. Si Σ' est réduit et irréductible, on sait définir le nombre de Coxeter $h(\Sigma')$ de Σ'. Si Σ' est seulement réduit, on écrit $\Sigma' = \coprod_{i=1}^n \Sigma'_i$ où Σ'_i est une composante irréductible de Σ', et l'on pose $h(\Sigma') = \max\{h(\Sigma'_i) : i = 1, \dots, n\}$. On définit les conditions :

- $(P^1_{\Sigma'})$ pour tout sous-ensemble linéairement indépendant $A \subset \Sigma'$, l'indice du réseau $\mathbb{Z}[A]$ dans le réseau $\mathbb{Q}[A] \cap \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\check{\mathrm{X}}', \mathbb{Z})$ est premier à p ;
- $(P^2_{\Sigma'})$ pour tout sous-ensemble linéairement indépendant $A \subset \Sigma'$ et toute famille $\{c_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de nombres rationnels telle que $\sum_{\alpha \in A} c_\alpha \in \Sigma'$, on a $\omega_{\mathbb{Q}_p}(1 - \sum_{\alpha \in A} c_\alpha) \in \{0, +\infty\}$;
- $(P_{\Sigma'})$ si Σ' est réduit, on a $p > 3(h(\Sigma') - 1)$.

Pour $N \in \mathbb{N}$, on définit la condition :

- (P_N) $p \geq N + 2$, et pour tout système de racines Σ' de rang $\leq N$, les conditions $(P^1_{\Sigma'})$, $(P^2_{\Sigma'})$, $(P_{\Sigma'})$ sont vérifiées.

L'hypothèse "p est grand par rapport au rang de $\mathcal{D}$" est précisément la suivante : la condition $(P_{\mathrm{rg}(\mathcal{D})})$ est vérifiée.

3.2. Soit k un corps commutatif de caractéristique 0 ou p. Fixons une clôture séparable $\overline{k}$ de k, et supposons qu'il existe un homomorphisme $\Gamma_k = \mathrm{Gal}(\overline{k}/k) \to \Gamma$. Ainsi Γ_k opère sur $\mathcal{D}$, et il existe un groupe réductif connexe G, un sous groupe de Borel B de G et un tore maximal $T \subset B$ de G, tous trois définis sur F et vérifiant la condition suivante : il existe un couple d'isomorphismes de $\mathbb{Z}[\Gamma_k]$-modules $j^* : \mathrm{X}^* \to \mathrm{X}^*(T)$ et $j_* : \mathrm{X}_* \to \mathrm{X}_*(T)$ en dualité, tel que $j^*(\Sigma) = \Sigma(G, T)$, $j_*(\check{\Sigma}) = \check{\Sigma}(G, T)$ et $j^*(\Delta) = \Delta(G, B, T)$. Posant $j = (j^*, j_*)$, le quadruplet (G, B, T, j) est unique à isomorphisme près. Via j, on identifie X^* à $\mathrm{X}^*(T)$ et X_* à $\mathrm{X}_*(T)$.

Pour $\alpha \in \Sigma$, on note $\mathfrak{g}_\alpha$ le sous-espace radiciel de $\mathfrak{g}$ associé à α. Fixons un épinglage $\{E_\alpha\}_{\alpha \in \Delta}$ de $\mathfrak{g}$ défini sur k : pour $(\alpha, \gamma) \in \Delta \times \Gamma$, on a $E_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha(\overline{k}) \smallsetminus \{0\}$ et $\gamma(E_\alpha) = E_{\gamma(\alpha)}$. Le quintuplet $(G, B, T, j, \{E_\alpha\}_{\alpha \in \Delta})$ est unique à isomorphisme *unique* près.

Pour $\alpha \in \Delta$, notons $E_{-\alpha}$ l'unique élément de $\mathfrak{g}_{-\alpha}(\overline{k})$ tel que $[E_\alpha, E_{-\alpha}] = \check{\alpha}$. Posons $N = \mathrm{N}_G(T)$. Le quotient $N/T = N(\overline{k})/T(\overline{k})$ s'identifie à W. Puisque $p \gg \mathrm{rg}(\mathcal{D})$, on peut définir l'exponentielle $\exp(X) \in G(\overline{k})$ d'un élément nilpotent $X \in \mathfrak{g}(\overline{k})$. On définit une section ensembliste de la projection canonique

$$n : W \to N(\overline{k}),$$

caractérisée par les propriétés suivantes (cf. [Sp] 11.2.9) :

- pour $\alpha \in \Delta$, on a $n(s_\alpha) = \exp(E_\alpha)\exp(-E_{-\alpha})\exp(E_\alpha)$, où $s_\alpha \in W$ désigne la symmétrie associée à la racine α ;
- pour tous w, $w' \in W$ tels que $l(ww') = l(w) + l(w')$, on a $n(ww') = n(w)n(w')$, où $l : W \to \mathbb{N}$ désigne l'application longueur.

Plus généralement (cf. [LS] 2.1.A), pour tous w, $w' \in W$, posant

$$\Sigma^+_{w,w'} = \{\alpha \in \Sigma^+ : w^{-1}(\alpha) < 0,\, w'^{-1}w^{-1}(\alpha) > 0\},$$

on a $n(w)n(w') = \nu(w,w')n(ww')$ avec $\nu(w,w') = \prod_\alpha \check{\alpha}(-1)$ où α parcourt les éléments de $\Sigma^+_{w,w'}$. Notons que par construction, la section n est Γ-équivariante. On sait que l'on peut prolonger la famille $\{E_\alpha\}_{\alpha\in\pm\Delta}$ en une famille $\{E_\alpha\}_{\alpha\in\Sigma}$ vérifiant les conditions suivantes (cf. [Sp] 11.3.6) :

- pour $\alpha \in \Sigma$, $E_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha(\bar{k})$;
- pour $(\alpha,\gamma) \in \Sigma \times \Gamma$, il existe un $\epsilon \in \{\pm 1\}$ tel que $\gamma(E_\alpha) = \epsilon E_{\gamma(\alpha)}$;
- pour $(\alpha, w) \in \Sigma \times W$, il existe un $\epsilon \in \{\pm 1\}$ tel que $\mathrm{Ad}(n(w))(E_\alpha) = \epsilon E_{w(\alpha)}$.

Le prolongement est unique au remplacement près de certains E_α par leurs opposés.

On note $\rho : G_{\mathrm{sc}} \to G$ le revêtement simplement connexe du groupe dérivé G_{der}. Notons que G_{sc} est "le" groupe associé à la donnée de racines $\mathcal{D}_{\mathrm{sc}}$. On note B_{sc}, T_{sc} (etc.) les images réciproques de B, T (etc.) dans G_{sc}, et l'on définit comme ci-dessus une section ensembliste $n_{\mathrm{sc}} : W \to N_{\mathrm{sc}}$ de la projection canonique $N_{\mathrm{sc}} \to W$. On a l'égalité $n = \rho \circ n_{\mathrm{sc}}$.

3.3. Appliquons la construction de 3.2 au corps $k = \mathbb{F}_q$ et à l'homomorphisme $\Theta \hookrightarrow \Gamma$. On obtient un groupe réductif connexe défini sur $\mathbb{F}_q$, que l'on note $\underline{G}$. Plus généralement, on souligne par un trait "_" tous les objets associés à $\mathcal{D}$ en 3.2 : $\underline{B}$, $\underline{T}$ (etc.). Et comme en 3.2, on fixe un épinglage $\{\underline{E}_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ de $\underline{\mathfrak{g}}$ défini sur $\mathbb{F}_q$, que l'on prolonge en une famille $\{\underline{E}_\alpha\}_{\alpha\in\Sigma}$.

Si $\underline{H}$ est un groupe algébrique défini sur une sous-extension de $\overline{\mathbb{F}}_q/\mathbb{F}_q$, on l'identifie (comme d'habitude) au groupe de ses points $\overline{\mathbb{F}}_q$-rationnels $\underline{H}(\overline{\mathbb{F}}_q)$.

Puisque le groupe I opère sur $\mathcal{D}$, il opère aussi sur $\underline{G}$. Soit $\sigma \in I$. De l'action de σ sur X_* se déduit une action sur $\underline{T} = \mathrm{X}_* \otimes_{\mathbb{Z}} \overline{\mathbb{F}}_q^\times$. Cette action se prolonge à $\underline{G}$ de sorte que pour $\alpha \in \Delta$, on ait $\sigma(\underline{E}_\alpha) = \underline{E}_{\sigma(\alpha)}$. Plus généralement, pour $\alpha \in \Sigma$, il existe un $\epsilon \in \{\pm 1\}$ tel que $\sigma(\underline{E}_\alpha) = \epsilon \underline{E}_{\sigma(\alpha)}$. Puisque I ne commute pas à Θ, l'action de I sur $\underline{G}$ n'est en général pas définie sur $\mathbb{F}_q$; mais les actions de I et de Θ se combinent néanmoins en une action de Γ sur $\underline{G}$. Notons en particulier que la section ensembliste $\underline{n} : W \to \underline{N}$ est Γ-équivariante.

Posons $T_\varpi = \mathrm{X}_* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{(p)}$ et $\mathbf{T} = \mathrm{X}_* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbf{F}^*$. Le groupe $\underline{N}$ opère sur X_* via sa projection sur W ; il opère donc aussi sur T_ϖ. On pose $\mathbf{N} = \underline{N} \ltimes T_\varpi$ et l'on note $\underline{\pi} : \mathbf{N} \to \underline{N}$ la projection sur le premier facteur. On a les égalités $\mathbf{T} = T_\varpi \underline{T}$ et $\mathbf{N} = T_\varpi \underline{N} = \mathbf{T}\underline{N} = \mathbf{T}\underline{n}(W)$.

Des actions de Γ sur X_* et sur $\mathbf{F}^*$, on déduit une action sur $\mathbf{T}$. D'autre part l'action de Γ sur $\underline{G}$ se restreint en une action sur $\underline{N}$. Les deux actions coïncident sur $\underline{T} = \mathbf{T} \cap \underline{N}$. On en déduit donc une action de Γ sur $\mathbf{N}$. Notons que T_ϖ n'est pas Γ-stable pour cette action : pour $\lambda \otimes r \in T_w$ et $\sigma \in I$, on a $\sigma(\lambda \otimes r) = \sigma(\lambda) \otimes r(\sigma)^{-1} r \in \mathbf{T}$. L'application $\underline{\pi}$ n'est donc pas Γ-équivariante.

Posons $V = \mathrm{X}_* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ et $V_{(p)} = \mathrm{X}_* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{(p)} \subset V$. On note

$$\mathbf{N} \times V \to V,\ (n, v) \mapsto n_{\mathbb{R}}(v)$$

l'action de $\mathbf{N}$ sur V définie comme suit : pour $t \in T_w$ $(= V_{(p)})$, on pose $t_{\mathbb{R}}(v) = v - t$; et le groupe $\underline{N}$ opère via l'action de son quotient W sur X_*. De l'action de Γ sur X_* se déduit une action sur V qui stabilise $V_{(p)}$. Et pour $(n, v) \in \mathbf{N} \times V$ et $\gamma \in \Gamma$, on a $\gamma(n_{\mathbb{R}}(v)) = \gamma(n)_{\mathbb{R}}(\gamma(v))$.

On peut faire les mêmes constructions pour le groupe $\underline{G}_{\mathrm{sc}}$; on définit en particulier $\mathbf{N}_{\mathrm{sc}}$ et V_{sc}. Posons $V_{\mathrm{cent}} = \{v \in V : \alpha(v) \text{ pour tout } \alpha \in \Sigma\}$; c'est un sous-espace vectoriel Γ-stable de V, et l'on a la décomposition $V = V_{\mathrm{cent}} \oplus V_{\mathrm{sc}}$. Si u est un automorphisme affine de V_{sc}, on identifie u à un automorphisme affine de V en le prolongeant par l'identité sur V_{cent}. Alors pour $n \in \mathbf{N}_{\mathrm{sc}}$, $n_{\mathbb{R}}$ s'identifie à $\rho(n)_{\mathbb{R}}$.

Soit $e \in \mathcal{P}$. On note Σ^e l'ensemble des orbites de $I(e)$ dans Σ, et $W^e \subset W$, $V^e \subset V$, $\mathbf{N}^e \subset \mathbf{N}$ (etc.) les sous-ensembles formés des points fixés par $I(e)$. L'action de $\mathbf{N}^e$ sur V stabilise V^e, et l'on note $\mathbf{W}^e$ le groupe d'automorphismes affines de V^e image de $\mathbf{N}^e$ par cette action. On définit $\mathbf{W}^e_{\mathrm{sc}}$ de la même manière. Comme ci-dessus, on identifie $\mathbf{W}^e_{\mathrm{sc}}$ à un groupe d'automorphismes affines de V^e. Toute paire $(\alpha, r) \in \Sigma^e \times \mathbb{R}$ définit une fonction affine $\alpha + r$ sur V^e, et l'on pose $H^e_{\alpha+r} = \{v \in V : \alpha(v) + r = 0\}$. On note Σ^e_{aff} l'ensemble de ces fonctions $\alpha + r$ pour lesquelles il existe un élément $w \in \mathbf{W}^e_{\mathrm{sc}}$ tel que $H^e_{\alpha+r} = \{v \in V^e : w(v) = v\}$. Les hyperplans H^e_ψ pour $\psi \in \Sigma^e_{\mathrm{aff}}$ définissent une décomposition en facettes. L'action de $\mathbf{W}^e$ sur V^e conserve Σ^e_{aff} et la décomposition en facettes. On note $\mathcal{C}^e$ la chambre qui contient $\epsilon\check{\rho}$ pour $\epsilon > 0$ assez petit, avec $\check{\rho} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Sigma^e_+}\check{\alpha}$ où $\Sigma^e_+ \subset \Sigma^e$ désigne l'ensemble des orbites de $I(e)$ dans Σ_+. Cette chambre est Γ-stable. On note $\mathbf{W}^e_{\mathcal{C}}$ le stabilisateur de $\mathcal{C}^e$ dans $\mathbf{W}^e$, et $\mathbf{N}^e_{\mathcal{C}}$ son image réciproque dans $\mathbf{N}^e$.

Si $e = 1$, on remplace l'exposant "^{e}" par un exposant "${}^{\mathrm{nr}}$" : Σ^{nr}, W^{nr}, V^{nr} (etc.). On utilisera souvent cette convention d'écriture dans la suite du papier, sans la réintroduire explicitement.

3.4. Soit $F \in \mathrm{CL}_q$. Appliquons la construction de 3.2 au corps $k = F$ et à l'homorphisme $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \twoheadrightarrow \mathrm{Gal}(F^{\mathrm{mod}}/F) = \Gamma$. On obtient un groupe réductif connexe G défini sur F et déployé sur F^{mod} ; un sous-groupe de Borel B de G et un tore maximal $T \subset B$ de G, tous deux définis sur F. On fixe un épinglage $\{E_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ de $\mathfrak{g}$ défini sur F, que l'on prolonge en une famille $\{E_\alpha\}_{\alpha\in\Sigma}$. Puisque G est déployé sur F^{mod}, on peut supposer que $\{E_\alpha\}_{\alpha\in\Delta} \subset \mathfrak{g}(F^{\mathrm{mod}})$; alors pour $\alpha \in \Sigma$, on a $E_\alpha \in \mathfrak{g}(F^{\mathrm{mod}})$. On pose $G^{\mathrm{mod}} = G(F^{\mathrm{mod}})$, $B^{\mathrm{mod}} = B(F^{\mathrm{mod}})$ (etc.). Pour $e \in \mathcal{P}$, on pose $G^e = G(F^e)$, $B^e = B(F^e)$ (etc.).

Pour toute extension algébrique E de F, on pose

$$T(E)_+ = \{x \in T(E) : \omega_F(\chi(x) - 1) > 0,\ \forall\chi \in \mathrm{X}^*\}.$$

Si $E = F^{\mathrm{mod}}$ (resp. F^e pour $e \in \mathcal{P}$, F^{nr}), on écrit T^{mod}_+ (resp. T^e_+, T^{nr}_+). De l'homomorphisme $\mathbf{r}_F : F^{\mathrm{mod},\times} \to \mathbf{F}^*$ se déduit un homomorphisme $\mathbf{r}_{T,F} : T^{\mathrm{mod}} = \mathrm{X}_* \otimes_{\mathbb{Z}} F^{\mathrm{mod},\times} \to \mathrm{X}_* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbf{F}^* = \mathbf{T}$. On a la suite exacte courte :

$$1 \to T^{\mathrm{mod}}_+ \to T^{\mathrm{mod}} \xrightarrow{\mathbf{r}_{T,F}} \mathbf{T} \to 1.$$

D'après 3.2, l'homomorphisme $\mathbf{r}_{T,F}$ se prolonge en un homomorphisme $\mathbf{r}_{N,F} : N^{\mathrm{mod}} \to \mathbf{N}$ qui, pour tout $w \in W$, vérifie $\mathbf{r}_{T,F}(n(w)) = \underline{n}(w)$. On a $\ker\mathbf{r}_{N,F} = \ker\mathbf{r}_{T,F}$, et $\mathbf{r}_{N,F}$ est Γ-équivariant. Pour tout sous-groupe fermé Γ' de Γ, on a $\mathrm{H}^i(\Gamma', T^{\mathrm{mod}}_+) = 0$ ($i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$). Par conséquent pour $e \in \mathcal{P}$, on a la suite exacte courte :

$$1 \to T^e_+ \to N^e \xrightarrow{\mathbf{r}_{N,F}} \mathbf{N}^e \to 1.$$

De la section s_F de $\mathbf{r}_F$ au-dessus de $\mathbb{Z}_{(p)}$ définie en 2.2, se déduit une section $s_{T,F} : T_\varpi \to T^{\mathrm{mod}}$ de $\mathbf{r}_{T,F}$ au-dessus de T_ϖ.

Soit $e \in \mathcal{P}$. On note $\mathfrak{I}^e_F$ l'immeuble étendu $\mathfrak{I}(G, F^e)$; c'est un $G^e \rtimes \mathrm{Gal}(F^e/F)$-ensemble. Pour $v \in \mathfrak{I}^e_F$, il existe un $\mathfrak{o}^e$-schéma en groupes affine lisse $\mathcal{G}^e_v$ de fibre générique $G \times_F F^e$, unique à isomorphisme unique près, tel que le groupe de ses points $\mathfrak{o}^e$-rationnels $G^e_v = \mathcal{G}^e_v(\mathfrak{o}^e)$ coïncide avec le stabilisateur de v dans G^e. On note $\overline{\mathcal{G}}^e_v$ sa fibre spéciale $\mathcal{G}^e_v \times_{\mathfrak{o}^e} \overline{\kappa}_F$, et $\mathbb{G}^e_v$ le quotient réductif maximal de $\overline{\mathcal{G}}^e_v$. Ainsi $\mathbb{G}^e_v$ est un groupe réductif (en général non connexe) défini sur une sous-extension finie de $\overline{\kappa}_F/\kappa_F$. Comme en 3.3, on identifie $\overline{\mathcal{G}}^e_v$, $\mathbb{G}^e_v$ (etc.) à $\overline{\mathcal{G}}^e_v(\overline{\kappa}_F)$, $\mathbb{G}^e_v(\overline{\kappa}_F)$ (etc.).

Notons S_e le plus grang sous-tore de T déployé sur F^e ; c'est un sous-tore F^e-déployé maximal de $G \times_F F^e$. On a $\mathrm{X}_*(S_e) = X^{I(e)}_*$, $\mathrm{Z}_G(S_e) = T$ et $\mathrm{N}_G(S_e) = N$. Au tore S_e est associé un appartement $A(G, S_e, F^e)$ de $\mathfrak{I}^e_F$. Le stabilisateur de $A(G, S_e, F^e)$ dans G^e est le groupe N^e ($= N(F^e)$). On vérifie que l'on peut identifier les N^e-ensembles $A(G, S_e, F^e)$ et V^e de sorte que l'action d'un élément $n \in N^e$ soit $\mathbf{r}_{N,F}(n)_{\mathbb{R}}$. L'immeuble $\mathfrak{I}^e_F$ s'identifie donc au quotient de $G^e \times V^e$ par la relation d'équivalence : $(g,v) \sim (g',v')$ si et seulement s'il existe un $n \in N^e$ et un $h \in G_v^e$ tels que $v' = \mathbf{r}_{N,F}(n)_{\mathbb{R}}(v)$ et $g' = ghn^{-1}$. Au tore S_e sont associés un ensemble de racines affines et un groupe de Weyl affine étendu, qui ne sont autres que Σ_{aff}^e et $\mathbf{W}^e$. De plus, $\mathbf{W}_{\mathrm{sc}}^e$ est le groupe de Weyl affine associé à Σ_{aff}^e, et l'on a la décomposition $\mathbf{W}^e = \mathbf{W}_{\mathrm{sc}}^e \rtimes \mathbf{W}_{\mathcal{C}}^e$.

Soient maintenant e, $e' \in \mathcal{P}$ tels que e divise e'. Puisque l'extension $F^{e'}/F^e$ est modérément ramifiée, l'immeuble $\mathfrak{I}_F^e$ coïncide avec l'ensemble des points fixes $(\mathfrak{I}_F^{e'})^{\mathrm{Gal}(F^{e'}/F^e)} = (\mathfrak{I}_F^{e'})^{I(e)}$. Et pour $v \in I(e)$, le groupe G_v^e n'est autre que le groupe des points fixes $(G_v^{e'})^{I(e)} = G_v^{e'} \cap G(F^e)$.

4. Torsion (d'après des constructions de Kottwitz)

Dans toute cette section, on fixe un corps $F \in \mathrm{CL}_q$.

4.1. Soit $e \in \mathcal{P}$. Appliquons la construction de 3.4 au cas $G = T$: pour tout $v \in V^e$, il existe un $\mathfrak{o}^e$-schéma en groupes affine lisse $\mathcal{T}_v^e$ de fibre générique $T \times_F F^e$, unique à isomorphisme unique près, tel que $T_v^e = \mathcal{T}_v^e(\mathfrak{o}^e)$ coïncide avec le stabilisateur de v dans T^e. Puisque $T_v^e = (X_* \otimes_{\mathbb{Z}} U_{F^{\mathrm{mod}}})^{I(e)}$, $\mathcal{T}_v^e$ est indépendant de v. Soit $\mathcal{T}^{e,\circ}$ la composante neutre de $\mathcal{T}_v^e$; c'est aussi la composante neutre du modèle de Néron de $T \times_F F^e$. Posons $T^{e,\circ} = \mathcal{T}^{e,\circ}(\mathfrak{o}^e)$. On a l'inclusion $T^{e,\circ} \subset T_v^e$. Si de plus $I(e)$ opère trivialement sur $\mathcal{D}$, alors on a $T_v^e = \mathrm{X}_* \otimes_{\mathbb{Z}} U_{F^e} = T^{e,\circ}$; de la valuation ω_F sur F^e se déduit un homomorphisme $\omega_{T,F}^e : T^e \to \frac{1}{e}X_*$, et l'on a la suite exacte courte :

$$1 \to T^{e,\circ} \to T^e \xrightarrow{\omega_{T,F}^e} \tfrac{1}{e}\mathrm{X}_* \to 1.$$

Dans le cas général, on construit de la manière suivante un homomorphisme $\omega_{T,F}^e : T^e \to \frac{1}{e}\mathrm{X}_{*,I(e)}$ où $\mathrm{X}_{*,I(e)}$ désigne le groupe des coinvariants de X_* pour l'action de $I(e)$: on choisit un $e' \in \mathcal{P}$ tel que e divise e' et $I(e')$ opère trivialement sur $\mathcal{D}$. L'application norme $T^{e'} \to T^e$ est surjective, et par fonctorialité, elle induit une application $T^{e',\circ} \to T^{e,\circ}$. La suite exacte ci-dessus se prolonge en un diagramme à carrés commutatifs dont les deux suites horizontales sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & T^{e',\circ} & \longrightarrow & T^{e'} & \xrightarrow{\omega_{T,F}^{e'}} & \frac{1}{e'}\mathrm{X}_* & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & T^{e,\circ} & \longrightarrow & T^e & \xrightarrow{\omega_{T,F}^{e}} & \frac{1}{e}\mathrm{X}_{*,I(e)} & \longrightarrow & 1 \end{array}.$$

Les deux première flêches verticales sont les normes, la troisième est la composée de la surjection canonique $\frac{1}{e}\mathrm{X}_* \to \frac{1}{e}\mathrm{X}_{*,I(e)}$ et de la multiplication par $\frac{e'}{e}$. L'application $\omega_{T,F}^e$ est bien définie, i.e. elle ne dépend pas du choix de e'.

Puisque l'extension $F^{e'}/F^e$ est modérément ramifiée, l'application norme $T^{e'} \to T^e$ induit une application surjective $T_+^{e'} \to T_+^e$. Or $T_+^{e'} = \mathrm{X}_* \otimes_{\mathbb{Z}} U_{F^e}^+ \subset T^{e',\circ}$; d'où l'inclusion $T_+^e \subset T^{e,\circ}$. Soit $\underline{T}^{e,\circ} = \mathrm{X}_*^{I(e)} \otimes_{\mathbb{Z}} \overline{\mathbb{F}}_q^\times$ la composante neutre du groupe algébrique $\underline{T}^e = \underline{T}^{I(e)}$. Via l'homorphisme $\mathbf{r}_{T,F}$, le diagramme précédent induit le diagramme à carrés commutatifs et suites horizontales exactes suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \underline{T} & \longrightarrow & \mathbf{T}^{e'} & \xrightarrow{\omega_{\mathbf{T}}^{e'}} & \frac{1}{e'}\mathrm{X}_* & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & \underline{T}^{e,\circ} & \longrightarrow & \mathbf{T}^e & \xrightarrow{\omega_{\mathbf{T}}^{e}} & \frac{1}{e}\mathrm{X}_{*,I(e)} & \longrightarrow & 1 \end{array}.$$

Tout élément $n \in \mathbf{N}^e$ s'écrit de manière unique $n = t\underline{n}(w)$ avec $t \in \mathbf{T}^e$ et $w \in W^e$. En envoyant n sur $(\omega_{\mathbf{T}}^e(t), w)$, on définit un homomorphisme $\omega_{\mathbf{N}}^e : \mathbf{N}^e \to \frac{1}{e}\mathrm{X}_{*,I(e)} \rtimes W^e$. Et de la deuxième suite exacte du diagramme ci-dessus, on déduit la suite exacte courte :

$$1 \to \underline{T}^{e,\circ} \to \mathbf{N}^e \xrightarrow{\omega_{\mathbf{N}}^e} \tfrac{1}{e}\mathrm{X}_{*,I(e)} \rtimes W^e \to 1.$$

4.2. Prenons $e = 1$, et considérons la surjection canonique $\mathrm{X}_{*,I} \to (\mathrm{X}_*/\mathrm{X}_{*,\mathrm{sc}})_I$. Elle est W^{nr}-équivariante pour les actions naturelles de W^{nr}. Or le groupe W opère trivialement sur $\mathrm{X}_*/\mathrm{X}_{*,\mathrm{sc}}$: pour $w \in W$ et $\lambda \in \mathrm{X}_*$, on a $w(\lambda) - \lambda \in \mathrm{X}_{*,\mathrm{sc}}$. Par conséquent la surjection précédente se prolonge en un homomorphisme surjectif $\mathrm{X}_{*,I} \rtimes W^{\mathrm{nr}} \to (\mathrm{X}_*/\mathrm{X}_{*,\mathrm{sc}})_I$. En composant ce dernier avec $\omega_{\mathbf{N}}^{\mathrm{nr}}$, on obtient un homomorphisme surjectif $\tilde{\omega}_{\mathbf{N}}^{\mathrm{nr}} : \mathbf{N}^{\mathrm{nr}} \to (\mathrm{X}_*/\mathrm{X}_{*,\mathrm{sc}})_I$. Le sous-groupe $\mathbf{N}_{\mathcal{C}}^{\mathrm{nr}} \subset \mathbf{N}^{\mathrm{nr}}$ défini en 3.3 contient $\underline{T}^{\mathrm{nr}} = \underline{T}^I$; à fortiori, il contient la composante neutre $\underline{T}^{\mathrm{nr},\circ}$. D'après le lemme 1.8.1 de [W2], on a la suite exacte courte

$$1 \to \underline{T}^{\mathrm{nr},\circ} \to \mathbf{N}_{\mathcal{C}}^{\mathrm{nr}} \xrightarrow{\tilde{\omega}_{\mathbf{N}}^{\mathrm{nr}}} (\mathrm{X}_*/\mathrm{X}_{*,\mathrm{sc}})_I \to 1.$$

D'autre part, on a l'égalité $\mathrm{H}^1(\Theta, (\mathrm{X}_*/\mathrm{X}_{*,\mathrm{sc}})_I) = (\mathrm{X}_*/\mathrm{X}_{*,\mathrm{sc}})_{\Gamma,\mathrm{tor}}$ où $(\mathrm{X}_*/\mathrm{X}_{*,\mathrm{sc}})_{\Gamma,\mathrm{tor}}$ désigne le sous-groupe de torsion de $(\mathrm{X}_*/\mathrm{X}_{*,\mathrm{sc}})_\Gamma$: à un cocycle $\delta \in \mathrm{Z}^1(\Theta, (\mathrm{X}_*/\mathrm{X}_{*,\mathrm{sc}})_I)$, on associe l'image de $\delta(\theta_1)$ dans $[(\mathrm{X}_*/\mathrm{X}_{*,\mathrm{sc}})_I]_\Theta = (\mathrm{X}_*/\mathrm{X}_{*,\mathrm{sc}})_\Gamma$. L'homomorphisme $\tilde{\omega}_{\mathbf{N}}^{\mathrm{nr}}$ est Θ-équivariant. Il induit donc une application $\mathrm{H}^1(\Theta, \mathbf{N}_{\mathcal{C}}^{\mathrm{nr}}) \to (\mathrm{X}_*/\mathrm{X}_{*,\mathrm{sc}})_{\Gamma,\mathrm{tor}}$. D'après le lemme 1.8.2 de [W2], cette application est *bijective*.

Fixons un sous-ensemble $D \subset \mathrm{Z}^1(\Theta, \mathbf{N}_{\mathcal{C}}^{\mathrm{nr}})$ tel que l'application naturelle $D \to \mathrm{H}^1(\Theta, \mathbf{N}_{\mathcal{C}}^{\mathrm{nr}})$ soit bijective. On munit D de la structure de groupe déduite de celle de $(\mathrm{X}_*/\mathrm{X}_{*,\mathrm{sc}})_{\Gamma,\mathrm{tor}}$ via la bijection $D \to (\mathrm{X}_*/\mathrm{X}_{*,\mathrm{sc}})_{\Gamma,\mathrm{tor}}$. On considère aussi les éléments de D comme des cocycles de Γ triviaux sur I. Notons $N_{\mathcal{C}}^{\mathrm{nr}}$ l'image réciproque de $\mathbf{N}_{\mathcal{C}}^{\mathrm{nr}}$ par l'homomorphisme $\mathbf{r}_{N,F}^{\mathrm{nr}}$. Ce dernier définit une application $\mathrm{H}^1(\Theta, N_{\mathcal{C}}^{\mathrm{nr}}) \to \mathrm{H}^1(\Theta, \mathbf{N}_{\mathcal{C}}^{\mathrm{nr}})$ qui, puisque $\mathrm{H}^i(\Theta, T_+^{\mathrm{nr}}) = 0$ ($i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$), est *bijective*. Plus précisément, tout cocycle de Θ à valeurs dans $\mathbf{N}_{\mathcal{C}}^{\mathrm{nr}}$ se relève en un cocycle de Θ à valeur dans $N_{\mathcal{C}}^{\mathrm{nr}}$. Pour chaque $d \in D$, on fixe un tel relèvement que l'on note d_F.

4.3. Dans [K2] §7, Kottwitz a défini un homomorphisme $\omega_G^{\mathrm{nr}} : G^{\mathrm{nr}} \to (\mathrm{X}_*/\mathrm{X}_{*,\mathrm{sc}})_I$ qui possède les propriétés suivantes :

- la restriction de ω_G^{nr} à T^{nr} coïncide avec la composée de ω_T^{nr} et de la surjection canonique $\mathrm{X}_{*,I} \to (\mathrm{X}_*/\mathrm{X}_{*,\mathrm{sc}})_I$;
- $\rho(G_{\mathrm{sc}}^{\mathrm{nr}}) \subset \ker \omega_G^{\mathrm{nr}}$.

On en déduit que la restriction de ω_G^{nr} à N^{nr} coïncide avec l'application composée $\tilde{\omega}_{\mathbf{N}}^{\mathrm{nr}} \circ \mathbf{r}_{N,F}^{\mathrm{nr}}$. D'autre par, on a les égalités

$$\mathrm{H}^1(\mathrm{Gal}(\overline{F}/F), G(\overline{F})) = \mathrm{H}^1(\Gamma, G^{\mathrm{mod}}) = \mathrm{H}^1(\Theta, G^{\mathrm{nr}});$$

et ω_G^{nr} induit une application bijective

$$\mathrm{H}^1(\Theta, G^{\mathrm{nr}}) \to \mathrm{H}^1(\Theta, (\mathrm{X}_*/\mathrm{X}_{*,\mathrm{sc}})_I) = (\mathrm{X}_*/\mathrm{X}_{*,\mathrm{sc}})_{\Gamma,\mathrm{tor}}.$$

D'après 4.2, l'inclusion $N_{\mathcal{C}}^{\mathrm{nr}} \subset G^{\mathrm{nr}}$ induit une application bijective $\mathrm{H}^1(\Theta, N_{\mathcal{C}}^{\mathrm{nr}}) \to \mathrm{H}^1(\Theta, G^{\mathrm{nr}})$. Ainsi l'application $d \mapsto d_F$ identifie D a un ensemble de cocycles représentant l'ensemble $\mathrm{H}^1(\Theta, G^{\mathrm{nr}})$.

Tout élément $d \in D$ définit une nouvelle structure de G sur F, notée ${}_dG$. Précisément, ${}_dG$ est muni d'un isomorphisme de groupes algébriques ${}_d\xi : {}_dG \to G$ défini sur F^{nr} et vérifiant ${}_d\xi \circ \theta = \mathrm{Ad}(d_F(\theta)) \circ \theta \circ {}_d\xi$ pour tout $\theta \in \Theta$; i.e. vérifiant ${}_d\xi \circ \gamma = \mathrm{Ad}(d_F(\gamma)) \circ \gamma \circ {}_d\xi$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. Notons ${}_dT$ l'image réciproque de T par ${}_d\xi$. C'est un tore de ${}_dG$ défini sur F. Soit ${}_dS$ le plus grand sous-tore de ${}_dT$ déployé sur F.

Lemme ([W2] lemme 1.9). — *Le tore ${}_dS$ est un sous-tore F-déployé maximal de ${}_dG$.*

Notons ${}_dV$ l'espace V muni de l'action de Γ suivante : $(\gamma, v) \mapsto d(\gamma)_{\mathbb{R}}(\gamma(v))$ pour $\gamma \in \Gamma$ et $v \in V$. Soit $e \in \mathcal{P}$ tel que $I(e)$ opère trivialement sur $\mathcal{D}$. De même que l'on a construit $\mathfrak{I}_F^e$ comme quotient de $G^e \times V$ (cf. 3.3), on construit l'immeuble étendu ${}_d\mathfrak{I}_F^e = \mathfrak{I}({}_dG, F^e)$ comme quotient de ${}_dG(F^e) \times {}_dV$. D'ailleurs, via l'isomorphisme de groupes ${}_dG(F^e) \to G^e$ induit par ${}_d\xi$, les G^e-ensembles ${}_d\mathfrak{I}_F^e$ et $\mathfrak{I}_F^e$ sont isomorphes. L'action de Γ sur ${}_dG(F^e) \times {}_dV$ passe au quotient et définit une action sur ${}_d\mathfrak{I}_F^e$. Grâce au lemme précédent, l'immeuble ${}_d\mathfrak{I}_F = \mathfrak{I}({}_dG, F)$ s'identifie au sous-ensemble $({}_d\mathfrak{I}_F^e)^\Gamma \subset {}_d\mathfrak{I}_F^e$ des points fixés par Γ. Au tore ${}_dS$ est associé un appartement $A({}_dG, {}_dS, F)$ dans ${}_d\mathfrak{I}_F$, qui n'est autre que le sous-ensemble ${}_dW = ({}_dV)^\Gamma \subset {}_dV$ des points fixés par Γ.

Pour $v \in {}_dW$, il existe un $\mathfrak{o}_F$-schéma en groupes affine lisse ${}_d\mathcal{G}_v$ de fibre générique ${}_dG$, unique à isomorphisme unique près, tel que le groupe des points $\mathfrak{o}^{\mathrm{nr}}$-rationnels ${}_dG_v^{\mathrm{nr}} = {}_d\mathcal{G}_v(\mathfrak{o}^{\mathrm{nr}})$ coïncide avec le stabilisateur de v dans ${}_dG(F^{\mathrm{nr}})$. L'application ${}_d\xi$ induit un isomorphisme ${}_dG_v^{\mathrm{nr}} \xrightarrow{\sim} G_v^{\mathrm{nr}}$. Par fonctorialité, on en déduit qu'il existe un unique isomorphisme de $\mathfrak{o}^{\mathrm{nr}}$-schémas en groupes ${}_d\xi_v : {}_d\mathcal{G}_v \times_{\mathfrak{o}_F} \mathfrak{o}^{\mathrm{nr}} \to \mathcal{G}_v^{\mathrm{nr}}$ prolongeant ${}_d\xi$; i.e. tel que ${}_d\xi_v \times_{\mathfrak{o}^{\mathrm{nr}}} F^{\mathrm{nr}} = {}_d\xi$.

On pose ${}_d\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}({}_dG)$ et ${}_d\mathfrak{g}^{\mathrm{nr}} = {}_d\mathfrak{g}(F^{\mathrm{nr}})$. Le groupe Θ opère naturellement sur ${}_d\mathfrak{g}^{\mathrm{nr}}$, et l'on a ${}_d\mathfrak{g}^{\mathrm{nr}} = ({}_d\mathfrak{g}^{\mathrm{nr}})^\Theta \otimes_F F^{\mathrm{nr}}$ avec $({}_d\mathfrak{g}^{\mathrm{nr}})^\Theta = {}_d\mathfrak{g}(F)$.

5. Filtrations de Moy-Prasad (sur F^{nr})

5.1. Posons $V_{(p)}^{\mathrm{nr}} = V_{(p)}^I$ $(= \mathrm{X}_*^I \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{(p)})$. De la forme bilinéaire $I \times \mathbb{Z}_{(p)} \to \overline{\mathbb{F}}_q^\times$, $(\sigma, r) \mapsto r(\sigma)$ définie en 2.1, on déduit une forme bilinéaire

$$I \times V_{(p)}^{\mathrm{nr}} \to \mathrm{X}_*^I \otimes_{\mathbb{Z}} \overline{\mathbb{F}}_q^\times = \underline{T}^{\mathrm{nr},\circ},\ (\sigma, v) \mapsto v(\sigma).$$

On peut aussi la définir autrement : pour $v \in V_{(p)}$, il existe un unique élément $t_v \in T_\varpi$ tel que $(t_v)_{\mathbb{R}}(0) = v$ (avec l'identification $T_\varpi = V_{(p)}$, on a $t_v = -v$). Rappelons qu'on a défini en 3.3 une action de Γ sur $\mathbf{T}$, pour laquelle T_ϖ n'est pas Γ-stable. Pour $(\sigma, v) \in I \times V_{(p)}^{\mathrm{nr}}$, on a

$$v(\sigma) = \sigma(t_v)t_v^{-1}.$$

Soit $v \in V_{(p)}^{\mathrm{nr}}$. Le groupe I opère sur $\underline{G}$, et pour $\sigma \in I$, on note $\underline{\rho}_v(\sigma)$ le $\overline{\mathbb{F}}_q$-automorphisme $\mathrm{Ad}(v(\sigma)) \circ \sigma$ de $\underline{G}$. L'application $I \to \mathrm{Aut}_{\overline{\kappa}_F-\mathrm{gr}}(\underline{G})$, $\sigma \mapsto \underline{\rho}_v$ est un homomorphisme. Soit $\underline{G}_v \subset \underline{G}$ le sous-groupe (en général non connexe) formé des éléments fixés par $\underline{\rho}_v(\sigma)$ pour tout $\sigma \in I$.

Pour $(v, r) \in V_{(p)}^{\mathrm{nr}} \times \mathbb{Z}_{(p)}$, on pose

$$\underline{\mathfrak{g}}_{v,r} = \{X \in \underline{\mathfrak{g}} : \mathrm{d}(\underline{\rho}_v(\sigma))(X) = r(\sigma)X \text{ pour tout } \sigma \in I\}.$$

Cet espace est stable sous l'action de $\underline{G}_v$. Et pour $r = 0$, on a $\underline{\mathfrak{g}}_{v,0} = \mathrm{Lie}(\underline{G}_v)$.

Soient (v, r), $(v', r') \in V_{(p)}^{\mathrm{nr}} \times \mathbb{Z}_{(p)}$. Choisissons un entier $e \in \mathcal{P}$ tel que ev, $ev' \in \mathrm{X}_*$ et er, $er' \in \mathbb{Z}$. Posons $\lambda = ev' - ev$. Pour $x \in \overline{\mathbb{F}}_q^\times$, on a donc $\lambda(x) \in \underline{T}$. Pour $i \in \mathbb{Z}$, posons

$$\begin{aligned}
&\underline{\mathfrak{g}}[i] = \{X \in \underline{\mathfrak{g}} : \mathrm{Ad}(\lambda(x))(X) = x^i X \text{ pour tout } x \in \overline{\mathbb{F}}_q^\times\},\\
&\underline{\mathfrak{g}}[\geq i] = \oplus_{j \geq i}\, \underline{\mathfrak{g}}[j],\\
&\underline{\mathfrak{g}}[> i] = \oplus_{j > i}\, \underline{\mathfrak{g}}[j].
\end{aligned}$$

On vérifie que pour $i = er' - er$, les espaces $\underline{\mathfrak{g}}[i]$, $\underline{\mathfrak{g}}[\geq i]$ et $\underline{\mathfrak{g}}[> i]$, ne dépendant pas du choix de e ; de plus on a $\underline{\mathfrak{g}}_{v,r} = \oplus_{i \in \mathbb{Z}}\, (\underline{\mathfrak{g}}_{v,r} \cap \underline{\mathfrak{g}}[i])$. On pose

$$\begin{aligned}
\underline{\mathfrak{m}}_{v,r;v',r'} &= \underline{\mathfrak{g}}_{v,r} \cap \underline{\mathfrak{g}}[er' - er],\\
\underline{\mathfrak{p}}_{v,r;v',r'} &= \underline{\mathfrak{g}}_{v,r} \cap \underline{\mathfrak{g}}[\geq er' - er],\\
\underline{\mathfrak{u}}_{v,r;v',r'} &= \underline{\mathfrak{g}}_{v,r} \cap \underline{\mathfrak{g}}[> er' - er].
\end{aligned}$$

On a $\underline{\mathfrak{p}}_{v,r;v',r'} = \underline{\mathfrak{m}}_{v,r;v',r'} \oplus \underline{\mathfrak{m}}_{v,r;v',r'}$. Si de plus $r = r' = 0$, alors $\underline{\mathfrak{p}}_{v,r;v',r'}$ est une sous-$\overline{\mathbb{F}}_q$-algèbre parabolique de $\underline{\mathfrak{g}}_{v,r}$ de radical nilpotent $\underline{\mathfrak{u}}_{v,r;v',r'}$, et $\underline{\mathfrak{m}}_{v,r;v',r'}$ est une composante de Levi de $\underline{\mathfrak{p}}_{v,r;v',r'}$.

5.2. Pour $\alpha \in \Sigma^{\mathrm{nr}}$, on note $\underline{\mathfrak{g}}_\alpha$ l'espace $\oplus_\beta \underline{\mathfrak{g}}_\beta$ où β parcourt les éléments de Σ appartenant à l'orbite α. On pose $\tilde{\Sigma}^{\mathrm{nr}} = \Sigma^{\mathrm{nr}} \cup \{0\}$ et $\underline{\mathfrak{g}}_0 = \underline{\mathfrak{t}}$ avec (rappel) $\underline{\mathfrak{t}} = \mathrm{Lie}(\underline{T})$. Pour $\alpha \in \tilde{\Sigma}^{\mathrm{nr}}$, on note R_α l'ensemble des $r \in \mathbb{Z}_{(p)}$ pour lesquels il existe un $X \in \underline{\mathfrak{g}}_\alpha \smallsetminus \{0\}$ tel que $\sigma(X) = r(\sigma)X$ pour tout $\sigma \in I$. L'ensemble R_α est stable par translation par $\mathbb{Z}$ et son image dans $\mathbb{Z}_{(p)}$ est *finie*. La collection des hyperplans $\mathcal{H}_{\alpha,r} = \{(v,r') \in V^{\mathrm{nr}} \times \mathbb{R} : r' - \alpha(v) = r\} \subset V^{\mathrm{nr}} \times \mathbb{R}$ pour $\alpha \in \tilde{\Sigma}^{\mathrm{nr}}$ et $r \in R_\alpha$, définit une *décomposition en facette*. On note Φ l'ensemble de ces facettes. Pour $(v,r) \in V^{\mathrm{nr}} \times \mathbb{R}$, on note $\phi_{v,r} \in \Phi$ la facette à laquelle appartient (v,r). Chaque facette est stable par translation par l'espace $V^{\mathrm{nr}}_{\mathrm{cent}} = (V_{\mathrm{cent}})^I$ (cf. 3.3). Posons $\overline{V}^{\mathrm{nr}} = V^{\mathrm{nr}}/V^{\mathrm{nr}}_{\mathrm{cent}}$. Pour $\phi \in \Phi$, le sous-ensemble $\bar{\phi} = \phi/V^{\mathrm{nr}}_{\mathrm{cent}}$ de $\overline{V}^{\mathrm{nr}} \times \mathbb{R}$ est relativement compact, et sa projection sur $\mathbb{R}$ est un intervalle borné de $\mathbb{R}$ dont on note $r(\phi)$ la borne supérieure. La condition $(P_{\mathrm{rg}(\mathcal{D})})$ implique le

Lemme ([W2] lemmes 2.4.1 et 2.4.2). — *Pour $\phi \in \Phi$, l'intersection $\phi \cap (V^{\mathrm{nr}}_{(p)} \times \mathbb{Z}_{(p)})$ est dense dans ϕ, et l'on a $r(\phi) \in \mathbb{Z}_{(p)}$. De plus, il existe un $e \in \mathcal{P}$ tel que $er(\phi) \in \mathbb{Z}$ pour tout $\phi \in \Phi$.*

Pour $\phi \in \Phi$, on note ω_ϕ l'ensemble (fini) des facettes $\phi' \in \Phi$ dont l'adhérence contient ϕ; et pour $(v,r) \in V^{\mathrm{nr}} \times \mathbb{R}$, on pose $\omega_{v,r} = \omega_{\phi_{v,r}}$.

5.3. Soit $F \in \mathrm{CL}_q$ (fixé jusqu'à la fin de la section 5), et soit $e \in \mathcal{P}$ tel que $I(e)$ opère trivialement sur $\mathcal{D}$. Le point $v = 0 \in V = V^e$ est *hyperspécial*, par conséquent la fibre spéciale $\overline{\mathcal{G}}^e_0$ du $\mathfrak{o}^e$-schéma en groupes $\mathcal{G}^e_0$ associé à 0 en 3.4, est *réductive* et *connexe*; i.e. on a $\mathbb{G}^e_0 = \overline{\mathcal{G}}^e_0$ et $\overline{\mathcal{G}}^e_0$ est un groupe algébrique connexe. D'autre part, puisque T est déployé sur F^e, on a $\mathcal{T}^e_{v'} = \mathcal{T}^{e,\circ}$ pour tout $v' \in V$. Notons $\pi^e_0 : G^e_0 = \mathcal{G}^e_0(\mathfrak{o}^e) \to \mathbb{G}^e_0 = \mathbb{G}^e_0(\overline{\kappa}_F)$ la projection canonique (réduction modulo $\mathfrak{p}^e$). Alors $\mathbb{B}^e_0 = \pi^e_0(B^e \cap G^e_0)$ et $\mathbb{T}^e_0 = \pi^e_0(T^e \cap G^e_0)$ sont respectivement un sous-groupe de Borel et un tore maximal de $\mathbb{G}^e_0$. On a une identification canonique $\mathrm{X}_*(\mathbb{T}^e_0) = \mathrm{X}_*$; et via cette identification, $\Sigma(\mathbb{G}^e_0, \mathbb{T}^e_0)$ s'identifie à Σ. La famille $\{\mathrm{d}(\pi^e_0)(E_\alpha)\}_{\alpha\in\Delta}$ est un épinglage de $\mathrm{Lie}(\mathbb{G}^e_0)$. On peut donc identifier les groupes $\mathbb{G}^e_0$ et $\underline{G}$ de sorte que :

- $\mathbb{T}^e_0$ s'identifie à $\underline{T}$ de manière compatible avec les identifications $\mathrm{X}_*(\mathbb{T}^e_0) = \mathrm{X}_* = \mathrm{X}_*(\underline{T})$;
- pour $\alpha \in \Delta$, $\mathrm{d}(\pi^e_0)(E_\alpha)$ s'identifie à $\underline{E}_\alpha$.

Alors on vérifie que :

- l'intersection $N^e \cap G^e$ est l'image réciproque de $\underline{N}$ par l'application $N^e \xrightarrow{\mathbf{r}_{N,F}} \mathbf{N}^e$;
- les applications $\mathbf{r}_{N,F}$ et π^e_0 coïncident sur cette intersection.

La famille $\{\mathrm{d}(\pi^e_0)(E_\alpha)\}_{\alpha\in\Sigma}$ prolonge l'épinglage $\{\underline{E}_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ de $\underline{\mathfrak{g}}$ au sens de 3.2, c'est-à-dire qu'elle vérifie les trois conditions imposées à la fin de 3.2. Pour $\alpha \in \Delta$, on a nécessairement $\mathrm{d}(\pi^e_0)(E_{-\alpha}) = \underline{E}_{-\alpha}$. Et d'après 3.2, quitte à remplacer la famille de départ $\{E_\alpha\}_{\alpha\in\Sigma}$ en la multipliant par certains signes, on peut supposer que $\mathrm{d}(\pi^e_0)(E_\alpha) = \underline{E}_\alpha$ pour tout $\alpha \in \Sigma$.

5.4. Soit $v \in V^{\mathrm{nr}}_{(p)}$. Choisissons un entier $e \in \mathcal{P}$ tel que $ev \in \mathrm{X}_*$ et $I(e)$ opère trivialement sur $\mathcal{D}$. On a vu en 3.4 que $(G^e_v)^I = G^{\mathrm{nr}}_v$. L'action de I sur G^e_v se descend en une action (algébrique) de I sur la fibre spéciale $\mathbb{G}^e_v$, et puisque l'extension F^e/F^{nr} est modérément ramifiée, l'égalité $(G^e_v)^I = G^{\mathrm{nr}}_v$ se complète en le diagramme commutatif suivant (cf. [L] 3.5) :

$$\begin{array}{ccc} G^{\mathrm{nr}}_v & \xrightarrow{\pi^{\mathrm{nr}}_v} & \mathbb{G}^{\mathrm{nr}}_v \\ \| & & \| \\ (G^e_v)^I & \xrightarrow{\pi^e_v} & (\mathbb{G}^e_v)^I \end{array}$$

où $\pi_v^{\rm nr}$ est la composée des projections canoniques $G_v^{\rm nr}\to\overline{\mathcal{G}}_v^{\rm nr}=\overline{\mathcal{G}}_v^{\rm nr}(\overline{\kappa}_F)$ (réduction modulo $\mathfrak{p}^{\rm nr}$) et $\overline{\mathcal{G}}_v^{\rm nr}\to\mathbb{G}_v^{\rm nr}$.

Posons $t_{F,v}=\mathbf{s}_{T,F}(t_v)\in T^{\rm mod}$ où t_v est l'élément de T_ϖ défini en 5.1, et $\mathbf{s}_{T,F}$ est la section de $\mathbf{r}_{T,F}$ au-dessus de T_ϖ définie en 3.4. On vérifie que $t_{F,v}\in T^e$, puis que $G_v^e=\mathrm{Ad}(t_{F,v})(G_0^e)$. Notons $\tilde{\underline{\iota}}_v:G_v^{\rm nr}\to\underline{G}$ l'homomorphisme composé de l'application $\pi_0^e\circ\mathrm{Ad}(t_{F,v}^{-1})$ et de l'inclusion $G_v^{\rm nr}\subset G_v^e$. D'après le lemme 2.3.1 de [W2], on a $\tilde{\underline{\iota}}_v(G_v^{\rm nr})=\underline{G}_v$ et $\tilde{\underline{\iota}}_v$ se quotiente en un isomorphisme

$$\underline{\iota}_v:\mathbb{G}_v^{\rm nr}\xrightarrow{\sim}\underline{G}_v$$

qui ne dépend pas du choix de e. On pose $\underline{\pi}_v=\underline{\iota}_v\circ\pi_v^{\rm nr}:G_v^{\rm nr}\twoheadrightarrow\underline{G}_v$.

Notons que pour $n\in N^{\rm mod}\cap G_v^e=N^e\cap G_v^e$, on a

$$\pi_0^e\circ\mathrm{Ad}(t_{F,v}^{-1})(n)=\mathrm{Ad}(t_v^{-1})(\mathbf{r}_{N,F}(n))=\underline{\pi}\circ\mathbf{r}_{N,F}(n).$$

La première égalité résulte de ce que π_0^e et $\mathbf{r}_{N,F}$ coïncident sur l'intersection $N^e\cap G_0^e$; et puisque $N^e\cap G_0^e$ coïncide avec l'image réciproque de $\underline{N}$ par la surjection $N^e\xrightarrow{\mathbf{r}_{N,F}}\mathbf{N}^e$, on a $\mathrm{Ad}(t_v^{-1})(\mathbf{r}_{N,F}(n))\in\underline{N}$. Or $\underline{\pi}$ se restreint en l'identité sur $\underline{N}$, et $\underline{\pi}(t_v)=1$, d'où la seconde égalité.

5.5. Soit $e\in\mathcal{P}$. Pour $(v,r)\in V^e\times\mathbb{R}$, Moy et Prasad ont défini un $\mathfrak{o}^e$-réseau $\mathfrak{g}_{v,r}^e=\mathfrak{g}(F^e)_{v,r}$ dans $\mathfrak{g}(F^e)$. Fixé v, l'application $r\mapsto\mathfrak{g}_{v,r}^e$ est décroissante, et l'on pose $\mathfrak{g}_{v,r+}^e=\bigcup_{s>r}\mathfrak{g}_{v,s}^e$. Si $e'\in\mathcal{P}$ divise e, alors pour $(v,r)\in V^{e'}\times\mathbb{R}$, on a l'égalité $\mathfrak{g}_{v,r}^{e'}=(\mathfrak{g}_{v,r}^e)^{I(e')}$.

Supposons de plus que $I(e)$ opère trivialement sur $\mathcal{D}$. Alors pour $(v,r)=(0,0)$, posant $\mathfrak{g}_0^e=\mathrm{Lie}(\mathcal{G}_0^e)(\mathfrak{o}^e)$, on a $\mathfrak{g}_{0,0}^e=\mathfrak{g}_0^e$; et pour $(v,r)=(0,r)$ avec $r\in\frac{1}{e}\mathbb{Z}$, on a $\mathfrak{g}_{0,r}^e=\varpi_r\mathfrak{g}_0^e$.

Soit maintenant $(v,r)\in V_{(p)}^{\rm nr}\times\mathbb{Z}_{(p)}$. Choisissons un $e\in\mathcal{P}$ tel que $ev\in\mathrm{X}_*$, $er\in\mathbb{Z}$ et $I(e)$ opère trivialement sur $\mathcal{D}$. Alors on a l'égalité $\mathfrak{g}_{v,r}^e=\mathrm{Ad}(t_{F,v})(\varpi_r\mathfrak{g}_0^e)$. Notons $\underline{\pi}_{v,r}:\mathfrak{g}_{v,r}^{\rm nr}\to\underline{\mathfrak{g}}$ l'application linéaire définie comme la composée de la suite d'applications suivante :

$$\mathfrak{g}_{v,r}^{\rm nr}=(\mathfrak{g}_{v,r}^e)^I\subset\mathfrak{g}_{v,r}^e\xrightarrow{\mathrm{Ad}(t_{F,v}^{-1})}\varpi_r\mathfrak{g}_0^e\xrightarrow{\times\varpi_{-r}}\mathfrak{g}_0^e\xrightarrow{\mathrm{d}(\pi_0^e)}\underline{\mathfrak{g}}.$$

D'après le lemme 2.3.2 de [W2], on a $\underline{\pi}_{v,r}(\mathfrak{g}_{v,r}^{\rm nr})=\underline{\mathfrak{g}}_{v,r}$ et $\underline{\pi}_{v,r}$ se quotiente en un isomorphisme

$$\mathfrak{g}_{v,r}^{\rm nr}/\mathfrak{g}_{v,r}^{\rm nr}\xrightarrow{\sim}\underline{\mathfrak{g}}_{v,r}$$

qui ne dépend pas du choix de e.

5.6. D'après le lemme 2.5.1 de [W2], pour $(v,r),(v',r')\in V^{\rm nr}\times\mathbb{R}$, on a $\phi_{v,r}=\phi_{v',r'}$ si et seulement si $\mathfrak{g}_{v,r}^{\rm nr}=\mathfrak{g}_{v',r'}^{\rm nr}$ et $\mathfrak{g}_{v,r+}^{\rm nr}=\mathfrak{g}_{v',r'+}^{\rm nr}$. Cela signifie que pour $r\in\mathbb{R}$, la décomposition en facettes de $V^{\rm nr}$ obtenue en coupant les éléments de Φ avec $V^{\rm nr}\times\{r\}$ puis en les projetant sur $V^{\rm nr}$, coïncide avec la décomposition de $V^{\rm nr}$ en r-facettes généralisées définie par DeBacker (cf. 1.1). En particulier pour $r=0$, on retrouve la décomposition en facettes de $V^{\rm nr}$ définie en 3.3.

Pour $\phi\in\Phi$ tel que $\phi=\phi_{v,r}$ pour un $(v,r)\in V^{\rm nr}\times\mathbb{R}$, on peut donc poser $\mathfrak{g}_\phi^{\rm nr}=\mathfrak{g}_{v,r}^{\rm nr}$ et $\mathfrak{g}_{\phi+}^{\rm nr}=\mathfrak{g}_{v,r+}^{\rm nr}$. Pour $\phi,\phi'\in\Phi$ tels que $\phi'\in\omega_\phi$, on a les inclusions

$$\mathfrak{g}_{\phi+}^{\rm nr}\subset\mathfrak{g}_{\phi'+}^{\rm nr}\subset\mathfrak{g}_{\phi'}^{\rm nr}\subset\mathfrak{g}_\phi^{\rm nr}.$$

Soient $(v,r),(v',r')\in V_{(p)}^{\rm nr}\times\mathbb{Z}_{(p)}$ tels que $\phi_{v',r'}\in\omega_{v,r}$. On a deux façons d'envoyer $\mathfrak{g}_{v',r'}^{\rm nr}$ dans $\underline{\mathfrak{g}}$: la première est l'application $\underline{\pi}_{v',r'}$ (cf. 5.5) ; la seconde est la composée de l'application $\underline{\pi}_{v,r}$ et de l'inclusion $\mathfrak{g}_{v',r'}^{\rm nr}\subset\mathfrak{g}_{v,r}^{\rm nr}$. D'après le lemme 2.5.2 de [W2], on a $\underline{\pi}_{v,r}(\mathfrak{g}_{v',r'}^{\rm nr})=\underline{\mathfrak{p}}_{v,r;v',r'}$,

$\underline{\pi}_{v,r}(\mathfrak{g}^{\mathrm{nr}}_{v',r'+}) = \underline{\mathfrak{u}}_{v,r;v',r'}$, $\underline{\mathfrak{g}}_{v',r'} = \underline{\mathfrak{m}}_{v,r;v',r'}$, et l'application $\underline{\pi}_{v',r'}$ coïncide avec la composée de la projection canonique $\underline{\mathfrak{p}}_{v,r;v',r'} \to \underline{\mathfrak{m}}_{v,r;v',r'}$ et de $\underline{\pi}_{v,r}$. Cela implique que l'espace $\underline{\mathfrak{g}}_{v',r'}$ et la projection $\underline{\pi}_{v',r'} : \mathfrak{g}^{\mathrm{nr}}_{v',r'} \to \underline{\mathfrak{g}}_{v',r'}$ ne dépendent pas vraiment de (v', r'), mais seulement de la facette $\phi' = \phi_{v',r'}$ contenant (v', r') ; on les note respectivement $\underline{\mathfrak{g}}_{\phi'}$ et $\underline{\pi}_{\phi'}$. Posant $\phi = \phi_{v,r}$, on définit de la même manière $\underline{\mathfrak{g}}_{\phi}$ et $\underline{\pi}_{\phi}$. Alors les espaces $\underline{\mathfrak{m}}_{v,r;v',r'}$, $\underline{\mathfrak{p}}_{v,r;v',r'}$, $\underline{\mathfrak{u}}_{v,r;v',r'}$ et la restriction de $\underline{\pi}_{v,r}$ à $\mathfrak{g}^{\mathrm{nr}}_{v',r'}$ ne dépendent eux aussi que des facettes ϕ et ϕ' ; on les notes respectivement $\underline{\mathfrak{m}}_{\phi;\phi'}$, $\underline{\mathfrak{p}}_{\phi;\phi'}$, $\underline{\mathfrak{u}}_{\phi;\phi'}$ et $\underline{\pi}_{\phi;\phi'}$. On a donc $\underline{\mathfrak{g}}_{\phi'} = \underline{\mathfrak{m}}_{\phi;\phi'}$.

6. Filtrations de Moy-Prasad et torsion

Dans toute cette section, on fixe un élément $d \in D$. On rappelle que d est un cocycle de Θ (considéré aussi comme un cocycle de Γ trivial sur I) à valeurs dans $\mathbf{N}^{\mathrm{nr}}_{\mathcal{C}}$.

6.1. Notons $\Theta_d \subset \Theta$ le sous-groupe formé des θ opèrant trivialement sur ${}_dV$; i.e. tels que $d(\theta)_{\mathbb{R}} \circ \theta$ opère trivialement sur V. Puisque $\mathrm{rg}(\mathcal{D}) < p - 1$, pour $\theta \in \Theta$, l'automorphisme affine $d(\theta)_{\mathbb{R}} \circ \theta$ de V est d'ordre fini premier à p (cf. [W2] 2.8). On en déduit que l'indice $(\Theta : \Theta_d)$ est fini et premier à p. Pour $\theta \in \Theta$, $d(\theta)_{\mathbb{R}} \circ \theta$ stabilise le sous-espace $V^{\mathrm{nr}} \subset V$, et induit une permutation de l'ensemble Φ (défini en 5.2) des facettes de $V^{\mathrm{nr}} \times \mathbb{R}$. On note ${}_d\Phi \subset \Phi$ le sous-ensemble formé des facettes Θ-stables pour cette action de Θ. Par convexité, tout élément de ${}_d\Phi$ coupe ${}_dW \times \mathbb{R}$.

Le sous-espace $V_{(p)} \subset V$ est Γ-stable pour l'action de Γ tordue par d définie en 4.3 ; i.e. il définit un sous-Γ-ensemble ${}_dV_{(p)} \subset {}_dV$. On pose ${}_dW_{(p)} = ({}_dV_{(p)})^{\Gamma} \subset {}_dV_{(p)}$; on a donc ${}_dW_{(p)} = {}_dW \cap V_{(p)}$. D'après le lemme 5.2, pour tout $\phi \in {}_d\Phi$, l'intersection $\phi \cap ({}_dW_{(p)} \times \mathbb{Z}_{(p)})$ est dense dans $\phi \cap ({}_dW \times \mathbb{R})$. En effet, la projection de $V^{\mathrm{nr}} \times \mathbb{R}$ sur ${}_dW \times \mathbb{R}$ définie par

$$(v, r) \mapsto \frac{1}{(\Theta : \Theta_d)} \sum_{\theta \in \Theta/\Theta_d} (d(\theta)_{\mathbb{R}} \circ \theta(v), r)$$

envoie $V^{\mathrm{nr}}_{(p)} \times \mathbb{Z}_{(p)}$ sur ${}_dW_{(p)} \times \mathbb{Z}_{(p)}$. On en déduit en particulier que pour tout $\phi \in {}_d\Phi$, l'adhérence de ϕ dans V^{nr} coupe ${}_dW_{(p)} \times \{r(\phi)\}$.

Pour $\phi \in {}_d\Phi$ et $r \in \mathbb{R}$, on pose ${}_d\omega_{\phi} = \omega_{\phi} \cap {}_d\Phi$, et l'on note ${}_d\omega_{\phi}(> r)$ l'ensemble des $\phi' \in {}_d\omega_{\phi}$ tels que $r(\phi') > r$.

6.2. Puisque Θ fixe le groupe T_{ϖ}, l'application $\underline{d} = \underline{\pi} \circ d : \Theta \to \underline{N}$ est encore un cocycle. Comme en 4.3, on peut définir un $\mathbb{F}_q$-groupe algébrique ${}_d\underline{G}$, muni d'un $\overline{\mathbb{F}}_q$-isomorphisme ${}_d\underline{\xi} : {}_d\underline{G} \to \underline{G}$ vérifiant ${}_d\underline{\xi} \circ \theta = \mathrm{Ad}(\underline{d}(\theta)) \circ \theta \circ {}_d\underline{\xi}$ pour tout $\theta \in \Theta$.

Soit $v \in {}_dW_{(p)}$. Pour $\theta \in \Theta$ et $\sigma \in I$, les automorphismes $\mathrm{Ad}(\underline{d}(\theta)) \circ \theta$ et $\underline{\rho}_v(\sigma)$ de $\underline{G}$ ne commutent pas, mais on a l'égalité :

$$\mathrm{Ad}(\underline{d}(\theta)) \circ \theta \circ \underline{\rho}_v(\sigma) = \underline{\rho}_v(\theta\sigma\theta^{-1}) \circ \mathrm{Ad}(\underline{d}(\theta)) \circ \theta.$$

Par conséquent $\mathrm{Ad}(\underline{d}(\theta)) \circ \theta$ stabilise le sous-groupe $\underline{G}_v \subset \underline{G}$, et le sous-groupe ${}_d\underline{G}_v = {}_d\underline{\xi}^{-1}(\underline{G}_v)$ de ${}_d\underline{G}$ est défini sur $\mathbb{F}_q$. On peut aussi dire les choses autrement : puisque $v \in {}_dW$, on a $t_v^{-1} d(\gamma)\gamma(t_v) \in \underline{N}$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. L'application $\gamma \mapsto t_v^{-1} d(\gamma)\gamma(t_v)$ est un cocycle, et pour $\gamma \in \Gamma$, on note ${}_d\underline{\rho}_v(\gamma)$ le $\overline{\mathbb{F}}_q$-automorphisme $\mathrm{Ad}(t_v^{-1} d(\gamma)\gamma(t_v)) \circ \gamma$ de $\underline{G}$. On munit ${}_d\underline{G}$ d'une action de Γ de sorte que ${}_d\underline{\xi} \circ \gamma = {}_d\underline{\rho}_v(\gamma) \circ {}_d\underline{\xi}$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. Cette action prolonge celle de Θ définie plus haut, et ${}_d\underline{G}_v$ coïncide avec le sous-groupe ${}_d\underline{G}^I \subset {}_d\underline{G}$ des points fixés par I.

On note ${}_d\underline{G}_v^{\Theta} = {}_d\underline{G}_v(\mathbb{F}_q)$ le groupe des points $\mathbb{F}_q$-rationnels de ${}_d\underline{G}_v$.

Posons ${}_d\underline{\mathfrak{g}} = \mathrm{Lie}({}_d\underline{G})$. Comme en 3.3, on identifie ${}_d\underline{\mathfrak{g}}$ à ${}_d\underline{\mathfrak{g}}(\overline{\mathbb{F}}_q)$. Pour $(v, r) \in {}_dW_{(p)} \times \mathbb{Z}_{(p)}$, notons ${}_d\underline{\mathfrak{g}}_{v,r} \subset {}_d\underline{\mathfrak{g}}$ le sous-espace formé des X tels que $\sigma(X) = r(\sigma)$ pour tout $\sigma \in I$. Ce sous-espace est défini sur $\mathbb{F}_q$, i.e. il est Θ-stable. Et il est ${}_d\underline{G}_v$-stable pour l'action adjointe de ${}_d\underline{G}_v$ sur ${}_d\underline{\mathfrak{g}}$. Par construction on a l'égalité $\mathrm{d}({}_d\underline{\xi})({}_d\underline{\mathfrak{g}}_{v,r}) = \underline{\mathfrak{g}}_{v,r}$.

Pour $\phi \in {}_d\Phi$, on pose ${}_d\underline{\mathfrak{g}}_\phi = \mathrm{d}({}_d\underline{\xi})^{-1}(\underline{\mathfrak{g}}_\phi)$; i.e. ${}_d\underline{\mathfrak{g}}_\phi = {}_d\underline{\mathfrak{g}}_{v,r}$ pour tout $(v,r) \in \phi \cap ({}_dW_{(p)} \cap \mathbb{Z}_{(p)})$. Pour $\phi \in {}_d\Phi$ et $\phi' \in {}_d\omega_\phi$, on a défini en 5.6 les sous-espaces $\underline{\mathfrak{m}}_{\phi;\phi'}$, $\underline{\mathfrak{p}}_{\phi;\phi'}$ et $\underline{\mathfrak{u}}_{\phi;\phi'}$ de $\underline{\mathfrak{g}}_\phi$. Leurs images réciproques par $\mathrm{d}({}_d\xi)$, notées respectivement ${}_d\underline{\mathfrak{m}}_{\phi;\phi'}$, ${}_d\underline{\mathfrak{p}}_{\phi;\phi'}$ et ${}_d\underline{\mathfrak{u}}_{\phi;\phi'}$, sont des sous-espaces Θ-stables de ${}_d\underline{\mathfrak{g}}_\phi$. Puisque $\underline{\mathfrak{g}}_{\phi'} = \underline{\mathfrak{m}}_{\phi;\phi'}$, on a ${}_d\underline{\mathfrak{g}}_{\phi'} = {}_d\underline{\mathfrak{m}}_{\phi;\phi'}$. On note ${}_d\underline{\mathfrak{g}}_\phi^\Theta \subset {}_d\underline{\mathfrak{g}}_\phi$, ${}_d\underline{\mathfrak{m}}_{\phi,\phi'}^\Theta \subset {}_d\underline{\mathfrak{m}}_{\phi,\phi'}$, (etc.), les sous-espaces formés des points fixés par Θ. Et pour tous (v,r), $(v',r') \in {}_dW_{(p)} \cap \mathbb{Z}_{(p)}$ tels que $(v,r) \in \phi$ et $(v',r') \in \phi'$, on pose ${}_d\underline{\mathfrak{g}}_{v,r}^\Theta = {}_d\underline{\mathfrak{g}}_\phi^\Theta$, ${}_d\underline{\mathfrak{m}}_{v,r;v',r'}^\Theta = {}_d\underline{\mathfrak{g}}_{\phi,\phi'}^\Theta$, (etc.).

6.3. Dans ce numéro et dans le suivant, le terme "nilpotent" signifie nilpotent dans la $\overline{\mathbb{F}}_q$-algèbre ${}_d\underline{\mathfrak{g}}$. Soit $v \in {}_dW_{(p)}$. L'application qui à $r \in \mathbb{Z}_{(p)}$ associe le caractère $\sigma \mapsto r(\sigma)$ de I se quotiente en un isomorphisme de $\mathbb{Z}_{(p)}/\mathbb{Z}$ sur le groupe des caractères lisses d'ordre fini de I. On en déduit que pour $r \in \mathbb{Z}_{(p)}$, le sous-espace ${}_d\underline{\mathfrak{g}}_{v,r}$ ne dépend que de l'image de r dans $\mathbb{Z}_{(p)}/\mathbb{Z}$. L'ensemble des $r \in \mathbb{Z}_{(p)}/\mathbb{Z}$ tels que ${}_d\underline{\mathfrak{g}}_{v,r} \neq \{0\}$ est fini, et l'on a la décomposition

$${}_d\underline{\mathfrak{g}} = \oplus_r \, {}_d\underline{\mathfrak{g}}_{v,r}$$

où r parcourt les éléments de $\mathbb{Z}_{(p)}/\mathbb{Z}$.

Notons que pour r, $s \in \mathbb{Z}_{(p)}$, l'espace $[{}_d\underline{\mathfrak{g}}_{v,r} : {}_d\underline{\mathfrak{g}}_{v,s}] = \{[X,Y] : X \in {}_d\underline{\mathfrak{g}}_{v,r},\, Y \in {}_d\underline{\mathfrak{g}}_{v,s}\}$ est contenu dans ${}_d\underline{\mathfrak{g}}_{v,r+s}$. DeBacker a remarqué que la théorie des $\mathfrak{sl}_2$-triplets s'adaptait a cette situation (cf. [D] Appendix A). Soient $r \in \mathbb{Z}_{(p)}$ et $X \in {}_d\underline{\mathfrak{g}}_{v,r}^\Theta$ *nilpotent*. Grâce à la condition (P_Σ) de 3.1, on montre qu'il existe un élément $Y \in {}_d\underline{\mathfrak{g}}_{v,-r}^\Theta$ et un élément *semisimple* $H \in {}_d\underline{\mathfrak{g}}_{v,0}^\Theta$ tels que (X,H,Y) soit un $\mathfrak{sl}_2$-triplet (cf. [W2] lemme 2.9.1). On gradue alors l'espace ${}_d\underline{\mathfrak{g}}$ de la manière habituelle suivante : pour $i \in \mathbb{Z}$, on pose ${}_d\underline{\mathfrak{g}}(i) = \{Z \in {}_d\underline{\mathfrak{g}} : [H,Z] = iZ\}$. Cette graduation est définie sur $\mathbb{F}_q$ au sens où les sous-espaces ${}_d\underline{\mathfrak{g}}(i)$ sont Θ-stables. Pour $i \in \mathbb{Z}$, on pose ${}_d\underline{\mathfrak{g}}(\geq i) = \oplus_{j \geq i}\, {}_d\underline{\mathfrak{g}}(j)$. À nouveau grâce à la condition (P_Σ), on montre que pour $Z \in {}_d\underline{\mathfrak{g}}_{v,r}^\Theta \cap {}_d\underline{\mathfrak{g}}(\geq 3)$, il existe un élément $g \in {}_d\underline{G}_v^\Theta$ tel que $\mathrm{Ad}(g)(X) = X + Z$ (cf. [W2] lemme 2.9.2).

6.4. Pour $\phi \in {}_d\Phi$, on pose ${}_d\mathcal{S}_\phi = C({}_d\underline{\mathfrak{g}}_\phi^\Theta)$ et ${}_dS_\phi^* = \mathcal{D}({}_d\underline{\mathfrak{g}}_\phi^\Theta)$. Puisque ${}_d\underline{\mathfrak{g}}_\phi^\Theta$ est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{F}_q$, c'est un ensemble fini ; et $\dim_{\mathbb{C}}({}_d\mathcal{S}_\phi) < +\infty$.

Soient $\phi \in {}_d\Phi$ et $\phi' \in {}_d\omega_\phi$. D'après 6.2, on a ${}_d\underline{\mathfrak{g}}_{\phi'}^\Theta = {}_d\underline{\mathfrak{m}}_{\phi;\phi'}^\Theta$ et ${}_d\underline{\mathfrak{p}}_{\phi';\phi}^\Theta = {}_d\underline{\mathfrak{m}}_{\phi;\phi'}^\Theta \oplus {}_d\underline{\mathfrak{u}}_{\phi;\phi'}^\Theta$. Cela permet de définir une application linéaire injective ${}_ds_{\phi;\phi'} : {}_d\mathcal{S}_{\phi'} \to {}_d\mathcal{S}_\phi$. Précisément, à toute fonction $\varphi' \in {}_d\mathcal{S}_{\phi'}$, ${}_ds_{\phi;\phi'}$ associe la fonction $\varphi \in {}_d\mathcal{S}_\phi$ à support dans ${}_d\underline{\mathfrak{p}}_{\phi;\phi'}^\Theta$ donnée par $\varphi(X+Y) = \varphi'(X)$ pour tout $X \in {}_d\underline{\mathfrak{m}}_{\phi;\phi'}^\Theta$ et tout $Y \in {}_d\underline{\mathfrak{u}}_{\phi;\phi'}^\Theta$. Supposons de plus que $r(\phi') > r$ pour un $r \in \mathbb{Z}_{(p)}$ tel que ϕ coupe ${}_dW_{(p)} \times \{r\}$. Alors il existe deux éléments v, $v' \in {}_dW_{(p)}$ et un $r' \in \mathbb{Z}_{(p)}$ tels que $r' > r$, $(v,r) \in \phi$ et $(v',r') \in \phi'$. Choisissons un $e \in \mathcal{P}$ tel que ev, $ev' \in \mathrm{X}_*$ et er, $er' \in \mathbb{Z}$. Posons $\lambda = ev' - ev$ et graduons l'espace $\underline{\mathfrak{g}}$ comme en 5.1 : pour $i \in \mathbb{Z}$, posons

$$\underline{\mathfrak{g}}[i] = \{X \in \underline{\mathfrak{g}} : \mathrm{Ad}(\lambda(x))(X) = x^i X \text{ pour tout } x \in \overline{\mathbb{F}}_q^\times\}.$$

L'espace $\underline{\mathfrak{g}}[\geq 1]$ est le radical nilpotent d'une sous-algèbre parabolique de $\underline{\mathfrak{g}}$; il est donc formé d'éléments nilpotents. Puisque $r' > r$, l'espace ${}_d\underline{\mathfrak{p}}_{\phi;\phi'} = \mathrm{d}({}_d\underline{\xi})^{-1}(\underline{\mathfrak{g}}[er' - er])$ est contenu dans $({}_d\underline{\xi})^{-1}(\underline{\mathfrak{g}}[\geq 1])$, donc est lui aussi formé d'éléments nilpotents. En particulier, toute fonction dans l'image de ${}_ds_{\phi;\phi'}$ est à support nilpotent.

Pour $\phi \in {}_d\Phi$, les injections ${}_ds_{\phi;\phi'}$ définissent une application linéaire ${}_ds_\phi : \oplus_{\phi' \in {}_d\omega_\phi}\, {}_d\mathcal{S}_{\phi'} \to {}_d\mathcal{S}_\phi$. Grâce à aux résultats de 6.3, on montre le

Lemme ([W2] lemme 2.10.2). — *Soit $\phi \in {}_d\Phi$ et soit $(v,r) \in \phi \cap ({}_dW_{(p)} \times \mathbb{Z}_{(p)})$. Il existe une application linéaire ${}_dl_\phi^+ : {}_d\mathcal{S}_\phi \to \oplus_{\phi' \in {}_d\omega_\phi(>r)}\, {}_d\mathcal{S}_{\phi'}$ vérifiant la propriété suivante : pour toute paire*

$(\varphi, J) \in {}_dS_\phi \times {}_d\mathcal{S}_\phi^*$ telle que J soit ${}_d\underline{G}_v^\Theta$-invariante (pour l'action adjointe de ${}_d\underline{G}_v^\Theta$ sur ${}_d\underline{\mathfrak{g}}_\phi^\Theta$) et à support nilpotent, on a l'égalité $J({}_ds_\phi \circ {}_dl_\phi^+(\varphi)) = J(\varphi)$.

6.5. Soit $F \in \mathrm{CL}_q$, et soit $v \in {}_dW_{(p)}$. On a définit en 4.3 le $\mathfrak{o}_F$-schéma en groupes ${}_d\mathcal{G}_v$. Notons ${}_d\mathbb{G}_v$ le plus grand quotient réductif de la fibre spéciale ${}_d\overline{\mathcal{G}}_v = {}_d\mathbb{G}_v \times_{\mathfrak{o}_F} \kappa_F$ de ${}_d\mathcal{G}_v$. Ainsi ${}_d\mathbb{G}_v$ est un groupe réductif défini sur κ_F, en général non connexe. Notons ${}_d\pi_v^{\mathrm{nr}} : {}_dG_v^{\mathrm{nr}} \to {}_d\mathbb{G}_v = {}_d\mathbb{G}_v(\overline{\kappa}_F)$ la composée des projections canoniques ${}_dG_v^{\mathrm{nr}} \to {}_d\overline{\mathcal{G}}_v = {}_d\overline{\mathcal{G}}_v(\overline{\kappa}_F)$ (réduction modulo $\mathfrak{p}^{\mathrm{nr}}$) et ${}_d\overline{\mathcal{G}}_v \to {}_d\mathbb{G}_v$. Pour $\theta \in \Theta$, on a l'égalité $\underline{\pi}_v \circ \mathrm{Ad}(d_F(\theta)) \circ \theta = {}_d\rho_v(\theta) \circ \underline{\pi}_v$. On en déduit qu'il existe un (unique) isomorphisme de groupes algébriques ${}_d\underline{\iota}_v : {}_d\mathbb{G}_v \to {}_d\underline{G}_v$ *défini sur* κ_F (identifié à $\mathbb{F}_q$ via ι), tel que posant ${}_d\underline{\pi}_v = {}_d\underline{\iota}_v \circ {}_d\pi_v^{\mathrm{nr}} : {}_dG_v^{\mathrm{nr}} \twoheadrightarrow {}_d\underline{G}_v$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} {}_dG_v^{\mathrm{nr}} & \xrightarrow{{}_d\underline{\pi}_v} & {}_d\underline{G}_v \\ {\scriptstyle {}_d\xi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle {}_d\underline{\xi}} \\ G_v^{\mathrm{nr}} & \xrightarrow{\underline{\pi}_v} & \underline{G}_v \end{array}$$

soit commutatif. Puisque ${}_d\underline{\iota}_v$ est défini sur κ_F, ${}_d\underline{\pi}_v$ est Θ-équivariant.

Posons ${}_d\mathrm{X}_* = \{\lambda \in \mathrm{X}_*^{\mathrm{nr}} : d(\theta)\circ\theta(\lambda) = \lambda, \forall\theta \in \Theta\}$. Puisque le point v appartient à l'appartement ${}_dW = A({}_dG, {}_dS, F)$ de ${}_d\mathfrak{I}_F$, la théorie de Bruhat-Tits nous dit que l'image de ${}_dS(F^{\mathrm{nr}}) \cap {}_dG_v^{\mathrm{nr}}$ par ${}_d\underline{\pi}_v$ est le groupe des points $\overline{\mathbb{F}}_q$-rationnels d'un sous-tore maximal ${}_d\underline{S}_v$ de ${}_d\underline{G}_v$ défini sur $\mathbb{F}_q$. Ce tore est nécessairement déployé sur $\overline{\mathbb{F}}_q$. Et par construction, on a ${}_d\underline{\xi}({}_d\underline{S}_v) \subset \underline{T}$ et $\mathrm{X}_*({}_d\underline{\xi}({}_d\underline{S}_v)) = {}_d\mathrm{X}_*$.

Soit une facette $\phi \in {}_d\Phi$. On note ${}_d\mathfrak{g}_\phi^{\mathrm{nr}}$ le $\mathfrak{o}^{\mathrm{nr}}$-réseau dans ${}_d\mathfrak{g}^{\mathrm{nr}}$ défini par ${}_d\mathfrak{g}_\phi^{\mathrm{nr}} = \mathrm{d}({}_d\xi)^{-1}(\mathfrak{g}_\phi^{\mathrm{nr}})$. Il est Θ-stable. Posons ${}_d\mathfrak{g}(F)_\phi = [{}_d\mathfrak{g}_\phi^{\mathrm{nr}}]^\Theta$; c'est un $\mathfrak{o}_F$-réseau dans ${}_d\mathfrak{g}(F)$, et l'on a ${}_d\mathfrak{g}_\phi^{\mathrm{nr}} = {}_d\mathfrak{g}(F)_\phi \otimes_{\mathfrak{o}_F} \mathfrak{o}^{\mathrm{nr}}$. Il existe une (unique) projection Θ-équivariante ${}_d\underline{\pi}_\phi : {}_d\mathfrak{g}_\phi^{\mathrm{nr}} \to {}_d\underline{\mathfrak{g}}_\phi$ rendant le diagramme

$$\begin{array}{ccc} {}_d\mathfrak{g}_\phi^{\mathrm{nr}} & \xrightarrow{{}_d\underline{\pi}_\phi} & {}_d\underline{\mathfrak{g}}_\phi \\ {\scriptstyle \mathrm{d}({}_d\xi)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{d}({}_d\underline{\xi})} \\ \mathfrak{g}_\phi^{\mathrm{nr}} & \xrightarrow{\underline{\pi}_\phi} & \underline{\mathfrak{g}}_\phi \end{array}$$

commutatif. Pour $(v, r) \in \phi \cap ({}_dW_{(p)} \times \mathbb{Z}_{(p)})$, on écrit aussi ${}_d\underline{\pi}_{v,r} = {}_d\underline{\pi}_\phi$. Soit ${}_d\mathfrak{g}_{\phi^+}^{\mathrm{nr}} = \mathrm{d}({}_d\xi)^{-1}(\mathfrak{g}_{\phi^+}^{\mathrm{nr}})$. D'après 5.5, ${}_d\underline{\pi}_\phi$ se quotiente en un isomorphisme

$${}_d\mathfrak{g}_\phi^{\mathrm{nr}}/{}_d\mathfrak{g}_{\phi^+}^{\mathrm{nr}} \xrightarrow{\sim} {}_d\underline{\mathfrak{g}}_\phi.$$

En particulier, ${}_d\mathfrak{g}_{\phi^+}^{\mathrm{nr}}$ est un $\mathfrak{o}^{\mathrm{nr}}$-réseau Θ-stable dans ${}_d\mathfrak{g}^{\mathrm{nr}}$. Posons ${}_d\mathfrak{g}(F)_{\phi^+} = [{}_d\mathfrak{g}_{\phi^+}^{\mathrm{nr}}]^\Theta$; c'est un $\mathfrak{o}_F$-réseau dans ${}_d\mathfrak{g}(F)$, et l'on a ${}_d\mathfrak{g}_{\phi^+}^{\mathrm{nr}} = {}_d\mathfrak{g}(F)_{\phi^+} \otimes_{\mathfrak{o}_F} \mathfrak{o}^{\mathrm{nr}}$. Puisque $\mathrm{H}^1(\Theta, {}_d\mathfrak{g}_{\phi^+}^{\mathrm{nr}}) = 0$, l'application ${}_d\underline{\pi}_\phi$ induit un isomorphisme

$${}_d\mathfrak{g}(F)_\phi/{}_d\mathfrak{g}(F)_{\phi^+} \xrightarrow{\sim} {}_d\underline{\mathfrak{g}}_\phi^\Theta.$$

Pour $(v, r) \in \phi \cap ({}_dW \times \mathbb{R})$, on pose ${}_d\mathfrak{g}(F)_{v,r} = {}_d\mathfrak{g}(F)_\phi$ et ${}_d\mathfrak{g}(F)_{v,r^+} = {}_d\mathfrak{g}(F)_{\phi^+}$; par construction, on a donc ${}_d\mathfrak{g}(F)_{v,r^+} = \bigcup_{s>r} {}_d\mathfrak{g}(F)_{v,s}$. Notons que ${}_d\mathfrak{g}(F)_{v,r}$ est bien le $\mathfrak{o}_F$-réseau dans ${}_d\mathfrak{g}(F)$ associé à (v, r) par Moy et Prasad.

7. Analyse harmonique : une première réduction

Dans toute cette section, on fixe un élément $d \in D$. Dans les trois premiers numéros, on fixe aussi un corps $F \in \mathrm{CL}_q$.

7.1. Pour $v \in {}_dW_{(p)}$, on a défini en 6.5 un homomorphisme Θ-équivariant ${}_d\underline{\pi}_v : {}_dG_v^{\mathrm{nr}} \twoheadrightarrow {}_d\underline{G}_v$. Posons ${}_dK_v^+ = (\ker {}_d\pi_v)^\Theta$; c'est un sous-groupe ouvert distingué de $({}_dG_v^{\mathrm{nr}})^\Theta = {}_d\mathcal{G}_v(\mathfrak{o}_F)$. Puisque $\mathrm{H}^1(\Theta, \ker {}_d\pi_v) = 0$, l'application ${}_d\underline{\pi}_v$ induit un isomorphisme ${}_d\mathcal{G}_v(\mathfrak{o}_F)/{}_dK_v^+ \xrightarrow{\sim} {}_d\underline{G}_v^\Theta$.

La chambre $\mathcal{C}^{\mathrm{nr}}$ définie en 3.3 appartient à ${}_d\Phi$: pour $\theta \in \Theta$, $d(\theta) \in \mathbf{N}_{\mathcal{C}}^{\mathrm{nr}}$ par conséquent $d(\theta)_{\mathbb{R}} \circ \theta$ stabilise $\mathcal{C}^{\mathrm{nr}}$. Soit $v \in {}_dW_{(p)} \cap \mathcal{C}^{\mathrm{nr}}$. Considérons la mesure de Haar ${}_ddg$ sur ${}_dG(F)$ définie par $\mathrm{vol}({}_d\mathcal{G}_v(\mathfrak{o}_F), {}_ddg) = |{}_d\underline{G}_v^\Theta| q^{-\frac{1}{2}\dim({}_d\underline{G}_v)}$. Alors pour tout $v' \in {}_dW_{(p)}$, on a

$$\mathrm{vol}({}_d\mathcal{G}_{v'}(\mathfrak{o}_F), {}_ddg) = |{}_d\underline{G}_{v'}^\Theta| q^{-\frac{1}{2}\dim({}_d\underline{G}_{v'})}.$$

En effet, d'après le paragraphe précédent, l'égalité ci-dessus équivaut à

$$\frac{\mathrm{vol}({}_dK_v^+, {}_ddg)}{\mathrm{vol}({}_dK_{v'}^+, {}_ddg)} = q^{\frac{1}{2}[\dim({}_d\underline{G}_{v'}) - \dim({}_d\underline{G}_v)]}.$$

Quitte à remplacer v' par gv' pour un $g \in {}_dG(F)$, on peut supposer que v' appartient à l'adhérence de la chambre $\mathcal{C}^{\mathrm{nr}}$. Alors on a ${}_dK_{v'}^+ \subset {}_dK_v^+ \subset {}_d\mathcal{G}_{v'}(\mathfrak{o}_F)$, et l'application ${}_d\underline{\pi}_{v'}$ identifie le quotient ${}_dK_v^+/{}_dK_{v'}^+$ au groupe des point $\mathbb{F}_q$-rationnels du radical unipotent $\underline{U}$ d'un sous-groupe parabolique $\underline{P}$ de ${}_d\underline{G}_v^\circ$ (la composante neutre de ${}_d\underline{G}_v$) défini sur $\mathbb{F}_q$, tel que $\underline{P}/\underline{U}$ soit $\mathbb{F}_q$-isomorphe à ${}_d\underline{G}_{v'}^\circ$. D'où l'égalité cherchée.

Le groupe G lui-même est défini sur F, et l'on peut comme ci-dessus définir une mesure de Haar dg sur $G(F)$; cela revient à prendre pour d le cocycle représentant la classe de cohomologie triviale dans $\mathrm{H}^1(\Theta, \mathbf{N}_{\mathcal{C}}^{\mathrm{nr}})$. Le F^{nr}-isomorphisme ${}_d\xi$ est un torseur intérieur de ${}_dG$ vers sa forme quasi-déployée G. On sait qu'un tel torseur établit une correspondance entre mesures de Haar sur $G(F)$ et mesures de Haar sur ${}_dG(F)$. D'après Kottwitz [K1] §1, les mesures dg et ${}_ddg$ se correspondent (cf. [W2] lemme 3.1.2).

7.2. Pour $r \in \mathbb{R}$, on pose

$${}_d\mathfrak{g}(F)_r = \bigcup_{g \in {}_dG(F)} \bigcup_{v \in {}_dW} \mathrm{Ad}(g)({}_d\mathfrak{g}(F)_{v,r}), \qquad {}_d\mathfrak{g}(F)_{r+} = \bigcup_{s > r} {}_d\mathfrak{g}(F)_s.$$

Pour $X \in {}_d\mathfrak{g}(F) \smallsetminus \{0\}$ semisimple, on pose $r(X) = \sup\{r \in \mathbb{R} : X \in {}_d\mathfrak{g}(F)_r\}$; et pour $X = 0$, on pose $r(0) = +\infty$.

Choisissons une sous-extension galoisienne finie E_1/F de F^{mod}/F tel que le sous-groupe $\mathrm{Gal}(F^{\mathrm{mod}}/E_1) \subset \Gamma$ opère trivialement sur $\mathcal{D}$ et que le cocycle d se factorise à travers $\mathrm{Gal}(E_1/F)$. Puisque $|W|$ est fini, il n'y a qu'un nombre fini de sous-extensions E_2/E_1 de $\overline{F}/E_1$ de degré divisant $|W|$. Grâce à la condition $(P_{\mathrm{rg}(\mathcal{D})})$, $|W|$ est premier à p et une telle extension E_2 est contenue dans F^{mod}. Soit E la composée sur F de ces extensions E_2. C'est une extension galoisienne finie de F, qui vérifie la propriété suivante (cf. [W2] lemme 3.2.(i)) : pour tout $X \in {}_d\mathfrak{g}(F)$ semisimple, il existe un $g \in {}_d\mathfrak{g}(E)$ tel que $\mathrm{Ad}(g) \circ \mathrm{d}({}_d\xi)(X) \in \mathfrak{t}(E)$. Alors pour $r \in \mathbb{R}$, on a $X \in {}_d\mathfrak{g}(F)_r$ si et seulement si $\mathrm{Ad}(g) \circ \mathrm{d}({}_d\xi)(X) \in \mathfrak{t}(E)_r$. Cela résulte du lemme 2.2.1 de [KM] et du fait que la définition de la filtration $r \mapsto {}_d\mathfrak{g}(F)_r$ est compatible aux extensions modérément ramifiées de F (cf. [KM] 2.1). Notons $e \in \mathcal{P}$ l'indice de ramification de E/F. Puisque T est déployé sur E, pour $X' \in \mathfrak{t}(E) \smallsetminus \{0\}$, on a $\sup\{r \in \mathbb{R} : X' \in \mathfrak{t}(E)_r\} \in \omega(K^\times) = \frac{1}{e}\mathbb{Z}$. On en déduit que pour $X \in {}_d\mathfrak{g}(F) \smallsetminus \{0\}$ semisimple, on a $r(X) \in \frac{1}{e}\mathbb{Z}$.

7.3. Posons ${}_d\mathcal{S} = \oplus_{\phi\in{}_d\Phi}\, {}_d\mathcal{S}_\phi$ et notons ${}_d\mathcal{C}_F = C_{\mathrm{c}}^\infty({}_d\mathfrak{g}(F))$. Pour $\phi \in {}_d\Phi$ et $\varphi \in {}_d\mathcal{S}_\phi$, on note $\mathrm{rea}_F(\varphi) \in C({}_d\mathfrak{g}(F)_\phi/{}_d\mathfrak{g}(F)_{\phi^+})$ la composée de l'isomorphisme ${}_d\mathfrak{g}(F)_\phi/{}_d\mathfrak{g}(F)_{\phi^+} \to {}_d\underline{\mathfrak{g}}_\phi^\Theta$ de 6.5 et de φ. Via les inclusions $C({}_d\mathfrak{g}(F)_\phi/{}_d\mathfrak{g}(F)_{\phi^+}) \subset C^\infty({}_d\mathfrak{g}(F)_\phi) \subset {}_d\mathcal{C}_F$, cela définit une application linéaire ${}_d\mathrm{rea}_F : {}_d\mathcal{S} \to {}_d\mathcal{C}_F$, qui n'est en général ni injective ni surjective.

Soient $\phi \in {}_d\Phi$ et $\phi' \in {}_d\omega_\phi$. On a défini en 6.4 une application injective ${}_ds_{\phi;\phi'} : {}_d\mathcal{S}_{\phi'} \to {}_d\mathcal{S}_\phi$. D'après 6.2, pour $\varphi' \in {}_d\mathcal{S}_{\phi'}$, on a l'égalité ${}_d\mathrm{rea}_F(\varphi') = {}_d\mathrm{rea}_F \circ {}_ds_{\phi;\phi'}(\varphi')$.

Pour $r \in \mathbb{R}$, on pose ${}_d\Phi_r = \{\phi \in {}_d\Phi : r(\phi) \geq r\}$ et ${}_d\Phi_{r^+} = \{\phi \in {}_d\Phi : r(\phi) > r\}$; on pose aussi ${}_d\mathcal{S}_r = \oplus_{\phi\in{}_d\Phi_r}\, {}_d\mathcal{S}_\phi$ et ${}_d\mathcal{S}_{r^+} = \oplus_{\phi\in{}_d\Phi_{r^+}}\, {}_d\mathcal{S}_\phi$. D'après 6.1, pour $\phi' \in {}_d\Phi$, l'adhérence de ϕ' coupe ${}_dW_{(p)} \times \{r(\phi'\}$. En d'autres termes, il existe un point $v \in {}_dW_{(p)}$ tel que posant $\phi = \phi_{v,r(\phi')}$, on ait $\phi' \in {}_d\omega_\phi$. On en déduit que pour $r \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in {}_d\mathcal{S}$, on a $\varphi \in {}_d\mathcal{S}_r$ si et seulement si le support de la fonction ${}_d\mathrm{rea}_F(\varphi)$ est contenu dans ${}_d\mathfrak{g}(F)_r$.

Le résultat suivant est bien connu :

Lemme ([W2] lemme 3.3). — *Soit $\phi \in {}_d\Phi$ et soit $(v,r) \in \phi \cap ({}_dW_{(p)} \times \mathbb{Z}_{(p)})$. Tout élément de ${}_d\underline{\mathfrak{g}}_\phi^\Theta$ appartenant à l'image de ${}_d\mathfrak{g}(F)_{r^+} \cap {}_d\mathfrak{g}_\phi^{\mathrm{nr}}$ par l'application ${}_d\underline{\pi}_\phi$, est nilpotent (dans ${}_d\underline{\mathfrak{g}}$).*

Notons ${}_d\mathfrak{g}(F)_{\mathrm{reg}} \subset {}_d\mathfrak{g}(F)$ le sous-ensemble formé des éléments semisimples réguliers. D'après la condition (P_Σ), pour $X \in {}_d\mathfrak{g}(F)_{\mathrm{reg}}$, le centralisateur T_X de X dans ${}_dG$ est un groupe algébrique *connexe*; c'est donc un tore maximal de ${}_dG$, défini sur F et (d'après 7.2) déployé sur F^{mod}. Il correspond à une donnée $\mathcal{D}_X = (\mathrm{X}^*(T_X), \emptyset, \emptyset, \mathrm{X}_*(T_X), \emptyset, \emptyset)$ munie d'une action de Γ comme en 3.1. On peut lui associer, comme en 7.1, une mesure de Haar dt. Soit ${}_dd\bar{g}_X$ la mesure $\frac{{}_ddg}{dt}$ sur l'espace homogène $T_X(F)\backslash{}_dG(F)$. Posons $\mathfrak{t}_X = \mathrm{Lie}(T_X)$, et notons $\Lambda^{{}_dG(F)}(\cdot, X)$ la distribution sur ${}_d\mathfrak{g}(F)$ définie par

$$\Lambda^{{}_dG(F)}(f,X) = \Delta(X)\int_{T_X(F)\backslash{}_dG(F)} f(\mathrm{Ad}(g^{-1})(X))\,{}_dd\bar{g}_X$$

avec

$$\Delta(X) = |\det_F(\mathrm{ad}(X); \mathfrak{t}_X(F)\backslash{}_d\mathfrak{g}(F))|_F^{\frac{1}{2}}.$$

7.4. Jusqu'à présent, le corps F était fixé. En combinant les lemmes 6.4 et 7.3, on peut le supprimer des données :

Proposition ([W2] prop. 3.4). — *Soit $r \in \mathbb{Z}_{(p)}$. Il existe une application linéaire ${}_dl_r^+ : {}_d\mathcal{S}_r \to {}_d\mathcal{S}_{r^+}$ telle que pour tous $\varphi \in {}_d\mathcal{S}_r$, $F \in \mathrm{CL}_q$ et $X \in {}_d\mathfrak{g}(F)_{\mathrm{reg}} \cap {}_d\mathfrak{g}(F)_{r^+}$, on ait l'égalité*

$$\Lambda^{{}_dG(F)}({}_d\mathrm{rea}_F(\varphi), X) = \Lambda^{{}_dG(F)}({}_d\mathrm{rea}_F \circ {}_dl_r^+(\varphi), X).$$

Démonstration : Par linéarité, il suffit de définir ${}_dl_r(\varphi)$ pour $\varphi \in {}_d\mathcal{S}_{\phi'}$ avec $\phi' \in {}_d\Phi_r$. Si $r(\phi') > r$, alors $\varphi \in {}_d\mathcal{S}_{r^+}$ et l'on pose ${}_dl_r^+(\varphi) = \varphi$. Supposons donc $r(\phi') = r$. D'après 6.1 (cf. aussi 7.3), il existe un point $v \in {}_dW_{(p)}$ tel que, posant $\phi = \phi_{v,r}$, on ait $\phi' \in {}_d\omega_\phi$. Supposons l'application ${}_dl_r^+$ définie sur ${}_d\mathcal{S}_\phi$. Alors on définit ${}_dl_r^+$ sur ${}_d\mathcal{S}_{\phi'}$ comme la composée de l'injection ${}_ds_{\phi;\phi'} : {}_d\mathcal{S}_{\phi'} \to {}_d\mathcal{S}_\phi$ et de l'application précédente. D'après le second paragraphe de 7.3, cette application convient. Reste à définir ${}_dl_r^+$ sur $\mathcal{S}_\phi$: puisque $\oplus_{\phi''\in{}_d\omega_\phi(>r)}\, {}_d\mathcal{S}_{\phi''}$ est contenu dans ${}_d\mathcal{S}_{r^+}$, on peut prendre l'application ${}_dl_\phi^+$ du lemme 6.4. Montrons qu'elle convient. Soient $F \in \mathrm{CL}_q$, $X \in {}_d\mathfrak{g}(F)_{\mathrm{reg}} \cap {}_d\mathfrak{g}(F)_{r^+}$ et $\varphi \in {}_d\mathcal{S}_\phi$. Posons $f = {}_d\mathrm{rea}_F(\varphi)$, $f^+ = {}_d\mathrm{rea}_F \circ {}_dl_\phi^+(\varphi)$, et notons Ω l'ensemble $\{g \in T_X(F)\backslash{}_dG(F) : \mathrm{Ad}(g^{-1})(X) \in {}_d\mathfrak{g}(F)_\phi\}$; il est stable par multiplication à droite par ${}_d\mathcal{G}_v(\mathfrak{o}_F)$, et pour $g \in {}_dG(F) \smallsetminus \Omega$, on a $f(\mathrm{Ad}(g^{-1}(X)) = 0$. Posant $c = \mathrm{vol}({}_d\mathcal{G}_v(\mathfrak{o}_F), {}_ddg)$, on a donc

$$(*) \qquad \Lambda^{{}_dG(F)}(f,X) = \Delta(X)\int_\Omega\int_{{}_d\mathcal{G}_v(\mathfrak{o}_F)} c^{-1} f(\mathrm{Ad}(k^{-1}g^{-1})(X)\,{}_ddk\,{}_dd\bar{g}_X$$

où ${}_d dk$ désigne la restriction de la mesure ${}_d dg$ à ${}_d\mathcal{G}_v(\mathfrak{o}_F)$. Pour $g \in \Omega$, on définit $J_g \in {}_d\mathcal{S}^*_\phi$ par :

$$J_g(\varphi_1) = |{}_d\underline{G}_v^\Theta|^{-1} \sum_{x \in {}_d\underline{G}_v^\Theta} \varphi_1\left(\mathrm{Ad}(x^{-1}) \circ {}_d\pi_\phi \circ \mathrm{Ad}(g^{-1})(X)\right).$$

Par définition de l'application ${}_d\mathrm{rea}_F$, l'intégrale sur ${}_d\mathcal{G}_v(\mathfrak{o}_F)$ dans la formule $(*)$ n'est autre que $J_g(\varphi)$. On a donc $\Lambda^{{}_dG(F)}(f,X) = \Delta(X)\int_\Omega J_g(\varphi)\,{}_d d\bar{g}_X$. Posons $\varphi'' = {}_d s_\phi \circ {}_d l_\phi^+(\varphi)$ et $f'' = {}_d\mathrm{rea}_F(\varphi'')$. Le calcul ci-dessus conduit à l'égalité $\Lambda^{{}_dG(F)}(f'',X) = \Delta(X)\int_\Omega J_g(\varphi'')\,{}_d d\bar{g}_X$. Mais d'après le lemme 7.3, pour $g \in \Omega$, la distribution J_g sur ${}_d\mathfrak{g}_\phi^\Theta$ vérifie les hypothèses du lemme 6.4 : on a donc $J_g(\varphi) = J_g(\varphi'')$. D'où l'égalité $\Lambda^{{}_dG(F)}(f,X) = \Lambda^{{}_dG(F)}(f'',X)$. Or d'après le second paragraphe de 7.3, on a $f'' = f^+$. ∎

8. Centralisateurs d'éléments semisimples

Dans toute cette section, on fixe un corps $F \in \mathrm{CL}_q$.

8.1. Soit δ un cocycle de Γ à valeurs dans $\mathbf{N}$. On définit les espaces ${}_\delta W = ({}_\delta V)^\Gamma \subset {}_\delta V$ comme en 4.3, et les espaces ${}_\delta W_{(p)} = ({}_\delta V_{(p)})^\Gamma \subset {}_\delta V_{(p)}$ comme en 6.1. Pour $v \in V_{(p)}$, on a $v \in {}_\delta W$ si et seulement si $t_v^{-1}\delta(\gamma)\gamma(t_v) \in \underline{N}$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. Si $v \in {}_\delta W_{(p)}$, l'application $\gamma \mapsto t_v^{-1}\delta(\gamma)\gamma(t_v)$ est un cocycle à valeur dans $\underline{N}$, et pour $\gamma \in \Gamma$, on note ${}_\delta\underline{\rho}_v(\gamma)$ le $\overline{\mathbb{F}}_q$-automorphisme de $\underline{G}$ défini comme en 6.2.

Soit $A \subset V$ un sous-espace affine tel que $A_{(p)} = A \cap V_{(p)}$ soit dense dans A. On note $\Sigma(A)$ l'ensemble des racines $\alpha \in \Sigma$ qui prennent une valeur constante, notée $\alpha(A)$, sur A. Puisque $A_{(p)}$ est dense dans A, pour $\alpha \in \Sigma(A)$, on a $\alpha(A) \in \mathbb{Z}_{(p)}$. L'ensemble $\Sigma(A)$ est un sous-ensemble de Levi de Σ. Il lui correspond un sous-groupe connexe $\underline{H}(A) \subset \underline{G}$ dont l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}(A)$ est engendré par $\mathfrak{t}$ et les $\mathfrak{g}_\alpha$ pour $\alpha \in \Sigma(A)$. Pour $n \in \mathbf{N}$, on a l'égalité $\underline{H}(n_\mathbb{R}(A)) = \mathrm{Ad}(\underline{\pi}(n))(\underline{H}(A))$; et si de plus $\underline{\pi}(n) \in \underline{H}(A)$ et $n_\mathbb{R}$ fixe un élément de $A_{(p)}$, alors $n_\mathbb{R}$ fixe tout élément de A (cf. [W2] lemme 4.2.1). Supposons de plus que $A \subset {}_\delta W$. Alors $A_{(p)} = A \cap {}_\delta W_{(p)}$; et d'après le lemme 4.2.2 de [W2], pour tout $v \in A_{(p)}$ et tout $\gamma \in \Gamma$, l'automorphisme ${}_\delta\underline{\rho}_v(\gamma)$ stabilise le sous-groupe $\underline{H}(A) \subset \underline{G}$ et sa restriction à $\underline{H}(A)$ est indépendante de v.

8.2. Soit $e \in \mathcal{P}$. Pour $v \in V^e$, on note $\underline{G}_v^e \subset \underline{G}$ le sous-groupe formé des éléments fixés par $\underline{\rho}_v(\sigma)$ pour tout $\sigma \in I(e)$ (cf. 5.1) ; et l'on définit comme en 5.4 un homomorphisme surjectif $\underline{\pi}_v : G_v^e \to \underline{G}_v^e$. Rappelons la construction : on choisit un entier $e' \in \mathcal{P}$ tel que e divise e', $e'v \in \mathrm{X}_*$, et $I(e')$ opère trivialement sur $\mathcal{D}$. L'égalité $(G_v^{e'})^{I(e)} = G_v^e$ se complète en le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} G_v^e & \xrightarrow{\pi_v^e} & \mathbb{G}_v^e \\ \| & & \| \\ (G_v^{e'})^{I(e)} & \xrightarrow{\pi_v^{e'}} & (\mathbb{G}_v^{e'})^{I(e)} \end{array}$$

où π_v^e est la composée des projections canoniques $G_v^e \to \overline{\mathcal{G}}_v^e$ (réduction modulo $\mathfrak{p}^e$) et $\overline{\mathcal{G}}_v^e \to \mathbb{G}_v^e$. L'homomorphisme $\tilde{\underline{\iota}}_v : G_v^e \to \underline{G}$ composé de l'application $\pi_0^{e'} \circ \mathrm{Ad}(t_{F,v}^{-1})$ et de l'inclusion $G_v^e \subset G_v^{e'}$, se quotiente en un isomorphisme $\underline{\iota}_v : \mathbb{G}_v^e \to \underline{G}_v^e$. On pose alors $\underline{\pi}_v = \underline{\iota}_v \circ \pi_v^e : G_v^e \to \underline{G}_v^e$. D'après 5.4 et 5.3, les applications $\pi_0^{e'} \circ \mathrm{Ad}(t_{F,v}^{-1})$ et $\underline{\pi} \circ \mathbf{r}_{N,F}$ coïncident sur l'intersection $N^{e'} \cap G_v^{e'}$, et induisent une application surjective $N^{e'} \cap G_v^{e'} \to \underline{N}$. Le noyau de cette surjection est cohomologiquement trivial. On en déduit que $\underline{\pi}_v$ se restreint en une application surjective $N^e \cap G_v^e \to \underline{N} \cap \underline{G}_v^e$, qui coïncide avec $\underline{\pi} \circ \mathbf{r}_{N,F}$. Notons que pour $v \in V^{\rm nr}$, le sous-groupe $\underline{G}_v^e \subset \underline{G}$ est stabilisé par $\underline{\rho}_v(\sigma)$ pour tout $\sigma \in I$, et le diagramme

$$\begin{array}{ccc} G_v^{\rm nr} & \xrightarrow{\underline{\pi}_v} & \underline{G}_v \\ \cap & & \cap \\ G_v^e & \xrightarrow[\underline{\pi}_v]{} & \underline{G}_v^e \end{array}$$

est commutatif (les notations sont donc cohérentes).

Soit un cocycle δ_F de Γ à valeur dans $N^{\rm mod}$, et soit $e \in \mathcal{P}$ tel que δ_F soit trivial sur $I(e)$. Posons $\delta = \mathbf{r}_{N,F} \circ \delta_F : \Gamma \to \mathbf{N}$, et soit $v \in {}_\delta W_{(p)}$. Puisque δ est trivial sur $\mathbf{N}^e$, on a ${}_\delta W_{(p)} \subset V_{(p)}^e$. Pour tout $\gamma \in \Gamma$, l'automorphisme $\mathrm{Ad}(\delta_F(\gamma)) \circ \gamma$ de $G^{\rm mod}$ stabilise G^e ; et puisque $v \in {}_\delta W$, il stabilise aussi G_v^e. Pour $g \in G_v^e$ et $\gamma \in \Gamma$, on a l'égalité $\underline{\pi}_v \circ \mathrm{Ad}(\delta_F(\gamma)) \circ \gamma(g) = {}_\delta\underline{\rho}_v \circ \underline{\pi}_v(g)$. On en déduit que pour tout $\gamma \in \Gamma$, l'automorphisme ${}_\delta\underline{\rho}_v(\gamma)$ de $\underline{G}$ stabilise le groupe $\underline{\pi}_v(G_v^e) = \underline{G}_v^e$.

Soit A un sous-espace affine de V tel que $A_{(p)}$ soit dense dans A. Choisissons un $e \in \mathcal{P}$ tel que $e\alpha(A) \in \mathbb{Z}$ pour tout $\alpha \in \Sigma(A)$, et $I(e)$ opère trivialement sur $\mathcal{D}$. On a définit en 3.3 une décomposition en facettes de $V = V^e$. Parmi les facettes qui coupent A, on en choisit une de dimension maximale, que l'on note $\mathcal{F}$. D'après le lemme 4.4.1 de [W2], pour tout $v \in A_{(p)} \cap \mathcal{F}$, la composante neutre $\underline{G}_v^{e,\circ}$ de $\underline{G}_v^e = \underline{\pi}_v(G_v^e)$ coïncide avec $\underline{H}(A)$; et pour tout $g \in G_v^e$, il existe un $n \in N^e \cap G_v^e$ tel que $\underline{\pi}_v(n^{-1}g) \in \underline{H}(A)$. Au sous-ensemble de Levi $\Sigma(A) \subset \Sigma$ correspond, comme en 8.1, un sous-groupe réductif connexe $H(A) \subset G$. Posons $H_A^e = H(A)(F^e) \subset G^e$. D'après le lemme 4.4.2 de [W2], pour tout $v \in A_{(p)}$, le groupe $H_A^e \cap G_v^e$ est indépendant de v ; et le groupe $\underline{\pi}_v(H_A^e \cap G_v^e)$ coïncide avec $\underline{H}(A)$.

8.3. Pour $r \in \mathbb{Z}_{(p)}$, on note $\underline{\mathfrak{t}}(r)$ le $\overline{\mathbb{F}}_q$-espace vectoriel $\underline{\mathfrak{t}} = \mathrm{X}_* \otimes_{\mathbb{Z}} \overline{\mathbb{F}}_q$ muni de l'action de Γ définie comme suit : pour $\lambda \in \mathrm{X}_*$, $x \in \overline{\mathbb{F}}_q$, $\theta \in \Theta$ et $\sigma \in I$, on pose $\theta(\lambda \otimes x) = \theta(\lambda) \otimes \theta(x)$ et $\sigma(\lambda \otimes x) = \sigma(\lambda) \otimes r(\sigma)x$.

Soit $\mathcal{L}(\mathcal{D})$ l'ensemble des quadruplets $(\mathcal{D}', \psi, r, \underline{Z}')$ de la forme suivante :

- $\mathcal{D}' = (\mathrm{X}'^*, \Sigma', \Delta', \mathrm{X}'_*, \check{\Sigma}', \check{\Delta}')$ est une donnée de racines munie d'une action de Γ comme en 3.1. On affecte les objets relatifs à $\mathcal{D}'$, introduits précédemment pour la donnée $\mathcal{D}$, d'un exposant "$'$" : W', $\underline{G}'$, $\underline{T}'$ (etc.). On fait la même chose pour les objets dépendant de F : G', T', (etc.).
- $\psi = (\mathrm{X}'^* \to \mathrm{X}^*, \mathrm{X}'_* \to \mathrm{X}_*)$ est un couple d'isomorphismes de $\mathbb{Z}$-modules en dualité. Pour simplifier, on note encore ψ chacun de ces isomorphismes, ainsi que tout isomorphisme qui s'en déduit par fonctorialité. On suppose que $\psi(\Delta') \subset \Delta$ et $\psi(\check{\Delta}') \subset \check{\Delta}$, et que $\psi(\Sigma')$ (resp. $\psi(\check{\Sigma}')$) est le sous-système de racines de Σ engendré par $\psi(\Delta')$ (resp. par $\psi(\check{\Delta}')$). En d'autres termes, on suppose que ψ identifie $\mathcal{D}'$ à un sous-système de Levi standard de $\mathcal{D}$. On suppose aussi que pour tout $\gamma \in \Gamma$, il existe un $w \in W$ tel que $\psi \circ \gamma = w \circ \gamma \circ \psi$. Cet élément w est unique ; on le note $w_\psi(\gamma)$.
- $r \in \mathbb{Z}_{(p)}$.
- $\underline{Z}' \in \underline{\mathfrak{t}}'_{\rm cent}(r)^\Gamma$ avec $\underline{\mathfrak{t}}'_{\rm cent}(r) = \{X \in \underline{\mathfrak{t}}'(r) : \alpha'(X) = 0, \forall \alpha' \in \Sigma'\}$. Ici, $\underline{\mathfrak{t}}'(r)$ désigne le $\overline{\mathbb{F}}_q$-espace vectoriel $\underline{\mathfrak{t}}' = \mathrm{X}'_* \otimes_{\mathbb{Z}} \overline{\mathbb{F}}_q$ muni de l'action de Γ définie plus haut. On suppose que pour tout $\alpha \in \Sigma \smallsetminus \psi(\Sigma')$, on a $\alpha \circ \psi(\underline{Z}') \neq 0$.

Deux éléments $(\mathcal{D}'_1, \psi_1, r_1, \underline{Z}'_1)$ et $(\mathcal{D}'_2, \psi_2, r_2, \underline{Z}'_2)$ de $\mathcal{L}(\mathcal{D})$ sont dits isomorphes si $r_1 = r_2$ et s'il existe un isomorphisme Γ-équivariant $f : \mathcal{D}'_1 \to \mathcal{D}'_2$ (i.e. un couple d'isomorphismes de $\mathbb{Z}[\Gamma]$-modules $(\mathrm{X}_1'^* \to \mathrm{X}_2'^*, \mathrm{X}'_{*,1} \to \mathrm{X}'_{*,2})$ en dualité, tel que $f(\Sigma'_1) = \Sigma'_2$, $f(\Delta'_1) = \Delta'_2$, $f(\check{\Sigma}'_1) = \check{\Sigma}'_2$ et $f(\check{\Delta}'_1) = \check{\Delta}'_2$) et un élément $w \in W$ tels que $\psi_2 \circ f = w \circ \psi_1$ et $f(\underline{Z}'_1) = \underline{Z}'_2$. Grâce à l'hypothèse (P_Σ), on vérifie que le groupe d'automorphismes d'un élément de $\mathcal{L}(\mathcal{D})$ est trivial.

8.4. Soit un élément $(\mathcal{D}', \psi, r, \underline{Z}') \in \mathcal{L}(\mathcal{D})$, fixé jusqu'à la fin de la section 8. On définit un plongement $\underline{i}_\psi : \underline{G}' \to \underline{G}$, caractérisé comme suit : $\underline{i}_\psi$ se restreint en l'isomorphisme $\underline{T}' \xrightarrow{\sim} \underline{T}$ déduit de ψ ; et pour tout $\alpha' \in \Delta'$, on a $\mathrm{d}(\underline{i}_\psi)(\underline{E}'_{\alpha'}) = \underline{E}_{\psi(\alpha')}$. Alors $\underline{i}_\psi$ se restreint en un plongement $\underline{N}' \to \underline{N}$ qui, par construction, est compatible aux sections $\underline{n}' : W' \to \underline{N}'$ et $\underline{n} : W \to \underline{N}$: pour $w' \in W'$, on a $\underline{i}_\psi \circ \underline{n}'(w') = \underline{n} \circ \psi(w')$. D'autre part, de ψ se déduit un isomorphisme de groupes $T'_\varpi \xrightarrow{\sim} T_\varpi$ qui permet de prolonger le plongement $\underline{i}_\psi : \underline{N}' \to \underline{N}$ en un plongement $\mathbf{i}_\psi : \mathbf{N}' \to \mathbf{N}$.

Notons $\mathbf{Z}_\psi \subset \mathbf{T}$ le sous-groupe formé des t tels que $\alpha(t) = 0$ pour tout $\alpha \in \psi(\Sigma')$, et posons $\underline{Z}_\psi = \mathbf{Z}_\psi \cap \underline{T}$. Les éléments de $\mathbf{Z}_\psi$ commutent à ceux de $\mathbf{i}_\psi(\mathbf{N}')$, et $\underline{Z}_\psi$ est le centre de $\underline{i}_\psi(\underline{G}')$.

Posons $\underline{Z} = \psi(\underline{Z}') \in \underline{\mathfrak{t}}$. Pour γ, on pose $\sum_{\psi,\gamma}^+ = \{\alpha \in \Sigma^+ : w_\psi(\gamma)^{-1}(\alpha) < 0\}$ et

$$\begin{aligned}
&z_{\varpi,\psi}(\gamma) = \Big(\textstyle\sum_{\alpha \in \Sigma^+_{\psi,\gamma}} \check{\alpha}\Big) \otimes r \in T_\varpi,\\
&\underline{z}_\psi(\gamma) = \textstyle\prod_{\alpha \in \Sigma^+_{\psi,\gamma}} \check{\alpha} \circ \alpha(\underline{Z}) \in \underline{T},\\
&\mathbf{n}_\psi(\gamma) = z_{\varpi,\psi}(\gamma)\underline{z}_\psi(\gamma)\underline{n}(w_\psi(\gamma)) \in \mathbf{N},\\
&\underline{n}_\psi(\gamma) = \underline{\pi}(\mathbf{n}_\psi(\gamma)) = \underline{z}_\psi(\gamma)\underline{n}(w_\psi(\gamma)) \in \underline{N}.
\end{aligned}$$

D'après le lemme 4.6 de [W2], l'application $\gamma \mapsto \mathbf{n}_\psi(\gamma)$ est un cocycle (cela est une conséquence de la preuve du lemme 2.2.A de [LS]), et pour tout $\gamma \in \Gamma$, on a $z_{\varpi,\psi}(\gamma) \in \mathbf{Z}_\psi$ et $\underline{z}_\psi(\gamma) \in \underline{Z}_\psi$; de plus, on a les égalités :

$$\begin{aligned}
&\underline{i}_\psi \circ \gamma = \mathrm{Ad}(\underline{n}_\psi(\gamma)) \circ \gamma \circ \underline{i}_\psi,\\
&\mathbf{i}_\psi \circ \gamma = \mathrm{Ad}(\mathbf{n}_\psi(\gamma)) \circ \gamma \circ \mathbf{i}_\psi(\gamma).
\end{aligned}$$

8.5. On construit comme en 8.4 un plongement $i_\psi : G' \to G$, qui est défini sur F^{mod}.

Pour $s \in \mathbb{R}$, posant $\mathfrak{t}_s^{\mathrm{mod}} = \mathfrak{t}(F^{\mathrm{mod}})_s$ et $\mathfrak{t}_{s^+}^{\mathrm{mod}} = \mathfrak{t}(F^{\mathrm{mod}})_{s^+}$ (cf. 1.2), on a $\mathfrak{t}_s^{\mathrm{mod}} \subset \mathfrak{t}_{s^+}^{\mathrm{mod}}$ avec égalité si et seulement si $s \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Z}_{(p)}$. Pour $s \in \mathbb{Z}_{(p)}$, on définit comme suit un isomorphisme de Γ-modules $\mathfrak{t}_s^{\mathrm{mod}}/\mathfrak{t}_{s^+}^{\mathrm{mod}} \to \underline{\mathfrak{t}}(s)$: pour $\lambda \in \mathrm{X}_*$ et $x \in F^{\mathrm{mod}}$ avec $\omega_F(x) \geq s$, il envoie $\lambda \otimes x$ (en fait sa classe modulo $\mathfrak{t}_{s^+}^{\mathrm{mod}}$) sur $\lambda \otimes \iota(\overline{\varpi_{-s}x})$ où $\overline{\varpi_{-s}x} \in \overline{\kappa}_F$ désigne la réduction de $\varpi_{-s}x \in \mathfrak{o}_{F^{\mathrm{mod}}}$ modulo $\mathfrak{p}_{F^{\mathrm{mod}}}$. Puisque le Γ-module $\mathfrak{t}_{s^+}^{\mathrm{mod}}$ est cohomologiquement trivial, par passage aux points fixes sous Γ, on obtient un isomorphisme $\mathfrak{t}(F)_s/\mathfrak{t}(F)_{s^+} \to \underline{\mathfrak{t}}(s)^\Gamma$.

On pose $\mathfrak{t}'_{\mathrm{cent}} = \{X \in \mathfrak{t} : \alpha'(X) = 0, \forall \alpha' \in \Sigma'\}$; c'est un sous-espace affine de $\mathfrak{t}'$ défini sur F. Pour $s \in \mathbb{R}$, on pose $\mathfrak{t}'^{\mathrm{mod}}_{\mathrm{cent},s} = \mathfrak{t}'_{\mathrm{cent}}(F^{\mathrm{mod}})_s$ et $\mathfrak{t}'^{\mathrm{mod}}_{\mathrm{cent},s^+} = \mathfrak{t}'_{\mathrm{cent}}(F^{\mathrm{mod}})_{s^+}$. Et pour $s \in \mathbb{Z}_{(p)}$, on définit comme ci-dessus un isomorphisme de Γ-modules $\mathfrak{t}'^{\mathrm{mod}}_{\mathrm{cent},s}/\mathfrak{t}'^{\mathrm{mod}}_{\mathrm{cent},s^+} \to \underline{\mathfrak{t}}'_{\mathrm{cent}}(s)$, qui par passage aux points fixes sous Γ, induit un isomorphisme $\mathfrak{t}'_{\mathrm{cent}}(F)_s/\mathfrak{t}'_{\mathrm{cent}}(F)_{s^+} \to \underline{\mathfrak{t}}'_{\mathrm{cent}}(s)^\Gamma$.

Prenons $s = r$. Puisque $\underline{Z}' \in \underline{\mathfrak{t}}'(r)^\Gamma$, on peut fixer un élément $Z' \in \mathfrak{t}'_{\mathrm{cent}}(F)_r$ dont la classe modulo $\mathfrak{t}'_{\mathrm{cent}}(F)_{r^+}$ s'envoie sur $\underline{Z}'$ par l'isomorphisme précédent. À l'aide de Z', on construit comme en 8.4 un cocycle $n_{\psi,F} \in \mathrm{Z}^1(\Gamma, N^{\mathrm{mod}})$: pour $\gamma \in \Gamma$, on pose $z_{\psi,F}(\gamma) = \prod_{\alpha \in \Sigma^+_{\psi,\gamma}} \check{\alpha} \circ \alpha(\psi(Z'))$ et $n_{\psi,F}(\gamma) = s_{T,F}(z_{\varpi,F}(\gamma))z_{\psi,F}(\gamma)n(w_\psi(\gamma))$. Par construction, on a $\mathbf{n}_\psi = \mathbf{r}_{N,F} \circ n_{\psi,F}$; et d'après la démonstration du lemme 4.6 de [W2], on a l'égalité

$$i_\psi \circ \gamma = \mathrm{Ad}(n_{\psi,F}(\gamma)) \circ \gamma \circ i_\psi.$$

8.6. Comme pour la donnée $\mathcal{D}$, on fixe un ensemble D' de cocycles de Θ à valeurs dans $\mathbf{N}'^{\mathrm{nr}}_{\mathcal{C}'}$ (l'analogue de $\mathbf{N}^{\mathrm{nr}}_{\mathcal{C}}$ pour $\mathcal{D}'$) tel que l'application naturelle $D' \to \mathrm{H}^1(\Theta, \mathbf{N}'^{\mathrm{nr}}_{\mathcal{C}'})$ soit bijective. De ψ se déduit un homomorphisme surjectif $\mathrm{X}'_*/\mathrm{X}'_{*,\mathrm{sc}} \to \mathrm{X}_*/\mathrm{X}_{*,\mathrm{sc}}$, qui est Γ-équivariant puisque W opère trivialement sur l'espace d'arrivée. D'où un homomorphisme surjectif $(\mathrm{X}'_*/\mathrm{X}'_{*,\mathrm{sc}})_\Gamma \to (\mathrm{X}_*/\mathrm{X}_{*,\mathrm{sc}})_\Gamma$.

En passant aux sous-groupes de torsion, on obtient un homomorphisme $\psi_{D'} : D' \to D$, qui n'est en général pas surjectif.

Soit un cocycle $d' \in D'$, fixé jusqu'à la fin de la section 8, et soit $d = \psi_{D'}(d)$. Pour $\gamma \in \Gamma$, posons $d_0(\gamma) = \mathbf{i}_\psi \circ d'(\gamma)\mathbf{n}_\psi(\gamma)$. D'après 8.4, d_0 est un cocycle de Γ dans $\mathbf{N}$. De même, on définit un cocycle $d_{0,F}$ de Γ dans N^{mod} en posant $d_{0,F} = i_\psi \circ d'_F(\gamma)n_{\psi,F}(\gamma)$.

Lemme ([W2] lemme 4.8). — *Les cocycles $d_{0,F}$ et d_F définissent le même élément de* $\mathrm{H}^1(\Gamma, G^{\mathrm{mod}})$.

Fixons un sous-groupe ouvert $\Gamma_0 \subset \Gamma$ opérant trivialement sur $\mathcal{D}$ et sur $\mathcal{D}'$. D'après 6.1, on peut supposer que l'indice $(\Gamma : \Gamma_0)$ est premier à p. On peut donc remplacer Γ par Γ/Γ_0 dans les constructions précédentes ; en particulier, l'application $\gamma \mapsto z_{\varpi,\psi}$ se factorise à travers Γ/Γ_0. On note $z_0 \in T_\varpi$ l'élément défini par :

$$z_0 = \frac{1}{(\Gamma : \Gamma_0)} \sum_{\gamma \in \Gamma/\Gamma_0} z_{\varpi,\psi}(\gamma).$$

Notons $\psi_{V'} : V' \to V$ l'isomorphisme déduit de ψ. D'après le lemme 4.9 de [W2], l'application

$${}_{d'}V' \to {}_{d_0}V,\ v' \mapsto z_{0,\mathbb{R}} \circ \psi_{V'}(v')$$

est Γ-équivariante. Par passage aux points fixes sous Γ, on obtient un isomorphisme ${}_{d'}W' \to {}_{d_0}W$. D'après le lemme 4.10 de [W2], il existe un couple $(n, g) \in \mathbf{N} \times \underline{G}$ vérifiant les conditions suivantes :
- $n_{\mathbb{R}}({}_{d_0}W) \subset {}_dW$;
- posant $A = n_{\mathbb{R}}({}_{d_0}W)$, $A_{(p)}$ est dense dans A, et g appartient à $\underline{H}(A)$;
- posant $m(\gamma) = nd_0(\gamma)\gamma(n)^{-1}d(\gamma)^{-1}$ $(\gamma \in \Gamma)$, on a $\underline{\pi}(m(\gamma)) = \mathrm{Ad}(g) \circ {}_d\underline{\rho}_v(\gamma)$ pour tout $\gamma \in \Gamma$ et tout $v \in A_{(p)}$.

8.7. Fixons un couple $(n, g) \in \mathbf{N} \times \underline{G}$ vérifiant les conditions de 8.6, et posons $\underline{n} = \underline{\pi}(n)$. On définit une application affine :

$${}_{d'}\psi_{V'} : {}_{d'}W' \to {}_dW,\ v' \mapsto n_{\mathbb{R}} \circ z_{0,\mathbb{R}} \circ \psi_{V'}(v').$$

Elle envoie ${}_{d'}W'_{(p)}$ dans ${}_dW_{(p)}$. Soit $v' \in {}_{d'}W'_{(p)}$, et posons $v = {}_{d'}\psi_{V'}(v')$.

D'après la preuve du lemme 4.11 de [W2], pour $\gamma \in \Gamma$, on a l'égalité

$${}_d\underline{\rho}_v(\gamma) \circ \mathrm{Ad}(g^{-1}\underline{n}) \circ \underline{i}_\psi = \mathrm{Ad}(g^{-1}\underline{n}) \circ \underline{i}_\psi \circ {}_{d'}\underline{\rho}'_{v'}(\gamma).$$

Par conséquent l'homomorphisme $\mathrm{Ad}(g^{-1}\underline{n}) \circ \underline{i}_\psi : \underline{G}' \to \underline{G}$ envoie $\underline{G}'_{v'}$ dans $\underline{G}_v$, et il existe un unique homomorphisme ${}_{d'}\underline{i}_{\psi,v'} : {}_{d'}\underline{G}'_{v'} \to {}_d\underline{G}_v$, défini sur $\mathbb{F}_q$, tel que

$$\mathrm{Ad}(g^{-1}\underline{n}) \circ \underline{i}_\psi \circ {}_{d'}\underline{\xi}' = {}_d\underline{\xi} \circ {}_{d'}\underline{i}_{\psi,v'}.$$

De même, pour $s \in \mathbb{Z}_{(p)}$, l'homomorphisme $\mathrm{Ad}(g^{-1}\underline{n}) \circ \mathrm{d}(\underline{i}_\psi) : \underline{\mathfrak{g}}' \to \underline{\mathfrak{g}}$ envoie $\underline{\mathfrak{g}}'_{v',s}$ dans $\underline{\mathfrak{g}}_{v,s}$, et il existe un unique homomorphisme ${}_{d'}\underline{i}_{\psi,v',s} : {}_{d'}\underline{\mathfrak{g}}'_{v',s} \to {}_d\underline{\mathfrak{g}}_{v,s}$, défini sur $\mathbb{F}_q$, tel que

$$\mathrm{Ad}(g^{-1}\underline{n}) \circ \mathrm{d}(\underline{i}_\psi) \circ \mathrm{d}({}_{d'}\underline{\xi}') = \mathrm{d}({}_d\underline{\xi}) \circ {}_{d'}\underline{i}_{\psi,v',s}.$$

Bien sûr, ${}_{d'}\underline{i}_{\psi,v',s}$ ne dépend pas vraiment de (v', s) mais seulement des facettes $\phi' \in {}_{d'}\Phi'$ et $\phi \in {}_d\Phi$ contenant respectivement (v', s) et (v, s).

Choisissons un élément $n_F \in N^{\mathrm{mod}}$ tel que $\mathbf{r}_{N,F}(n_F) = n$. Posons $A = {}_{d'}\psi_{V'}({}_{d'}W') = n_{\mathbb{R}}({}_{d_0}W)$; on a donc $v \in A_{(p)}$. Choisissons un $e \in \mathcal{P}$ tel que $I(e)$ opère trivialement sur $\mathcal{D}$ et sur $\mathcal{D}'$, $n_F \in N^e$, et $e\alpha(A) \in \mathbb{Z}$ pour tout $\alpha \in \Sigma(A)$. D'après 8.2, on a $\underline{\pi}_v(H_A^e \cap G_v^e) = \underline{H}(A)$. Soit un élément $g_F \in H_A^e \cap G_v^e$ tel que $\underline{\pi}_v(g_F) = g$. D'après [W2] 4.12, on peut choisir g_F de telle manière que pour tout $\gamma \in \Gamma$, on ait l'égalité :

$$d_F(\gamma) = g_F^{-1} n_F \, \iota_\psi \circ d'_F(\gamma) n_{\psi,F}(\gamma)\, \gamma(n_F^{-1} g_F).$$

Alors il existe un unique homomorphisme ${}_{d'}i_\psi : {}_{d'}G' \to {}_dG$, défini sur F, tel que

$$\mathrm{Ad}(g_F^{-1} n_F) \circ i_\psi \circ {}_{d'}\xi' = {}_d\xi \circ {}_{d'}i_\psi.$$

Lemme ([W2] lemme 4.12.1). — *L'application ${}_{d'}\psi_{V'} : {}_{d'}W' \to {}_dW$ se prolonge en une application ${}_{d'}\psi : \mathfrak{I}({}_{d'}G', F) \to \mathfrak{I}({}_dG, F)$ telle que pour tout $g' \in {}_{d'}G'(F)$ et tout $x' \in \mathfrak{I}({}_{d'}G, F))$, on ait l'égalité ${}_{d'}\psi(g' \cdot x') = {}_{d'}i_\psi(g') \cdot {}_{d'}\psi(x')$. De plus, ce prolongement est unique.*

Par construction, ${}_{d'}i_\psi$ se restreint en un plongement ${}_{d'}G'^{\mathrm{nr}}_{v'} \to {}_dG^{\mathrm{nr}}_v$ défini sur $\mathfrak{o}_F$, et pour $s \in \mathbb{Z}_{(p)}$, $\mathrm{d}({}_{d'}i_\psi)$ se restreint en un plongement ${}_{d'}\mathfrak{g}'^{\mathrm{nr}}_{v',s} \to {}_d\mathfrak{g}^{\mathrm{nr}}_{v,s}$ défini sur $\mathfrak{o}_F$; de plus, les deux diagrammes suivants sont commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} {}_{d'}G'^{\mathrm{nr}}_{v'} & \xrightarrow{{}_{d'}i_\psi} & {}_dG^{\mathrm{nr}}_v \\ {\scriptstyle {}_{d'}\underline{\pi}'_{v'}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle {}_d\underline{\pi}_v} \\ {}_{d'}\underline{G}'_{v'} & \xrightarrow[{}_{d'}\underline{i}_{\psi,v'}]{} & {}_d\underline{G}_v \end{array}, \qquad \begin{array}{ccc} {}_{d'}\mathfrak{g}'^{\mathrm{nr}}_{v',s} & \xrightarrow{\mathrm{d}({}_{d'}i_\psi)} & {}_d\mathfrak{g}^{\mathrm{nr}}_{v,s} \\ {\scriptstyle {}_{d'}\underline{\pi}'_{v',s}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle {}_d\underline{\pi}_{v,s}} \\ {}_{d'}\underline{\mathfrak{g}}'_{v',s} & \xrightarrow[{}_{d'}\underline{i}_{\psi,v',s}]{} & {}_d\underline{\mathfrak{g}}_{v,s} \end{array}.$$

9. Analyse harmonique : une deuxième réduction (descente centrale)

9.1. Soit $d \in D$. Pour $v \in {}_dW_{(p)}$, notons ${}_d\mathcal{M}_v$ l'ensemble des couples $\mu = (m,h) \in \mathbf{N} \times \underline{G}$ vérifiant les deux conditions suivantes (pour tout $\gamma \in \Gamma$) :
- $t_v^{-1} d(\gamma)\gamma(m) d(\gamma)^{-1} t_v$ appartient à $\underline{N}$,
- $t_v^{-1} d(\gamma)\gamma(m) d(\gamma)^{-1} t_v = h_d\underline{\rho}_v(\gamma) h^{-1}$.

Pour un tel couple μ, on pose $\mu(v) = m_{\mathbb{R}}(v)$. Si $e \in \mathcal{P}$ est tel que $I(e)$ opère trivialement sur $\mathcal{D}$ et $ev \in \mathrm{X}_*$, alors on a $m \in \mathbf{N}^e$ et $e\mu(v) \in \frac{1}{e}\mathrm{X}_*$; donc $\mu(v) \in {}_dW_{(p)}$. L'application $\mathrm{Ad}(\underline{\pi}(m)h)$ envoie $\underline{G}_v$ sur $\underline{G}_{\mu(v)}$ et il existe un unique isomorphisme $\underline{\mu} : {}_d\underline{G}_v \to {}_d\underline{G}_{\mu(v)}$, défini sur $\mathbb{F}_q$, tel que

$$\mathrm{Ad}(\underline{\pi}(m)h) \circ {}_d\underline{\xi} = {}_d\underline{\xi} \circ \underline{\mu}.$$

De même, pour $s \in \mathbb{Z}_{(p)}$, l'application $\mathrm{Ad}(\underline{\pi}(m)h)$ envoie $\underline{\mathfrak{g}}_{v,s}$ sur $\underline{\mathfrak{g}}_{\mu(v),s}$ et il existe un unique isomorphisme $\underline{\mu}_s : {}_d\underline{\mathfrak{g}}_{v,s} \to {}_d\underline{\mathfrak{g}}_{\mu(v),s}$, défini sur $\mathbb{F}_q$, tel que

$$\mathrm{Ad}(\underline{\pi}(m)h) \circ \mathrm{d}({}_d\underline{\xi}) = \mathrm{d}({}_d\underline{\xi}) \circ \underline{\mu}_s.$$

Soit $\underset{d}{\sim}$ la relation binaire sur ${}_dW_{(p)}$ définie par : $v \underset{d}{\sim} v_1$ si et seulement s'il existe un $\mu \in {}_d\mathcal{M}_v$ tel que $v_1 = \mu(v)$. Alors $\underset{d}{\sim}$ est une relation d'équivalence, et pour tout $v \in {}_dW_{(p)}$, on a l'inclusion ${}_d\mathrm{X}_* \times \{1\} \subset {}_d\mathcal{M}_v$ où le groupe ${}_d\mathrm{X}_*$ (cf. 6.5) est identifié à un sous-groupe de $T_\varpi = \mathrm{X}_* \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$.

Soit $F \in \mathrm{CL}_q$, et soient $v,\, v_1 \in {}_dW_{(p)}$. D'après le lemme 5.1 de [W2], on a $v \underset{d}{\sim} v_1$ si et seulement s'il existe un $g \in {}_dG(F)$ tel que $g \cdot v = v_1$ (dans $\mathfrak{I}({}_dG, F)$). Plus précisément : si $v_1 = \mu(v)$ pour un $\mu \in {}_d\mathcal{M}_v$, alors il existe un $g \in {}_dG(F)$ tel que :
- $g \cdot v = v_1$;
- pour tout $s \in \mathbb{Z}_{(p)}$, les diagrammes suivants sont commutatifs :

$$\begin{tikzcd} {}_d\mathcal{G}_v(\mathfrak{o}_F) \arrow[r, "\mathrm{Ad}(g)"] \arrow[d, "{}_d\underline{\pi}_v"'] & {}_d\mathcal{G}_{v_1}(\mathfrak{o}_F) \arrow[d, "{}_d\underline{\pi}_{v_1}"] \\ {}_d\underline{G}_v^{\Theta} \arrow[r, "\underline{\mu}"'] & {}_d\underline{G}_{v_1}^{\Theta} \end{tikzcd}, \qquad \begin{tikzcd} {}_d\mathfrak{g}(F)_{v,s} \arrow[r, "\mathrm{Ad}(g)"] \arrow[d, "{}_d\underline{\pi}_{v,s}"'] & {}_d\mathfrak{g}(F)_{v_1,s} \arrow[d, "{}_d\underline{\pi}_{v_1,s}"] \\ {}_d\underline{\mathfrak{g}}_{v,s}^{\Theta} \arrow[r, "\underline{\mu}_s"'] & {}_d\underline{\mathfrak{g}}_{v_1,s}^{\Theta} \end{tikzcd}.$$

9.2. Soit un quadruplet $(\mathcal{D}', \psi, r, \underline{Z}') \in \mathcal{L}(\mathcal{D})$, et soit $d' \in D'$. Posons $d = \psi_{D'}(d')$. Comme en 9.1, on définit les ensembles ${}_{d'}\mathcal{M}'_{v'}$ pour $v' \in {}_{d'}W'_{(p)}$, et la relation d'équivalence $\underset{d'}{\sim}$ dans ${}_{d'}W'_{(p)}$. Soit $v \in {}_dW_{(p)}$. Notons $\tilde{\Omega}'_v$ l'ensemble des $v' \in {}_{d'}W'_{(p)}$ tels que ${}_{d'}\psi_{V'}(v') \underset{d}{\sim} v$. Cet ensemble est clos pour la relation d'équivalence $\underset{d'}{\sim}$. D'après 9.1, il existe un $e \in \mathcal{P}$ tel que la classe de $\underset{d}{\sim}$-équivalence de v dans ${}_dW_{(p)}$ soit contenue dans $\frac{1}{e}({}_d\mathrm{X}_*)$. On peut ensuite choisir un $e' \in \mathcal{P}$ tel que l'image réciproque de $\frac{1}{e}({}_d\mathrm{X}_*)$ par ${}_{d'}\psi_{V'}$ soit contenue dans $\frac{1}{e'}({}_{d'}\mathrm{X}'_*)$. Alors on a l'inclusion $\tilde{\Omega}'_v \subset \frac{1}{e'}({}_{d'}\mathrm{X}'_*)$. Pour tout $v' \in {}_{d'}W'_{(p)}$, on a l'inclusion ${}_{d'}\mathrm{X}'_* \times \{1\} \subset {}_{d'}\mathcal{M}'_{v'}$ (cf. 9.1). Puisque le groupe ${}_{d'}\mathrm{X}'_*$ est d'indice fini dans $\frac{1}{e'}\,{}_{d'}\mathrm{X}'_*$, on en déduit que $\tilde{\Omega}'_v$ est réunion d'un nombre *fini* de classes de $\underset{d'}{\sim}$-équivalence. Fixons un ensemble $\Omega'_v \subset \tilde{\Omega}'_v$ de représentants de ces classes, et pour tout $v' \in \Omega'_v$, fixons un élément $\mu_{v',v} \in {}_d\mathcal{M}_v$ tel que $\mu_{v',v}(v) = {}_{d'}\psi_{V'}(v')$.

Soit $F \in \mathrm{CL}_q$. Pour tout $v' \in \Omega'_{v'}$, fixons un élément $g_{v',v} \in {}_dG(F)$ vérifiant les deux conditions de la fin de 9.1 relativement à l'élément $\mu_{v',v} \in {}_d\mathcal{M}_v$. Alors on a les diagrammes commutatifs suivants (pour tout $s \in \mathbb{Z}_{(p)}$) :

$$\begin{tikzcd} {}_{d'}\mathcal{G}'_{v'}(\mathfrak{o}_F) \arrow[r, "\mathrm{Ad}(g_{v',v})^{-1}\circ {}_{d'}i_{\psi}"] \arrow[d, "{}_{d'}\underline{\pi}'_{v'}"'] & {}_d\mathcal{G}_v(\mathfrak{o}_F) \arrow[d, "{}_d\underline{\pi}_v"] \\ {}_{d'}\underline{G}'^{\Theta}_{v'} \arrow[r, "\underline{\mu}^{-1}_{v',v}\circ {}_{d'}\underline{i}_{\psi,v'}"'] & {}_d\underline{G}^{\Theta}_{v_1} \end{tikzcd}, \qquad \begin{tikzcd} {}_{d'}\mathfrak{g}'(F)_{v',s} \arrow[r, "\mathrm{Ad}(g_{v',v})^{-1}\circ \mathrm{d}({}_{d'}i_{\psi})"] \arrow[d, "{}_{d'}\underline{\pi}'_{v',s}"'] & {}_d\mathfrak{g}(F)_{v,s} \arrow[d, "{}_d\underline{\pi}_{v,s}"] \\ {}_{d'}\underline{\mathfrak{g}}'^{\Theta}_{v',s} \arrow[r, "(\underline{\mu}_{v',v})_s^{-1}\circ {}_{d'}\underline{i}_{\psi,v',s}"'] & {}_d\underline{\mathfrak{g}}^{\Theta}_{v,s} \end{tikzcd}.$$

L'ensemble Ω'_v s'interprète de la manière suivante : soit $v' \in {}_{d'}W'_{(p)}$ tel que ${}_{d'}\psi_{V'}(v') = g \cdot v$ pour un $g \in {}_dG(F)$. Alors il existe un *unique* $v'' \in \Omega'_v$ tel que $v' = g' \cdot v''$ pour un $g' \in {}_{d'}G'(F)$.

9.3. Continuons avec les notations de 9.2. Supposons de plus que $\underline{Z}' \neq 0$.

Proposition ([W2] prop. 5.3). — *Il existe une application linéaire* ${}_{d'}l'_r : {}_d\mathcal{S}_r \to {}_{d'}\mathcal{S}'_r$ *telle que pour tous* $\varphi \in {}_d\mathcal{S}_r$, $F \in \mathrm{CL}_q$, $Z' \in {}_{d'}\mathfrak{g}'(F)$ *tel que* $\mathrm{d}({}_{d'}\xi')(Z') \in \mathfrak{t}'_{\mathrm{cent}}(F)_r$ *et son image dans* $\underline{\mathfrak{t}}'_{\mathrm{cent}}(r)$ *soit égale à* $\underline{Z}'$, $X' \in {}_{d'}\mathfrak{g}'(F)_{\mathrm{reg}} \cap {}_{d'}\mathfrak{g}'(F)_{r^+}$, *on ait l'égalité*

$$\Lambda^{{}_dG(F)}({}_d\mathrm{rea}_F(\varphi), \mathrm{d}({}_{d'}i_{\psi})(Z' + X')) = \Lambda^{{}_{d'}G'(F)}({}_{d'}\mathrm{rea}'_F \circ {}_{d'}l'_r(\varphi), X').$$

(Remarque : l'élément $\mathrm{d}({}_{d'}i_{\psi})(Z' + X')$ *appartient à* ${}_d\mathfrak{g}(F)_{\mathrm{reg}} \cap ({}_d\mathfrak{g}(F)_r \smallsetminus {}_d\mathfrak{g}(F)_{r^+})$.*)*

Démonstration : Posons $X = \mathrm{d}({}_{d'}i_\psi)(Z' + X')$. Choisissons un $g' \in G'^{\mathrm{mod}}$ tel que l'élément $X'_1 = \mathrm{Ad}(g') \circ \mathrm{d}({}_{d'}\xi')(X')$ appartienne à $\mathfrak{t}'^{\mathrm{mod}}$, et posons $Z'_1 = \mathrm{Ad}(g') \circ \mathrm{d}({}_{d'}\xi')(Z') = \mathrm{d}({}_{d'}\xi')(Z')$. Il existe un $g \in G^{\mathrm{mod}}$ tel que l'élément $X_1 = \mathrm{Ad}(g) \circ \mathrm{d}({}_d\xi)(X)$ coïncide avec $\mathrm{d}(i_\psi)(Z'_1 + X'_1)$. Montrons que X_1 est régulier. Soit $\alpha \in \Sigma$, et posons $\alpha' = \psi^{-1}(\alpha) \in \mathrm{X}'^*$. On a donc $\alpha(X_1) = \alpha'(Z'_1 + X'_1)$. Si $\alpha' \in \Sigma'$, alors $\alpha'(Z'_1) = 0$ et $\alpha'(X'_1) \neq 0$ car X' est régulier, donc $\alpha(X_1) \neq 0$. Supposons que $\alpha' \in \mathrm{X}'^* \smallsetminus \Sigma'$. Puisque $X' \in {}_{d'}\mathfrak{g}'(F)_{r+}$, on a $\omega_F(\alpha'(X'_1)) > r$. D'autre part on a $\omega_F(\alpha'(Z'_1)) \geq r$, et la réduction modulo $\mathfrak{p}_{F^{\mathrm{mod}}}$ de $\varpi_r^{-1}\alpha'(Z'_1)$ coïncide avec $\alpha'(\underline{Z}')$. Or $\alpha'(\underline{Z}') \neq 0$ (cf. 8.3), par conséquent $\omega_F(\alpha'(Z'_1)) = r = \omega_F(\alpha'(Z'_1 + X'_1)) = \omega_F(\alpha(X_1))$. En particulier $\alpha(X_1) \neq 0$. Donc X_1 est régulier, et $X_1 \in \mathfrak{t}_r^{\mathrm{mod}} \smallsetminus \mathfrak{t}_{r+}^{\mathrm{mod}}$. Par conséquent $X \in {}_d\mathfrak{g}(F)_{\mathrm{reg}}$ et (d'après 7.2) $X \in {}_d\mathfrak{g}(F)_r \smallsetminus {}_d\mathfrak{g}(F)_{r+}$.

Par linéarité, il suffit de définir ${}_{d'}l'_r(\varphi)$ pour $\varphi \in {}_d\mathcal{S}_{\phi_1}$ avec $\phi_1 \in {}_d\Phi_r$. Si $r(\phi_1) > r$, alors pour $\varphi \in {}_d\mathcal{S}_{\phi_1}$, le support de ${}_d\mathrm{rea}_F(\varphi)$ est contenu dans ${}_d\mathfrak{g}(F)_{r+}$, et puisque $X \in {}_d\mathfrak{g}(F)_r \smallsetminus {}_d\mathfrak{g}(F)_{r+}$, on a $\Lambda^{{}_dG(F)}({}_d\mathrm{rea}_F(\varphi), X) = 0$; on pose donc ${}_{d'}l'_r(\varphi) = 0$. Supposons $r(\phi_1) = r$. Comme dans la démonstration de la proposition 7.4, on peut remplacer ϕ_1 par une facette ϕ qui coupe ${}_dW_{(p)} \times \{r\}$. Soit un point $v \in {}_dW_{(p)}$ tel que $(v, r) \in \phi$. Fixons une fonction $\varphi \in {}_d\mathcal{S}_\phi$, et posons $f = {}_d\mathrm{rea}_F(\varphi)$.

Un calcul facile donne l'égalité $\Delta(X) = q^{\frac{r}{2}(|\Sigma'| - |\Sigma|)}\Delta'(X)$.

Pour $v_1 \in \mathfrak{I}({}_dG, F)$ est défini (par transport de structure) le $\mathfrak{o}_F$-réseau ${}_d\mathfrak{g}(F)_{v_1,r}$ dans ${}_d\mathfrak{g}(F)$; et pour $g \in {}_dG(F)$, on a $\mathrm{Ad}(g^{-1})(X) \in {}_d\mathfrak{g}(F)_\phi$ si et seulement si $X \in {}_d\mathfrak{g}(F)_{g \cdot v, r}$. D'après le lemme 2.2.6 de [KM], on a l'inclusion

$$\{v_1 \in \mathfrak{I}({}_dG, F) : X \in {}_d\mathfrak{g}(F)_{v_1,r}\} \subset {}_{d'}\psi(\mathfrak{I}({}_{d'}G', F));$$

en effet, $\mathrm{d}({}_{d'}i_\psi)(Z')$ est un "bon élément" de ${}_d\mathfrak{g}(F)$, et ${}_{d'}i_\psi({}_{d'}G'(F))$ en est le centralisateur dans ${}_dG(F)$. Soit donc $\mathcal{Y} = \{g \in {}_dG(F) : g \cdot v \in {}_{d'}\psi(\mathfrak{I}({}_{d'}G, F))\}$. D'après le numéro 9.2, dont on reprend ici les notations, on a la décomposition $\Omega = \coprod_{v' \in \Omega'_v} \mathcal{Y}_{v'}$ avec $\mathcal{Y}_{v'} = {}_{d'}G'(F) g_{v',v}\, {}_d\mathcal{G}_v(\mathfrak{o}_F)$. Pour $v' \in \Omega'_v$, posons

$$J_{v'} = \int_{T_X(F)\backslash \mathcal{Y}_{v'}} f(\mathrm{Ad}(g^{-1})(X))_d d\bar{g}_X;$$

on a donc $\Lambda^{{}_dG(F)}(f, X) = \Delta(X) \sum_{v' \in \Omega'_v} J_{v'}$. Soit $v' \in \Omega'_{v'}$. Notons $\phi' \in {}_{d'}\Phi'$ la facette contenant (v', r), et $\underline{j}_{\phi,\phi'} : {}_{d'}\underline{\mathfrak{g}}'^{\Theta}_{\phi'} \to {}_d\underline{\mathfrak{g}}^{\Theta}_\phi$ le plongement $(\underline{\mu}_{v',v})_r^{-1} \circ {}_{d'}\underline{i}_{\psi,v',r}$ (cf. 9.2). On définit comme suit les fonctions $\tilde{\varphi} \in {}_d\mathcal{S}_\phi$, $\tilde{\varphi}'_{v'} \in {}_{d'}\mathcal{S}'_{\phi'}$ et $\varphi'_{v'} \in {}_{d'}\mathcal{S}'_{\phi'}$:

- $\tilde{\varphi}(Y) = q^{-\frac{1}{2}\dim({}_d\underline{G}_v)} \sum_{x \in {}_d\underline{G}_v^{\Theta}} \varphi(\mathrm{Ad}(x)(Y))$;
- $\tilde{\varphi}'_{v'}(Y') = |{}_{d'}\underline{G}'^{\Theta}_{v'}|^{-1} q^{\frac{1}{2}\dim({}_{d'}\underline{G}'_v)} \tilde{\varphi} \circ \underline{j}_{\phi,\phi'}(Y')$;
- $\varphi'_{v'}(Y') = \tilde{\varphi}'_{v'}(\mathrm{d}({}_{d'}\underline{\xi}')^{-1}(\underline{Z}') + Y')$.

Cette dernière définition a un sens : pour tout $v'' \in V'^{\mathrm{nr}}$, on a $\mathrm{d}({}_{d'}\underline{\xi}')^{-1}(\underline{Z}') \in {}_{d'}\mathfrak{g}(F)_{v'',r}$. Posons $f'_{v'} = {}_{d'}\mathrm{rea}'_F(\varphi'_{v'})$. Un calcul facile (mais pénible !) conduit à l'égalité $J_{v'} = \Lambda^{{}_{d'}G'(F)}(f'_{v'}, X')$.

Soit $\varphi' = \oplus_{v' \in \Omega'_v} q^{\frac{r}{2}(|\Sigma'| - |\Sigma|)} \varphi'_{v'} \in {}_{d'}\mathcal{S}'_r$, et posons $f' = {}_{d'}\mathrm{rea}_F(\varphi')$. D'après les paragraphes précédents, on a l'égalité $\Lambda^{{}_dG(F)}(f, X) = \Lambda^{{}_{d'}G'(F)}(f', X')$. Reste à poser ${}_{d'}l'_r(\varphi) = \varphi'$. Cela achève la démonstration de la proposition. □

10. Classes de conjugaison et théorème principal

10.1. Notons $\tilde{\mathcal{B}}$ l'ensemble des couples $(r, \underline{Z})$ tels que $r \in \mathbb{Z}_{(p)}$ et $\underline{Z} \in \underline{\mathfrak{t}}(r) \smallsetminus \{0\}$. Le groupe $W \rtimes \Gamma$ opère sur $\tilde{\mathcal{B}}$ via son action sur $\underline{\mathfrak{t}}(r)$, et l'on pose $\mathcal{B} = (\tilde{\mathcal{B}}/W)^\Gamma$. Comme en 7.2, on montre qu'il existe un $e \in \mathcal{P}$ vérifiant la propriété : pour tout $(r, \underline{Z}) \in \tilde{\mathcal{B}}$ tel que l'image de $(r, \underline{Z})$ dans $\tilde{\mathcal{B}}/W$ soit fixe par Γ, on a $er \in \mathbb{Z}$.

À tout élément $b \in \mathcal{B}$, on associe comme suit un élément de $\mathcal{L}(\mathcal{D})$ dont la classe d'isomorphisme est uniquement déterminée par b. Choisissons un relèvement $(r, \underline{Z})$ de b dans $\tilde{\mathcal{B}}$, et notons Σ_1 l'ensemble des $\alpha \in \Sigma$ tels que $\alpha(\underline{Z}) = 0$. D'après (P_Σ), Σ_1 est un sous-ensemble de Levi de Σ. Il existe donc un élément $w \in W$ tels que $w(\Sigma_1)$ soit standard, c'est-à-dire engendré par $(w(\Sigma_1) \cap \Delta) \cup -(w(\Sigma_1) \cap \Delta)$. Quitte à remplacer $(r, \underline{Z})$ par $(r, w(\underline{Z}))$, on peut supposer Σ_1 standard. Soit alors $\mathcal{D}_1 = (\mathrm{X}^*, \Sigma_1, \Delta_1, \mathrm{X}_*, \check{\Sigma}_1, \check{\Delta}_1)$ avec $\Delta_1 = \Sigma_1 \cap \Delta$, $\check{\Sigma}_1 = \{\check{\alpha} : \alpha \in \Sigma_1\}$ et $\check{\Delta}_1 = \check{\Sigma}_1 \cap \check{\Delta}$. Posons $W_1 = W(\Sigma_1) \subset W$. À nouveau grâce à (P_Σ), on a $W_1 = \{w_1 \in W : w_1(\underline{Z}) = \underline{Z}\}$. Puisque l'image de $(r, \underline{Z})$ dans $\tilde{\mathcal{B}}/W$ est fixe par Γ, pour tout $\gamma \in \Gamma$, il existe un $w(\gamma) \in W$ tel que $w(\gamma) \circ \gamma(\underline{Z}) = \underline{Z}$; l'élément $w(\gamma)$ n'est pas unique, mais la classe $W_1 w(\gamma)$ est unique. On a $w(\gamma) \circ \gamma(\Sigma_1) = \Sigma_1$, et quitte à remplacer $\omega(\gamma)$ par $w_1 w(\gamma)$ pour un (unique) $w_1 \in W_1$, on peut supposer que $w(\gamma) \circ \gamma(\Delta_1) = \Delta_1$. Cela détermine $w(\gamma)$ de manière unique. Posons $\mathcal{D}' = \mathcal{D}_1$, notons $\psi = (\mathrm{X}'^* \to \mathrm{X}^*, \mathrm{X}'_* \to \mathrm{X}_*)$ les morphismes identité, et munissons $\mathcal{D}'$ de l'action de Γ donné par $\psi \circ \gamma = w(\gamma) \circ \gamma \circ \psi$. Soit $\underline{Z}' = \psi^{-1}(\underline{Z})$. Alors $(\mathcal{D}', \psi, r, \underline{Z}') \in \mathcal{L}(\mathcal{D})$, et c'est l'élément cherché. Cet élément n'est pas uniquement determiné par b car il n'y a pas unicité du relèvement $(r, \underline{Z})$ tel que Σ_1 soit standard. Mais deux tels relèvements donnent lieu à deux éléments de $\mathcal{L}(\mathcal{D})$ isomorphes au sens de 8.3. Inversement, si $(\mathcal{D}'_2, \psi_2, r, \underline{Z}'_2) \in \mathcal{L}(\mathcal{D})$ est isomorphe à $(\mathcal{D}', \psi, r, \underline{Z}')$, alors $(r, \psi_2(\underline{Z}'_2)) \in \tilde{\mathcal{B}}$ est un relèvement de b.

10.2. Notons $\tilde{\mathcal{Z}}_\bullet$ l'ensemble des suites $(r_1, \ldots, r_k; \underline{Z}_1, \ldots, \underline{Z}_k)$ telles que (pour $i = 1, \ldots, k$) :
- $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$;
- $r_i \in \mathbb{Z}_{(p)}$ et $r_1 < r_2 < \cdots < r_k$;
- $\underline{Z}_i \in \underline{\mathfrak{t}}(r_i) \smallsetminus \{0\}$;
- posant $\Sigma_i = \{\alpha \in \Sigma : \alpha(\underline{Z}_j) = 0, \forall j \in \{1, \ldots, i\}\}$, $\mathrm{X}_{*,i} = \mathrm{X}_* \cap \mathbb{Q}\langle \check{\alpha} : \alpha \in \Sigma_i \rangle$ et $\underline{\mathfrak{t}}_i = \mathrm{X}_{*,i} \otimes_{\mathbb{Z}} \overline{\mathbb{F}}_q \subset \underline{\mathfrak{t}}(r_i)$, on demande que $\underline{\mathfrak{t}} \supsetneq \underline{\mathfrak{t}}_1 \supsetneq \cdots \supsetneq \underline{\mathfrak{t}}_k = \{0\}$ et $\underline{Z}_{j+1} \in \underline{\mathfrak{t}}_j$ $(j = 1, \ldots, k-1)$.

Notons que pour $i = 1, \ldots, k$, Σ_i est un sous-ensemble de Levi de Σ ; et que $\underline{\mathfrak{t}}_i$, considéré comme un sous-espace de $\underline{\mathfrak{t}}(r_i)$, n'est en général pas Γ-stable. Le groupe $W \rtimes \Gamma$ opère naturellement sur $\tilde{\mathcal{Z}}_\bullet$, et l'on pose $\mathcal{Z}_\bullet = (\tilde{\mathcal{Z}}_\bullet/W)^\Gamma$. Tout élément de $\tilde{\mathcal{Z}}_\bullet$ est *régulier* au sens où son stabilisateur dans W est trivial. En effet (avec les notations ci-dessus) posant $W_i = W(\Sigma_i)$, le fixateur de $\underline{Z}_1$ dans W est W_1 (cf. 10.1) et pour $j = 2, \ldots k$, le fixateur de $\underline{Z}_j$ dans W_{j-1} est W_j. Or $W_k = \{1\}$ car $\underline{\mathfrak{t}}_k = \{0\}$, par conséquent le fixateur de $(r_1, \ldots, r_k; \underline{Z}_1, \ldots, \underline{Z}_k)$ dans W est $\{1\}$.

À tout élément $z \in \mathcal{Z}_\bullet$, on associe comme suit un groupe D_z. On choisit un relèvement $\tilde{z}$ de z dans $\tilde{\mathcal{Z}}_\bullet$. Puisque $\tilde{z}$ est régulier et que son image dans $\tilde{\mathcal{Z}}_\bullet/W$ est fixe par Γ, pour tout $\gamma \in \Gamma$, il existe un unique $w_{\tilde{z}}(\gamma) \in W$ tel que $w_{\tilde{z}}(\gamma) \circ \gamma(\tilde{z}) = \tilde{z}$. L'application $\gamma \mapsto w_{\tilde{z}}(\gamma)$ est un cocycle. Posons ${}_{\tilde{z}}\mathrm{X}_* = \mathrm{X}_*$, notons ${}_{\tilde{z}}\varphi : {}_{\tilde{z}}\mathrm{X}_* \to \mathrm{X}_*$ le morphisme identité, et munissons ${}_{\tilde{z}}\mathrm{X}_*$ de l'action de Γ donnée par ${}_{\tilde{z}}\varphi \circ \gamma = w_{\tilde{z}}(\gamma) \circ {}_{\tilde{z}}\varphi$. On pose $D_{\tilde{z}} = ({}_{\tilde{z}}\mathrm{X}_*)_{\Gamma,\mathrm{tor}}$. Si maintenant $\tilde{z}'$ est un autre relèvement de z dans $\tilde{Z}_\bullet$, alors il existe un unique $w \in W$ tel que $w(\tilde{z}) = \tilde{z}'$, et un unique isomorphisme de $\mathbb{Z}$-modules $\iota_{\tilde{z}',\tilde{z}} : {}_{\tilde{z}}\mathrm{X}_* \to {}_{\tilde{z}'}\mathrm{X}_*$ tel que ${}_{\tilde{z}'}\varphi \circ \iota_{\tilde{z}',\tilde{z}} = w \circ {}_{\tilde{z}}\varphi$. De plus, $\iota_{\tilde{z}',\tilde{z}}$ est Γ-équivariant et définit un isomorphisme $\bar{\iota}_{\tilde{z}',\tilde{z}} : D_{\tilde{z}} \to D_{\tilde{z}'}$. On note D_z la limite inductive des $D_{\tilde{z}}$ pour $\tilde{z}$ parcourant l'ensemble des relèvements de z dans $\tilde{Z}_\bullet$, les morphismes de transition étant ces isomorphismes $\bar{\iota}_{\tilde{z}',\tilde{z}}$.

Continuons avec les notations ci-dessus. De l'isomomorphisme ${}_{\tilde{z}}\varphi$ se déduit un homomorphisme surjectif ${}_{\tilde{z}}\mathrm{X}_* \to \mathrm{X}_*/\mathrm{X}_{*,\mathrm{sc}}$. Puisque W opère trivialement sur $\mathrm{X}_*/\mathrm{X}_{*,\mathrm{sc}}$, ce dernier est Γ-équivariant. Il induit donc un homomorphisme $D_{\tilde{z}} \to (\mathrm{X}_*/\mathrm{X}_{*,\mathrm{sc}})_{\Gamma,\mathrm{tor}}$, qui est compatible avec les isomorphismes $\bar{\iota}_{\tilde{z}',\tilde{z}}$. D'où un homomorphisme $\mu_z : D_z \to D$.

Si $\Sigma \neq \emptyset$, on pose $\tilde{\mathcal{Z}} = \tilde{\mathcal{Z}}_\bullet$; et si $\Sigma = \emptyset$ (i.e. si $\mathcal{D}$ est la donnée de racines d'un tore), on pose $\tilde{\mathcal{Z}} = \tilde{\mathcal{Z}}_\bullet \cup \{z_\infty\}$ et l'on considère que z_∞ est fixe par Γ. Soit $\mathcal{Z} = (\tilde{\mathcal{Z}}/W)^\Gamma$; si $\Sigma = \emptyset$, on a donc $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_\bullet \cup \{z_\infty\}$. Toujours si $\Sigma = \emptyset$, on pose $D_{z_\infty} = (\mathrm{X}_*)_{\Gamma,\mathrm{tor}}$ et l'on note $\mu_{z_\infty} : D_{z_\infty} \to D$ l'isomorphisme canonique.

Pour $z \in \mathcal{Z}$, on note $r(z) \in \mathbb{Z}_{(p)} \cup \{+\infty\}$ et $k(z) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ les invariants définis comme suit : si $\Sigma \neq \emptyset$, ou si $\Sigma = \emptyset$ et $z \neq z_\infty$, on choisit un relèvement $(r_1, \ldots, r_k; \underline{Z}_1, \ldots, \underline{Z}_k)$ de z dans $\tilde{\mathcal{Z}}_\bullet$, et l'on pose $r(z) = r_1$ et $k(z) = k$; et si $\Sigma = \emptyset$ et $z = z_\infty$, on pose $r(z) = +\infty$ et $k(z) = 0$.

10.3. L'application $\tilde{\mathcal{Z}}_\bullet \to \tilde{\mathcal{B}}$, $(r_1, \ldots, r_k; \underline{Z}_1, \ldots, \underline{Z}_k) \mapsto (r_1, \underline{Z}_1)$ est surjective et $W \rtimes \Gamma$-équivariante. Elle induit une application surjective $\mathcal{Z}_\bullet \to \mathcal{B}$ dont la fibre au-dessus d'un élément $b \in \mathcal{B}$ est notée $\mathcal{Z}_b$.

Soient $b \in \mathcal{B}$ et $z \in \mathcal{Z}_b$. Comme en 10.1, on associe à b un élément $(\mathcal{D}', \psi, r, \underline{Z}') \in \mathcal{L}(\mathcal{D})$. Comme dans la section 8, on affecte les objets relatifs à $\mathcal{D}'$, introduits précédemment pour la donnée $\mathcal{D}$, d'un exposant "$'$". On peut choisir un relèvement $\tilde{z}$ de z dans $\tilde{\mathcal{Z}}_\bullet$ de la forme $\tilde{z} = (r, r_2, \ldots, r_k; \psi(\underline{Z}'), \underline{Z}_2, \ldots, \underline{Z}_k)$. La suite $(r, r_2, \ldots, r_k; \underline{Z}', \psi^{-1}(\underline{Z}_2), \ldots, \psi^{-1}(\underline{Z}_k))$ appartient à $\tilde{\mathcal{Z}}'_\bullet$ et son image dans $\tilde{\mathcal{Z}}'_\bullet/W'$ est fixe par Γ. Cette image ne dépend pas du choix du relèvement $\tilde{z}$ de z ; on la note $\beta_\bullet(z) \in \mathcal{Z}'_\bullet$. D'autre part, la suite $(r_2, \ldots, r_k; \psi^{-1}(\underline{Z}_2), \ldots, \psi^{-1}(\underline{Z}_k))$ appartient à $\tilde{\mathcal{Z}}'$, et son image dans $\tilde{\mathcal{Z}}'/W'$ est fixe par Γ. À nouveau, cette image ne dépend pas du choix du relèvement $\tilde{z}$ de z ; on la note $\beta(z) \in \mathcal{Z}'$. On a donc défini deux applications

$$\mathcal{Z}_b \xrightarrow{\beta_\bullet} \mathcal{Z}'_\bullet, \qquad \mathcal{Z}_b \xrightarrow{\beta} \mathcal{Z}'.$$

Ces deux applications sont injectives. L'image de $\beta_\bullet$ est la fibre $\mathcal{Z}'_{b'}$ de la surjection $\mathcal{Z}'_\bullet \to \mathcal{B}'$ au-dessus de b', où b' est l'image de $(r, \underline{Z}')$ dans $\mathcal{B}'$. Notons $\mathcal{Z}'_{\mathrm{der}}$ l'ensemble obtenu en remplaçant $\mathcal{D}'$ par $\mathcal{D}'_{\mathrm{der}}$ (cf. 3.1) dans la définition de $\mathcal{Z}'$. On a une identification naturelle $\mathcal{Z}'_{\mathrm{der}} \subset \mathcal{Z}'$, et l'image de β est l'ensemble des $z' \in \mathcal{Z}'_{\mathrm{der}}$ tels que $r(z') > r$. Par construction, on a $D'_{\beta_\bullet(z)} = D'_{\beta(z)}$, et ψ induit un isomorphisme $\psi_{z,\beta(z)} : D'_{\beta(z)} \to D_z$. De plus, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} D'_{\beta(z)} \arrow[r, "\psi_{z,\beta(z)}"] \arrow[d, "\mu'_{\beta(z)}"'] & D_z \arrow[d, "\mu_z"] \\ D' \arrow[r, "\psi_{D'}"'] & D \end{tikzcd}$$

10.4. Soit un corps $F \in \mathrm{CL}_q$, fixé jusqu'à la fin du numéro 10.6. Pour $X \in \mathfrak{t}^{\mathrm{mod}}$, on pose $r(X) = \omega_{\mathfrak{t},F}(X)$ (cf. 1.2 et 7.2).

Pour tout sous-système de racines Σ' de Σ, on pose $\mathrm{X}_{*,\Sigma'-\mathrm{cent}} = \{X \in \mathrm{X}_* : \alpha(X) = 0, \forall \alpha \in \Sigma'\}$ et $\mathfrak{t}^{\mathrm{mod}}_{\Sigma'-\mathrm{cent}} = \mathrm{X}_{*,\Sigma'-\mathrm{cent}} \otimes_{\mathbb{Z}} F^{\mathrm{mod}}$, $\mathrm{X}_{*,\Sigma'-\mathrm{der}} = \mathrm{X}_* \cap \mathbb{Q}\langle \check{\alpha} : \alpha \in \Sigma' \rangle$ et $\mathfrak{t}^{\mathrm{mod}}_{\Sigma'-\mathrm{der}} = \mathrm{X}_{*,\Sigma'-\mathrm{der}} \otimes_{\mathbb{Z}} F^{\mathrm{mod}}$. D'après (P_Σ), le réseau $\mathrm{X}_{*,\Sigma'-\mathrm{cent}} \oplus \mathrm{X}_{*,\Sigma'-\mathrm{der}}$ est d'indice premier à p dans X_*, par conséquent on a la décomposition $\mathfrak{t}^{\mathrm{mod}} = \mathfrak{t}^{\mathrm{mod}}_{\Sigma'-\mathrm{cent}} \oplus \mathfrak{t}^{\mathrm{mod}}_{\Sigma'-\mathrm{der}}$.

Posons $\mathfrak{t}^{\mathrm{mod}}_{\mathrm{reg}} = \{X \in \mathfrak{t}^{\mathrm{mod}} : w(X) \neq X, \forall w \in W\}$ et $\mathcal{Z}_F = (\mathfrak{t}^{\mathrm{mod}}_{\mathrm{reg}}/W)^\Gamma$. On définit comme suit une application $\zeta_F : \mathcal{Z}_F \to \mathcal{Z}$. Soit $X \in \mathfrak{t}^{\mathrm{mod}}_{\mathrm{reg}}$. Si $X = 0$ (ce qui implique $\Sigma = \emptyset$ puisque X est régulier), on pose $\tilde{\zeta}_F(X) = z_\infty$. Supposons maintenant $X \neq 0$, et notons $r_1, \ldots, r_k$ les éléments du sous-ensemble $\{r(X)\} \cup \{\omega_F(\alpha(X)) : \alpha \in \Sigma\}$ de $\mathbb{Z}_{(p)}$, ordonnés de manière croissante. On a donc $r_1 = r(X)$. Pour $i = 1, \ldots, k$, posons $\Sigma_i = \{\alpha \in \Sigma : \omega_F(\alpha(X)) > r_i\}$. Les ensembles Σ_i sont des sous-systèmes de racines de Σ, et l'on a $\Sigma \supset \Sigma_1 \supsetneq \Sigma_2 \supsetneq \cdots \supsetneq \Sigma_k$. Notons que si $\mathfrak{t}^{\mathrm{mod}} = \mathfrak{t}^{\mathrm{mod}}_{\Sigma-\mathrm{der}}$, alors l'inclusion $\Sigma \supset \Sigma_1$ est stricte. Par conséquent $\mathfrak{t}^{\mathrm{mod}} \supsetneq \mathfrak{t}^{\mathrm{mod}}_{\Sigma_1-\mathrm{cent}}$. D'après le paragraphe précédent, on a la décomposition :

$$\mathfrak{t}^{\mathrm{mod}} = \mathfrak{t}^{\mathrm{mod}}_{\Sigma_1-\mathrm{cent}} \oplus (\mathfrak{t}^{\mathrm{mod}}_{\Sigma_1-\mathrm{der}} \cap \mathfrak{t}^{\mathrm{mod}}_{\Sigma_2-\mathrm{cent}}) \oplus (\mathfrak{t}^{\mathrm{mod}}_{\Sigma_2-\mathrm{der}} \cap \mathfrak{t}^{\mathrm{mod}}_{\Sigma_3-\mathrm{cent}}) \oplus \cdots \oplus (\mathfrak{t}^{\mathrm{mod}}_{\Sigma_{k-1}-\mathrm{der}} \cap \mathfrak{t}^{\mathrm{mod}}_{\Sigma_k-\mathrm{cent}}).$$

Écrivons $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_k$ suivant cette décomposition. Par construction, pour $i = 1, \ldots, k$, on a $X_i \in \mathfrak{t}^{\mathrm{mod}}_{r_i} \smallsetminus \mathfrak{t}^{\mathrm{mod}}_{(r_i)+}$. Notons $\underline{X}_i \in \underline{\mathfrak{t}}(r_i)$ l'image de X_i par la projection canonique $\mathfrak{t}^{\mathrm{mod}}_{r_i} \to \underline{\mathfrak{t}}(r_i)$ (cf. 8.5). Alors la suite $(r_1, \ldots, r_k; \underline{X}_1, \ldots, \underline{X}_k)$ appartient à $\tilde{\mathcal{Z}}_\bullet$; on la note $\tilde{\zeta}_F(X)$. L'application $\tilde{\zeta}_F : \mathfrak{t}^{\mathrm{mod}}_{\mathrm{reg}} \to \tilde{\mathcal{Z}}$ ainsi définie est $W \rtimes \Gamma$-équivariante. Elle induit donc une application $\zeta_F : \mathcal{Z}_F \to \mathcal{Z}$. Pour $z \in \mathcal{Z}$, on pose $\mathcal{Z}_F(z) = \zeta_F^{-1}(z)$

Soient $b \in \mathcal{B}$ et $z \in \mathcal{Z}_b$. Comme en 10.1, on associe à b un élément $(\mathcal{D}', \psi, r, \underline{Z}') \in \mathcal{L}(\mathcal{D})$. On pose $\mathfrak{t}'^{\mathrm{mod}}_{\mathrm{reg}} = \{X' \in \mathfrak{t}'^{\mathrm{mod}} : w(X') \neq X', \forall w \in W'\}$, $\mathcal{Z}'_F = (\mathfrak{t}'^{\mathrm{mod}}_{\mathrm{reg}}/W')^\Gamma$, et l'on définit comme ci-dessus une application $\zeta'_F : \mathcal{Z}'_F \to \mathcal{Z}'$. Soit $z'_\bullet = \beta_\bullet(z) \in \mathcal{Z}'_\bullet$, et posons $\mathcal{Z}'_F(z'_\bullet) = \zeta'^{-1}_F(z'_\bullet) \subset \mathcal{Z}'_F$. Rappelons que l'isomorphisme $i_\psi : \mathfrak{t}'^{\mathrm{mod}} \to \mathfrak{t}^{\mathrm{mod}}$ n'est pas Γ-équivariant ; mais l'application $\mathfrak{t}'^{\mathrm{mod}}/W' \to \mathfrak{t}^{\mathrm{mod}}/W$ qui s'en déduit est Γ-équivariante. Cette dernière induit une application *bijective* (cf. [W2] 6.6)

$$\mathcal{Z}'_F(z'_\bullet) \to \mathcal{Z}_F(z). \tag{1}$$

D'autre part, à la donnée $\mathcal{D}'_{\mathrm{der}}$ sont associés comme ci-dessus un ensemble $\mathcal{Z}'_{\mathrm{der},F}$ et une application $\zeta'_{\mathrm{der},F} : \mathcal{Z}'_{\mathrm{der},F} \to \mathcal{Z}'_{\mathrm{der}}$. Comme pour $\mathcal{Z}'_{\mathrm{der}}$, on a une identifcation naturelle $\mathcal{Z}'_{\mathrm{der},F} \subset \mathcal{Z}'_F$. Soit $z' = \beta(z) \in \mathcal{Z}'_{\mathrm{der}}$, et posons $\mathcal{Z}'_{\mathrm{der},F}(z') = \zeta'^{-1}_{\mathrm{der},F}(z')$. Notons $\mathfrak{t}'_{\mathrm{cent}}(F)(\underline{Z}')$ l'ensemble des éléments de $\mathfrak{t}'_{\mathrm{cent}}(F)_r$ qui s'envoient sur $\underline{Z}'$ par la projection canonique $\mathfrak{t}'_{\mathrm{cent}}(F)_r \to \underline{\mathfrak{t}}'_{\mathrm{cent}}(r)^\Gamma$. De la décomposition $\mathfrak{t}'^{\mathrm{mod}} = \mathfrak{t}'^{\mathrm{mod}}_{\mathrm{cent}} \oplus \mathfrak{t}'^{\mathrm{mod}}_{\mathrm{der}}$, on déduit une application *bijective* (cf. [W2] 6.6)

$$\mathcal{Z}'_F(z'_\bullet) \to \mathfrak{t}'_{\mathrm{cent}}(F)(\underline{Z}') \times \mathcal{Z}'_{\mathrm{der},F}(z'). \tag{2}$$

Des bijections (1) et (2) ci-dessus, par récurrence sur le rang de $\mathcal{D}$, on déduit le

Lemme ([W2] lemme 6.6.1). — *L'application ζ_F est surjective.*

10.5. On note ${}_D\mathfrak{g}$ la variété $\coprod_{d \in D} {}_d\mathfrak{g}$ sur F, et l'on pose ${}_D\mathfrak{g}^{\mathrm{mod}} = \coprod_{d \in D} {}_d\mathfrak{g}^{\mathrm{mod}}$ et ${}_D\mathfrak{g}(F)_{\mathrm{reg}} = \coprod_{d \in D} {}_d\mathfrak{g}(F)_{\mathrm{reg}}$. Soient $d, d' \in D$, $X \in {}_d\mathfrak{g}(F)_{\mathrm{reg}}$ et $X' \in {}_{d'}\mathfrak{g}(F)_{\mathrm{reg}}$. On dit que X et X' sont :
- *conjugués* si $d = d'$ et s'il existe un $g \in {}_dG(F)$ tel que $\mathrm{Ad}(g)(X) = X'$;
- *stablement conjugués* s'il existe un $\overline{g} \in G(\overline{F})$ tel que $\mathrm{Ad}(\overline{g}) \circ {}_d\xi(X) = {}_{d'}\xi(X')$.

D'après 7.2, si X et X' sont stablement conjugués, alors on peut choisir $\overline{g}$ dans G^{mod}.

Soit $X \in {}_d\mathfrak{g}(F)_{\mathrm{reg}}$ pour un $d \in D$. D'après 7.2, il existe un $g \in G^{\mathrm{mod}}$ tel que $\mathrm{Ad}(g) \circ {}_d\xi(X) \in \mathfrak{t}^{\mathrm{mod}}_{\mathrm{reg}}$. L'image de $\mathrm{Ad}(g) \circ {}_d\xi(X)$ dans $\mathfrak{t}^{\mathrm{mod}}_{\mathrm{reg}}/W$ est fixe par Γ, et ne dépend pas du choix de g ; on la note $t(X)$. L'application ${}_D\mathfrak{g}(F)_{\mathrm{reg}} \to \mathcal{Z}_F$, $X \mapsto t(X)$ est surjective, et ses fibres sont les classes de conjugaison stables dans ${}_D\mathfrak{g}(F)_{\mathrm{reg}}$. Pour $z_F \in \mathcal{Z}_F$, on pose $\mathcal{O}_{\mathrm{st}}(z_F) = t^{-1}(z_F)$.

Soient $z \in \mathcal{Z}$ et $z_F \in \mathcal{Z}_F(z)$. On définit comme suit une application $\delta = \delta_{z_F} : \mathcal{O}_{\mathrm{st}}(z_F) \to D_z$. Choisissons un relèvement $\tilde{z}$ de z dans $\tilde{Z}$. D'après la définition de ζ, il existe un $Z \in \mathfrak{t}^{\mathrm{mod}}_{\mathrm{reg}}$ relevant z_F et tel que $\tilde{\zeta}_F(Z) = \tilde{z}$. Puisque $\tilde{z}$ est régulier, la condition $\tilde{\zeta}_F(Z) = \tilde{z}$ détermine Z de manière unique. Puisque l'application $\tilde{\zeta}_F$ est Γ-équivariante, pour $\gamma \in \Gamma$, $w_{\tilde{z}}(\gamma)$ (cf. 10.2) est l'unique élément de W vérifiant $w_{\tilde{z}}(\gamma) \circ \gamma(Z) = Z$. Notons ${}_{\tilde{z}}T$ le tore défini sur F dont le groupe des cocaractères est ${}_{\tilde{z}}\mathrm{X}_*$. On a un isomorphisme ${}_{\tilde{z}}T \to T$ défini sur F^{mod}, que l'on note encore ${}_{\tilde{z}}\varphi$, tel que ${}_{\tilde{z}}\varphi \circ \gamma = w_{\tilde{z}}(\gamma) \circ {}_{\tilde{z}}\varphi$ pour tout $\gamma \in \Gamma$. D'après 4.3, l'homomorphisme de Kottwitz $\omega^{\mathrm{nr}}_{{}_{\tilde{z}}T}$ induit une application bijective $\mathrm{H}^1(\Gamma, ({}_{\tilde{z}}T)^{\mathrm{mod}}) \to ({}_{\tilde{z}}\mathrm{X}_*)_{\Gamma,\mathrm{tor}} = D_{\tilde{z}}$. On identifie $\mathrm{H}^1(\Gamma, ({}_{\tilde{z}}T)^{\mathrm{mod}})$ et $D_{\tilde{z}}$ via cette application. Pour $\gamma \in \Gamma$, on pose $\Sigma^+_{\tilde{z},\gamma} = \{\alpha \in \Sigma^+ : w_{\tilde{z}}(\gamma)^{-1}(\alpha) < 0\}$ et

$$t_{\tilde{z}}(\gamma) = \textstyle\prod_{\alpha \in \Sigma^+_{\tilde{z},\gamma}} \check{\alpha} \circ \alpha(Z) \in T^{\mathrm{mod}},$$
$$n_{\tilde{z}}(\gamma) = n(w_{\tilde{z}}(\gamma)) \in N^{\mathrm{mod}}.$$

Soit $X \in {}_d\mathfrak{g}(F)_{\mathrm{reg}} \cap \mathcal{O}_{\mathrm{st}}(z_F)$ pour un $d \in D$. Choisissons un $g \in G^{\mathrm{mod}}$ tel que $\mathrm{Ad}(g) \circ {}_d\xi(X) = Z$. Pour $\gamma \in \Gamma$, l'élément $gd_F(\gamma)\gamma(g)^{-1}$ appartient à N^{mod}, et son image dans W est $w_{\tilde{z}}(\gamma)$. Alors l'élément $gd_F(\gamma)\gamma(g)^{-1}n_{\tilde{z}}(\gamma)^{-1}t_{\tilde{z}}(\gamma)^{-1}$ appartient à T^{mod}, et son image par l'isomorphisme ${}_{\tilde{z}}\varphi^{-1} : T \to {}_{\tilde{z}}T$ appartient à $({}_{\tilde{z}}T)^{\mathrm{mod}}$; on la note $\delta_{\tilde{z},X,g}$. Grâce au lemme 2.2.A de [LS], on vérifie que l'application $\gamma \mapsto \delta_{\tilde{z},X,g}$ est un cocycle. Elle définit un élément $\delta_{\tilde{z}}(X) \in \mathrm{H}^1(\Gamma, ({}_{\tilde{z}}T)^{\mathrm{mod}}) = D_{\tilde{z}}$, qui ne dépend pas du choix de g. D'après le lemme 2.3.A de [LS], l'application $\delta_{\tilde{z}} : \mathcal{O}_{\mathrm{st}}(z_F) \to D_{\tilde{z}}$, est compatible avec les isomorphismes $\overline{\iota}_{\tilde{z}',\tilde{z}}$. D'où une application $\delta : \mathcal{O}_{\mathrm{st}}(z_F) \to D_z$.

Pour $z_F \in \mathcal{Z}_F$, notons $\mathrm{cl}(z_F)$ l'ensemble des classes de conjugaison (ordinaire) contenues dans $\mathcal{O}_{\mathrm{st}}(z_F)$. Par construction, δ_{z_F} se factorise en une application $\overline{\delta}_{z_F} : \mathrm{cl}(z_F) \to D_{\zeta_F(z_F)}$.

Lemme ([W2] lemme 6.5). — *Soient $z \in \mathcal{Z}$ et $z_F \in \mathcal{Z}_F(z)$.*
(1) Pour $d \in D$ et $X \in {}_d\mathfrak{g}(F)_{\mathrm{reg}} \cap \mathcal{O}_{\mathrm{st}}(z_F)$, on a $\mu_z \circ \delta_{z_F}(X) = d$.
(2) L'application $\overline{\delta}_{z_F}$ est bijective.

10.6. Soient $b \in \mathcal{B}$, $z \in \mathcal{Z}_b$ et $z_F \in \mathcal{Z}_F(z)$. Posons $z'_\bullet = \beta_\bullet(z)$ et $z' = \beta(z)$. Notons $z'_{\bullet,F} \in \mathcal{Z}'_F(z_\bullet)$ l'image réciproque de z_F par la bijection (1) de 10.4, et $(Z', z'_F) \in \mathfrak{t}'_{\mathrm{cent}}(F)(\underline{Z}') \times \mathcal{Z}'_{\mathrm{der},F}(z')$ l'image de $z'_{\bullet,F}$ par la bijection (2) de 10.4. Pour définir cette bijection (2), on a choisi un élément $(\mathcal{D}', \psi, r, \underline{Z}') \in \mathcal{L}(\mathcal{D})$ associé à b comme en 10.1. On définit comme en 10.5 les classes de conjugaison stable $\mathcal{O}_{\mathrm{st}}(z'_{\bullet,F})$, $\mathcal{O}_{\mathrm{st}}(z'_F) \subset {}_{D'}\mathfrak{g}'(F)_{\mathrm{reg}}$, c'est-à-dire les fibres de la surjection $\zeta'_F : \mathcal{Z}'_F \to \mathcal{Z}'$ au-dessus de $z'_{\bullet,F}$ et de z'_F (on considère ici z'_F comme un élément de $\mathcal{Z}'_F$, et non de $\mathcal{Z}'_{\mathrm{der},F}$). De même, on définit comme en 10.5 les ensembles $\mathrm{cl}(z'_{\bullet,F})$ et $\mathrm{cl}(z'_F)$.

Pour tout $d' \in D$, on a défini en 8.7 un F-plongement ${}_{d'}i_\psi : {}_{d'}G' \to {}_dG$ avec $d = \psi_{D'}(d')$; d'où un F-plongement $\mathrm{d}({}_{d'}i_\psi) : {}_{d'}\mathfrak{g}' \to {}_d\mathfrak{g}$. Les $\mathrm{d}({}_{d'}i_\psi)$ pour $d' \in D'$, se regroupent en un F-plongement $I_\psi : {}_{D'}\mathfrak{g}' \to {}_D\mathfrak{g}$. Ce dernier est compatible avec les conjugaisons stable et ordinaire. On vérifie que si $X'_\bullet \in \mathcal{O}_{\mathrm{st}}(z'_{\bullet,F})$, alors $I_\psi(X'_\bullet) \in \mathcal{O}_{\mathrm{st}}(z_F)$. Et la restriction de I_ψ à $\mathcal{O}_{\mathrm{st}}(z'_{\bullet,F})$ se factorise en une application $\overline{I}_\psi : \mathrm{cl}(z'_{\bullet,F}) \to \mathrm{cl}(z_F)$.

L'élément Z' est central pour la donnée $\mathcal{D}'$ et l'on peut décrire son action sur les classes de conjugaison : pour $d' \in D'$, la restriction à $\mathfrak{t}'_{\mathrm{cent}}$ de l'isomorphisme $\mathrm{d}({}_{d'}\xi')^{-1} : \mathfrak{g}' \to {}_{d'}\mathfrak{g}'$ est définie sur F, par conséquent $Y' = \mathrm{d}({}_{d'}\xi')^{-1}(Z')$ appartient à ${}_{d'}\mathfrak{g}'(F)$. Et l'application $X' \mapsto X' + Y'$ induit une application bijective ${}_{d'}\mathfrak{g}'(F) \cap \mathcal{O}_{\mathrm{st}}(z'_F) \to {}_{d'}\mathfrak{g}'(F) \cap \mathcal{O}_{\mathrm{st}}(z'_{\bullet,F})$. D'où une application bijective $\mathrm{cl}(z'_{\bullet,F}) \to \mathrm{cl}(z'_F)$, qui permet d'identifier $\mathrm{cl}(z'_{\bullet,F})$ et $\mathrm{cl}(z'_F)$. D'après le lemme 6.6.2 de [W2], les deux carrés du diagramme suivant sont commutatifs :

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{cl}(z'_{\bullet,F}) & = & \mathrm{cl}(z'_F) & \xrightarrow{\overline{I}_\psi} & \mathrm{cl}(z_F) \\
\downarrow \overline{\delta}'_{z'_{\bullet,F}} & & \downarrow \overline{\delta}'_{z'_F} & & \downarrow \overline{\delta}_{z_F} \\
D'_{z'_\bullet} & = & D'_{z'} & \xrightarrow[\psi_{z,z'}]{} & D_z
\end{array}$$

(La commutativité du carré de gauche est immédiate par construction.) La commutativité du carré de droite implique en particulier que l'application $\overline{I}_\psi$ est bijective.

10.7. Pour $d \in D$ et $F \in \mathrm{CL}_q$, on a défini en 7.3 une application linéaire ${}_d\mathrm{rea}_F : {}_d\mathcal{S} \to {}_d\mathcal{C}_F$. On pose $\mathcal{S} = \oplus_{d\in D}\, {}_d\mathcal{S}$ et $\mathcal{C}_F = \oplus_{d\in D}\, {}_d\mathcal{C}_F$, et l'on note $\mathrm{rea}_F : \mathcal{S} \to \mathcal{C}_F$ l'application linéaire $\oplus_{d\in D}\, {}_d\mathrm{rea}_F$. On considère les éléments de $\mathcal{C}_F$ comme des fonctions sur ${}_D\mathfrak{g}(F)$. Pour $X \in {}_D\mathfrak{g}(F)_{\mathrm{reg}}$ et $f \in \mathcal{C}_F$, on pose $\Lambda^{{}_DG(F)}(f, X) = \Lambda^{{}_dG(F)}(f_d, X)$ où d est l'unique élément de D tel que $X \in {}_d\mathfrak{g}(F)$ et f_d est la restriction de f à ${}_d\mathfrak{g}(F)$.

Le résultat suivant est le théorème principal de [W2] :

Théorème ([W2] théorème 7.2). — *Soient $z \in \mathcal{Z}$ et $\delta \in D_z$. Il existe une forme linéaire $\Lambda^{\mathcal{D}}(\cdot, z, \delta)$ sur $\mathcal{S}$ telle que pour tous $\varphi \in \mathcal{S}$, $F \in \mathrm{CL}_q$, $z_F \in \mathcal{Z}_F(z)$ et $X \in \delta_{z_F}^{-1}(\delta)$, on ait l'égalité*

$$\Lambda^{{}_DG(F)}(\mathrm{rea}_F(\varphi), X) = \Lambda^{\mathcal{D}}(\varphi, z, \delta).$$

Démonstration : On raisonne par récurrence sur l'entier $k(z)$, cf. 10.2. Précisément, fixé un entier $k \geq 0$, on suppose le théorème vrai pour toutes les données $(\mathcal{D}_1, z_1, \delta_1)$ telles que $\mathrm{rg}(\mathcal{D}_1) \leq \mathrm{rg}(\mathcal{D})$ et $k(z_1) < k(z)$. Posons $k = k(z)$.

Commençons par traiter le cas $k = 0$. On a $\Sigma = \emptyset$, $z = z_\infty$, et $D_z = (\mathrm{X}_*)_{\Gamma,\mathrm{tor}}$ s'identifie canoniquement à D. Soit $F \in \mathrm{CL}_q$. On a $\mathcal{Z}_F = \mathfrak{g}(F) = \mathfrak{t}(F)$, $\mathcal{Z}_F(z) = \{0\}$ et $\delta_0^{-1}(\delta) = \{X\}$ où X est l'élément 0 de ${}_\delta\mathfrak{g}(F)$. Soit $\varphi \in \mathcal{S}$. Écrivons $\varphi = \sum_{d\in D} \varphi_d$ avec $\varphi_d \in {}_d\mathcal{S}$, et pour $d \in D$, posons $f_d = {}_d\mathrm{rea}_F(\varphi_d) \in {}_d\mathcal{C}_F$. Alors on a les égalités $\Lambda^{{}_DG(F)}(\mathrm{rea}_F(\varphi), X) = f_\delta(0) = \varphi_\delta(0)$. Il suffit donc de poser $\Lambda^{\mathcal{D}}(\varphi, z, \delta) = \varphi_\delta(0)$.

On suppose désormais $k \geq 1$, i.e. $z \in \mathcal{Z}_\bullet$. Par linéarité, il suffit de définir $\Lambda^{\mathcal{D}}(\cdot, z, \delta)$ sur ${}_d\mathcal{S}_\phi$ avec $d \in D$ et $\phi \in {}_d\Phi$ fixés. Soient $\varphi \in {}_d\mathcal{S}_\phi$, et F, z_F, X comme dans l'énoncé. Posons $f = {}_d\mathrm{rea}_F(\varphi) \in {}_d\mathcal{C}_F$ et $d_1 = \psi_{D,z}(\delta)$. D'après le lemme 10.5, on a $X \in {}_{d_1}\mathfrak{g}(F)$. Si $d \neq d_1$, on a donc $\Lambda^{{}_DG(F)}(f, X) = 0$; on pose alors $\Lambda^{\mathcal{D}}(\varphi, z, \delta) = 0$.

Supposons $d = d_1$. Si $r(z) < r(\phi)$, puisque tout conjugué de X dans ${}_dG(F)$ appartient à ${}_d\mathfrak{g}(F)_{r(z)} \smallsetminus {}_d\mathfrak{g}(F)_{r(z)^+}$, le support de f ne coupe pas la ${}_dG(F)$-orbite de X, donc $\Lambda^{{}_DG(F)}(f, X) = 0$; et l'on pose à nouveau $\Lambda^{\mathcal{D}}(\varphi, z, \delta) = 0$. On suppose désormais $r(z) \geq r(\phi)$. D'après 7.2 et le premier paragraphe de 10.1, il existe un $e \in \mathcal{P}$ indépendant des données $r(z)$ et $r(\phi)$, tel que $r(z)$, $r(\phi) \in \frac{1}{e}\mathbb{Z}$. On peut donc raisonner par récurrence sur l'entier $e(r(z) - r(\phi))$. Précisément, on peut supposer que la forme linéaire $\Lambda^{\mathcal{D}}(\cdot, z, \delta)$ est définie sur ${}_d\mathcal{S}_{r(\phi)^+}$. Posons $r = r(\phi)$. On distingue deux cas :

Cas 1 : $r(z) > r$. Alors on pose $\Lambda^{\mathcal{D}}(\varphi, z, \delta) = \Lambda^{\mathcal{D}}({}_dl_r^+(\varphi), z, \delta)$ où ${}_dl_r^+ : {}_d\mathcal{S}_r \to {}_d\mathcal{S}_{r^+}$ est l'application linéaire de la proposition 7.4.

Cas 2 : $r(z) = r$. Notons b l'image de z dans $\mathcal{B}$ (i.e. l'élément tel que $z \in \mathcal{Z}_b$), et associons à b un élément $(\mathcal{D}', \psi, r, \underline{Z}')$ comme en 10.1. Posons $z' = \beta(z) \in \mathcal{Z}'$, $\delta' = \psi_{z,z'}^{-1}(\delta) \in D'_{z'}$ et $d' = \mu'_{z'}(\delta') \in D'$. D'après 10.3, on a $d = \psi_{D'}(d')$. Puisque $k(z') = k - 1$, on peut poser $\Lambda^{\mathcal{D}}(\varphi, z, \delta) = \Lambda^{\mathcal{D}'}({}_{d'}l'_r(\varphi), z', \delta')$ où ${}_{d'}l'_r : {}_d\mathcal{S}_r \to {}_{d'}\mathcal{S}'_r$ est l'application linéaire de la proposition 9.3. Montrons que cette définition convient. Soient $F \in \mathrm{CL}_q$, $z_F \in \mathcal{Z}_F(z)$ et $X \in \delta_{z_F}^{-1}(\delta)$. Soit $(Z', z'_F) \in \mathfrak{t}'_{\mathrm{cent}}(F)(\underline{Z}') \times \mathcal{Z}'_{\mathrm{der},F}(z')$ l'image de z_F par la composée des bijections (1) et (2) de 10.4. Soit $X' \in \delta'^{-1}_{z'_F}(\delta') \subset \mathcal{O}_{\mathrm{st}}(z'_F)$. D'après le lemme 10.5, on a $X \in {}_{d'}\mathfrak{g}'(F)$, et d'après 10.6, les éléments X et $\mathrm{d}({}_{d'}i_\psi)(\mathrm{d}({}_{d'}\xi'^{-1})(Z') + X')$ sont conjugués dans ${}_dG(F)$. La proposition 9.3 appliquée au couple $(\mathrm{d}({}_{d'}\xi'^{-1})(Z'), X')$ entraîne donc l'égalité : $\Lambda^{{}_dG(F)}(f, X) = \Lambda^{{}_{d'}G'(F)}({}_{d'}\mathrm{rea}_F \circ {}_{d'}l'_r(\varphi), X')$. Mais d'après l'hypothèse de récurrence, on a $\Lambda^{{}_{d'}G'(F)}({}_{d'}\mathrm{rea}_F \circ {}_{d'}l'_r(\varphi), X') = \Lambda^{\mathcal{D}'}({}_{d'}l'_r(\varphi), z', \delta')$. □

Le théorème précédent permet de comparer des intégrales orbitales relatives à des groupes définis sur des corps de base différents. Mais il affirme aussi, pour un corps $F \in \mathrm{CL}_q$ fixé, la propriété de constance locale suivante des intégrales orbitales des fonctions dans l'image de rea_F : pour tous z_F, $t_F \in \mathcal{Z}_F$ tels que $\zeta_F(z_F) = \zeta_F(t_F)$, et tous $X \in \mathcal{O}_{\mathrm{st}}(z_F)$, $Y \in \mathcal{O}_{\mathrm{st}}(t_F)$ tels que $\delta_{z_F}(X) = \delta_{t_F}(Y)$, on a l'égalité

$$\Lambda^{{}_DG(F)}(\mathrm{rea}_F(\varphi), X) = \Lambda^{{}_DG(F)}(\mathrm{rea}_F(\varphi), Y) \qquad (\varphi \in \mathcal{S}).$$

11. Endoscopie, transfert et lemme fondamental

11.1. On appelle *donnée endoscopique de* $\mathcal{D}$ un triplet $(\mathcal{D}_\natural, \eta, s)$ de la forme suivante :

- $\mathcal{D}_\natural = (\mathrm{X}^*_\natural, \Sigma_\natural, \Delta_\natural, \mathrm{X}_{*,\natural}, \check{\Sigma}_{*,\natural}, \check{\Delta}_{*,\natural})$ est une donnée de racines munie d'une action de Γ comme en 3.1. Comme en 8.3, on affecte d'un indice "$\natural$" les objets relatifs à $\mathcal{D}_\natural$: $W_\natural$, $\underline{G}_\natural$, $\underline{T}_\natural$ (etc.) ;
- $\eta = (\mathrm{X}^*_\natural \to \mathrm{X}^*, \mathrm{X}_{*,\natural} \to \mathrm{X}_*)$ est un couple d'isomorphismes de $\mathbb{Z}$-modules en dualité. On note encore η chacun de ces isomorphismes, ainsi que tout isomorphisme qui s'en déduit par fonctorialité. On suppose que $\eta(\Sigma_\natural) \subset \Sigma$ et $\eta(\check{\Sigma}_\natural) \subset \check{\Sigma}$, et que pour tout $\gamma \in \Gamma$, il existe un élément $w \in W$ tel que $\eta \circ \gamma = w \circ \gamma \circ \eta$. Cet élément w est unique, et noté $w_\eta(\gamma)$.
- $s \in \hat{Z}^\Gamma_\natural$ où l'on a posé $\hat{T}_\natural = \mathrm{X}^*_\natural \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^\times$ et $\hat{Z}_\natural = \{t \in \hat{T}_\natural : \check{\alpha}(t) = 1,\ \forall \alpha \in \Sigma_\natural\}$. De l'action de Γ sur $\mathrm{X}^*_\natural$ se déduisent des actions sur $\hat{T}_\natural$ et sur $\hat{Z}_\natural$. On suppose aussi que pour tout $\alpha \in \Sigma \smallsetminus \eta(\Sigma_\natural)$, on a $\eta^{-1}(\check{\alpha})(s) \neq 1$.

Deux données endoscopiques $(\mathcal{D}_{1,\natural}, \eta_1, s_1)$ et $(\mathcal{D}_{2,\natural}, \eta_2, s_2)$ de $\mathcal{D}$ sont dites *isomorphes* s'il existe un isomorphisme Γ-équivariant $f : \mathcal{D}_{1,\natural} \to \mathcal{D}_{1,\natural}$ (cf. 8.3) et un élément $w \in W$ tels que

$$\eta_2 \circ f = w \circ \eta_1, \qquad \hat{f}(s_1) \in s_2 \hat{Z}^{\Gamma,\circ}_{2,\natural}.$$

Ici, $\hat{f}$ désigne l'isomorphisme $\hat{T}_{1,\natural} \to \hat{T}_{2,\natural}$ déduit de $\mathrm{X}^*_{1,\natural} \xrightarrow{f} \mathrm{X}^*_{2,\natural}$, et $\hat{Z}^{\Gamma,\circ}_{2,\natural}$ la composante neutre de $\hat{Z}^\Gamma_{2,\natural}$.

Soit $(\mathcal{D}_\natural, \eta, s)$ une donnée endoscopique de $\mathcal{D}$. Notons $\check{\mathcal{D}}$ la donnée duale $(\mathrm{X}_*, \check{\Sigma}_*, \check{\Delta}_*, \mathrm{X}^*, \Sigma, \Delta)$. À cette donnée $\check{\mathcal{D}}$, on associe comme en 3.3 un groupe complexe $\hat{G}$ muni d'une action de Γ préservant un épinglage. De même, à la donnée duale $\check{\mathcal{D}}_\natural$, on associe un groupe complexe $\hat{G}_\natural$ muni d'une action de Γ préservant un épinglage. De η se déduit un plongement $\hat{\eta} : \hat{G}_\natural \to \hat{G}$, et $\hat{Z}_\natural$ est le centre de $\hat{G}_\natural$. Soit $F \in \mathrm{CL}_q$. À $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}_\natural$, on associe comme en 3.4 des groupes réductifs connexes G et $G_\natural$ définis sur F. Le triplet $(G_\natural, \hat{\eta}, s)$ est un *triplet endoscopique de* G au sens habituel. Plus généralement, c'est un triplet endoscopique de ${}_dG$ pour tout $d \in D$. En revanche, la notion d'isomorphisme ci-dessus est plus fine que celle habituellement utilisée (d'habitude, on demande que $\hat{f}(s_1) \in s_2 \hat{Z}^{\Gamma,\circ}_{2,\natural} \hat{\eta}_2^{-1}(\hat{Z}^\Gamma)$ où $\hat{Z}$ est le centre de $\hat{G}$) et mieux adaptée à la considération simultanée de tous les ${}_dG$.

11.2. Soit $(\mathcal{D}_\natural, \eta, s)$ une donnée endoscopique de $\mathcal{D}$ fixée jusqu'à la fin du numéro 11.4. Pour $r \in \mathbb{Z}_{(p)}$ l'isomorphisme $\eta : \underline{\mathfrak{t}}_\natural(r) \to \underline{\mathfrak{t}}(r)$ n'est en général pas Γ-équivariant. Soit $\tilde{\mathcal{Y}}$ l'ensemble des suites $(r_1, \ldots, r_k; \underline{Y}_1, \ldots, \underline{Y}_k)$ telles que :

- pour $i = 1, \ldots, k$, on a $r_i \in \mathbb{Z}_{(p)}$ et $\underline{Y}_i \in \underline{\mathfrak{t}}_\natural(r_i)$;
- la suite $(r_1, \ldots, r_k; \eta(\underline{Y}_1), \ldots, \eta(\underline{Y}_k))$ appartient à $\tilde{\mathcal{Z}}$.

Le groupe $W_\natural \rtimes \Gamma$ opère naturellement sur $\tilde{\mathcal{Y}}$, et l'on pose $\mathcal{Y} = (\tilde{\mathcal{Y}}/W_\natural)^\Gamma$. L'application

$$\eta_{\tilde{\mathcal{Y}}} : \tilde{\mathcal{Y}} \to \tilde{\mathcal{Z}},\ (r_1, \ldots, r_k; \underline{Y}_1, \ldots, \underline{Y}_k) \mapsto (r_1, \ldots, r_k; \eta(\underline{Y}_1), \ldots, \eta(\underline{Y}_k))$$

est bijective (par définition) mais n'est en général pas Γ-équivariante. En revanche, l'application $\tilde{\mathcal{Y}}/W_\natural \to \tilde{\mathcal{Z}}/W$ qui s'en déduit est Γ-équivariante. D'où une application $\eta_{\mathcal{Y}} : \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}$.

On définit comme suit une application $\epsilon : \mathcal{Y} \to \mathcal{Z}_\natural$ avec $\mathcal{Z}_\natural = \mathcal{Z}_{\bullet,\natural} \cup \{z_{\infty,\natural}\}$ (cf. 10.2). Soit un élément $\tilde{y} = (r_1, \ldots, r_k; \underline{Y}_1, \ldots, \underline{Y}_k) \in \tilde{\mathcal{Y}}$. Si $k = 0$, on pose $\tilde{\epsilon}(\tilde{y}) = z_{\infty,\natural}$. Supposons $k \geq 1$. Pour $i = 1, \ldots, k$, posons $\Sigma_\natural(i) = \{\alpha \in \Sigma_\natural : \alpha(\underline{Y}_j) = 0,\ \forall j \in \{1, \ldots, i\}\}$; c'est un sous-système de racines de $\Sigma_\natural$. On a les inclusions $\Sigma_\natural \supset \Sigma_\natural(1) \supset \cdots \supset \Sigma_\natural(k) = \emptyset$. Considérons l'ensemble des $i \in \{2, \ldots, k\}$ tels que $\Sigma_\natural(i-1) \supsetneq \Sigma_\natural(i)$. Notons E cet ensemble, et posons $E \cup \{1\} = \{i_1, \ldots, i_{k'}\}$ avec $i_1 < i_2 < \cdots < i_{k'}$. On a donc $i_1 = 1$. Pour $j = 1, \ldots, k'$, posons $\Sigma_{\natural,j} = \Sigma_\natural(i_j)$. Pour

$j \in \{1,\dots,k'\}$, on a la décomposition (cf. 10.4) $\mathfrak{t}_\natural^{\rm mod} = \mathfrak{t}^{\rm mod}_{\natural,\Sigma_{j,\natural}-{\rm cent}} \oplus \mathfrak{t}^{\rm mod}_{\natural,\Sigma_{j,\natural}-{\rm der}}$; et pour $r \in \mathbb{Z}_{(p)}$, on en déduit une décomposition $\underline{\mathfrak{t}}_\natural(r) = \underline{\mathfrak{t}}_{\natural,\Sigma_{j,\natural}-{\rm cent}}(r) \oplus \underline{\mathfrak{t}}_{\natural,\Sigma_{j,\natural}-{\rm der}}(r)$. Posons $\underline{Z}_{1,\natural} = \underline{Y}_1$, et pour $j = 2,\dots,k'$, notons $\underline{Z}_{j,\natural}$ la projection de $\underline{Y}_j$ sur $\underline{\mathfrak{t}}_{\natural,\Sigma_{j,\natural}-{\rm der}}(r_{i_j})$. Par construction, la famille $(r_1,\dots,r_{i_{k'}};\underline{Z}_1,\dots,\underline{Z}_{i_{k'}})$ appartient à $\tilde{\mathcal{Z}}_{\bullet,\natural}$ (cf. [W2] 8.2) ; on la note $\tilde{\epsilon}(\tilde{y})$. L'application $\tilde{\epsilon} : \tilde{\mathcal{Y}} \rightarrow \tilde{\mathcal{Z}}_\natural$ ainsi définie est $W \rtimes \Gamma$-équivariante. Elle induit donc une application $\epsilon : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}_\natural$.

Soit $y \in \mathcal{Y}$. Posons $z = \eta_{\mathcal{Y}}(y) \in \mathcal{Z}$ et $z_\natural = \epsilon(y) \in \mathcal{Z}_\natural$. On a une identification canonique $D_{z_\natural} = D_z$. Si $z = z_\infty$, alors $z_\natural = z_{\infty,\natural}$ et l'identification $({\rm X}_{*,\natural})_{\Gamma,{\rm tor}} = ({\rm X}_*)_{\Gamma,{\rm tor}}$ est celle induite par η. Supposons donc $z \neq z_\natural$, et choisissons une relèvement $\tilde{y}$ de y dans $\tilde{\mathcal{Y}}$. Posons $\tilde{z} = \eta_{\tilde{\mathcal{Y}}}(\tilde{y})$ et $\tilde{z}_\natural = \tilde{\epsilon}(\tilde{y})$. Pour $\gamma \in \Gamma$, il existe un $w_{\tilde{y}}(\gamma) \in W_\natural$ tel que $w_{\tilde{y}}(\gamma) \circ \gamma(\tilde{y}) = \tilde{y}$. Puisque l'application $\tilde{\epsilon}$ est $W \rtimes \Gamma$-équivariante, on a $w_{\tilde{y}}(\gamma) = w_{\tilde{z}_\natural}(\gamma)$ $(\gamma \in \Gamma)$. D'autre part, pour $\gamma \in \Gamma$, il existe un $w_{\eta_{\tilde{\mathcal{Y}}}}(\gamma) \in W$ tel que $\eta_{\tilde{\mathcal{Y}}} \circ \gamma = w_{\eta_{\tilde{\mathcal{Y}}}}(\gamma) \circ \gamma \circ \eta_{\tilde{\mathcal{Y}}}$. On en déduit que $w_{\tilde{z}}(\gamma) = \eta(w_{\tilde{y}}(\gamma)) w_{\eta_{\tilde{\mathcal{Y}}}}(\gamma)$ $(\gamma \in \Gamma)$. Par conséquent l'application ${}_{\tilde{z}}\varphi^{-1} \circ \eta \circ {}_{\tilde{z}_\natural}\varphi_\natural : {}_{\tilde{z}_\natural}{\rm X}_{*,\natural} \rightarrow {}_{z}{\rm X}_*$ est Γ-équivariante ; où ${}_{\tilde{z}_\natural}\varphi_\natural : {}_{\tilde{z}_\natural}{\rm X}_{*,\natural} \rightarrow {\rm X}_{*,\natural}$ est défini comme en 10.2. Elle induit donc un isomorphisme $D_{\tilde{z}_\natural} \rightarrow D_{\tilde{z}}$, qui est compatible aux morphismes de transition (cf. 10.2) ; d'où un isomorphisme $D_{z_\natural} \rightarrow D_z$. On verifie que ce dernier ne dépend pas du choix du relèvement $\tilde{y}$.

Soit $z_\natural \in \mathcal{Z}_\natural$. À la paire $(s, z_\natural)$, on associe comme suit un homomorphisme $s_{z_\natural} : D_{z_\natural} \rightarrow \mathbb{C}^\times$. On choisit un relèvement $\tilde{z}_\natural$ de $z_\natural$ dans $\tilde{\mathcal{Z}}_\natural$, et l'on note ${}_{\tilde{z}_\natural}{\rm X}^*_\natural$ le Γ-module dual de ${}_{\tilde{z}_\natural}{\rm X}_{*,\natural}$. De l'isomorphisme ${}_{\tilde{z}_\natural}\varphi_\natural : {}_{\tilde{z}_\natural}{\rm X}_{*,\natural} \rightarrow {\rm X}_{*,\natural}$ se déduit un isomorphisme ${}_{\tilde{z}_\natural}\hat{\varphi}_\natural : \hat{T}_\natural \rightarrow {}_{\tilde{z}_\natural}{\rm X}_{*,\natural} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^\times$. La restriction de ce dernier à $\hat{Z}_\natural$ est Γ-équivariant. En particulier, on a ${}_{\tilde{z}_\natural}\hat{\varphi}_\natural(s) \in [{}_{\tilde{z}_\natural}{\rm X}_{*,\natural} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}^\times]^\Gamma = {\rm Hom}(D_{\tilde{z}_\natural}, \mathbb{C}^\times)$. Si maintenant $\tilde{z}'_\natural$ est un autre relèvement de $z_\natural$ dans $\tilde{\mathcal{Z}}_\natural$, à nouveau parceque $s \in \hat{Z}_\natural$, on a ${}_{\tilde{z}_\natural}\hat{\varphi}_\natural(s) = {}_{\tilde{z}'_\natural}\hat{\varphi}_\natural(s) \circ (D_{\tilde{z}_\natural} \rightarrow D_{\tilde{z}'_\natural})$ où $D_{\tilde{z}_\natural} \rightarrow D_{\tilde{z}'_\natural}$ est l'isomorphisme défini en 10.2 (i.e. le morphisme de transition). D'où un homorphisme $D_{z_\natural} \rightarrow \mathbb{C}^\times$, que l'on note $s_{z_\natural}$.

Pour $y \in \mathcal{Y}$, on pose $s_y = s_{\epsilon(y)} \in {\rm Hom}(D_{\epsilon(y)}, \mathbb{C}^\times) = {\rm Hom}(D_{\eta_{\mathcal{Y}}(y)}, \mathbb{C}^\times)$.

11.3. Soit $F \in {\rm CL}_q$. De η se déduit un isomorphisme $\mathfrak{t}^{\rm mod}_\natural \rightarrow \mathfrak{t}^{\rm mod}$. Notons $\mathfrak{t}^{\rm mod}_{\natural,\mathcal{D}-{\rm reg}}$ l'image réciproque de $\mathfrak{t}^{\rm mod}_{\rm reg}$ par cet isomomorphisme ; c'est un sous-ensemble $W_\natural \rtimes \Gamma$-stable de $\mathfrak{t}^{\rm mod}_{\natural,{\rm reg}}$. Posons $\mathcal{Z}_{\natural,\mathcal{D}-{\rm reg},F} = (\mathfrak{t}^{\rm mod}_{\natural,\mathcal{D}-{\rm reg}}/W_\natural)^\Gamma$. L'application $\tilde{\eta}_F : \mathfrak{t}^{\rm mod}_{\natural,\mathcal{D}-{\rm reg}} \rightarrow \mathfrak{t}^{\rm mod}_{\rm reg}$ n'est en général pas Γ-équivariante, mais l'application $\mathfrak{t}^{\rm mod}_{\natural,\mathcal{D}-{\rm reg},F}/W_\natural \rightarrow \mathfrak{t}^{\rm mod}_{\rm reg}/W$ qui s'en déduit l'est. D'où une application $\eta_F : \mathcal{Z}_{\natural,\mathcal{D}-{\rm reg},F} \rightarrow \mathcal{Z}_F$.

L'application $\tilde{\tau}_F = \eta_{\tilde{\mathcal{Y}}}^{-1} \circ \tilde{\zeta}_F \circ \tilde{\eta}_F : \mathfrak{t}^{\rm mod}_{\natural,\mathcal{D}-{\rm reg},F} \rightarrow \tilde{\mathcal{Y}}$ est $W_\natural \rtimes \Gamma$-équivariante. Elle induit donc une application $\tau_F : \mathcal{Z}_{\natural,\mathcal{D}-{\rm reg},F} \rightarrow \mathcal{Y}$. D'après le lemme 8.3.1 de [W2], les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z}_{\natural,\mathcal{D}-{\rm reg},F} & \xrightarrow{\tau_F} & \mathcal{Y} \\ \downarrow \eta_F & & \downarrow \eta_{\mathcal{Y}} \\ \mathcal{Z}_F & \xrightarrow{\zeta_F} & \mathcal{Z} \end{array} \quad , \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{Z}_{\natural,\mathcal{D}-{\rm reg},F} & \xrightarrow{\tau_F} & \mathcal{Y} \\ \cap & & \downarrow \epsilon \\ \mathcal{Z}_{\natural,F} & \xrightarrow{\zeta_{\natural,F}} & \mathcal{Z}_\natural \end{array}$$

sont commutatifs (la commutativité du diagramme de gauche est immédiate). Et de la surjectivité de l'application ζ_F, on déduit que l'application τ_F est surjective ([W2] lemme 8.3.2).

Soit $z_{\natural,F} \in \mathcal{Z}_{\natural,\mathcal{D}-{\rm reg},F}$, et posons $z_F = \eta_F(z_{\natural,F})$. À $z_{\natural,F}$ est associée comme en 10.5 une classe de conjugaison stable $\mathcal{O}_{\rm st}(z_{\natural,F}) \subset {}_{D_\natural}\mathfrak{g}_\natural(F)_{\rm reg}$. Soient $Y \in \mathcal{O}_{\rm st}(z_{\natural,F}) \cap \mathfrak{g}_\natural(F)$ et $d \in D$. Langlands et Shelstad ont défini un *facteur de transfert* $\Delta_{dG(F),G_\natural(F)}(Y,\cdot)$, qui est une fonction sur ${}_d\mathfrak{g}(F)$ à support dans $\mathcal{O}_{\rm st}(z_F) \cap {}_d\mathfrak{g}(F)$. Plus précisément :

- Langlands et Shelstad ont défini le facteur de transfert pour les groupes [LS]. Il se descend aux algèbres de Lie (il y est d'ailleurs beaucoup plus simple que sur les groupes).

- Le facteur Δ_{IV} est supprimé ici puisqu'il a été incorporé dans la définition des intégrales orbitales.
- Le facteur de transfert n'est en général défini qu'à une constante près. Il est canoniquement défini dans le cas des groupes quasi-déployé moyennant le choix d'épinglages. Cette définition canonique s'étend à notre situation, puisque pour chaque $d \in D$, on dispose d'un cocycle $d_F \in \mathrm{Z}^1(\Theta, N_{\mathcal{C}}^{\mathrm{nr}})$ définissant le torseur intérieur ${}_d\xi : {}_dG \to G$.

On note simplement $\Delta(z_{\natural,F}, \cdot)$ la fonction sur $\mathcal{O}_{\mathrm{st}}(z_F)$ telle que pour chaque $d \in D$, la restriction de $\Delta(z_{\natural,F}, \cdot)$ à $\mathcal{O}_{\mathrm{st}}(z_F) \cap {}_d\mathfrak{g}(F)$ coïncide avec $\Delta_{{}_dG(F),G_\natural(F)}(Y, \cdot)$. Posons $y = \tau_F(z_{\natural,F})$ et $z = \zeta_F(z_F) = \eta_{\mathcal{Y}}(y)$. Alors le facteur de transfert $\Delta(z_{\natural,F}, \cdot)$ est donné par la formule suivante :

$$\Delta(z_{\natural,F}, X) = s_y(\delta_{z_F}(X)^{-1}) \qquad (X \in \mathcal{O}_{\mathrm{st}}(z_F)).$$

11.4. Pour $F \in \mathrm{CL}_q$, $z_{\natural,F} \in \mathcal{Z}_{\natural,\mathcal{D}-\mathrm{reg},F}$ et $f \in C_{\mathrm{c}}^\infty({}_D\mathfrak{g}(F))$, on définit l'*intégrale orbitale endoscopique* :

$$\Lambda^{{}_DG(F),G_\natural(F)}(f, z_{\natural,F}) = \sum_X \Delta(z_{\natural,F}, X)\Lambda^{G_\natural(F)}(f, X)$$

où X parcourt un système de représentants de $\mathrm{cl}(\eta_F(z_{\natural,F}))$ dans ${}_D\mathfrak{g}(F)$.

Proposition ([W2] prop. 9.1). — *Soit $y \in \mathcal{Y}$. Il existe une forme linéaire $\Lambda^{\mathcal{D},\mathcal{D}_\natural}(\cdot, y)$ sur $\mathcal{S}$ telle que pour tous $\varphi \in \mathcal{S}$, $F \in \mathrm{CL}_q$, et $z_{\natural,F} \in \mathcal{Z}_{\natural,\mathcal{D}-\mathrm{reg},F}$ tel que $\tau_F(z_{\natural,F}) = y$, on ait l'égalité*

$$\Lambda^{{}_DG(F),G_\natural(F)}(\mathrm{rea}_F(\varphi), z_{\natural,F}) = \Lambda^{\mathcal{D},\mathcal{D}_\natural}(\varphi, y).$$

Démonstration : Soit $z = \eta_{\mathcal{Y}}(y)$, et posons $\Lambda^{\mathcal{D},\mathcal{D}_\natural}(\cdot, y) = \sum_{\delta \in D_z} s_y(\delta^{-1})\Lambda^{\mathcal{D}}(\cdot, z, \delta)$. D'après le théorème 10.7 et la formule pour le facteur de transfert donnée en 11.3, cette forme linéaire convient. $\square$

Le triplet $(\mathcal{D}_\natural, \mathrm{id}, s)$ est une donnée endoscopique de $\mathcal{D}_\natural$. On peut donc, pour $F \in \mathrm{CL}_q$, $z_{\natural,F} \in \mathcal{Z}_{\natural,F}$ et $f_\natural \in C_{\mathrm{c}}^\infty({}_{D_\natural}\mathfrak{g}_\natural(F))$, définir comme ci-dessus l'intégrale orbitale endoscopique $\Lambda^{{}_{D_\natural}G_\natural(F),G_\natural(F)}(f_\natural, z_{\natural,F})$. Notons que la forme linéaire $\Lambda^{{}_{D_\natural}G_\natural(F),G_\natural(F)}(\cdot, z_{\natural,F})$ sur $C_{\mathrm{c}}^\infty({}_{D_\natural}\mathfrak{g}_\natural(F))$ dépend de l'élément s (même si ce dernier n'apparaît pas dans la notation). En fait, remplacer s par 1 revient à multiplier cette forme linéaire par un scalaire non nul sur chaque composante $C_{\mathrm{c}}^\infty({}_{d_\natural}G_\natural(F))$ pour $d_\natural \in D_\natural$.

Soient $f \in C_{\mathrm{c}}^\infty({}_D\mathfrak{g}(F))$ et $f_\natural \in C_{\mathrm{c}}^\infty({}_{D_\natural}\mathfrak{g}_\natural(F))$. On dit que $f_\natural$ *est un transfert de* f si pour tout $z_{\natural,F} \in \mathcal{Z}_{\natural,\mathcal{D}-\mathrm{reg},F}$, on a l'égalité $\Lambda^{{}_{D_\natural}G_\natural(F),G_\natural(F)}(f_\natural, z_{\natural,F}) = \Lambda^{{}_DG(F),G_\natural(F)}(f, z_{\natural,F})$.

Corollaire ([W2] cor. 9.2). — *Soient $\varphi \in \mathcal{S}$, $\varphi_\natural \in \mathcal{S}_\natural$, et F, $F' \in \mathrm{CL}_q$. Alors $\mathrm{rea}_{\natural,F}(\varphi_\natural)$ est un transfert de $\mathrm{rea}_F(\varphi)$ si et seulement si $\mathrm{rea}_{\natural,F'}(\varphi_\natural)$ est un transfert de $\mathrm{rea}_{F'}(\varphi)$.*

Démonstration : Remplaçons $\mathcal{D}$ par $\mathcal{D}_\natural$ dans les constructions précédentes : on a $\mathcal{Z}_{\natural,\mathcal{D}_\natural-\mathrm{reg},F} = \mathcal{Z}_{\natural,F}$, $\mathcal{Y}_\natural = \mathcal{Z}_\natural$, et l'application $\tau_{\natural,F} : \mathcal{Z}_{\natural,F} \to \mathcal{Z}_\natural$ coïncide avec $\zeta_{\natural,F}$. Pour $z_\natural \in \mathcal{Z}_\natural$, on dispose donc d'une forme linéaire $\Lambda^{\mathcal{D}_\natural,\mathcal{D}_\natural}(\cdot, z_\natural)$ sur $\mathcal{S}_\natural$. Soit $z_{\natural,F} \in \mathcal{Z}_{\natural,\mathcal{D}-\mathrm{reg},F}$, et posons $y = \tau_F(z_{\natural,F})$. On a les égalités

$$\Lambda^{{}_DG(F),G_\natural(F)}(\mathrm{rea}_F(\varphi), z_{\natural,F}) = \Lambda^{\mathcal{D},\mathcal{D}_\natural}(\varphi, y)$$

et

$$\Lambda^{{}_{D_\natural}G_\natural(F),G_\natural(F)}(\mathrm{rea}_F(\varphi_\natural), z_{\natural,F}) = \Lambda^{\mathcal{D}_\natural,\mathcal{D}_\natural}(\varphi_\natural, \zeta_{\natural,F}(z_{\natural,F}))$$

avec $\zeta_{\natural,F}(z_{\natural,F}) = \epsilon(y)$ (cf. 11.3). Puisque l'application τ_F est surjective, $\mathrm{rea}_{\natural,F}(\varphi_\natural)$ est un transfert de $\mathrm{rea}_F(\varphi)$ si et seulement si pour tout $y \in \mathcal{Y}$, on a l'égalité $\Lambda^{\mathcal{D}_\natural,\mathcal{D}_\natural}(\varphi_\natural, \epsilon(y)) = \Lambda^{\mathcal{D},\mathcal{D}_\natural}(\varphi, y)$. D'où le corollaire, puisque cette seconde condition ne dépend pas de F. ∎

11.5. Supposons les données $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}_\natural$ non ramifiées, c'est-à-dire telles que I opère trivialement. Le groupe $(\mathrm{X}_*/\mathrm{X}_{*,\mathrm{sc}})_{\Gamma,\mathrm{tor}}$ contient l'élément 0, représenté par le cocycle trivial $d_0 \in D$. Le point $v = 0$ appartient à ${}_{d_0}W$, et est hyperspécial. Notons $\phi_0 \in {}_{d_0}\Phi$ la facette contenant $(0,0)$, et $\varphi_0 \in {}_{d_0}\mathcal{S}_{\phi_0}$ la fonction constante égale à $|{}_{d_0}\underline{G}_0^\Theta|^{-1} q^{\frac{1}{2}\dim({}_{d_0}\underline{G}_0)}$ sur ${}_{d_0}\underline{\mathfrak{g}}_{\phi_0}^\Theta$. Pour $F \in \mathrm{CL}_q$, on pose $f_{F,0} = \mathrm{rea}_F(\varphi_0)$; c'est la fonction caractéristique du réseau hyperspécial ${}_{d_0}\mathfrak{g}(F)_{\phi_0} \subset {}_{d_0}\mathfrak{g}(F)$ multipliée par une constante > 0. On considère $f_{F,0}$ comme un élément de ${}_D\mathfrak{g}(F)$ dont la restriction à ${}_d\mathfrak{g}(F)$ pour $d \neq d_0$, est nulle. On définit de la même manière la fonction $\varphi_{\natural,0} \in {}_{d_{\natural,0}}\mathcal{S}_{\natural,\phi_{\natural,0}}$, et pour $F \in \mathrm{CL}_q$, la fonction $f_{\natural,F,0} \in C_\mathrm{c}^\infty({}_{D_\natural}\mathfrak{g}_\natural(F))$.

Pour $F \in \mathrm{CL}_q$, le "lemme fondamental pour les algèbres de Lie" est l'assertion suivante : $f_{\natural,F,0}$ est un transfert de $f_{F,0}$. En appliquant le corollaire 11.4 au couple $(\varphi_{\natural,F,0}, \varphi_{F,0})$, on obtient le

Corollaire ([W2] cor. 9.3). — *Soient F, $F' \in \mathrm{CL}_q$. Alors le lemme fondamental pour les algèbres de Lie est vrai pour F si et seulement s'il est vrai pour F'.*

Références

[D] DEBACKER S., *Parametrizing nilpotent orbits via Bruhat-Tits theory*, Annals of Math. **156** (2002), 295-332.

[KM] KIM J., MURNAGHAN F., *Character expansions and unrefined minimal K-types*, Amer. J. Math. **125** (2003), 409-481.

[K1] KOTTWITZ R., *Tamagawa numbers*, Annals Math. **127** (1988), 629-646.

[K2] KOTTWITZ R., *Isocrystals with additional structures II*, Compositio Math. **109** (1997), 255–339.

[L] LEMAIRE B., *Sous-groupes parahoriques d'un groupe réductif p-adique et descente galoisienne ramifiée*, manuscrit.

[LS] LANGLANDS R., SHELSTAD D., *On the definition of transfert factors*, Math. Ann. **278** (1987), 219-271.

[Sp] SPRINGER T., *Linear algebraic groups*, Progress in Math. **9**, Birkhauser, 1981.

[W1] WALDSPURGER J.-L., *Le lemme fondamental implique le transfert*, Compositio Math. **105** (1997), 153-236.

[W2] WALDSPURGER J.-L., *Endoscopie et changement de caractéristique*, prépublication.