A propos du lemme fondamental tordu

J.-L. Waldspurger

7 décembre 2007

1 Introduction

On présente une preuve de l'assertion suivante : le lemme fondamental "tordu" résulte du lemme fondamental pour les algèbres de Lie et d'un lemme que nous appelons lemme fondamental non standard. Ces différents lemmes seront énoncés précisément dans la section 3. Disons tout de suite que ce que nous appelons ici lemme fondamental "tordu" devrait plutôt être appelé lemme fondamental "tordu" pour les unités des algèbres de Hecke. Par ailleurs, Ngo Bao Chau a récemment démontré à la fois le lemme fondamental pour les algèbres de Lie et le lemme fondamental non standard. Le bilan est que le lemme fondamental "tordu", au sens où nous l'entendons, est vrai.

Le présent article est pour l'essentiel extrait de l'article [W1]. La preuve donnée dans cette référence est presque entièrement reproduite ici. Par contre, on passe plus rapidement sur certains préliminaires (fonction exponentielle, sous-groupes hyperspéciaux, normalisation des mesures etc...). On renvoie pour les détails à [W1] ou à des articles plus généraux de théorie des groupes. De même, plusieurs propriétés ne sont vérifiées que si p est grand. On indique une borne précise en 2.7, mais on ne cherchera pas à la justifier. Dans [W1], on se préoccupait non seulement du lemme fondamental, mais aussi du transfert, ce qui conduisait à considérer une situation parfaitement générale. Se limiter au lemme fondamental simplifie sensiblement la situation : les groupes de départ sont non ramifiés et on n'a à considérer que des éléments "compacts" de ces groupes, c'est-à-dire des éléments qui engendrent des sous-groupes relativement compacts. Cela permet parfois de simplifier les preuves, ce que l'on a tenté de faire. On a ajouté quelques exemples. En particulier, dans la section 5, on considère en détail le cas du changement de base pour les groupes unitaires.

2 La situation

2.1 Corps locaux

Soit F un corps local non archimédien de caractéristique nulle. On note $\mathfrak{o}$ son anneau d'entiers, $\mathbb{F}_q$ son corps résiduel, q le nombre d'éléments de $\mathbb{F}_q$ et p sa caractéristique, $||_F$ la valeur absolue usuelle de F. On fixe une clôture algébrique $\bar{F}$ de F, on note F^{nr} le plus grand sous-corps de $\bar{F}$ non ramifié sur F, $\bar{\mathbb{F}}_q$ son corps résiduel, $\mathfrak{o}_{\bar{F}}$ et $\mathfrak{o}_{F^{nr}}$ les anneaux d'entiers de $\bar{F}$ et F^{nr}. On prolonge $||_F$ en une valeur absolue sur $\bar{F}$, à valeurs dans $\mathbb{Q}$. On note Γ, resp. Γ^{nr}, le groupe de Galois de l'extension $\bar{F}$ sur F, resp. F^{nr} sur F. Le groupe Γ^{nr} s'identifie au groupe de Galois de l'extension $\bar{\mathbb{F}}_q$ sur $\mathbb{F}_q$. Il est engendré topologiquement par l'élément de Frobenius, que l'on note ϕ. On note $W^{nr} \subset \Gamma^{nr}$ le sous-groupe formé des puissances entières de ϕ. Il y a une suite exacte :

$$1 \to I \to \Gamma \to \Gamma^{nr} \to 1$$

où I est le sous-groupe d'inertie. On note W le groupe de Weil de l'extension $\bar{F}$ sur F. Il y a une suite exacte :

$$1 \to I \to W \to W^{nr} \to 1.$$

On peut considérer W comme un sous-groupe de Γ, muni d'une topologie plus fine que la topologie induite.

On utilisera des notations similaires pour des extensions E de F, en les affectant d'un indice E (par exemple $\mathfrak{o}_E$, Γ_E etc...)

2.2 Groupes

Soit M un groupe agissant sur un ensemble X. Pour tout sous-ensemble $X' \subset X$, on note $Norm_M(X') = \{m \in M; m(X') \subset X'\}$ et $Z_M(X') = \{m \in M; \forall x \in X', m(x) = x\}$. Si $X' = \{x\}$, on pose simplement $Z_M(x) = Z_M(\{x\})$. Quand l'ensemble X ne sera pas précisé, il sera entendu que $X = M$ et que M agit par conjugaison. On note Z_M le centre de M.

Si θ est un automorphisme de M, on note M^θ le sous-groupe des points fixes. Si M est abélien, on pose $(1-\theta)(M) = \{m\theta(m)^{-1}; m \in M\}$ et $M_{/\theta} = M/(1-\theta)(M)$.

Si X est une variété algébrique définie sur un corps algébriquement clos k, on note encore X son groupe de points sur k, c'est-à-dire $X = X(k)$ (on fera toutefois quelques exceptions dans des cas ambigus). Soit M est un groupe algébrique défini sur k. On note M^0 sa composante neutre. Supposons que M agisse algébriquement sur la variété algébrique X. Pour $x \in X$, on pose $M_x = (Z_M(x))^0$.

2.3 Groupes réductifs

Soit G un groupe réductif connexe défini sur $\bar{F}$. On note $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie, G_{SC} le revêtement simplement connexe de son groupe dérivé, G_{AD} son groupe adjoint. Pour $g \in G$, on note g_{ad} son image dans G_{AD}. Par contre, pour $g \in G_{SC}$, on note simplement g son image dans G. Si H est un sous-groupe de G, on note H_{sc} l'image réciproque de H dans G_{SC} et H_{ad} l'image de H dans G_{AD}. Ces groupes dépendent du groupe ambiant G. Le groupe H_{sc}, resp. H_{ad}, n'a aucune raison d'être simplement connexe, resp. adjoint. Pour $g \in G$, on note int_g l'automorphisme intérieur de G associé à g, c'est-à-dire l'automorphisme $x \mapsto gxg^{-1}$. Cet automorphisme se relève en un automorphisme de G_{SC}, il se descend en un automorphisme de G_{AD} et définit par dérivation un automorphisme de $\mathfrak{g}$. On note encore int_g ces automorphismes. On notera aussi $X \mapsto gXg^{-1}$ celui de $\mathfrak{g}$. Ces automorphismes ne dépendent que de g_{ad} et, en fait, on peut aussi les définir pour $g \in G_{AD}$.

On appelle paire de Borel de G un couple (B, T) où B est un sous-groupe de Borel de G et T un sous-tore maximal de B. Considérons une telle paire. On note $X_*(T)$, resp. $X^*(T)$, le groupe des cocaractères, resp. des caractères, de T, $\Sigma \subset X^*(T)$ l'ensemble des racines de T dans $\mathfrak{g}$, $\check{\Sigma} \subset X_*(T)$ l'ensemble de coracines associé, $\Delta \subset \Sigma$ et $\check{\Delta} \subset \check{\Sigma}$ les ensembles de racines et coracines simples définis par B. Pour $\alpha \in \Sigma$, on note $\mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{g}$ la droite radicielle correspondante. Un épinglage relatif à (B, T) est une famille $(E_\alpha)_{\alpha \in \Delta}$

où, pour tout $\alpha \in \Delta$, E_α est un élément non nul de $\mathfrak{g}_\alpha$. On appelle paire de Borel épinglée une famille $(B, T, (E_\alpha)_{\alpha\in\Delta})$ d'objets comme ci-dessus.

Supposons G défini sur F. On dit qu'une paire de Borel (B, T) est définie sur F si B et T le sont. Si c'est le cas, Γ agit sur $X^*(T)$ en préservant Σ et Δ. On dit qu'une paire de Borel épinglée $(B, T, (E_\alpha)_{\alpha\in\Delta})$ est définie sur F si (B, T) l'est et si, de plus, $\sigma(E_\alpha) = E_{\sigma(\alpha)}$ pour tous $\sigma \in \Gamma$ et $\alpha \in \Delta$. L'ensemble des paires de Borel épingées définies sur F n'est pas vide et forme une seule classe de conjugaison par $G_{AD}(F)$.

On utilisera des notations similaires si le corps de base F est remplacé par $\mathbb{F}_q$ et la clôture algébrique $\bar{F}$ est remplacée par $\bar{\mathbb{F}}_q$.

2.4 Eléments compacts, tores non ramifiés

Soit M un groupe algébrique défini sur F, de composante neutre M^0 réductive. Pour $x \in M(F)$, on dit que x est compact si le sous-groupe qu'il engendre est d'adhérence compacte dans $M(F)$. On dit que x est topologiquement unipotent si $lim_{n\to\infty} x^{p^n} = 1$. On note $M(F)_c$, resp. $M(F)_{tu}$, le sous-ensemble des éléments compacts, resp. topologiquement unipotents, de $M(F)$. Remarquons que, si M/M^0 est d'ordre premier à p, tout élément de $M(F)_{tu}$ appartient à $M^0(F)$. On note $M(F)_{p'}$ le sous-ensemble des éléments de $M(F)$ d'ordre fini premier à p. Si M est abélien, ces sous-ensembles sont des sous-groupes. Tout élément $x \in M(F)_c$ se décompose de façon unique en produit $x = x_{tu}x_{p'}$, où $x_{tu} \in M(F)_{tu}$, $x_{p'} \in M(F)_{p'}$ et ces deux éléments commutent entre eux. De plus, ces deux éléments appartiennent à l'adhérence du sous-groupe engendré par x.

Puisque M est réunion des $M(E)$ quand E parcourt les extensions finies de F contenues dans $\bar{F}$, on n'a aucun mal à remplacer $M(F)$ par M dans les définitions et résultats ci-dessus.

Quand M est le groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m$, on a $M(F) = F^\times$ et $M(F)_c = \mathfrak{o}^\times$. Le groupe $M(F)_{tu}$ est le sous-groupe $\mathfrak{o}^\times_{tu}$ des éléments de $\mathfrak{o}^\times$ dont la réduction dans $\mathbb{F}_q$ est égale à 1. Le groupe $M(F)_{p'} = \mathfrak{o}^\times_{p'}$ est d'ordre $q-1$ et l'application de réduction l'identifie à $\mathbb{F}_q^\times$.

Soit T un tore défini sur F et non ramifié, c'est-à-dire déployé sur F^{nr}. On a $T(F^{nr}) = X_*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} F^{nr,\times}$ et $T(F) = T(F^{nr})^{\Gamma^{nr}}$. Le tore T possède une structure de schéma en groupes lisse sur $\mathfrak{o}$, pour laquelle $T(\mathfrak{o}_{F^{nr}}) = X_*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathfrak{o}^\times_{F^{nr}}$ et $T(\mathfrak{o}) = T(\mathfrak{o}_{F^{nr}})^{\Gamma^{nr}}$. On a les égalités :

$$T(F^{nr})_c = T(\mathfrak{o}_{F^{nr}}),\ T(F^{nr})_{tu} = X_*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathfrak{o}^\times_{F^{nr},tu},\ T(F^{nr})_{p'} = X_*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathfrak{o}^\times_{F^{nr},p'},$$

$$T(F)_c = T(\mathfrak{o}),\ T(F)_{tu} = T(F^{nr})^{\Gamma^{nr}}_{tu},\ T(F)_{p'} = T(F^{nr})^{\Gamma^{nr}}_{p'}.$$

Fixons une uniformisante ϖ de F et notons $T_\varpi = X_*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \varpi^{\mathbb{Z}}$. Les applications produits :

$$T(\mathfrak{o}_{F^{nr}}) \times T_\varpi \to T(F^{nr}),\ T(\mathfrak{o}) \times T_\varpi^{\Gamma^{nr}} \to T(F)$$

sont des isomorphismes.

On a $T_{p'} = X_*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathfrak{o}^\times_{\bar{F},p'}$. Mais $\mathfrak{o}^\times_{\bar{F},p'} = \mathfrak{o}^\times_{F^{nr},p'}$, car extraire des racines d'ordre premier à p ne crée que des extensions non ramifiées. Donc $T_{p'} = T(F^{nr})_{p'} = T(\mathfrak{o}_{F^{nr}})_{p'}$.

La fibre spéciale $\mathbf{T}$ du schéma en groupes est le tore sur $\mathbb{F}_q$ de groupe de cocaractères $X_*(T)$. L'application de réduction identifie $T(\mathfrak{o}_{F^{nr}})_{p'}$ à $\mathbf{T}(\bar{\mathbb{F}}_q)$ et $T(\mathfrak{o})_{p'}$ à $\mathbf{T}(\mathbb{F}_q)$.

2.5 Sous-groupes hyperspéciaux

Soit G un groupe réductif connexe défini sur F. On suppose G non ramifié, c'est-à-dire quasi-déployé sur F et déployé sur une extension non ramifiée de F. A la suite de Bruhat et Tits, on introduit l'immeuble $Imm(G,F)$ de G sur F et la notion de point hyperspécial de cet immeuble ([T] 1.11.2). Le groupe $G(F)$ agit sur l'immeuble. Le fixateur d'un point hyperspécial est un sous-groupe ouvert compact de $G(F)$ que l'on appelle sous-groupe hyperspécial. A un sous-groupe hyperspécial K est attaché un schéma en groupes lisse G_K sur $\mathfrak{o}$, de fibre générique G, tel que $G_K(\mathfrak{o}) = K$. Ce schéma en groupes possède une algèbre de Lie $\mathfrak{g}_K$. Le réseau $\mathfrak{k} = \mathfrak{g}_K(\mathfrak{o}) \subset \mathfrak{g}(F)$ est dit lui-aussi hyperspécial. Si E est une extension non ramifiée de F, on pose $K_E = G_K(\mathfrak{o}_E)$ et $\mathfrak{k}_E = \mathfrak{g}_K(\mathfrak{o}_E)$. Dans le cas où $E = F^{nr}$, on pose simplement $K^{nr} = K_{F^{nr}}$ et $\mathfrak{k}^{nr} = \mathfrak{k}_{F^{nr}}$. On note $\mathbf{G}_K$ et $\boldsymbol{\mathfrak{g}}_K$ les fibres spéciales de G_K et $\mathfrak{g}_K$.

Soit $(B,T,(E_\alpha)_{\alpha\in\Delta})$ une paire de Borel épinglée de G définie sur F. Elle détermine un sous-groupe hyperspécial K, caractérisé de la façon suivante. Soit $\alpha \in \Delta$. On peut identifier $\check{\alpha} \in X_*(T)$ à un élément de $\mathfrak{t}$. Il existe un unique $E_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tel que le $(E_\alpha, \check{\alpha}, E_{-\alpha})$ forme un $\mathfrak{sl}_2$-triplet. De E_α et $E_{-\alpha}$ se déduisent des homomorphismes e_α et $e_{-\alpha}$ du groupe additif $\mathbb{G}_a$ dans G (les dérivés de ces homomorphismes envoient 1 sur E_α et $E_{-\alpha}$). Alors K^{nr} est le sous-groupe de $G(F^{nr})$ engendré par $T(\mathfrak{o}_{F^{nr}})$ et les sous-groupes $e_\alpha(\mathfrak{o}_{F^{nr}})$ et $e_{-\alpha}(\mathfrak{o}_{F^{nr}})$ pour $\alpha \in \Delta$. On a $K = K^{nr,\Gamma^{nr}}$.

Inversement, soit K un sous-groupe hyperspécial. Soit T_0 un sous-tore déployé maximal de G tel que K fixe un point hyperspécial de l'appartement de $Imm(G,F)$ associé à T_0. Soit $T = Z_G(T_0)$. Complétons T en une paire de Borel (B,T) de G définie sur F. Alors on peut choisir un épinglage $(E_\alpha)_{\alpha\in\Delta}$ relatif à cette paire de sorte que la paire de Borel épinglée $(B,T,(E_\alpha)_{\alpha\in\Delta})$ soit définie sur F et que le sous-groupe hyperspécial qu'on lui associe comme ci-dessus soit K.

Les sous-groupes hyperspéciaux de $G(F)$ forment une seule classe de conjugaison par $G_{AD}(F)$. Soit K un tel sous-groupe. Le normalisateur de K dans $G(F)$ est égal à $Z_G(F)K$. L'image réciproque K_{sc} de K dans $G_{SC}(F)$, resp. l'image K_{ad} de K dans $G_{AD}(F)$, est un sous-groupe hyperspécial de $G_{SC}(F)$, resp. $G_{AD}(F)$.

2.6 L'exponentielle

Soit G un groupe réductif connexe défini sur F. On note $dim(G)$ sa dimension et $rang(G)$ la dimension d'un sous-tore maximal de G. Notons ϕ la fonction indicatrice d'Euler et, pour tout entier $n \geq 1$, $\psi(n)$ le plus grand entier d tel que $\phi(d) \leq n$. On pose :

$$N(G) = sup(\psi(rang(G)), dim(G)).$$

Notons e_F l'indice de ramification de F sur $\mathbb{Q}_p$. On suppose :

(1) $p > N(G)e_F + 1$.

Soit $X \in \mathfrak{g}(F)$. Notons X_s sa partie semi-simple et T le plus grand tore central dans le commutant G_{X_s} de X_s. On a $X_s \in \mathfrak{t}(F)$. Tout élément de $X^*(T)$ définit une forme linéaire sur $\mathfrak{t}$, à valeurs dans $\bar{F}$. On dit que X est topologiquement nilpotent si et seulement si $|x^*(X)|_F < 1$ pour tout $x^* \in X^*(T)$. On note $\mathfrak{g}(F)_{tn}$ le sous-ensemble des éléments topologiquement nilpotents de $\mathfrak{g}(F)$.

On sait définir l'exponentielle sur un voisinage de 0 dans $\mathfrak{g}(F)$, à valeurs dans un voisinage de 1 dans $G(F)$. Grâce à l'hypothèse (1), on peut prendre pour voisinage de 0 l'ensemble $\mathfrak{g}(F)_{tn}$. L'application ainsi définie, notée exp, prend ses valeurs dans $G(F)_{tu}$ et est un homéomorphisme de $\mathfrak{g}(F)_{tn}$ sur $G(F)_{tu}$. Elle possède toutes les propriétés usuelles. Par exemple, si $X \in \mathfrak{g}(F)_{tn}$ et $g \in G(F)$, on a l'égalité $exp(gXg^{-1}) = gexp(X)g^{-1}$. Si H est un sous-groupe algébrique de G, l'exponentielle se restreint à $\mathfrak{h}(F)_{tn}$ en l'exponentielle relative à ce groupe.

Supposons de plus G non ramifié, soient K un sous-groupe hyperspécial de $G(F)$ et $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}(F)$ le réseau hyperspécial associé. Pour $X \in \mathfrak{g}(F)_{tn}$, on a $X \in \mathfrak{k}$ si et seulement si $exp(X) \in K$.

2.7 Groupes tordus

On introduit dans ce paragraphe la partie p-adique des données que nous conserverons dans la suite de l'article. Soit G un groupe réductif connexe défini sur F. On suppose :

(Hyp1) $p > N(G)e_F + 1$;

(Hyp2) G est non ramifié.

On fixe un sous-groupe hyperspécial K de $G(F)$. Soit θ un automorphisme de G défini sur F. On suppose :

(Hyp3) $\theta(K) = K$.

A la suite de Labesse, on introduit l'espace tordu $\tilde{G}$. C'est une variété algébrique définie sur F, isomorphe à G par un isomorphisme noté $g \mapsto g\theta$. Le groupe G agit à droite et à gauche sur $\tilde{G}$, ces actions étant définies par $g_1(g\theta)g_2 = g_1 g\theta(g_2)\theta$. Pour $g \in G$, on note encore int_g l'automorphisme $\delta \mapsto g\delta g^{-1}$ de $\tilde{G}$ et on utilise les notations de 2.2 pour cette action de G sur $\tilde{G}$ (par exemple, pour $\delta \in \tilde{G}$, on définit son commutant $Z_G(\delta)$ dans G et la composante neutre G_δ de celui-ci). On peut aussi considérer que tout élément de $\tilde{G}$ agit sur G : l'élément $\delta = g\theta$ agit par $aut_\delta = int_g \circ \theta$. On définit le sous-ensemble $\tilde{K} = K\theta \subset \tilde{G}(F)$. Pour tout $\delta \in \tilde{K}$, aut_δ conserve K.

Fixons une paire de Borel épinglée $(B, T, (E_\alpha)_{\alpha \in \Delta})$ de G, définie sur F, dont K soit le sous-groupe hyperspécial associé. Son image par θ est encore une paire de Borel épinglée définie sur F. Il y a donc un élément de $G_{AD}(F)$ dont l'automorphisme intérieur associé envoie cette paire image sur la paire de départ. Relevons cet élément en un élément $g_\theta \in G_{SC}$. On pose $\theta^* = int_{g_\theta} \circ \theta$. C'est un automorphisme de G, défini sur F, qui conserve la paire de Borel épinglée. On suppose :

(Hyp4) θ^* est d'ordre fini.

Remarquons que cette hypothèse est automatiquement vérifiée si G est semi-simple puisqu'alors, tout automorphisme conservant la paire de Borel épinglée est uniquement déterminé par la permutation de Δ qu'il induit.

On montre que l'hypothèse (Hyp1) entraîne que θ^* est d'ordre premier à p. Il en est de même de l'ordre de $Z_{G_{SC}}$. Cela entraîne que $Z_{G_{SC}} \subset G_{SC}(F^{nr})$, car $Z_{G_{SC}} \subset T_{sc,p'} = T_{sc}(\mathfrak{o}_{F^{nr}})_{p'}$.

Puisque θ^* conserve la paire de Borel épinglée, il conserve aussi K. Donc int_{g_θ} conserve K, ce qui implique $g_{\theta,ad} \in K_{ad}$. On a :

(1) l'homomorphisme $K_{sc}^{nr} \to K_{ad}^{nr}$ est surjectif.

Fixons une uniformisante ϖ de F. Soit E une extension non ramifiée de F. Le groupe K_E est muni d'une filtration naturelle $(K_E(n))_{n \in \mathbb{N}}$ par des sous-groupes distingués. Pour $n = 0$, $K_E(0) = K_E$; pour $n \geq 1$, $K_E = exp(\varpi^n \mathfrak{k}_E)$. De même, les groupes $K_{sc,E}$ et $K_{ad,E}$ sont filtrés. Appliquons cela à $E = F^{nr}$. L'application (1) est compatible aux filtrations. Il suffit de prouver que sa restriction :

$$(2) \qquad K_{sc}^{nr}(1) \to K_{ad}^{nr}(1)$$

est surjective et qu'il en est de même de l'homomorphisme :

$$K_{sc}^{nr}/K_{sc}^{nr}(1) \to K_{ad}^{nr}/K_{ad}^{nr}(1).$$

Ce dernier s'identifie à l'homorphisme :

$$\mathbf{G}_{K,SC}(\bar{\mathbb{F}}_q) \to \mathbf{G}_{K,AD}(\bar{\mathbb{F}}_q),$$

où $\mathbf{G}_{K,SC}$ et $\mathbf{G}_{K,AD}$ sont les fibres spéciales des schémas en groupes associés à K_{sc} et K_{ad}. L'homomorphisme est surjectif car $\mathbf{G}_{K,AD}$ est le groupe adjoint de $\mathbf{G}_{K,SC}$. Pour prouver que (2) est surjectif, il suffit de prouver que, pour toute extension E de F, finie et non ramifiée, l'homomorphisme analogue :

$$K_{sc,E}(1) \to K_{ad,E}(1)$$

est surjectif. Puisque E est une extension finie de F, les groupes en question sont complets et il suffit de prouver que, pour tout $n \geq 1$, l'homomorphisme gradué :

$$K_{sc,E}(n)/K_{sc,E}(n+1) \to K_{ad,E}(n)/K_{ad,E}(n+1)$$

est surjectif. Il s'identifie à l'homomorphisme :

$$\mathfrak{g}_{K,SC}(\mathbb{F}_{q_E}) \to \mathfrak{g}_{K,AD}(\mathbb{F}_{q_E}),$$

où $\mathbb{F}_{q_E}$ est le corps résiduel de E. Sous l'hypothèse (Hyp1), l'homomorphisme $\mathbf{G}_{K,SC} \to \mathbf{G}_{K,AD}$ est surjectif et lisse et la surjectivité cherchée s'ensuit. Cela prouve (1).

Il en résulte que $g_\theta \in K_{sc}^{nr}$. Pour $\sigma \in \Gamma$, on pose $z(\sigma) = g_\theta \sigma(g_\theta)^{-1}$. Alors z est un cocycle de Γ dans $Z_{G_{SC}}$. Il est trivial sur le groupe d'inertie I et on peut aussi bien considérer qu'il est défini sur Γ^{nr}.

Notons Θ^* le groupe d'automorphismes de G engendré par θ^*, introduisons le groupe non connexe $G^+ = G \rtimes \Theta^*$. On considère G^+ comme un groupe algébrique défini sur F, les éléments de Θ^* étant tous dans $G^+(F)$. La composante $G\theta^* \subset G^+$ est un espace tordu comme ci-dessus. Les deux espaces tordus $\tilde{G}$ et $G\theta^*$ sont isomorphes sur F^{nr}, par l'isomorphisme :

$$\begin{array}{cccc} \tilde{\psi}: & \tilde{G} & \to & G\theta^* \\ & g\theta & \mapsto & gg_\theta^{-1}\theta^* \end{array}.$$

Ils ne sont en général pas isomorphes sur F. Pour $\sigma \in \Gamma$ et $\delta \in \tilde{G}$, on a la relation $\tilde{\psi} \circ \sigma(\delta) = z(\sigma)^{-1}\sigma \circ \tilde{\psi}(\delta)$. Pour alléger la notation, on va oublier $\tilde{\psi}$. On considère désormais $\tilde{G}$ comme étant égal à $G\theta^*$, mais muni d'une action galoisienne tordue par le cocycle z selon la formule précédente.

Soit $\boldsymbol{\omega}$ un caractère de $G(F)$ (c'est-à-dire un homomorphisme continu de $G(F)$ dans $\mathbb{C}^\times$). D'après Langlands, le groupe des caractères de $G(F)$ est en bijection avec $H^1(W, Z_{\hat{G}})$, où $\hat{G}$ est le groupe dual de G. Soit $\mathbf{a}_{\boldsymbol{\omega}}$ l'élément de $H^1(W, Z_{\hat{G}})$ correspondant à $\boldsymbol{\omega}$. On suppose :

(Hyp5) $\mathbf{a}_{\boldsymbol{\omega}}$ provient par inflation d'un élément de $H^1(W^{nr}, Z_{\hat{G}})$.

On montre en [W1] 4.1(1) que cette condition entraîne que $\boldsymbol{\omega}$ est trivial sur K. En fait, la preuve montre que ces deux conditions sont équivalentes.

2.8 Exemples

Exemple 1. On considère $G = SL_2$, $K = SL_2(\mathfrak{o})$, $\boldsymbol{\omega} = 1$. Soit $\alpha \in \mathfrak{o}_{F^{nr}}^\times$ tel que $\alpha^2 \in F^\times$. On pose $\theta = int_{g_\theta}^{-1}$, où :

$$g_\theta = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}.$$

Ces données vérifient les conditions requises. On a $\theta^*=1$. Remarquons que, si $\alpha\not\in F^\times$, les espaces tordus $\tilde{G}$ et $G\theta^*$ ne sont pas isomorphes sur F.

Exemple 2. On considère $G=GL_n$, $K=GL_n(\mathfrak{o})$, $\theta=1$ et $\boldsymbol{\omega}=\chi\circ det$, où χ est un caractère non ramifié de $F^\times$ d'ordre divisant n.

Exemple 3. On considère $G=GL_n$, $K=GL_n(\mathfrak{o})$, $\boldsymbol{\omega}=1$ et θ est défini par la formule :

$$\theta(g)=\Phi^t g^{-1}\Phi^{-1},$$

où :

$$\Phi=\begin{pmatrix} & & & & 1\\ & & & -1 & \\ & & \cdot & & \\ & \cdot & & & \\ (-1)^{n+1} & & & & \end{pmatrix}.$$

On prend pour B le groupe triangulaire supérieur, pour T le tore diagonal et pour épinglage l'épinglage "évident", c'est-à-dire celui pour lequel tout E_α est une matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf un seul, qui vaut 1. Alors $\theta=\theta^*$.

2.9 Données endoscopiques

Introduisons le groupe dual $\hat{G}$ et le L-groupe ${}^LG=\hat{G}\rtimes W$. On munit $\hat{G}$ d'une paire de Borel épinglée $(\hat{B},\hat{T},(\hat{E}_{\hat{\alpha}})_{\hat{\alpha}\in\hat{\Delta}})$ conservée par l'action de Γ. Une telle paire existe par définition de $\hat{G}$. Il y a des isomorphismes en dualité $j:X_*(T)\to X^*(\hat{T})$ et $\hat{j}:X_*(\hat{T})\to X^*(T)$, qui sont équivariants pour les actions de Γ et identifient les racines de T avec les coracines de $\hat{T}$ et vice-versa. On introduit l'automorphisme $\hat{\theta}$ de $\hat{G}$ qui conserve la paire de Borel épinglée et vérifie les relations équivalentes $j\circ\theta=\hat{\theta}^{-1}\circ j$, $\hat{j}\circ\hat{\theta}=\theta^{-1}\circ\hat{j}$. On prolonge $\hat{\theta}$ en un automorphisme de ${}^LG$ qui agit par l'identité sur W. On peut introduire les espaces tordus $\hat{G}\hat{\theta}$ ou ${}^LG\hat{\theta}$ sur lesquels $\hat{G}$ agit à droite et à gauche. Cela permet d'utiliser les notations introduites en 2.2 et 2.7 pour l'action par conjugaison de $\hat{G}$ sur chacun de ces espaces tordus. Par exemple, pour $s\in\hat{G}$, on note $\hat{G}_{s\hat{\theta}}$ la composante neutre du groupe $Z_{\hat{G}}(s\hat{\theta})=\{x\in\hat{G};xs\hat{\theta}(x)^{-1}=s\}$.

Une donnée endoscopique de $(G,\theta,\boldsymbol{\omega})$ est un quadruplet $(H,\mathcal{H},s,\hat{\xi})$ satisfaisant les conditions suivantes :

(1) H est un groupe réductif connexe quasi-déployé sur F ;

(2) $\mathcal{H}$ est une extension scindée de W par $\hat{H}$, de sorte que l'action de W sur $\hat{H}$ qui s'en déduit coïncide avec celle qui provient de la structure sur F de H ;

(3) $s\in\hat{G}$ est un élément tel que l'automorphisme $int_s\circ\hat{\theta}$ de $\hat{G}$ soit semi-simple, c'est-à-dire préserve une paire de Borel ;

(4) $\hat{\xi}:\mathcal{H}\to{}^LG$ est un homomorphisme continu et injectif, commutant aux projections sur W ;

(5) $\hat{\xi}$ se restreint en un isomorphisme de $\hat{H}$ sur $\hat{G}_{s\hat{\theta}}$;

(6) il existe un cocycle $a:W\to Z_{\hat{G}}$, dont la classe est $\mathbf{a}_{\boldsymbol{\omega}}$, tel que l'on ait l'égalité $int_s\circ\hat{\theta}\circ\hat{\xi}(\hat{h})=a(\hat{h})\hat{\xi}(\hat{h})$ pour tout $\hat{h}\in\mathcal{H}$, où, si $w\in W$ est la projection de $\hat{h}$, on a posé $a(\hat{h})=a(w)$.

Un isomorphisme entre deux données $(H_1,\mathcal{H}_1,s_1,\hat{\xi}_1)$ et $(H_2,\mathcal{H}_2,s_2,\hat{\xi}_2)$ est un élément $x\in\hat{G}$ tel que $int_x\circ\hat{\xi}_1(\mathcal{H}_1)=\hat{\xi}_2(\mathcal{H}_2)$ et $xs_1\hat{\theta}(x)^{-1}\in Z_{\hat{G}}s_2$.

On dit que la donnée endoscopique $(H,\mathcal{H},s,\hat{\xi})$ est non ramifiée si elle vérifie les conditions supplémentaires :

(7) H est non ramifié sur F ;

(8) $\mathcal{H} = {}^L H$;

(9) $\hat{\xi}$ est l'identité sur le groupe d'inertie I.

On fixe pour la suite de l'article une donnée endoscopique $(H, \mathcal{H}, s, \hat{\xi})$ de $(G, \theta, \boldsymbol{\omega})$. On suppose :

(Hyp6) cette donnée est non ramifiée.

On fixe une paire de Borel épinglée $(B_H, T_H, (E_{H,\alpha})_{\alpha \in \Delta_H})$ de H, définie sur F, et une paire de Borel $(\hat{B}_H, \hat{T}_H)$ de $\hat{H}$, conservée par l'action de Γ. Il existe un élément $x \in \hat{G}$ tel que $xs\hat{\theta}(x)^{-1} \in \hat{T}$, $int_x \circ \hat{\xi}(\hat{T}_H) = \hat{T}^{\hat{\theta},0}$ et $int_x \circ \hat{\xi}(\hat{B}_H) = \hat{B} \cap int_x \circ \hat{\xi}(\hat{H})$. On peut remplacer notre donnée endoscopique par la donnée $(H, {}^L H, xs\hat{\theta}(x)^{-1}, int_x \circ \hat{\xi})$. En oubliant la donnée initiale, on est ramené au cas où sont vérifiées les hypothèses supplémentaires :

(10) $s \in \hat{T}$;

(11) $\hat{\xi}(\hat{T}_H) = \hat{T}^{\hat{\theta},0}$, $\hat{\xi}(\hat{B}_H) = \hat{B} \cap \hat{H}$.

On suppose désormais ces hypothèses vérifiées. On peut montrer que nos résultats ultérieurs ne dépendent pas du choix de l'élément x ci-dessus.

L'isomorphisme $\hat{\xi}$ de $\hat{T}_H$ sur $\hat{T}^{\hat{\theta},0}$ se dualise en un isomorphisme $\xi : T_{/\theta^*} \to T_H$. On note encore $\xi : T \to T_H$ le composé de cet isomorphisme et de la projection naturelle de T sur $T_{/\theta^*}$. Notons Ω le groupe de Weyl de G relatif à T et Ω_H celui de H relatif à T_H. Ces groupes s'identifient respectivement au groupe de Weyl de $\hat{G}$ relatif à $\hat{T}$ et à celui de $\hat{H}$ relatif à $\hat{T}_H$. De l'isomorphisme $\hat{\xi}$, ou de ξ, se déduit un plongement de Ω_H dans Ω^{θ^*}. Pour tout $\sigma \in \Gamma$, il existe un unique $\omega(\sigma) \in \Omega^{\theta^*}$ tel que l'on ait l'égalité sur $\hat{T}_H$:

$$\hat{\xi} \circ \sigma = \omega(\sigma) \circ \sigma \circ \hat{\xi}.$$

On a l'égalité équivalente sur T :

$$\sigma \circ \xi = \xi \circ \omega(\sigma) \circ \sigma.$$

L'application ω se factorise en une application définie sur Γ^{nr}. On vérifie que $\xi(Z_G) \subset Z_H$. D'après la relation précédente, la restriction de ξ à Z_G est équivariante pour les actions de Γ. Pour $\sigma \in \Gamma$, posons $z_H(\sigma) = \xi \circ z(\sigma)$. On introduit une variété H_z : c'est la variété algébrique sur F telle qu'il existe un isomorphisme $\psi_z : H_z \to H$ défini sur $\bar{F}$, de sorte que, pour tous $\sigma \in \Gamma$ et $h \in H_z$, on ait l'égalité $\psi_z \circ \sigma(h) = z_H(\sigma)^{-1}\sigma \circ \psi_z(h)$. En fait, ψ_z est défini sur F^{nr}. Pour alléger la notation, on oublie ψ_z et on considère H_z comme étant égal à H, avec une structure sur F "tordue" par le cocycle z_H. Remarquons que H agit sur H_z par conjugaison.

De la paire de Borel épinglée de H se déduit un sous-groupe hyperspécial K_H de $H(F)$. On note simplement H_K le schéma en groupes associé. On pose $K_z = H_z(F) \cap K_H^{nr}$.

On peut interpréter H_z comme un espace tordu de la façon suivante. Rappelons que z prend ses valeurs dans $Z_{G_{SC}}$ (plus exactement, ici, dans l'image de ce groupe dans G), donc dans $Z_{G,p'}$. Alors z_H est un cocycle de Γ dans $Z_{H,p'}$, qui se factorise en un cocycle défini sur Γ^{nr}. Poussons-le en un cocycle de Γ^{nr} dans $T_{H,p'}$. Comme on l'a dit en 2.4, $T_{H,p'} = T_H(\mathfrak{o}_{F^{nr}})_{p'} \simeq \mathbf{T}_H(\bar{\mathbb{F}}_q)$. D'après le théorème de Lang, $H^1(\Gamma^{nr}, \mathbf{T}_H(\bar{\mathbb{F}}_q)) = 0$. On peut donc choisir $h_\theta \in T(\mathfrak{o}_{F^{nr}})_{p'}$ tel que $z_H(\sigma) = h_\theta \sigma(h_\theta)^{-1}$ pour tout $\sigma \in \Gamma$. Remarquons que $h_\theta \in T_{H,ad}(\mathfrak{o})$. On pose $\theta_H = int_{h_\theta}^{-1}$ et on introduit l'espace tordu $\tilde{H} = H\theta_H$ comme en 2.7. Alors l'application $h \mapsto hh_\theta\theta_H$ identifie H_z à $\tilde{H}$. L'automorphisme θ_H conserve K_H et K_z s'identifie à $\tilde{K}_H$, ce dernier ensemble étant défini comme en 2.7. Posons $\boldsymbol{\omega}_H = 1$. Alors les données H, θ_H, $\boldsymbol{\omega}_H$ et K_H vérifient les mêmes hypothèses qu'en 2.7. La seule différence, qui n'aura pas d'incidence, est que la donnée auxiliaire h_θ n'appartient qu'à K_H^{nr} et pas à $K_{H,sc}^{nr}$.

2.10 Correspondance entre classes de conjugaison

L'homomorphisme ξ^{-1} se quotiente en une application :

$$(1) \qquad T_H/\Omega_H \to T_{/\theta^*}/\Omega^{\theta^*}.$$

Soit δ un élément semi-simple de $\tilde{G}$. On peut conjuguer δ en un élément de la forme $\nu\theta^*$, avec $\nu \in T$. Alors l'image de ν dans $T_{/\theta^*}/\Omega^{\theta^*}$ est bien déterminée. De la sorte, $T_{/\theta^*}/\Omega^{\theta^*}$ paramètre les classes de conjugaison par G dans l'ensemble des éléments semi-simples de $\tilde{G}$. Soit γ un élément semi-simple de H_z. On peut conjuguer γ en un élément $\mu \in T_H$. L'image de cet élément dans T_H/Ω_H est bien déterminée. De la sorte, T_H/Ω_H paramètre les classes de conjugaison par H dans l'ensemble des éléments semi-simples de H_z. Alors l'application (1) apparaît comme une correspondance entre classes de conjugaison d'éléments semi-simples dans $\tilde{G}$ et dans H_z. Les structures sur F de $\tilde{G}$ et H_z induisent des actions de Γ sur les ensembles de départ et d'arrivée de l'application (1). Cette application est équivariante pour ces actions (c'est pour cela que l'on a introduit H_z).

On note $\tilde{G}_{reg}$ le sous-ensemble des $\delta \in \tilde{G}$ tels que $Z_G(\delta)$ soit commutatif et $Z_G(\delta)^0$ soit un tore. On note $H_{z,\tilde{G}-reg}$ le sous-ensemble des $\gamma \in H_z$ qui sont semi-simples et dont la classe de conjugaison correspond par (1) à la classe d'un élément de $\tilde{G}_{reg}$. On montre que tout tel γ est fortement régulier, c'est-à-dire que $Z_H(\delta)$ est un tore. On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des couples (γ,δ) tels que $\gamma \in H_{z,\tilde{G}-reg}(F)$, $\delta \in \tilde{G}_{reg}(F)$ et les classes de conjugaison de γ par H et de δ par G se correspondent par l'application (1).

Kottwitz et Shelstad ([KS] chapitre 4) ont défini un facteur de transfert :

$$\Delta : \mathcal{D} \to \mathbb{C}^\times.$$

Il n'est défini qu'à multiplication près par une constante. Le choix de K permet de le normaliser. Soit δ un élément semi-simple de $\tilde{K}$. L'automorphisme aut_δ se réduit en un automorphisme $\mathbf{aut}_\delta$ de $\mathbf{G}_K$. Disons que δ est de réduction régulière si le sous-groupe des points fixes de $\mathbf{aut}_\delta$ est commutatif et si sa composante neutre est un tore. On peut choisir Δ de sorte que $\Delta(\gamma,\delta) = 1$ pour tout $(\gamma,\delta) \in \mathcal{D}$ tel que δ soit un élément de $\tilde{K}$ de réduction régulière. Si p est assez grand, il existe au moins un tel couple et cela détermine Δ de façon unique. Malheureusement, il n'est pas clair que la condition (Hyp1) soit suffisante pour assurer l'existence d'un couple (γ,δ) comme ci-dessus. Dans [W1] 4.6, on a indiqué une autre façon de normaliser, qui est une variante un peu plus sophistiquée de celle que l'on vient de présenter, et qui est valable sous la seule hypothèse (Hyp1).

Soit $(\gamma,\delta) \in \mathcal{D}$. Si $\gamma' \in H_{z,\tilde{G}-reg}(F)$ est conjugué à γ par un élément de H, on a l'égalité $\Delta(\gamma',\delta) = \Delta(\gamma,\delta)$. Si $g \in G(F)$, on a l'égalité $\Delta(\gamma, g\delta g^{-1}) = \boldsymbol{\omega}(g)^{-1}\Delta(\gamma,\delta)$ ([KS] théorème 5.1.D).

3 Les résultats

3.1 Intégrales orbitales

On note $C_c^\infty(\tilde{G}(F))$ l'espace des fonctions sur $\tilde{G}(F)$, à valeurs complexes, localement constantes et à support compact. On munit $G(F)$ de la mesure de Haar pour laquelle

K est de mesure 1. Cette mesure sera dite canonique (elle ne dépend pas de K puisque tous les sous-groupes hyperspéciaux sont conjugués par $G_{AD}(F)$). Soit $\delta \in \tilde{G}_{reg}(F)$. Supposons choisie une mesure de Haar sur $G_\delta(F)$. Supposons que le caractère $\boldsymbol{\omega}$ soit trivial sur ce groupe. Pour $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$, on pose :

$$O_\delta^{\tilde{G},\boldsymbol{\omega}}(f) = [Z_G(\delta)(F) : G_\delta(F)]^{-1} \int_{G_\delta(F)\backslash G(F)} f(g^{-1}\delta g)\boldsymbol{\omega}(g)\, dg.$$

Munissons $H(F)$ de la mesure canonique. Soit $\gamma \in H_{z,\tilde{G}-reg}(F)$. Supposons choisie une mesure de Haar sur $H_\gamma(F)$. Pour $f \in C_c^\infty(H_z(F))$, on pose :

$$O_\gamma^{H_z}(f) = \int_{H_\gamma(F)\backslash H(F)} f(h^{-1}\gamma h)\, dh.$$

Cette définition est un cas particulier de la précédente d'après l'interprétation que l'on a donnée en 2.9 de l'espace H_z. On l'a explicitée parce que sa forme est plus simple que celle du cas général.

3.2 Intégrales orbitales endoscopiques

Pour tout sous-tore maximal T de H, défini sur F, on fixe une mesure de Haar sur $T(F)$. On suppose que si T et T' sont de tels tores et si $h \in H$ est tel que int_h envoie T sur T' et induit un isomorphisme défini sur F entre ces deux tores, alors les mesures sur $T(F)$ et $T'(F)$ se correspondent par int_h. Soit $\gamma \in H_{z,\tilde{G}-reg}(F)$. Considérons un élément $\delta \in \tilde{G}_{reg}(F)$ dont la classe de conjugaison corresponde à celle de γ. D'après [KS] lemme 4.4.C, le caractère $\boldsymbol{\omega}$ est trivial sur $G_\delta(F)$. On verra en 4.9 que la mesure que l'on a fixée sur $H_\gamma(F)$ en détermine une sur $G_\delta(F)$, et c'est celle que l'on utilise dans la formule ci-dessous. Pour $f \in C_c^\infty(\tilde{G}(F))$, on peut poser :

$$O_\gamma^{\tilde{G},H_z,\boldsymbol{\omega}}(f) = \sum_\delta \Delta(\gamma,\delta) O_\delta^{\tilde{G},\boldsymbol{\omega}}(f),$$

où l'on somme sur un ensemble de représentants des classes de conjugaison par $G(F)$ dans l'ensemble des $\delta \in \tilde{G}_{reg}(F)$ tels que $(\gamma,\delta) \in \mathcal{D}$.

Pour $f \in C_c^\infty(H_z(F))$, on pose :

$$SO_\gamma^{H_z}(f) = \sum_{\gamma'} O_{\gamma'}^{H_z}(f),$$

où l'on somme sur un ensemble de représentants des classes de conjugaison par $H(F)$ dans l'ensemble des $\gamma' \in H_{z,\tilde{G}-reg}(F)$ qui sont conjugués à γ par un élément de H.

3.3 Enoncé du lemme fondamental

On note $\mathbf{1}_{\tilde{K}}$ la fonction caractéristique de $\tilde{K}$ dans $\tilde{G}(F)$. On note $\mathbf{1}_{K_z}$ la fonction caractéristique de K_z dans $H_z(F)$.

Lemme fondamental. *Pour tout $\gamma \in H_{z,\tilde{G}-reg}(F)$, on a l'égalité :*

$$SO_\gamma^{H_z}(\mathbf{1}_{K_z}) = O_\gamma^{\tilde{G},H_z,\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{1}_{\tilde{K}}).$$

3.4 Le lemme fondamental pour les algèbres de Lie

Considérons le cas où $\theta = 1$ et $\boldsymbol{\omega} = 1$. Alors $\tilde{G} = G$ et $H_z = H$. On peut oublier toutes les parties "tordues" de nos objets. Les définitions des paragraphes 2.10, 3.1 et 3.2 se descendent aux algèbres de Lie. Il y a une correspondance entre classes de conjugaison d'éléments semi-simples dans $\mathfrak{h}$ et classes de conjugaison d'éléments semi-simples dans $\mathfrak{g}$. Notons $\mathfrak{g}_{reg}$ le sous-ensemble des $X \in \mathfrak{g}$ dont le commutant G_X est un tore. Notons $\mathfrak{h}_{G-reg}$ le sous-ensemble des éléments semi-simples de $\mathfrak{h}$ dont la classe de conjugaison correspond à celle d'un élément de $\mathfrak{g}_{reg}$. On définit un facteur de transfert Δ sur le sous-ensemble des couples $(Y, X) \in \mathfrak{h}_{G-reg}(F) \times \mathfrak{g}_{reg}(F)$ tels que les classes de conjugaison de Y et de X se correspondent. Le choix de K permet de le normaliser de façon unique. Pour $f \in C_c^\infty(\mathfrak{g}(F))$ et $X \in \mathfrak{g}_{reg}(F)$, on définit l'intégrale orbitale $O_X^G(f)$ (modulo le choix d'une mesure de Haar sur $G_X(F)$). Puis, pour $Y \in \mathfrak{h}_{G-reg}(F)$, on définit l'intégrale orbitale endoscopique $O_Y^{G,H}(f)$ (les mesures étant fixées comme en 3.2). Pour $f \in C_c^\infty(\mathfrak{h}(F))$, on définit aussi l'intégrale orbitale stable $SO_Y^H(f)$. Enfin, on note $\mathbf{1}_{\mathfrak{k}}$ la fonction caractéristique du réseau $\mathfrak{k}$ dans $\mathfrak{g}(F)$ et $\mathbf{1}_{\mathfrak{k}_H}$ la fonction caractéristique du réseau $\mathfrak{k}_H$ dans $\mathfrak{h}(F)$.

Lemme fondamental pour les algèbres de Lie. *Pour tout $Y \in \mathfrak{h}_{G-reg}(F)$, on a l'égalité :*

$$SO_Y^H(\mathbf{1}_{\mathfrak{k}_H}) = O_Y^{G,H}(\mathbf{1}_{\mathfrak{k}}).$$

3.5 Le lemme fondamental non standard

Considérons deux groupes connexes semi-simples et simplement connexes G_1 et G_2, définis et quasi-déployés sur F. Pour $i = 1, 2$, on fixe un tore maximal T_i de G_i, faisant partie d'une paire de Borel définie sur F. On affecte d'un indice i les notations introduites dans les paragraphes précédents. Par exemple, on note Ω_i le groupe de Weyl de G_i relatif à T_i. Pour tout $\mathbb{Z}$-module A, on pose $A_{\mathbb{Q}} = A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Considérons un isomorphisme $j_* : X_*(T_1)_{\mathbb{Q}} \to X_*(T_2)_{\mathbb{Q}}$. Notons $j^* : X^*(T_2)_{\mathbb{Q}} \to X^*(T_1)_{\mathbb{Q}}$ son transposé. On suppose que ces isomorphismes sont équivariants pour les actions de Γ. On suppose qu'il existe des bijections $j_{\check{\Sigma}} : \check{\Sigma}_1 \to \check{\Sigma}_2$, $j_\Sigma : \Sigma_2 \to \Sigma_1$ et des fonctions $\check{b} : \check{\Sigma}_1 \to \mathbb{Q}_{>0}$ et $b : \Sigma_2 \to \mathbb{Q}_{>0}$ de sorte que :

- j_Σ s'identifie à l'inverse de $j_{\check{\Sigma}}$ via les bijections naturelles de Σ_i sur $\check{\Sigma}_i$ pour $i = 1, 2$;
- pour tout $\check{\alpha} \in \check{\Sigma}_1$, on a l'égalité $j_*(\check{\alpha}) = \check{b}(\check{\alpha}) j_{\check{\Sigma}}(\check{\alpha})$;
- pour tout $\alpha \in \Sigma_2$, on a l'égalité $j^*(\alpha) = b(\alpha) j_\Sigma(\alpha)$.

A ces conditions, on dit que le triplet (G_1, G_2, j_*) est endoscopique non standard. On montre que pour $\check{\alpha}_1 \in \check{\Sigma}_1$ et $\alpha_2 \in \Sigma_2$ tel que $\check{\alpha}_2 = j_{\check{\Sigma}}(\check{\alpha}_1)$, on a nécessairement $\check{b}(\check{\alpha}_1) = b(\alpha_2)$. On montre que l'application qui, à la symétrie élémentaire relative à une coracine $\check{\alpha}_1 \in \check{\Sigma}_1$, associe la symétrie élémentaire relative à $j_{\check{\Sigma}}(\check{\alpha}_1)$, se prolonge en un isomorphisme j_Ω de Ω_1 sur Ω_2.

On dit que le triplet endoscopique non standard est non ramifié si :

- $p > N(G_i)e_F + 1$ pour $i = 1, 2$;
- G_1 et G_2 sont non ramifiés ;
- b et $\check{b}$ prennent leurs valeurs dans l'ensemble des éléments de $\mathbb{Q}_{>0}$ de valuation p-adique nulle.

Exemple. Prenons pour G_1 le groupe symplectique Sp_{2n} et pour G_2 le groupe spinoriel $Spin_{2n+1}$ déployé. On peut identifier $X_*(T_1)$ à $\mathbb{Z}^n$, l'ensemble Σ_1 étant l'ensemble des formes linéaires :

$$(a_1, ..., a_n) \mapsto \pm a_k \pm a_l$$

pour $k, l = 1, ..., n$, $k \neq l$, ou

$$(a_1, ..., a_n) \mapsto \pm 2a_k$$

pour $k = 1, ..., n$. On peut identifier $X_*(T_2)$ au sous-$\mathbb{Z}$-module des $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{Z}^n$ tels que $a_1 + ... + a_n$ est pair. L'ensemble Σ_2 est l'ensemble des formes linéaires :

$$(a_1, ..., a_n) \mapsto \pm a_k \pm a_l$$

pour $k, l = 1, ..., n$, $k \neq l$, ou

$$(a_1, ..., a_n) \mapsto \pm a_k$$

pour $k = 1, ..., n$. Les espaces $X_*(T_1)_{\mathbb{Q}}$ et $X_*(T_2)_{\mathbb{Q}}$ s'identifient tous deux à $\mathbb{Q}^n$. On note $j_* : X_*(T_1)_{\mathbb{Q}} \to X_*(T_2)_{\mathbb{Q}}$ l'isomorphisme issu de ces identifications. Alors (G_1, G_2, j_*) est un triplet endoscopique non standard, qui est non ramifié pourvu que p soit assez grand.

Considérons un triplet endoscopique non standard (G_1, G_2, j_*), non ramifié. De l'homomorphisme j_* se déduit une bijection :

$$\mathfrak{t}_1/\Omega_1 \simeq \mathfrak{t}_2/\Omega_2,$$

qui est équivariante pour les actions de Γ. On peut alors, comme dans le cas endoscopique ordinaire, définir une correspondance entre classes de conjugaison d'éléments semi-simples dans $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_2$. Pour $i = 1, 2$, soit $X_i \in \mathfrak{g}_{i,reg}(F)$. Supposons que les classes de conjugaison de X_1 et de X_2 se correspondent. Alors toute mesure de Haar sur $G_{1,X_1}(F)$ en détermine une sur $G_{2,X_2}(F)$ et on suppose dans ce qui suit que les mesures se correspondent ainsi. Fixons des sous-groupes hyperspéciaux K_i de $G_i(F)$, pour $i = 1, 2$.

Lemme fondamental non standard. *Pour tout couple $(X_1, X_2) \in \mathfrak{g}_{1,reg}(F) \times \mathfrak{g}_{2,reg}(F)$ formé d'éléments dont les classes de conjugaison se correspondent, on a l'égalité :*

$$SO_{X_1}^{G_1}(\mathbf{1}_{\mathfrak{k}_1}) = SO_{X_2}^{G_2}(\mathbf{1}_{\mathfrak{k}_2}).$$

Remarque Il serait tentant de formuler un énoncé analogue pour les groupes au lieu des algèbres de Lie. Il serait faux, ainsi que le montre un calcul élémentaire dans le cas de l'exemple ci-dessus, pour $n = 1$.

3.6 Notre résultat

Théorème. *Supposons vérifiés le lemme fondamental pour les algèbres de Lie de 3.4 ainsi que le lemme fondamental non standard de 3.5. Alors le lemme fondamental de 3.3 est vérifié.*

3.7 Conséquence

Théorème. *Le lemme fondamental de 3.3 est vérifié.*

En effet, Ngo Bao Chau a prouvé les assertions 3.4 et 3.5 ([N]).

4 Les preuves

La situation est celle décrite au chapitre 1.

4.1 Eléments d'ordre fini premier à p

Pour tout groupe algébrique M défini sur F, dont la composante neutre est réductive, on a défini en 2.4 les notions d'éléments compacts, topologiquement unipotents ou d'ordre fini premier à p de $M(F)$. On a $H_z(F) \subset H_z(F^{nr}) = H(F^{nr})$. Un élément de $H_z(F)$ est dit compact, resp. d'ordre fini premier à p, s'il l'est dans $H(F^{nr})$. De même, introduisons le groupe G^+ de 2.7. On a $\tilde{G}(F) \subset \tilde{G}(F^{nr}) = G(F^{nr})\theta^* \subset G^+(F^{nr})$. Un élément $\eta \in \tilde{G}(F)$ est dit compact, resp. d'ordre fini premier à p, s'il l'est dans $G^+(F^{nr})$. Remarquons que ces notions dépendent du choix de l'élément g_θ de 2.7. On utilise les notations $H_z(F)_c$, $\tilde{G}(F)_c$ etc... comme en 2.4. La décomposition d'un élément compact $\gamma \in H_z(F)_c$ s'écrit $\gamma = \gamma_{tu}\gamma_{p'}$, où $\gamma_{tu} \in H(F)_{tu}$ et $\gamma_{p'} \in H_z(F)_{p'}$. En pratique, on l'écrira $\gamma = exp(Y)\epsilon$, où $\epsilon = \gamma_{p'}$ et Y est l'élément de $\mathfrak{h}_\epsilon(F)_{tn}$ tel que $exp(Y) = \gamma_{tu}$. De même, la décomposition d'un élément $\delta \in \tilde{G}(F)_c$ s'écrit $\delta = exp(X)\eta$, où $\eta = \delta_{p'} \in \tilde{G}(F)_{p'}$ et X est l'élément de $\mathfrak{g}_\eta(F)_{tn}$ tel que $exp(X) = \delta_{tu} \in G(F)_{tu}$.

Lemme. *Soit $\eta \in \tilde{G}(F)_{p'} \cap \tilde{K}$. Alors :*
(i) le groupe G_η est non ramifié et $G_\eta(F) \cap K$ est un sous-groupe hyperspécial de $G_\eta(F)$;
(ii) l'ensemble des $g \in G$ tels que $int_g(\eta) \in K^{nr}\theta^*$ est égal à $K^{nr}G_\eta$ et l'ensemble des $g \in G(F)$ tels que $int_g(\eta) \in \tilde{K}$ est égal à $KG_\eta(F)$.

Preuve. Montrons d'abord que :
(1) il existe $k \in K^{nr}$ et $\nu \in T(\mathfrak{o}_{F^{nr}})_{p'}$ tels que $int_k(\delta) = \nu\theta^*$.

Introduisons le groupe $\mathbf{G}_K^+ = \mathbf{G}_K \rtimes \Theta^*$. L'application de réduction de K^{nr} sur $\mathbf{G}_K$ se prolonge en une application du sous-ensemble $K^{nr}\theta^*$ de $G^+(F^{nr})$ sur la composante $\mathbf{G}_K\theta^*$ de $\mathbf{G}_K^+$. Notons $\boldsymbol{\eta}$ l'image de η par cette application. C'est un élément d'ordre fini premier à p dans $\mathbf{G}_K^+$. On peut donc trouver $\mathbf{k} \in \mathbf{G}_K$ et $\boldsymbol{\nu} \in \mathbf{T}$ de sorte que $int_{\mathbf{k}}(\boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{\nu}\theta^*$. Relevons $\mathbf{k}$ en un élément $k \in K^{nr}$ et $\boldsymbol{\nu}$ en un élément $\nu \in T(\mathfrak{o}_{F^{nr}})_{p'}$. Posons $\eta' = int_{k^{-1}}(\nu\theta^*)$. C'est un élément de $K^{nr}\theta^*$ d'ordre fini premier à p. Il a même réduction que η. Alors (1) résulte de l'assertion suivante :

(2) soient x et y deux éléments de $K^{nr}\theta^*$ d'ordre fini premier à p. Supposons que leurs réductions $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ dans $\mathbf{G}_K\theta^*$ sont égales. Alors il existe $k \in K^{nr}$ tel que $x = int_k(y)$.

Fixons une extension finie et non ramifiée E de F telle que x et y appartiennent à $K_E\theta^*$ et utilisons les définitions posées dans la preuve de 2.7(1). Pour $n \geq 1$, le quotient $K_E(n)/K_E(n+1)$ s'identifie à $\mathfrak{k}_E$, l'action aut_y de y sur le premier ensemble s'identifiant à l'action $aut_{\mathbf{y}}$ de $\mathbf{y}$ sur le second. Parce que y est d'ordre fini premier à p, et parce que deux racines distinctes de l'unité d'ordre premier à p dans $\bar{F}$ ont des réductions distinctes dans $\bar{\mathbb{F}}_q$, un raisonnement familier (essentiellement le lemme de Hensel) permet de décomposer $\mathfrak{k}_E$ en somme directe de deux sous-réseaux $\mathfrak{k}_0$ et $\mathfrak{k}_1$, qui sont le noyau et l'image de $aut_y - 1$. On a $\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{k}_E \cap \mathfrak{g}_y(E)$. Les images de $\mathfrak{k}_0$ et $\mathfrak{k}_1$ dans $\mathbf{k}_E$ sont respectivement le noyau et l'image de $aut_{\mathbf{y}} - 1$. L'hypothèse de (2) signifie que xy^{-1} appartient à $K_E(1)$. Soit $n \geq 1$. Supposons qu'il existe $k_n \in K_E(1)$ et $Y_n \in \mathfrak{k}_0$ tels que $k_n x k_n^{-1} y^{-1} exp(-\varpi Y_n) \in K_E(n)$. Ecrivons cet élément sous la forme $exp(\varpi^n Z)$, avec $Z \in \mathfrak{k}_E$. Des propriétés ci-dessus résulte que l'on peut trouver $Z_0 \in \mathfrak{k}_0$ et $Z' \in \mathfrak{k}_E$ de sorte que $Z = (aut_y - 1)(Z') + Z_0$. Posons $k_{n+1} = exp(\varpi^n Z')k_n$ et $Y_{n+1} = \varpi^{n-1} Z_0 + Y_n$. On vérifie que $k_{n+1} x k_{n+1}^{-1} y^{-1} exp(-\varpi Y_{n+1})$ appartient à $K_E(n+1)$. En passant à la limite, on obtient des éléments $k \in K_E$ et $Y \in \mathfrak{k}_0$ de sorte que $kxk^{-1} = exp(\varpi Y)y$. Mais $Y \in \mathfrak{g}_y(E)$. L'égalité précédente est la décomposition de l'élément compact kxk^{-1} en produit d'un élément topologiquement unipotent et d'un élément d'ordre fini premier à p. Puisque kxk^{-1} est lui-même d'ordre fini premier à p, l'unicité de la décomposition entraîne que $Y = 0$ et $kxk^{-1} = y$. Cela prouve (2) et (1).

Soient k et ν vérifiant (1). Fixons une extension finie non ramifiée E de F telle que $k \in K_E$, $\nu \in T(\mathfrak{o}_E)$ et G soit déployé sur E. La paire $(B \cap G_{\nu\theta^*}, T^{\theta^*,0})$ est une paire de Borel de $G_{\nu\theta^*}$, définie sur E. On n'a aucun mal à construire un épinglage $(E'_{\alpha'})_{\alpha' \in \Delta'}$ relatif à cette paire, que l'on complète comme en 2.5 par un épinglage "opposé" $(E'_{-\alpha'})_{\alpha' \in \Delta'}$, de sorte que tous ces éléments appartiennent à $\mathfrak{k}_E$. Soit K'_E le sous-groupe hyperspécial de $G_{\nu\theta^*}(E)$ associé à la paire de Borel épinglée. Il est engendré par $T^{\theta^*,0}(\mathfrak{o}_E)$ et les groupes $exp(\mathfrak{o}_E E'_{\pm\alpha'})$ pour $\alpha' \in \Delta'$. Tous ces groupes sont inclus dans $K_E \cap G_{\nu\theta^*}(E)$. Donc $K'_E \subset K_E \cap G_{\nu\theta^*}(E)$. Puisque K'_E est un sous-groupe compact maximal de $G_{\nu\theta^*}(E)$, cette inclusion est une égalité et $K_E \cap G_{\nu\theta^*}(E)$ est un sous-groupe hyperspécial de $G_{\nu\theta^*}(E)$. Cette propriété se conserve par conjugaison par k. Donc $K_E \cap G_\eta(E)$ est un sous-groupe hyperspécial de $G_\eta(E)$. Mais ce groupe est défini sur F. Les points hyperspéciaux de l'immeuble $Imm(G_\eta, F)$ sont les points hyperspéciaux de $Imm(G_\eta, E)$ qui sont fixes par l'action du groupe de Galois $Gal(E/F)$. Il en résulte que $K \cap G_\eta(F)$ est encore un groupe hyperspécial de $G_\eta(F)$. Enfin, le groupe G_η est déployé sur E : il est isomorphe à $G_{\nu\theta^*}$ qui contient le tore $T^{\theta^*,0}$, lequel est déployé sur E. Sous l'hypothèse (Hyp1), un groupe déployé sur une extension non ramifiée et qui possède un sous-groupe hyperspécial est forcément non ramifié. Cela prouve le (i) de l'énoncé.

Passons au (ii). On veut montrer que l'ensemble des $g \in G$ tels que $int_g(\eta) \in K^{nr}\theta^*$ est égal à $K^{nr}G_\eta$. Cette propriété est invariante par conjugaison de η par un élément de K^{nr}. Grâce à (1), on peut donc remplacer η par $\nu\theta^*$ dans l'assertion ci-dessus. Soit $g \in G$, posons $\eta' = int_g(\nu\theta^*)$, supposons $\eta' \in K^{nr}\theta^*$. On peut appliquer (1) à η' : il existe $k \in K^{nr}$ et $\nu' \in T(\mathfrak{o}_{F^{nr}})_{p'}$ tels que $int_k(\eta') = \nu'\theta^*$. Quitte à remplacer g par kg, on peut supposer $\eta' = \nu'\theta^*$. Alors int_g envoie $G_{\nu'\theta^*}$ sur $G_{\nu\theta^*}$. Les deux groupes possèdent une paire de Borel définie sur F^{nr} dont le tore maximal est $T^{\theta^*,0}$. Quitte à multiplier g à droite par un élément de $G_{\nu\theta^*}$, on peut supposer que int_g conserve ce tore. Alors int_g conserve aussi son commutant T et définit un élément $\omega \in \Omega$. Un élément de Ω qui conserve $T^{\theta^*,0}$ appartient à Ω^{θ^*}. On sait que Ω^{θ^*} est le groupe de Weyl de $G^{\theta^*,0}$ et que tout élément de ce groupe peut se représenter par un élément de $K^{nr} \cap G^{\theta^*,0}(F^{nr})$. On peut donc écrire $g = kt$, avec $t \in T$ et $k \in K^{nr} \cap G^{\theta^*,0}(F^{nr})$. On a $int_{k^{-1}}(\nu'\theta^*) = k^{-1}\nu' k\theta^*$, car $k \in G^{\theta^*,0}$, et $k^{-1}\nu' k$ est encore un élément de $T(\mathfrak{o}_{F^{nr}})_{p'}$. Quitte à remplacer ν' par cet élément et g par $k^{-1}g$, on peut donc supposer $g \in T$. Fixons une extension finie E de F telle que $g \in T(E)$ et une uniformisante ϖ_E de cette extension. Décomposons g en produit $g = t_{tu} t_{p'} t_{\varpi_E}$, avec $t_{tu} \in T(\mathfrak{o}_E)_{tu}$, $t_{p'} \in T(\mathfrak{o}_E)_{p'}$ et $t_{\varpi_E} \in T_{\varpi_E}$, cf. 2.4. L'égalité $int_g(\nu\theta^*) = \nu'\theta^*$ et le fait que ν et ν' appartiennent à $T(\mathfrak{o}_{F^{nr}})_{p'}$ entraînent que

$int_{t_{p'}}(\nu\theta^*) = \nu'\theta^*$, tandis que t_{tu} et t_{ϖ_E} commutent à $\nu\theta^*$. Cela entraîne que t_{tu} et t_{ϖ_E} commutent à θ^*. Le groupe $T_{\varpi_E}^{\theta^*}$ est égal à $X_*(T)^{\theta^*} \otimes_{\mathbb{Z}} \varpi_E^{\mathbb{Z}}$, donc est inclus dans $T^{\theta^*,0}(E)$. Parce que l'ordre de θ^* est premier à p, on vérifie aussi que $T(\mathfrak{o}_E)_{tu}^{\theta^*} = T^{\theta^*,0}(\mathfrak{o}_E)_{tu}$. On a donc $t_{tu}t_{\varpi_E} \in T^{\theta^*,0} \subset G_{\nu\theta^*}$. De plus, $t_{p'} \in T_{p'} = T(\mathfrak{o}_{F^{nr}})_{p'} \subset K^{nr}$. Alors $g \in K^{nr}G_{\nu\theta^*}$, ce qui achève de prouver la première assertion de (ii).

D'après (i), $G_\eta(F) \cap K$ est un sous-groupe hyperspécial de $G_\eta(F)$. Notons-le K_η et notons $G_{\eta,K}$ le schéma en groupes associé. Soit $g \in G(F)$ tel que $int_g(\eta) \in \tilde{K}$. Ainsi que l'on vient de le prouver, on peut écrire $g = kx$, avec $x \in G_\eta$ et $k \in K^{nr}$. Nécessairement, $x \in G_\eta(F^{nr})$. Pour $\sigma \in \Gamma^{nr}$, l'hypothèse $g \in G(F)$ entraîne que $\sigma(k)^{-1}k = \sigma(x)x^{-1}$. Cette expression définit un cocycle de Γ^{nr} dans $G_\eta(F^{nr}) \cap K^{nr} = K_\eta^{nr}$. Ce groupe possède une filtration dont les quotients sont, soit $\mathbf{G}_{\eta,K}(\bar{\mathbb{F}}_q)$, soit $\mathfrak{g}_{\eta,K}(\bar{\mathbb{F}}_q)$. Si le groupe était complet, il résulterait du théorème de Lang que $H^1(\Gamma^{nr}, K_\eta^{nr}) = 0$. Le groupe n'est pas complet, mais on peut contourner cette difficulté comme en 2.7(1) et prouver la nullité de ce H^1. On peut donc choisir $k_0 \in K_\eta^{nr}$ tel que $\sigma(x)x^{-1} = \sigma(k_0)k_0^{-1}$ pour tout $\sigma \in \Gamma^{nr}$. Posons $x' = xk_0^{-1}x$ et $k' = kk_0$. Alors $x' \in G_\eta(F)$, $k' \in K$ et $g = k'x'$. Cela prouve la seconde assertion de (ii).

4.2 Classes de conjugaison coupant $\tilde{K}$

Soit η un élément semi-simple de $\tilde{G}(F)$. A la suite de Labesse, on introduit le groupe algébrique non connexe $I_\eta = Z_G^{\theta^*}G_\eta$. C'est un sous-groupe de $Z_G(\eta)$, défini sur F. D'après (Hyp1), l'ordre de $Z_G^{\theta^*}/Z_G^{\theta^*,0}$ est premier à p. Puisque $Z_G^{\theta^*,0}$ est divisible, on a $Z_G^{\theta^*} = Z_{G,p'}^{\theta^*}Z_G^{\theta^*,0}$. Puisque $Z_G^{\theta^*,0} \subset G_\eta$, on a :

(1) $I_\eta = Z_{G,p'}^{\theta^*}G_\eta$.

Remarquons que $Z_{G,p'}^{\theta^*} \subset K^{nr}$, puisque $Z_{G,p'}^{\theta^*} \subset T_{p'} = T(\mathfrak{o}_{F^{nr}})_{p'}$. On a :

(2) si $\eta \in \tilde{G}_{reg}(F)$, alors $I_\eta = Z_G(\eta)$.

Il suffit de prouver que $Z_G(\eta) \subset Z_GG_\eta$. Cette assertion étant géométrique, on peut conjuguer η en un élément de $T\theta^*$. Puisque $\eta \in \tilde{G}_{reg}$, G_η est le tore $T^{\theta^*,0}$ et $Z_G(\eta)$ est inclus dans son commutant T, donc est égal à T^{θ^*}. Il reste à prouver que $T^{\theta^*} = Z_G^{\theta^*}T^{\theta^*,0}$. Cela résulte du fait que $T_{ad}^{\theta^*}$ est connexe, cf. [KS] 1.1.

Rappelons que l'on note ϕ l'élément de Frobenius de Γ^{nr}. Posons :

$$\mathcal{Z} = \{z \in K^{nr}; \phi(z)^{-1}z \in Z_{G,p'}^{\theta^*}\}.$$

C'est un groupe. Pour $z \in \mathcal{Z}$, l'automorphisme int_z de G, resp. de $\tilde{G}$, est défini sur F. Il conserve K, resp. $\tilde{K}$. Le groupe $\mathcal{Z}$ contient K comme sous-groupe distingué. Soit $\eta \in \tilde{K} \cap \tilde{G}(F)_{p'}$. On fixe un ensemble de représentants $\mathcal{Z}_\eta$ de l'ensemble de doubles classes $K\backslash\mathcal{Z}/(\mathcal{Z} \cap I_\eta)$.

Soit $\delta \in \tilde{G}(F)_{reg} \cap \tilde{G}(F)_c$. On écrit $\delta = exp(X)\eta$, avec $\eta = \delta_{p'}$ et $X \in \mathfrak{g}_\eta(F)_{tn}$. Supposons $\eta \in \tilde{K}$. Appelons classe de conjugaison stable de δ l'intersection de $\tilde{G}(F)$ avec la classe de conjugaison de δ par G. De même, appelons classe de conjugaison stable de X l'intersection de $\mathfrak{g}_\eta(F)$ avec la classe de conjugaison de X par G_η. Fixons un ensemble de représentants $\mathcal{E}_X$ des classes de conjugaison par $G_\eta(F)$ dans la classe de conjugaison stable de X. Posons :

$$\mathcal{X}_\delta = \{int_z(exp(X')\eta); z \in \mathcal{Z}_\eta, X' \in \mathcal{E}_X\}.$$

Lemme. *Sous ces hypothèses, les propriétés suivantes sont vérifiées :*

(i) $\mathcal{X}_\delta$ est inclus dans la classe de conjugaison stable de δ ;

(ii) soit C une classe de conjugaison par $G(F)$ contenue dans la classe de conjugaison stable de δ. Supposons que C coupe $\tilde{K}$. Alors l'intersection $C \cap \mathcal{X}_\delta$ a pour nombre d'éléments :

$$|\mathcal{Z}_\eta|[Z_G(\delta)(F) : G_\delta(F)]^{-1}.$$

Preuve. Le (i) résulte immédiatement des propriétés des automorphismes int_z pour $z \in \mathcal{Z}$.

Soit C comme en (ii). Montrons d'abord que :

(3) C coupe $\mathcal{X}_\delta$.

On peut fixer $\delta_1 \in C \cap \tilde{K}$, que l'on décompose en $\delta_1 = exp(X_1)\eta_1$. On peut aussi fixer $g \in G$ tel que $int_g(\delta) = \delta_1$. Cela implique $int_g(\eta) = \eta_1 \in \tilde{K}$. Appliquons le lemme 4.1 (ii) pour écrire $g = kx_1$ avec $k \in K^{nr}$ et $x_1 \in G_\eta$. Considérons l'application $h \mapsto \phi(h)^{-1}h$ de K^{nr} dans lui-même. Comme dans la preuve du lemme 4.1, une adaptation du théorème de Lang montre qu'elle se quotiente en une bijection :

$$K\backslash K^{nr} \to K^{nr}_{\phi-fin},$$

où $K^{nr}_{\phi-fin}$ est le sous-ensemble des $h \in K^{nr}$ pour lesquels il existe un entier $n \geq 1$ de sorte que $\phi^{n-1}(h)...\phi(h)h = 1$. Un résultat analogue vaut si l'on remplace K par le groupe K_η. On note $K^{nr}_{\eta,\phi-fin}$ le sous-ensemble analogue à $K^{nr}_{\phi-fin}$. Soit $\sigma \in \Gamma$. Puisque δ et δ_1 appartiennent à $\tilde{G}(F)$, on a $\sigma(g)^{-1}g \in Z_G(\delta)$. D'après (2), $Z_G(\delta) = I_\delta \subset I_\eta$. Donc $\sigma(g)^{-1}g \in I_\eta$, puis $\sigma(k)^{-1}k \in I_\eta$. Ecrivons $\phi(k)^{-1}k = \zeta u$, avec $\zeta \in Z^{\theta^*}_{G,p'}$ et $u \in G_\eta$. On a $\phi(k)^{-1}k \in K^{nr}_{\phi-fin}$ et cet ensemble est invariant par multiplication par $Z_{G,p'}$. Donc $u \in K^{nr}_{\phi-fin} \cap G_\eta = K^{nr}_{\eta,\phi-fin}$. On peut fixer $v \in K^{nr}_\eta$ de sorte que $u = \phi(v)^{-1}v$. Alors kv^{-1} appartient à $\mathcal{Z}$ et on peut fixer $h \in K$, $z \in \mathcal{Z}_\eta$ et $y \in I_\eta$ de sorte que $kv^{-1} = hzy$. Alors $g = hzx_2$, où $x_2 = yvx_1 \in I_\eta$. Posons $\delta_2 = int_{x_2}(\delta)$. On a $\delta_2 = int_{hz}^{-1}(\delta_1)$. Puisque int_{hz} est défini sur F, δ_2 appartient à $\tilde{G}(F)_c$. Puisque $x_2 \in I_\eta$, on a $\delta_{2,p'} = \eta$. Ecrivons $\delta_2 = exp(X_2)\eta$. On a $X_2 = int_{x_2}(X)$ et, d'après (1), on peut dans cette égalité remplacer x_2 par un élément de G_η. Donc X_2 appartient à la classe de conjugaison stable de X et on peut fixer $X' \in \mathcal{E}_X$ et $x' \in G_\eta(F)$ de sorte que $X_2 = int_{x'}(X')$. Posons $\delta_3 = int_z(exp(X')\eta)$. C'est un élément de $\mathcal{X}_\delta$. On a $\delta_1 = int_{hzx'z^{-1}}(\delta_3)$. Puisque int_z est défini sur F, $hzx'z^{-1}$ appartient à $G(F)$. Donc $\delta_3 \in C$, ce qui prouve (3).

Soient $z \in \mathcal{Z}_\eta$ et $X' \in \mathcal{E}_X$. Posons $\delta' = int_z(exp(X')\eta)$ et notons $c(\delta')$ le nombre d'éléments de $\mathcal{X}_\delta$ qui sont conjugués à δ' par un élément de $G(F)$. Pour achever la démonstration, il suffit de prouver que :

(4) $c(\delta') = |\mathcal{Z}_\eta|[Z_G(\delta)(F) : G_\delta(F)]^{-1}$.

Soit $g \in G(F)$, supposons $int_g(\delta') \in \mathcal{X}_\delta$, écrivons $int_g(\delta') = int_{z_0}(exp(X_0)\eta)$, avec $z_0 \in \mathcal{Z}_\eta$ et $X_0 \in \mathcal{E}_X$. Les éléments $\eta' = int_z(\eta)$ et $\eta_0 = int_{z_0}(\eta)$ appartiennent à $\tilde{K} \cap \tilde{G}(F)_{p'}$ et on a $int_g(\eta') = \eta_0$. D'après le lemme 4.1(ii), g appartient à $KG_{\eta'}(F)$. Puisque $int_{z^{-1}}$ envoie $G_{\eta'}(F)$ sur $G_\eta(F)$, on peut écrire $gz = kzy$, avec $k \in K$ et $y \in G_\eta(F)$. Les éléments X' et X_0 sont stablement conjugués à X, on peut donc fixer deux éléments x' et x_0 de G_η tels que $X' = int_{x'}(X)$, $X_0 = int_{x_0}(X)$. On a alors $int_{kzyx'}(\delta) = int_{z_0x_0}(\delta)$, donc $(kzyx')^{-1}z_0x_0 \in Z_G(\delta) \subset I_\eta$. Alors $(kz)^{-1}z_0$ appartient à $I_\eta \cap \mathcal{Z}$, donc $z_0 \in Kz(I_\eta \cap \mathcal{Z})$. Par définition de $\mathcal{Z}_\eta$, cela force l'égalité $z_0 = z$. Posons $k' = z^{-1}kz$. C'est encore un élément de K et la relation $(kz)^{-1}z_0 \in I_\eta$ se simplifie en $k' \in I_\eta$. L'élément $k'y$ appartient à $I_\eta(F)$ et on voit que l'on a $int_{k'y}(X') = X_0$. Cela prouve que tous les éléments de $\mathcal{X}_\delta$ qui sont conjugués à δ' par un élément de $G(F)$ sont de la forme $int_z(exp(X_0)\eta)$, où

$X_0 \in \mathcal{X}_X$ est conjugué à X' par un élément de $I_\eta(F)$. Inversement, il est immédiat que tout élément de cette forme est conjugué à δ' par un élément de $G(F)$. Donc $c(\delta')$ est le nombre d'éléments X_0 de la forme ci-dessus, autrement dit le nombre de classes de conjugaison par $G_\eta(F)$ dans la classe de conjugaison de X' par $I_\eta(F)$. Ce nombre est égal au nombre d'éléments de l'ensemble de doubles classes :

$$G_\eta(F)\backslash I_\eta(F)/Z_G(\delta')(F).$$

Parce que $G_\eta\backslash I_\eta$ est abélien, ce nombre est égal à :

$$[I_\eta(F):G_\eta(F)][Z_G(\delta')(F):(Z_G(\delta')(F)\cap G_\eta(F))]^{-1}.$$

Le groupe $Z_G(\delta')\cap G_\eta$ est égal à $Z_{G_\eta}(X)$, qui est connexe et égal à $G_{\delta'}$. D'autre part, les éléments δ et δ' étant réguliers et conjugués par G, leurs commutants sont isomorphes sur F. On obtient alors :

(5) $c(\delta')=[I_\eta(F):G_\eta(F)][Z_G(\delta)(F):G_\delta(F)]^{-1}$.

Considérons l'application :

$$(6)\qquad \left\{\begin{array}{ccc}\mathcal{Z} & \to & Z^{\theta^*}_{G,p'}\\ k & \mapsto & \phi(k)^{-1}k.\end{array}\right.$$

Puisque $Z^{\theta^*}_{G,p'}\subset K^{nr}_{\phi-fin}$, elle est surjective. Elle se quotiente en une application injective définie sur $K\backslash\mathcal{Z}$. En la composant avec la surjection :

$$Z^{\theta^*}_{G,p'}\to I_\eta(F^{nr})/G_\eta(F^{nr}),$$

on obtient une surjection :

$$K\backslash\mathcal{Z}\to I_\eta(F^{nr})/G_\eta(F^{nr}),$$

qui se quotiente ensuite en une surjection :

$$(7)\qquad K\backslash\mathcal{Z}/(\mathcal{Z}\cap G_\eta)\to I_\eta(F^{nr})/G_\eta(F^{nr}).$$

Montrons que celle-ci est aussi injective. Soient $k,\,h\in\mathcal{Z}$, supposons que $\phi(k)^{-1}k$ et $\phi(h)^{-1}h$ aient même image dans $I_\eta(F^{nr})/G_\eta(F^{nr})$. Soit $u\in G_\eta(F^{nr})$ tel que $\phi(k)^{-1}k=\phi(h)^{-1}hu$. On a $u\in Z^{\theta^*}_{G,p'}\cap G_\eta(F^{nr})\subset K^{nr}_{\eta,\phi-fin}$. On peut trouver $v\in K^{nr}_\eta$ tel que $\phi(v)^{-1}v=u$. On a $v\in\mathcal{Z}\cap G_\eta$. Les éléments k et hv ont même image par l'application (6), donc ont même image dans $K\backslash\mathcal{Z}$. Alors k et h ont même image dans l'espace de départ de (7), ce qui prouve l'injectivité de cette application.

Le groupe $I_\eta(F^{nr})/G_\eta(F^{nr})$ est abélien et est muni d'un automorphisme ϕ. D'après la construction de la bijection (7), celle-ci se quotiente en une bijection de $\mathcal{Z}_\eta$ sur l'espace des coinvariants $(I_\eta(F^{nr})/G_\eta(F^{nr}))_{/\phi}$. Pour tout groupe abélien A muni d'un automorphisme φ, les groupes d'invariants A^φ et de coinvariants $A_{/\varphi}$ ont même nombre d'éléments. De l'injection de $I_\eta(F)$ dans $I_\eta(F^{nr})$ se déduit une injection de $I_\eta(F)/G_\eta(F)$ dans $(I_\eta(F^{nr})/G_\eta(F^{nr}))^\phi$. D'après (1), la suite :

$$1\to K^{nr}_\eta\to K^{nr}\cap I_\eta\to I_\eta(F^{nr})/G_\eta(F^{nr})\to 1$$

est exacte. Comme on l'a dit dans la preuve du lemme 4.1, on a $H^1(\Gamma^{nr},K^{nr}_\eta)=0$. La suite de cohomologie associée à la suite exacte ci-dessus montre que $(K^{nr}\cap I_\eta)^{\Gamma^{nr}}=K\cap I_\eta(F)$ s'envoie surjectivement sur $(I_\eta(F^{nr})/G_\eta(F^{nr}))^{\Gamma^{nr}}=(I_\eta(F^{nr})/G_\eta(F^{nr}))^\phi$. A fortiori, l'injection de $I_\eta(F)/G_\eta(F)$ dans $(I_\eta(F^{nr})/G_\eta(F^{nr}))^\phi$ est surjective. Cela démontre les égalités :

$$|\mathcal{Z}_\eta|=|(I_\eta(F^{nr})/G_\eta(F^{nr}))_{/\phi}|=[I_\eta(F):G_\eta(F)].$$

Jointes à (5), elles conduisent à l'égalité (4), ce qui achève la démonstration. $\square$

4.3 Eléments d'ordre fini premier à p dans $H_z(F)$

Pour γ et γ' deux éléments semi-simples de $H_z(F)$, on dit que γ et γ' sont stablement conjugués s'il existe $h \in H$ tel que $int_h(\gamma) = \gamma'$ et, pour tout $\sigma \in \Gamma$, $\sigma(h)^{-1}h$ appartient à H_γ. Pour un tel élément h, int_h se restreint en un torseur intérieur de H_γ sur $H_{\gamma'}$. Pour les éléments de $H_{z,\tilde{G}-reg}(F)$, la conjugaison stable se confond avec la conjugaison par H.

Lemme. *Soit $\epsilon \in H_z(F)_{p'}$.*

(i) Il existe $\epsilon' \in H_z(F)_{p'}$ qui est stablement conjugué à ϵ et tel que $H_{\epsilon'}$ est quasi-déployé.

(ii) Soient ϵ' vérifiant les conditions de (i) et γ un élément de $H_{z,\tilde{G}-reg}(F) \cap H_z(F)_c$ tel que $\gamma_{p'} = \epsilon$. Alors il existe un élément $\gamma' \in H_{z,\tilde{G}-reg}(F) \cap H_z(F)_c$ qui est stablement conjugué à γ et tel que $\gamma'_{p'} = \epsilon'$.

(iii) Supposons $\epsilon \in K_z$. Alors H_ϵ est non ramifié et $K_H \cap H_\epsilon(F)$ est un sous-groupe hyperspécial de $H_\epsilon(F)$.

(iv) Supposons H_ϵ quasi-déployé. Alors ϵ est stablement conjugué à un élément de K_z si et seulement si H_ϵ est non ramifié.

Preuve. Le (i) résulte de [K1] lemme 3.3. Evidemment, ce lemme est énoncé pour un groupe tel que H et non pour un espace tordu comme H_z mais on vérifie que la torsion par le cocycle z_H n'influe pas sur la démonstration.

Le (ii) résulte de [K1] corollaire 2.2.

Le (iii) est le (i) du lemme 4.1 appliqué à H_z au lieu de $\tilde{G}$, ce qui est loisible d'après ce que l'on a dit en 2.9.

La partie "seulement si" du (iv) résulte de (iii). Inversement, supposons H_ϵ non ramifié. Soit $T^{\flat*}$ un sous-tore maximal de H_ϵ, défini sur F et déployé sur F^{nr}. Les deux tores $T^{\flat*}$ et T_H sont maximaux dans H et déployés sur F^{nr}. Il existe donc $h \in H(F^{nr})$ tel que $int_h(T^{\flat*}) = T_H$. Puisque les deux tores sont définis sur F, on a $\phi(h)h^{-1} \in Norm_H(T_H)$. On sait que $Norm_H(T_H) \cap K_H^{nr}$ s'envoie surjectivement sur Ω_H. En fait, on montre, par exemple en utilisant des sections de Springer, qu'il existe un sous-groupe fini de $Norm_H(T_H) \cap K_H^{nr}$, invariant par Γ^{nr}, qui s'envoie surjectivement sur Ω_H. Un tel sous-groupe est contenu dans $K^{nr}_{H,\phi-fin}$ (cf. la preuve du lemme précédent pour la définition et les propriétés de cet ensemble). On peut donc trouver $k \in K_H^{nr}$ tel que $\phi(k)k^{-1} \in Norm_H(T_H)$ et que cet élément ait même image que $\phi(h)h^{-1}$ dans Ω_H. Posons $T' = int_{k^{-1}}(T_H)$. C'est un sous-tore maximal de H déployé sur F^{nr}. Puisque $\phi(k)k^{-1} \in Norm_H(T_H)$, T' est défini sur F. On a $int_{k^{-1}h}(T^{\flat*}) = T'$ et on vérifie que $\phi(k^{-1}h)^{-1}k^{-1}h$ appartient à $T^{\flat*}$. Posons $\epsilon' = int_{k^{-1}h}(\epsilon)$. Les conditions précédentes entraînent que $\epsilon' \in H_z(F)_{p'}$ et ϵ' est stablement conjugué à ϵ. On a $int_h(\epsilon) \in T_{H,p'} = T_H(\mathfrak{o}_{F^{nr}})_{p'} \subset K_H^{nr}$. Donc aussi $\epsilon' = int_{k^{-1}} \circ int_h(\epsilon) \in K_H^{nr}$. Puisque $\epsilon' \in H_z(F)$, on a en fait $\epsilon' \in K_z$. L'élément ϵ' vérifie donc les conditions requises, ce qui prouve (iv). $\square$

4.4 Correspondance entre classes de conjugaison, compacité, éléments d'ordre fini premier à p

Lemme. *Soient γ, resp. δ, un élément semi-simple de $H_z(F)$, resp. $\tilde{G}(F)$. Supposons que les classes de conjugaison de γ et δ se correspondent, cf. 2.10. Alors γ est compact, resp. d'ordre fini premier à p, si et seulement si δ l'est.*

Preuve. Dire que les classes de conjugaison de γ et δ se correspondent signifie qu'il existe $h \in H$, $g \in G$ et $\nu \in T$ de sorte que $int_g(\delta) = \nu\theta^*$ et $int_{h^{-1}} \circ \xi(\nu) = \gamma$. Fixons de tels éléments. Supposons δ compact ou δ d'ordre fini premier à p. Ces propriétés se conservent par conjugaison. Donc $\nu\theta^*$ est compact ou d'ordre fini premier à p. Soit N l'ordre de θ^*. Alors $(\nu\theta^*)^N$ est compact ou d'ordre fini premier à p, donc aussi $\xi(\nu\theta^*)^N$. Mais on a l'égalité :

$$(\nu\theta^*)^N = \nu^N(\theta^*(\nu)\nu^{-1})...((\theta^*)^{N-1}(\nu)\nu^{-1}).$$

Pour tout $i \geq 1$,

$$(\theta^*)^i(\nu)\nu^{-1} = \prod_{j=1,...,i} (\theta^*)^j(\nu)(\theta^*)^{j-1}(\nu^{-1}).$$

Un tel élément est annulé par ξ. Donc $\xi(\nu\theta^*)^N = \xi(\nu)^N$. Puisque N est premier à p grâce à l'hypothèse (Hyp1), $\xi(\nu)$ est compact ou d'ordre fini premier à p. Par conjugaison, il en est de même de γ.

Inversement, supposons γ compact ou d'ordre fini premier à p. Posons $\mu = int_h(\gamma)$. C'est un élément de T_H qui est compact ou d'ordre fini premier à p. Donc $\mu \in T_H(\mathfrak{o}_{\bar{F}})$ ou $\mu \in T_H(\mathfrak{o}_{F^{nr}})_{p'}$. De l'homomorphisme ξ se déduit un homomorphisme surjectif de $X_*(T)$ sur $X_*(T_H)$ (pour la suite du raisonnement, il suffirait que son image soit de conoyau fini d'ordre premier à p). On n'a aucun mal à en déduire que les homomorphismes :

$$\xi : T(\mathfrak{o}_{\bar{F}}) \to T_H(\mathfrak{o}_{\bar{F}}) \text{ et } \xi : T(\mathfrak{o}_{F^{nr}})_{p'} \to T_H(\mathfrak{o}_{F^{nr}})_{p'}$$

sont surjectifs. On peut donc choisir $\nu' \in T(\mathfrak{o}_{\bar{F}})$ ou $\nu' \in T(\mathfrak{o}_{F^{nr}})_{p'}$ tel que $\xi(\nu') = \mu$. Il est clair que $\nu'\theta^*$ est compact ou d'ordre fini premier à p. On a $\xi(\nu') = \xi(\nu)$, donc il existe $t \in T$ tel que $\nu = t\theta^*(t)^{-1}\nu'$. Alors $\nu\theta^* = int_t(\nu'\theta^*)$ et $\nu\theta^*$ est lui-aussi compact ou d'ordre fini premier à p. Comme au début de la preuve, δ a les mêmes propriétés. $\square$

4.5 Diagrammes

On appelle diagramme modérément ramifié un heptuplet $D = (\epsilon, T^\flat, T^\diamond, T^\natural, h, g, \eta)$ vérifiant les conditions suivantes. Le terme ϵ est un élément de $H_z(F)_{p'}$. Le terme η est un élément de $\tilde{K} \cap \tilde{G}(F)_{p'}$. Les termes $T^\flat$, resp. $T^\diamond$, $T^\natural$, sont des sous-tores maximaux et définis sur F de H_ϵ, resp. G, G_η, et $T^\diamond$ est le commutant de $T^\natural$ dans G. Le terme h, resp. g, est un élément de H_{SC}, resp. G_{SC}. On suppose que $int_h(T^\flat) = T_H$, $int_g(T^\diamond) = T$ et que l'homomorphisme composé :

$$int_{h^{-1}} \circ \xi \circ int_g : T^\diamond \to T^\flat$$

est défini sur F. On suppose que $int_g(\eta)$ appartient à $T\theta^*$ et, si l'on note $\nu_D\theta^*$ cet élément, on a l'égalité $int_{h^{-1}} \circ \xi(\nu_D) = \epsilon$.

On dit que le diagramme D ci-dessus est fortement non ramifié s'il vérifie de plus les conditions suivantes : $\epsilon \in K_z \cap H_z(F)_{p'}$, $h \in K_{H,sc}^{nr}$, $g \in K_{sc}^{nr}$.

On utilisera une terminologie naturelle, par exemple on dira qu'un diagramme D comme ci-dessus joint ϵ à η, que ϵ est la source de D et η son extrémité. Il est clair que, s'il existe un diagramme modérement ramifié joignant ϵ à η, les classes de conjugaison de ces deux éléments se correspondent.

Lemme. *(i) Soit* $\gamma\in H_{z,\tilde{G}-reg}(F)\cap H_z(F)_c$. *Supposons qu'il existe* $\delta\in\tilde{K}\cap\tilde{G}_{reg}(F)$ *dont la classe de conjugaison corresponde à celle de* γ. *Posons* $\epsilon=\gamma_{p'}$. *Alors il existe un diagramme modérément ramifié de source* ϵ.

(ii) Soit $\epsilon\in K_z\cap H_z(F)_{p'}$. *Alors il existe un diagramme fortement non ramifié de source* ϵ.

Preuve. Fixons δ vérifiant l'hypothèse de (i). Comme on l'a dit dans la preuve du lemme précédent, dire que les classes de conjugaison de γ et δ se correspondent signifie qu'il existe $h'\in H$, $g'\in G$ et $\nu'\in T$ de sorte que $int_{g'}(\delta)=\nu'\theta^*$ et $int_{h'^{-1}}\circ\xi(\nu')=\gamma$. On peut remplacer h' par un élément $h\in H_{SC}$ qui a même image que h' dans H_{AD}. Ecrivons $g'=zg$, où $z\in Z_G$ et $g\in G_{SC}$. Posons $\nu=z\theta^*(z)^{-1}\nu'$. Alors $int_g(\delta)=\nu\theta^*$ et $\xi(\nu)=\xi(\nu')$, donc encore $int_{h^{-1}}\circ\xi(\nu)=\gamma$. Posons $T^\natural=G_\delta$ et notons $T^\diamond$ le commutant de $T^\natural$ dans G. On a $int_g(T^\natural)=G_{\nu\theta^*}$ et $int_g(T^\diamond)$ est le commutant de ce groupe. Or, celui-ci contient $T^{\theta^*,0}$, donc son commutant est contenu dans T. Par égalité des dimensions, cela entraîne $int_g(T^\natural)=T^{\theta^*,0}$ et $int_g(T^\diamond)=T$. Posons $T^\flat=H_\gamma$. On a de même $int_h(T^\flat)=T_H$. Soit $\sigma\in\Gamma$. Parce que T et $T^\diamond$ sont définis sur F, $g\sigma(g^{-1})$ normalise T. Donc cet élément définit un élément $\omega_D(\sigma)\in\Omega$. Pour la même raison, cet élément conserve $T^{\theta^*,0}$, donc appartient à Ω^{θ^*}. Introduisons le groupe $G_{SC}^{\theta^*,0}$: c'est, au choix, le revêtement simplement connexe du groupe dérivé de $G^{\theta^*,0}$ ou la composante neutre du sous-groupe des points fixes par θ^* dans G_{SC}. On sait que son groupe de Weyl est Ω^{θ^*}. On peut donc écrire $\sigma(g)g^{-1}=tn$, avec $t\in T_{sc}$ et $n\in G_{SC}^{\theta^*,0}$. L'égalité $int_g(\delta)=\nu\theta^*$ et le fait que $\delta\in\tilde{G}(F)$ entraînent que :

$$\sigma(\nu)\theta^*=z(\sigma)^{-1}int_{\sigma(g)g^{-1}}(\nu\theta^*),$$

d'où :

$$\sigma(\nu)=z(\sigma)^{-1}tn\nu n^{-1}\theta^*(t)^{-1}=z(\sigma)^{-1}t\theta^*(t)^{-1}\omega_D(\sigma)^{-1}(\nu).$$

De même, l'élément $h\sigma(h)^{-1}$ normalise T_H. Il définit un élément $\omega_{D,H}(\sigma)\in\Omega^H$. En posant $\mu=int_h(\gamma)$, on a l'égalité :

$$\sigma(\mu)=z_H(\sigma)^{-1}\omega_{D,H}(\sigma)^{-1}(\mu).$$

On a dit en 2.9 que Ω^H s'identifiait à un sous-groupe de Ω^{θ^*}. De plus, il existe un élément $\omega(\sigma)\in\Omega^{\theta^*}$ de sorte que $\sigma\circ\xi=\xi\circ\omega(\sigma)\circ\sigma$. Posons $\omega_0(\sigma)=\omega_{D,H}(\sigma)\omega(\sigma)\omega_D(\sigma)^{-1}$. Puisque $\xi(\nu)=\mu$, les égalités précédentes entraînent :

$$\xi\circ\omega_0(\sigma)(\nu)=\xi(\nu).$$

Comme ci-dessus, on peut représenter $\omega_0(\sigma)$ par un élément $n_0\in G_{SC}^{\theta^*,0}$. Il existe alors $t_0\in T$ de sorte que $int_{n_0}(\nu)=t_0^{-1}\theta^*(t_0)\nu$. Donc t_0n_0 commute à $\nu\theta^*$. On a déjà dit que le commutant de $\nu\theta^*$ était inclus dans T (il est en fait égal à T^{θ^*}). Donc $\omega_0(\sigma)=1$. Considérons l'application :

$$(1)\qquad int_{h^{-1}}\circ\xi\circ int_g:T^\diamond\to T^\flat.$$

On calcule :

$$\sigma\circ int_{h^{-1}}\circ\xi\circ int_g=int_{h^{-1}}\circ\xi\circ\omega_0(\sigma)\circ int_g\circ\sigma.$$

L'égalité $\omega_0(\sigma)=1$ entraîne que l'application (1) est équivariante pour les actions de Γ. Posons $\eta=\delta_{p'}$. Rappelons que cet élément appartient à l'adhérence du groupe engendré dans G^+ par δ. Donc $\eta \in \tilde{K}$. En reprenant les arguments de la preuve du lemme 4.4, on vérifie que $int_g(\eta) \in T\theta^*$ et, si l'on note $\nu_D\theta^*$ cet élément, on a $int_{h^{-1}} \circ \xi(\nu_D) = \epsilon$. Alors :

$$D = (\epsilon, T^\flat, T^\diamond, T^\natural, h, g, \eta)$$

est un diagramme modérément ramifié de source ϵ, ce qui prouve (i).

Soit $\epsilon \in K_z \cap H_z(F)_{p'}$. Le groupe $K_H \cap H_\epsilon(F)$ est un sous-groupe hyperspécial de $H_\epsilon(F)$ (lemme 4.3(iii)). Fixons un sous-tore de H_ϵ défini sur F et maximal tel que $K_H \cap H_\epsilon(F)$ fixe un point hyperspécial de l'appartement de $Imm(H_\epsilon, F)$ associé à ce tore. Notons $T^\flat$ le commutant de ce tore dans H_ϵ. C'est un sous-tore maximal de H_ϵ, défini sur F et déployé sur F^{nr}. En appliquant la relation (1) de 4.1 où on remplace $\tilde{G}$ par H_z, on voit qu'il existe $h_0 \in K_H^{nr}$ et $\mu \in T_H(\mathfrak{o}_{F^{nr}})$ tels que $int_{h_0}(\epsilon) = \mu$. Les deux tores $int_{h_0}(T^\flat)$ et T_H sont des tores maximaux de H_μ, déployés sur F^{nr}, et $K_H^{nr} \cap H_\mu(F^{nr})$ fixe un point hyperspécial dans chacun des appartements de $Imm(H_\mu, F^{nr})$ associés à ces tores. Il en résulte que ces tores sont conjugués par un élément de $K_H^{nr} \cap H_\mu(F^{nr})$. Quitte à multiplier h_0 à gauche par cet élément, on peut supposer $int_{h_0}(T^\flat) = T_H$. Le groupe $K_{H,sc}^{nr}$ s'envoie surjectivement sur $K_{H,ad}^{nr}$ et on peut aussi bien remplacer h_0 par un élément $h \in K_{H,sc}^{nr}$ qui a même image que h_0 dans $K_{H,ad}^{nr}$. On a noté ϕ l'élément de Frobenius de Γ^{nr}, on le relève en un élément ϕ de Γ. Comme plus haut, on a les égalités $\phi \circ \xi = \xi \circ \omega(\phi) \circ \phi$ et $int_{h\phi(h)^{-1}} \circ \xi = \xi \circ \omega_{D,H}(\phi)$. Posons $\omega_D(\phi) = \omega_{D,H}(\phi)\omega(\phi)$. L'application $K_{sc}^{nr} \cap Norm_{G_{SC}^{\theta^*,0}}(T_{sc}^{\theta^*,0}) \to \Omega^{\theta^*}$ est surjective. Par le même argument utilisé dans la preuve du lemme 4.3(iv), on voit qu'il existe $g \in K_{sc}^{nr} \cap G_{K,SC}^{\theta^*,0}$ tel que $g\phi(g^{-1})$ appartienne à $Norm_{G_{SC}^{\theta^*,0}}(T_{sc}^{\theta^*,0})$ et ait $\omega_D(\phi)$ pour image dans Ω^{θ^*}. Posons $T^\diamond = int_{g^{-1}}(T)$. La définition de g entraîne :

- $T^\diamond$ est défini sur F et invariant par θ^* ;
- l'application :

$$(2) \qquad int_{h^{-1}} \circ \xi \circ int_g : T^\diamond \to T^\flat$$

est définie sur F et se quotiente en un isomorphisme défini sur F de $T_{\diamond,/\theta^*}$ sur $T^\flat$.

Comme on l'a dit dans la preuve du lemme 4.4, ξ envoie $T(\mathfrak{o}_{F^{nr}})_{p'}$ sur $T_H(\mathfrak{o}_{F^{nr}})_{p'}$. Soit $\nu \in T(\mathfrak{o}_{F^{nr}})_{p'}$ tel que $\xi(\nu) = \mu$. Posons $\rho = int_{g^{-1}}(\nu)$. C'est un élément de $T^\diamond(\mathfrak{o}_{F^{nr}})_{p'}$. Un calcul analogue à l'un de ceux faits dans la preuve de (i) montre qu'il existe $t \in T^\diamond$ tel que $\phi(\rho) = z(\phi)t\theta^*(t)^{-1}\rho$. Comme dans la preuve du lemme 4.1(ii), on peut remplacer t par un élément de $T^\diamond(\mathfrak{o}_{F^{nr}})_{p'}$. Or $H^1(\Gamma^{nr}, T^\diamond(\mathfrak{o}_{F^{nr}})_{p'}) = 0$, puisque $T^\diamond(\mathfrak{o}_{F^{nr}})_{p'} \simeq \mathbf{T}^\diamond(\bar{\mathbb{F}}_q)$. On peut fixer $t_1 \in T^\diamond(\mathfrak{o}_{F^{nr}})_{p'}$ tel que $t = t_1\phi(t_1)^{-1}$. Posons $\eta = t_1\rho\theta^*t_1^{-1}$. C'est un élément de $G(F^{nr})\theta^*$ et on voit qu'il vérifie la relation $\phi(\eta) = z(\phi)\eta$. Donc $\eta \in \tilde{G}(F)$. Puisque ν, g et t_1 appartiennent à K^{nr}, η appartient à $\tilde{K}$. Comme ν, c'est un élément d'ordre fini premier à p. En posant $T^\natural = T^{\diamond,\theta^*,0}$, on vérifie que $(\epsilon, T^\flat, T^\diamond T^\natural, h, g, \eta)$ est un diagramme non ramifié. $\square$

4.6 Construction d'une nouvelle donnée endoscopique

Soit $D = (\epsilon, T^\flat, T^\diamond T^\natural, h, g, \eta)$ un diagramme modérément ramifié. On pose $\nu = \nu_D$ et $\bar{G} = G_\eta$. D'après le lemme 4.1(i), $\bar{G}$ est quasi-déployé sur F. On fixe une paire de Borel $(\bar{B}, \bar{T})$ définie sur F de $\bar{G}$. Le couple $(int_{g^{-1}}(B) \cap \bar{G}, T^\natural)$ est aussi une paire de Borel de $\bar{G}$. On fixe $g_0 \in \bar{G}_{SC}$ tel que int_{g_0} envoie la première paire sur la seconde.

On suppose que H_ϵ est quasi-déployé sur F. On fixe une paire de Borel $(B^{\flat *}, T^{\flat *})$ définie sur F de H_ϵ et un élément $h_0 \in H_{\epsilon,SC}$ tel que int_{h_0} envoie cette paire sur $(int_{h^{-1}}(B_H) \cap H_\epsilon, T^\flat)$.

On va identifier $\bar{T}$ à $T^{\theta^*,0}$ et $T^{\flat *}$ à $T_{/\theta^*}$. Ces identifications ne sont pas équivariantes pour les actions de Γ et on va distinguer les différentes actions dans la notation. Pour $\sigma \in \Gamma$, on note simplement σ l'action naturelle de σ sur $T^{\theta^*,0}$ ou $T_{/\theta^*}$, on note $\sigma_{\bar{T}}$ l'action sur $T^{\theta^*,0}$ transportée de l'action naturelle sur $\bar{T}$ et on note $\sigma_{T^{\flat *}}$ l'action sur $T_{/\theta^*}$ transportée de l'action naturelle sur $T^{\flat *}$. On note de la même façon les actions duales sur $\hat{T}_{/\hat{\theta}}$ ou $\hat{T}^{\hat{\theta},0}$. On identifie $\bar{T}$ à $T^{\theta^*,0}$ par l'application int_{gg_0}. Cette application identifie le groupe de Weyl de $\bar{G}$ relatif à $\bar{T}$ à un sous-groupe de Ω^{θ^*}. Par abus de notation, c'est ce dernier que nous notons $\Omega_{\bar{G}}$. Pour $\sigma \in \Gamma$, on a l'égalité d'actions sur $T^{\theta^*,0}$:

$$(1) \qquad \sigma_{\bar{T}} = \omega_{\bar{G}}(\sigma)\omega_D(\sigma) \circ \sigma,$$

où $\omega_{\bar{G}}(\sigma)$ est l'image dans $\Omega_{\bar{G}}$ de $gg_0\sigma(g_0)^{-1}g^{-1}$ et, comme dans la preuve du lemme 4.5, $\omega_D(\sigma)$ est l'image dans Ω^{θ^*} de $g\sigma(g)^{-1}$. On identifie $T^\flat$ à $T_{/\theta^*}$ par $\xi^{-1} \circ int_{hh_0}$. Cette application identifie le groupe de Weyl de H_ϵ relatif à $T^\flat$ à un sous-groupe de Ω_H, lui-même sous-groupe de Ω^{θ^*}. C'est ce sous-groupe que l'on note Ω_{H_ϵ}. Pour $\sigma \in \Gamma$, on a l'égalité d'actions sur $T_{/\theta^*}$:

$$(2) \qquad \sigma_{T^{\flat *}} = \omega_{H_\epsilon}(\sigma)\omega_{D,H}(\sigma)\omega(\sigma) \circ \sigma,$$

où $\omega_{H_\epsilon}(\sigma)$ est l'image dans Ω_{H_ϵ} de $hh_0\sigma(h_0^{-1})h^{-1}$, $\omega_{D,H}(\sigma)$ est l'image dans Ω_H de $h\sigma(h^{-1})$ et $\omega(\sigma) \in \Omega^{\theta^*}$ est l'élément tel que $\sigma_{T_H} \circ \xi = \xi \circ \omega(\sigma) \circ \sigma$, σ_{T_H} étant l'action naturelle sur T_H.

Les formules (1) et (2) permettent d'étendre chacune des actions galoisiennes à T, ou à tout tore déduit naturellement de T ($T^{\theta^*,0}$, $\hat{T}$ etc...). Par le même calcul que l'on a fait dans la preuve du lemme 4.5, le fait que $int_{h^{-1}} \circ \xi \circ int_g : T^\diamond \to T^\flat$ soit défini sur F équivaut à l'égalité :

$$\omega_{D,H}(\sigma)\omega(\sigma) = \omega_D(\sigma).$$

La comparaison des formules (1) et (2) conduit à l'égalité :

$$(3) \qquad \sigma_{T^\flat} = \omega_{H_\epsilon}(\sigma)\omega_{\bar{G}}(\sigma)^{-1}\sigma_{\bar{T}}.$$

Introduisons le L-groupe ${}^L\bar{G} = \hat{\bar{G}} \rtimes W$. Fixons une paire de Borel $(\hat{\bar{B}}, \hat{\bar{T}})$ de $\hat{\bar{G}}$ conservée par l'action de W. De l'identification de $\bar{T}$ à $T^{\theta^*,0}$ résulte une identification de $\hat{\bar{T}}$ à $\hat{T}_{/\hat{\theta}}$. Notons $s_\sharp$ l'image de s dans $\hat{T}_{/\hat{\theta}}$ et $\hat{H}_\sharp = \hat{\bar{G}}_{s_\sharp} = Z_{\hat{\bar{G}}}(s_\sharp)^0$. On munira plus loin ce groupe d'une action de Γ. Pour l'instant, contentons-nous d'introduire le groupe réductif connexe $H_\sharp$ sur $\bar{F}$ dont $\hat{H}_\sharp$ est le groupe dual. On fixe une paire de Borel épinglée $(B_\sharp, T_\sharp, (E_{\alpha_\sharp})_{\alpha_\sharp \in \Sigma_\sharp})$ de $H_\sharp$. Le tore $T_\sharp$ s'identifie à $\bar{T} \simeq T^{\theta^*,0}$.

On va décrire les ensembles de racines et coracines de différents groupes. Posons pour simplifier $X_* = X_*(T)$ et $X^* = X^*(T)$. Rappelons que l'on dispose de l'ensemble de racines $\Sigma \subset X^*$ et de l'ensemble de coracines $\check{\Sigma} \subset X_*$. Le groupe Θ^* agit sur ces ensembles. Pour $\alpha \in \Sigma$, on note n_α le nombre d'éléments de l'orbite de α pour cette action et $N\alpha$ la somme des éléments de cette orbite. On définit de même $n_{\check{\alpha}}$ et $N\check{\alpha}$ pour $\check{\alpha} \in \check{\Sigma}$. Posons :

$$Y^* = X^*/(X^* \cap (1-\theta^*)(X^*_{\mathbb{Q}})), \; Y_* = X_*/(X_* \cap (1-\theta^*)(X_{*,\mathbb{Q}})),$$

et notons $p^* : X^* \to Y^*$ et $p_* : X_* \to Y_*$ les applications naturelles. Remarquons que Y^* est le dual de $X_*^{\theta^*}$ tandis que Y_* est le dual de X^{*,θ^*}. D'après [KS] 1.3, on distingue trois types de racines. Pour $\alpha \in \Sigma$, on dit que α est de type 1 si $2p^*(\alpha)$ et $\frac{1}{2}p^*(\alpha)$

n'appartiennent pas à $p^*(\Sigma)$; on dit que α est de type 2 si $2p^*(\alpha) \in p^*(\Sigma)$; on dit que α est de type 3 si $\frac{1}{2}p^*(\alpha) \in p^*(\Sigma)$. On montre que ces deux dernières conditions sont exclusives l'une de l'autre. Si α est de type 2, alors n_α est pair. L'application $\alpha \mapsto \alpha + (\theta^*)^{n_\alpha/2}(\alpha)$ est une surjection de l'ensemble des racines de type 2 sur celui des racines de type 3, dont toutes les fibres ont deux éléments. On dit qu'un élément $\check{\alpha} \in \check{\Sigma}$ est de type 1, 2 ou 3 si la racine α associée est de ce type. Posons :

$$\Sigma^{res} = p^*(\Sigma) \subset Y^*,$$

$$\check{\Sigma}^{res} = \{N\check{\alpha}; \check{\alpha} \in \check{\Sigma},\ \check{\alpha}\ de\ type\ 1\ ou\ 3\} \cup \{2N\check{\alpha}; \check{\alpha} \in \check{\Sigma},\ \check{\alpha}\ de\ type\ 2\} \subset X_*^{\theta^*},$$

$$\Sigma_{res} = \{N\alpha; \alpha \in \Sigma,\ \alpha\ de\ type\ 1\ ou\ 3\} \cup \{2N\alpha; \alpha \in \Sigma,\ \alpha\ de\ type\ 2\} \subset X^{*,\theta^*},$$

$$\check{\Sigma}_{res} = p_*(\check{\Sigma}) \subset Y_*.$$

D'après [KS] 1.3, Σ^{res} est l'ensemble des racines de $G^{\theta^*,0}$ relatif à $T^{\theta^*,0}$ et $\check{\Sigma}^{res}$ est l'ensemble de coracines associé. De même $\check{\Sigma}_{res}$ est l'ensemble des racines de $\hat{G}^{\hat{\theta},0}$ relatif à $\hat{T}^{\hat{\theta},0}$ et Σ_{res} est l'ensemble de coracines associé.

Remarquons que H_ϵ et $H_\sharp$ s'obtiennent par composition de deux opérations analogues, mais qui ne sont pas prises dans le même ordre. En effet, pour définir H_ϵ, on commence par prendre le commutant de $s\hat{\theta}$ dans $\hat{G}$, ce qui nous fournit $\hat{H}$, puis on prend le commutant de ϵ dans H. Pour définir $H_\sharp$, on commence par prendre le commutant de η dans G, ce qui nous fournit $\bar{G}$, puis on prend le commutant de $s_\sharp$ dans $\hat{\bar{G}}$, ce qui nous fournit $\hat{H}_\sharp$. En appliquant la recette de [KS] 1.3, on peut décrire les ensembles de racines et coracines de H_ϵ relatifs à $T^{\flat *}$ et ceux de $H_\sharp$ relatifs à $T_\sharp$. On note ces ensembles Σ_{H_ϵ}, $\check{\Sigma}_{H_\epsilon}$, $\Sigma_\sharp$ et $\check{\Sigma}_\sharp$. Alors :

$$\Sigma_{H_\epsilon} = \{N\alpha; \alpha \in \Sigma, \alpha\ de\ type\ 1,\ N\check{\alpha}(s) = 1,\ N\alpha(\nu) = 1\} \cup$$

$$\{2N\alpha; \alpha \in \Sigma,\ \alpha\ de\ type\ 2,\ N\check{\alpha}(s) = 1,\ N\alpha(\nu) = \pm 1\} \cup$$

$$\{N\alpha; \alpha \in \Sigma, \alpha\ de\ type\ 3,\ N\check{\alpha}(s) = -1,\ N\alpha(\nu) = 1\};$$

$$\check{\Sigma}_{H_\epsilon} = \{p_*(\check{\alpha}); \check{\alpha} \in \check{\Sigma},\ (N\check{\alpha}(s), N\alpha(\nu)) = \begin{cases} (1,1), & si\ \check{\alpha}\ est\ de\ type\ 1, \\ (1,\pm 1), & si\ \check{\alpha}\ est\ de\ type\ 2, \\ (-1,1), & si\ \check{\alpha}\ est\ de\ type\ 3 \end{cases} \};$$

$$\Sigma_\sharp = \{p^*(\alpha); \alpha \in \Sigma,\ (N\check{\alpha}(s), N\alpha(\nu)) = \begin{cases} (1,1), & si\ \alpha\ est\ de\ type\ 1, \\ (\pm 1,1), & si\ \alpha\ est\ de\ type\ 2, \\ (1,-1), & si\ \alpha\ est\ de\ type\ 3 \end{cases} \};$$

$$\check{\Sigma}_\sharp = \{N\check{\alpha}; \check{\alpha} \in \check{\Sigma}, \check{\alpha}\ de\ type\ 1,\ N\check{\alpha}(s) = 1,\ N\alpha(\nu) = 1\} \cup$$

$$\{2N\check{\alpha}; \check{\alpha} \in \check{\Sigma},\ \check{\alpha}\ de\ type\ 2,\ N\check{\alpha}(s) = \pm 1,\ N\alpha(\nu) = 1\} \cup$$

$$\{N\check{\alpha}; \check{\alpha} \in \check{\Sigma}, \check{\alpha}\ de\ type\ 3,\ N\check{\alpha}(s) = 1,\ N\alpha(\nu) = -1\}.$$

De l'application naturelle de $X_*^{\theta^*}$ dans Y_* se déduit un isomorphisme de $X_{*,\mathbb{Q}}^{\theta^*}$ sur $Y_{*,\mathbb{Q}}$. On note j_* son inverse. On note $j^* : Y_{\mathbb{Q}}^* \to X_{\mathbb{Q}}^{*,\theta^*}$ l'isomorphisme transposé de j_*. On voit alors que les ensembles de racines ci-dessus vérifient une partie des hypothèses de 3.5, c'est-à-dire qu'il existe des bijections $j_{\check{\Sigma}} : \check{\Sigma}_{H_\epsilon} \to \check{\Sigma}_\sharp$ et $j_\Sigma : \Sigma_\sharp \to \Sigma_{H_\epsilon}$ et des fonctions $\check{b} : \check{\Sigma}_{H_\epsilon} \to \mathbb{Q}_{>0}$ et $b : \Sigma_\sharp \to \mathbb{Q}_{>0}$ vérifiant les conditions de ce paragraphe. Pour $p^*(\alpha) \in \Sigma_\sharp$, avec α de type 1, on a simplement $j_\Sigma(p^*(\alpha)) = N\alpha$ et $b(p^*(\alpha)) = n_\alpha$. Pour les racines de type 2 ou 3, la définition est plus subtile, cf. [W1] 3.3. Comme on l'a dit en 3.5, cela a pour conséquence que le groupe de Weyl Ω_{H_ϵ} s'identifie au groupe de Weyl $\Omega_\sharp$ de $H_\sharp$. Ce groupe est donc contenu dans $\Omega_H \cap \Omega_{\bar{G}}$. Soit $\sigma \in \Gamma$. Montrons que :

(4) $\sigma_{T^{\flat *}}$ conserve $\Sigma_\sharp$.

Notons $\Sigma_{\bar{G}} \subset \Sigma^{res}$ l'ensemble des racines de $\bar{G}$. Remarquons que $\Sigma_\sharp$ est égal au sous-ensemble des éléments de $\Sigma_{\bar{G}}$ qui sont proportionnels à un élément de $(j^*)^{-1}(\Sigma_{H_\epsilon})$. L'action $\sigma_{T^{\flat *}}$ conserve Σ_{H_ϵ} par définition, donc aussi le sous-ensemble des éléments de $Y^*_{\mathbb{Q}}$ qui sont proportionnels à un élément de $(j^*)^{-1}(\Sigma_{H_\epsilon})$. Il suffit de prouver qu'elle conserve aussi $\Sigma_{\bar{G}}$. Mais cet ensemble est conservé par $\sigma_{\bar{T}}$ par définition de cette dernière action, et est aussi conservé par $\Omega_{\bar{G}}$. Alors l'égalité (3) entraîne la propriété requise.

Le sous-groupe de Borel B détermine des sous-ensembles positifs dans Σ, Σ^{res} etc..., en particulier dans Σ_{H_ϵ} et $\Sigma_\sharp$. Par construction, ces derniers sont aussi les sous-ensembles positifs déterminés par $B^{\flat *}$, resp. $B_\sharp$. L'action $\sigma_{T^{\flat *}}$ conserve le sous-ensemble positif de Σ_{H_ϵ}, donc aussi celui de $\Sigma_\sharp$. Cela permet de munir $H_\sharp$ de l'unique action galoisienne qui conserve la paire de Borel épinglée que l'on a fixée et dont l'action induite sur $T_\sharp$ est $\sigma \mapsto \sigma_{T^{\flat *}}$. Ainsi, $H_\sharp$ devient un groupe réductif défini et quasi-déployé sur F.

Notons $\hat{\bar{T}}_{ad}$ l'image de $\hat{\bar{T}} \simeq \hat{T}_{/\hat{\theta}}$ dans $\hat{\bar{G}}_{AD}$. On note $\bar{s}$ l'image de $s_\sharp$ dans $\hat{\bar{T}}_{ad}$ et $\hat{\bar{H}} = \hat{\bar{G}}_{AD,\bar{s}} = Z_{\hat{\bar{G}}_{AD}}(\bar{s})^0$. On introduit le groupe réductif connexe $\bar{H}$ sur $\bar{F}$ dont $\hat{\bar{H}}$ est le groupe dual. Il y a une suite d'homomorphismes :

$$\hat{H}_\sharp \to \hat{\bar{H}} \to \hat{H}_{\sharp,AD} = \hat{\bar{H}}_{AD},$$

et dualement une suite d'homomorphismes :

$$\bar{H}_{SC} = H_{\sharp,SC} \to \bar{H} \to H_\sharp.$$

A cause de l'égalité (3), l'action $\sigma \mapsto \sigma_{T^{\flat *}}$ conserve $Z_{\hat{\bar{G}}}$. Il en résulte que l'action galoisienne sur $\hat{H}_\sharp$ se descend en une action sur $\hat{\bar{H}}$ et, dualement, l'action galoisienne sur $H_\sharp$ se relève en une action sur $\bar{H}$. Ainsi, $\bar{H}$ est un groupe réductif connexe défini et quasi-déployé sur F. On note $(B_{\bar{H}}, T_{\bar{H}})$ la paire de Borel de $\bar{H}$ image réciproque de celle de $H_\sharp$ que l'on a fixée. Soit $\sigma \in \Gamma$. Montrons que l'on a l'égalité dans $\hat{\bar{T}}_{ad}$:

(5) $\sigma_{T^{\flat *}}(\bar{s}) = \bar{s}$.

L'action galoisienne étant continue, on peut supposer que σ appartient au sous-groupe W de Γ. Il y a une surjection de $\hat{T}$ sur $\hat{\bar{T}}_{ad}$ et $\bar{s}$ est l'image de s par cette surjection. Relevons l'élément $\omega(\sigma) \in \Omega^{\theta^*}$ en un élément $n \in Norm_{\hat{G}^{\hat{\theta},0}}(\hat{T}^{\hat{\theta},0})$. On a l'égalité $\omega(\sigma) \circ \sigma(s) = int_n \circ \sigma(s)$, d'où $\omega(\sigma) \circ \sigma(s)\hat{\theta} = int_n \circ \sigma(s\hat{\theta})$. Posons $\hat{\xi}(\sigma) = (x, \sigma)$, où $x \in \hat{G}$. Alors x normalise $\hat{T}$ et, d'après les définitions de 2.9, son image dans Ω est égale à $\omega(\sigma)$. Il existe donc $t \in \hat{T}$ tel que $n = tx$. Alors $int_n \circ \sigma(s\hat{\theta}) = t\hat{\theta}(t)^{-1} int_x \circ \sigma(s\hat{\theta})$. Ce dernier élément est égal à $t\hat{\theta}(t)^{-1}a(\sigma)^{-1}s\hat{\theta}$ d'après 2.9(6). D'où la relation :

$$\omega(\sigma) \circ \sigma(s) \in sZ_{\hat{G}}(1-\hat{\theta})(\hat{T}).$$

L'élément s est fixé par tout élément de Ω_H. On en déduit la relation :

$$\omega_{D,H}(\sigma)\omega(\sigma) \circ \sigma(s) \in sZ_{\hat{G}}(1-\hat{\theta})(\hat{T}).$$

On vérifie que $Z_{\hat{G}}(1-\hat{\theta})(\hat{T})$ s'envoie sur l'élément neutre de $\hat{\bar{T}}_{ad}$. On obtient :

$$\omega_{D,H}(\sigma)\omega(\sigma) \circ \sigma(\bar{s}) = \bar{s}.$$

Enfin, l'élément $\bar{s}$ est fixe par $\Omega_\sharp$ par définition de $\hat{H}_\sharp$, donc par $\omega_{H_\epsilon}(\sigma)$. Alors l'égalité (2) entraîne (5).

Pour tout $\sigma \in W$, fixons un élément $y(\sigma) \in Norm_{\hat{\bar{G}}_{AD}}(\hat{\bar{T}}_{ad})$ dont l'image dans $\Omega_{\bar{G}}$ soit $\omega_{H_\epsilon}(\sigma)\omega_{\bar{G}}(\sigma)^{-1}$. Notons $\bar{\mathcal{H}}$ le sous-groupe de ${}^L\bar{G}_{AD}$ engendré par $\hat{\bar{H}}$ et les éléments $(y(\sigma),\sigma)$ pour $\sigma \in W$. Notons $\hat{\bar{\xi}}$ l'injection naturelle de $\bar{\mathcal{H}}$ dans ${}^L\bar{G}_{AD}$. Les égalités (3) et (5) entraînent facilement que $(\bar{H},\bar{\mathcal{H}},\bar{s},\hat{\bar{\xi}})$ est une donnée endoscopique de $\bar{G}_{SC}$ (il s'agit d'endoscopie ordinaire ; si l'on veut utiliser les définitions de 2.9, $\bar{G}_{SC}$ est muni de l'automorphisme et du caractère triviaux).

Dans le cas où le diagramme de départ est fortement non ramifié, il est clair que toutes les applications galoisiennes que l'on a introduites se factorisent en des actions de Γ^{nr} et on voit que $(\bar{H},\bar{\mathcal{H}},\bar{s},\hat{\bar{\xi}})$ est une donnée endoscopique non ramifiée de $\bar{G}_{SC}$.

4.7 Une donnée endoscopique non standard

On conserve les hypothèses du paragraphe précédent. On a introduit dans ce paragraphe des isomorphismes j_* et j^*, que l'on peut considérer comme des applications :

$$j_* : X_*(T^{\flat *})_{\mathbb{Q}} \to X_*(T_\sharp)_{\mathbb{Q}},\ j^* : X^*(T_\sharp)_{\mathbb{Q}} \to X^*(T^{\flat *})_{\mathbb{Q}}.$$

Elles sont équivariantes pour les actions de Γ : on a défini l'action sur $T_\sharp$ pour qu'il en soit ainsi. Introduisons les revêtements simplement connexes $H_{\epsilon,SC}$ et $\bar{H}_{SC}$ des groupes dérivés de H_ϵ et $\bar{H}$. On peut décomposer :

$$(1) \qquad X_*(T^{\flat *})_{\mathbb{Q}} = X_*(T^{\flat *}_{sc})_{\mathbb{Q}} \oplus X_*(Z^0_{H_\epsilon})_{\mathbb{Q}},$$

$$(2) \qquad X_*(T_\sharp)_{\mathbb{Q}} = X_*(T_{\bar{H},sc})_{\mathbb{Q}} \oplus X_*(Z^0_{\bar{H}})_{\mathbb{Q}} \oplus X_*(Z^0_{\bar{G}})_{\mathbb{Q}}.$$

Les correspondances que l'on a établie entre les ensembles de racines et coracines de H_ϵ et $H_\sharp$ entraînent que j_* envoie le premier facteur de (1) sur le premier facteur de (2) et le second facteur de (1) sur la somme des deux derniers de (2). Alors $(H_{\epsilon,SC},\bar{H}_{SC},j_*)$ a toutes les propriétés requises pour être un triplet endoscopique non standard. Si le diagramme D est fortement non ramifié, ce triplet est non ramifié.

De j_* se déduit un isomorphisme :

$$(3) \qquad \mathfrak{t}^{\flat *}_{sc} \oplus \mathfrak{z}_{H_\epsilon} = \mathfrak{t}^{\flat *} \to \mathfrak{t}_\sharp = \mathfrak{t}_{\bar{H},sc} \oplus \mathfrak{z}_{\bar{H}} \oplus \mathfrak{z}_{\bar{G}},$$

qui possède des propriétés similaires à celles de j_*.

4.8 Un triangle de correspondances

On conserve les hypothèses de 4.6. Soit γ un élément compact de $H_{z,\tilde{G}-reg}(F)$ tel que $\gamma_{p'} = \epsilon$. Ecrivons $\gamma = exp(Y)\epsilon$, avec $Y \in \mathfrak{h}_\epsilon(F)_{tn}$. Décomposons Y en $Y_{sc} + Y_Z$, où $Y_{sc} \in \mathfrak{h}_{\epsilon,SC}(F)_{tn}$ et $Y_Z \in \mathfrak{z}_{H_\epsilon}(F)_{tn}$. Notons $\bar{Y}_Z + X_Z$ l'image de Y_Z par l'isomorphisme 4.7(3), avec $\bar{Y}_Z \in \mathfrak{z}_{\bar{H}}(F)_{tn}$ et $X_Z \in \mathfrak{z}_{\bar{G}}(F)_{tn}$. L'élément Y_{sc} est régulier dans $\mathfrak{h}_{\epsilon,SC}(F)$. Par la correspondance endoscopique non standard, sa classe de conjugaison correspond à celle d'un élément de $\bar{\mathfrak{h}}_{SC}(F)_{tn}$. Fixons un tel élément $\bar{Y}_{sc}$. Posons $\bar{Y} = \bar{Y}_{sc}+\bar{Y}_Z$. C'est un élément régulier de $\bar{\mathfrak{h}}(F)$. Puisque $\bar{G}_{SC}$ est quasi-déployé, tout tel élément se transfère, par la correspondance endoscopique entre $\bar{H}$ et $\bar{G}_{SC}$, en un élément de $\bar{\mathfrak{g}}_{SC}(F)$. Fixons un tel élément X_{sc}. Il appartient à $\bar{\mathfrak{g}}_{sc}(F)_{tn}$. Posons $X = X_{sc}+X_Z$ et $\delta = exp(X)\eta$. Alors δ est un élément semi-simple et compact de $\tilde{G}(F)$ et :

(1) la classe de conjugaison de δ correspond à celle de γ.

Dans le paragraphe 4.6, on a identifié $T^{\flat *}$ à $T_{/\theta^*}$ et $T_\sharp$ et $\bar{T}$ à $T^{\theta^*,0}$. Les deux membres de l'égalité (3) de 4.7 s'identifient à $\bar{\mathfrak{t}}$, l'identification n'étant pas cette fois équivariante pour les actions de Γ. Soit $Y_{sc}^* \in \mathfrak{t}_{sc}^{\flat *}$ un élément conjugué à Y_{sc} par un élément de $H_{\epsilon,SC}$. Il s'identifie par l'égalité (3) de 4.7 à un élément $\bar{Y}_{sc}^* \in \mathfrak{t}_{\bar{H},sc}$. L'élément $\bar{Y}_{sc}^*+\bar{Y}_Z$ s'identifie à un élément $X_{sc}^* \in \bar{\mathfrak{t}}_{sc}$. Dire que les classes de conjugaison de Y_{sc} et de $\bar{Y}_{sc}$ se correspondent signifie que $\bar{Y}_{sc}$ est conjugué à $\bar{Y}_{sc}^*$ par un élément de $\bar{H}_{SC}$. Donc $\bar{Y}$ est conjugué à $\bar{Y}_{sc}^*+\bar{Y}_Z$ par un élément de $\bar{H}$. Dire que les classes de conjugaison de $\bar{Y}$ et de X_{sc} se correspondent signifie donc que X_{sc} est conjugué à X_{sc}^* par un élément de $\bar{G}_{SC}$. Donc X est conjugué à $X_{sc}^*+X_Z$ par un élément de $\bar{G}$. L'élément γ est conjugué à $exp(Y_{sc}^*+Y_Z)\epsilon$ par un élément de $H_\epsilon \subset H$. L'élément δ est conjugué à $exp(X_{sc}+X_Z)\eta$ par un élément de $\bar{G} \subset G$. D'après les définitions de ces éléments et de nos identifications, on a l'égalité :

$$int_{hh_0}^{-1} \circ \xi \circ int_{gg_0}(exp(X_{sc}+X_Z)\eta) = exp(Y_{sc}^*+Y_Z)\epsilon.$$

Cela démontre (4).

Puisque $(\bar{H}, \bar{\mathcal{H}}, \bar{s}, \hat{\bar{\xi}})$ est une donnée endoscopique de $\bar{G}_{SC}$, on peut introduire un facteur de transfert $\bar{\Delta}$ défini sur un sous-ensemble adéquat de $\bar{\mathfrak{h}}(F)\times\bar{\mathfrak{g}}_{SC}(F)$ (cf. 3.4 ; dans ce paragraphe, on n'a considéré que des données non ramifiées, mais la définition vaut en général). Dans le cas où D est fortement non ramifié, on le normalise en choisissant pour sous-groupe hyperspécial de $\bar{G}_{SC}(F)$ l'image réciproque $\bar{K}_{sc}$ dans ce groupe du sous-groupe $\bar{K} = K \cap \bar{G}(F)$, qui est un sous-groupe hyperspécial de $\bar{G}(F)$ d'après le lemme 4.1(i).

Théorème. *Il existe $c \in \mathbb{C}^\times$ tel que, pour tout γ comme ci-dessus, on ait l'égalité $\Delta(\gamma,\delta) = c\bar{\Delta}(\bar{Y}, X_{sc})$. Dans le cas où D est fortement non ramifié, cet élément c est égal à 1.*

C'est le résultat principal de [W1]. Cf. cette référence, pages 76 à 230, pour la démonstration.

4.9 Normalisation des mesures

Pour tout groupe réductif connexe M défini sur F, il y a une bijection naturelle entre mesures de Haar sur $M(F)$ et sur $\mathfrak{m}(F)$: on demande que les mesures se correspondent par l'exponentielle au voisinage des éléments neutres. Fixons des mesures de Haar sur $M(F)$ et $Z_M^0(F)$. Elles déterminent des mesures de Haar sur $\mathfrak{m}(F)$ et $\mathfrak{z}_M(F)$. En vertu de l'égalité $\mathfrak{m}(F) = \mathfrak{m}_{SC}(F)\oplus\mathfrak{z}_M(F)$, on récupère une mesure de Haar sur $\mathfrak{m}_{SC}(F)$, puis sur $M_{SC}(F)$. Si T est un sous-tore maximal de M défini sur F et si l'on munit $T(F)$ d'une mesure de Haar, on en déduit par le même procédé une mesure de Haar sur $T_{sc}(F)$.

Soient $\gamma \in H_{z,\tilde{G}-reg}(F)$ et $\delta \in \tilde{G}_{reg}(F)$ deux éléments dont les classes de conjugaison se correspondent. Notons $T^\flat = H_\gamma$ et $T^\natural = G_\delta$. Comme dans la preuve du lemme 4.5, on peut choisir $h \in H$ et $g \in G$ de sorte que $int_{h^{-1}} \circ \xi \circ int_g$ définisse un homomorphisme défini sur F de $T^\natural$ sur $T^\flat$. C'est une isogénie, dont on déduit un isomorphisme de $\mathfrak{t}^\natural(F)$ sur $\mathfrak{t}^\flat(F)$. On a fixé en 3.2 une mesure de Haar sur $T^\flat(F)$. Elle se descend en une mesure sur $\mathfrak{t}^\flat(F)$, que l'on transporte en une mesure sur $\mathfrak{t}^\natural(F)$ et on relève celle-ci en une mesure sur $T^\natural(F)$. Cette dernière ne dépend pas des choix de h et g.

Remarque. Indiquons une façon possible de normaliser les mesures sur les tores. Soit T un tore défini sur F. Même si T n'est pas déployé sur F^{nr}, il possède une structure naturelle de schéma en groupes lisse sur $\mathfrak{o}$. La fibre spéciale $\mathbf{T}$ n'est pas connexe. Notons $T(\mathfrak{o})^0$ le sous-groupe des $t \in T(\mathfrak{o})$ dont la réduction appartient à $\mathbf{T}^0(\mathbb{F}_q)$. C'est un sous-groupe ouvert compact de $T(F)$. On normalise la mesure sur $T(F)$ en imposant que $T(\mathfrak{o})^0$ ait pour mesure 1. On vérifie que cette normalisation est compatible aux procédés de transfert de mesures décrits ci-dessus.

Soient D et ϵ comme en 4.6. On fixe des mesures de Haar sur $H_\epsilon(F)$, $\bar{H}(F)$, $\bar{G}(F)$, $Z^0_{\bar{H}}(F)$ et $Z_{\bar{G}}(F)$. Chaque fois que l'un de ces groupes est non ramifié (ce qui est toujours le cas pour $\bar{G}$ et $Z_{\bar{G}}$), on choisit la mesure canonique pour laquelle un sous-groupe hyperspécial est de mesure 1. Les différents isomorphismes établis dans les paragraphes précédents et les recettes ci-dessus munissent d'une mesure de Haar tous les groupes qui interviendront dans la suite. Il y a parfois plusieurs façons de les définir, mais qui donnent le même résultat. De plus, ces mesures sont les mesures canoniques quand les groupes sont non ramifiés.

4.10 Descente d'intégrales orbitales endoscopiques

Notre but est d'établir l'égalité énoncée en 3.3. Si $\gamma \in H_{z,\tilde{G}-reg}(F)$ n'est pas compact, sa classe de conjugaison ne coupe pas K_z et $SO^{H_z}_\gamma(\mathbf{1}_{K_z}) = 0$. En utilisant le lemme 4.4, on voit de même que $O^{\tilde{G},H_z,\boldsymbol{\omega}}_\gamma(\mathbf{1}_{\tilde{K}}) = 0$. On peut donc se limiter aux éléments de $H_{z,\tilde{G}-reg}(F) \cap H_z(F)_c$.

Soit γ un tel élément, que l'on écrit $\gamma = exp(Y)\epsilon$. L'égalité à démontrer ne dépend que de la classe de conjugaison stable de γ. En utilisant le lemme 4.3(ii), on peut supposer H_ϵ quasi-déployé sur F. Dans le cas où H_ϵ est non ramifié, on peut supposer $\epsilon \in K_z$ d'après le lemme 4.3(iv).

Supposons qu'il n'existe pas de diagramme modérément ramifié de source ϵ. D'après le lemme 4.5(i), il n'existe aucun élément de $\tilde{K} \cap \tilde{G}_{reg}(F)$ dont la classe de conjugaison corresponde à celle de γ. Alors $O^{\tilde{G},H_z,\boldsymbol{\omega}}_\gamma(\mathbf{1}_{\tilde{K}}) = 0$. Supposons qu'il existe un élément $\gamma' \in K_z$ stablement conjugué à γ. Posons $\epsilon' = \gamma'_{p'}$. Alors $\epsilon' \in K_z$ (car ϵ' appartient à l'adhérence du groupe engendré par γ') et est stablement conjugué à ϵ. Alors H_ϵ est non ramifié d'après le lemme 4.3(iv), donc $\epsilon \in K_z$ d'après l'hypothèse que l'on a faite ci-dessus. Le lemme 4.5(ii) contredit notre hypothèse sur l'inexistence d'un diagramme de source ϵ. Il n'existe donc aucun élément γ' comme ci-dessus, ce qui entraîne $SO^{H_z}_\gamma(\mathbf{1}_{K_z}) = 0$. L'égalité de 3.3 est vérifiée.

On est ramené au cas où il existe un diagramme modérément ramifié de source ϵ. On fixe un tel diagramme D. Si H_ϵ est non ramifié, on le suppose fortement non ramifié. On effectue les constructions des paragraphes 4.6 à 4.8.

Lemme. *Sous ces hypothèses, les propriétés suivantes sont vérifiées.*

(i) Si H_ϵ n'est pas non ramifié, $O^{\tilde{G},H_z,\boldsymbol{\omega}}_\gamma(\mathbf{1}_{\tilde{K}}) = 0$.

(ii) Si H_ϵ est non ramifié, on a l'égalité :

$$O^{\tilde{G},H_z,\boldsymbol{\omega}}_\gamma(\mathbf{1}_{\tilde{K}}) = O^{\bar{G}_{SC},\bar{H}}_{\bar{Y}}(\mathbf{1}_{\bar{\mathfrak{k}}_{sc}}).$$

Preuve. Posons $\delta = exp(X)\eta$. D'après 4.8(1), la classe de conjugaison de δ correspond à celle de γ. L'intégrale orbitale endoscopique que l'on doit calculer est une somme sur les classes de conjugaison de δ par $G(F)$ contenues dans sa classe de conjugaison stable. Evidemment, les classes de conjugaison qui ne coupent pas $\tilde{K}$ ne contribuent pas. En utilisant le lemme 4.2, on peut remplacer la sommation par une somme sur les éléments de $\mathcal{X}_\delta$, à condition de diviser le tout par $|\mathcal{Z}_\eta|[Z_G(\delta)(F):G_\delta(F)]^{-1}$. Remarquons que ce dernier indice va compenser le facteur de normalisation que l'on a introduit dans la définition des intégrales orbitales, cf. 3.1. Pour $z\in\mathcal{Z}_\eta$ et $X'\in\mathcal{E}_X$, posons $\delta(z,X')=int_z(exp(X')\eta)$. On obtient :

$$(1)\qquad O_\gamma^{\tilde{G},H_z,\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{1}_{\tilde{K}})=|\mathcal{Z}_\eta|^{-1}\sum_{z\in\mathcal{Z}_\eta}I(z),$$

où :

$$I(z)=\sum_{X'\in\mathcal{E}_X}\Delta(\gamma,\delta(z,X'))\int_{G_{\delta(z,X')}(F)\backslash G(F)}\mathbf{1}_{\tilde{K}}(g^{-1}\delta(z,X')g)\boldsymbol{\omega}(g)\,dg.$$

Soit $z\in\mathcal{Z}$. Rappelons que $z_{ad}\in G_{AD}(F)$, que les automorphismes int_z de G, resp. $\tilde{G}$, sont définis sur F et que le second préserve $\tilde{K}$. La définition des facteurs de transfert montre que la fonction sur $\mathcal{D}$:

$$(\gamma',\delta')\mapsto\Delta(\gamma',int_z(\delta'))$$

est encore un facteur de transfert, donc est proportionnel à Δ. Puisque int_z préserve $\tilde{K}$, ce nouveau facteur vérifie la même condition de normalisation que Δ donc lui est égal. En particulier $\Delta(\gamma,\delta(z,X'))=\Delta(\gamma,exp(X')\eta)$. Le groupe $G_{AD}(F)$ agit trivialement sur $Hom(G(F),\mathbb{C}^\times)$. Donc $\boldsymbol{\omega}\circ int_z=\boldsymbol{\omega}$. En changeant g en $int_z(g)$ dans l'intégrale ci-dessus, on voit que $I(z)$ ne dépend pas de z. Le nombre de ces intégrales compense le facteur $|\mathcal{Z}_\eta|^{-1}$ figurant dans (1) et on obtient simplement :

$$O_\gamma^{\tilde{G},H_z,\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{1}_{\tilde{K}})=\sum_{X'\in\mathcal{E}_X}\Delta(\gamma,exp(X')\eta)\int_{G_{exp(X')\eta}(F)\backslash G(F)}\mathbf{1}_{\tilde{K}}(g^{-1}exp(X')\eta g)\boldsymbol{\omega}(g)\,dg.$$

Soit $X'\in\mathcal{E}_X$. On vérifie que, pour toute fonction $f\in C_c^\infty(G_{exp(X')\eta}(F)\backslash G(F))$, à support dans $G_{exp(X')\eta}(F)\backslash G_\eta(F)K$, on a l'égalité :

$$\int_{G_{exp(X')\eta}(F)\backslash G(F)}f(g)\,dg=\int_{G_{exp(X')\eta}(F)\backslash G_\eta(F)\times K}f(gk)\,dk\,dg=\int_{\bar{G}_{X'}\backslash\bar{G}(F)\times K}f(gk)\,dk\,dg.$$

La fonction $g\mapsto\mathbf{1}_{\tilde{K}}(g^{-1}exp(X')\eta g)\boldsymbol{\omega}(g)$ vérifie la condition requise d'après le lemme 4.1(ii). Elle est invariante à droite par K (on a dit en 2.7 que $\boldsymbol{\omega}$ était trivial sur K). De plus, pour $g\in\bar{G}(F)$, on a l'égalité :

$$\mathbf{1}_{\tilde{K}}(g^{-1}exp(X')\eta g)=\mathbf{1}_{\bar{\mathfrak{k}}}(g^{-1}X'g).$$

Cela conduit à l'égalité :

$$O_\gamma^{\tilde{G},H_z,\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{1}_{\tilde{K}})=\sum_{X'\in\mathcal{E}_X}\Delta(\gamma,exp(X')\eta)\int_{\bar{G}_{X'}(F)\backslash\bar{G}(F)}\mathbf{1}_{\bar{\mathfrak{k}}}(g^{-1}X'g)\boldsymbol{\omega}(g)\,dg.$$

L'ensemble de représentants $\mathcal{E}_X$ est nécessairement de la forme $\mathcal{E}_X=\{X'_{sc}+X_Z;X'_{sc}\in\mathcal{E}_{X_{sc}}\}$, où $\mathcal{E}_{X_{sc}}$ est un ensemble de représentants des classes de conjugaison par $\bar{G}(F)$ dans la classe de conjugaison stable de X_{sc}. Soit X'_{sc} un élément de cet ensemble. Fixons un ensemble $\mathcal{A}_{X'_{sc}}$ de représentants des doubles classes $\bar{G}_{X'_{sc}}(F)\backslash\bar{G}(F)/\bar{G}_{SC}(F)$. On vérifie que, pour toute fonction $f \in C_c^\infty(\bar{G}_{X'}(F)\backslash\bar{G}(F))$, on a l'égalité :

$$\int_{\bar{G}_{X'}(F)\backslash\bar{G}(F)} f(g)\,dg = \sum_{a\in\mathcal{A}_{X'_{sc}}} \int_{\bar{G}_{SC,a^{-1}X'_{sc}a}(F)\backslash\bar{G}_{SC}(F)} f(ag)\,dg.$$

On applique cela à la fonction f définie par $f(g) = \mathbf{1}_{\bar{\mathfrak{k}}}(g^{-1}(X'_{sc} + X_Z)g)\boldsymbol{\omega}(g)$. Soient $a \in \mathcal{A}_{X'_{sc}}$ et $g \in \bar{G}_{SC}(F)$. Tout caractère est trivial sur $\bar{G}_{SC}(F)$, donc $\boldsymbol{\omega}(ag) = \boldsymbol{\omega}(a)$. L'élément X_Z appartient à $\mathfrak{z}_{\bar{G}}(F)_{tn}$. Mais $Z^0_{\bar{G}}$ est un tore non ramifié. Il possède un unique sous-groupe hyperspécial, qui est son plus grand sous-groupe compact. Ce sous-groupe contient tous les éléments topologiquement unipotents. De même, tout élément topologiquement nilpotent de $\mathfrak{z}_{\bar{G}}(F)$ appartient à l'unique réseau hyperspécial de cette algèbre, et celui-ci est contenu dans $\bar{\mathfrak{k}}$. Donc $\mathbf{1}_{\bar{\mathfrak{k}}}(g^{-1}a^{-1}(X'_{sc}+X_Z)ag) = \mathbf{1}_{\bar{\mathfrak{k}}_{sc}}(g^{-1}a^{-1}X'_{sc}ag)$. On obtient :

$$O_\gamma^{\tilde{G},H_z,\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{1}_{\tilde{K}}) = \sum_{X'_{sc}\in\mathcal{E}_{X_{sc}}} \Delta(\gamma, exp(X'_{sc} + X_Z)\eta)$$

$$\sum_{a\in\mathcal{A}_{X'_{sc}}} \boldsymbol{\omega}(a) \int_{\bar{G}_{SC,a^{-1}X'_{sc}a}(F)\backslash\bar{G}_{SC}(F)} \mathbf{1}_{\bar{\mathfrak{k}}_{sc}}(g^{-1}a^{-1}X'_{sc}ag)\,dg.$$

D'après [KS] théorème 5.1.D, on a l'égalité :

$$\Delta(\gamma, exp(X'_{sc} + X_Z)\eta)\boldsymbol{\omega}(a) = \Delta(\gamma, exp(a^{-1}X'_{sc}a + X_Z)\eta).$$

Dans le théorème 4.8, X_{sc} était un élément quelconque de $\bar{\mathfrak{g}}(F)$ dont la classe de conjugaison correspondait à celle de $\bar{Y}$. On peut aussi bien le remplacer par $a^{-1}X'_{sc}a$. Le facteur Δ ci-dessus est donc égal à $c\bar{\Delta}(\bar{Y}, a^{-1}X'_{sc}a)$. On obtient :

$$O_\gamma^{\tilde{G},H_z,\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{1}_{\tilde{K}}) = c \sum_{X'_{sc}\in\mathcal{E}_{X_{sc}}} \sum_{a\in\mathcal{A}_{X'_{sc}}} \bar{\Delta}(\bar{Y}, a^{-1}X'_{sc}a) \int_{\bar{G}_{SC,a^{-1}X'_{sc}a}(F)\backslash\bar{G}_{SC}(F)} \mathbf{1}_{\bar{\mathfrak{k}}_{sc}}(g^{-1}a^{-1}X'_{sc}ag)\,dg.$$

Mais l'ensemble :

$$\{a^{-1}X'_{sc}a; X' \in \mathcal{E}_{X_{sc}}, a \in \mathcal{A}_{X'_{sc}}\}$$

est un ensemble de représentants des classes de conjugaison par $G_{SC}(F)$ dans la classe de conjugaison stable de X_{sc}. Alors :

$$O_\gamma^{\tilde{G},H_z,\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{1}_{\tilde{K}}) = cO_{\bar{Y}}^{\bar{G}_{SC},\bar{H}}(\mathbf{1}_{\bar{\mathfrak{k}}_{sc}}),$$

par définition de ce dernier terme.

Si H_ϵ est non ramifié, le diagramme D est fortement non ramifié et $c = 1$ d'après le théorème 4.8. Cela démontre le (ii) de l'énoncé. Supposons que H_ϵ n'est pas non ramifié. Alors le tore $T^{\flat *}$ n'est pas déployé sur F^{nr}. En vertu de l'isomorphisme (3) de 4.8 et puisque $Z^0_{\bar{G}}$ est, lui, déployé sur F^{nr}, le tore $T_{\bar{H}}$ ne l'est pas. Donc la donnée endoscopique $(\bar{H}, \bar{\mathcal{H}}, \bar{s}, \hat{\bar{\xi}})$ de $\bar{G}_{SC}$ n'est pas non ramifiée. Une adaptation aux algèbres de Lie de la proposition 7.5 de [K2] montre que $O_{\bar{Y}}^{\bar{G}_{SC},\bar{H}}(\mathbf{1}_{\bar{\mathfrak{k}}_{sc}}) = 0$. Cela démontre le (i) de l'énoncé. $\square$

4.11 Preuve du théorème 3.6

L'élément γ est comme dans le paragraphe précédent. On a :

(1) si H_ϵ n'est pas non ramifié, $SO_\gamma^{H_z}(\mathbf{1}_{K_z})=0$;

(2) si H_ϵ est non ramifié, $SO_\gamma^{H_z}(\mathbf{1}_{K_z})=SO_{Y_{sc}}^{H_\epsilon,SC}(\mathbf{1}_{\mathfrak{k}_{\epsilon,sc}})$,

où on a noté $\mathfrak{k}_{\epsilon,sc}$ le réseau hyperspécial $\mathfrak{k}_H\cap\mathfrak{h}_{\epsilon,SC}(F)$ de $\mathfrak{h}_{\epsilon,SC}(F)$. Ces assertions sont celles du lemme précédent, appliqué au cas où $\tilde{G}=H_z$. Jointes à ce lemme, elles conduisent tout de suite à l'égalité :

$$(3)\qquad SO_\gamma^{H_z}(\mathbf{1}_{K_z})=O_\gamma^{\tilde{G},H_z,\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{1}_{\tilde{K}})$$

dans le cas où H_ϵ n'est pas non ramifié. Supposons H_ϵ non ramifié. D'après 4.8(3), $\bar{H}$ est lui-aussi non ramifié. Introduisons un réseau hyperspécial $\mathfrak{k}_{\bar{H}}$ de $\bar{\mathfrak{h}}(F)$ et posons $\mathfrak{k}_{\bar{H},sc}=\mathfrak{k}_{\bar{H}}\cap\bar{\mathfrak{h}}_{SC}(F)$.Le lemme fondamental pour les algèbres de Lie entraîne l'égalité :

$$O_{\bar{Y}}^{\bar{G}_{SC},\bar{H}}(\mathbf{1}_{\bar{\mathfrak{k}}_{sc}})=SO_{\bar{Y}}^{\bar{H}}(\mathbf{1}_{\mathfrak{k}_{\bar{H}}}).$$

Un calcul analogue à celui fait dans la preuve du lemme 4.10 montre que :

$$SO_{\bar{Y}}^{\bar{H}}(\mathbf{1}_{\mathfrak{k}_{\bar{H}}})=SO_{\bar{Y}_{sc}}^{\bar{H}_{SC}}(\mathbf{1}_{\mathfrak{k}_{\bar{H},sc}}).$$

Le lemme fondamental non standard entraîne l'égalité :

$$SO_{\bar{Y}_{sc}}^{\bar{H}_{SC}}(\mathbf{1}_{\mathfrak{k}_{\bar{H},sc}})=SO_{Y_{sc}}^{H_\epsilon,SC}(\mathbf{1}_{\mathfrak{k}_\epsilon}).$$

En utilisant ces égalités, celle du (ii) du lemme 4.10 et l'égalité (2) ci-dessus, on obtient de nouveau l'égalité (3), ce qui achève la démonstration.

5 L'exemple du changement de base pour un groupe unitaire non ramifié

5.1 La situation

Soit E l'extension quadratique non ramifiée de F et n un entier strictement positif. On note τ l'élément non trivial du groupe de Galois de E/F. On note U_n le groupe unitaire quasi-déployé relatif à cette extension. Pour distinguer les différentes actions galoisiennes, on les affecte de l'indice du groupe sur lequel porte l'action. On note de la même façon les actions sur les groupes duaux. Ainsi, on note $\sigma\mapsto\sigma_{U_n}$ l'action de Γ sur U_n ou sur le groupe dual $\hat{U}_n$. On fait une exception pour le groupe GL_n : on note simplement $\sigma\mapsto\sigma$ l'action naturelle sur GL_n. Dans l'exemple 3 de 2.8, on a introduit un automorphisme de GL_n, alors noté θ, et que nous noterons maintenant θ_n. Alors le groupe U_n peut se décrire ainsi : $U_n(\bar{F})=GL_n(\bar{F})$ et, pour $\sigma\in\Gamma$ et $g\in GL_n(\bar{F})$, on a $\sigma_{U_n}(g)=\theta_n\circ\sigma(g)$. Du groupe U_n se déduit un groupe sur E puis, par restriction des scalaires, un groupe G sur F. La façon la plus naturelle de le décrire est la suivante :

- $G(\bar{F})=U_n(\bar{F})\times U_n(\bar{F})$;

- pour $\sigma\in\Gamma$ et $(g',g'')\in G(\bar{F})$, on a $\sigma_G(g',g'')=(\sigma_{U_n}(g'),\sigma_{U_n}(g''))$ si $\sigma\in\Gamma_E$ et $\sigma_G(g',g'')=(\sigma_{U_n}(g''),\sigma_{U_n}(g'))$ si $\sigma\notin\Gamma_E$.

Le groupe G est muni d'un automorphisme θ défini par $\theta(g',g'')=(g'',g')$. Il est plus commode et plus habituel de transformer cette description en la suivante, qui est celle que nous utiliserons (on passe de l'une à l'autre en remplaçant g'' par $\theta_n(g'')$) :

- $G(\bar{F}) = GL_n(\bar{F}) \times GL_n(\bar{F})$;

- pour $\sigma \in \Gamma$ et $(g', g'') \in G(\bar{F})$, on a $\sigma_G(g', g'') = (\sigma(g'), \sigma(g''))$ si $\sigma \in \Gamma_E$ et $\sigma_G(g', g'') = (\sigma(g''), \sigma(g'))$ si $\sigma \notin \Gamma_E$.

Alors G est muni d'un automorphisme θ défini par $\theta(g', g'') = (\theta_n(g''), \theta_n(g'))$. L'application :

$$\begin{array}{ccc} GL_n(E) & \to & G(F) \\ g & \mapsto & (g, \tau(g)) \end{array}$$

est un isomorphisme qui identifie les automorphismes τ de $GL_n(E)$ et θ de $G(F)$. On pose $\boldsymbol{\omega} = 1$. On prend pour sous-groupe hyperspécial K de $G(F)$ l'image par l'isomorphisme ci-dessus du sous-groupe $GL_n(\mathfrak{o}_E)$ de $GL_n(E)$. On prend pour paire de Borel épinglée le produit des deux paires dans GL_n décrites dans l'exemple 3 de 2.8. Alors $\theta^* = \theta$.

On a $\hat{U}_n = GL_n(\mathbb{C})$. Notons $\hat{\theta}_n$ l'automorphisme de $GL_n(\mathbb{C})$ défini par la même formule que θ_n. Pour $\sigma \in \Gamma$ et $x \in GL_n(\mathbb{C})$, on a $\sigma_{U_n}(x) = x$ si $\sigma \in \Gamma_E$ et $\sigma_{U_n}(x) = \hat{\theta}_n(x)$ si $\sigma \notin \Gamma_E$. On a $\hat{G} = GL_n(\mathbb{C}) \times GL_n(\mathbb{C})$. Pour $\sigma \in \Gamma$ et $(x', x'') \in \hat{G}$, on a $\sigma(x', x'') = (x', x'')$ si $\sigma \in \Gamma_E$ et $\sigma(x', x'') = (x'', x')$ si $\sigma \notin \Gamma_E$. On a $\hat{\theta}(x', x'') = (\hat{\theta}_n(x''), \hat{\theta}_n(x'))$.

Les données endoscopiques les plus intéressantes sont les elliptiques. Rappelons qu'avec les notations de 2.9, une donnée endoscopique $(H, \mathcal{H}, s, \hat{\xi})$ est dite elliptique si $\hat{\xi}(Z_{\hat{H}}^{\Gamma,0}) \subset Z_{\hat{G}}$. A équivalence près, les données endoscopiques elliptiques de $(G, \theta, \boldsymbol{\omega})$ sont les suivantes. Soient $n_+, n_- \in \mathbb{N}$ tels que $n_+ + n_- = n$. On pose $H = U_{n_+} \times U_{n_-}$, $\mathcal{H} = {}^L H$, $s = (s', 1) \in GL_n(\mathbb{C}) \times GL_n(\mathbb{C})$, où :

$$s' = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \cdot & & & & & \\ & & \cdot & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & -1 & & \\ & & & & & \cdot & \\ & & & & & & \cdot \\ & & & & & & & -1 \end{pmatrix},$$

avec n_+ termes 1 et n_- termes -1. Pour $(x_+, x_-) \in GL_{n_+}(\mathbb{C}) \times GL_{n_-}(\mathbb{C}) = \hat{H}$, on pose :

$$\hat{\xi}(x_+, x_-) = \left(\begin{pmatrix} x_+ & 0 \\ 0 & x_- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{\theta}_{n_-}(x_-) & 0 \\ 0 & \hat{\theta}_{n_+}(x_+) \end{pmatrix} \right).$$

Pour $w \in I$, $\hat{\xi}(w) = w$. Pour un élément $\phi \in W$ ayant pour image dans W^{nr} l'élément de Frobenius, $\hat{\xi}(\phi) = (\mathbf{w}, \hat{\theta}_n(\mathbf{w})s', \phi) \in {}^L G$, où $\mathbf{w}$ est la matrice de permutation qui échange les décompositions $n = n_- + n_+$ et $n = n_+ + n_-$. Autrement dit, la matrice $\mathbf{w} = (\mathbf{w}_{i,j})_{i,j=1,...n}$ est définie par $\mathbf{w}_{i,j} = 1$ si $i = 1, ..., n_+$ et $j = i + n_-$ ou si $i = n_+ + 1, ..., n$ et $j = i - n_+$, et $\mathbf{w}_{i,j} = 0$ sinon.

5.2 Description des éléments semi-simples de $G(F)$

Fixons un espace vectoriel V sur E de dimension n, muni d'une base $(e_i)_{i=1,...,n}$. Alors $GL_n(E)$ s'identifie de la façon usuelle avec le groupe des automorphismes E-linéaires de V. Notons $\tilde{G}(F)$ l'ensemble des formes sesquilinéaires non dégénérées sur V (pour préciser le sens du mot sesquilinéaire, indiquons que $Q(e'v', e''v'') = \tau(e')e''Q(v', v'')$

pour $Q \in \tilde{G}(F)$, $e', e'' \in E$ et $v', v'' \in V$). Le groupe $G(F) = GL_n(E)$ agit à gauche et à droite sur $\tilde{G}(F)$ par :

$$g_1 Q g_2(v', v'') = Q(g_1^{-1}(v'), g_2(v''))$$

pour $g_1, g_2 \in GL_n(E)$, $Q \in \tilde{G}(F)$ et $v', v'' \in V$. Notons Q_θ l'élément de $\tilde{G}(F)$ défini par :

$$Q_\theta(e_i, e_j) = (-1)^j \delta_{i,n+1-j}$$

où $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker. Alors $\tilde{G}(F)$ s'identifie avec l'ensemble tordu introduit en 2.7, c'est-à-dire avec $G(F)\theta$, par l'application :

$$\begin{array}{ccc} G(F)\theta = GL_n(E)\theta & \rightarrow & \tilde{G}(F) \\ g\theta & \mapsto & Q_{g\theta}, \end{array}$$

où $Q_{g\theta}(v', v'') = gQ_\theta(v', v'') = Q_\theta(g^{-1}(v'), v'')$.

Il y a deux procédés élémentaires pour construire des formes sesquilinéaires sur un espace vectoriel sur E. Dans le premier, on considère une extension finie K_λ de E, un élément $\lambda \in K_\lambda$ qui engendre K_λ sur E et un automorphisme τ_λ de K qui conserve E et dont la restriction à E soit égale à τ. On suppose que $\lambda\tau_\lambda(\lambda) = 1$. On considère un espace vectoriel V_λ sur K_λ, de dimension finie et une forme sesquilinéaire q_λ non dégénérée sur V_λ. Sesquilinéaire signifie que $q_\lambda(k'v', k''v'') = \tau_\lambda(k')k''q_\lambda(v', v'')$ pour $k', k'' \in K_\lambda$ et $v', v'' \in V_\lambda$. On suppose que q_λ vérifie la condition de symétrie $q_\lambda(v'', v') = \lambda\tau_\lambda(q_\lambda(v', v''))$. On peut considérer V_λ comme un espace vectoriel sur E, dont on note N_λ la dimension. On munit V_λ de la forme Q_λ sesquilinéaire sur E définie par $Q_\lambda(v', v'') = trace_{K_\lambda/E}(q_\lambda(v', v''))$. Dans le second procédé, on considère une extension finie K_λ de E et un élément $\lambda \in K_\lambda$ qui engendre K_λ sur E. On suppose qu'il n'existe pas d'automorphisme τ_λ de K_λ se restreignant à E en l'automorphisme τ et tel que $\lambda\tau_\lambda(\lambda) = 1$. On considère un espace vectoriel W_λ sur K_λ de dimension finie, et son dual W_λ^*. On pose $V_\lambda = W_\lambda \oplus W_\lambda^*$, que l'on munit de la structure d'espace vectoriel sur E telle que $e(w \oplus w^*) = ew \oplus \tau(e)w^*$ pour $e \in E$, $w \in W_\lambda$ et $w^* \in W_\lambda^*$. On note N_λ la dimension de V_λ sur E. On munit V_λ de la forme Q_λ sesquilinéaire sur E définie par :

$$Q_\lambda(w_1 \oplus w_1^*, w_2 \oplus w_2^*) = trace_{K_\lambda/E}(w_1^*(w_2)) + \tau \circ trace_{K_\lambda/E}(\lambda^{-1}w_2^*(w_1)).$$

Considérons deux couples (λ, K_λ) et $(\lambda', K_{\lambda'})$ de l'une ou l'autre des deux situations ci-dessus. On dit que ces couples sont équivalents si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

- il existe un isomorphisme de K_λ sur $K_{\lambda'}$ se restreignant en l'identité de E et envoyant λ sur λ' ;

- il existe un isomorphisme de K_λ sur $K_{\lambda'}$ se restreignant en l'automorphisme τ de E et envoyant λ sur λ'^{-1}.

Il est commode de fixer une fois pour toutes un plongement de E dans $\bar{F}$ et des plongements des corps K_λ dans $\bar{F}$ qui prolongent celui de E. On peut ainsi considérer les λ comme des éléments de $\bar{F}^\times$.

Considérons maintenant les données suivantes :

- un ensemble fini Λ, union disjointe de deux sous-ensembles Λ^e et Λ^d ;

- pour $\lambda \in \Lambda^e$, des objets λ, K_λ, τ_λ, V_λ, q_λ comme dans le premier procédé ci-dessus ; comme on le voit, on note de la même façon l'objet principal λ et l'élément de l'ensemble de paramètres, on pense que cela n'induit pas de confusion ;

- pour $\lambda \in \Lambda^d$, des objets λ, K_λ, W_λ comme dans le deuxième procédé.

On suppose que, pour deux éléments distincts $\lambda, \lambda' \in \Lambda$, les couples (λ, K_λ) et $(\lambda', K_{\lambda'})$ ne sont pas équivalents. On suppose $\sum_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda = n$. On peut alors fixer un isomorphisme E-linéaire de $\oplus_{\lambda\in\Lambda}V_\lambda$ sur V. La forme sesquilinéaire $\oplus_{\lambda\in\Lambda}Q_\lambda$ s'identifie à une forme sesquilinéaire sur E, c'est-à-dire à un élément de $\tilde{G}(F)$, que l'on note Q_Λ. Un peu d'algèbre linéaire élémentaire montre que cet élément est semi-simple. Inversement, pour tout élément semi-simple de $\tilde{G}(F)$, on peut construire des données comme ci-dessus de sorte que l'élément en question soit conjugué à Q_Λ par un élément de $G(F)$. Ces données sont essentiellement uniques : les seules modifications que l'on peut faire sont de remplacer les objets par des objets isomorphes ou, de façon plus subtile, remplacer un couple (λ, K_λ) par un couple équivalent au sens défini ci-dessus. On peut décrire de même les intersections avec $\tilde{G}(F)$ des classes de conjugaison par $G(\bar{F})$. Il suffit d'oublier les formes sesquilinéaires q_λ : deux éléments semi-simples paramétrés par des données Λ et Λ' sont conjugués par un élément de $G(\bar{F})$ si et seulement s'il existe une bijection $\lambda \mapsto \lambda'$ de Λ sur Λ' de sorte que, pour tout $\lambda \in \Lambda$, les couples (λ, K_λ) et $(\lambda', K_{\lambda'})$ soient équivalents et $N_\lambda = N_{\lambda'}$.

Considérons des données comme ci-dessus et l'élément semi-simple $\delta = Q_\Lambda \in \tilde{G}(F)$ qui leur est associé. Le commutant $Z_G(\delta)$ est connexe. Son groupe de points sur F est le produit des groupes linéaires $GL_{K_\lambda}(W_\lambda)$ pour $\lambda \in \Lambda^d$ et des groupes $U(q_\lambda)$ pour $\lambda \in \Lambda^e$, où $U(q_\lambda)$ est le groupe des automorphismes K_λ-linéaires de V_λ qui conservent la forme q_λ. Pour $\lambda \in \Lambda^e$, notons K'_λ le sous-corps des points fixes par τ_λ dans K_λ. C'est une extension de F disjointe de E et K_λ est le composé des deux extensions E et K'_λ de F. Grâce au théorème Hilbert 90, on peut fixer $\alpha_\lambda \in K_\lambda$ tel que $\lambda = \alpha_\lambda\tau_\lambda(\alpha_\lambda)^{-1}$. Alors la forme $\alpha_\lambda^{-1}q_\lambda$ est une forme hermitienne sur V_λ relative à l'extension K_λ/K'_λ. Le groupe $U(q_\lambda)$ est un groupe unitaire : il est égal au groupe $U(\alpha_\lambda^{-1}q_\lambda)$. Puisque $Z_G(\delta)$ est connexe, on a $G_\delta = I_\delta = Z_G(\delta)$. L'élément δ est compact, resp. d'ordre fini premier à p, si et seulement si, pour tout $\lambda \in \Lambda$, λ appartient à $\mathfrak{o}_{\bar{F}}^\times$, resp. λ est d'ordre fini premier à p. L'élément δ est conjugué à un élément de $\tilde{K}$ par un élément de $G(F)$ si et seulement s'il est compact et, de plus, pour tout $\lambda \in \Lambda^e$, l'espace V_λ possède un sous-$\mathfrak{o}_E$-réseau autodual pour la forme Q_λ (ce n'est pas la même chose que de demander que V_λ possède un sous-$\mathfrak{o}_{K_\lambda}$-réseau autodual pour la forme q_λ). L'élément δ appartient à $\tilde{G}_{reg}(F)$ si et seulement si $dim_{K_\lambda}(V_\lambda) = 1$ pour tout $\lambda \in \Lambda^e$ et $dim_{K_\lambda}(W_\lambda) = 1$ pour tout $\lambda \in \Lambda^d$. Supposons $\delta \in \tilde{G}_{reg}(F)$. Soit $\lambda \in \Lambda^e$. On peut supposer $V_\lambda = K_\lambda$. Toute forme sesquilinéaire sur K_λ vérifiant la condition de symétrie requise est de la forme $q(v', v'') = \alpha\tau_\lambda(v')v''$, où α est un élément de K_λ tel que $\alpha\tau_\lambda(\alpha)^{-1} = \lambda$. Ces éléments α forment un espace principal homogène sous l'action par multiplication de $K_\lambda'^\times$. La classe d'isomorphie de q est déterminée par l'orbite $\alpha Norm_{K_\lambda/K'_\lambda}(K_\lambda^\times)$. Il y a donc deux classes d'isomorphie. En particulier, à q_λ est associé un élément de K_λ que l'on note α_λ et la classe de q_λ est déterminée par la classe $\alpha_\lambda Norm_{K_\lambda/K'_\lambda}(K_\lambda^\times)$.

5.3 Description des éléments semi-simples d'un groupe unitaire

Considérons un espace vectoriel V_ι sur E de dimension finie n_ι, muni d'une forme hermitienne Q_ι non dégénérée. On suppose qu'il existe un sous-$\mathfrak{o}_E$-réseau de V_ι qui est autodual pour la forme Q_ι. On fixe un tel sous-réseau L_ι. Notons U_ι le groupe unitaire de (V_ι, Q_ι). Il est quasi-déployé. Le sous-groupe K_ι des éléments de $U_\iota(F)$ qui conservent L_ι est un sous-groupe hyperspécial.

Il y a deux procédés pour construire des éléments semi-simples d'un groupe unitaire. Dans le premier, on considère une extension finie K_λ de E, un élément $\lambda \in K_\lambda$ qui engendre K_λ sur E et un automorphisme τ_λ de K qui conserve E et dont la restriction à E soit égale à τ. On suppose que $\lambda\tau_\lambda(\lambda) = 1$. On considère un espace vectoriel V_λ sur K_λ, de dimension finie et une forme hermitienne q_λ non dégénérée sur V_λ. On peut considérer V_λ comme un espace vectoriel sur E, dont on note $N_{\iota,\lambda}$ la dimension. On munit V_λ de la forme Q_λ hermitienne sur E définie par $Q_\lambda(v', v'') = trace_{K_\lambda/E}(q_\lambda(v', v''))$. L'élément semi-simple du groupe unitaire de (V_λ, Q_λ) est l'application $h_\lambda : v \mapsto \lambda v$. Dans le second procédé, on considère une extension finie K_λ de E et un élément $\lambda \in K_\lambda$ qui engendre K_λ sur E. On suppose qu'il n'existe pas d'automorphisme τ_λ de K_λ se restreignant à E en l'automorphisme τ et tel que $\lambda\tau_\lambda(\lambda) = 1$. On considère un espace vectoriel W_λ sur K_λ de dimension finie, et son dual W_λ^*. On pose $V_\lambda = W_\lambda \oplus W_\lambda^*$, que l'on munit de la structure d'espace vectoriel sur E telle que $e(w \oplus w^*) = ew \oplus \tau(e)w^*$ pour $e \in E$, $w \in W_\lambda$ et $w^* \in W_\lambda^*$. On note $N_{\iota,\lambda}$ la dimension de V_λ sur E. On munit V_λ de la forme Q_λ hermitienne sur E définie par :

$$Q_\lambda(w_1 \oplus w_1^*, w_2 \oplus w_2^*) = trace_{K_\lambda/E}(w_1^*(w_2)) + \tau \circ trace_{K_\lambda/E}(w_2^*(w_1)).$$

L'élément semi-simple du groupe unitaire de (V_λ, Q_λ) est l'application $h_\lambda : w \oplus w^* \mapsto \lambda w \oplus \lambda^{-1}w^*$.

Considérons maintenant les données suivantes :

- un ensemble fini Λ_ι, union disjointe de deux sous-ensembles Λ_ι^e et Λ_ι^d ;
- pour $\lambda \in \Lambda_\iota^e$, des objets λ, K_λ, τ_λ, V_λ, q_λ comme dans le premier procédé ci-dessus ;
- pour $\lambda \in \Lambda_\iota^d$, des objets λ, K_λ, W_λ comme dans le deuxième procédé.

On suppose que, pour deux éléments distincts $\lambda, \lambda' \in \Lambda_\iota$, les couples (λ, K_λ) et $(\lambda', K_{\lambda'})$ ne sont pas équivalents. On suppose $\sum_{\lambda\in\Lambda_\iota} N_{\iota,\lambda} = n_\iota$. On suppose qu'il existe un isomorphisme E-linéaire de $\oplus_{\lambda\in\Lambda_\iota}V_\lambda$ sur V_ι qui identifie les formes hermitiennes $\oplus_{\lambda\in\Lambda_\iota}Q_\lambda$ et Q_ι. Alors cet isomorphisme identifie l'élément $\oplus_{\lambda\in\Lambda_\iota}h_\lambda$ du groupe unitaire de la première forme avec un élément $h_{\Lambda_\iota} \in U_\iota(F)$. C'est un élément semi-simple. Tout élément semi-simple de $U_\iota(F)$ est conjugué par un élément de $U_\iota(F)$ 'a un élément de cette forme et les données Λ_ι sont déterminées par l'élément semi-simple de façon essentiellement unique. Comme dans le paragraphe précédent, on peut lire sur les ensembles de paramètres la conjugaison stable (il suffit d'oublier les formes q_λ pour $\lambda \in \Lambda_\iota^e$), le fait que h_{Λ_ι} soit régulier, ou compact, ou d'ordre fini premier à p, ou conjugué à un élément de K_ι par un élément de $U_\iota(F)$. Soit $h = h_{\Lambda_\iota}$ un élément comme ci-dessus. Le commutant de h dans U_ι est connexe. Son groupe de points sur F est le produit des groupes $GL_{K_\lambda}(W_\lambda)$ pour $\lambda \in \Lambda_\iota^d$ et des groupes unitaires de (V_λ, q_λ) pour $\lambda \in \Lambda_\iota^e$. On retrouve de façon élémentaire le fait que h est stablement conjugué à un élément dont le commutant est quasi-déployé : il suffit de remplacer les formes q_λ par des formes de même dimension dont les groupes unitaires sont quasi-déployés. On a aussi une propriété plus forte que le lemme 4.3(iv) (et qui n'est pas toujours vraie dans le cas général) : si h est d'ordre fini premier à p, il est stablement conjugué à un élément de K_ι. Il suffit de remplacer les formes q_λ par des formes de même dimension et admettant un réseau autodual. L'hypothèse sur h assure que K_λ/E est non ramifiée, donc Q_λ admet elle-aussi un réseau autodual.

5.4 Correspondance entre classes de conjugaison

On considère la donnée endoscopique $(H, \mathcal{H}, s, \hat{\xi})$ de $(G, \theta, \boldsymbol{\omega})$ associée à une décomposition $n = n_+ + n_-$, cf. 5.1. On a $H = U_{n_+} \times U_{n_-}$. En remplaçant l'indice ι du paragraphe précédent par $+$ ou $-$, on peut identifier H au produit des groupes unitaires de deux espaces hermitiens (V_+, Q_+) et (V_-, Q_-). Soient $\gamma = (\gamma_+, \gamma_-)$ un élément semi-simple de $H(F)$ et δ un élément semi-simple de $\tilde{G}(F)$. Les éléments γ_+, γ_- et δ sont paramétrés par des données notées Λ_{γ_+}, Λ_{γ_-} et Λ_δ. Quitte à changer ces données par des données équivalentes, on peut supposer que, si λ et λ' sont deux éléments de la réunion de ces trois ensembles, les couples (λ, K_λ) et $(\lambda', K_{\lambda'})$ ou bien sont égaux, ou bien ne sont pas équivalents. Tout élément par exemple de Λ_δ est une famille de données λ, K_λ etc... et on a identifié dans la notation cette famille avec l'unique terme $\lambda \in \bar{F}^\times$. On peut ainsi considérer Λ_δ comme un sous-ensemble de $\bar{F}^\times$, en se rappelant qu'à chaque élément est affecté des données supplémentaires. Alors les classes de conjugaison de γ et δ se correspondent si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

- $\Lambda_\delta = \{(-1)^{n+1}\lambda; \lambda \in \Lambda_{\gamma_+} \cup \Lambda_{\gamma_-}\}$;
- pour tout $\lambda \in \Lambda_\delta$, $N_\lambda = N_{+,(-1)^{n+1}\lambda} + N_{-,(-1)^{n+1}\lambda}$.

Les signes $(-1)^{n+1}$ perturbateurs sont inévitablement dus à la présence de signes dans la définition de l'automorphisme θ_n. Remarquons que ces conditions sont vérifiées et si λ appartient à $\Lambda^e_{\gamma_\pm}$, resp. $\Lambda^d_{\gamma_\pm}$, on a nécessairement $(-1)^{n+1}\lambda \in \Lambda^e_\delta$, resp. $(-1)^{n+1}\lambda \in \Lambda^d_\delta$.

Supposons que ces conditions soient vérifiées et que de plus δ appartienne à $\tilde{G}_{reg}(F)$, autrement dit $(\gamma, \delta) \in \mathcal{D}$. Dans ce cas, Λ_δ est union disjointe de $\Lambda_{\delta,+}$ et $\Lambda_{\delta,-}$, où $\Lambda_{\delta,\pm} = \{(-1)^{n+1}\lambda; \lambda \in \Lambda_{\gamma_\pm}\}$. On pose $\Lambda^e_{\delta,\pm} = \Lambda^e_\delta \cap \Lambda_{\delta,\pm}$ et $\Lambda^d_{\delta,\pm} = \Lambda^d_\delta \cap \Lambda_{\delta,\pm}$. Notons $\mathcal{P}_{\gamma_\pm}$ le sous-ensemble de $\bar{F}^\times$ dont les éléments sont :

- les conjugués distincts $\sigma(\lambda)$ pour $\sigma \in \Gamma_E$ et $\lambda \in \Lambda^e_{\gamma_\pm}$;
- les conjugués distincts $\sigma(\lambda)$ pour $\sigma \in \Gamma_E$ et $\sigma(\lambda)^{-1}$ pour $\sigma \in \Gamma \setminus \Gamma_E$, pour $\lambda \in \Lambda^d_{\gamma_\pm}$.

On peut aussi dire que $\mathcal{P}_{\gamma_\pm}$ est l'ensemble des valeurs propres de $\gamma_\pm$ vu comme un automorphisme E-linéaire de $V_\pm$. Notons $\mathcal{P}_{\gamma,\delta,1}$ l'ensemble des couples (x, y) tels que $x \in \mathcal{P}_{\gamma_-}$, $y \in \mathcal{P}_{\gamma_+} \cup \mathcal{P}_{\gamma_-}$ et $x \neq y$. Notons $\mathcal{P}_{\gamma,\delta,2}$ l'ensemble des couples (x, y) tels que $x \in \mathcal{P}_{\gamma_-}$ et $y \in \mathcal{P}_{\gamma_+}$. Pour $i = 1, 2$, posons :

$$P_{\gamma,\delta,i} = \prod_{(x,y) \in \mathcal{P}_{\gamma,\delta,i}} (x - y).$$

C'est un élément de $E^\times$. Notons val_E la valuation habituelle de E (elle vaut 1 sur une uniformisante). On peut expliciter le facteur de transfert sous la forme :

$$(1) \qquad \Delta(\gamma,\delta) = \Big(\prod_{\lambda \in \Lambda^d_{\delta,-}} (-1)^{val_E \circ Norm_{K_\lambda/E}(\lambda)}\Big)\Big(\prod_{\lambda \in \Lambda^e_{\delta,-}} (-1)^{val_E \circ Norm_{K_\lambda/E}(\alpha_\lambda)}\Big)$$

$$\times (-1)^{val_E(P_{\gamma,\delta,1})} q^{-val_E(P_{\gamma,\delta,2})}.$$

Remarque. Pour $\lambda \in \Lambda^e_\delta$, l'extension K'_λ de F est disjointe de E, donc le degré résiduel de l'extension K_λ/E est impair. Il en résulte que $val_E \circ Norm_{K_\lambda/E}(\alpha_\lambda)$ change effectivement de parité quand δ varie dans sa classe de conjugaison par $G(\bar{F})$.

Dans le cas où $n_+ = n$ et $n_- = 0$, on a simplement $\Delta(\gamma, \delta) = 1$. Dans le cas où $n_+ = 0$ et $n_- = n$, on vérifie que $\Delta(\gamma, \delta) = \chi(\delta)$, où χ est la fonction sur $\tilde{G}(F)$ définie de la façon suivante. Revenons à la définition $\tilde{G}(F) = GL_n(E)\theta$. Alors $\chi(g\theta) = (-1)^{val_E \circ det(g)}$. Plus généralement, si l'on remplace la donnée endoscopique associée à la décomposition $n = n_+ + n_-$ par celle associée à la décomposition $n = n_- + n_+$, le facteur de transfert est simplement multiplié par χ.

5.5 Description des groupes $\bar{G}$, $\bar{H}$ et H_ϵ

Considérons la situation qui intervient dans la preuve du théorème 3.6. La donnée endoscopique $(H, \mathcal{H}, s, \hat{\xi})$ de $(G, \theta, \boldsymbol{\omega})$ est associée à une décomposition $n = n_+ + n_-$. On considère un couple $(\gamma, \delta) \in \mathcal{D}$. On suppose γ et δ compacts et on les écrit $\gamma = exp(Y)\epsilon$, $\delta = exp(X)\eta$. On suppose $\eta \in \tilde{K}$. Les éléments γ, Y et ϵ se décomposent en $\gamma = (\gamma_+, \gamma_-)$, $Y = (Y_+, Y_-)$, $\epsilon = (\epsilon_+, \epsilon_-)$.

La classe de conjugaison par $G(F)$ de l'élément η est paramétrée par des données que l'on note Λ_η. Pour simplifier, on suppose que Λ_η est réduit à un unique élément, qui appartient à Λ_η^e (le cas où l'élément appartient à Λ_η^d est plus simple, il n'apparaît que des groupes linéaires ; le cas général est produit, en un sens évident, de ces cas particuliers). On note λ_η cet unique élément. C'est une famille d'objets que l'on note λ_η, K_η, τ_η, V_η, q_η. Elle est en fait uniquement déterminée par le premier élément $\lambda_\eta \in \mathfrak{o}_{\bar{F},p'}$: K_η est l'extension non ramifiée de E engendrée par λ_η, τ_η est l'unique automorphisme de ce corps qui se restreint à E en l'automorphisme τ et envoie λ_η sur λ_η^{-1}, V_η est de dimension $n/[K_\eta : E]$ sur K_η et q_η est l'unique (à isomorphisme près) forme sesquilinéaire vérifiant la condition de symétrie requise et possédant un réseau autodual.

Seules comptent pour nous les classes de conjugaison stable de $\epsilon_\pm$ et leurs paramétrages se déduisent de celui de η. Pour éliminer les $(-1)^{n+1}$ perturbateurs, on va supposer n impair. Alors la classe de conjugaison stable de $\epsilon_\pm$ est paramétrée par l'unique donnée $\lambda_\epsilon = \lambda_\eta$, $K_\epsilon = K_\eta$, $\tau_\epsilon = \tau_\eta$, $V_{\epsilon_\pm}$, elle-aussi entièrement déterminée par λ_η. Remarquons que $dim_{K_\eta}(V_{\epsilon_\pm}) = n_\pm/[K_\eta : E]$.

Fixons $\alpha_\eta \in K_\eta$ tel que $\lambda_\eta = \alpha_\eta \tau_\eta(\alpha_\eta)^{-1}$. Le commutant $\bar{G} = G_\eta$ est le groupe unitaire de $(V_\eta, \alpha_\eta^{-1} q_\eta)$. L'élément X appartenant à son algèbre de Lie, sa classe de conjugaison par $\bar{G}(F)$ est paramétrée comme en 5.3. Il convient d'adapter le paramétrage et la notation aux algèbres de Lie. Ainsi, on va noter $\mathcal{X}$ l'ensemble de paramètres, qui se décompose en $\mathcal{X}^e \sqcup \mathcal{X}^d$. Un élément $x \in \mathcal{X}^e$ est une famille d'objets x, K_x τ_x, V_x, q_x. Le premier objet x est un élément de $\bar{F}$. Le second K_x est l'extension de K_η engendrée par x. Le troisième τ_x est l'unique automorphisme de K_x dont la restriction à K_η est l'automorphisme τ_η et qui envoie x sur $-x$. On note K'_x le sous-corps des points fixes dans K_x par l'automorphisme τ_x. Puisque X est régulier, on peut supposer $V_x = K_x$. Alors q_x est une forme hermitienne sur K_x, relativement à l'extension K_x/K'_x. On pose $Q_x(v', v'') = trace_{K_x/K_\eta}(q_x(v', v''))$. Un élément $x \in \mathcal{X}^d$ est une famille x, K_x, W_x. Les deux premiers termes sont comme ci-dessus et W_x est un espace vectoriel de dimension finie sur K_x. On pose $V_x = W_x \oplus W_x^*$, que l'on munit de la structure d'espace vectoriel sur K_η définie en 5.3, puis d'une forme. hermitienne Q_x comme dans ce paragraphe. On fixe un isomorphisme de V_η sur $\oplus_{x \in \mathcal{X}} V_x$ qui identifie les formes hermitiennes $\alpha_\eta^{-1} q_\eta$ et $\oplus_{x \in \mathcal{X}} Q_x$. Modulo cet isomorphisme, X est l'élément de $End_{K_\eta}(V_\eta)$ qui agit par $v \mapsto xv$ sur V_x pour $x \in \mathcal{X}^e$ et par $(w \oplus w^*) \mapsto (xw \oplus -xw^*)$ sur V_x pour $x \in \mathcal{X}^d$.

L'espace V_η est égal à V. Selon notre identification de $\tilde{G}(F)$ à un ensemble de formes sesquilinéaires sur V, l'élément η se confond avec la forme Q_η définie par $Q_\eta(v', v'') = trace_{K_\eta/E}(q_\eta(v', v''))$. L'élément $\delta = exp(X)\eta$ se confond avec la forme Q_δ définie par $Q_\delta(v', v'') = Q_\eta(exp(-X)(v'), v'')$. On en déduit l'ensemble Λ_δ qui paramétre la classe de conjugaison par $G(F)$ de δ. Il y a une bijection $x \mapsto \lambda_x$ de $\mathcal{X} \to \Lambda_\delta$ de sorte que :

- $\lambda_x = exp(2x)\lambda_\eta$;
- pour $x \in \mathcal{X}^e$, $K_{\lambda_x} = K_x$, $\tau_{\lambda_x} = \tau_x$, $V_{\lambda_x} = V_x$, $q_{\lambda_x} = \alpha_\eta exp(x) q_x$;
- pour $x \in \mathcal{X}^d$, $K_{\lambda_x} = K_x$ et $W_{\lambda_x} = W_x$.

L'élément $Y_\pm$ appartient à l'algèbre de Lie du groupe unitaire de $V_{\epsilon_\pm}$. Sa classe de conjugaison stable est paramétrée par un ensemble $\mathcal{Y}_\pm = \mathcal{Y}_\pm^e \sqcup \mathcal{Y}_\pm^d$. Un élément $y \in \mathcal{Y}_\pm^e$ est une famille d'objets y K_y, τ_y, V_y. Un élément $y \in \mathcal{Y}_\pm^d$ est une famille d'objets y, K_y, W_y. On en déduit l'ensemble $\Lambda_{\gamma_\pm}$ qui paramètre la classe de conjugaison stable de $\gamma_\pm = exp(Y_\pm)\epsilon_\pm$. Il y a une bijection $y \mapsto \lambda_y$ de $\mathcal{Y}_\pm$ sur $\Lambda_{\gamma_\pm}$ de sorte que :

- $\lambda_y = exp(y)\lambda_\eta$;
- pour $y \in \mathcal{Y}_\pm$, $K_{\lambda_y} = K_y$, $\tau_{\lambda_y} = \tau_y$, $V_{\lambda_y} = V_y$;
- pour $y \in \mathcal{Y}_\pm$, $K_{\lambda_y} = K_y$ et $W_{\lambda_y} = W_y$.

Puisque $\delta \in \tilde{G}_{reg}(F)$, le fait que les classes de conjugaison de γ et δ se correspondent signifie que $\Lambda_\delta = \Lambda_{\gamma_+} \sqcup \Lambda_{\gamma_-}$, du moins si l'on considère ces ensembles comme des sous-ensembles de $\bar{F}^\times$. Modulo les bijections ci-dessus, il y a donc une décomposition $\mathcal{X} = \mathcal{X}_+ \sqcup \mathcal{X}_-$ et des bijections $x \mapsto y_x$ de $\mathcal{X}_\pm$ sur $\mathcal{Y}_\pm$ de sorte que :

(1) $y_x = 2x$;
- pour $x \in \mathcal{X}_\pm^e = \mathcal{X}^e \cap \mathcal{X}_\pm$, $K_{y_x} = K_x$, $\tau_{y_x} = \tau_x$, $V_{y_x} = V_x$;
- pour $x \in \mathcal{X}_\pm^d = \mathcal{X}^d \cap \mathcal{X}_\pm$, $K_{y_x} = K_x$ et $W_{y_x} = W_x$.

On a défini une donnée endoscopique $(\bar{H}, \bar{\mathcal{H}}, \bar{s}, \hat{\bar{\xi}})$ de $\bar{G}_{SC}$. En fait, le passage au groupe simplement connexe $\bar{G}_{SC}$ n'est imposé dans le cas général que par la présence du caractère $\boldsymbol{\omega}$. Il est ici trivial et on peut aussi bien définir $(\bar{H}, \bar{\mathcal{H}}, \bar{s}, \hat{\bar{\xi}})$ comme une donnée endoscopique de $\bar{G}$. On peut aussi considérer $\bar{G}$ comme un groupe unitaire sur K'_η (le corps fixé par τ_η), auquel cas son L-groupe devient simplement le produit semi-direct $GL_{\bar{n}}(\mathbb{C}) \rtimes W_{K'_\eta}$, où $\bar{n} = n/[K_\eta : E]$. Il est plus ou moins évident que $\bar{s}$ est l'élément diagonal de $GL_{\bar{n}}(\mathbb{C})$ qui a $\bar{n}_+$ valeurs propres 1 et $\bar{n}_-$ valeurs propres -1, où $\bar{n}_\pm = n_\pm/[K_\eta : E]$. Alors $\bar{H}$ est le produit de deux groupes unitaires quasi-déployés sur K'_η de rangs respectifs $\bar{n}_+$ et $\bar{n}_-$. On constate que $\bar{H}$ est isomorphe à H_ϵ. Introduisons l'élément $\bar{Y} = (\bar{Y}_+, \bar{Y}_-) \in \bar{\mathfrak{h}}(F)$ de 4.8. Puisque cet élément correspond à la fois à Y par la correspondance endoscopique non standard entre H_ϵ et $\bar{H}$ (on oublie ici les passages inutiles aux groupes simplement connexes) et à X par la correspondance endoscopique ordinaire entre $\bar{H}$ et $\bar{G}$, on voit que $\bar{Y}_\pm$ est paramétré par l'ensemble $\mathcal{X}_\pm$, en oubliant les formes hermitiennes puisque seule compte la classe de conjugaison stable de $\bar{Y}$. En identifiant les groupes H_ϵ et $\bar{H}$, la relation (1) montre que Y s'identifie à $2\bar{Y}$. Le lemme fondamental non standard que l'on a utilisé dans la preuve du théorème dit que :

$$SO_Y^{H_\epsilon}(\mathbf{1}_{\mathfrak{k}_\epsilon}) = SO_{Y/2}^{H_\epsilon}(\mathbf{1}_{\mathfrak{k}_\epsilon}).$$

C'est trivial puisque $p \neq 2$.

Remarque. On peut montrer plus généralement que le lemme fondamental non standard ne sert à rien dans toute situation de "changement de base", car les deux groupes $\bar{H}$ et H_ϵ sont isomorphes. Mais, comme le montre notre exemple, même dans ce cas, la correspondance endoscopique non standard entre $\mathfrak{h}_\epsilon(F)$ et $\bar{\mathfrak{h}}(F)$ n'est pas celle qui provient de l'isomorphisme entre les deux groupes : c'en est un multiple. Cela est évidemment lié au fait que, dans le cas général, il n'y a de lemme fondamental non standard que pour les algèbres de Lie et non pas pour les groupes.

En utilisant la formule (1) de 5.4 et la formule analogue de [W2] proposition X.8, on vérifie aisément l'égalité des facteurs de transfert énoncée au théorème 4.8.

Bibliographie

[K1] R. Kottwitz : *Rational conjugacy classes in reductive groups*, Duke Math. Journal 49 (1982), 785-806

[K2] ——————— : *Stable trace formula : elliptic singular terms*, Math. Annalen 275 (1986), 365-399

[KS]———————-, D. Shelstad : *Foundations of twisted endoscopy*, Astérisque 255 (1999)

[Lab] J.-P. Labesse : *Stable twisted trace formula : elliptic terms*, Journal of the Inst. of Math. Jussieu 3 (2004), 473-530

[N] Ngo Bao Chau : *Le lemme fondamental pour les algèbres de Lie*, prépublication 2007

[T] J. Tits : *Reductive groups over local fields*, in *Automorphic forms, representations and L-functions*, Proc. Symposia in Pure Math. XXXIII, AMS (1979)

[W1] J.-L. Waldspurger : *L'endoscopie tordue n'est pas si tordue*, à paraître aux Memoirs AMS

[W2] ———————————— : *Intégrales orbitales nilpotentes et endoscopie pour les groupes classiques non ramifiés*, Astérisque 269 (2001)