

UNIVERSITÉ PARIS 7 - DENIS DIDEROT
UFR de Mathématiques

THÈSE

Présentée pour obtenir le diplôme de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS 7
Spécialité : Mathématiques

Présentée et soutenue publiquement le lundi 8 décembre 2003 par

Benoît DANIEL

**Sur les surfaces de Bryant
et les disques minimaux délimités par trois droites**

Directeur

Harold ROSENBERG

Rapporteurs

Frank PACARD

Masaaki UMEHARA

Jury

Ahmad EL SOUFI

Frédéric HÉLEIN

François LABOURIE

Frank PACARD

Harold ROSENBERG

Remerciements

J'aimerais tout d'abord exprimer toute ma gratitude envers Harold Rosenberg pour avoir dirigé ma thèse d'une façon remarquable, pour tout ce qu'il m'a appris, pour sa disponibilité, pour l'énergie qu'il m'a consacrée et pour sa gentillesse. Il a toujours su me guider et m'encourager, et il m'a fait profiter de son immense savoir avec enthousiasme. Il a entièrement répondu à mes attentes et j'ai pris beaucoup de plaisir à travailler avec lui.

Je suis reconnaissant à Frank Pacard et à Masaaki Umehara d'avoir pris le temps de rapporter ma thèse. Je suis heureux qu'Ahmad El Soufi, Frédéric Hélein et François Labourie soient membres de mon jury, et je les en remercie sincèrement.

Je remercie également Rabah Souam et Éric Toubiana de m'avoir permis d'exposer mes travaux au Séminaire de Géométrie, ainsi que Pascal Collin, Laurent Hauswirth et Rob Kusner pour leurs conseils et suggestions. Je voudrais exprimer ma reconnaissance aux organisateurs de l'École d'été 2001 sur les Surfaces minimales au MSRI (Berkeley), et tout particulièrement à David Hoffman. Merci également à Alexander Bobenko de m'avoir invité à l'École d'été 2003 sur les Surfaces discrètes à Saint-Pétersbourg.

Je voudrais aussi remercier Claudine Roussel et Michèle Wasse pour avoir pris en charge les aspects matériels et administratifs de cette thèse avec efficacité et bonne humeur.

Enfin je remercie les thésards de Chevaleret pour l'ambiance chaleureuse qui a régné tout au long de la préparation de cette thèse.

Table des matières

Introduction	7
1 Surfaces de Bryant	13
1.1 Bouts d'une surface	13
1.2 Champs de Killing	13
1.3 L'espace hyperbolique de dimension 3	14
1.3.1 Généralités	14
1.3.2 Le modèle de Minkowski	15
1.3.3 Le modèle matriciel	15
1.3.4 Le modèle de Poincaré	16
1.3.5 Le modèle du demi-espace supérieur	16
1.4 Surfaces cousins	17
1.5 Représentations en termes de données méromorphes	18
1.5.1 Représentation de Weierstrass pour les surfaces minimales de \mathbb{R}^3	18
1.5.2 Surface minimale conjuguée et famille associée	21
1.5.3 Représentation de Bryant pour les surfaces de Bryant	21
1.5.4 Surfaces de Bryant duales	24
1.5.5 Représentation spinorielle duale	24
1.5.6 Quelques cousins de surfaces minimales	25
1.6 Monodromie et réductibilité des surfaces de Bryant	30
1.7 Principes de réflexion de Schwarz	31
1.7.1 Pour les surfaces minimales de \mathbb{R}^3	31
1.7.2 Pour les surfaces de Bryant	31
1.7.3 Applications	31
1.8 Flux	32
1.8.1 Généralités	32
1.8.2 Flux pour les surfaces minimales de \mathbb{R}^3	34

1.8.3	Flux pour les surfaces de Bryant	36
1.9	Bouts annulaires des surfaces de Bryant	40
1.9.1	Bouts de courbure totale finie	40
1.9.2	Géométrie des bouts annulaires proprement plongés	41
1.9.3	Binoïdes de \mathbb{H}^3	43
1.9.4	Trinoïdes de \mathbb{H}^3	45
2	Surfaces de Bryant dans \mathbb{H}^3 de type fini	48
2.1	Introduction	48
2.2	Croissance au sens de Nevanlinna d'une fonction méromorphe	49
2.3	Bouts de surfaces de Bryant de type fini	53
3	Flux for Bryant Surfaces	61
3.1	Introduction	61
3.2	Preliminaries and notations	63
3.3	Flux of Killing fields	65
3.3.1	Killing fields associated to translations	65
3.3.2	Killing fields associated to rotations	66
3.3.3	Flux of Killing fields associated to translations	66
3.3.4	Flux of Killing fields associated to rotations	71
3.3.5	Flux polynomial and equivalence with the residue-type flux matrix	71
3.4	Embedded Bryant surface ends of finite total curvature	73
3.4.1	Catenoidal ends	74
3.4.2	Horospherical ends	79
3.4.3	Classification	81
3.5	Flux for embedded ends of finite total curvature	81
3.5.1	Flux for catenoidal ends	81
3.5.2	Flux for horospherical ends	83
3.5.3	Flux for horospheres	85
3.6	Geometric applications	85
4	Minimal disks bounded by three lines	89
4.1	Introduction	89
4.2	Preliminaries	92
4.2.1	Weierstrass representation	92
4.2.2	Helicoidal ends	94

4.3	Minimal surfaces bounded by three lines with helicoidal ends	98
4.3.1	Geometric configuration	98
4.3.2	The Hopf differential and the spinor data	101
4.3.3	Some facts about the hypergeometric differential equation	106
4.3.4	Existence of a minimal surface bounded by three lines	109
4.3.5	The differential equation satisfied by K_1 and K_2	116
4.4	Application to trinoids in hyperbolic space	117
4.4.1	The cousin relation	117
4.4.2	Trinoids	118

Résumé

Cette thèse est consacrée aux surfaces de courbure moyenne constante et égale à 1 dans l'espace hyperbolique de dimension 3 (surfaces de Bryant) et aux surfaces minimales dans l'espace euclidien de dimension 3.

Dans une première partie, nous étudions les surfaces de Bryant du point de vue de la théorie de Nevanlinna. Une surface de Bryant est dite de type fini si elle est de type conforme fini et si son application de Gauss hyperbolique a une croissance finie (au sens de Nevanlinna) en chacun des bouts. Nous montrons qu'une surface de Bryant de courbure totale finie est de type fini.

Dans une seconde partie, nous calculons le flux des champs de Killing à travers des bouts de courbure moyenne 1 dans l'espace hyperbolique, et nous prouvons un résultat conjecturé par Rossman, Umehara et Yamada : la matrice de flux qu'ils ont définie est équivalente au flux des champs de Killing. Nous faisons ensuite une description géométrique des bouts plongés de courbure totale finie. En particulier nous montrons que si un tel bout est asymptotique à un cousin de caténoïde, alors on peut lui associer un axe. Nous calculons également le flux des champs de Killing à travers ces bouts, et nous en déduisons des propriétés géométriques et des analogies avec les surfaces minimales dans l'espace euclidien.

Dans une troisième partie, nous étudions, en suivant une idée de Riemann, les disques minimaux dans l'espace euclidien dont le bord est formé de trois droites données (en position générique) et qui ont trois bouts hélicoïdaux. Nous prouvons l'existence d'une solution lorsque les angles sont strictement inférieurs à π . Pour des angles quelconques, nous prouvons qu'il existe au plus quatre solutions, et nous donnons une condition suffisante d'existence ainsi que des formules explicites pour les données de Weierstrass en termes de fonctions hypergéométriques. Enfin, nous construisons des trinoïdes de courbure moyenne 1 dans l'espace hyperbolique par la méthode de l'immersion cosinus conjuguée.

Abstract

This thesis deals with constant mean curvature one surfaces in hyperbolic three-space (Bryant surfaces) and with minimal surfaces in Euclidean three-space.

In a first part we study Bryant surfaces from the viewpoint of Nevanlinna theory. A Bryant surface is said to be of finite type if it is of finite conformal type and if its hyperbolic Gauss map is of finite growth (in the sense of Nevanlinna) at each end. We prove that a Bryant surface of finite total curvature is of finite type.

In a second part we compute the flux of Killing fields through ends of constant mean curvature 1 in hyperbolic space, and we prove a result conjectured by Rossmann, Umehara and Yamada: the flux matrix they have defined is equivalent to the flux of Killing fields. We next give a geometric description of embedded ends of finite total curvature. In particular, we show that if such an end is asymptotic to a catenoid cousin, then we can associate an axis to it. We also compute the flux of Killing fields through these ends, and we deduce some geometric properties and some analogies with minimal surfaces in Euclidean space.

In a third part, following Riemann's idea, we study minimal disks in Euclidean space bounded by three given lines (in generic position) and having three helicoidal ends. We prove the existence of a solution when the angles are less than π . In the case of general angles, we prove that there exist at most four solutions, we give a sufficient condition of existence and we give explicit formulas for the Weierstrass data in terms of hypergeometric functions. Finally, we construct constant-mean-curvature-one trinoids in hyperbolic space by the method of the conjugate cousin immersion.

Introduction

L'objectif de cette thèse est d'étudier certains aspects de la théorie des surfaces de Bryant, c'est-à-dire des surfaces de courbure moyenne 1 dans l'espace hyperbolique \mathbb{H}^3 , et de la théorie des surfaces minimales dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3 .

Les surfaces de courbure moyenne constante non nulle sont des objets naturels à étudier car elles interviennent dans les problèmes isopérimétriques : ce sont les points critiques de l'aire pour les transformations fixant leur bord et préservant le volume renfermé par la surface et une surface fixe donnée. Par ailleurs les surfaces minimales (c'est-à-dire de courbure moyenne nulle) sont les points critiques de l'aire pour toutes les transformations fixant leur bord. En outre les surfaces minimales de \mathbb{R}^3 peuvent être représentées de façon simple en termes de données méromorphes : c'est la représentation de Weierstrass.

La théorie des surfaces minimales de \mathbb{R}^3 a débuté au dix-huitième siècle avec notamment les travaux de Lagrange, d'Euler et de Meusnier, et la découverte des premiers exemples de surfaces minimales complètes (outre le plan) : le caténoïde et l'hélicoïde. D'autres exemples ont été découverts au dix-neuvième siècle, comme les surfaces périodiques de Scherk et de Riemann, et la surface non plongée d'Enneper. D'importants travaux ont été réalisés dans la deuxième moitié du dix-neuvième siècle (Riemann, Weierstrass, Schwarz, Enneper, etc), avec en particulier l'introduction de la représentation de Weierstrass (au chapitre 4 on s'intéressera au mémoire posthume de Riemann [Rie68]).

Dans la première moitié du vingtième siècle, les mathématiciens se sont intéressés au problème de Plateau (du nom d'un physicien belge), c'est-à-dire trouver une surface d'aire minimale délimitée par une courbe fermée donnée, et à des problèmes liés (Courant, Douglas, Radó, etc). Les surfaces minimales interviennent en physique puisque les « films de savon » sont des surfaces minimales (les « bulles de savon » sont, quant à elles, des surfaces de courbure moyenne constante non nulle).

Dans la deuxième moitié du vingtième siècle, d'importantes contributions sont dues entre autres à Osserman, Lawson, Nitsche, Jenkins, Serrin. Enfin, la découverte il y a une vingtaine d'années de la surface de Costa, qui est une contre-exemple à une ancienne conjecture selon laquelle les seules surfaces minimales complètes, plongées et de topologie finie seraient le plan, l'hélicoïde et le caténoïde, a motivé de nombreuses recherches sur les surfaces minimales proprement plongées.

La théorie des surfaces de Bryant est bien sûr beaucoup plus récente que celle des surfaces minimales de \mathbb{R}^3 . Elle s'est principalement développée depuis la publication d'un travail de Robert Bryant en 1987 ([Bry87]). Bryant a en effet découvert une représentation des surfaces de courbure moyenne 1 dans \mathbb{H}^3 en termes de données méromorphes analogue à la représentation de Weierstrass des surfaces minimales de \mathbb{R}^3 . Par ailleurs, chaque surface de Bryant paramétrée par une surface de Riemann simplement connexe à bord est associée à une surface minimale de \mathbb{R}^3 qui lui est isométrique, dite surface cousine, et réciproquement (c'est un cas particulier de la correspondance dite de Lawson).

L'élégance de cette représentation et ce lien étroit entre surfaces minimales de \mathbb{R}^3 et surfaces de Bryant rendent ces dernières particulièrement intéressantes. Par ailleurs les surfaces de Bryant sont les seules dont l'application de Gauss hyperbolique soit méromorphe (de même que les surfaces minimales de \mathbb{R}^3 sont les seules dont l'application de Gauss soit méromorphe).

Umehara et Yamada ont ensuite beaucoup contribué à développer la théorie et ont construit de nombreux exemples ([UY93], [UY97], [UY00], etc, ainsi que [RUY99], [RUY01], etc avec Rossman). Récemment, Collin, Hauswirth, Rosenberg, Sá Earp et Toubiana ont étudié les bouts proprements plongés ([CHR01], [SET01]). Pacard et Pimentel ont montré comment « désingulariser » une famille de surfaces de Bryant ([PP01]). Bobenko, Pavlyukevitch et Springborn ont introduit une représentation spinorielle et construit des trinoïdes à l'aide de fonctions hypergéométriques ([BPS02]).

Si l'étude locale des surfaces de Bryant est semblable à celle des surfaces minimales de \mathbb{R}^3 , ces deux classes de surfaces présentent des différences au niveau global. Lorsqu'on considère des surfaces non simplement connexes, une courbe fermée non homotope à un point sur la surface minimale ne correspond en général pas à une courbe fermée sur la surface de Bryant cousine, et réciproquement. Ainsi les surfaces cousins peuvent être topologiquement différentes ; c'est le cas par exemple de certains cousins de caténoïdes qui sont simplement connexes, alors que le caténoïde ne l'est pas. La propriété d'être plongé n'est pas non plus conservée par passage à la surface cousine (une fois encore certains cousins de caténoïdes illustrent ce fait).

Par ailleurs, Rossman et Sato ([RS98]) ont montré qu'il existe des surfaces de Bryant (immégrées) de genre 1 avec deux bouts caténoïdaux (mais non plongées au sens d'Alexandrov), alors que les surfaces minimales de \mathbb{R}^3 correspondantes n'existent pas.

Enfin, une différence essentielle entre les surfaces minimales de \mathbb{R}^3 et les surfaces de Bryant vient du rôle des applications de Gauss. À une surface de Bryant sont canoniquement associées deux applications méromorphes : l'application de Gauss hyperbolique G , et l'application de Gauss secondaire g (définie sur le revêtement universel de la surface), qui est l'application de Gauss de la surface minimale cousine. Ces deux applications ont une interprétation géométrique simple : la première décrit la normale de la surface et la seconde intervient dans la métrique.

À une surface minimale de \mathbb{R}^3 sont également canoniquement associées deux applications méromorphes : l'application de Gauss (usuelle) g , et l'application de Gauss hyperbolique G (définie sur le revêtement universel) de la surface de Bryant cousine. Toutefois, seule la première a une interprétation géométrique simple : elle joue à la fois les rôles analogues à ceux des deux applications de Gauss pour les surfaces de Bryant (normale et métrique). La signification de l'application G pour la surface minimale n'a pas été étudiée.

Chapitre 1 (Surfaces de Bryant)

Le chapitre 1 présente des aspects généraux de la théorie des surfaces de Bryant, les principaux outils qui seront utilisés dans cette thèse, et divers résultats sur les surfaces minimales de \mathbb{R}^3 et les surfaces de Bryant.

Ce chapitre contient par ailleurs des compléments sur la notion de flux (du corollaire 1.37 à la proposition 1.42) faisant le lien entre le chapitre 3 et l'article [KKMS92].

Chapitre 2 (Surfaces de Bryant dans \mathbb{H}^3 de type fini)

Le chapitre 2 est constitué de l'article [Dan02] (*Bulletin des Sciences mathématiques*, volume 126, numéro 7 (septembre 2002), pages 581 à 594).

L'objet de ce chapitre est l'étude de l'application de Gauss hyperbolique des surfaces de Bryant du point de vue de la théorie de Nevanlinna. Cette étude est motivée par une différence notable entre surfaces minimales de \mathbb{R}^3 et surfaces de Bryant : l'application de Gauss d'une surface minimale de \mathbb{R}^3 de courbure totale finie se prolonge de façon méromorphe aux bouts, tandis que l'application de Gauss hyperbolique d'une surface de Bryant de courbure totale finie peut avoir des singularités essentielles aux bouts (c'est le cas par exemple de la cousine de la surface d'Enneper). Il est donc naturel d'étudier la nature de ces singularités essentielles. Nous verrons que ces singularités essentielles sont les plus « simples » possibles.

Soit E un bout de surface de Bryant conformément paramétré par $\mathcal{D}^* = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$, et soit $G : \mathcal{D}^* \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ son application de Gauss hyperbolique. Pour $r \in]0, 1[$ on pose

$$A(r) = \int_{r < |z| < 1} \frac{4|G'(z)|^2}{(1 + |G(z)|^2)^2} dz, \quad T(r) = \int_r^1 \frac{A(t)}{t} dt$$

(le nombre $A(r)$ est l'aire sphérique avec multiplicité de l'image de la couronne $\{r < |z| < 1\}$ par l'application G ; la fonction T est la fonction caractéristique d'Ahlfors-Shimizu de G). On dit que la fonction G est à croissance finie en 0 (au sens de Nevanlinna) si

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\ln T(r)}{-\ln r} < +\infty.$$

On dit que le bout E est de type fini si G est à croissance finie.

Nous démontrons que cette notion de bout de type fini est bien définie (c'est-à-dire indépendante du choix de la paramétrisation et invariante par isométrie de l'espace \mathbb{H}^3 , bien que l'aire sphérique ne soit pas invariante par transformation de Möbius).

On dit qu'une surface de Bryant (complète) est de type fini si elle est conformément équivalente à une surface de Riemann compacte privée d'un nombre fini de points et que tous ses bouts sont de type fini. Le principal résultat du chapitre 2 est le suivant : un bout de surface de Bryant de courbure totale finie est de type fini, et par conséquent une surface de Bryant de courbure totale finie est de type fini (théorème 2.12).

Ce résultat est l'analogue du théorème d'Osserman pour les surfaces minimales de \mathbb{R}^3 : une surface minimale de \mathbb{R}^3 de courbure totale finie est conformément équivalente à une surface de Riemann compacte privée d'un nombre fini de points et son application de Gauss se prolonge de façon méromorphe aux bouts. La partie commune de ces deux résultats (le type conforme de la surface) est en fait la conséquence d'un théorème général, dû à Huber sur les surfaces à courbure négative et à courbure totale finie (voir [Oss69]).

L'application de Gauss hyperbolique d'une surface de Bryant de courbure totale finie n'est pas nécessairement méromorphe mais ses singularités éventuelles sont donc les plus « simples » possibles parmi les singularités essentielles. Par exemple, la fonction $z \mapsto \exp(P(z))$ où P est un polynôme est à croissance finie (en ∞) au sens de Nevanlinna, mais la fonction $z \mapsto \exp(\exp z)$ ne l'est pas.

Cette différence entre surfaces minimales de \mathbb{R}^3 et surfaces de Bryant vient du fait que, pour les premières, le nombre $A(r)$ défini à partir de l'application de Gauss g est en fait la courbure totale

de la couronne (leur application de Gauss joue à la fois les rôles des deux applications de Gauss des surfaces de Bryant).

Cette notion de type fini pour les surfaces de Bryant est inspirée de la notion de type fini pour les surfaces minimales de \mathbb{R}^3 introduites par Harold Rosenberg ([Ros95]) : une surface minimale est dite de type fini si elle est conformément équivalente à une surface de Riemann compacte privée d'un nombre fini de points et que, éventuellement après une isométrie de \mathbb{R}^3 , ses données de Weierstrass (g, ω) sont telles que les formes $\frac{dg}{g}$ et $g\omega$ se prolongent de façon méromorphe aux bouts (Rosenberg a par ailleurs donné une condition suffisante sur la croissance de g au sens de Nevanlinna pour que ceci soit réalisé).

Récemment, Collin, Hauswirth et Rosenberg ont montré que l'application de Gauss hyperbolique d'une surface de Bryant de courbure totale finie (à l'exception de l'horosphère) prenait toutes les valeurs dans $\bar{\mathbb{C}}$ sauf au plus trois ([CHR02]). L'étude de cette application du point de vue de la théorie de Nevanlinna peut permettre d'obtenir des propriétés géométriques des surfaces de Bryant de courbure totale finie.

Chapitre 3 (Flux for Bryant surfaces and applications to embedded ends of finite total curvature)

Le chapitre 3 est constitué de l'article [Dan03a] (*Illinois Journal of Mathematics*, volume 47, numéro 3 (automne 2003), pages 667 à 698).

Le premier objet de ce chapitre est l'étude des deux notions de flux pour les surfaces de Bryant : le flux des champs de Killing défini par Korevaar, Kusner, Meeks et Solomon ([KKMS92]) et la matrice de flux définie par Rossman, Umehara et Yamada ([RUY99]) à partir de la représentation de Bryant F (c'est l'intégrale sur une courbe de la forme matricielle $-dF \cdot F^{-1}$). Ces deux flux sont des invariants homologiques. Le premier est l'analogue du flux défini par Korevaar, Kusner and Solomon pour les surfaces de courbure moyenne constante de \mathbb{R}^3 ([KKS89]) : c'est la somme d'une intégrale sur une courbe Γ de la surface et d'une intégrale sur une surface de bord Γ .

Nous prouvons une conjecture de Rossman, Umehara et Yamada ([RUY99]) : ces deux notions de flux sont équivalentes. Nous calculons le flux des champs de Killing associés aux translations et aux rotations pour un bout d'une surface de Bryant en fonction de sa représentation de Bryant, et nous définissons un « polynôme de flux » qui permet de calculer le flux des champs de Killing (théorèmes 3.12, 3.14 et 3.15). Les coefficients de ce polynôme sont, à des constantes près, égaux à ceux de la matrice de flux de Rossman, Umehara et Yamada (ce sont les résidus des formes ω^\sharp , $g^\sharp\omega^\sharp$ et $(g^\sharp)^2\omega^\sharp$ où $(g^\sharp, \omega^\sharp)$ est le couple de données de Weierstrass de la surface duale).

Par ailleurs nous complétons l'étude géométrique des bouts annulaires proprement plongés due à Sá Earp et Toubiana ([SET01]). Ces derniers ont montré qu'un bout annulaire plongé de courbure totale finie est, éventuellement après une isométrie de \mathbb{H}^3 , un graphe (vertical) dans le modèle du demi-espace supérieur, et qu'il est asymptotique (en tant que graphe) à un cousin de caténoïde qui est de révolution ou à une horosphère (plan euclidien horizontal). Le bout est dit caténoïdal ou horosphérique selon le cas. Par ailleurs, Collin, Hauswirth et Rosenberg ont montré qu'un bout annulaire proprement plongé est de courbure totale finie ([CHR01]). Sá Earp et Toubiana ont également défini la croissance d'un bout caténoïdal.

Toutefois, un bout caténoïdal n'est pas asymptotique à un unique cousin de caténoïde selon cette définition, puisqu'un cousin de caténoïde est asymptotique à son image par une translation euclidienne

horizontale. Nous prouvons qu'un bout caténoïdal est asymptotique à un unique cousin de caténoïde en un sens plus fort que celui de [SET01] : un bout caténoïdal est asymptotiquement une surface de révolution autour d'un axe. Ce résultat est l'analogue d'un résultat de Schoen ([Sch83]) pour les bouts minimaux caténoïdaux dans \mathbb{R}^3 .

Enfin nous calculons le flux pour les bout annulaires proprement plongés. On montre que le flux du champ de Killing associé à la translation le long de la géodésique $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ à travers un bout caténoïdal est

$$\varphi = \pi(1 - \mu^2)(2 \operatorname{Re}(\mathcal{A}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{B}) - 1)$$

où $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ est l'axe du bout, $1 - \mu$ sa croissance, et où $(\mathcal{A}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{B})$ désigne le birapport (théorème 3.32). Pour le champ de Killing associé à la rotation d'axe $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ on obtient $-2\pi(1 - \mu^2) \operatorname{Im}(\mathcal{A}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{B})$. Ces formules sont particulièrement simples puisque le flux est invariant par une isométrie directe de \mathbb{H}^3 . Nous montrons aussi que le flux pour un bout horosphérique est nul si et seulement si sa différentielle de Hopf est holomorphe au bout (théorème 3.34). Ces résultats sont semblables aux résultats pour le flux des bouts minimaux caténoïdaux et plans dans \mathbb{R}^3 . Enfin, nous donnons quelques applications géométriques du calcul du flux.

Chapitre 4 (Minimal disks bounded by three straight lines in Euclidean space and trinoids in hyperbolic space)

Le chapitre 4 est constitué de la prépublication [Dan03b].

Ce chapitre concerne non seulement les surfaces de Bryant mais aussi les surfaces minimales de \mathbb{R}^3 . On s'intéresse d'abord aux disques minimaux dans \mathbb{R}^3 délimités par trois droites en position générique (*i.e.* les droites ne se coupent pas et n'appartiennent pas à des plans parallèles) et avec des bouts hélicoïdaux.

Ce problème avait été étudié par Riemann dans un mémoire posthume ([Rie68]). Dans ce mémoire il a en fait introduit la représentation spinorielle, l'application de Gauss et la différentielle de Hopf des surfaces minimales de \mathbb{R}^3 . Il a également étudié le cas des surfaces minimales délimitées par un contour composé de segments de droites, de demi-droites et de droites. En particulier il a étudié plus précisément les cas où le contour est constitué de deux, trois ou quatre droites.

Cependant son étude était incomplète et parfois imprécise, notamment en ce qui concerne le formalisme et les questions d'orientation. L'un des but du chapitre 4 est de rendre rigoureux les travaux de Riemann sur les surfaces minimales délimitées par trois droites (en position générique) avec des bouts hélicoïdaux, et de les compléter. Plus précisément nous considérons les immersions minimales x de $\Sigma = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \geq 0\} \setminus \{0, 1\}$ dans \mathbb{R}^3 envoyant $]-\infty, 0[$, $]0, 1[$ et $]1, \infty[$ sur trois droites (en position générique) et ayant trois bouts hélicoïdaux en 0, 1 et ∞ .

En étudiant les données spinorielles de l'immersion x , nous prouvons d'abord qu'il existe au plus quatre immersions minimales délimitées par trois droites données (en position générique) avec des bouts hélicoïdaux de paramètres donnés (théorème 4.21). Pour cela nous utilisons un résultat dû à Riemann : il a montré que les données spinorielles sont solutions d'une équation différentielle dans laquelle intervient le schwarzien de l'application de Gauss. Il s'agit d'une équation du second ordre avec cinq singularités régulières. En étudiant le comportement du schwarzien en ces points singuliers, nous montrons que le schwarzien dépend uniquement de deux paramètres qui sont liés par deux équations polynomiales de degré 2, et qu'ainsi il y a au plus quatre possibilités pour le schwarzien de l'application de Gauss.

Ensuite nous étudions l'immersion explicitée par Riemann dans son mémoire [Rie68] : il a introduit des spineurs en termes de fonctions hypergéométriques, mais il n'a pas vérifié que ces spineurs donnaient effectivement une immersion minimale délimitée par trois droites données. Nous établissons ceci à la proposition 4.31. Plus précisément, trois droites en position générique étant fixées, notant A, B, C les distances entre les droites, et $\pi\alpha, \pi\beta, \pi\gamma$ les angles des bouts, nous montrons qu'à chaque solution réelle (p, q, r) (au signe près) du système

$$\begin{cases} p^2 - \alpha^2(p+q+r)^2 &= \varepsilon \frac{A\alpha}{2\pi} \\ q^2 - \beta^2(p+q+r)^2 &= \varepsilon \frac{B\beta}{2\pi} \\ r^2 - \gamma^2(p+q+r)^2 &= \varepsilon \frac{C\gamma}{2\pi} \end{cases}$$

où $\varepsilon \in \{1, -1\}$ (selon la configuration géométrique des droites et leurs angles) correspond une immersion minimale (avec éventuellement un point singulier lorsque la différentielle de Hopf a un zéro double, ce qui n'est pas un cas générique) délimitée par ces droites et avec des bouts hélicoïdaux de paramètres $(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)$ (théorème 4.33). En particulier nous montrons l'existence d'au moins une immersion minimale dans le cas où les angles sont plus petits que π (corollaire 4.34). Ce système peut ne pas avoir de solution pour des angles supérieurs à π (en valeur absolue).

Toutefois nous ne savons pas si toutes les solutions sont obtenues de cette façon.

Enfin nous construisons des trinoïdes de courbure moyenne 1 dans l'espace hyperbolique \mathbb{H}^3 en considérant les immersions cousins conjuguées des disques minimaux délimités par trois droites dans \mathbb{R}^3 .

Les trinoïdes irréductibles dans \mathbb{H}^3 ont été classifiés par Umehara et Yamada ([UY00]), puis par Bobenko, Pavlyukevich et Springborn ([BPS02]) par une technique différente : leur méthode présente des points communs avec la méthode utilisée dans ce chapitre pour construire les surfaces minimales dans \mathbb{R}^3 (ils introduisent la représentation spinorielle pour les surfaces de Bryant et ils obtiennent des formules explicites en termes de fonctions hypergéométriques).

Par ailleurs nous donnons au chapitre 4 des exemples de disques minimaux délimités par trois droites dont les cousins conjugués donnent des surfaces de Bryant invariantes par des isométries paraboliques.

Chapitre 1

Surfaces de Bryant

Dans ce chapitre nous présentons quelques aspects de la théorie des surfaces de Bryant, et principalement leurs liens avec les surfaces minimales de \mathbb{R}^3 et les outils qui seront utilisés aux chapitres 2, 3 et 4. Pour une introduction plus complète, on pourra se référer à [Ros02] ou [Ros01].

Si \mathcal{S} est une surface de Riemann, on note $\tilde{\mathcal{S}}$ son revêtement universel. La courbure moyenne d'une surface dans \mathbb{R}^3 ou \mathbb{H}^3 est définie comme la moitié de la trace de sa deuxième forme fondamentale. Nous commençons par rappeler quelques notions de géométrie différentielle (on pourra se reporter à [Car92]).

1.1 Bouts d'une surface

Intuitivement, un bout d'une surface (non-compacte) est une façon d'aller à l'infini sur la surface. Nous en donnons définition rigoureuse (on pourra se reporter à [FM97]).

Définition 1.1. Soit M une surface différentiable. Un **bout** de M est une classe d'équivalence de courbes propres $\gamma : [0, +\infty[\rightarrow M$ pour la relation d'équivalence suivante : deux courbes propres γ_1 et γ_2 sont équivalentes si et seulement s'il existe une suite croissante (K_n) de compacts à bord dont la réunion est égale à M telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les composantes non-compactes de $\gamma_1 \setminus \text{Int } K_n$ et de $\gamma_2 \setminus \text{Int } K_n$ sont contenues dans la même composante connexe de $M \setminus \text{Int } K_n$.

Définition 1.2. Un sous-domaine propre $D \subset M$ à bord lisse et compact est un **représentant** d'un bout E si, pour toute courbe propre γ dont la classe d'équivalence est E , $\gamma \cap D$ est non-compact (ou, de façon équivalente, s'il existe une telle courbe γ).

Définition 1.3. Un bout est dit **annulaire** s'il a un représentant qui est homéomorphe à $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$.

Exemple 1.4. Si M est une surface compacte privée de n points, alors M a n bouts, les bouts sont annulaires et chaque bout correspond à un point enlevé.

1.2 Champs de Killing

Définition 1.5. Soit M une variété riemannienne et X un champ de vecteurs sur M . Si $p \in M$, on note $\varphi_p :]-\varepsilon_p, \varepsilon_p[\times U_p \rightarrow M$ l'application différentiable telle que, pour tout $q \in U_p$, la courbe

$t \mapsto \varphi_p(t, q)$ est la trajectoire de X telle que $\varphi_p(0, q) = q$ (c'est-à-dire $\frac{d}{dt}\varphi_p(q, t) = X(\varphi_p(q, t))$), où U_p est un voisinage de p et ε_p un réel strictement positif.

On dit que X est un **champ de Killing** si pour tout point $p \in M$ et pour tout réel $t \in]-\varepsilon_p, \varepsilon_p[$ l'application $\varphi_p(t, \cdot) : U_p \rightarrow M$ est une isométrie.

Un champ X est un champ de Killing si et seulement si, pour tout couple (Y, Z) de champs de vecteurs,

$$\langle \nabla_Y X, Z \rangle + \langle \nabla_Z X, Y \rangle = 0.$$

En particulier un champ de Killing est à divergence nulle.

1.3 L'espace hyperbolique de dimension 3

L'espace hyperbolique \mathbb{H}^3 est l'unique variété riemannienne complète, simplement connexe, de dimension 3 et de courbure sectionnelle -1 . Il est difféomorphe à l'espace euclidien \mathbb{R}^3 .

Définition 1.6. Une **surface de Bryant** est une surface de courbure moyenne 1 dans l'espace hyperbolique \mathbb{H}^3 .

Une surface de Bryant est orientée par son vecteur de courbure moyenne.

1.3.1 Généralités

Définition 1.7. Le **bord asymptotique** (ou **bord à l'infini**) de l'espace hyperbolique est l'ensemble des classes d'équivalence de demi-géodésiques pour la relation suivante : deux demi-géodésiques γ_1 et γ_2 (paramétrées par la longueur d'arc) sont équivalentes si et seulement si la distance de $\gamma_1(t)$ à $\gamma_2(t)$ est bornée quand $t \rightarrow +\infty$. Il est noté $\partial_\infty \mathbb{H}^3$.

Le bord asymptotique de \mathbb{H}^3 est homéomorphe à la sphère \mathbb{S}^2 . Deux points distincts de $\partial_\infty \mathbb{H}^3$ sont reliés par une unique géodésique de \mathbb{H}^3 . Réciproquement, toute géodésique de \mathbb{H}^3 relie deux points distincts de $\partial_\infty \mathbb{H}^3$. Si \mathcal{A} et \mathcal{B} sont deux points distincts de $\partial_\infty \mathbb{H}^3$, on note $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ l'unique géodésique orientée allant de \mathcal{A} à \mathcal{B} .

Une isométrie directe de \mathbb{H}^3 est dite

1. **elliptique** si elle a des points fixes dans \mathbb{H}^3 ,
2. **parabolique** si elle a exactement un point fixe dans $\partial_\infty \mathbb{H}^3$ et qu'elle n'a aucun point fixe dans \mathbb{H}^3 ,
3. **hyperbolique** si elle a exactement deux points fixes dans $\partial_\infty \mathbb{H}^3$ et qu'elle n'a aucun point fixe dans \mathbb{H}^3 .

On peut définir pour les surfaces de \mathbb{H}^3 une notion d'application de Gauss analogue à celle des surfaces de \mathbb{R}^3 . Soit Σ une surface orientée dans \mathbb{H}^3 , et N sa normale. Si x est un point de Σ , on considère la géodésique $t \mapsto \gamma(t)$ telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma'(0) = N(x)$. Alors $\gamma(t)$ tend vers un unique point du bord à l'infini $\partial_\infty \mathbb{H}^3$, que l'on note $G(x)$. On a ainsi défini une application $G : \Sigma \rightarrow \partial_\infty \mathbb{H}^3$ qu'on appelle **application de Gauss hyperbolique** de la surface Σ .

1.3.2 Le modèle de Minkowski

L'espace de Lorentz \mathbb{L}^4 est égal à l'espace \mathbb{R}^4 muni de la forme quadratique de signature $(3, 1)$

$$q = -dx_0^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2.$$

On pose alors

$$\mathbb{H}^3 = \{x \in \mathbb{L}^4 | q(x) = -1, x_0 > 0\}.$$

Muni de la restriction de q à son fibré tangent (qui est définie positive), cet espace \mathbb{H}^3 constitue un modèle de l'espace hyperbolique, dit de Minkowski (ou du demi-hyperboloïde).

Dans ce modèle, les géodésiques sont les intersections de \mathbb{H}^3 avec les plans de \mathbb{L}^4 verticaux (c'est-à-dire orthogonaux au plan $\{x_0 = 0\}$).

Le bord asymptotique $\partial_\infty \mathbb{H}^3$ est identifié à l'ensemble des droites contenues dans le cône de lumière $L = \{x \in \mathbb{L}^4 | q(x) = 0\}$.

Les isométries directes de \mathbb{H}^3 sont les restrictions à \mathbb{H}^3 des isométries directes de \mathbb{L}^4 . Par conséquent, le groupe des isométries directes de \mathbb{H}^3 est

$$\mathrm{SO}(3, 1) = \{N \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}) | \det N > 0, N^t Q N = Q\}$$

où Q désigne la matrice $\mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$.

Les champs de Killing sont donnés par les éléments de l'algèbre de Lie

$$\mathfrak{so}(3, 1) = \{n \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}) | n^t Q + Q n = 0\}$$

(c'est-à-dire l'espace des endomorphismes antisymétriques de \mathbb{L}^4). Par ailleurs on identifiera les espaces $\mathfrak{so}(3, 1)^*$ et $\mathfrak{so}(3, 1)$ au moyen de la forme $(n, p) \mapsto \frac{1}{2} \mathrm{tr}(np)$ (voir [KKMS92]).

Le polynôme caractéristique d'un élément $\mu \in \mathfrak{so}(3, 1)$ s'écrit sous la forme $(X^2 - m^2)(X^2 + s^2)$ où m et s sont deux réels positifs ou nuls, appelés respectivement la **masse** et le **spin** de μ . Dans un base pseudo-orthonormée de \mathbb{L}^4 , μ peut se mettre sous l'une des deux formes suivantes (voir par exemple [Nab92]) :

$$\begin{pmatrix} 0 & m & 0 & 0 \\ m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \\ 0 & 0 & -s & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans le deuxième cas, α est un réel et on a $m = s = 0$.

1.3.3 Le modèle matriciel

Il est souvent commode d'identifier \mathbb{L}^4 à l'espace des matrices hermitiennes de taille 2 par

$$(x_0, x_1, x_2, x_3) \mapsto \begin{pmatrix} x_0 + x_3 & x_1 + ix_2 \\ x_1 - ix_2 & x_0 - x_3 \end{pmatrix}.$$

Avec cette identification, \mathbb{H}^3 est l'ensemble des matrices hermitiennes de déterminant 1 et de trace strictement positive, et la métrique sur \mathbb{H}^3 correspond à l'opposé du déterminant.

Dans ce modèle, le groupe des isométries directes de \mathbb{H}^3 est $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$, l'action d'une matrice $A \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ étant définie par

$$M \mapsto AMA^*.$$

Toute matrice $M \in \mathbb{H}^3$ peut s'écrire

$$M = FF^*$$

pour une certaine matrice $F \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, et cette matrice F est unique à multiplication à droite près par une matrice $U \in \mathrm{SU}_2$. Une isométrie directe correspond à la multiplication à gauche de F par une matrice $A \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$.

Au niveau des algèbres de Lie, on a l'isomorphisme suivant : à la matrice $\begin{pmatrix} r & s \\ t & -r \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ correspond la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Re}(s+t) & \mathrm{Im}(s-t) & 2\mathrm{Re}r \\ \mathrm{Re}(s+t) & 0 & -2\mathrm{Im}r & -\mathrm{Re}(s-t) \\ \mathrm{Im}(s-t) & 2\mathrm{Im}r & 0 & -\mathrm{Im}(s+t) \\ 2\mathrm{Re}r & \mathrm{Re}(s-t) & \mathrm{Im}(s+t) & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{so}(3,1).$$

Son polynôme caractéristique est $X^4 - 4\mathrm{Re}(r^2+st)X^2 - 4(\mathrm{Im}(r^2+st))^2$. Par ailleurs, si $n_1, n_2 \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ correspondent aux matrices $\tilde{n}_1, \tilde{n}_2 \in \mathfrak{so}(3,1)$, on a $\mathrm{tr}(n_1 n_2) = 4\mathrm{Re}\mathrm{tr}(\tilde{n}_1 \tilde{n}_2)$.

1.3.4 Le modèle de Poincaré

Le modèle de Poincaré (ou de la boule unité) de l'espace hyperbolique est

$$\mathbb{H}^3 = \{(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3 \mid u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 < 1\}$$

muni de la métrique

$$4 \frac{du_1^2 + du_2^2 + du_3^2}{(1 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2)^2}.$$

On identifie le modèle de Poincaré avec le modèle de Minkowski au moyen de la projection stéréographique : le point (x_0, x_1, x_2, x_3) dans le modèle de Minkowski correspond au point (u_1, u_2, u_3) dans le modèle de Poincaré défini par

$$(u_1, u_2, u_3) = \left(\frac{x_1}{1+x_0}, \frac{x_2}{1+x_0}, \frac{x_3}{1+x_0} \right).$$

1.3.5 Le modèle du demi-espace supérieur

Le modèle du demi-espace supérieur (ou de Lobatchevski) de l'espace hyperbolique est

$$\mathbb{H}^3 = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 \mid y_3 > 0\}$$

muni de la métrique

$$\frac{dy_1^2 + dy_2^2 + dy_3^2}{y_3^2}.$$

Le bord asymptotique est alors $\partial_\infty \mathbb{H}^3 = \{y_3 = 0\} \cup \{\infty\} = \bar{\mathbb{C}}$. Les géodésiques sont les demi-droites (euclidiennes) verticales et les demi-cercles (euclidiens) orthogonaux au plan à l'infini $\{y_3 = 0\}$. Les plans hyperboliques sont les demi-plans (euclidiens) verticaux et les demi-sphères (euclidiennes) tangentes au plan à l'infini.

Nous utiliserons l'identification suivante entre les modèles du demi-espace et de Poincaré¹ : le point (u_1, u_2, u_3) dans le modèle de Poincaré correspond au point (y_1, y_2, y_3) dans le modèle du demi-espace défini par

$$(y_1, y_2, y_3) = 2 \frac{(u_1, u_2, 1 - u_3)}{u_1^2 + u_2^2 + (1 - u_3)^2} - (0, 0, 1).$$

Étant donné l'identification entre les modèles de Poincaré et de Minkowski, ce point correspond au point (x_0, x_1, x_2, x_3) dans le modèle de Minkowski tel que

$$(y_1, y_2, y_3) = \left(\frac{x_1}{x_0 - x_3}, \frac{x_2}{x_0 - x_3}, \frac{1}{x_0 - x_3} \right).$$

En termes de la matrice $F = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ définie dans le modèle matriciel, on obtient²

$$y_1 + iy_2 = \frac{A\bar{C} + B\bar{D}}{|C|^2 + |D|^2}, \quad y_3 = \frac{1}{|C|^2 + |D|^2}.$$

Le bord asymptotique $\bar{\mathbb{C}}$ est identifié à l'ensemble des droites du cône de lumière de l'espace \mathbb{L}^4 de la façon suivante : le point $\mathcal{A} \in \bar{\mathbb{C}}$ correspond à la droite engendrée par le vecteur

$$\left(1, \frac{2 \operatorname{Re} \mathcal{A}}{|\mathcal{A}|^2 + 1}, \frac{2 \operatorname{Im} \mathcal{A}}{|\mathcal{A}|^2 + 1}, \frac{|\mathcal{A}|^2 - 1}{|\mathcal{A}|^2 + 1} \right) \in \mathbb{L}^4.$$

Les isométries directes de \mathbb{H}^3 agissent sur $\bar{\mathbb{C}}$ par les transformations de Möbius : l'isométrie directe correspondant à la matrice $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ induit sur $\bar{\mathbb{C}}$ la transformation

$$z \mapsto \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}.$$

1.4 Surfaces cousins

On note $\mathbb{M}(c)$ l'espace-forme simplement connexe de dimension 3 et de courbure c . Soit (M, ds^2) une variété riemannienne orientée simplement connexe de dimension 2, S un champ d'endomorphismes symétriques $S_x : T_x M \rightarrow T_x M$, Π la 2-forme différentielle définie par $\Pi(X, Y) = \langle S(X), Y \rangle$, et K la courbure de la métrique ds^2 . Alors il existe une immersion isométrique de M dans $\mathbb{M}(c)$ dont

¹Cette identification est celle utilisée dans la plupart des articles, notamment [Bry87], [UY93] et [Ros02]. Elle diffère de celle utilisée dans [SET01] et au chapitre 3 de ce travail.

²Pour obtenir les formules correspondantes avec l'identification utilisée dans [SET01] et au chapitre 3, il faut remplacer la matrice $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ par la matrice $\begin{pmatrix} D & C \\ B & A \end{pmatrix}$. Ce changement d'identification induit sur le bord asymptotique $\bar{\mathbb{C}}$ la transformation $z \mapsto z^{-1}$.

la deuxième forme fondamentale est II (ou, de façon équivalente, dont l'opérateur *shape* est S) si et seulement si

$$K = \det S + c, \quad (\nabla_X \text{II})(Y, Z) = (\nabla_Y \text{II})(X, Z).$$

Ces deux équations sont respectivement les équations de Gauss et de Codazzi.

Considérant ces conditions pour les espaces $\mathbb{R}^3 = \mathbb{M}(0)$ et $\mathbb{H}^3 = \mathbb{M}(-1)$, on en déduit que (M, ds^2) peut s'immerger de façon isométrique et minimale dans \mathbb{R}^3 avec S pour opérateur *shape* si et seulement si (M, ds^2) peut s'immerger de façon isométrique et avec courbure moyenne 1 dans \mathbb{H}^3 avec $S + \text{Id}$ pour opérateur *shape*. Les surfaces ainsi obtenues dans \mathbb{R}^3 et \mathbb{H}^3 sont dites **cousines**.

On notera que si on change l'orientation de la surface minimale dans \mathbb{R}^3 , ou si on en fait une homothétie, on obtient en général une nouvelle surface **cousine** dans \mathbb{H}^3 qui est très différente de la surface **cousine** initiale (voir les **cousins** des caténoïdes au paragraphe 1.5.6).

Par conséquent, si \mathcal{S} désigne une surface de Riemann simplement connexe, si $x : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une immersion conforme minimale, I et II ses première et deuxième formes fondamentales, alors il existe une immersion conforme $\tilde{x} : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{H}^3$ de courbure moyenne 1 dont les première et deuxième formes fondamentales sont

$$\tilde{\text{I}} = \text{I}, \quad \tilde{\text{II}} = \text{II} + \text{I},$$

et réciproquement. Les immersions x et \tilde{x} sont dites **cousines**. Elles sont uniques à isométrie de \mathbb{R}^3 ou \mathbb{H}^3 près.

1.5 Représentations en termes de données méromorphes

Un des principaux outils pour étudier les surfaces minimales dans \mathbb{R}^3 ou les surfaces de Bryant est leur représentation en termes d'une application méromorphe et d'une 1-forme différentielle holomorphe.

1.5.1 Représentation de Weierstrass pour les surfaces minimales de \mathbb{R}^3

Théorème 1.8 (représentation de Weierstrass). Soit \mathcal{S} une surface de Riemann et z_0 un point fixé de \mathcal{S} .

Soit g une application méromorphe sur \mathcal{S} et ω une 1-forme différentielle holomorphe sur \mathcal{S} telles que

1. les zéros de ω sont d'ordres pairs,
2. un point z est un pôle de g d'ordre $k \in \mathbb{N}^*$ si et seulement s'il est un zéro de ω d'ordre $2k$.

Alors l'application

$$x : z \mapsto \operatorname{Re} \int_{z_0}^z (1 - g^2, i(1 + g^2), 2g) \omega$$

est une immersion conforme minimale de $\tilde{\mathcal{S}}$ dans \mathbb{R}^3 .

Réciproquement, si $x : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une immersion conforme minimale, alors il existe un point $x_0 \in \mathbb{R}^3$, une application méromorphe g sur \mathcal{S} et une 1-forme différentielle holomorphe ω sur \mathcal{S} satisfaisant les conditions 1 et 2 telles que

$$x(z) = x_0 + \operatorname{Re} \int_{z_0}^z (1 - g^2, i(1 + g^2), 2g) \omega.$$

Le couple (g, ω) est appellé couple de **données de Weierstrass** de l'immersion x .

La 2-forme différentielle $Q = \omega dg$ est appelée **différentielle de Hopf** de l'immersion x . La métrique et la seconde forme fondamentale induites par l'immersion x sur \mathcal{S} sont alors

$$ds^2 = (1 + |g|^2)^2 |\omega|^2, \quad II = -Q - \bar{Q}.$$

Par ailleurs, l'application $g : \mathcal{S} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ est la composée de l'application de Gauss $N : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{S}^2$ de la surface et de la projection stéréographique $\mathbb{S}^2 \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ par rapport au pôle nord. On l'appellera également **application de Gauss**. Cette application $g : \mathcal{S} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ préserve l'orientation puisque N renverse l'orientation (car la courbure d'une surface minimale est négative ou nulle) et que la projection stéréographique renverse également l'orientation (la sphère \mathbb{S}^2 étant orientée par sa normale sortante et le plan \mathbb{C} par la normale dirigée vers le haut).

Les immersions minimales sont caractérisées (parmi les surfaces non totalement ombiliques) par le fait que leur application de Gauss est méromorphe.

Proposition 1.9. *Soit \mathcal{S} une surface de Riemann, $x : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^3$ une immersion conforme, et $g : \mathcal{S} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ son application de Gauss. Alors g est méromorphe si et seulement si x est minimale ou totalement ombilique.*

Si les conditions 1 et 2 ne sont pas satisfaites en un point z , alors l'immersion a ou bien une singularité (sa différentielle est nulle) ou bien un bout selon que l'ordre de z en tant que zéro de ω est supérieur ou inférieur au double de l'ordre de z en tant que pôle de g .

Lorsque la surface de Riemann \mathcal{S} n'est pas simplement connexe, l'immersion x définie par des données de Weierstrass (g, ω) sur \mathcal{S} n'est *a priori* bien définie que sur le revêtement universel $\tilde{\mathcal{S}}$. Les données de Weierstrass (g, ω) définissent une immersion de la surface \mathcal{S} si et seulement si pour toute courbe fermée γ sur \mathcal{S} on a

$$\operatorname{Re} \int_{\gamma} (1 - g^2, i(1 + g^2), 2g) \omega = 0.$$

Si ce vecteur est non nul, alors la surface définie sur $\tilde{\mathcal{S}}$ est invariante par la translation par ce vecteur.

Les exemples les plus simples de surfaces minimales sont le plan (de données $(g, \omega) = (0, dz)$ sur $\mathcal{S} = \mathbb{C}$), l'hélicoïde (de données $(g, \omega) = e^z, i\lambda e^{-z} dz$ sur \mathbb{C} pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$) qui est une surface réglée (figure 1.1), et le caténoïde (de données $(g, \omega) = (z, \lambda z^{-2} dz)$ sur $\mathcal{S} = \mathbb{C}^*$ pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$) qui est une surface de révolution (figure 1.2).

La représentation de Weierstrass peut être formulée en termes de spineurs (et notamment c'est sous cette forme qu'elle est utilisée par Riemann dans son mémoire posthume [Rie68]).

Théorème 1.10 (représentation spinorielle). *Soit \mathcal{S} une surface de Riemann et z_0 un point fixé de \mathcal{S} .*

Soit ξ_1 et ξ_2 deux spineurs holomorphes sur une même structure de spin sur \mathcal{S} sans zéro commun. Alors l'application

$$x : z \mapsto \operatorname{Re} \int_{z_0}^z (\xi_1^2 - \xi_2^2, i(\xi_1^2 + \xi_2^2), 2\xi_1 \xi_2)$$

est une immersion conforme minimale de $\tilde{\mathcal{S}}$ dans \mathbb{R}^3 .

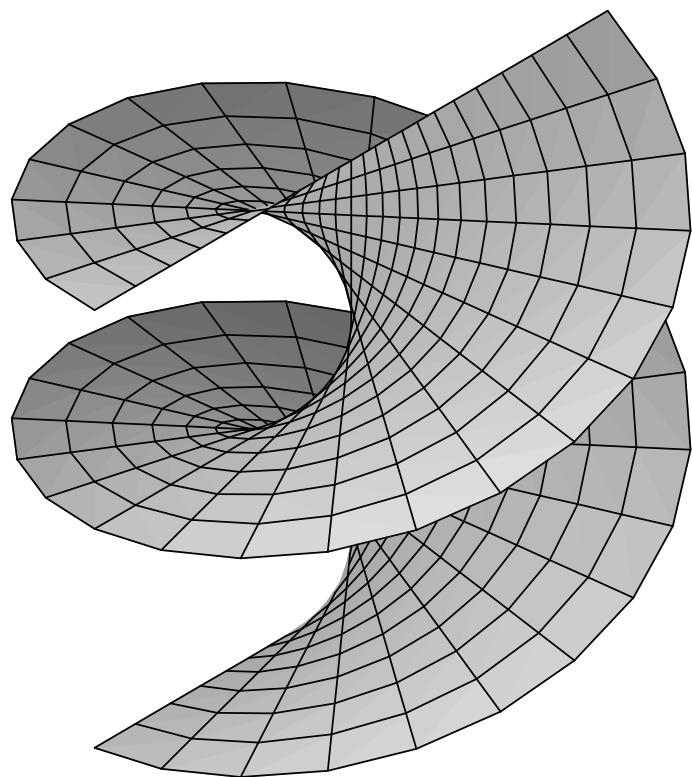


FIG. 1.1 – Un hélicoïde.

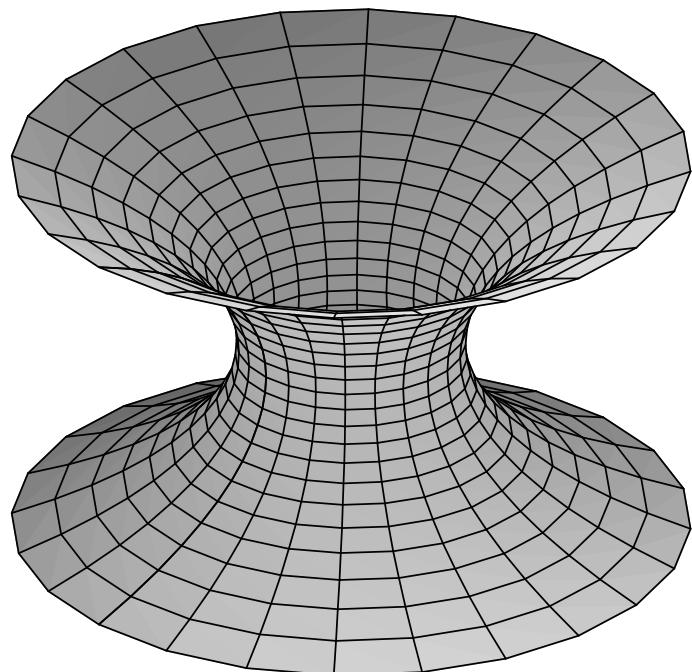


FIG. 1.2 – Un caténoïde.

Réiproquement, si $x : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une immersion conforme minimale, alors il existe un point $x_0 \in \mathbb{R}^3$ et deux spineurs holomorphes ξ_1 et ξ_2 sur une même structure de spin sur \mathcal{S} sans zéro commun tels que

$$x(z) = x_0 + \operatorname{Re} \int_{z_0}^z (\xi_1^2 - \xi_2^2, i(\xi_1^2 + \xi_2^2), 2\xi_1 \xi_2).$$

Le couple (ξ_1, ξ_2) est appellé **couple de données spinorielles** de l'immersion x .

On a $g = \frac{\xi_2}{\xi_1}$ et $\omega = \xi_1^2$. Pour plus de détails sur la représentation spinorielle, on pourra se référer à [KS96].

1.5.2 Surface minimale conjuguée et famille associée

On rappelle que si \mathcal{S} est une surface de Riemann et $f : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ une application harmonique, alors il existe une application harmonique $f^* : \tilde{\mathcal{S}} \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur le revêtement universel $\tilde{\mathcal{S}}$ telle que l'application $f + if^*$ soit holomorphe (sur $\tilde{\mathcal{S}}$). Cette application f^* est unique à une constante près et est appelée **application harmonique conjuguée** de f .

Les coordonnées d'une immersion conforme minimale sont harmoniques.

Définition 1.11. Soit \mathcal{S} une surface de Riemann simplement connexe et $x : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^3$ une immersion conforme minimale. L'immersion conforme minimale $x^* : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dont les coordonnées sont les applications harmoniques conjuguées des coordonnées de x est appelée **immersion conjuguée** de l'immersion x .

Si les données de Weierstrass de x sont (g, ω) , alors celles de x^* sont $(g, -i\omega)$. Si S est l'opérateur *shape* de x , alors celui de x^* est $S^* = JS$ où J est l'opérateur de rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ dans le sens direct sur les plans tangents.

Si la surface \mathcal{S} n'est pas simplement connexe, alors l'immersion conjuguée n'est *a priori* bien définie que sur le revêtement universel $\tilde{\mathcal{S}}$.

Exemple 1.12. La surface conjuguée d'un caténoïde est un hélicoïde.

Plus généralement, la famille d'immersions de données de Weierstrass $(g, e^{i\theta}\omega)$ pour $\theta \in [0, 2\pi[$ est appelée **famille associée** à l'immersion x . Ces surfaces sont localement isométriques, mais en général les isométries locales ne s'étendent pas à des isométries locales de \mathbb{R}^3 .

1.5.3 Représentation de Bryant pour les surfaces de Bryant

Théorème 1.13 ([Bry87]). Soit \mathcal{S} une surface de Riemann. On considère ici le modèle matriciel de l'espace hyperbolique \mathbb{H}^3 .

Soit $F : \mathcal{S} \rightarrow \operatorname{SL}_2(\mathbb{C})$ une immersion conforme telle que $\det(F^{-1}dF) = 0$. Alors $x = FF^* : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{H}^3$ est une immersion conforme de courbure moyenne 1.

Réiproquement, si $x : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{H}^3$ est une immersion conforme de courbure moyenne 1, alors il existe une immersion conforme $F : \tilde{\mathcal{S}} \rightarrow \operatorname{SL}_2(\mathbb{C})$ telle que $\det(F^{-1}dF) = 0$ et $x = FF^*$. L'immersion F s'appelle la **représentation de Bryant** de l'immersion x .

Par ailleurs, pour une telle immersion F il existe une application méromorphe g et une 1-forme holomorphe ω définies sur le revêtement universel \tilde{S} satisfaisant les conditions 1. et 2. du théorème 1.8 telles que

$$F^{-1}dF = \begin{pmatrix} g & -g^2 \\ 1 & -g \end{pmatrix} \omega.$$

Le couple (g, ω) est appelé couple de **données de Weierstrass** de l'immersion x .

Réciproquement, un tel couple (g, ω) donne une immersion conforme $F : \tilde{S} \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ telle que $\det(F^{-1}dF) = 0$.

Si les données (g, ω) ne satisfont pas les conditions 1. et 2. du théorème 1.8 en un point z , alors l'immersion a une singularité ou un bout en z .

Cette représentation est similaire à la représentation de Weierstrass pour les surfaces minimales de \mathbb{R}^3 . La principale différence est que les données de Weierstrass sont bien définies sur \tilde{S} dans le cas des surfaces minimales de \mathbb{R}^3 , tandis qu'elles ne sont en général définies que sur le revêtement universel \tilde{S} dans le cas des surfaces de Bryant.

La représentation de Bryant F est définie à partir de x de façon unique à multiplication à droite près par une matrice $U = \begin{pmatrix} \bar{\varphi} & \bar{\psi} \\ -\psi & \varphi \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}_2$. Cette opération induit sur (g, ω) les transformations suivantes :

$$g \mapsto \frac{\varphi g - \bar{\psi}}{\psi g + \bar{\varphi}}, \quad \omega \mapsto (\psi g + \bar{\varphi})^2 \omega. \quad (1.1)$$

Ces formules montrent que la 2-forme différentielle holomorphe $Q = \omega dg$ définie de façon unique sur S . Elle est appelée **différentielle de Hopf** de l'immersion x .

La métrique et la seconde forme fondamentale induites par l'immersion x sur S sont alors

$$ds^2 = (1 + |g|^2)^2 |\omega|^2, \quad \mathrm{II} = -Q - \bar{Q} + ds^2.$$

On déduit de ces deux égalités et des égalités correspondantes pour les surfaces minimales de \mathbb{R}^3 le résultat fondamental suivant.

Proposition 1.14. *Une immersion minimale dans \mathbb{R}^3 et son immersion cousine dans \mathbb{H}^3 ont les mêmes données de Weierstrass.*

L'application g est donc l'application de Gauss de l'immersion cousine dans \mathbb{R}^3 . Pour cette raison, on l'appelle **application de Gauss secondaire** de l'immersion x .

Remarque 1.15. Les transformations (1.1) sur les données de Weierstrass d'une surface minimale correspondent aux isométries directes de \mathbb{R}^3 .

Si $F = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ désigne la représentation de Bryant de l'immersion x et G son application de Gauss hyperbolique (dans le modèle du demi-espace supérieur³) , alors on a

$$g = -\frac{dB}{dA} = -\frac{dD}{dC}, \quad \omega = AdC - CdA, \quad G = \frac{dA}{dC} = \frac{dB}{dD}.$$

³L'application G dépend de l'identification entre les modèles du demi-espace supérieur et de Minkowski. Avec l'identification de [SET01], on aurait $G = \frac{dC}{dA} = \frac{dD}{dB}$.

Dans une coordonnée z , notant $\omega = \hat{\omega}dz$, les fonctions A et C sont solutions de l'équation différentielle

$$X'' - \frac{\hat{\omega}'}{\hat{\omega}} X' - g' \hat{\omega} X = 0, \quad (1.2)$$

et les fonctions B et D sont solutions de l'équation différentielle

$$Y'' - \frac{(g^2 \hat{\omega})'}{g^2 \hat{\omega}} Y' - g' \hat{\omega} Y = 0. \quad (1.3)$$

Un couple (g, ω) de données de Weierstrass définit l'application F de façon unique à multiplication à gauche près par une matrice $T \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$, c'est-à-dire qu'il définit l'immersion x de façon unique à isométrie directe de \mathbb{H}^3 près. En résumé, il y a une correspondance biunivoque entre les immersions conformes $x : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{H}^3$ de courbure moyenne 1 modulo les isométries directes de \mathbb{H}^3 et les couples de données (g, ω) sur \mathcal{S} modulo les transformations (1.1).

De même que les surfaces minimales de \mathbb{R}^3 sont caractérisées par le fait que leur application de Gauss est méromorphe (proposition 1.9), les surfaces de Bryant sont caractérisées (parmi les surfaces non totalement ombiliques) par le fait que leur application de Gauss hyperbolique est méromorphe.

Proposition 1.16 ([Bry87]). *Soit \mathcal{S} une surface de Riemann et $x : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{H}^3$ une immersion conforme. Soit $G : \mathcal{S} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ son application de Gauss hyperbolique. Alors G est méromorphe si et seulement si x est de courbure moyenne constante 1 ou si x est totalement ombilique.*

Comme pour les surfaces minimales de \mathbb{R}^3 , la donnée du couple (g, ω) est équivalente à la donnée de deux spineurs holomorphes ξ_1 et ξ_2 sur une même structure de spin sur \mathcal{S} sans zéro commun. Ce couple (ξ_1, ξ_2) s'appelle couple de **données spinorielles** de l'immersion x . On a $g = \frac{\xi_2}{\xi_1}$ et $\omega = \xi_1^2$.

Les schwarzians des deux applications de Gauss sont utiles à l'étude des surfaces de Bryant. On rappelle que si f est une fonction méromorphe sur un ouvert $U \subset \mathcal{S}$, son schwarzien par rapport à une coordonnée conforme locale z est la forme différentielle de degré 2 définie par

$$S_z f = \left(\left(\frac{f''}{f'} \right)' - \frac{1}{2} \left(\frac{f''}{f'} \right)^2 \right) dz^2.$$

Si ζ est une autre coordonnée conforme locale, alors $S_z f = S_\zeta f + S_z \zeta$. Si f est régulière en un point z_1 , alors $S_z f$ est holomorphe en z_1 ; si f a un point de branchement d'ordre $j - 1$ en z_1 avec $j \geq 2$, alors $S_z f$ a un pôle d'ordre 2 en z_1 , et son coefficient d'ordre -2 est égal à $\frac{1-j^2}{2}$. Enfin, si $\mu : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ est une transformation de Möbius, alors $S_z f = S_z(\mu \circ f)$.

Par conséquent, si $x : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{H}^3$ est une immersion conforme de courbure moyenne 1, si (g, ω) est son couple de données de Weierstrass et si G est son application de Gauss hyperbolique, alors dans une coordonnée conforme locale z la forme différentielle $S_z g$ ne dépend pas du choix de g , et la forme différentielle $S_z G$ est invariante par une isométrie directe de \mathbb{H}^3 . Par ailleurs, Umehara et Yamada ([UY93]) ont montré la relation suivante :

$$S_z g - S_z G = 2Q.$$

1.5.4 Surfaces de Bryant duales

Définition 1.17. [[UY97]] Soit \mathcal{S} une surface de Riemann, $x : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{H}^3$ une immersion conforme de courbure moyenne 1 et $F : \tilde{\mathcal{S}} \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ sa représentation de Bryant. Alors l'immersion $x^\sharp : \tilde{\mathcal{S}} \rightarrow \mathbb{H}^3$ dont la représentation de Bryant est $F^\sharp = F^{-1}$ est appelée immersion **duale** de l'immersion x .

Théorème 1.18 ([UY97], [Yu98]). *L'immersion x est complète si et seulement si son immersion duale x^\sharp est complète.*

Cette relation de dualité échange les rôles des deux applications de Gauss : si (g, ω) est le couple de données de Weierstrass de l'immersion x et Q sa différentielle de Hopf, alors le couple de données de Weierstrass de l'immersion duale x^\sharp est⁴

$$(g^\sharp, \omega^\sharp) = \left(G, -\frac{Q}{dG} \right),$$

et sa différentielle de Hopf est $Q^\sharp = -Q$. La métrique de x^\sharp est

$$(ds^2)^\sharp = (1 + |G|^2)^2 \left| \frac{Q}{dG} \right|^2.$$

Ainsi Q^\sharp et $(ds^2)^\sharp$ sont bien définies sur $\tilde{\mathcal{S}}$, alors que x^\sharp ne l'est pas en général. Par ailleurs on a

$$(F^\sharp)^{-1} dF^\sharp = -dF \cdot F^{-1} = \begin{pmatrix} G & -G^2 \\ 1 & -G \end{pmatrix} \omega^\sharp.$$

1.5.5 Représentation spinorielle duale

Théorème 1.19 ([BPS02]). *Soit \mathcal{S} une surface de Riemann. On considère ici le modèle matriciel de l'espace hyperbolique \mathbb{H}^3 .*

Soit $x : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{H}^3$ une immersion conforme de courbure moyenne 1 et $F : \tilde{\mathcal{S}} \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ sa représentation de Bryant. Alors il existe un couple (Ξ_1, Ξ_2) de spineurs holomorphes sur une même structure de spin sur \mathcal{S} sans zéro commun tels que

$$-dF \cdot F^{-1} = \begin{pmatrix} \Xi_1 \Xi_2 & -\Xi_2^2 \\ \Xi_1^2 & -\Xi_1 \Xi_2 \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Réciproquement, si (Ξ_1, Ξ_2) est un couple de spineurs holomorphes sur une même structure de spin sur \mathcal{S} sans zéro commun et si $F : \tilde{\mathcal{S}} \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ est une solution de l'équation (1.4), alors $x = FF^ : \tilde{\mathcal{S}} \rightarrow \mathbb{H}^3$ est une immersion conforme de courbure moyenne 1.*

*Le couple (Ξ_1, Ξ_2) est appelé couple de **données spinorielles duales** de l'immersion x .*

Les données de Weierstrass duales $(g^\sharp, \omega^\sharp)$ de l'immersion x sont données par $g^\sharp = \frac{\Xi_2}{\Xi_1}$ et $\omega^\sharp = \Xi_1^2$.

⁴Avec l'identification entre les modèles de Minkowski et du demi-espace supérieur pour l'espace hyperbolique utilisée dans [SET01], on aurait $g^\sharp = G^{-1}$ et $\omega^\sharp = -\frac{Q}{d(G^{-1})}$.

Remarque 1.20. En général, bien que les spineurs Ξ_1 et Ξ_2 soient définis sur \mathcal{S} , les immersions obtenues à partir d'une solution de l'équation (1.4) sont bien définies seulement sur le revêtement universel $\tilde{\mathcal{S}}$. On déterminera au paragraphe 1.6 la condition pour qu'une solution de l'équation (1.4) soit bien définie sur \mathcal{S} . Par ailleurs, une solution de (1.4) n'est unique qu'à multiplication à droite près par une matrice de $SL_2(\mathbb{C})$, et cette opération peut « déformer » l'immersion x . Par conséquent ces spineurs ne définissent pas une unique surface mais une famille de surfaces. On verra un exemple de cette situation au paragraphe 1.9.3 (cousins de caténoïdes déformés).

1.5.6 Quelques cousins de surfaces minimales

Dans ce paragraphe nous décrivons quelques exemples simples de surfaces de Bryant. La plupart de ces exemples ne sont pas plongées. En effet, les surfaces de Bryant plongées sont relativement « rares » : Collin, Hauswirth et Rosenberg ([CHR01]) ont montré que les seules surfaces de Bryant simplement connexes proprement plongées sont les horosphères, et que les seules surfaces de Bryant annulaires proprement plongées sont des cousins de caténoïdes qui sont de révolution (voir ci-après).

Horosphères

L'exemple le plus simple de surface de Bryant est l'horosphère. Les horosphères ont pour données de Weierstrass $(g, \omega) = (0, dz)$ sur $\mathcal{S} = \mathbb{C}$ (ce sont les cousins des plans). Dans le modèle du demi-espace, les horosphères sont les plans euclidiens horizontaux et les sphères euclidiennes tangentes au plan $\{y_3 = 0\}$; dans le modèle de Poincaré, ce sont les sphères euclidiennes tangentes à la sphère unité.

Cousines des surfaces d'Enneper

La surface d'Enneper dans \mathbb{R}^3 a pour données de Weierstrass $(g, \omega) = (z, \lambda^2 dz)$ sur $\mathcal{S} = \mathbb{C}$, où λ est un nombre complexe non nul. La cousin de la surface d'Enneper (voir figure 1.3) a les mêmes données de Weierstrass, et sa représentation de Bryant est

$$F = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \lambda z & \lambda^{-1} \operatorname{sh} \lambda z - z \operatorname{ch} \lambda z \\ \lambda \operatorname{sh} \lambda z & \operatorname{ch} \lambda z - \lambda z \operatorname{sh} \lambda z \end{pmatrix}.$$

Elle est simplement connexe et de courbure totale finie. Elle a un bout en $z = \infty$, et ce bout est irrégulier (donc non plongé) mais de type fini (les notions de bouts réguliers et de type fini seront définies au paragraphe 1.9.1 et au chapitre 2 respectivement). Son application de Gauss hyperbolique est $G = \lambda^{-1} \tanh \lambda z$.

Cousins des caténoïdes

Les caténoïdes \mathcal{C}_λ dans \mathbb{R}^3 ont pour données de Weierstrass $(g, \omega) = (z, \lambda z^{-2} dz)$ sur $\mathcal{S} = \mathbb{C}^*$, où λ est un nombre réel non nul (en relevant ces expressions par l'exponentielle on a $(g, \omega) = (e^\zeta, \lambda e^{-\zeta} d\zeta)$ sur $\mathcal{S} = \mathbb{C}$, mais alors l'immersion correspondante recouvre le caténoïde une infinité de fois). Le caténoïde \mathcal{C}_λ est obtenu à partir du caténoïde \mathcal{C}_1 par homothétie de rapport $|\lambda|$, la normale étant changée si λ est négatif. Bien que les caténoïdes se déduisent les uns des autres de façon simple, leurs cousins $\tilde{\mathcal{C}}_\lambda$ dans \mathbb{H}^3 ont des comportements très différents. On distingue trois types de cousins de caténoïdes.

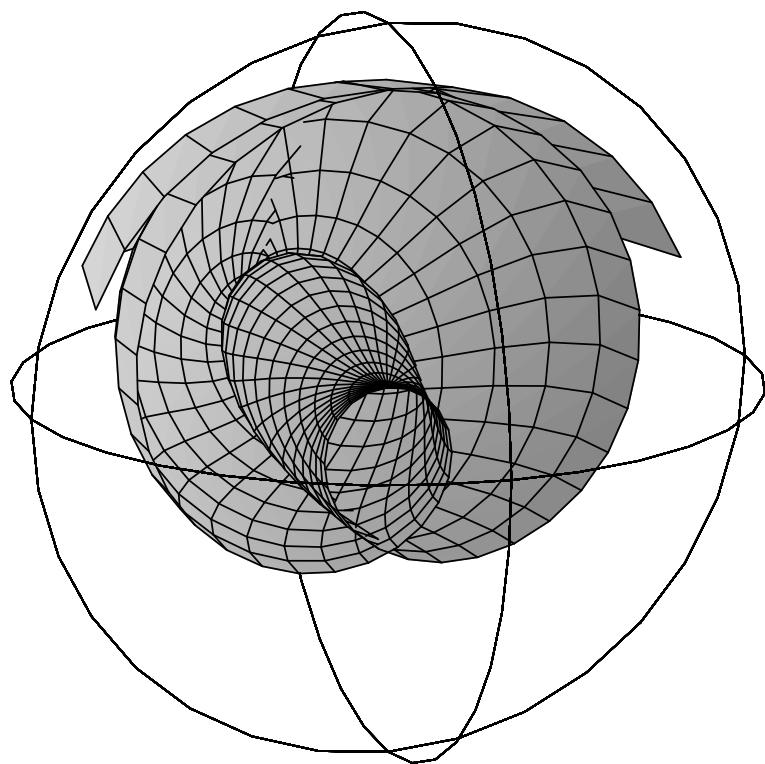


FIG. 1.3 – Une moitié de la cousine d'une surface d'Enneper dans le modèle de Poincaré (le bout est également tronqué).

Lorsque $\lambda > -\frac{1}{4}$, on prendra pour $\tilde{\mathcal{C}}_\lambda$ les données de Weierstrass $(g, \omega) = (z^\mu, \frac{1-\mu^2}{4\mu} z^{-1-\mu} dz)$ sur $S = \mathbb{C}^*$ avec $\mu^2 = \frac{1}{4\lambda+1}$ et $\mu > 0$ (de sorte que l'immersion correspondante recouvre exactement une fois la surface ; en gardant les mêmes données que \mathcal{C}_λ , l'immersion correspondante ne serait pas bien définie sur \mathbb{C}^*). Sa représentation de Bryant est

$$F = \frac{1}{2\sqrt{\mu}} \begin{pmatrix} (\mu+1)z^{-\frac{\mu-1}{2}} & (\mu-1)z^{\frac{\mu+1}{2}} \\ (\mu-1)z^{-\frac{\mu+1}{2}} & (\mu+1)z^{\frac{\mu-1}{2}} \end{pmatrix}.$$

Ces surfaces sont des surfaces de révolution, et elles possèdent de plus un plan (hyperbolique) de symétrie orthogonal à leur axe. Cependant, lorsque la génératrice du caténoïde tourne d'un angle θ , la génératrice correspondante sur le cousin tourne d'un angle de $\frac{\theta}{\mu}$. Ces surfaces sont de courbure totale finie et ont deux bouts en $z = 0$ et $z = \infty$, qui sont plongés et réguliers. Le bord asymptotique de chaque bout est un singleton. La surface $\tilde{\mathcal{C}}_\lambda$ est plongée pour $\lambda > 0$ (voir figure 1.4) mais ne l'est pas pour $\lambda \in]-\frac{1}{4}, 0[$ (voir figure 1.5). Par ailleurs, dans le modèle du demi-espace supérieur, si on prend ∞ comme point à l'infini de l'un des bouts, alors ce bout est un graphe au-dessus du plan $\{y_3 = 0\}$ privé d'un compact, et on a $y_3 \sim \kappa|y_1 + iy_2|^{1-\mu}$ quand $|y_1 + iy_2| \rightarrow +\infty$ pour une constante $\kappa > 0$; le nombre $1 - \mu$ est appelé **croissance** du bout.

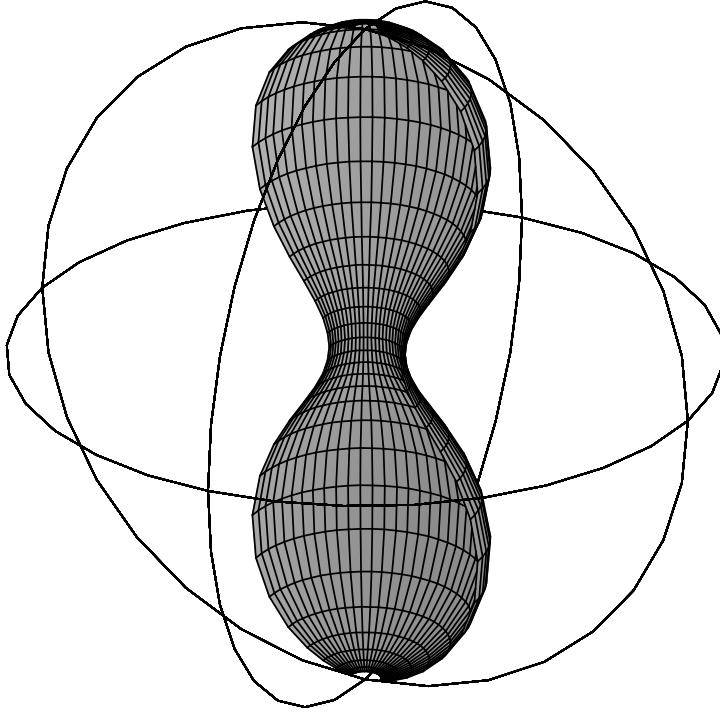


FIG. 1.4 – La moitié du cousin de caténoïde $\tilde{\mathcal{C}}_{9/64}$ ($\mu = 0.8$) dans le modèle de Poincaré.

Lorsque $\lambda = -\frac{1}{4}$, on prendra pour $\tilde{\mathcal{C}}_\lambda$ les données de Weierstrass $(g, \omega) = (e^z, \frac{1}{4}z^{-2}dz)$ sur $S = \mathbb{C}$. Sa représentation de Bryant est

$$F = \begin{pmatrix} e^{-\frac{z}{2}} & e^{\frac{z}{2}} \\ -\frac{z}{4}e^{-\frac{z}{2}} & (1 - \frac{z}{4})e^{\frac{z}{2}} \end{pmatrix}.$$

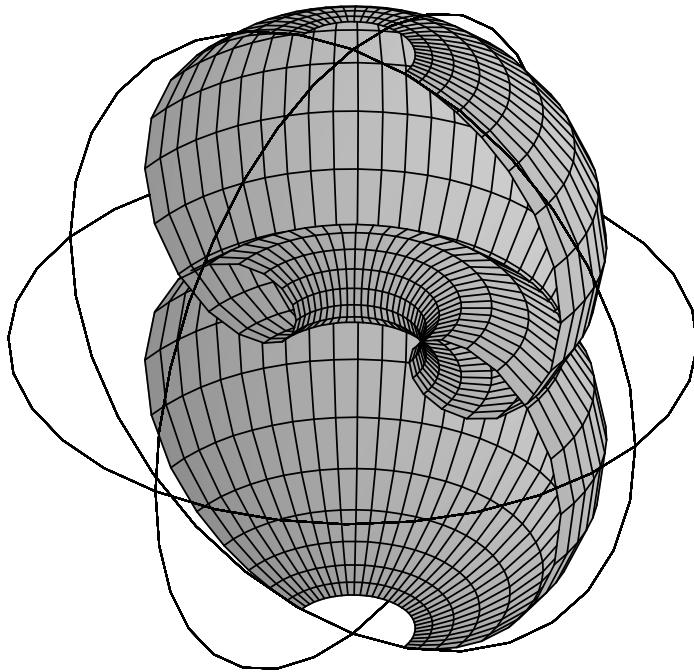


FIG. 1.5 – La moitié du cousin de caténoïde $\tilde{\mathcal{C}}_{-5/36}$ ($\mu = 1.5$) dans le modèle de Poincaré.

La surface $\tilde{\mathcal{C}}_{-1/4}$ est simplement connexe et invariante par une famille à un paramètre d'isométries paraboliques, et par conséquent elle est de courbure totale infinie. Elle a un bout, et ce bout n'est pas plongé (voir figure 1.6). Cette surface est la surface duale de la cousine de la surface d'Enneper de paramètre $\frac{1}{2}$.

Lorsque $\lambda < -\frac{1}{4}$, on prendra pour $\tilde{\mathcal{C}}_\lambda$ les données de Weierstrass $(g, \omega) = (e^z, \lambda z^{-2} dz)$ sur $S = \mathbb{C}$. La surface $\tilde{\mathcal{C}}_\lambda$ est simplement connexe et invariante par une famille à un paramètre d'isométries hyperboliques (translations le long d'une géodésique), et par conséquent elle est de courbure totale infinie. Elle a un bout, et ce bout n'est pas plongé (voir figure 1.7).

Les surfaces $\tilde{\mathcal{C}}_\lambda$ sont décrites en détails dans [Ros02] et [SET01].

Cousins des hélicoïdes

Les hélicoïdes \mathcal{H}_λ dans \mathbb{R}^3 ont pour données de Weierstrass $(g, \omega) = (e^z, i\lambda e^{-z} dz)$ sur $S = \mathbb{C}$, où λ est un nombre réel non nul. L'hélicoïde \mathcal{H}_λ est obtenu à partir de l'hélicoïde \mathcal{H}_1 par homothétie de rapport $|\lambda|$, la normale étant changée si λ est négatif.

Le cousin de l'hélicoïde \mathcal{H}_λ a les mêmes données de Weierstrass. Il est simplement connexe et invariant par une famille de vissages, et par conséquent il est de courbure totale infinie. Il a un bout, et ce bout n'est pas plongé.

Les cousins des hélicoïdes, ainsi que les cousins des surfaces de la famille associée, sont décrits en détails dans [SET01].

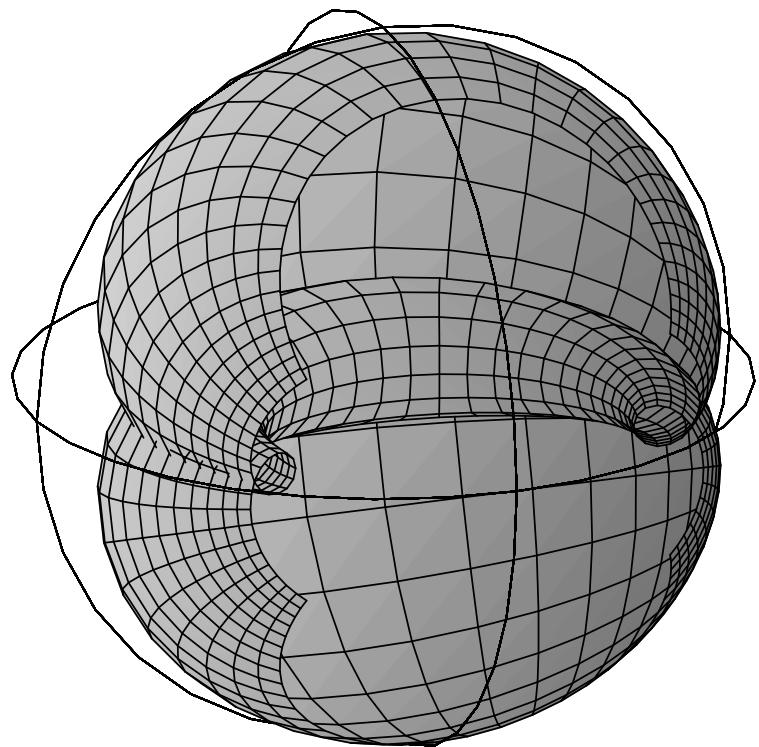


FIG. 1.6 – Le cousin de caténoïde $\tilde{\mathcal{C}}_{-1/4}$ dans le modèle de Poincaré (le bout est tronqué).

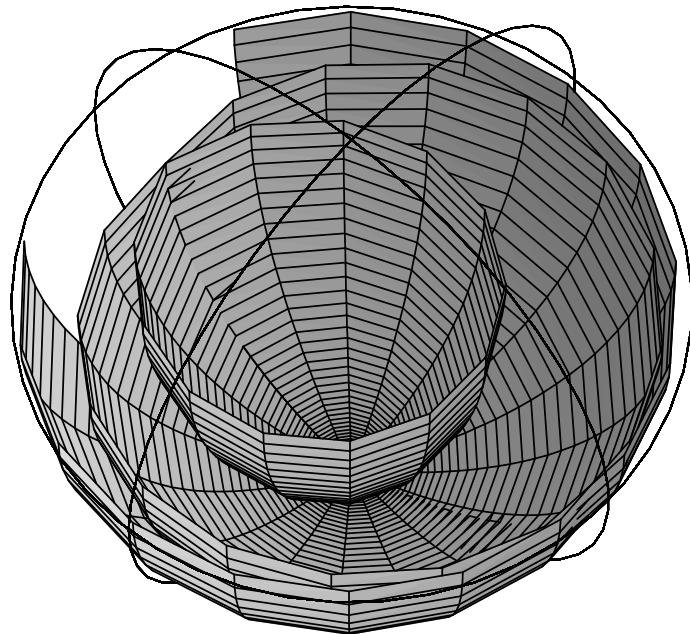


FIG. 1.7 – La moitié du cousin de caténoïde $\tilde{\mathcal{C}}_{-5/4}$ dans le modèle de Poincaré (le bout est également tronqué).

1.6 Monodromie et réductibilité des surfaces de Bryant

Soit \mathcal{S} une surface de Riemann. On suppose qu'on a un couple de données de Weierstrass duales $(g^\sharp, \omega^\sharp)$ définies sur \mathcal{S} , et on veut déterminer si ces données définissent une immersion duale x de \mathcal{S} (elles ne définissent *a priori* qu'une famille d'immersions de $\tilde{\mathcal{S}}$).

Si $F : \tilde{\mathcal{S}} \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ est une représentation de Bryant de x , alors F est une solution de l'équation différentielle

$$dF \cdot F^{-1} = - \begin{pmatrix} g^\sharp & -(g^\sharp)^2 \\ 1 & -g^\sharp \end{pmatrix} \omega^\sharp,$$

et on a $x = FF^* : \tilde{\mathcal{S}} \rightarrow \mathbb{H}^3$ (ici \mathbb{H}^3 désigne le modèle matriciel de l'espace hyperbolique). Une solution de cette équation est unique à multiplication à droite près par une matrice constante $B \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. Une solution de cette équation ne donne pas nécessairement l'immersion x , même à isométrie de \mathbb{H}^3 près (voir la remarque 1.20).

Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{S}$ un lacet non homotope à un point, et soit $z_0 = \gamma(0)$. Soit $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \tilde{\mathcal{S}}$ un relèvement de ce lacet, $\tilde{z}_0 = \tilde{\gamma}(0)$ et $\tilde{z}_1 = \tilde{\gamma}(1)$. Alors il existe une matrice $M([\gamma]) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ telle que $F(\tilde{z}_1) = F(\tilde{z}_0)M([\gamma])$, et cette matrice ne dépend que de la classe d'homotopie de γ . On l'appelle **matrice de monodromie** relative à γ .

On a alors $x(\tilde{z}_1) = F(\tilde{z}_0)M([\gamma])M([\gamma])^*F(\tilde{z}_0)^*$, donc $x(\tilde{z}_1) = x(\tilde{z}_0)$ si et seulement si $M([\gamma]) \in \mathrm{SU}_2$.

Par conséquent, l'immersion x est bien définie sur \mathcal{S} si et seulement si

$$\forall \tau \in \pi_1(\mathcal{S}), M(\tau) \in \mathrm{SU}_2.$$

Si cette condition est réalisée, l'application $\rho : \tau \mapsto M(\tau^{-1})$ définit une représentation de $\pi_1(\mathcal{S})$ dans $\mathrm{PSU}_2 = \mathrm{SU}_2/\{\pm \mathrm{Id}\}$. Cette représentation dépend du choix de F , mais si on remplace F par FU avec $U \in \mathrm{SU}_2$, alors $\rho(\tau)$ est remplacé par $U^{-1}\rho(\tau)U$.

Définition 1.21. [[UY93]] Soit $x : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{H}^3$ une immersion conforme de courbure moyenne 1, F sa représentation de Bryant et $\rho : \pi_1(\mathcal{S}) \rightarrow \mathrm{PSU}_2$ la représentation associée à F . On dit (et c'est indépendant du choix de F) que x est :

1. **irréductible** si $\mathrm{Im} \rho$ n'est pas simultanément diagonalisable,
2. **\mathbb{H}^3 -réductible** si $\mathrm{Im} \rho = \{\mathrm{Id}\}$,
3. **\mathbb{H}^1 -réductible** dans les autres cas.

Exemple 1.22. Une surface de Bryant simplement connexe est \mathbb{H}^3 -réductible.

Exemple 1.23. Les cousins de caténoides qui sont de révolution sont \mathbb{H}^3 -réductibles si leur croissance est entière, et \mathbb{H}^1 -réductibles sinon : en effet, avec les notations du paragraphe 1.5.6, la matrice de monodromie correspondant à un tour autour de 0 dans le sens direct est

$$M = \begin{pmatrix} e^{-i(\mu+1)\pi} & 0 \\ 0 & e^{i(\mu+1)\pi} \end{pmatrix}.$$

1.7 Principes de réflexion de Schwarz

1.7.1 Pour les surfaces minimales de \mathbb{R}^3

Théorème 1.24. Soit Σ une surface minimale complète de \mathbb{R}^3 . Si Σ contient une droite, alors Σ est invariante par la symétrie par rapport à cette droite.

Théorème 1.25. Soit Σ une surface minimale complète de \mathbb{R}^3 . Si Σ contient une géodésique (non droite) qui est une ligne de courbure de Σ , alors cette géodésique est plane et Σ est invariante par la symétrie par rapport au plan contenant cette géodésique. En particulier Σ est orthogonale à ce plan.

1.7.2 Pour les surfaces de Bryant

Théorème 1.26. Soit Σ une surface de Bryant complète de \mathbb{H}^3 . Si Σ contient une géodésique (qui n'est pas une géodésique de \mathbb{H}^3) qui est une ligne de courbure de Σ , alors cette géodésique est plane et Σ est invariante par la symétrie par rapport au plan contenant cette géodésique. En particulier Σ est orthogonale à ce plan.

L'analogue du théorème 1.24 est faux pour les surfaces de Bryant. En revanche il est vrai pour les surfaces minimales de \mathbb{H}^3 (voir [SET01]).

1.7.3 Applications

Comme une surface minimale est localement isométrique à sa surface conjuguée et à sa surface cousine dans \mathbb{H}^3 , les géodésiques de la surface initiale correspondent aux géodésiques de la surface conjuguée et de la surface cousine. Par ailleurs il existe des relations entre les symétries de la surface initiale et celles de sa surface conjuguée et de sa surface cousine.

Proposition 1.27. Soit Σ une surface minimale orientée de \mathbb{R}^3 et Σ^* sa surface minimale conjuguée. Soit γ une géodésique de Σ , κ sa courbure normale et τ sa torsion géodésique. Soit γ^* la géodésique de Σ^* correspondant à γ , κ^* sa courbure normale et τ^* sa torsion géodésique. Alors on a les relations

$$\kappa = -\tau^*, \quad \tau = \kappa^*.$$

Ce résultat est une conséquence de la relation $S^* = JS$ entre les opérateurs *shape* des deux surfaces (voir paragraphe 1.5.2). Ainsi la courbe γ est une droite (respectivement une ligne de courbure) si et seulement si γ^* est une ligne de courbure (respectivement une droite). On en déduit qu'une symétrie axiale (respectivement une symétrie plane) laissant Σ invariante correspond à une symétrie plane (respectivement une symétrie axiale) laissant Σ^* invariante.

Par exemple, le cercle médian du caténoïde correspond à la droite centrale de l'hélicoïde, et les génératrices du caténoïde correspondent aux droites qui engendrent l'hélicoïde. Lorsque la génératrice du caténoïde tourne d'un angle θ autour de l'axe, la droite correspondante sur l'hélicoïde tourne d'un angle θ autour de la droite centrale.

Proposition 1.28. Soit Σ une surface minimale orientée de \mathbb{R}^3 et $\hat{\Sigma}$ sa surface cousine dans \mathbb{H}^3 . Soit γ une géodésique de Σ . Soit κ sa courbure normale. Soit $\hat{\gamma}$ la géodésique de $\hat{\Sigma}$ correspondant à γ et $\hat{\kappa}$ sa courbure normale. Alors on a

$$\hat{\kappa} = \kappa + 1.$$

Ce résultat est une conséquence de la relation $\hat{S} = S + \text{Id}$ entre les opérateurs *shape* des deux surfaces (voir paragraphe 1.4). Ainsi la courbe γ est une ligne de courbure si et seulement si $\hat{\gamma}$ est une ligne de courbure. On en déduit qu'une symétrie plane laissant Σ invariante correspond à une symétrie plane laissant $\hat{\Sigma}$ invariante.

Par exemple, si on considère un caténoïde dans \mathbb{R}^3 dont le cousin est une surface de révolution, alors le cercle médian du caténoïde correspond au cercle médian du cousin, et les génératrices du caténoïde correspondent aux génératrices du cousin. Cependant, un tour complet sur le caténoïde ne correspond pas à un tour complet sur le cousin (voir le paragraphe 1.5.6).

Ces correspondances permettent de construire des surfaces de Bryant dans \mathbb{H}^3 par la méthode dite de la **surface cousine conjuguée**, c'est-à-dire de la surface cousine de la surface conjuguée. En effet, si on veut construire une surface de Bryant invariante par certaines symétries planes, alors cette surface est obtenue par des symétries à partir d'un domaine fondamental délimité par des géodésiques de la surface qui sont des lignes de courbure (et qui sont donc planes). Par conséquent, la surface minimale de \mathbb{R}^3 dont ce domaine est la cousine conjuguée est délimitée par un contour formé de droites ou de parties de droites.

La méthode consiste à résoudre le problème de Plateau pour ce contour, puis à considérer la surface cousine conjuguée de la solution. Cette méthode a été utilisée par Karcher ([Kar01]) pour construire des surfaces de Bryant ayant le groupe de symétries d'une tessellation platonique, ainsi que des trinoides symétriques (à titre d'exemple nous décrivons leur construction au paragraphe 1.9.4). Au chapitre 4, nous utilisons cette méthode pour construire des trinoides irréductibles comme surfaces cousines conjuguées de surfaces minimales de \mathbb{R}^3 délimitées par trois droites.

1.8 Flux

1.8.1 Généralités

Le calcul du flux de champs de vecteurs bien choisis est un outil utile à l'étude des surfaces de courbure moyenne constante dans une variété de dimension 3 ([KKS89], [KKMS92], [Ros03], etc). Nous nous intéressons ici au flux des champs de Killing à travers les surfaces de courbure moyenne constante dans \mathbb{R}^3 ou \mathbb{H}^3 .

Proposition 1.29 ([KKS89], [KKMS92]). *Soit $H \geq 0$ et M une surface orientable, compacte, à bord (éventuellement vide) et de courbure moyenne constante H de \mathbb{R}^3 ou \mathbb{H}^3 . Soit \vec{H} le vecteur de courbure moyenne de M . Soit Y un champ de Killing de \mathbb{R}^3 ou \mathbb{H}^3 .*

Soit Q une surface compacte orientable de \mathbb{R}^3 ou \mathbb{H}^3 dont le bord est égal à celui de M . Soit U un domaine homologique de \mathbb{R}^3 ou \mathbb{H}^3 tel que $\partial U = M + Q$, où M et Q sont orientées par la normale ν sortant de U . Soit η la conormale à ∂M sortant de M .

Si \vec{H} et ν sont de même sens sur M , alors on a

$$\int_{\partial M} \langle \eta, Y \rangle + 2H \int_Q \langle \nu, Y \rangle = 0.$$

Si \vec{H} et ν sont de sens opposés sur M , alors on a

$$\int_{\partial M} \langle \eta, Y \rangle - 2H \int_Q \langle \nu, Y \rangle = 0.$$

Démonstration. On note ∇ la connexion de Levi-Civita de \mathbb{R}^3 ou \mathbb{H}^3 , div l'opérateur de divergence dans \mathbb{R}^3 ou \mathbb{H}^3 , et div_M l'opérateur de divergence sur M . Si (e_1, e_2) est un repère orthonormé sur M , on a, pour tout champ de vecteurs X ,

$$\operatorname{div} X = \langle \nabla_{e_1} X, e_1 \rangle + \langle \nabla_{e_2} X, e_2 \rangle + \langle \nabla_{\vec{N}} X, \vec{N} \rangle,$$

$$\operatorname{div}_M X = \langle \nabla_{e_1} X, e_1 \rangle + \langle \nabla_{e_2} X, e_2 \rangle.$$

Le vecteur de courbure moyenne de M est

$$\vec{H} = \frac{1}{2}(\langle \nabla_{e_1} e_1, \vec{N} \rangle \vec{N} + \langle \nabla_{e_2} e_2, \vec{N} \rangle \vec{N}),$$

et on a $H = \langle \vec{H}, \vec{N} \rangle$ avec $\vec{N} = \nu$ ou $\vec{N} = -\nu$ en fonction du sens de \vec{H} .

Soit Y^\top et $Y^\perp = \langle Y, \vec{N} \rangle \vec{N}$ les composantes de Y tangente et normale à M . On a

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_M Y &= \operatorname{div}_M Y^\top + \operatorname{div}_M Y^\perp \\ &= \operatorname{div}_M Y^\top + \langle \nabla_{e_1} Y^\perp, e_1 \rangle + \langle \nabla_{e_2} Y^\perp, e_2 \rangle \\ &= \operatorname{div}_M Y^\top - \langle \nabla_{e_1} e_1, Y^\perp \rangle - \langle \nabla_{e_2} e_2, Y^\perp \rangle \\ &= \operatorname{div}_M Y^\top - 2H \langle Y, \vec{N} \rangle. \end{aligned}$$

On en déduit que la première variation de l'aire de M par le champ Y est

$$\delta(|M|) = \int_M \operatorname{div}_M Y = \int_{\partial M} \langle \eta, Y \rangle - 2H \int_M \langle Y, \vec{N} \rangle,$$

le premier terme de cette dernière somme étant obtenu par la formule de Stokes.

Par ailleurs, d'après la formule de Stokes la première variation du volume de U par le champ Y est

$$\delta(|U|) = \int_U \operatorname{div} Y = \int_{\partial U} \langle \nu, Y \rangle = \int_M \langle \nu, Y \rangle + \int_Q \langle \nu, Y \rangle.$$

Enfin, comme Y est un champ de Killing, on a $\operatorname{div} Y = 0$ et $\operatorname{div}_\Sigma Y = 0$, et donc dans le cas où $\vec{N} = \nu$ on a

$$0 = \delta(|M|) + 2H \delta(|U|) = \int_{\partial M} \langle \eta, Y \rangle + 2H \int_Q \langle \nu, Y \rangle,$$

et dans le cas où $\vec{N} = -\nu$ on a

$$0 = \delta(|M|) - 2H \delta(|U|) = \int_{\partial M} \langle \eta, Y \rangle - 2H \int_Q \langle \nu, Y \rangle.$$

□

Corollaire 1.30 ([KKS89], [KKMS92]). Soit $H \geq 0$ et Σ une surface orientée de courbure moyenne constante H de \mathbb{R}^3 ou \mathbb{H}^3 , l'orientation étant donnée par le vecteur de courbure moyenne si $H > 0$. On note \vec{N} le vecteur unitaire normal à Σ compatible avec l'orientation.

Soit Γ une courbe fermée orientée lisse sur Σ et K une surface compacte orientable dans \mathbb{R}^3 ou \mathbb{H}^3 dont le bord est Γ . On note η la conormale à Γ telle que la base $(\Gamma', \eta, -\vec{N})$ soit directe, et ν la normale à K qui induit sur K l'orientation compatible avec Γ (voir figure 1.8).

Soit Y un champ de Killing de \mathbb{R}^3 ou \mathbb{H}^3 . Alors le nombre

$$\varphi(\Gamma, Y) = \int_{\Gamma} \langle \eta, Y \rangle - 2H \int_K \langle \nu, Y \rangle$$

ne dépend pas du choix de K . On l'appelle le **flux** de Y à travers Γ .

Par ailleurs, le flux de Y est un invariant homologique : si Γ et $\tilde{\Gamma}$ sont deux courbes homologues dans Σ , alors $\varphi(\Gamma, Y) = \varphi(\tilde{\Gamma}, Y)$.

Démonstration. Soit M la partie de Σ telle que $\partial M = \Gamma - \tilde{\Gamma}$. Soit \tilde{K} une surface compacte orientable dans \mathbb{R}^3 ou \mathbb{H}^3 tel que $\partial \tilde{K} = \tilde{\Gamma}$. Soit $Q = K - \tilde{K}$, et soit U le domaine homologique de \mathbb{R}^3 ou \mathbb{H}^3 tel que $\partial U = M + Q$. D'après la proposition 1.29 (avec $\vec{N} = -\nu$ sur M) on a $\int_{\partial M} \langle \eta, Y \rangle - 2H \int_Q \langle \nu, Y \rangle = 0$ où η et ν sont respectivement la conormale à ∂M et la normale sortante à M (de sorte que ces vecteurs coïncident avec les vecteurs η et ν déjà définis sur Γ et K), ce qui prouve le résultat. \square

1.8.2 Flux pour les surfaces minimales de \mathbb{R}^3

Dans ce paragraphe, Σ désigne une surface minimale orientée dans \mathbb{R}^3 et Γ une courbe lisse fermée sur Σ .

Si Y est le champ de Killing dans \mathbb{R}^3 associé à une translation, alors Y est constant, et par conséquent le flux de Y à travers Γ est

$$\varphi(\Gamma, Y) = \langle \vec{F}_{\Gamma}, Y \rangle$$

où \vec{F}_{Γ} est le vecteur

$$\vec{F}_{\Gamma} = \int_{\Gamma} \eta.$$

Ce vecteur est appelé **force** relative à Γ .

Si Y est le champ de Killing dans \mathbb{R}^3 associé à la rotation par rapport à un axe (P_0, \vec{u}) où P_0 est un point de \mathbb{R}^3 et \vec{u} un vecteur unitaire, alors en un point Q de \mathbb{R}^3 on a $Y(Q) = \vec{u} \times \overrightarrow{P_0Q}$. Par conséquent, le flux de Y à travers Γ est

$$\varphi(\Gamma, Y) = \langle \vec{T}_{\Gamma}(P_0), \vec{u} \rangle$$

où, pour tout point P de \mathbb{R}^3 , $\vec{T}_{\Gamma}(P)$ désigne le vecteur

$$\vec{T}_{\Gamma}(P) = \int_{Q \in \Gamma} \overrightarrow{PQ} \times \eta.$$

Ce vecteur est appelé **moment** relatif à Γ au point P (en anglais il est nommé *torque*). Le champ de vecteurs \vec{T}_{Γ} est un torseur de résultante \vec{F}_{Γ} , c'est-à-dire qu'il vérifie la propriété suivante : pour tout couple (P, P') de points de \mathbb{R}^3 , on a

$$\vec{T}_{\Gamma}(P') = \vec{T}_{\Gamma}(P) + \vec{F}_{\Gamma} \times \overrightarrow{PP'}.$$

Les forces et les moments sont donc des invariants homologiques.

Comme l'espace des champs de Killing de \mathbb{R}^3 est engendré par les champs de Killing associés aux rotations et aux translations, le flux à travers Γ de tout champ de Killing est déterminé par la force \vec{F}_{Γ} et le moment $\vec{T}_{\Gamma}(P_1)$ en un point P_1 fixé.

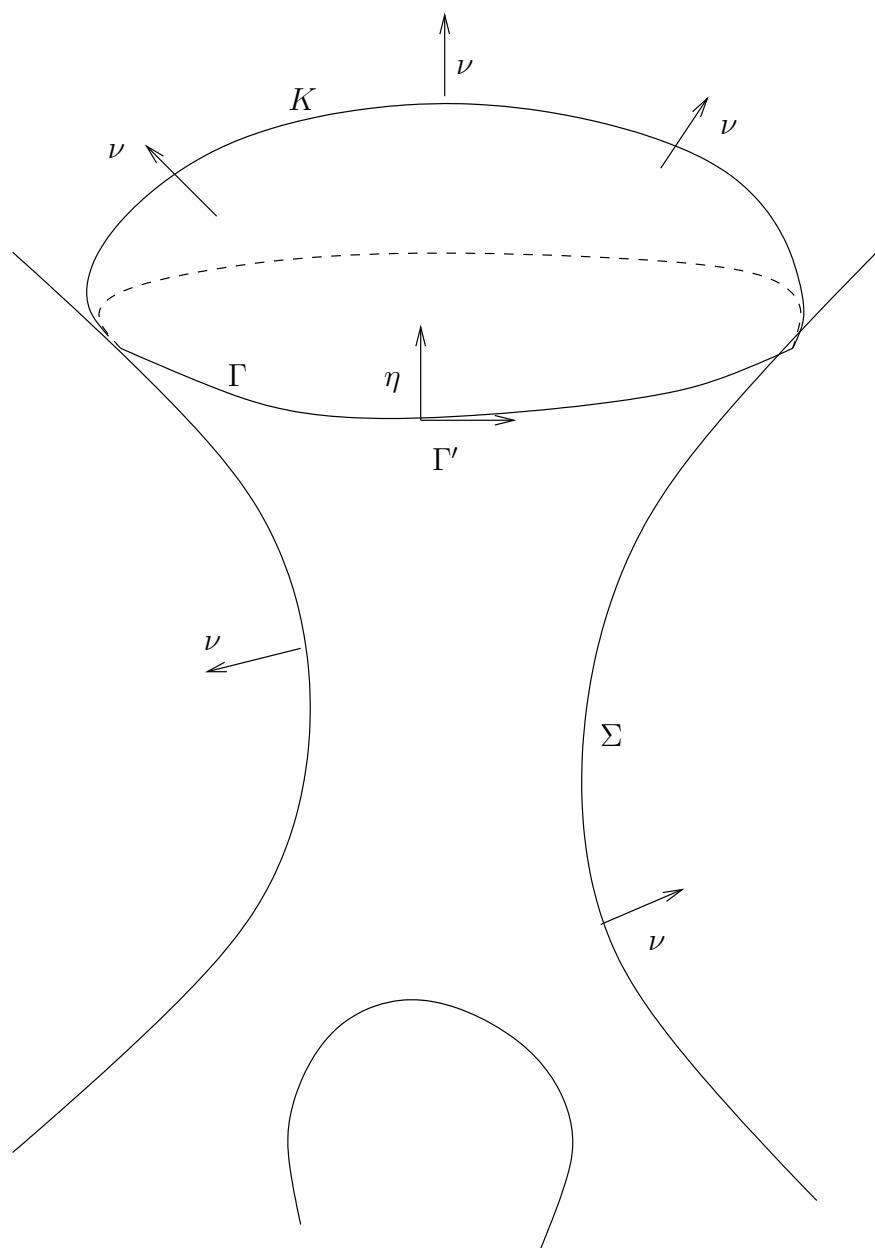


FIG. 1.8 – Choix des orientations.

Proposition 1.31. *On suppose que la surface minimale Σ est l'image d'une immersion conforme $x : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^3$ de données de Weierstrass (g, ω) où \mathcal{S} est une surface de Riemann. Soit $x^* : \tilde{\mathcal{S}} \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'immersion conjuguée de x , et soit γ est une courbe fermée sur \mathcal{S} telle que $\Gamma = x(\gamma)$. Alors on a*

$$\vec{F}_\Gamma = \int_\gamma dx^* = -i \int_\gamma (1-g^2, i(1+g^2), 2g)\omega.$$

Démonstration. On a $dx^* = -dx \circ J$ où J désigne la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ dans le sens direct dans les plans tangents à \mathcal{S} . Soit $s \mapsto x(\gamma(s))$ une paramétrisation de Γ par la longueur d'arc. On a

$$\int_\gamma dx^* = \int_0^L dx^*(\gamma'(s))ds = - \int_0^L dx(J(\gamma'(s)))ds.$$

L'immersion x étant conforme, on a $dx(J(\gamma'(s))) = -\eta(\gamma(s))$ (le signe vient du fait que la base (Γ', η, \vec{N}) est indirecte), ce qui prouve la première égalité annoncée. La deuxième résulte du fait que $dx^* = \text{Im}((1-g^2, i(1+g^2), 2g)\omega)$ et que $\text{Re} \int_\gamma (1-g^2, i(1+g^2), 2g)\omega = 0$. \square

Pour plus de détails sur le flux pour les surfaces minimales dans \mathbb{R}^3 , on pourra se référer notamment à [HK97] et [KKS89].

1.8.3 Flux pour les surfaces de Bryant

Si z_1, z_2, z_3 et z_4 sont quatre points de $\bar{\mathbb{C}}$ tels que $z_1 \neq z_4$ et $z_2 \neq z_3$, leur birapport est défini par

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \cdot \frac{z_4 - z_2}{z_4 - z_1}.$$

On rappelle qu'il existe une isométrie directe (respectivement indirecte) de \mathbb{H}^3 qui envoie z_1, z_2, z_3 et z_4 sur z'_1, z'_2, z'_3 et z'_4 respectivement (où $z'_1 \neq z'_4$ et $z'_2 \neq z'_3$) si et seulement si $(z_1, z_2, z_3, z_4) = (z'_1, z'_2, z'_3, z'_4)$ (respectivement $(z_1, z_2, z_3, z_4) = (z'_1, z'_2, z'_3, z'_4)$).

Dans ce paragraphe, \mathcal{S} désigne une surface de Riemann, $x : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{H}^3$ une immersion de courbure moyenne 1, $F = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} : \tilde{\mathcal{S}} \rightarrow \text{SL}_2(\mathbb{C})$ sa représentation de Bryant, et $(g^\sharp, \omega^\sharp)$ son couple de données de Weierstrass duals. Soit γ une courbe fermée lisse sur \mathcal{S} . On pose

$$\begin{aligned} \psi_0 &= -2i \int_\gamma (AdB - BdA) = -2i \int_\gamma (g^\sharp)^2 \omega^\sharp, \\ \psi_1 &= -2i \int_\gamma (BdC - AdD) = 2i \int_\gamma g^\sharp \omega^\sharp, \\ \psi_2 &= -2i \int_\gamma (CdD - DdC) = -2i \int_\gamma \omega^\sharp. \end{aligned}$$

Rossmann, Umehara et Yamada ont introduit une deuxième notion de flux pour les surfaces de Bryant. Cette notion de flux fait intervenir la représentation de Bryant.

Définition 1.32. [[RUY99]] On appelle **matrice de flux** relative à γ la matrice

$$\Phi(\gamma) = -\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma dF \cdot F^{-1} = \frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} -\psi_1 & -\psi_0 \\ \psi_2 & \psi_1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}).$$

Cette matrice est bien définie car $dF \cdot F^{-1}$ est bien défini sur \mathfrak{S} , et elle est indépendante du choix de la représentation F associée à x .

Roszman, Umehara et Yamada ont conjecturé que ce flux était équivalent au flux des champs de Killing, c'est-à-dire que les flux de tous les champs de Killing sont déterminés par la matrice de flux, et réciproquement. Nous prouvons cette conjecture au chapitre 3, et plus précisément nous montrons le résultat suivant.

Théorème 1.33 (théorème 3.15). *Pour tout couple $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ de points distincts de $\bar{\mathbb{C}} = \partial_\infty \mathbb{H}^3$, le flux du champ de Killing associé à la translation le long de la géodésique $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ est égal à*

$$\operatorname{Re} \left(\frac{P_\gamma(\mathcal{C}, \mathcal{D})}{\mathcal{C} - \mathcal{D}} \right),$$

et le flux du champ de Killing associé à la rotation autour de la géodésique $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ est égal à

$$-\operatorname{Im} \left(\frac{P_\gamma(\mathcal{C}, \mathcal{D})}{\mathcal{C} - \mathcal{D}} \right),$$

où le polynôme P_γ est défini par

$$P_\gamma(X, Y) = \psi_2 XY + \psi_1(X + Y) + \psi_0.$$

Le polynôme

$$\Pi_\gamma(X) = \psi_2 X^2 + 2\psi_1 X + \psi_0 = -2i \int_\gamma (X - g^\sharp)^2 \omega^\sharp$$

est appelé **polynôme de flux**⁵ relatif à γ .

Définition 1.34. Si \mathcal{C} et \mathcal{D} sont deux points distincts de $\bar{\mathbb{C}}$, on appelle **flux complexe** relatif à γ et associé à la géodésique $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ le nombre

$$\Psi_\gamma(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = \frac{P_\gamma(\mathcal{C}, \mathcal{D})}{\mathcal{C} - \mathcal{D}}.$$

Un calcul élémentaire permet d'obtenir le résultat suivant.

Proposition 1.35. *On suppose que le discr $\Pi_\gamma \neq 0$, c'est-à-dire que l'on est dans l'un des deux cas suivants :*

- Π_γ est de degré 2 et a deux racines distinctes \mathcal{A} et \mathcal{B} ,
- Π_γ est de degré 1, et alors on note \mathcal{B} sa racine et $\mathcal{A} = \infty$.

Alors pour tout couple $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ de points distincts de $\bar{\mathbb{C}}$ on a

$$\Psi_\gamma(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = \Psi_\gamma(\mathcal{A}, \mathcal{B})(2(\mathcal{A}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{B}) - 1).$$

De plus on a

$$\Psi_\gamma(\mathcal{A}, \mathcal{B})^2 = \delta$$

où $\delta = \psi_1^2 - \psi_0 \psi_2 = \frac{1}{4} \operatorname{discr} \Pi_\gamma = -16\pi^2 \det \Phi(\gamma)$.

⁵Ces expression diffèrent légèrement de celles du chapitre 3 en raison du différent choix d'identification entre les modèles de Minkowski et du demi-espace supérieur pour l'espace hyperbolique.

Nous allons maintenant formuler ces résultats en utilisant le formalisme des algèbres de Lie ([KKMS92]).

Proposition 1.36 ([KKMS92]). *Il existe une matrice $\mu(\gamma) \in \mathfrak{so}(3, 1)$ telle que, pour toute matrice $V \in \mathfrak{so}(3, 1)$, le flux à travers $x(\gamma)$ du champ de Killing associé à V soit égal à*

$$\frac{1}{2} \operatorname{tr}(\mu(\gamma)V)$$

est appelée **moment relatif** à γ .

Démonstration. L'application qui à une matrice $V \in \mathfrak{so}(3, 1)$ associe le flux à travers γ du champ de Killing associé est une forme linéaire (réelle). Comme les espaces $\mathfrak{so}(3, 1)$ et $\mathfrak{so}(3, 1)^*$ sont identifiés au moyen de la forme $(n, p) \mapsto \frac{1}{2} \operatorname{tr}(np)$, on en déduit l'existence de $\mu(\gamma)$. \square

Corollaire 1.37. *Soit $M \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ et Y le champ de Killing de \mathbb{H}^3 associé à M . Alors le flux de Y à travers $x(\gamma)$ est*

$$4\pi \operatorname{Re} \operatorname{tr}(\Phi(\gamma)M).$$

Démonstration. La formule annoncée étant linéaire (sur \mathbb{R}) par rapport à M , tout comme le flux, il suffit de prouver cette formule pour une base réelle de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.

La matrice $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ correspond à la famille d'isométries

$$A(t) = \begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix} \in \operatorname{SL}_2(\mathbb{C}).$$

L'isométrie $A(t)$ est la translation de longueur t le long de la géodésique $(0, \infty)$. D'après le théorème 1.33, le flux du champ de Killing associé à M est donc égal à $-\operatorname{Re} \psi_1$. On calcule par ailleurs que $4\pi \operatorname{Re} \operatorname{tr}(\Phi(\gamma)M) = -\operatorname{Re} \psi_1$.

La matrice $M = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{i}{2} \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ correspond à la famille $A(t) = \begin{pmatrix} e^{it/2} & 0 \\ 0 & e^{-it/2} \end{pmatrix} \in \operatorname{SL}_2(\mathbb{C})$ (rotation d'angle t autour de la géodésique $(0, \infty)$). On calcule que le flux est égal à $\operatorname{Im} \psi_1$, et que $4\pi \operatorname{Re} \operatorname{tr}(\Phi(\gamma)M) = \operatorname{Im} \psi_1$.

La matrice $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ correspond à la famille $A(t) = \begin{pmatrix} e^{t/2} & -2 \operatorname{sh} \frac{t}{2} \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix} \in \operatorname{SL}_2(\mathbb{C})$ (translation de longueur t le long de la géodésique $(1, \infty)$). On calcule que le flux est égal à $-\operatorname{Re}(\psi_1 + \psi_2)$, et que $4\pi \operatorname{Re} \operatorname{tr}(\Phi(\gamma)M) = -\operatorname{Re}(\psi_1 + \psi_2)$.

La matrice $M = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} & -i \\ 0 & -\frac{i}{2} \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ correspond à la famille $A(t) = \begin{pmatrix} e^{it/2} & -2i \sin \frac{t}{2} \\ 0 & e^{-it/2} \end{pmatrix} \in \operatorname{SL}_2(\mathbb{C})$ (rotation d'angle t autour de la géodésique $(1, \infty)$). On calcule que le flux est égal à $\operatorname{Im}(\psi_1 + \psi_2)$, et que $4\pi \operatorname{Re} \operatorname{tr}(\Phi(\gamma)M) = \operatorname{Im}(\psi_1 + \psi_2)$.

La matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ correspond à la famille $A(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \frac{t}{2} & \operatorname{sh} \frac{t}{2} \\ \operatorname{sh} \frac{t}{2} & \operatorname{ch} \frac{t}{2} \end{pmatrix} \in \operatorname{SL}_2(\mathbb{C})$ (translation de longueur t le long de la géodésique $(-1, 1)$; on pourra se reporter par exemple à [SET97] pour les formules explicites des isométries du plan hyperbolique). On calcule que le flux est égal à $\frac{1}{2} \operatorname{Re}(\psi_2 - \psi_0)$, et que $4\pi \operatorname{Re} \operatorname{tr}(\Phi(\gamma)M) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\psi_2 - \psi_0)$.

Enfin, la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{i}{2} \\ \frac{i}{2} & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ correspond à la famille $A(t) = \begin{pmatrix} \cos \frac{t}{2} & i \sin \frac{t}{2} \\ i \sin \frac{t}{2} & \cos \frac{t}{2} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ (rotation d'angle t autour de la géodésique $(-1, 1)$). On calcule que le flux est égal à $\frac{1}{2} \mathrm{Im}(\psi_0 - \psi_2)$, et que $4\pi \mathrm{Re} \operatorname{tr}(\Phi(\gamma)M) = \frac{1}{2} \mathrm{Im}(\psi_0 - \psi_2)$. \square

Corollaire 1.38. *Le moment relatif à γ est la matrice*

$$\mu(\gamma) = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Re} \frac{\psi_2 - \psi_0}{2} & -\mathrm{Im} \frac{\psi_0 + \psi_2}{2} & -\mathrm{Re} \psi_1 \\ \mathrm{Re} \frac{\psi_2 - \psi_0}{2} & 0 & \mathrm{Im} \psi_1 & \mathrm{Re} \frac{\psi_0 + \psi_2}{2} \\ -\mathrm{Im} \frac{\psi_0 + \psi_2}{2} & -\mathrm{Im} \psi_1 & 0 & \mathrm{Im} \frac{\psi_0 - \psi_2}{2} \\ -\mathrm{Re} \psi_1 & -\mathrm{Re} \frac{\psi_0 + \psi_2}{2} & \mathrm{Im} \frac{\psi_2 - \psi_0}{2} & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{so}(3, 1).$$

Démonstration. Soit $M \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, $\tilde{M} \in \mathfrak{so}(3, 1)$ la matrice correspondante, et soit $\tilde{\Phi} \in \mathfrak{so}(3, 1)$ la matrice correspondant à $\Phi(\gamma)$. Le flux du champ de Killing Y associé à M est $\varphi = 4\pi \mathrm{Re} \operatorname{tr}(\Phi(\gamma)M)$. On a donc $\varphi = \operatorname{tr}(\pi \tilde{\Phi} \tilde{M})$ d'après une formule du paragraphe 1.3.3. On déduit donc de la définition de $\mu(\gamma)$ que $\mu(\gamma) = 2\pi \tilde{\Phi}$. On en déduit le résultat en utilisant les formules explicites de l'isomorphisme entre $\mathfrak{so}(3, 1)$ et $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ données au paragraphe 1.3.2. \square

Corollaire 1.39. *La masse m et le spin s de $\mu(\gamma)$ vérifient*

$$m^2 = \frac{|\delta| + \mathrm{Re} \delta}{2}, \quad s^2 = \frac{|\delta| - \mathrm{Re} \delta}{2},$$

avec $\delta = \psi_1^2 - \psi_0 \psi_2 = \frac{1}{4} \operatorname{discr} \Pi_\gamma = -16\pi^2 \det \Phi(\gamma)$.

Démonstration. Les nombres m^2 et $-s^2$ sont les carrés des racines du polynôme caractéristique de $\mu(\gamma)$, qui est égal à $X^4 - (\mathrm{Re} \delta)X^2 - \frac{1}{4}(\mathrm{Im} \delta)^2$. \square

Proposition 1.40. *On suppose que $\delta \neq 0$, c'est-à-dire que l'on est dans l'un des deux cas suivants :*

- Π_γ est de degré 2 et a deux racines distinctes \mathcal{A} et \mathcal{B} ,
- Π_γ est de degré 1, et alors on note \mathcal{B} sa racine et $\mathcal{A} = \infty$.

Soit $D_{\mathcal{A}}$ et $D_{\mathcal{B}}$ les droites du cône de lumière correspondant aux points \mathcal{A} et \mathcal{B} par l'identification entre les modèles du demi-espace supérieur et de Minkowski pour l'espace hyperbolique.

Si $m > 0$, alors $D_{\mathcal{A}}$ et $D_{\mathcal{B}}$ sont les sous-espaces propres de $\mu(\gamma)$ pour les valeurs propres m et $-m$.

Si $m = 0$, alors $D_{\mathcal{A}}$ et $D_{\mathcal{B}}$ forment l'intersection du cône de lumière et du sous-espace propre de $\mu(\gamma)$ pour la valeur propre 0 (qui est un plan).

Démonstration. Il suffit de prouver ce résultat pour

$$\mu(\gamma) = \begin{pmatrix} 0 & m & 0 & 0 \\ m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \\ 0 & 0 & -s & 0 \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas on a $\Pi_\gamma(X) = (m - is)(X^2 - 1)$. On a donc $\mathcal{A} = 1$ et $\mathcal{B} = -1$. Par conséquent, $D_{\mathcal{A}}$ et $D_{\mathcal{B}}$ sont respectivement les droites engendrées par les vecteurs $(1, 1, 0, 0)$ et $(1, -1, 0, 0)$. On en déduit le résultat annoncé. \square

Remarque 1.41. Lorsque $m > 0$, si \mathcal{A} correspond à la valeur propre $-m$ et \mathcal{B} à la valeur propre m , alors la géodésique orientée $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ de \mathbb{H}^3 est la **ligne d'univers** (*worldline*) définie dans [KKMS92].

Proposition 1.42. *On suppose que $\mu(\gamma) \neq 0$ et $\delta = 0$, c'est-à-dire que l'on est dans l'un des deux cas suivants :*

- Π_γ est de degré 2 et a une racine double \mathcal{B} ,
- Π_γ est constant et non-nul, et alors on note $\mathcal{B} = \infty$.

Soit $D_{\mathcal{B}}$ la droite du cône de lumière correspondant au point \mathcal{B} par l'identification entre les modèles du demi-espace supérieur et de Minkowski pour l'espace hyperbolique. Alors $D_{\mathcal{B}}$ est l'intersection du cône de lumière et du sous-espace propre de $\mu(\gamma)$ pour la valeur propre 0 (qui est un plan).

Démonstration. Il suffit de prouver ce résultat pour

$$\mu(\gamma) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec $\alpha \neq 0$. Dans ce cas on a $\Pi_\gamma(X) = \alpha(X - i)^2$. On a donc $\mathcal{B} = i$. Par conséquent, $D_{\mathcal{B}}$ est la droite engendrée par le vecteur $(1, 0, 1, 0)$. Le sous-espace propre de $\mu(\gamma)$ pour la valeur propre 0 étant le plan engendré par les vecteurs $(1, 0, 1, 0)$ et $(0, 0, 0, 1)$, on en déduit le résultat annoncé. \square

1.9 Bouts annulaires des surfaces de Bryant

1.9.1 Bouts de courbure totale finie

Une surface minimale de \mathbb{R}^3 ou une surface de Bryant de courbure totale finie est conformément équivalente à une surface de Riemann compacte privée d'un nombre fini de points, et ces points correspondent aux bouts de la surface (c'est un cas particulier d'un théorème de Huber valable pour toutes les surfaces à courbure négative et de courbure totale finie). La réciproque est fausse dans les deux cas : par exemple, l'hélicoïde (pour les surfaces minimales de \mathbb{R}^3) et certains cousins de caténoïdes (pour les surfaces de Bryant) sont conformément équivalents au plan complexe \mathbb{C} et sont de courbure totale infinie.

Pour les surfaces minimales de \mathbb{R}^3 , on a le résultat suivant.

Théorème 1.43 (Osserman). *Un bout annulaire minimal dans \mathbb{R}^3 et de courbure totale finie est conformément équivalent au disque unité privé de 0 et son application de Gauss se prolonge de façon méromorphe en 0.*

Pour les surfaces de Bryant, on a les résultats suivants.

Proposition 1.44 ([Bry87]). *Si un bout est de courbure totale finie, alors sa différentielle de Hopf est méromorphe en ce bout.*

Proposition 1.45 ([Bry87], [UY93]). *Soit $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ et $\mathcal{D}^* = \mathcal{D} \setminus \{0\}$. Soit $x : \mathcal{D}^* \rightarrow \mathbb{H}^3$ une immersion conforme de courbure moyenne 1 complète en 0 et de courbure totale finie. Alors on peut prendre comme données de Weierstrass associées à x des données (g, ω) ayant la forme suivante :*

$$g(z) = z^\mu \hat{g}(z), \quad \omega = z^\nu \hat{\omega}(z) dz,$$

où \hat{g} est une fonction méromorphe sur \mathcal{D} telle que $\hat{g}(0) \neq 0$ et $\hat{g}(0) \neq \infty$, $\hat{\omega}$ une fonction holomorphe sur \mathcal{D} telle que $\hat{\omega}(0) \neq 0$, et μ et ν des réels satisfaisant

$$\min(\nu, 2\mu + \nu) \leq -1, \quad \mu + \nu \in \mathbb{Z}.$$

Une différence importante entre surfaces minimales de \mathbb{R}^3 et surfaces de Bryant vient du fait que l'analogue de la seconde affirmation du théorème d'Osserman pour les bouts de surfaces de Bryant est fausse : la cousine de la surface d'Enneper en est un contre-exemple (son application de Gauss hyperbolique a une singularité essentielle). Pour cette raison, Umehara et Yamada ont introduit la notion suivante pour les bouts des surfaces de Bryant.

Définition 1.46. [[UY93]] Un bout conformément équivalent au disque unité privé de 0 est dit **régulier** si son application de Gauss hyperbolique se prolonge de façon méromorphe en 0. Il est dit **irrégulier** sinon.

On a une caractérisation des bouts réguliers en fonction de la différentielle de Hopf.

Proposition 1.47 ([Bry87]). *Un bout est régulier si et seulement si sa différentielle de Hopf est méromorphe et d'ordre supérieur ou égal à -2 en ce bout.*

Comme l'application de Gauss hyperbolique d'un bout de courbure totale finie peut avoir une singularité essentielle, il est intéressant d'étudier quel est le type de cette singularité du point de vue de la théorie de Nevanlinna. C'est l'objet du chapitre 2. Plus précisément nous prouvons le théorème suivant.

Théorème 1.48 (théorème 2.12). *L'application de Gauss hyperbolique d'un bout annulaire de courbure totale finie a une croissance finie au sens de Nevanlinna.*

1.9.2 Géométrie des bouts annulaires proprement plongés

Trois résultats ont été prouvés récemment sur les bouts annulaires de surfaces de Bryant plongés.

Théorème 1.49 ([CHR01]). *Un bout annulaire proprement plongé est de courbure totale finie et régulier.*

L'analogue de ce théorème pour les surfaces minimales de \mathbb{R}^3 est faux : l'hélicoïde a un bout annulaire proprement plongé et de courbure totale infinie.

Théorème 1.50 ([Yu01]). *Un bout irrégulier n'est pas plongé.*

Théorème 1.51 ([SET01]). *Un bout annulaire plongé de courbure totale finie est asymptotique (en tant que graphe), éventuellement après isométrie directe de \mathbb{H}^3 , ou bien à un cousin de caténoïde qui est de révolution (auquel cas le bout est dit **caténoïdal**), ou bien à une horosphère (auquel cas le bout est dit **horosphérique**).*

Ce résultat a un analogue pour les surfaces minimales de \mathbb{R}^3 : un bout annulaire minimal proprement plongé dans \mathbb{R}^3 et de courbure totale finie est asymptotique à un plan ou à un caténoïde.

Par conséquent un bout de surface de Bryant proprement plongé est un bout caténoïdal ou un bout horosphérique. L'un des objets du chapitre 3 est de compléter l'étude de ces bouts. En particulier nous

montrons qu'un bout caténoïdal est asymptotique à un cousin de caténoïde en un sens plus fort que celui de [SET01] : un bout caténoïdal est asymptotiquement de révolution autour d'une géodésique de \mathbb{H}^3 appelée **axe** du bout (proposition 3.21 et définition 3.22). Le résultat analogue pour les bouts minimaux caténoïdaux dans \mathbb{R}^3 a été montré par Schoen ([Sch83]).

Proposition 1.52. *Soit $x : \mathcal{D}^* \rightarrow \mathbb{H}^3$ une immersion conforme de courbure moyenne 1 ayant un bout proprement plongé en 0. Alors x a un bout caténoïdal (respectivement horosphérique) en 0 si et seulement si sa différentielle de Hopf est d'ordre -2 (respectivement d'ordre supérieur ou égal à -1) en 0.*

Par ailleurs, Collin, Hauswirth et Rosenberg ont obtenu des résultats globaux sur les surfaces de Bryant proprement plongées.

Théorème 1.53 ([CHR01]). *Soit Σ une surface de Bryant proprement plongée. Si Σ est simplement connexe, alors Σ est une horosphère. Si Σ est annulaire, alors Σ est un cousin de caténoïde. Si Σ n'est pas une horosphère, alors tous les bouts annulaires de Σ sont des bouts caténoïdaux.*

Au chapitre 3, nous calculons le flux pour les bouts caténoïdaux et horosphériques (le flux pour un bout annulaire est le flux relatif à un générateur Γ de son groupe fondamental, l'orientation de Γ étant précisée au chapitre 3).

Théorème 1.54 (théorèmes 3.32 et 3.34). *Soit $\mu \in]0, 1[\cup]1, \infty[$, \mathcal{A} et \mathcal{B} deux points distincts de $\bar{\mathbb{C}}$. Si E est un bout caténoïdal de croissance $1 - \mu$, de point à l'infini \mathcal{B} et d'axe $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, alors son polynôme de flux est*

$$\Pi_E(X) = 2\pi(1 - \mu^2) \frac{(X - \mathcal{A})(X - \mathcal{B})}{\mathcal{B} - \mathcal{A}}.$$

Si E est un bout horosphérique de point à l'infini \mathcal{B} , alors son polynôme de flux est

$$\Pi_E(X) = -2\pi\kappa(X - \mathcal{B})^2$$

dans le cas où $\mathcal{B} \neq \infty$, et

$$\Pi_E(X) = -2\pi\kappa$$

dans le cas où $\mathcal{B} = \infty$, où κ est une constante (dépendant du bout). Cette constante est nulle si et seulement si la différentielle du bout est holomorphe au bout, c'est-à-dire si et seulement si le degré de l'application de Gauss secondaire g est au moins 3 à ce bout.

Pour les bouts caténoïdaux, on déduit de la proposition 1.35, du corollaire 1.39 et de la remarque 1.41 le résultat suivant.

Corollaire 1.55. *Soit $\mu \in]0, 1[\cup]1, \infty[$, \mathcal{A} et \mathcal{B} deux points distincts de $\bar{\mathbb{C}}$. Soit E un bout caténoïdal de croissance $1 - \mu$, de point à l'infini \mathcal{B} et d'axe $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Alors son moment a pour masse $m = \pi|1 - \mu^2|$, son spin est nul, et sa ligne d'univers (au sens de [KKMS92]) est $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ si $\mu \in]0, 1[$, $(\mathcal{B}, \mathcal{A})$ si $\mu \in]1, +\infty[$.*

Définition 1.56. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une surface de Bryant est dite **n -caténoïdale** si elle a n bouts et que ces bouts sont plongés et de courbure totale finie.

Une surface n -caténoïdale est appelée **n -noïde** si elle est de genre 0 et que tous ses bouts sont caténoïdaux.

Au chapitre 3, nous utilisons le flux pour étudier la géométrie des surfaces bicaténoïdales et tricaténoïdales. En particulier nous prouvons que si une surface tricaténoïdale a trois bouts caténoïdaux ayant des points à l'infini distincts, alors les axes des bouts sont concourants, éventuellement à l'infini (proposition 3.45).

1.9.3 Binoïdes de \mathbb{H}^3

Proposition 1.57 ([UY93]). *Les binoïdes sont les cousins de caténoïdes qui sont de révolution et les surfaces dont les données de Weierstrass sont données par*

$$g = z^l + b, \quad \omega = \frac{1 - l^2}{4l} z^{-l-1} dz$$

sur \mathbb{C}^* , où l est un entier non nul et b un nombre réel strictement positif. Ces dernières surfaces sont appelées **cousins de caténoïdes déformés** (warped catenoid cousins en anglais).

Démonstration. Un binoïde est donné par une immersion conforme $x : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{H}^3$. Sa différentielle de Hopf Q est holomorphe sur \mathbb{C}^* et a des pôles doubles en 0 et ∞ , donc il existe une constante c non nulle telle que $Q = cz^{-2} dz^2$.

Comme les bouts sont réguliers, l'application de Gauss hyperbolique G de l'immersion x se prolonge en une application méromorphe sur $\widetilde{\mathbb{C}}$, donc G est une fraction rationnelle.

L'application G n'a pas de point de branchement sur \mathbb{C}^* car Q n'a pas de zéro sur \mathbb{C}^* et le couple $(G, -\frac{Q}{dG})$ vérifie les conditions 1 et 2 du théorème 1.8. Par ailleurs, G est de degré 1 en 0 et ∞ puisque les bouts sont caténoïdaux. Par conséquent, G est une transformation de Möbius. Après isométrie de \mathbb{H}^3 , on peut supposer que $G(z) = z$.

On a alors $\omega^\sharp = -\frac{Q}{dG} = -cz^{-2} dz$. La représentation de Bryant F est donc solution sur $\widetilde{\mathbb{C}}^*$ de l'équation

$$F' F^{-1} = c \begin{pmatrix} z^{-1} & -1 \\ z^{-2} & -z^{-1} \end{pmatrix}.$$

Une solution particulière dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ de cette équation est

$$F_0(z) = \frac{1}{2\sqrt{\mu}} \begin{pmatrix} (\mu+1)z^{-\frac{\mu-1}{2}} & (\mu-1)z^{\frac{\mu+1}{2}} \\ (\mu-1)z^{-\frac{\mu+1}{2}} & (\mu+1)z^{\frac{\mu-1}{2}} \end{pmatrix}$$

avec $\mu^2 = 1 - 4c$. L'application F est de la forme $F_0 A$ où $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ est constante.

La matrice de monodromie correspondante est

$$M = -A^{-1} \begin{pmatrix} e^{-i\pi\mu} & 0 \\ 0 & e^{i\pi\mu} \end{pmatrix} A.$$

L'application x est bien définie sur \mathbb{C}^* si et seulement si $M \in \mathrm{SU}_2$. En particulier ses valeurs propres doivent être de module 1, ce qui implique que μ soit réel. Si cette condition est satisfaite, on a alors $M \in \mathrm{SU}_2$ si et seulement si $e^{2i\pi\mu} = 1$ ou si la matrice AA^* est diagonale.

Si $\mu \notin \mathbb{Z}$, alors la matrice AA^* doit être diagonale ; comme $x = F_0AA^*F_0^*$, quitte à effectuer un changement de paramètre de la forme $z \mapsto \alpha z$ et une isométrie de \mathbb{H}^3 (fixant 0 et ∞) on peut supposer que $AA^* = \text{Id}$. On obtient alors un cousin de caténoïde qui est de révolution.

Si $\mu \in \mathbb{Z}$, alors n'importe quelle matrice A donne une solution. Quitte à effectuer un changement de paramètre de la forme $z \mapsto \alpha z$ et une isométrie de \mathbb{H}^3 (fixant 0 et ∞) on peut supposer que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec $b \geq 0$. Si $b = 0$ on a un cousin de caténoïde, et si $b > 0$ on a un cousin de caténoïde déformé. \square

Le groupe des symétries d'un cousin de caténoïde déformé est l'extension naturelle du groupe diédral D_l par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$: il a un plan de symétrie horizontal et l plans de symétrie verticaux (figure 1.9).

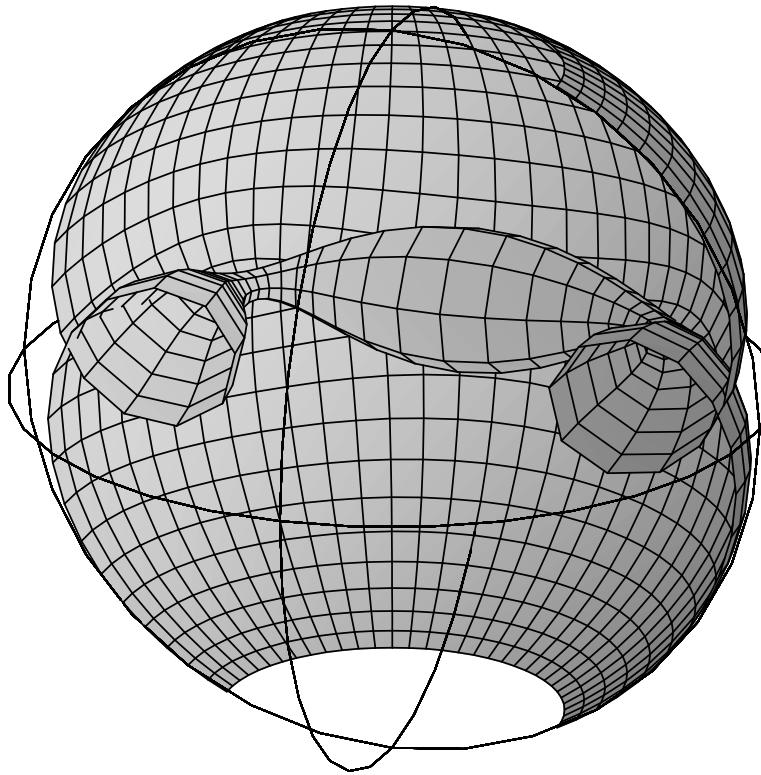


FIG. 1.9 – La moitié d'un cousin de caténoïde déformé (avec $l = 4$ et $b = \frac{1}{2}$) dans le modèle de Poincaré.

Ainsi il existe des surfaces de Bryant de courbure totale finie ayant exactement deux bouts plongés qui ne sont pas de révolution, alors que les seules surfaces minimales de \mathbb{R}^3 de courbure totale finie ayant exactement deux bouts plongés sont les caténoïdes.

L'immersion cousine du cousin de caténoïde déformé n'est bien définie que sur le revêtement universel de \mathbb{C}^* . On obtient une surface invariante par un groupe de translations. La figure 1.10 représente la partie de cette surface correspondant à un tour autour de 0 dans \mathbb{C}^* . Le bord de cette

partie est constitué de deux courbes planes qui appartiennent à des plans distincts parallèles. Cette partie a deux bouts asymptotiques à des caténoïdes d'axes non-parallèles.

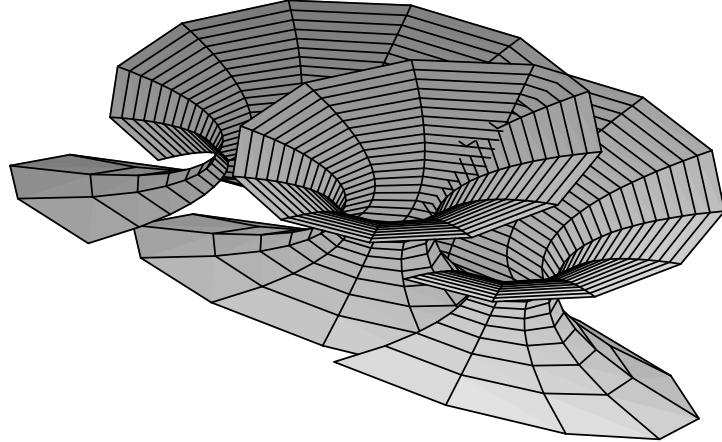


FIG. 1.10 – La surface cousine d'un cousin de caténoïde déformé (avec $l = 2$ et $b = \frac{7}{20}$).

La surface conjuguée de la précédente (« hélicoïde déformé ») est invariante par un groupe de translations le long d'un axe qui est contenu dans la surface, contient une infinité dénombrable de droites orthogonales à cet axe, et possède deux « demi-bouts » asymptotiques à deux demi-hélicoïdes qui ne sont pas orthogonaux à l'axe (voir figure 1.11).

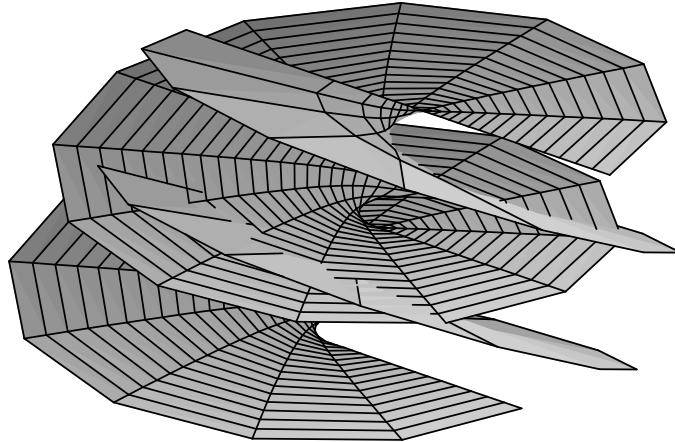


FIG. 1.11 – Un « hélicoïde déformé » (avec $l = 2$ et $b = \frac{7}{20}$).

1.9.4 Trinoïdes de \mathbb{H}^3

Construction de trinoïdes symétriques par la méthode de la surface cousine conjuguée

Pour illustrer la technique de la surface cousine conjuguée pour construire des surfaces de Bryant, nous décrivons sommairement la construction de trinoïdes symétriques de Karcher ([Kar01]).

On veut construire un trinoïde \mathcal{T} dans \mathbb{H}^3 ayant pour plans de symétrie le plan P_0 passant par les points à l'infini de ses trois bouts ainsi que trois plans P_1 , P_2 et P_3 orthogonaux à P_0 et se rencontrant le long d'une géodésique D avec des angles de $\frac{\pi}{3}$. On obtient toute le trinoïde par symétries à partir d'un domaine fondamental Σ (un douzième de \mathcal{T}) délimité par les trois courbes C_1 , C_2 et C_3 définies ainsi :

- C_1 est la courbe contenue dans P_1 allant de l'un des trois points à l'infini M_∞ jusqu'à l'un des points d'intersection M_0 de D et de \mathcal{T} (M_0 est un point ombilical),
- C_2 est la courbe contenue dans P_2 allant de M_0 jusqu'à M_1 , l'un des points d'intersection de P_2 , P_0 et \mathcal{T} , de sorte que l'angle de C_1 et C_2 soit $\frac{\pi}{3}$,
- C_3 est la courbe contenue dans P_0 allant de M_1 jusqu'au point à l'infini M_∞ .

Les courbes C_2 et C_3 font un angle de $\frac{\pi}{2}$. Par ailleurs, la courbe C_2 tourne d'un angle de $\frac{\pi}{2}$ entre M_1 et M_2 (c'est-à-dire que les géodésiques normales à C_2 en M_1 et M_2 respectivement se coupent avec un angle de $\frac{\pi}{2}$).

On considère maintenant le contour correspondant à ces trois courbes sur la surface minimale de \mathbb{R}^3 dont Σ est la cousine conjuguée. Ce contour est composé d'une demi-droite D_1 , suivie d'un segment D_2 puis d'une demi-droite D_3 , l'angle de D_1 et D_2 étant égal à $\frac{\pi}{3}$ et celui de D_2 et D_3 à $\frac{\pi}{2}$ (puisque une surface minimale est localement isométrique à sa cousine conjuguée). Les paramètres de ce contour sont la longueur l de D_2 et l'angle θ des projetées de D_1 et D_3 orthogonalement à D_2 . On suppose que $\theta < \frac{\pi}{2}$.

Le problème est de choisir ces paramètres de sorte que l'angle ψ duquel la courbe C_2 tourne soit égal à $\frac{\pi}{2}$. Par la formule de Gauss-Bonnet on obtient que $\psi = \int_{C_2} \kappa^\circ - A$ où κ° désigne la courbure normale de C_2 et A l'aire de la partie plane délimitée par C_2 et ses normales aux extrémités. Par ailleurs, on a $\kappa^\circ = -\tau + 1$ où τ est la torsion géodésique de D_2 (voir le paragraphe 1.7.3), et donc $\psi = \theta + l - A$ (en choisissant les bonnes orientations). En minorant la quantité $l - A$, on peut montrer qu'il existe des couples (l, θ) tels que $\psi = \frac{\pi}{2}$, ce qui construit des trinoïdes symétriques.

De la même manière on peut construire des n -noïdes symétriques.

Classification des trinoïdes irréductibles

Les trinoïdes irréductibles ont été classifiés par Umehara et Yamada.

Théorème 1.58 ([UY00]). *Soit μ_0 , μ_1 et μ_∞ trois nombres positifs et non entiers. Pour $j = 0, 1, \infty$, on note M_j la valeur absolue de l'unique nombre r dans l'intervalle $]-1, 1]$ tel que $\mu_j - r \in 2\mathbb{Z}$. Alors il existe un trinoïde irréductible $\mathcal{T}_{\mu_0, \mu_1, \mu_\infty}$ dont les bouts ont pour croissances $1 - \mu_0$, $1 - \mu_1$ et $1 - \mu_\infty$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

$$M_0 + M_1 + M_\infty > 1, \quad M_0 + M_1 - M_\infty < 1, \quad M_0 - M_1 + M_\infty < 1, \quad -M_0 + M_1 + M_\infty < 1, \quad (1.5)$$

$$\mu_0^4 + \mu_1^4 + \mu_\infty^4 - 2\mu_0^2\mu_1^2 - 2\mu_0^2\mu_\infty^2 - 2\mu_1^2\mu_\infty^2 + 2\mu_0^2 + 2\mu_1^2 + 2\mu_\infty^2 - 3 \neq 0. \quad (1.6)$$

Si ces conditions sont réalisées, alors le trinoïde $\mathcal{T}_{\mu_0, \mu_1, \mu_\infty}$ est unique.

Dans [UY00], la condition (1.5) est en fait formulée de la façon équivalente suivante :

$$\cos^2(\pi\mu_0) + \cos^2(\pi\mu_1) + \cos^2(\pi\mu_\infty) + 2\cos(\pi\mu_0)\cos(\pi\mu_1)\cos(\pi\mu_\infty) < 1.$$

La formulation (1.5) est due à Bobenko, Pavlyukevitch et Springborn (voir [BPS02]) ; ils ont par ailleurs obtenu des formules explicites (en termes de fonctions hypergéométriques) pour les trinoïdes irréductibles. On trouvera des dessins de trinoïdes dans [BPS02] et [RUY01].

La condition (1.6) est la condition pour que la différentielle de Hopf n'ait pas de zéro double (si elle a un zéro double, il existe quand même un « trinoïde » mais avec un point singulier).

La méthode de la surface cousine conjuguée permet de donner à la condition (1.5) une interprétation géométrique simple. Si on suppose que le trinoïde $T_{\mu_0, \mu_1, \mu_\infty}$ a un plan de symétrie (et c'est en fait le cas), alors la moitié de ce trinoïde est délimitée par trois courbes planes qui relient les points à l'infini des bouts. Par conséquent, la surface minimale cousine conjuguée dans \mathbb{R}^3 de cette moitié de trinoïde est une surface délimitée par trois droites. Par ailleurs on peut voir que les angles de ces droites sont πM_0 , πM_1 et πM_∞ . La condition (1.5) est la condition nécessaire et suffisante pour que les nombres πM_0 , πM_1 et πM_∞ soient les angles de trois droites de \mathbb{R}^3 non concourantes et n'appartenant pas à des plans parallèles.

Au chapitre 4, nous construisons des surfaces minimales délimitées par trois droites (en position générique) dans \mathbb{R}^3 et avec des bouts hélicoïdaux en utilisant la méthode de Riemann ([Rie68]), et nous retrouvons les trinoïdes d'Umehara et Yamada en considérant les surfaces cousines conjuguées de ces surfaces minimales.

Chapitre 2

Surfaces de Bryant dans \mathbb{H}^3 de type fini

Bull. Sci. Math. 126 (7) : 581–594, septembre 2002.

Résumé. Nous définissons la notion de type fini pour les surfaces de Bryant : un bout annulaire d'une surface de Bryant est dit de type fini si son application de Gauss hyperbolique a une croissance finie (au sens de Nevanlinna), et une surface de Bryant est dite de type fini si elle est de type conforme fini et si tous ses bouts sont de type fini. Nous montrons qu'une surface de Bryant de courbure totale finie est de type fini.

Abstract. We define the notion of Bryant surfaces of finite type : an annular end of a Bryant surface is said to be of finite type if its hyperbolic Gauss map is of finite growth (in the sense of Nevanlinna), and a Bryant surface is said to be of finite type if it is of finite conformal type and if all its ends are of finite type. We prove that a Bryant surface of finite total curvature is of finite type.

2.1 Introduction

Un bout d'une surface de Bryant (surface de courbure moyenne 1 dans \mathbb{H}^3), paramétré conformément par le disque unité privé de zéro, est dit régulier si son application de Gauss hyperbolique G se prolonge de façon méromorphe en zéro, et irrégulier sinon. Cependant, même si la surface est de courbure totale finie, ses bouts ne sont pas nécessairement réguliers, contrairement à ce qui ce passe dans le cas des surfaces minimales dans \mathbb{R}^3 .

En ce qui concerne les surfaces minimales dans \mathbb{R}^3 , Harold Rosenberg [Ros95] a introduit la notion de surface de type fini. Une surface minimale de courbure totale finie est de type fini. Laurent Hauswirth, Joaquín Pérez et Pascal Romon [HPR01] ont étudié les propriétés asymptotiques des bouts minimaux de type fini et de courbure totale infinie.

Nous introduisons ici une notion analogue pour les surfaces de Bryant : un bout annulaire sera dit de type fini si son application de Gauss hyperbolique a une croissance finie (au sens de Nevanlinna), et une surface de Bryant sera dite de type fini si elle est de type conforme fini et si ses bouts sont de type fini. Nous montrerons ici qu'une surface de Bryant de courbure totale finie est de type fini.

La cousine de la surface d'Enneper constitue un exemple de surface de Bryant de courbure totale finie dont il est facile de vérifier qu'elle est de type fini. Elle a pour données de Weierstrass ($g = z, \omega =$

$\lambda^2 dz$) sur \mathbb{C} et pour représentation de Bryant

$$F = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} \lambda z & \frac{1}{\lambda} \operatorname{sh} \lambda z - z \operatorname{ch} \lambda z \\ \lambda \operatorname{sh} \lambda z & \operatorname{ch} \lambda z - \lambda z \operatorname{sh} \lambda z \end{pmatrix},$$

où λ est un complexe non nul (voir [Bry87]). Sa courbure totale est finie. Elle possède un bout irrégulier correspondant à $z = \infty$. En posant $u = 1/z$, on obtient une paramétrisation conforme du bout par \mathcal{D}^* . On calcule $G = \frac{1}{\lambda} \operatorname{th} \frac{1}{u}$. G est donc bien à croissance finie au sens de Nevanlinna.

Deux résultats concernant les valeurs prises par l'application de Gauss hyperbolique d'une surface de Bryant ont été montrés. Zu Huan Yu [Yu97] a montré que l'application de Gauss hyperbolique d'une surface de Bryant complète prend toutes les valeurs sauf au plus quatre (sauf si cette surface est une horosphère). Pascal Collin, Laurent Hauswirth et Harold Rosenberg [CHR02] ont montré que si cette surface est de plus de courbure totale finie alors l'application de Gauss hyperbolique prend toutes les valeurs sauf au plus trois (sauf si cette surface est une horosphère). Nous espérons obtenir des résultats concernant les valeurs prises par l'application de Gauss des surfaces de Bryant de type fini.

Pour plus de renseignements sur les surfaces de Bryant et la notion de type fini, le lecteur pourra se référer notamment à [CHR01], [HPR01], [Ros95] et [RR98].

2.2 Croissance au sens de Nevanlinna d'une fonction méromorphe

Dans cette section, nous présentons de façon élémentaire et détaillée la notion de croissance d'une fonction méromorphe au sens de Nevanlinna, car nous aurons besoin par la suite de travailler sur des secteurs de disques et non sur le disque tout entier.

Pour $\rho > 0$, on note $\mathcal{D}^\rho = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \rho\}$, $\mathcal{D}^{\rho*} = \mathcal{D}^\rho \setminus \{0\}$, et $\mathcal{D}_R^\rho = \{z \in \mathbb{C} \mid R < |z| < \rho\}$ pour $R \in]0, \rho[$. On note $\mathcal{D} = \mathcal{D}^1$ le disque unité ouvert de \mathbb{C} . Si \mathcal{O} est un ouvert de \mathbb{C} , on note $\mathcal{O}^* = \mathcal{O} \setminus \{0\}$. Enfin, on note $\bar{\mathbb{C}}$ la sphère de Riemann $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ munie de la métrique induite par la projection stéréographique.

On considère les coordonnées sphériques (θ, φ) sur la sphère S^2 et les coordonnées polaires (r, t) sur \mathbb{C} . On note $\Phi : (\theta, \varphi) \mapsto (r, t)$ l'application telle que (r, t) sont les coordonnées polaires du projeté stéréographique du point de S^2 de coordonnées sphériques (θ, φ) .

On a $t = \varphi$ et $r = \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta}$. Le jacobien de Φ est donc $J\Phi = \frac{1}{\cos \theta - 1}$.

Enfin, on note $\Psi : (r, t) \mapsto r e^{it}$. On a $J\Psi = r$.

On considère une application holomorphe $g : \mathcal{O}^* \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$, où \mathcal{O} est un ouvert de \mathbb{C} contenant 0. Soit Ω un ouvert de \mathcal{O}^* . On note $A_g(\Omega)$ l'aire comptée avec multiplicité de l'image par g dans $\bar{\mathbb{C}}$ de Ω .

On a

$$\begin{aligned} A_g(\Omega) &= \int_{\Phi^{-1}\Psi^{-1}g(\Omega)} \sin \theta d\theta d\varphi = \int_{\Omega} \sin \theta \frac{|Jg|}{|J\Phi||J\Psi|} dz \\ &= \int_{\Omega} \sin \theta (1 - \cos \theta) \frac{|g'|^2}{|g|} dz. \end{aligned}$$

Or on a

$$|g|^2 + 1 = \frac{\sin^2 \theta + (1 - \cos \theta)^2}{(1 - \cos \theta)^2} = \frac{2}{1 - \cos \theta}.$$

Donc

$$\sin \theta(1 - \cos \theta) = |g|(1 - \cos \theta)^2 = \frac{4|g|}{(1 + |g|^2)^2}.$$

On obtient donc

$$A_g(\Omega) = \int_{\Omega} \frac{4|g'(z)|^2}{(1 + |g(z)|^2)^2} dz.$$

On fixe un réel $\rho > 0$ tel que $\mathcal{D}^\rho \subset \Omega$. Pour $R \in]0, \rho[$, on note

$$T_g(R) = \int_R^\rho \frac{A_g(\mathcal{D}_r^\rho)}{r} dr.$$

T_g s'appelle la fonction caractéristique d'Ahlfors-Shimizu de g .

Définition 2.1. On dit que g est à croissance finie $\lambda < \infty$ (au sens de Nevanlinna) si et seulement si

$$\limsup_{r \rightarrow 0} -\frac{\ln T_g(r)}{\ln r} = \lambda.$$

On dit que g est à croissance infinie (au sens de Nevanlinna) si et seulement si

$$\limsup_{r \rightarrow 0} -\frac{\ln T_g(r)}{\ln r} = \infty.$$

Proposition 2.2. Ceci ne dépend pas du choix de ρ .

Démonstration. Soit $\rho' > 0$ un autre réel tel que $\mathcal{D}^{\rho'} \subset \Omega$. On suppose $\rho' < \rho$. On note

$$\tilde{T}_g(R) = \int_R^{\rho'} \frac{A_g(\mathcal{D}_r^{\rho'})}{r} dr.$$

On a

$$\begin{aligned} \tilde{T}_g(R) &= \int_R^{\rho'} \frac{A_g(\mathcal{D}_r^\rho) - A_g(\mathcal{D}_r^{\rho'})}{r} dr \\ &= T_g(R) - T_g(\rho') + A_g(\mathcal{D}_{\rho'}^\rho)(\ln R - \ln \rho'), \end{aligned}$$

d'où le résultat. \square

Lemme 2.3. Soit $b \in \mathbb{C}$, $f : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$, $w \mapsto w + b$ et $h = f \circ g$. Alors il existe une constante $K > 0$ (dépendant de b) telle que pour tout ouvert Ω de Ω^* on ait

$$\frac{A_g(\Omega)}{K^2} \leq A_h(\Omega) \leq K^2 A_g(\Omega).$$

En particulier, si g est à croissance finie λ , alors h est aussi à croissance finie λ .

Démonstration. On a

$$\frac{4|h'|^2}{(1+|h|^2)^2} = \frac{4|g'|^2}{(1+|g+b|^2)^2} = \left(\frac{1+|g|^2}{1+|g+b|^2}\right)^2 \frac{4|g'|^2}{(1+|g|^2)^2}.$$

Or on a

$$\frac{1}{u(|g|)} = \frac{1+|g|^2}{1+(|g|+|b|)^2} \leqslant \frac{1+|g|^2}{1+|g+b|^2} \leqslant \frac{1+(|g+b|+|b|)^2}{1+|g+b|^2} = u(|g+b|),$$

avec $u(x) = \frac{1+(x+|b|)^2}{1+x^2}$. Cette fonction u est majorée sur \mathbb{R}_+ par une constante $K > 0$.

On a donc

$$\frac{1}{K} \leqslant \frac{1+|g|^2}{1+|g+b|^2} \leqslant K.$$

En intégrant sur Ω on obtient donc

$$\frac{A_g(\Omega)}{K^2} \leqslant A_h(\Omega) \leqslant K^2 A_g(\Omega).$$

En particulier on a

$$\frac{T_g(R)}{K^2} \leqslant T_h(R) \leqslant K^2 T_g(R).$$

□

Lemme 2.4. Soit $a \in \mathbb{C}^*$, $f : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$, $w \mapsto aw$ et $h = f \circ g$. Alors pour tout ouvert Ω de \mathcal{O}^* on a

$$\min\left(|a|^2, \frac{1}{|a|^2}\right) A_g(\Omega) \leqslant A_h(\Omega) \leqslant \max\left(|a|^2, \frac{1}{|a|^2}\right) A_g(\Omega).$$

En particulier, si g est à croissance finie λ , alors h est aussi à croissance finie λ .

Démonstration. On a

$$\frac{4|h'|^2}{(1+|h|^2)^2} = \frac{4|a|^2|g'|^2}{(1+|a|^2|g|^2)^2} = |a|^2 \left(\frac{1+|g|^2}{1+|a|^2|g|^2}\right)^2 \frac{4|g'|^2}{(1+|g|^2)^2}.$$

Or on a

$$\min\left(1, \frac{1}{|a|^2}\right) \leqslant \frac{1+|g|^2}{1+|a|^2|g|^2} \leqslant \max\left(1, \frac{1}{|a|^2}\right).$$

En intégrant sur Ω on obtient donc

$$\min\left(|a|^2, \frac{1}{|a|^2}\right) A_g(\Omega) \leqslant A_h(\Omega) \leqslant \max\left(|a|^2, \frac{1}{|a|^2}\right) A_g(\Omega).$$

En particulier on a

$$\min\left(|a|^2, \frac{1}{|a|^2}\right) T_g(R) \leqslant T_h(R) \leqslant \max\left(|a|^2, \frac{1}{|a|^2}\right) T_g(R).$$

□

Lemme 2.5. Soit $f : \bar{\mathbb{C}} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}, w \mapsto 1/w$ et $h = f \circ g$. Alors pour tout ouvert Ω de \mathcal{O}^* on a

$$A_h(\Omega) = A_g(\Omega).$$

En particulier, si g est à croissance finie λ , alors h est aussi à croissance finie λ .

Démonstration. On remarque que

$$\frac{4|h'(z)|^2}{(1 + |h(z)|^2)^2} = \frac{4|g'(z)|^2}{(1 + |g(z)|^2)^2}.$$

Par conséquent, $A_h(\Omega) = A_g(\Omega)$, et en particulier $T_g = T_h$. \square

Théorème 2.6. Soit f un automorphisme conforme de $\bar{\mathbb{C}}$ et $h = f \circ g$. Alors il existe des constantes strictement positives K_1 et K_2 (dépendant de f) telles que pour tout ouvert Ω de \mathcal{O}^* on ait

$$K_1 A_g(\Omega) \leq A_h(\Omega) \leq K_2 A_g(\Omega).$$

En particulier, si g est à croissance finie λ , alors h est aussi à croissance finie λ .

Démonstration. f est de la forme

$$f : w \mapsto \frac{aw + b}{cw + d}$$

avec $ad - bc \neq 0$.

Si $c = 0$, le résultat découle des lemmes 2.3 et 2.4.

On suppose désormais $c \neq 0$. On a

$$f(w) = \frac{b - \frac{ad}{c}}{cw + d} + \frac{a}{c}.$$

On a donc $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$ avec $f_1(w) = cw + d$, $f_2(w) = 1/w$ et $f_3(w) = (b - \frac{ad}{c})w + \frac{a}{c}$. On obtient donc le résultat en appliquant les lemmes 2.3, 2.4 et 2.5. \square

Théorème 2.7. Soit \mathcal{O}' un ouvert de \mathbb{C} contenant zéro, $f : \mathcal{O}' \rightarrow \mathcal{O}$ un isomorphisme conforme tel que $f(0) = 0$ et $h = g \circ f : \mathcal{O}'^* \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$. Alors g est à croissance $\lambda \in [0, +\infty]$ si et seulement si h est à croissance λ .

Démonstration. Il existe des constantes $K_1 > 0$ et $K_2 > 0$ telles que f et f^{-1} soient respectivement K_1 -lipschitzienne et K_2 -lipschitzienne. Comme $f(0) = 0$ on a, pour tout z ,

$$\frac{|z|}{K_2} \leq |f(z)| \leq K_1|z|.$$

En particulier on a $\frac{1}{K_2} \leq K_1$.

On choisit un réel $\rho > 0$ assez petit pour que $\mathcal{D}^\rho \subset \mathcal{O}$ et $\mathcal{D}^{\rho'} \subset \mathcal{O}'$ avec $\rho = K_1\rho'$. Alors $f(\mathcal{D}_R^{\rho'}) \subset \mathcal{D}_{R/K_2}^\rho$.

On prend

$$T_g(R) = \int_R^\rho \frac{A_g(\mathcal{D}_r^\rho)}{r} dr,$$

et

$$T_h(R) = \int_R^{\rho'} \frac{A_h(\mathcal{D}_r^{\rho'})}{r} dr.$$

Alors

$$\begin{aligned} T_h(R) &= \int_R^{\rho'} \frac{A_g(f(\mathcal{D}_r^{\rho'}))}{r} dr \\ &\leq \int_R^{\rho'} \frac{A_g(\mathcal{D}_{r/K_2}^{\rho})}{r} dr = \int_{R/K_2}^{\rho'/K_2} \frac{A_g(\mathcal{D}_s^{\rho})}{s} ds = T_g\left(\frac{R}{K_2}\right) - T_g\left(\frac{\rho'}{K_2}\right), \end{aligned}$$

car $\rho'/K_2 \leq K_1 \rho' = \rho$.

Comme $-\ln R > 0$ lorsque R est suffisamment petit, on a

$$\limsup_{r \rightarrow 0} -\frac{\ln T_h(r)}{\ln r} \leq \limsup_{r \rightarrow 0} -\frac{\ln T_g(r)}{\ln r}.$$

En considérant f^{-1} , on montre de même que

$$\limsup_{r \rightarrow 0} -\frac{\ln T_h(r)}{\ln r} \geq \limsup_{r \rightarrow 0} -\frac{\ln T_g(r)}{\ln r}.$$

□

2.3 Bouts de surfaces de Bryant de type fini

Définition 2.8. Soit E un bout d'une surface de Bryant. On suppose que ce bout est paramétré conformément par \mathcal{D}^* , de sorte qu'il soit complet en zéro. Soit $G : \mathcal{D}^* \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ son application de Gauss hyperbolique. On dit que E est un bout de type fini si et seulement si G est à croissance finie.

Proposition 2.9. *Ceci ne dépend pas du choix de la paramétrisation conforme.*

Démonstration. Soit f_1 et f_2 deux paramétrisations conformes du bout E par \mathcal{D}^* . Alors on peut considérer l'isomorphisme conforme $f = f_1^{-1} \circ f_2 : \mathcal{O}'^* \rightarrow \mathcal{O}^*$ où \mathcal{O} et \mathcal{O}' sont des ouverts de \mathcal{D} contenant zéro.

Comme f est bornée, f se prolonge en une fonction holomorphe de \mathcal{O}' dans l'adhérence de \mathcal{O} . On a nécessairement $f(0) = 0$, et f est un isomorphisme conforme de \mathcal{O}' sur \mathcal{O} . Par ailleurs, si $G_1 : \mathcal{D}^* \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ et $G_2 : \mathcal{D}^* \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ sont les applications de Gauss de E données respectivement par les paramétrisations f_1 et f_2 , alors G_2 coïncide avec $G_1 \circ f$ sur \mathcal{O}'^* . Le résultat découle donc du théorème 2.7. □

Proposition 2.10. *Soit E_1 un bout d'une surface de Bryant et E_2 son image par une isométrie de l'espace hyperbolique \mathbb{H}^3 . Alors E_1 est de type fini si et seulement si E_2 est de type fini.*

Démonstration. Soit G_1 et G_2 les applications de Gauss hyperboliques de E_1 et E_2 . Alors G_1 et G_2 sont liées par la relation $G_2 = f \circ G_1$ où f est un automorphisme conforme de $\bar{\mathbb{C}}$. Le résultat découle donc du théorème 2.6. □

Définition 2.11. On dit qu'une surface de Bryant complète M est de type fini si et seulement si M a le type conforme d'une surface de Riemann privée d'un nombre fini de points et que tous ses bouts sont de type fini.

Théorème 2.12. Soit M une surface de Bryant complète. On suppose que M est de courbure totale finie. Alors M est de type fini.

Démonstration. On sait déjà que M a le type conforme d'une surface de Riemann privée d'un nombre fini de points (et ces points correspondent aux bouts). Il reste donc à montrer que ses bouts sont de type fini.

Soit $f : \mathcal{D}^* \rightarrow \mathbb{H}^3$ une immersion conforme, complète en $z = 0$ et paramétrant un bout E de M . On suppose que E est un bout irrégulier, *id est* que son application de Gauss hyperbolique G ne se prolonge pas de façon méromorphe en $z = 0$ (si le bout est régulier, alors G se prolonge de façon méromorphe en $z = 0$, et donc G est à croissance finie nulle).

Soit (g, ω) les données de Weierstrass de E , et $F : \widetilde{\mathcal{D}}^* \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ (où $\widetilde{\mathcal{D}}^*$ désigne le revêtement universel de \mathcal{D}^*) sa représentation de Bryant (voir [Bry87]). On note

$$F = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

On a $f = FF^*$ et

$$F^{-1}dF = \begin{pmatrix} g & -g^2 \\ 1 & -g \end{pmatrix} \omega.$$

On sait d'après [UY93] que A et C sont solutions de l'équation

$$X'' - \frac{w'}{w} X' - g' w X = 0, \quad (2.1)$$

et que B et D sont solutions de l'équation

$$X'' - \frac{(g^2 w)'}{g^2 w} X' - g' w X = 0, \quad (2.2)$$

où l'on a noté $\omega = w dz$, et que les coefficients de ces équations sont méromorphes sur \mathcal{D} .

On sait d'après [Bry87] que

$$Q = g' w = \sum_{k=-m}^{\infty} q_k z^k$$

où $m \geq 3$ et $q_{-m} \neq 0$, et que

$$P = \frac{w'}{w} = \sum_{k=-1}^{\infty} p_k z^k.$$

On traite d'abord le cas où $m = 2n$ est pair. Posant

$$U = \begin{pmatrix} X \\ X' \end{pmatrix},$$

on obtient l'équation

$$z^m \frac{dU}{dz} = \begin{pmatrix} 0 & z^m \\ Qz^m & Pz^m \end{pmatrix} U.$$

Les coefficients de la matrice sont des séries entières et Qz^m est de valuation nulle.

D'après [Tur55] et [Yu01], les solutions fondamentales de (2.1) sont donc

$$X_1(z) = z^{a-\sigma}(1 + x_1(z))e^\zeta$$

et

$$X_2(z) = z^{a+\sigma}(1 + x_2(z))e^{-\zeta},$$

où

$$\zeta = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sigma_{n-k-1}}{kz^k},$$

et où a , σ et les σ_k sont des complexes dépendant de g et ω tels que $\sigma_0 \neq 0$, x_1 et x_2 des fonctions holomorphes qui convergent vers zéro en zéro, ceci étant vrai dans tout secteur $S(\Phi, k, \varepsilon, \rho)$ formé des complexes non nuls z de module inférieur ou égal à ρ tels que

$$\frac{\Phi - \frac{\pi}{2} + \varepsilon + 2k\pi}{n-1} \leq \arg z \leq \frac{\Phi + \frac{\pi}{2} - \varepsilon + 2k\pi}{n-1},$$

où $\varepsilon > 0$ est arbitraire, $k \in [[0, n-2]]$, Φ un réel quelconque tel que $\Phi \neq \arg(\pm\sigma_0)$, et $\rho > 0$ un réel suffisamment petit.

De même, les solutions fondamentales de (2.2) dans un tel secteur sont

$$Y_1(z) = z^{a'-\sigma}(1 + y_1(z))e^\zeta$$

et

$$Y_2(z) = z^{a'+\sigma}(1 + y_2(z))e^{-\zeta},$$

où a' est un complexe dépendant de g et ω , y_1 et y_2 des fonctions holomorphes qui convergent vers zéro en zéro.

On a donc, sur un secteur S fixé,

$$F = \begin{pmatrix} \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 & \beta_1 Y_1 + \beta_2 Y_2 \\ \gamma_1 X_1 + \gamma_2 X_2 & \delta_1 Y_1 + \delta_2 Y_2 \end{pmatrix}.$$

On choisit un réel $\varepsilon \in]0, \pi/4[$ et un réel Φ tel que les réels $\Phi_l = \Phi + l\pi/2$, pour $l \in [[0, 3]]$ soient différents de $\arg(\pm\sigma_0)$. On choisit un ρ suffisamment petit pour que, pour tout $k \in [[0, n-2]]$ et pour tout $l \in [[0, 3]]$, les solutions fondamentales de (2.1) dans le secteur $S(\Phi_l, k, \pi/4 - \varepsilon, \rho)$ soient de la forme ci-dessus ; en particulier ces solutions sont valables dans le secteur $S(\Phi_l, k, \pi/4, \rho)$ et sur le bord de ce secteur (sauf en zéro).

Pour $k \in [[0, n-2]]$, $l \in [[0, 3]]$ et $R \in]0, \rho[$, on note $\Omega_{k,l}(R) = \{z \in S(\Phi_l, k, \pi/4, \rho) \mid R < |z| < \rho\}$. Alors on a

$$A_G(\mathcal{D}_R^\rho) = \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{l=0}^3 A_G(\Omega_{k,l}(R)),$$

d'où

$$T_G(R) = \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{l=0}^3 T_{G,k,l}(R)$$

avec

$$T_{G,k,l}(R) = \int_R^\rho \frac{A_G(\Omega_{k,l}(r))}{r} dr.$$

On fixe un $k \in [[0, n-2]]$ et un $l \in [[0, 3]]$. Sur le secteur $S(\Phi_l, k, \pi/4 - \varepsilon, \rho)$, on a

$$G = \frac{A'}{C'} = \frac{\alpha_1 X'_1 + \alpha_2 X'_2}{\gamma_1 X'_1 + \gamma_2 X'_2} = \frac{\alpha_1 \frac{X'_1}{X'_2} + \alpha_2}{\gamma_1 \frac{X'_1}{X'_2} + \gamma_2}.$$

Comme F est inversible, on a $\alpha_1 \gamma_2 - \alpha_2 \gamma_1 \neq 0$, donc d'après le théorème 2.6 on a $A_G(\Omega_{k,l}(R)) = A_H(\Omega_{k,l}(R))$ où $H = X'_1/X'_2$.

On a

$$H(z) = \frac{X'_1(z)}{X'_2(z)} = e^{2\zeta} z^{-2\sigma} h(z)$$

où

$$h(z) = \frac{(a-\sigma)(1+x_1(z)) + zx'_1(z) + z(1+x_1(z))\zeta'}{(a+\sigma)(1+x_2(z)) + zx'_2(z) - z(1+x_2(z))\zeta'}.$$

La quantité $(a-\sigma)(1+x_1(z))$ tend vers $a-\sigma$ quand z tend vers zéro, et $z(1+x_1(z))\zeta'$ équivaut à $-\sigma_0/z^{n-1}$ (avec $n \geq 2$).

Par ailleurs, $zx'_1(z)$ tend vers zéro quand z tend vers zéro dans le secteur $S(\Phi_l, k, \pi/4 - \varepsilon/2, \rho)$. En effet, il existe un réel $\eta > 0$ tel que pour tout $z \in S(\Phi_l, k, \pi/4 - \varepsilon/2, \rho)$ le cercle de centre z et de rayon $\eta|z|$ soit inclus dans $S(\Phi_l, k, \pi/4 - \varepsilon, \rho)$. Pour $z \in S(\Phi_l, k, \pi/4 - \varepsilon/2, \rho)$, on applique la formule de Cauchy à $x'_1(z)$ sur le cercle Γ de centre z et de rayon $\eta|z|$. On obtient

$$x'_1(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{x_1(\xi)}{(\xi-z)^2} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{x_1(z + \eta|z|e^{it})}{\eta|z|e^{it}} dt,$$

d'où

$$|zx'_1(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|x_1(z + \eta|z|e^{it})|}{\eta} dt.$$

Donc comme $x_1(z)$ tend uniformément vers zéro quand z tend vers zéro dans $S(\Phi_l, k, \pi/4 - \varepsilon/2, \rho)$ on a montré le résultat annoncé.

On a les mêmes résultats concernant les termes du dénominateur. Par conséquent, $h(z)$ tend vers -1 quand z tend vers zéro dans le secteur $S(\Phi_l, k, \pi/4 - \varepsilon/2, \rho)$.

On remarque qu'on a

$$\Delta \ln(1 + |H(z)|^2) = \frac{4|H'(z)|^2}{(1 + |H(z)|^2)^2}.$$

On a donc

$$A_H(\Omega_{k,l}(R)) = \int_{\partial\Omega_{k,l}(R)} \frac{\partial}{\partial n} \ln(1 + |H(z)|^2) ds$$

où $\frac{\partial}{\partial n}$ désigne la dérivée par rapport à la normale sortante.

On note

$$t_0 = \frac{\Phi_l - \frac{\pi}{4} + 2k\pi}{n-1}$$

et

$$t_1 = \frac{\Phi + \frac{\pi}{4} + 2k\pi}{n-1}.$$

Le bord de $\Omega_{k,l}(R)$ se compose de quatre morceaux : $\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = \rho, t_0 \leq \arg z \leq t_1\}$, $\gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid R \leq |z| \leq \rho, \arg z = t_1\}$, $\gamma_3 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = R, t_0 \leq \arg z \leq t_1\}$, et $\gamma_4 = \{z \in \mathbb{C} \mid R \leq |z| \leq \rho, \arg z = t_0\}$.

On note

$$\alpha_k(R) = \int_{\gamma_k} \frac{\partial}{\partial n} \ln(1 + |H(z)|^2) ds$$

pour $k \in [[1, 4]]$. α_1 est en fait indépendant de R et on a ainsi

$$A_H(\Omega_{k,l}(R)) = \alpha_1 + \alpha_2(R) + \alpha_3(R) + \alpha_4(R).$$

On a

$$\alpha_2(R) = \int_R^\rho \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial t} \ln(1 + |H(re^{it})|^2) dr,$$

la dérivée étant prise en $t = t_1$.

Or on a

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln(1 + |H(re^{it})|^2) = \frac{\frac{\partial}{\partial t} |H(re^{it})|^2}{1 + |H(re^{it})|^2} = \frac{2 \operatorname{Re}(ire^{it} H'(re^{it}) \bar{H}(re^{it}))}{1 + |H(re^{it})|^2}.$$

Comme on a

$$H'(z) = e^{2\zeta} z^{-2\sigma} \tilde{h}(z)$$

où

$$\tilde{h}(z) = 2\zeta' h(z) - \frac{2\sigma}{z} h(z) + h'(z),$$

on a

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial t} \ln(1 + |H(re^{it})|^2) = \frac{2|e^{2\zeta}|^2 |e^{-2\sigma(\ln r + it_1)}|^2 \operatorname{Re}(\tilde{h}\bar{h})}{1 + |e^{2\zeta}|^2 |e^{-2\sigma(\ln r + it_1)}|^2 |\tilde{h}(re^{it_1})|^2}.$$

On a $h'(z) = O(\frac{1}{z})$ quand z tend vers zéro dans le secteur $S(\Phi_l, k, \pi/4 - \varepsilon/4, \rho)$ (c'est le même raisonnement que pour montrer que $zx'_1(z)$ tend vers zéro quand z tend vers zéro dans le secteur $S(\Phi_l, k, \pi/4 - \varepsilon/2, \rho)$). Donc on a

$$\tilde{h}(z) = O\left(\frac{1}{z^n}\right)$$

quand z tend vers zéro dans le secteur $S(\Phi_l, k, \pi/4 - \varepsilon/4, \rho)$ (avec $n \geq 2$).

On a

$$|e^{-2\sigma(\ln r + it_1)}|^2 = r^{-4 \operatorname{Re} \sigma} e^{4t_1 \operatorname{Im} \sigma}.$$

On a

$$|e^{2\zeta}|^2 = \exp\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{4 \operatorname{Re}(\sigma_{n-1-k} e^{-ikt_1})}{kr^k}\right).$$

On distingue 3 cas.

Si cette somme est identiquement nulle, alors on a, quel que soit le signe de $\operatorname{Re} \sigma$,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial t} \ln(1 + |H(re^{it})|^2) = O\left(\frac{1}{r^n}\right)$$

quand r tend vers zéro.

Si cette somme tend vers $+\infty$ quand r tend vers 0, alors les quantités $2|e^{2\zeta}|^2|e^{-2\sigma(\ln r+it_1)}|^2 \operatorname{Re}(\tilde{h}\bar{h})$ et $|e^{2\zeta}|^2|e^{-2\sigma(\ln r+it_1)}|^2|h(re^{it_1})|^2$ tendent vers $+\infty$ quand r tend vers 0. Par conséquent, $\frac{\partial}{\partial t} \ln(1 + |H(re^{it})|^2)$ équivaut à $2 \operatorname{Re}(\tilde{h}\bar{h})/|h(re^{it_1})|^2$ quand r tend vers 0. Ainsi on a

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial t} \ln(1 + |H(re^{it})|^2) = O\left(\frac{1}{r^n}\right)$$

quand r tend vers zéro.

Si cette somme tend vers $-\infty$ quand r tend vers 0, alors les quantités $2|e^{2\zeta}|^2|e^{-2\sigma(\ln r+it_1)}|^2 \operatorname{Re}(\tilde{h}\bar{h})$ et $|e^{2\zeta}|^2|e^{-2\sigma(\ln r+it_1)}|^2|h(re^{it_1})|^2$ tendent vers 0 quand r tend vers 0, donc $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial t} \ln(1 + |H(re^{it})|^2)$ est bornée.

Dans tous les cas on a donc

$$\alpha_2(R) = O\left(\frac{1}{R^{n-1}}\right) \quad (2.3)$$

quand R tend vers zéro.

On montre de même qu'on a

$$\alpha_4(R) = O\left(\frac{1}{R^{n-1}}\right) \quad (2.4)$$

quand R tend vers zéro.

On a

$$\alpha_3(R) = - \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial}{\partial r} \ln(1 + |H(re^{it})|^2) R dt,$$

la dérivée étant prise en $r = R$. Donc

$$\alpha_3(R) = -R\psi'(R)$$

où

$$\psi(r) = \int_{t_0}^{t_1} \ln(1 + |H(re^{it})|^2) dt.$$

On a donc

$$\begin{aligned} T_{G,k,l}(R) &= \int_R^\rho \frac{A_G(\Omega_{k,l}(r))}{r} dr \\ &= \alpha_1(\ln \rho - \ln R) + \psi(R) - \psi(\rho) \\ &\quad + \int_R^\rho \frac{\alpha_2(r)}{r} dr + \int_R^\rho \frac{\alpha_4(r)}{r} dr. \end{aligned} \quad (2.5)$$

On a

$$\begin{aligned} |H(re^{it})|^2 &= \left|e^{2\zeta}\right|^2 \left|e^{-2\sigma(\ln r+it)}\right|^2 |h(re^{it})|^2 \\ &= r^{-4\operatorname{Re}\sigma} e^{4t\operatorname{Im}\sigma} |h(re^{it})|^2 \prod_{j=1}^{n-1} \beta_j, \end{aligned}$$

avec

$$\beta_j = \exp\left(\frac{4\operatorname{Re}(\sigma_{n-1-j} e^{-ijt})}{jr^j}\right).$$

Comme $h(z)$ tend vers -1 quand z tend vers zéro dans le secteur $S(\Phi_l, k, \pi/4 - \varepsilon/2, \rho)$, pour r assez petit on a $|h(re^{it})|^2 \leq 2$.

La quantité $e^{2t\operatorname{Im}\sigma}$ est majorée par une constante $K > 0$.

Par conséquent, on a, pour r suffisamment petit,

$$0 \leq |H(re^{it})|^2 \leq \frac{2K}{r^{4\operatorname{Re}\sigma}} \exp\left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{4|\sigma_{n-1-j}|}{jr^j}\right).$$

Donc, comme

$$\psi(r) = \int_{t_0}^{t_1} \ln(1 + |H(re^{it})|^2) dt,$$

quand r tend vers zéro, on a

$$\psi(r) = O\left(\frac{1}{r^{n-1}}\right). \quad (2.6)$$

Ainsi, d'après (2.3), (2.4), (2.5) et (2.6),

$$T_{G,k,l}(R) = O\left(\frac{1}{R^{n-1}}\right)$$

quand R tend vers zéro.

Comme ceci est vrai pour tout k et tout l , on a ainsi montré que G est de type fini (inférieur ou égal à $n - 1$).

Nous allons maintenant traiter le cas où m est impair. On effectue alors le changement de variable $u^2 = z$ (ce qui ne pose pas de problème dans la mesure où on obtiendra des résultats sur des secteurs). On pose $\tilde{X}(u) = X(u^2)$. L'équation (2.1) devient

$$\frac{d^2\tilde{X}}{du^2} - \tilde{P}\frac{d\tilde{X}}{du} - \tilde{Q}\tilde{X} = 0, \quad (2.7)$$

où

$$\tilde{P}(u) = \frac{1}{u} + 2u \frac{w'(u^2)}{w(u^2)}$$

est méromorphe avec éventuellement un pôle d'ordre au plus un en $u = 0$, et où

$$\tilde{Q}(u) = 4u^2 Q(u^2) = \sum_{k=-m+1}^{\infty} 4q_{k-1} u^{2k}.$$

On est donc ramené à une situation similaire à celle du cas où m est pair, en remplaçant $X(z)$ par $\tilde{X}(u)$ et m par $2(m-1) \geq 4$. \square

Chapitre 3

Flux for Bryant surfaces and applications to embedded ends of finite total curvature

Illinois J. Math. 47 (3) : 667–698, automne 2003.

Abstract. We compute the flux of Killing fields through ends of constant mean curvature 1 in hyperbolic space, and we prove a result conjectured by Rossman, Umehara and Yamada: the flux matrix they have defined is equivalent to the flux of Killing fields. We next give a geometric description of embedded ends of finite total curvature. In particular, we show that if such an end is asymptotic to a catenoid cousin, then we can associate an axis to it. We also compute the flux of Killing fields through these ends, and we deduce some geometric properties and some analogies with minimal surfaces in Euclidean space.

3.1 Introduction

Bryant surfaces are surfaces with constant mean curvature one in hyperbolic 3-space \mathbb{H}^3 (with the convention that the mean curvature of a surface is one half of the trace of its second fundamental form). These surfaces were first studied first by Bryant ([Bry87]), who derived a representation in terms of holomorphic data, analogous to the Weierstrass data for minimal surfaces in \mathbb{R}^3 .

Umehara and Yamada defined the notion of regular ends of Bryant surfaces ([UY93]): These are ends that are conformally parametrized by the punctured complex disk and such that the hyperbolic Gauss map extends meromorphically to the puncture. (If the hyperbolic Gauss map has an essential singularity at the puncture, the end is said to be irregular.) Umehara and Yamada also studied the Weierstrass data of Bryant surface ends of finite total curvature.

Collin, Hauswirth and Rosenberg ([CHR01]) showed that properly embedded annular ends have finite total curvature and are regular. Yu ([Yu01]) proved that irregular ends are never embedded. Sá Earp and Toubiana ([SET01]) studied the geometry of embedded ends of finite total curvature (hence regular). They showed that, in the upper half-space model of \mathbb{H}^3 , such ends are, up to an isometry of \mathbb{H}^3 , vertical Euclidean graphs and are asymptotic to a catenoid cousin of revolution or a horosphere

as vertical Euclidean graphs. They also defined the growth of such ends. If E is a half-catenoid cousin whose asymptotic boundary is ∞ , then the image of E by a Euclidean horizontal translation (which is a parabolic isometry of \mathbb{H}^3) is asymptotic to E in the sense of Sá Earp and Toubiana (see figure 3.1).

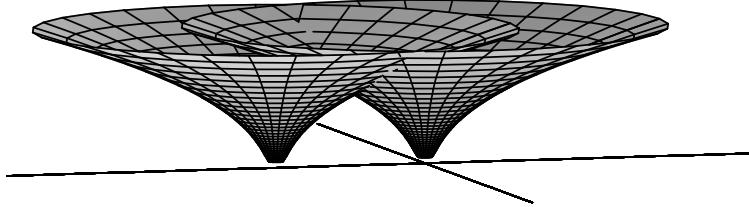


Figure 3.1: Two half-catenoid cousins asymptotic in the sense of Sá Earp and Toubiana but with different axes.

There exist two notions of flux for Bryant surfaces. The first flux is the flux of Killing fields. This flux was introduced by Korevaar, Kusner, Meeks and Solomon ([KKMS92]) as an analogue of the flux defined by Korevaar, Kusner and Solomon for constant mean curvature surfaces in \mathbb{R}^3 ([KKS89]). It is the sum of an integral along a curve Γ and of an integral over a compact surface whose boundary is Γ . This flux is a homology invariant. The second flux is the residue-type flux matrix defined by Rossman, Umehara and Yamada ([RUY99]). This flux can be easily computed from the Bryant representation of the surface. It is also a homology invariant. Rossman, Umehara and Yamada conjectured that these two notions of flux were equivalent.

In this paper, we prove this conjecture. We compute the flux of Killing fields associated to translations and rotations through Bryant surface ends. We show that it only depends on the residues of three meromorphic one-forms (theorems 3.12 and 3.14). These residues are, up to constant factors, the coefficients of the flux matrix defined by Rossman, Umehara and Yamada. Moreover, we define a complex polynomial of degree at most two, called flux polynomial, whose coefficients are these residues (theorem 3.15). This polynomial contains all the information given by the flux and satisfies a “balancing formula”.

The second aim of this paper is to complete the geometric study of embedded ends of finite total curvature started in [SET01]. We show that if such an end is asymptotic to a catenoid cousin, then we can associate an axis to it (theorem 3.23). This means that these ends are asymptotically surfaces of revolution. We call these ends catenoidal ends. An analogous result for embedded ends of finite total curvature of minimal surfaces in \mathbb{R}^3 was obtained by Schoen ([Sch83]).

We next compute the flux for embedded ends of finite total curvature. We obtain that the flux of the Killing field associated to the translation along the geodesic $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ through a catenoidal end is

$$\varphi = \pi(1 - \mu^2)(2 \operatorname{Re}(\mathcal{A}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{B}) - 1),$$

where $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ is the axis of the end, $1 - \mu$ its growth, and where $(\mathcal{A}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{B})$ denotes the cross-ratio (theorem 3.32). This formula is one of the simplest we could expect, since it depends only on the asymptotic behaviour of the end. We also show that the flux for a horospherical end is zero if and only if its Hopf differential is regular at the end (theorem 3.34).

Thus, the flux for Bryant surfaces plays the same role as the flux and the torque for minimal surfaces in \mathbb{R}^3 . (The torque is defined in [KK93]; see also [HK97] for definitions and basic properties

of the flux and the torque.) Indeed, the flux and the torque for a catenoidal end depend only on the growth and the axis of the end, and the torque for a planar end (the analogue of a horospherical end) is zero if and only if the Hopf differential is regular at the end, i.e., the degree of the Gauss map at the end is at least 3 (see [Rom97]).

Finally, we give some geometric applications of the flux. If a Bryant surface has exactly two catenoidal ends (and no others) with distinct asymptotic boundaries, then the ends have the same growth and the same axis (proposition 3.41). If a Bryant surface has exactly three catenoidal ends (and no others) with distinct asymptotic boundaries, then the axes are coplanar and concurrent (possibly in the asymptotic boundary of \mathbb{H}^3) (proposition 3.45). The same results hold for minimal surfaces in \mathbb{R}^3 .

3.2 Preliminaries and notations

In this paper, the model used for hyperbolic 3-space is the upper half-space model:

$$\mathbb{H}^3 = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 | w > 0\} = \{(\zeta, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} | w > 0\}$$

with the metric

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2 + dw^2}{w^2} = \frac{|d\zeta|^2 + dw^2}{w^2}.$$

The symbols $<, >$ and $\|.\|$ denote, respectively, the hyperbolic metric and the hyperbolic norm on \mathbb{H}^3 . If $X_1 = (\alpha_1, \beta_1)$ and $X_2 = (\alpha_2, \beta_2)$ are two vectors in the tangent space of \mathbb{H}^3 at the point (ζ, w) , then $\langle X_1, X_2 \rangle = (\text{Re}(\bar{\alpha}_1 \alpha_2) + \beta_1 \beta_2)/w^2$.

In the model of the unit ball of \mathbb{R}^3 for hyperbolic space, the asymptotic boundary of hyperbolic space is the sphere of radius 1. In the half-space model, we identify the asymptotic boundary of \mathbb{H}^3 with the Riemann sphere $\bar{\mathbb{C}}$ composed of the plane $\{\zeta = 0\}$ and of the point at infinity which we denote ∞ .

The asymptotic boundary of a part of \mathbb{H}^3 is the set of its accumulation points in $\bar{\mathbb{C}}$.

The identification between the upper half-space model and the Minkowski model for \mathbb{H}^3 is the same as that described in [SET01] (remark 1.11). Consequently, if f is a constant mean curvature one immersion of a Riemann surface M into the Minkowski model of the hyperbolic space, if $F = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ is its Bryant representation (see [Bry87]), then we have $f = FF^*$, and the corresponding immersion $X = (\zeta, w) : M \rightarrow \mathbb{H}^3$ in the upper half-space model is given by

$$\zeta = \frac{\bar{A}C + \bar{B}D}{|A|^2 + |B|^2} \quad (3.1)$$

and

$$w = \frac{1}{|A|^2 + |B|^2}. \quad (3.2)$$

We recall that A, B, C and D are holomorphic functions defined on the universal cover of M and satisfying $AD - BC = 1$ and $dAdD - dBdC = 0$.

If (g, ω) denote the Weierstrass data of the end (see [Bry87] or [UY93]), the 2-form ωdg is called the Hopf differential of the end. It is single-valued on M (contrarily to g and ω). It is invariant by an isometry of \mathbb{H}^3 .

The hyperbolic Gauss map is given by $G = \frac{dC}{dA} = \frac{dD}{dB}$. It is single-valued on M . This expression slightly differs from that of [Bry87], [UY93] and other papers because of the chosen identification (see [SET01], remark 1.11). The one-form $\omega^\# = -\frac{\omega dg}{d(1/G)}$ is also single-valued on M (the pair $(1/G, \omega^\#)$ gives the Weierstrass data of the dual immersion, see [UY97]). Hence the following one-forms are single-valued on M :

$$\begin{aligned} BdA - AdB &= -\frac{\omega^\#}{G^2} = \frac{\omega dg}{dG}, \\ CdB - BdA &= \frac{\omega^\#}{G} = -G \frac{\omega dg}{dG}, \\ DdC - CdD &= -\omega^\# = G^2 \frac{\omega dg}{dG}. \end{aligned}$$

For regular ends of finite total curvature, the Hopf differential ωdg has a pole of order greater than or equal to -2 at zero (see [UY93]). Its order does not depend on the parametrization.

In the Minkowski model, a direct isometry is a map $N \mapsto PNP^*$ where $P = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$. In the half-space model, this isometry induces on $\bar{\mathbb{C}}$ the map $\zeta \mapsto \frac{\delta\zeta + \gamma}{\beta\zeta + \alpha}$ because of the chosen identification.

If \mathcal{A} and \mathcal{B} are two distinct points in $\bar{\mathbb{C}}$, $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ denotes the oriented geodesic of \mathbb{H}^3 going from \mathcal{A} to \mathcal{B} .

If z_1, z_2, z_3 and z_4 are four points in $\bar{\mathbb{C}}$ such that $z_1 \neq z_4$ and $z_2 \neq z_3$, we define their cross-ratio by

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} \cdot \frac{z_4 - z_2}{z_4 - z_1}.$$

We recall that there exists a direct isometry (respectively an indirect isometry) of \mathbb{H}^3 which maps z_1, z_2, z_3 and z_4 to z'_1, z'_2, z'_3 and z'_4 respectively (where $z'_1 \neq z'_4$ and $z'_2 \neq z'_3$) if and only if $(z_1, z_2, z_3, z_4) = (z'_1, z'_2, z'_3, z'_4)$ (respectively $(z_1, z_2, z_3, z_4) = (\overline{z'_1, z'_2, z'_3, z'_4})$).

In this paper, Ω will denote any neighbourhood of 0 in \mathbb{C} , and Ω^* will denote the set $\Omega \setminus \{0\}$.

The flux of a Killing field Y through an annular Bryant surface end E is defined by

$$\varphi = \int_{\Gamma} \langle \eta, Y \rangle - 2 \int_K \langle \nu, Y \rangle$$

where Γ is a generator of $\pi_1(E)$, K a topological disk whose boundary is Γ , η the conormal to Γ in the direction of the asymptotic boundary of the end and ν the normal to K chosen as follows: If \vec{H} denotes the mean curvature vector of the end, we choose on Γ the orientation such that $(\Gamma, \eta, -\vec{H})$ is the orientation of \mathbb{H}^3 and ν such that it induces the same orientation on Γ . The normal ν induces an orientation on K and Γ . These choices have been made in order to be compatible with Stokes' formula.

This number φ does not depend on the choices of Γ and K (see [KKS89] and [KKMS92]). We shall notice that in [KKS89] and [KKMS92] the mean curvature is defined as the trace of the second fundamental form (and not its half), which explains the coefficient 2 in the formula.

If α is a n -form on \mathbb{H}^3 and X a vector field, then the interior product of α by X is denoted $i_X \alpha$ and defined by $i_X \alpha(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) = \alpha(X, \xi_1, \dots, \xi_{n-1})$. The Lie derivative of α with respect to X is denoted $L_X \alpha$. We recall Cartan's formula: $L_X \alpha = d(i_X \alpha) + i_X d\alpha$.

3.3 Flux of Killing fields

3.3.1 Killing fields associated to translations

Definition 3.1. Let \mathcal{A} and \mathcal{B} be two distinct points in $\bar{\mathbb{C}}$. Let Φ_t be the translation of distance $t \in \mathbb{R}$ along the geodesic $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Then the vector field Y defined by

$$\frac{d\Phi_t}{dt} = Y(\Phi_t)$$

is called the Killing field associated to the translation along $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

The Killing field associated to the translation along $(\mathcal{B}, \mathcal{A})$ is the opposite of the Killing field associated to the translation along $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Elementary computations give the following lemma.

Lemma 3.2. *The Killing field associated to the translation along $(0, \infty)$ is*

$$Y(\zeta, w) = (\zeta, w).$$

Lemma 3.3. *Let $\zeta_0 \in \mathbb{C}^*$. The Killing field associated to the translation along $(\zeta_0, 0)$ is*

$$Y(\zeta, w) = \begin{pmatrix} -\frac{w^2}{\zeta_0} + \frac{\zeta^2}{\zeta_0} - \zeta \\ 2w \operatorname{Re} \frac{\zeta}{\zeta_0} - w \end{pmatrix}.$$

Proof. The map

$$\Phi : (u', v', w') \mapsto \frac{1}{u'^2 + v'^2 + w'^2} (u', v', w')$$

is an isometry of \mathbb{H}^3 which maps the geodesic (ζ'_0, ∞) (where $\zeta'_0 = \zeta_0/|\zeta_0|^2$) to the geodesic $(\zeta_0, 0)$. Hence the Killing field associated to the translation along $(\zeta_0, 0)$ is given by $Y(P) = \Phi_* Z(P) = d_{\Phi^{-1}(P)} \Phi \cdot Z(\Phi^{-1}(P))$ for each $P = (u, v, w) = (\zeta, w) \in \mathbb{H}^3$, where Z is the Killing field associated to the translation along (ζ'_0, ∞) .

We have $\Phi^{-1}(P) = (u', v', w')$ where $u = ru'$, $v = rv'$, $w = rw'$ and $r = u^2 + v^2 + w^2$. Hence we have $Z(\Phi^{-1}(P)) = (u' - u'_0, v' - v'_0, w')$ with $\zeta'_0 = u'_0 + iv'_0$, so

$$\begin{aligned} Y(P) &= \frac{1}{(u'^2 + v'^2 + w'^2)^2} \\ &\times \begin{pmatrix} v'^2 + w'^2 - u'^2 & -2u'v' & -2u'w' \\ -2u'v' & u'^2 + w'^2 - v'^2 & -2v'w' \\ -2u'w' & -2v'w' & u'^2 + v'^2 - w'^2 \end{pmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} u' - u'_0 \\ v' - v'_0 \\ w' \end{pmatrix} \\ &= r^2 \begin{pmatrix} -u'_0(v'^2 + w'^2 - u'^2) + 2v'_0u'v' - u'v'^2 - u'w'^2 - u'^3 \\ 2u'_0u'v' - v'_0(u'^2 + w'^2 - v'^2) - u'^2v' - v'w'^2 - v'^3 \\ 2u'_0u'w' + 2v'_0v'w' - u'^2w' - v'^2w' - w'^3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u'_0(u^2 - v^2 - w^2) + 2v'_0uv - u \\ 2u'_0uv + v'_0(v^2 - u^2 - w^2) - v \\ 2u'_0uw + 2v'_0vw - w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{w^2}{\zeta_0} + \frac{\zeta^2}{\zeta_0} - \zeta \\ 2w \operatorname{Re} \frac{\zeta}{\zeta_0} - w \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

3.3.2 Killing fields associated to rotations

Definition 3.4. Let \mathcal{A} and \mathcal{B} be two distinct points in $\bar{\mathbb{C}}$. Let R_θ be the rotation of angle θ (in the direct sense) about the geodesic $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Then the vector field Y defined by

$$\frac{dR_\theta}{d\theta} = Y(R_\theta)$$

is called the Killing field associated to the rotation about $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

The Killing field associated to the rotation about $(\mathcal{B}, \mathcal{A})$ is the opposite of the Killing field associated to the rotation about $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Elementary computations give the following lemma.

Lemma 3.5. *The Killing field associated to the rotation about $(0, \infty)$ is*

$$Y(\zeta, w) = (i\zeta, 0).$$

Lemma 3.6. *Let $\zeta_0 \in \mathbb{C}^*$. The Killing field associated to the rotation about $(\zeta_0, 0)$ is*

$$Y(\zeta, w) = \begin{pmatrix} i\frac{w^2}{\zeta_0} + i\frac{\zeta^2}{\zeta_0} - i\zeta \\ -2w \operatorname{Im} \frac{\zeta}{\zeta_0} \end{pmatrix}.$$

Proof. We proceed as for lemma 3.3 and we use the same notations. Since the map Φ is an indirect isometry of \mathbb{H}^3 , we have $Y = -\Phi_* Z$ where Z is the Killing field associated to the rotation about (ζ'_0, ∞) . \square

3.3.3 Flux of Killing fields associated to translations

In this section, ζ_0 and ζ_1 are two complex numbers such that $\zeta_0 \neq 0$, and E denotes a Bryant surface end whose Bryant representation is $F = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} : \Omega^* \rightarrow \operatorname{SL}_2(\mathbb{C})$. We denote by $X = (\zeta, w) : \Omega^* \rightarrow \mathbb{H}^3$ the corresponding conformal immersion in the upper half-space model.

We will denote by (ρ, τ) the polar coordinates in Ω (i.e., $z = \rho e^{i\tau}$). We have the following relationships for derivation operators:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{1}{2z} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} - i \frac{\partial}{\partial \tau} \right), \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2\bar{z}} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + i \frac{\partial}{\partial \tau} \right). \end{aligned}$$

Lemma 3.7. *Let Y be the Killing field associated to the translation along the geodesic $(\zeta_0 + \zeta_1, \zeta_1)$. Then if ρ is a sufficiently small positive number, the flux of Y through E is*

$$\varphi = \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}(s(\rho, \tau)) d\tau$$

where

$$\begin{aligned} s(\rho, \tau) &= \frac{\zeta - \zeta_1}{w^2} \overline{\left(\rho \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} + i \frac{\partial \zeta}{\partial \tau} \right)} \left(1 - \frac{\zeta - \zeta_1}{\zeta_0} \right) \\ &\quad + \frac{\rho}{\zeta_0} \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} - \frac{2i}{\zeta_0} \frac{\partial \zeta}{\partial \tau} \ln w - \frac{\rho}{w} \frac{\partial w}{\partial \rho} \left(2 \frac{\zeta - \zeta_1}{\zeta_0} - 1 \right). \end{aligned}$$

Proof. Let $\rho > 0$ such that the circle $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = \rho\}$ is included in Ω . Let Γ be the curve on E defined by $\tau \mapsto X(\rho e^{i\tau})$. Let K be a disk whose boundary is Γ .

We remark that we must take on Γ the orientation given by $-\Gamma'$. Indeed, because of the conventions for the sign of the mean curvature, positive mean curvature means that the orientation induced by the immersion X is the same as the orientation induced by the mean curvature vector \vec{H} ; consequently, the basis (η, Γ', \vec{H}) is indirect. We note ν and η the normal to K and the conormal to Γ , chosen as explained in section 3.2.

The conormal η to Γ is a unit vector lying in the tangent plane and normal to $\Gamma'(\tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} X(\rho e^{i\tau})$. Since the parametrization X is conformal, the conormal η is necessarily colinear to $\frac{\partial}{\partial \rho} X(\rho e^{i\tau})$. Since η must point in the direction of $0 \in \mathbb{C}$, we have

$$\eta = -\frac{\frac{\partial}{\partial \rho} X(\rho e^{i\tau})}{\left\| \frac{\partial}{\partial \rho} X(\rho e^{i\tau}) \right\|}.$$

Then we have

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \langle \eta, Y \rangle &= \int_0^{2\pi} \langle \eta, Y \rangle \left\| \frac{\partial}{\partial \tau} X \right\| d\tau \\ &= \int_0^{2\pi} \langle \eta, Y \rangle \left\| \frac{\partial}{\partial \rho} X \right\| \rho d\tau \\ &= \int_0^{2\pi} -\rho \left\langle \frac{\partial}{\partial \rho} X, Y \right\rangle d\tau. \end{aligned}$$

According to lemma 3.3, we have

$$Y(\zeta, w) = \begin{pmatrix} -\frac{w^2}{\zeta_0} + \frac{(\zeta - \zeta_1)^2}{\zeta_0} - (\zeta - \zeta_1) \\ 2w \operatorname{Re} \frac{\zeta - \zeta_1}{\zeta_0} - w \end{pmatrix}.$$

Consequently we have

$$\int_{\Gamma} \langle \eta, Y \rangle = - \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}(s_1(\rho, \tau)) d\tau$$

with

$$s_1(\rho, \tau) = \frac{\rho}{w^2} \overline{\frac{\partial \zeta}{\partial \rho}} \left(-\frac{w^2}{\zeta_0} + \frac{(\zeta - \zeta_1)^2}{\zeta_0} - (\zeta - \zeta_1) \right) + \frac{\rho}{w} \frac{\partial w}{\partial \rho} \left(2 \frac{\zeta - \zeta_1}{\zeta_0} - 1 \right).$$

Let α be the canonical volume form of \mathbb{H}^3 . We have $\alpha = \frac{1}{w^3} du \wedge dv \wedge dw$. Since Y is a Killing field, we have $L_Y \alpha = 0$, so $0 = d(i_Y \alpha) + i_Y d\alpha = d(i_Y \alpha)$. Hence there exists a 1-form β such that $i_Y \alpha = d\beta$. The form β is the dual form of a vector field Z , i.e., we have $\beta(\xi) = \langle Z, \xi \rangle$ for all vector fields ξ .

We compute that we can take

$$Z(\zeta, w) = \begin{pmatrix} i \frac{w^2}{\zeta_0} \ln w + \frac{i}{2} \frac{(\zeta - \zeta_1)^2}{\zeta_0} - \frac{i}{2} (\zeta - \zeta_1) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Let (e_1, e_2) be an orthonormal basis of the tangent space of K such that the basis (e_1, e_2, ν) is direct. Then we have $i_Y \alpha(e_1, e_2) = \alpha(e_1, e_2, Y) = \langle \nu, Y \rangle$. Consequently, on K the form $i_Y \alpha$ is equal

to $\langle \nu, Y \rangle$ times the canonical volume form of K . Hence we have

$$\int_K \langle \nu, Y \rangle = \int_K i_Y \alpha.$$

On the other hand, Stokes's formula implies that

$$\int_K i_Y \alpha = - \int_{\Gamma} \beta$$

since we must take on Γ the orientation given by $-\Gamma'$, as explained before.

Consequently we have

$$\int_K \langle \nu, Y \rangle = - \int_{\Gamma} \beta = - \int_0^{2\pi} \left\langle \frac{\partial}{\partial \tau} X, Z \right\rangle d\tau = - \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}(s_2(\rho, \tau)) d\tau$$

with

$$s_2(\rho, \tau) = \frac{1}{w^2} \overline{\frac{\partial \zeta}{\partial \tau}} \left(i \frac{w^2}{\bar{\zeta}_0} \ln w + \frac{i}{2} \frac{(\zeta - \zeta_1)^2}{\zeta_0} - \frac{i}{2} (\zeta - \zeta_1) \right).$$

So

$$\varphi = \int_{\Gamma} \langle \eta, Y \rangle - 2 \int_K \langle \nu, Y \rangle = \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}(-s_1(\rho, \tau) + 2s_2(\rho, \tau)) d\tau.$$

Since the real part does not change if we replace the first terms of s_1 and s_2 by their conjugates, we obtain the expected result. \square

Lemma 3.8. *We have the following identities:*

$$\frac{1}{w^2} \overline{\frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}}} = AB' - A'B, \quad (3.3)$$

$$\frac{\rho}{w} \frac{\partial w}{\partial \rho} = -z \frac{A' \bar{A} + B' \bar{B}}{|A|^2 + |B|^2} - \bar{z} \frac{A \bar{A}' + B \bar{B}'}{|A|^2 + |B|^2}, \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \ln w = -iz \frac{A' \bar{A} + B' \bar{B}}{|A|^2 + |B|^2} + i\bar{z} \frac{A \bar{A}' + B \bar{B}'}{|A|^2 + |B|^2}. \quad (3.5)$$

Proof. Recall that

$$\zeta = \frac{\bar{A}C + \bar{B}D}{|A|^2 + |B|^2}$$

where A, B, C and D are multivaluated holomorphic functions.

We compute that

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}} &= \frac{(\bar{A}'C + \bar{B}'D)(|A|^2 + |B|^2) - (\bar{A}C + \bar{B}D)(A\bar{A}' + B\bar{B}')}{(|A|^2 + |B|^2)^2} \\ &= \frac{\bar{A}\bar{B}' - \bar{A}'\bar{B}}{(|A|^2 + |B|^2)^2} \end{aligned}$$

because $AD - BC = 1$.

And since

$$w = \frac{1}{|A|^2 + |B|^2},$$

we obtain relation (3.3).

Relations (3.4) and (3.5) are consequences of elementary computations using the fact that we have $\frac{\partial}{\partial\rho}A = e^{i\tau}A'$, $\frac{\partial}{\partial\rho}\bar{A} = e^{-i\tau}\bar{A}'$, $\frac{\partial}{\partial\tau}A = i\rho e^{i\tau}A'$, $\frac{\partial}{\partial\tau}\bar{A} = -i\rho e^{-i\tau}\bar{A}'$, and the analogous identities for B , C and D (because these are multivaluated holomorphic functions). \square

Lemma 3.9. *We have*

$$s(\rho, \tau) = a_1(z) + \zeta_1 a_2(z) + \frac{1}{\zeta_0} a_3(z) + 2\frac{\zeta_1}{\zeta_0} a_1(z) + \frac{\zeta_1^2}{\zeta_0} a_2(z)$$

where

$$a_1(z) = 2z(B'C - A'D) + i\frac{\partial}{\partial\tau} \ln w,$$

$$a_2(z) = 2z(A'B - AB'),$$

$$a_3(z) = 2z(C'D - CD') - 2i\frac{\partial}{\partial\tau}(\zeta \ln w) + i\frac{\partial\zeta}{\partial\tau}.$$

Proof. We have the above expression for $s(\rho, \tau)$ with

$$\begin{aligned} a_1(z) &= \frac{\zeta}{w^2} \overline{\left(\rho \frac{\partial\zeta}{\partial\rho} + i \frac{\partial\zeta}{\partial\tau} \right)} + \frac{\rho}{w} \frac{\partial w}{\partial\rho}, \\ a_2(z) &= -\frac{1}{w^2} \overline{\left(\rho \frac{\partial\zeta}{\partial\rho} + i \frac{\partial\zeta}{\partial\tau} \right)}, \\ a_3(z) &= -\frac{\zeta^2}{w^2} \overline{\left(\rho \frac{\partial\zeta}{\partial\rho} + i \frac{\partial\zeta}{\partial\tau} \right)} + \rho \frac{\partial\zeta}{\partial\rho} - 2i \frac{\partial\zeta}{\partial\tau} \ln w - 2 \frac{\rho}{w} \frac{\partial w}{\partial\rho} \zeta. \end{aligned}$$

The claimed expression of $a_2(z)$ is a consequence of formula (3.3).

Because of formulae (3.3) and (3.4) we have

$$a_1(z) = 2z(AB' - A'B)\zeta - z \frac{A'\bar{A} + B'\bar{B}}{|A|^2 + |B|^2} - \bar{z} \frac{A\bar{A}' + B\bar{B}'}{|A|^2 + |B|^2}.$$

Then a computation shows that

$$a_1(z) = 2z(B'C - A'D) + z \frac{A'\bar{A} + B'\bar{B}}{|A|^2 + |B|^2} - \bar{z} \frac{A\bar{A}' + B\bar{B}'}{|A|^2 + |B|^2}.$$

Thus we obtain the above expression for $a_1(z)$ using formula (3.5).

Finally we have

$$\begin{aligned}
a_3(z) &= -a_1(z)\zeta + \rho \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} - 2i \frac{\partial}{\partial \tau}(\zeta \ln w) + 2i\zeta \frac{\partial}{\partial \tau} \ln w - \frac{\rho}{w} \frac{\partial w}{\partial \rho} \zeta \\
&= -2z(B'C - A'D)\zeta + \rho \frac{\partial \zeta}{\partial \rho} - 2i \frac{\partial}{\partial \tau}(\zeta \ln w) + i\zeta \frac{\partial}{\partial \tau} \ln w - \frac{\rho}{w} \frac{\partial w}{\partial \rho} \zeta \\
&= 2z(BC' - AD')\zeta + 2z \frac{\partial \zeta}{\partial z} + i \frac{\partial \zeta}{\partial \tau} - 2i \frac{\partial}{\partial \tau}(\zeta \ln w) - 2z \frac{\zeta}{w} \frac{\partial w}{\partial z} \\
&= 2z(BC'' - AD')\zeta + 2zw(\bar{A}C' + \bar{B}D') + i \frac{\partial \zeta}{\partial \tau} - 2i \frac{\partial}{\partial \tau}(\zeta \ln w) \\
&= 2z(C'D - CD') + i \frac{\partial \zeta}{\partial \tau} - 2i \frac{\partial}{\partial \tau}(\zeta \ln w).
\end{aligned}$$

□

As an immediate consequence of lemmas 3.7 and 3.9 we obtain the following result.

Lemma 3.10. *Let Y be the Killing field associated to the translation along the geodesic $(\zeta_0 + \zeta_1, \zeta_1)$. Then the flux of Y through E is*

$$\varphi = \operatorname{Re} \left(\varphi_1 + \varphi_2 \zeta_1 + \varphi_0 \frac{1}{\zeta_0} + 2\varphi_1 \frac{\zeta_1}{\zeta_0} + \varphi_2 \frac{\zeta_1^2}{\zeta_0} \right)$$

where $\varphi_0 = 4\pi \operatorname{Res}(DdC - CdD)$, $\varphi_1 = 4\pi \operatorname{Res}(CdB - DdA)$ and $\varphi_2 = 4\pi \operatorname{Res}(BdA - AdB)$.

Now we deal with the case where one of the extremities of the geodesic is the point ∞ .

Lemma 3.11. *Let Y be the Killing field associated to the translation along the geodesic (ζ_1, ∞) . Then the flux of Y through E is*

$$\varphi = \operatorname{Re}(-\varphi_1 - \varphi_2 \zeta_1)$$

where $\varphi_0 = 4\pi \operatorname{Res}(DdC - CdD)$, $\varphi_1 = 4\pi \operatorname{Res}(CdB - DdA)$ and $\varphi_2 = 4\pi \operatorname{Res}(BdA - AdB)$. 3.10.

Proof. We proceed as in lemmas 3.7, 3.9 and 3.10, replacing the expressions of Y and Z in lemma 3.7 by

$$Y(\zeta, w) = \begin{pmatrix} \zeta - \zeta_1 \\ w \end{pmatrix}$$

and

$$Z(\zeta, w) = \begin{pmatrix} \frac{i}{2}(\zeta - \zeta_1) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

□

Theorem 3.12. *Let \mathcal{C} and \mathcal{D} be two distinct points in $\bar{\mathbb{C}}$. Let Y be the Killing field associated to the translation along the geodesic $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$. Then the flux of Y through E is*

$$\varphi = \operatorname{Re} \left(\frac{\varphi_2 \mathcal{C} \mathcal{D} + \varphi_1 (\mathcal{C} + \mathcal{D}) + \varphi_0}{\mathcal{C} - \mathcal{D}} \right)$$

where $\varphi_0 = 4\pi \operatorname{Res}(DdC - CdD)$, $\varphi_1 = 4\pi \operatorname{Res}(CdB - DdA)$ and $\varphi_2 = 4\pi \operatorname{Res}(BdA - AdB)$.

Proof. If both \mathcal{C} and \mathcal{D} are different from ∞ , then we set $\zeta_1 = \mathcal{D}$ and $\zeta_0 = \mathcal{C} - \mathcal{D}$, and the result comes from lemma 3.10.

If $\mathcal{D} = \infty$ and $\mathcal{C} \neq \infty$, then we set $\zeta_1 = \mathcal{C}$, and the result comes from lemma 3.11.

If $\mathcal{C} = \infty$ and $\mathcal{D} \neq \infty$, then the result follows from the above case and the fact that both the flux and the announced expression are antisymmetric with respect to $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$. \square

3.3.4 Flux of Killing fields associated to rotations

Lemma 3.13. *Let E be a Bryant surface end given by a conformal immersion $X = (\zeta, w) : \Omega^* \rightarrow \mathbb{H}^3$ in the upper half-space model. Let ζ_0 and ζ_1 be two complex numbers, with $\zeta_0 \neq 0$, and let Y be the Killing field associated to the rotation about the geodesic $(\zeta_0 + \zeta_1, \zeta_1)$. Then if ρ is a sufficiently small positive number, the flux of Y through E is*

$$\varphi = \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}(is(\rho, \tau)) d\tau$$

where $s(\rho, \tau)$ has been defined in lemma 3.7.

Proof. We proceed as in lemma 3.7, with

$$Y(\zeta, w) = \begin{pmatrix} i\frac{w^2}{\zeta_0} + i\frac{(\zeta - \zeta_1)^2}{\zeta_0} - i(\zeta - \zeta_1) \\ -2w \operatorname{Im} \frac{\zeta - \zeta_1}{\zeta_0} \end{pmatrix}$$

(see lemma 3.6) and

$$Z(\zeta, w) = \begin{pmatrix} \frac{w^2}{\zeta_0} \ln w - \frac{1}{2} \frac{(\zeta - \zeta_1)^2}{\zeta_0} + \frac{1}{2}(\zeta - \zeta_1) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

\square

Using this lemma, we proceed as in section 3.3.3 to compute the flux of Killing fields associated to rotations.

Theorem 3.14. *Let \mathcal{C} and \mathcal{D} be two distinct points in $\bar{\mathbb{C}}$. Let Y be the Killing field associated to the rotation about the geodesic $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$. Then the flux of Y through E is*

$$\varphi = -\operatorname{Im} \left(\frac{\varphi_2 \mathcal{C} \mathcal{D} + \varphi_1 (\mathcal{C} + \mathcal{D}) + \varphi_0}{\mathcal{C} - \mathcal{D}} \right)$$

where $\varphi_0 = 4\pi \operatorname{Res}(DdC - CdD)$, $\varphi_1 = 4\pi \operatorname{Res}(CdB - DdA)$ and $\varphi_2 = 4\pi \operatorname{Res}(BdA - AdB)$.

3.3.5 Flux polynomial and equivalence with the residue-type flux matrix

Theorem 3.15. *Let E be a Bryant surface end whose Bryant representation is $F = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} : \Omega^* \rightarrow \operatorname{SL}_2(\mathbb{C})$. Then there exists a unique polynomial $P_E(X, Y) \in \mathbb{C}[X, Y]$ such that, for all pairs*

$(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ of distinct points in $\bar{\mathbb{C}}$, the flux of the Killing field associated to the translation along the geodesic $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ through E is

$$\operatorname{Re} \left(\frac{P_E(\mathcal{C}, \mathcal{D})}{\mathcal{C} - \mathcal{D}} \right)$$

and the flux of the Killing field associated to the rotation about the geodesic $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ through E is

$$-\operatorname{Im} \left(\frac{P_E(\mathcal{C}, \mathcal{D})}{\mathcal{C} - \mathcal{D}} \right)$$

This polynomial P_E is symmetric and we have

$$P_E(X, Y) = \varphi_2 XY + \varphi_1(X + Y) + \varphi_0$$

where $\varphi_0 = 4\pi \operatorname{Res}(DdC - CdD)$, $\varphi_1 = 4\pi \operatorname{Res}(CdB - DdA)$ and $\varphi_2 = 4\pi \operatorname{Res}(BdA - AdB)$.

The polynomial

$$\Pi_E(X) = P_E(X, X) = \varphi_2 X^2 + 2\varphi_1 X + \varphi_0$$

is called the flux polynomial of E .

Proof. This is a reformulation of theorems 3.12 and 3.14. \square

Remark 3.16. We have

$$\Pi_E(X) = -4\pi \operatorname{Res} \left(\omega^\# \left(X - \frac{1}{G} \right)^2 \right).$$

Remark 3.17. Knowing the flux polynomial is equivalent to knowing the flux of Killing fields associated to all translations and rotations.

In [RUY99], Rossman, Umehara and Yamada defined a residue-type flux for Bryant surface ends. If an end E is conformally parametrized by Ω^* and has a Bryant representation $F = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, then the flux matrix of E is defined by

$$\Phi = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} (\mathrm{d}F) F^{-1}$$

where Γ is a loop around 0 with positive orientation. This matrix does not depend on the choice of Γ . It is the residue at zero of the form

$$-(\mathrm{d}F) F^{-1} = \begin{pmatrix} CdB - DdA & BdA - AdB \\ CdD - DdC & BdC - AdD \end{pmatrix},$$

which is single-valued. Hence it does not depend on the parametrization.

Consequently, since $BdC - AdD = -(CdB - DdA)$, we have

$$\Phi = \frac{1}{4\pi} \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ -\varphi_0 & -\varphi_1 \end{pmatrix}.$$

Thus the coefficients of the flux matrix Φ are, up to constants, the same as the coefficients of the flux polynomial.

This proves the conjecture of Rossman, Umehara and Yamada ([RUY99]; see the remark following example 8): knowing the flux matrix Φ of the end E is equivalent to knowing the flux through E of all Killing fields associated to translations and rotations.

We considered these two notions of flux for loops Γ generating the fundamental group of an end. We can actually define these fluxes for any loop Γ on a Bryant surface. We consider a neighbourhood of Γ in the surface that is conformally parametrized by $\{z \in \mathbb{C} | 1 - \varepsilon < |z| < 1 + \varepsilon\}$ and such that Γ is homologous to the curve corresponding to the circle $\{|z| = 1\}$. Then the flux of a Killing field Y through Γ is equal to its flux through the curve corresponding to the circle $\{|z| = 1\}$ (since the flux is a homology invariant). Thus we obtain, theorems 3.12, 3.14 and 3.15 with $\varphi_0 = -2i \int_{\{|z|=1\}} (DdC - CdD)$, $\varphi_1 = -2i \int_{\{|z|=1\}} (CdB - DdA)$ and $\varphi_2 = -2i \int_{\{|z|=1\}} (BdA - AdB)$. These coefficients are, up to constants, the coefficients of the flux matrix $\Phi = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} (dF) F^{-1} = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\{|z|=1\}} (dF) F^{-1}$. Hence the two notions of flux are equivalent for any loop Γ on the surface, and consequently for any homology class on the surface.

Remark 3.18. It is easy to compute the flux matrix Φ of an end E that is the image by a direct isometry of \mathbb{H}^3 of an end E_0 whose flux matrix Φ_0 is known. Indeed, if F and F_0 are the Bryant representations of E and E_0 , then there exists a matrix $P \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ such that $F_0 = PF$. Then $\Phi = P^{-1}\Phi_0P$.

3.4 Embedded Bryant surface ends of finite total curvature

Let us first recall and complete the results of Sá Earp and Toubiana ([SET01]).

Let E be an embedded Bryant surface end of finite total curvature which is not part of a horosphere. We recall that E is necessarily regular (see [Yu01]). Then, according to [Bry87], the associated Weierstrass data have the following form:

$$\begin{cases} g(z) &= z^\mu f(z) \\ \omega &= z^\nu h(z) dz \end{cases}$$

in Ω^* , where f and h are holomorphic functions in a neighbourhood of zero such that $f(0) \neq 0$ and $h(0) \neq 0$, and μ and ν are real numbers such that $\mu > 0$, $\nu \leq -1$, $\mu + \nu \in \mathbb{Z}$ and $\mu + \nu \geq -1$.

Since $f(0) \neq 0$, we can define a function $z \mapsto f(z)^{\frac{1}{\mu}}$ in a neighbourhood of zero. Consequently, we can replace z by $zf(z)^{\frac{1}{\mu}}$ and assume that the Weierstrass data have the following form:

$$\begin{cases} g(z) &= z^\mu \\ \omega &= z^\nu h(z) dz. \end{cases} \tag{3.6}$$

We distinguish two cases: the case where $\mu + \nu = -1$ will be dealt with in section 3.4.1 and the case where $\mu + \nu \geq 0$ will be dealt with in section 3.4.2.

3.4.1 Catenoidal ends

General representation

In this section we assume that $\mu + \nu = -1$. In this case the Hopf differential ωdg is of degree -2 . Then, according to [SET01], we have $\mu \neq 1$ and, after replacing $f(z)$ by 1 ,

$$h(0) = \frac{1 - \mu^2}{4\mu} \quad (3.7)$$

and

$$\frac{4\mu}{1 - \mu} h'(0) = 2\mu h'(0).$$

This second equation implies that

$$h'(0) = 0. \quad (3.8)$$

The Bryant representation of E is given by

$$F = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 z^{\lambda_1} f_1 + a_2 z^{\lambda_2} f_2 & b_1 z^{r_1} r + b_2 z^{r_2} g_2 \\ c_1 z^{\lambda_1} f_1 + c_2 z^{\lambda_2} f_2 & d_1 z^{r_1} r + d_2 z^{r_2} g_2 \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

where f_1, f_2, r and g_2 are holomorphic functions near 0 satisfying $f_1(0) = f_2(0) = r(0) = g_2(0) = 1$, $\lambda_1 = \frac{-1-\mu}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1-\mu}{2}$, $r_1 = \frac{\mu-1}{2}$ and $r_2 = \frac{1+\mu}{2}$, and where $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1$ and d_2 are complex numbers satisfying $a_1 d_1 - b_1 c_1 = 0$, $a_1 c_2 - a_2 c_1 \neq 0$ and $b_1 d_2 - b_2 d_1 \neq 0$.

The functions f_1 and f_2 are such that $(z \mapsto z^{\lambda_1} f_1(z), z \mapsto z^{\lambda_2} f_2(z))$ is a basis of the vector space of the solutions of the equation

$$X'' - \frac{(z^{-1-\mu} h)'}{z^{-1-\mu} h} X' - \mu h z^{-2} X = 0.$$

The functions r and g_2 are such that $(z \mapsto z^{r_1} r(z), z \mapsto z^{r_2} g_2(z))$ is a basis of the vector space of the solutions of the equation

$$X'' - \frac{(z^{-1+\mu} h)'}{z^{-1+\mu} h} X' - \mu h z^{-2} X = 0.$$

Remark 3.19. Since $\lambda_2 = \lambda_1 + 1$, the function f_2 is uniquely defined, and the function f_1 is uniquely defined if we fix the value of its derivative at zero. In the same way, since $r_2 = r_1 + 1$, the function g_2 is uniquely defined, and the function r is uniquely defined if we fix the value of its derivative at zero.

From the identity $\omega = AdC - CdA$ (see [UY93] or [Ros02]) we obtain that

$$h = (a_1 c_2 - a_2 c_1)(f_1 f_2 - z f'_1 f_2 + z f_1 f'_2). \quad (3.10)$$

Taking the order 1 terms, we get

$$f'_2(0) = 0. \quad (3.11)$$

In the same way, from the identity $g^2 \omega = BdD - DdB$ (see [UY93] or [Ros02]) we obtain that

$$h = (b_1 d_2 - b_2 d_1)(r g_2 - z r' g_2 + z r g'_2). \quad (3.12)$$

Taking the order 1 terms, we get

$$g'_2(0) = 0. \quad (3.13)$$

Canonical representation

Sá Earp and Toubiana ([SET01]) have shown that we can reduce ourselves to a more simple Bryant representation up to an isometry of \mathbb{H}^3 . More precisely, we can choose complex numbers α, β, γ and δ satisfying $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, $\alpha a_1 + \beta c_1 = \alpha b_1 + \beta d_1 = \gamma a_2 + \delta c_2 = 0$, and $\alpha a_2 + \beta c_2 = 1$. If we replace $F = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ by $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, we obtain an end which is the image of E by a direct isometry Ψ of \mathbb{H}^3 , which has the same Weierstrass data as E , and whose Bryant representation is given by

$$\begin{pmatrix} A(z) & B(z) \\ C(z) & D(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^{\lambda_2} f_2(z) & \frac{\mu-1}{\mu+1} z^{r_2} g_2(z) \\ \frac{\mu^2-1}{4\mu} z^{\lambda_1} f_1(z) & \frac{(1+\mu)^2}{4\mu} z^{r_1} g_1(z) \end{pmatrix}, \quad (3.14)$$

where g_1 is a holomorphic function near 0 satisfying $g_1(0) = 1$. The isometry Ψ induces on $\bar{\mathbb{C}}$ the map $\zeta \mapsto \frac{\delta\zeta + \gamma}{\beta\zeta + \alpha}$, which we also denote Ψ .

Definition 3.20. Let $\mu \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ and $\mathcal{Z} \in \mathbb{C}$. An end which has Weierstrass data given by (3.6) and a Bryant representation F given by (3.14), where f_1 has been chosen such that

$$\mathcal{Z} = \frac{\mu^2 - 1}{4\mu} f'_1(0)$$

(see remark 3.19), is called a canonical catenoidal end of growth $1 - \mu$, of asymptotic boundary ∞ and of axis (\mathcal{Z}, ∞) , and the Weierstrass data given by (3.6) and the Bryant representation F given by (3.14) are called respectively its canonical Weierstrass data and its canonical Bryant representation.

We now explain this terminology by giving a geometric description of such an end.

Proposition 3.21. Let $\mu \in (0, 1) \cup (1, \infty)$, $\mathcal{Z} \in \mathbb{C}$ and E be a canonical catenoidal end of growth $1 - \mu$, of asymptotic boundary ∞ and of axis (\mathcal{Z}, ∞) . Then there exists a parametrization $(w, \tau) \mapsto (\zeta(w, \tau), w)$ of E in the upper half-space model of \mathbb{H}^3 , and a parametrization $(w, \tau) \mapsto (\tilde{\zeta}(w, \tau), w)$ of a half-catenoid cousin of growth $1 - \mu$, of asymptotic boundary ∞ and of axis $(0, \infty)$, such that

$$\zeta(w, \tau) = \tilde{\zeta}(w, \tau) + \mathcal{Z} + o(1)$$

when w tends to ∞ if $\mu < 1$ and to 0 if $\mu > 1$.

Proof. We assume that the Weierstrass data of E are given by (3.6) and its Bryant representation F by (3.14), with $\mathcal{Z} = \frac{\mu^2 - 1}{4\mu} f'_1(0)$ (see remark 3.19).

Because of formulae (3.1) and (3.2), in the upper half-space model the end E is given by

$$\begin{aligned} \zeta(z) &= (u + iv)(z) = \frac{\mu^2 - 1}{4\mu z} \frac{f_1 \bar{f}_2 + g_1 \bar{g}_2 |z|^{2\mu}}{|f_2|^2 + (\frac{\mu-1}{\mu+1})^2 |g_2|^2 |z|^{2\mu}}, \\ w(z) &= \frac{|z|^{\mu-1}}{|f_2|^2 + (\frac{\mu-1}{\mu+1})^2 |g_2|^2 |z|^{2\mu}}. \end{aligned}$$

From this we deduce that the asymptotic boundary of E is actually ∞ .

Define

$$\tilde{\zeta}(z) = \frac{\mu^2 - 1}{4\mu z} \frac{1 + |z|^{2\mu}}{1 + (\frac{\mu-1}{\mu+1})^2 |z|^{2\mu}}$$

and

$$\tilde{w}(z) = \frac{|z|^{\mu-1}}{1 + (\frac{\mu-1}{\mu+1})^2 |z|^{2\mu}}.$$

These functions $\tilde{\zeta}$ and \tilde{w} are the coordinates of the catenoid cousin of growth $1 - \mu$ and of axis of revolution $(0, \infty)$, such that the end at $\infty \in \bar{\mathbb{C}}$ corresponds to $z = 0$. \tilde{w} depends only on $|z|$.

We have $\zeta(z) = \tilde{\zeta}(z) + \mathcal{Z} + o(1)$ since $\mathcal{Z} = \frac{\mu^2 - 1}{4\mu} f'_1(0)$, and $w(z) = \tilde{w}(z)(1 + O(z^2))$ since $f'_2(0) = g'_2(0) = 0$.

Let (ρ, τ) denote the polar coordinates in Ω (i.e., $z = \rho e^{i\tau}$). Since $\frac{\partial w}{\partial \rho} \neq 0$ for ρ sufficiently small, we can do the change of parameters $(\rho, \tau) \mapsto (w, \tau)$.

Since $f'_2(0) = g'_2(0) = 0$, we have the following asymptotic expansion:

$$w = \rho^{\mu-1} \left(1 + \sum_{j=1}^p \alpha_j \rho^{2j\mu} + O(\rho^2) \right)$$

where p is the largest integer such that $2p\mu < 2$ and the α_j are real constants which depend only on μ .

Consequently, we have the following asymptotic expansion for the inverse function:

$$\rho = w^{\frac{1}{\mu-1}} \left(1 + \sum_{j=1}^p \beta_j w^{\frac{2j\mu}{\mu-1}} + O(w^{\frac{2}{\mu-1}}) \right)$$

when w tends to ∞ if $\mu < 1$ and to 0 if $\mu > 1$, and where the β_j are real constants which depend only on μ .

We also have

$$\zeta = \frac{\mu^2 - 1}{4\mu \rho e^{i\tau}} \left(1 + \sum_{j=1}^q \gamma_j \rho^{2j\mu} \right) + \mathcal{Z} + o(1)$$

where q is the largest integer such that $2q\mu \leq 1$ and the γ_j are real constants which depend only on μ .

Reporting the asymptotic expansion of w , we get

$$\begin{aligned} \zeta(w, \tau) &= \frac{\mu^2 - 1}{4\mu e^{i\tau}} w^{-\frac{1}{\mu-1}} \left(1 + \sum_{j=1}^p \delta_j w^{\frac{2j\mu}{\mu-1}} + O(w^{\frac{2}{\mu-1}}) \right) + \mathcal{Z} + o(1) \\ &= \frac{\mu^2 - 1}{4\mu e^{i\tau}} w^{-\frac{1}{\mu-1}} \left(1 + \sum_{j=1}^q \delta_j w^{\frac{2j\mu}{\mu-1}} \right) + \mathcal{Z} + o(1) \end{aligned}$$

where the δ_j are real constants which depend only on μ .

The same arguments hold for the canonical catenoid of axis $(0, \infty)$ parametrized by $(\tilde{\zeta}, \tilde{w})$. Consequently we get

$$\zeta(w, \tau) = \tilde{\zeta}(w, \tau) + \mathcal{Z} + o(1).$$

□

This means that the end E is asymptotic, in the neighbourhood of $\infty \in \bar{\mathbb{C}}$, to a half-catenoid cousin of growth $1 - \mu$ and of axis of revolution (\mathcal{Z}, ∞) , in a stronger sense than the sense defined in [SET01] (in [SET01], two half-catenoid cousins whose asymptotic boundary is ∞ and having the same growth are asymptotic to each other up to a Euclidean homothety, independently of their axes). The complex number \mathcal{Z} is the only one with this property.

Definition 3.22. Let $\mu \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ and \mathcal{A}, \mathcal{B} two distinct points in $\bar{\mathbb{C}}$. Let E be an embedded Bryant surface end of finite total curvature which is not part of a horosphere. We say that E is a catenoidal end of growth $1 - \mu$, of asymptotic boundary \mathcal{B} and of axis $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ if there exists an isometry of \mathbb{H}^3 (direct or not) which maps \mathcal{A} to 0, \mathcal{B} to ∞ and E to a canonical catenoidal end of growth $1 - \mu$, of asymptotic boundary ∞ and of axis $(0, \infty)$.

A half-catenoid cousin of growth $1 - \mu$, of asymptotic boundary \mathcal{B} and of axis of revolution $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ is of course a catenoidal end of growth $1 - \mu$, of asymptotic boundary \mathcal{B} and of axis $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

A canonical catenoidal end of growth $1 - \mu$, of asymptotic boundary ∞ and of axis (\mathcal{Z}, ∞) is a catenoidal end of growth $1 - \mu$, of asymptotic boundary ∞ and of axis (\mathcal{Z}, ∞) : it suffices to consider the isometry $(\zeta, w) \mapsto (\zeta - \mathcal{Z}, w)$.

We can now prove the following theorem.

Theorem 3.23. *Let E be an embedded Bryant surface end of finite total curvature which is not part of a horosphere. Assume that its Weierstrass data are given by (3.6) with $\mu + \nu = -1$. Then there exist a unique real χ and a unique pair of distinct points $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ such that E is a catenoidal end of growth χ , of asymptotic boundary \mathcal{B} and of axis $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.*

Moreover we have $\chi = 1 - \mu$ and, if the Bryant representation of E is given by

$$F(z) = \begin{pmatrix} z^{\lambda_1} a(z) & z^{r_1} b(z) \\ z^{\lambda_1} c(z) & z^{r_1} d(z) \end{pmatrix},$$

we have $\mathcal{A} = c'(0)/a'(0)$ and $\mathcal{B} = c(0)/a(0)$.

Proof. The existence has already been proved in section 3.4.1 and in the beginning of section 3.4.1 (upon choosing $f'_1(0) = 0$; see remark 3.19).

The uniqueness of \mathcal{B} is clear, since the asymptotic boundary of E is the set of its accumulation points in $\bar{\mathbb{C}}$.

Assume that there exist two points \mathcal{A}_1 and \mathcal{A}_2 and two numbers μ_1 and μ_2 such that E is both a catenoidal end of growth $1 - \mu_1$ and of axis $(\mathcal{A}_1, \mathcal{B})$ and a catenoidal end of growth $1 - \mu_2$ and of axis $(\mathcal{A}_2, \mathcal{B})$. Then there exists an isometry Ψ_1 of \mathbb{H}^3 which maps \mathcal{A}_1 to 0, \mathcal{B} to ∞ and E to a canonical catenoidal end of growth $1 - \mu_1$ and of axis $(0, \infty)$, and there exists an isometry Ψ_2 of \mathbb{H}^3 which maps \mathcal{A}_2 to 0, \mathcal{B} to ∞ and E to a canonical catenoidal end of growth $1 - \mu_2$ and of axis $(0, \infty)$.

Consequently there exists a parametrization $(w, \tau) \mapsto (\zeta_2(w, \tau), w)$ of the end $\Psi_2(E)$ such that $\zeta_2(w, \tau) = \tilde{\zeta}_{\mu_2}(w, \tau) + o(1)$ when w tends to ∞ if $\mu_2 < 1$ and to 0 if $\mu_2 > 1$, where $\tilde{\zeta}_{\mu_2}$ corresponds to the canonical catenoid of growth $1 - \mu_2$ and of axis $(0, \infty)$.

The isometry $\Psi_1 \circ \Psi_2^{-1}$ fixes ∞ and maps 0 to $\mathcal{Z} = \Psi_1(\mathcal{A}_2)$. Assume that this isometry is direct. Then it is the composition of a twist about $(0, \infty)$ and of the Euclidean translation by the vector \mathcal{Z} .

Consequently, the end $\Psi_1(E)$ has a parametrization of the form $(w, \tau) \mapsto (\lambda\zeta_2(w/|\lambda|, \tau) + \mathcal{Z}, w)$ with $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

On the other hand, there exists a parametrization $(w, \tau') \mapsto (\zeta_1(w, \tau'), w)$ of $\Psi_1(E)$ such that $\zeta_1(w, \tau') = \tilde{\zeta}_{\mu_1}(w, \tau') + o(1)$ when w tends to ∞ if $\mu_1 < 1$ and to 0 if $\mu_1 > 1$, where $\tilde{\zeta}_{\mu_1}$ corresponds to the canonical catenoid of growth $1 - \mu_1$ and of axis $(0, \infty)$.

The numbers $1 - \mu_1$ and $1 - \mu_2$ must have the same sign, since w cannot tend to both ∞ and 0. And there exists τ such that $\mathcal{Z} = c(w)\tilde{\zeta}_{\mu_1}(w, \tau)$ with $c(w) \geq 0$ and for each w there exists $\tau'(w)$ such that $\zeta_1(w, \tau) = \lambda\zeta_2(w/|\lambda|, \tau'(w))$. We deduce that

$$\lambda\tilde{\zeta}_{\mu_2}(w/|\lambda|, \tau'(w)) + \mathcal{Z} - \tilde{\zeta}_{\mu_1}(w, \tau) = o(1).$$

Using the expressions of $\tilde{\zeta}_{\mu_1}$ and $\tilde{\zeta}_{\mu_2}$, we obtain that $\mu_1 = \mu_2$, $e^{i(\tau'(w)-\tau)} \rightarrow \lambda$ and hence $|\lambda| = 1$. Writing $\lambda = e^{i\theta}$, we have

$$(e^{i(\theta+\tau-\tau'(w))} + c(w) - 1)\tilde{\zeta}_{\mu_1}(w, \tau) = o(1),$$

and so

$$e^{i(\theta+\tau-\tau'(w))} + c(w) - 1 = o(\tilde{\zeta}_{\mu_1}(w, \tau)^{-1}). \quad (3.15)$$

Taking the imaginary part in (3.15) we get

$$\sin(\theta + \tau - \tau'(w)) = o(\tilde{\zeta}_{\mu_1}(w, \tau)^{-1}),$$

and consequently

$$\cos(\theta + \tau - \tau'(w)) - 1 = o(\tilde{\zeta}_{\mu_1}(w, \tau)^{-1}).$$

On the other hand, taking the real part in (3.15) we get

$$\cos(\theta + \tau - \tau'(w)) + c(w) - 1 = o(\tilde{\zeta}_{\mu_1}(w, \tau)^{-1}),$$

so

$$c(w) = o(\tilde{\zeta}_{\mu_1}(w, \tau)^{-1}),$$

and finally

$$\mathcal{Z} = c(w)\tilde{\zeta}_{\mu_1}(w, \tau) = o(1).$$

This means that $\mathcal{Z} = 0$. We conclude that $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_1$.

If the isometry $\Psi_1 \circ \Psi_2^{-1}$ is indirect, then it is the composition of the symmetry about the plane $\{\operatorname{Re} \zeta = 0\}$ and of the two aforementioned isometries, so the same arguments hold, replacing $\tilde{\zeta}_{\mu_2}$ by its conjugate.

To complete the proof, it now suffices to compute the values of \mathcal{A} and \mathcal{B} . Using the notations of the beginning of section 3.4.1 with $f'_1(0) = 0$ (see remark 3.19), we have $a = a_1f_1 + a_2zf_2$ and $c = c_1f_1 + c_2zf_2$. Hence we get $a(0) = a_1$, $a'(0) = a_2$, $c(0) = c_1$ and $c'(0) = c_2$. The expression of \mathcal{B} follows from formulae (3.1) and (3.2). And since $\gamma a_2 + \delta c_2 = 0$, we have $\Psi(c_2/a_2) = 0$ (even if $a_2 = 0$), so $\mathcal{A} = c_2/a_2 = c'(0)/a'(0)$. \square

Remark 3.24. The fact that $|\lambda| = 1$ means that among all the half-catenoid cousins of growth $1 - \mu$, of asymptotic boundary \mathcal{B} and of axis $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ there exists a unique one to which E is strongly asymptotic.

The following fact is now clear.

Proposition 3.25. *Let E be a catenoidal end of growth $1 - \mu$, of asymptotic boundary \mathcal{B} and of axis $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Let Ψ be an isometry of \mathbb{H}^3 (direct or indirect). Then $\Psi(E)$ is a catenoidal end of growth $1 - \mu$, of asymptotic boundary $\Psi(\mathcal{B})$ and of axis $(\Psi(\mathcal{A}), \Psi(\mathcal{B}))$.*

Remark 3.26. In definition 3.22 we can require the isometry to be direct.

Remark 3.27. The notion of canonical end has no geometrical meaning, but it will be more convenient to use this terminology to compute the flux (see section 3.5.1). Any catenoidal end of axis (\mathcal{Z}, ∞) is the image of a canonical one by a twist about (\mathcal{Z}, ∞) .

3.4.2 Horospherical ends

General representation

In this section, we assume that E is an end whose Weierstrass data are given by (3.6) with $\mu + \nu \geq 0$. Since we have a single-valued embedding, according to [SET01] we have $\nu = -2$, $\mu \in \mathbb{N}$, $\mu \geq 2$,

$$\begin{cases} h'(0) = 2h(0)^2 & \text{if } \mu = 2, \\ h'(0) = 0 & \text{if } \mu \geq 3. \end{cases} \quad (3.16)$$

The Bryant representation of E is given by

$$F = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 z^{-1} f_1 + a_2 f_2 & b_1 r + b_2 z^{2\mu-1} g_2 \\ c_1 z^{-1} f_1 + c_2 f_2 & d_1 r + d_2 z^{2\mu-1} g_2 \end{pmatrix}, \quad (3.17)$$

where f_1, f_2, r and g_2 are holomorphic functions near 0 satisfying $f_1(0) = f_2(0) = r(0) = g_2(0) = 1$, and where $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1$ and d_2 are complex numbers satisfying $a_1 d_1 - b_1 c_1 = 0$, $a_1 c_2 - a_2 c_1 \neq 0$ and $b_1 d_2 - b_2 d_1 \neq 0$.

The functions f_1 and f_2 are such that $(z \mapsto z^{-1} f_1(z), z \mapsto f_2(z))$ is a basis of the vector space of the solutions of the equation

$$X'' - \frac{(z^{-2} h)'}{(z^{-2} h)} X' - \mu h z^{\mu-3} X = 0.$$

The functions r and g_2 are such that $(z \mapsto r(z), z \mapsto z^{2\mu-1} g_2(z))$ are a basis of the vector space of the solutions of the equation

$$X'' - \frac{(z^{2\mu-2} h)'}{(z^{2\mu-2} h)} X' - \mu h z^{\mu-3} X = 0.$$

Remark 3.28. The function f_2 is uniquely defined, and the function f_1 is uniquely defined if we fix the value of its derivative at zero.

Canonical representation

In the same way as for catenoidal ends, Sá Earp and Toubiana ([SET01]) showed that we can reduce ourselves to a simpler Bryant representation up to an isometry of \mathbb{H}^3 . More precisely, we can choose complex numbers α, β, γ and δ satisfying $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, $\alpha a_1 + \beta c_1 = \alpha b_1 + \beta d_1 = \gamma a_2 + \delta c_2 = 0$, and

$\alpha a_2 + \beta c_2 = 1$. If we replace $F = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ by $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, we obtain an end which is the image of E by a direct isometry Ψ of \mathbb{H}^3 , which has the same Weierstrass data as E , and whose Bryant representation is given by

$$F(z) = \begin{pmatrix} A(z) & B(z) \\ C(z) & D(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_2(z) & bz^{2\mu-1}g_2(z) \\ cz^{-1}f_1(z) & g_1(z) \end{pmatrix}, \quad (3.18)$$

where g_1 is a holomorphic function near 0 satisfying $g_1(0) = 1$, $b \in \mathbb{C}^*$ and $c \in \mathbb{C}^*$. The isometry Ψ induces on $\bar{\mathbb{C}}$ the map $\zeta \mapsto \frac{\delta\zeta + \gamma}{\beta\zeta + \alpha}$, which we also denote Ψ .

Definition 3.29. An end which has Weierstrass data given by (3.6) and a Bryant representation F given by (3.18) is called a canonical horospherical end of asymptotic boundary ∞ , and the Weierstrass data given by (3.6) and the Bryant representation F given by (3.14) are called respectively its canonical Weierstrass data and its canonical Bryant representation.

We now assume that the end E has Weierstrass data given by (3.6) and a Bryant representation F given by (3.18).

Because of formulae (3.1) and (3.2), in the upper half-space model the end E is given by

$$\zeta(z) = (u + iv)(z) = \frac{c f_1 \bar{f}_2 + \frac{b}{c} z \bar{z}^{2\mu-1} g_1 \bar{g}_2}{z |f_2|^2 + |b|^2 |z|^{2\mu} |g_2|^2},$$

$$w(z) = \frac{1}{|f_2|^2 + |b|^2 |z|^{2\mu} |g_2|^2}.$$

From the identity $\omega = AdC - CdA$ we obtain that

$$c(-f_1 f_2 + z f'_1 f_2 - z f_1 f'_2) = h.$$

Taking the order zero term, we get

$$c = -h(0). \quad (3.19)$$

Taking the order one term, we get

$$h'(0) = -2c f'_2(0). \quad (3.20)$$

Taking the order one term in the identity $AD - BC = 1$, we get

$$f'_2(0) + g'_1(0) = 0. \quad (3.21)$$

Since the end has finite total curvature and is regular, we can write

$$\omega dg = \sum_{j=-2}^{\infty} q_j z^j dz^2.$$

We compute that

$$\omega dg = \mu z^{\mu-3} h(z) dz^2.$$

Hence we have

$$q_{-2} = 0$$

and

$$\begin{cases} q_{-1} = 2h(0) & \text{if } \mu = 2, \\ q_{-1} = 0 & \text{if } \mu \geq 3. \end{cases} \quad (3.22)$$

3.4.3 Classification

Here we summarize the results we have obtained.

Theorem 3.30. *Let E be an embedded Bryant surface end of finite total curvature. Then we are in one of the following cases:*

- E is part of a horosphere,
- E is not part of a horosphere and there exists a point $\mathcal{B} \in \bar{\mathbb{C}}$ such that E is a horospherical end of asymptotic boundary \mathcal{B} ,
- E is not part of a horosphere and there exist a real $\mu \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ and two distinct points $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \bar{\mathbb{C}}$ such that E is a catenoidal end of growth $1 - \mu$, of asymptotic boundary \mathcal{B} , and of axis $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$.

Proof. It suffices to show that we cannot be in two cases at the same time. This is a consequence of the fact that the Hopf differential is zero for horospheres, is non-zero and has a degree greater than or equal to -1 for horospherical ends, and has a degree equal to -2 for catenoidal ends. \square

3.5 Flux for embedded ends of finite total curvature

3.5.1 Flux for catenoidal ends

Lemma 3.31. *Let $\mu \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ and $\mathcal{Z} \in \mathbb{C}$. Let E be a canonical catenoidal end of growth $1 - \mu$, of asymptotic boundary ∞ and of axis (\mathcal{Z}, ∞) . Let ζ_0 and ζ_1 be two complex numbers, with $\zeta_0 \neq 0$. Then the flux polynomial of E is*

$$\Pi_E(X) = 2\pi(\mu^2 - 1)(X - \mathcal{Z}),$$

the flux of the Killing field associated to the translation along the geodesic $(\zeta_0 + \zeta_1, \zeta_1)$ through E is

$$\pi(\mu^2 - 1) \left(2 \operatorname{Re} \left(\frac{\zeta_1 - \mathcal{Z}}{\zeta_0} \right) + 1 \right),$$

the flux of the Killing field associated to the rotation about the geodesic $(\zeta_0 + \zeta_1, \zeta_1)$ through E is

$$2\pi(1 - \mu^2) \operatorname{Im} \left(\frac{\zeta_1 - \mathcal{Z}}{\zeta_0} \right),$$

the flux of the Killing field associated to the translation along the geodesic (ζ_1, ∞) through E is

$$\pi(1 - \mu^2),$$

and the flux of the Killing field associated to the rotation about the geodesic (ζ_1, ∞) through E is zero.

Proof. Using the canonical Bryant representation (3.14), we compute that the coefficients of the flux polynomial are

$$\varphi_0 = 4\pi \operatorname{Res}(DdC - CdD) = 2\pi(1 - \mu^2)\mathcal{Z},$$

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= 4\pi \operatorname{Res}(CdB - DdA) = \pi(\mu^2 - 1), \\ \varphi_2 &= 4\pi \operatorname{Res}(BdA - AdB) = 0.\end{aligned}$$

Applying theorems 3.12, 3.14 and 3.15, we obtain the announced results. \square

Theorem 3.32. *Let $\mu \in (0, 1) \cup (1, \infty)$. Let $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ and \mathcal{D} be four points in $\bar{\mathbb{C}}$ such that $\mathcal{A} \neq \mathcal{B}$ and $\mathcal{C} \neq \mathcal{D}$. Let E be a catenoidal end of growth $1 - \mu$, of asymptotic boundary \mathcal{B} and of axis $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Then the flux of the Killing field associated to the translation along the geodesic $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ through E is*

$$\pi(1 - \mu^2)(2 \operatorname{Re}(\mathcal{A}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{B}) - 1),$$

Then the flux of the Killing field associated to the rotation about the geodesic $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ through E is

$$-2\pi(1 - \mu^2) \operatorname{Im}(\mathcal{A}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{B}),$$

and the flux polynomial of E is

$$\Pi_E(X) = 2\pi(1 - \mu^2) \frac{(X - \mathcal{A})(X - \mathcal{B})}{\mathcal{B} - \mathcal{A}}.$$

In the case where $\mathcal{A} = \infty$, respectively $\mathcal{B} = \infty$, the above formula is to be interpreted as

$$\Pi_E(X) = 2\pi(1 - \mu^2)(X - \mathcal{B}),$$

respectively

$$\Pi_E(X) = -2\pi(1 - \mu^2)(X - \mathcal{A}).$$

Proof. We first compute the flux φ of the Killing field Y associated to the translation along the geodesic $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$.

According to what has been done in section 3.4.1, the end E has Weierstrass data given by (3.6), a Bryant representation F given by (3.9), and, given a complex number \mathcal{Z} , there exists a direct isometry Ψ of \mathbb{H}^3 which maps E to a canonical catenoidal end of growth $1 - \mu$, of asymptotic boundary ∞ and of axis (\mathcal{Z}, ∞) .

Assume that neither \mathcal{C} nor \mathcal{D} is equal to \mathcal{B} . Set $\zeta_0 = \Psi(\mathcal{C}) - \Psi(\mathcal{D})$ and $\zeta_1 = \Psi(\mathcal{D})$. Then ζ_0 and ζ_1 are different from ∞ , and Ψ maps \mathcal{A} to \mathcal{Z} , \mathcal{B} to ∞ , \mathcal{C} to $\zeta_0 + \zeta_1$ and \mathcal{D} to ζ_1 . Hence the flux φ of Y through E is equal to the flux of the Killing field associated to the translation along the geodesic $(\zeta_0 + \zeta_1, \zeta_1)$ through $\Psi(E)$. This flux has been calculated in lemma 3.31: we have

$$\varphi = \pi(\mu^2 - 1) \left(2 \operatorname{Re} \left(\frac{\zeta_1 - \mathcal{Z}}{\zeta_0} \right) + 1 \right).$$

We compute that

$$(\mathcal{Z}, \zeta_0 + \zeta_1, \infty, \zeta_1) = -\frac{\zeta_1 - \mathcal{Z}}{\zeta_0}.$$

And since the map Ψ conserves the cross-ratio, we have $(\mathcal{Z}, \zeta_0 + \zeta_1, \infty, \zeta_1) = (\mathcal{A}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{B})$.

Assume that $\mathcal{D} = \mathcal{B}$. Set $\zeta_1 = \Psi(\mathcal{C})$. Then $\zeta_1 \neq \infty$ (since $\mathcal{C} \neq \mathcal{D}$), and Ψ maps \mathcal{A} to \mathcal{Z} , \mathcal{B} to ∞ , \mathcal{C} to ζ_1 and \mathcal{D} to ∞ . Hence the flux φ of Y through E is equal to the flux of the Killing field associated

to the translation along the geodesic (ζ_1, ∞) through $\Psi(E)$. This flux has been calculated in lemma 3.31: we have $\varphi = \pi(1 - \mu^2)$. And since $(\mathcal{A}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{B}) = 1$ in this case, the result is still true.

Assume that $\mathcal{C} = \mathcal{B}$. The flux with respect to the geodesic $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ is the opposite of the flux with respect to $(\mathcal{D}, \mathcal{C})$. Hence we have $\varphi = -\pi(1 - \mu^2)$ according to what has just been done. Consequently, since $(\mathcal{A}, \mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{B}) = 0$ in this case, the result is still true.

We proceed in the same way for the flux of Killing fields associated to rotations. Then the expression of the flux polynomial follows from theorem 3.15. \square

3.5.2 Flux for horospherical ends

Lemma 3.33. *Let E be a canonical horospherical end of asymptotic boundary ∞ . Let ζ_0 and ζ_1 be two complex numbers, with $\zeta_0 \neq 0$. Let q_{-1} be the coefficient of the term of order -1 in the canonical Hopf differential of the end. Then the flux polynomial of E is*

$$\Pi_E(X) = -2\pi q_{-1}^2,$$

the flux of the Killing field associated to the translation along the geodesic $(\zeta_0 + \zeta_1, \zeta_1)$ through E is

$$-2\pi \operatorname{Re} \left(\frac{q_{-1}^2}{\zeta_0} \right),$$

the flux of the Killing field associated to the rotation about the geodesic $(\zeta_0 + \zeta_1, \zeta_1)$ through E is

$$2\pi \operatorname{Im} \left(\frac{q_{-1}^2}{\zeta_0} \right),$$

the flux of the Killing field associated to the translation along the geodesic (ζ_1, ∞) through E is zero, and the flux of the Killing field associated to the rotation about the geodesic (ζ_1, ∞) through E is zero.

Proof. Using the canonical Bryant representation (3.18), we compute that the coefficients of the flux polynomial are

$$\varphi_0 = 4\pi \operatorname{Res}(DdC - CdD) = -8\pi c g'_1(0),$$

$$\varphi_1 = 4\pi \operatorname{Res}(CdB - DdA) = 0,$$

$$\varphi_2 = 4\pi \operatorname{Res}(BdA - AdB) = 0.$$

Using equations (3.20) and (3.21), we obtain that $\varphi_0 = -4\pi h'(0)$. Then we deduce from equations (3.16) and (3.22) that $\varphi_0 = -2\pi q_{-1}^2$. Applying theorems 3.12, 3.14 and 3.15, we obtain the announced results. \square

Theorem 3.34. *Let $\mathcal{B} \in \bar{\mathbb{C}}$ and E be a horospherical end of asymptotic boundary \mathcal{B} .*

If $\mathcal{B} \in \mathbb{C}$, then there exists a complex number κ such that, for all pairs $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ of distinct points in $\bar{\mathbb{C}}$, the flux of the Killing field associated to the translation along the geodesic $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ through E is

$$\varphi = -2\pi \operatorname{Re} \left(\kappa \frac{(\mathcal{C} - \mathcal{B})(\mathcal{D} - \mathcal{B})}{\mathcal{C} - \mathcal{D}} \right),$$

the flux of the Killing field associated to the rotation about the geodesic $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ through E is

$$\varphi = 2\pi \operatorname{Im} \left(\kappa \frac{(\mathcal{C} - \mathcal{B})(\mathcal{D} - \mathcal{B})}{\mathcal{C} - \mathcal{D}} \right),$$

and the flux polynomial of E is

$$\Pi_E(X) = -2\pi\kappa(X - \mathcal{B})^2.$$

If $\mathcal{B} = \infty$, then there exists a complex number κ such that, for all pairs $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ of distinct points in $\bar{\mathbb{C}}$, the flux of the Killing field Y associated to the translation along the geodesic $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ through E is

$$\varphi = -2\pi \operatorname{Re} \left(\frac{\kappa}{\mathcal{C} - \mathcal{D}} \right),$$

the flux of the Killing field Y associated to the rotation about the geodesic $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ through E is

$$\varphi = 2\pi \operatorname{Im} \left(\frac{\kappa}{\mathcal{C} - \mathcal{D}} \right),$$

and the flux polynomial of E is

$$\Pi_E(X) = -2\pi\kappa.$$

The number κ is called the flux coefficient of E . We have $\kappa = 0$ (or, equivalently, $\Pi_E(X) = 0$) if and only if the Hopf differential ω_{dg} of the end E is holomorphic at zero, i.e., the degree μ of the secondary Gauss map g at zero is at least 3.

Proof. We first compute the flux φ of the Killing field Y associated to the translation along the geodesic $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$.

As was shown in section 3.4.2, there exists a direct isometry Ψ of \mathbb{H}^3 which maps E to a canonical horospherical end of asymptotic boundary ∞ . We use the notations of the beginning of section 3.4.2, with $f'_1(0) = 0$ (see remark 3.28).

Assume first that neither \mathcal{C} nor \mathcal{D} is equal to \mathcal{B} . Set $\zeta_0 = \Psi(\mathcal{C}) - \Psi(\mathcal{D})$ and $\zeta_1 = \Psi(\mathcal{D})$. Then ζ_0 and ζ_1 are different from ∞ , and Ψ maps \mathcal{B} to ∞ , \mathcal{C} to $\zeta_0 + \zeta_1$ and \mathcal{D} to ζ_1 . Hence the flux φ of Y through E is equal to the flux of the Killing field associated to the translation about the geodesic $(\zeta_0 + \zeta_1, \zeta_1)$ through $\Psi(E)$. This flux has been calculated in lemma 3.33: we have

$$\varphi = -2\pi \operatorname{Re} \left(\frac{q_{-1}^2}{\zeta_0} \right).$$

We have $a = a_1 f_1 + a_2 z f_2$ and $c = c_1 f_1 + c_2 z f_2$. Hence we get $a(0) = a_1$, $a'(0) = a_2$, $c(0) = c_1$ and $c'(0) = c_2$.

Using what has been done in the beginning of section 3.4.2, we compute that, if $\mathcal{B} \in \mathbb{C}$, then

$$\zeta_0 = \frac{(a'(0)\mathcal{B} - c'(0))^2(\mathcal{C} - \mathcal{D})}{(\mathcal{C} - \mathcal{B})(\mathcal{D} - \mathcal{B})}$$

and if $\mathcal{B} = \infty$, then

$$\zeta_0 = a'(0)^2(\mathcal{C} - \mathcal{D}).$$

We deal with the cases where \mathcal{C} or \mathcal{D} is equal to \mathcal{B} as for theorem 3.32, using lemma 3.33.

We proceed in the same way for the flux of Killing fields associated to rotations. Then the expression of the flux polynomial follows from theorem 3.15.

Moreover, the vanishing of κ is equivalent to that of q_{-1} . \square

Remark 3.35. Corollary 5 in [RUY99] states that an embedded end has a vanishing flux matrix if and only if its Hopf differential is holomorphic at the end. This only occurs for horospherical ends with vanishing flux coefficient κ .

3.5.3 Flux for horospheres

Theorem 3.36. *Let E be an end which is part of a horosphere. Then the flux of the Killing field associated to the translation along any geodesic or to the rotation about any geodesic is zero, and the flux polynomial of E is zero.*

Proof. Let Γ be a generator of $\pi_1(E)$. Since a horosphere is simply connected, Γ is homotopic to zero in the horosphere. Consequently, the fluxes are zero. Thus the flux polynomial is also zero. \square

3.6 Geometric applications

Definition 3.37. Let n be a positive integer. Let Σ be a complete immersed Bryant surface. We say that Σ is a n -catenoidal surface if Σ has exactly n ends and each end is an embedded end of finite total curvature.

Proposition 3.38. *Let Σ be a n -catenoidal surface. Then the sum of the fluxes of any Killing field through its ends is zero.*

Proof. Let W be a compact set in \mathbb{H}^3 such that $\Sigma \setminus W$ is the disjoint union of the ends E_j of Σ and such that ∂W is a regular surface. Let U_j be the part of ∂W that is in the interior of E_j . Let Σ' be the union of $\Sigma \cap W$ and the U_j . We can calculate the flux of E_j using the curve ∂U_j and the surface U_j . Since Σ' is homologous to 0, the result follows from [KKMS92]. \square

Remark 3.39. The corresponding statement for the flux matrix is theorem 1 in [RUY99].

Corollary 3.40. *Let Σ be a n -catenoidal surface. Then the sum of the flux polynomials of its ends is zero.*

Proposition 3.41. *Let Σ be a 2-catenoidal surface. Assume that its ends E_1 and E_2 are catenoidal ends of growths $1 - \mu_1$ and $1 - \mu_2$, of asymptotic boundaries \mathcal{B}_1 and \mathcal{B}_2 , and of axes $(\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1)$ and $(\mathcal{A}_2, \mathcal{B}_2)$. Assume that $\mathcal{B}_1 \neq \mathcal{B}_2$. Then we have $\mu_1 = \mu_2$, $\mathcal{A}_1 = \mathcal{B}_2$ and $\mathcal{A}_2 = \mathcal{B}_1$ (that is to say, the two ends have the same growth, the same axis, but two different asymptotic boundaries).*

Proof. Without loss of generality, we can assume that $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{B}_1$ and \mathcal{B}_2 are different from ∞ .

The sum of the flux polynomials of the two ends is zero. In particular, these polynomials have the same roots. And since $\mathcal{B}_1 \neq \mathcal{B}_2$ we have $(\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1) = (\mathcal{B}_2, \mathcal{A}_2)$. Finally we obtain $1 - \mu_1^2 = 1 - \mu_2^2 = 0$, i.e $\mu_1 = \mu_2$. \square

Remark 3.42. Levitt and Rosenberg ([LR85]) have shown that if moreover Σ is properly embedded, then Σ is a surface of revolution, hence a catenoid cousin. It is essential that the end should be properly embedded: indeed Rossman and Sato ([RS98]) have constructed a one-parameter family of genus one 2-catenoidal surfaces with catenoidal ends.

Remark 3.43. The flux polynomial does not allow us to eliminate the case of a 2-catenoidal surface with two catenoidal ends having the same asymptotic boundary. We do not know if such a surface exists. If it exists, its ends have the same axis.

Remark 3.44. Genus zero 2-catenoidal surfaces have been classified in [UY93].

Proposition 3.45. *Let Σ be a 3-catenoidal surface. Assume that its three ends are catenoidal and that their asymptotic boundaries are distinct. Then, given the growths, the axes of the three ends are uniquely determined, they lie in the same plane and they are concurrent (possibly in the asymptotic boundary of \mathbb{H}^3).*

Proof. We use obvious notations. Up to an isometry of \mathbb{H}^3 , we can assume that $\mathcal{B}_1 = -1$, $\mathcal{B}_2 = 0$ and $\mathcal{B}_3 = 1$. We set $\sigma_j = 1 - \mu_j^2$. Considering the coefficients of the sum of the flux polynomials of the ends, we get

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_1}{\mathcal{A}_1 + 1} + \frac{\sigma_2}{\mathcal{A}_2} + \frac{\sigma_3}{\mathcal{A}_3 - 1} &= 0, \\ \sigma_1 \frac{\mathcal{A}_1 - 1}{\mathcal{A}_1 + 1} + \sigma_2 + \sigma_3 \frac{\mathcal{A}_3 + 1}{\mathcal{A}_3 - 1} &= 0, \\ -\sigma_1 \frac{\mathcal{A}_1}{\mathcal{A}_1 + 1} + \sigma_3 \frac{\mathcal{A}_3}{\mathcal{A}_3 - 1} &= 0. \end{aligned}$$

A computation gives

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= \frac{\sigma_1 - \sigma_2 + \sigma_3}{3\sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_3}, \\ \mathcal{A}_2 &= \frac{\sigma_2}{\sigma_3 - \sigma_1}, \\ \mathcal{A}_3 &= \frac{\sigma_1 - \sigma_2 + \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_2 - 3\sigma_3}. \end{aligned}$$

Consequently the points \mathcal{A}_j are uniquely determined. Moreover, all the \mathcal{A}_j and \mathcal{B}_j are real. This means they lie in the same plane.

All the geodesics $(\mathcal{A}_j, \mathcal{B}_j)$ lie in the plane $\{v = \text{Im } \zeta = 0\}$. Assume that \mathcal{A}_1 , \mathcal{A}_2 and \mathcal{A}_3 are all different from ∞ . Then the equations of the geodesics $(\mathcal{A}_1, -1)$, $(\mathcal{A}_2, 0)$ and $(\mathcal{A}_3, 1)$ are respectively

$$\begin{aligned} u^2 - u(\mathcal{A}_1 - 1) + w^2 - \mathcal{A}_1 &= 0, \\ u^2 - u\mathcal{A}_2 + w^2 &= 0, \\ u^2 - u(\mathcal{A}_3 + 1) + w^2 + \mathcal{A}_3 &= 0. \end{aligned}$$

Thus the abscissa of the intersection point of the first and the second axes is

$$u = \frac{\mathcal{A}_1}{1 - \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2},$$

and the abscissa of the intersection point of the second and the third axes is

$$u = \frac{\mathcal{A}_3}{1 - \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3}.$$

Hence the three axes are concurrent if and only if these two numbers are equal. The expressions of the \mathcal{A}_j computed above show that this is the case. \square

We proceed in the same manner if exactly one of the \mathcal{A}_j is equal to ∞ . If two of the \mathcal{A}_j are equal to ∞ , then we deduce from the expressions of the \mathcal{A}_j that the third one is also equal to ∞ ; in this case the axes are concurrent at ∞ . \square

Remark 3.46. Levitt and Rosenberg ([LR85]) have shown that if moreover Σ is properly embedded, then the plane $(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3)$ is a plane of symmetry of Σ . We can deduce from this that the axes lie in this plane.

Remark 3.47. A classification of irreducible genus zero 3-catenoidal surfaces is given in [UY00].

There is an analogue of proposition 3.45 for minimal surfaces in Euclidean space \mathbb{R}^3 , which was first noticed by Kusner in his thesis.

Proposition 3.48. *Let Σ be a minimal surface in \mathbb{R}^3 . Assume that Σ has finite total curvature, three ends and that all the ends are asymptotic to catenoids. Then the axes of the ends lie in the same plane and they are either parallel or concurrent.*

Proof. Let E_1, E_2, E_3 be the ends of Σ , F_j the flux of E_j and $T_j(P)$ its torque at the point P . We recall that the axis of E_j is the set of the points where T_j is zero, and that we have the formula $T_j(Q) = T_j(P) + F_j \times \overrightarrow{PQ}$. Moreover, the two following “balancing formulae” hold:

$$\begin{aligned} F_1 + F_2 + F_3 &= 0, \\ \forall P \in \mathbb{R}^3, T_1(P) + T_2(P) + T_3(P) &= 0. \end{aligned}$$

We can assume that the three axes are not all identical (otherwise the result is clear). For each $j \in 1, 2, 3$, let P_j be a point of the axis of E_j . Then the three axes are the straight lines $P_j + \mathbb{R}F_j$. We can assume that P_1, P_2 and P_3 do not lie on the same straight line, since the axes are distinct.

We have $0 = T_1(P_1) = -T_2(P_1) - T_3(P_1) = F_2 \times \overrightarrow{P_1P_2} + F_3 \times \overrightarrow{P_1P_3}$. Hence we get

$$0 = \langle T_1(P_1), \overrightarrow{P_1P_3} \rangle = \langle F_2 \times \overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3} \rangle = \det(F_2, \overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}).$$

This means that the axis of E_2 lies in the plane containing P_1, P_2 and P_3 . We obtain the same result for E_1 and E_3 . Hence the three axes are coplanar.

If the axes of E_1 and E_2 are parallel, then the axis of E_3 is also parallel to them since $F_3 = -F_1 - F_2$.

If the axes of E_1 and E_2 are not parallel, then they meet at a point P_0 . Then we get $T_3(P_0) = -T_1(P_0) - T_2(P_0) = 0$. So the three axes are concurrent at P_0 . \square

Remark 3.49. There are no genus zero 3-catenoidal minimal surfaces in \mathbb{R}^3 with parallel ends. This cannot occur by the classification of genus zero 3-catenoidal minimal surfaces in \mathbb{R}^3 done by Barbanell and Lopez. Flux for genus zero n -catenoidal minimal surfaces in \mathbb{R}^3 is treated in [KUY97].

Proposition 3.50. *There is no 2-catenoidal surface with one catenoidal end and one horospherical end.*

Proof. Assume that such a surface exists. Without loss of generality, we can assume that ∞ is not in the asymptotic boundary of the surface and that ∞ is not an extremity of the axis of the catenoidal end. Then the flux polynomials of its ends have the same roots. This is impossible since the flux polynomial of a catenoidal end has two simple roots and the flux polynomial of a horospherical is either zero or has a double root. \square

Remark 3.51. According to [CHR01] (theorem 12), if a catenoidal surface is properly embedded, then either it is a horosphere or all its ends are catenoidal.

Example 3.52. In [SN99], de Sousa Neto has constructed Costa-type Bryant surfaces. Let Σ be such a surface. It is a 3-catenoidal surface of positive genus. It has two catenoidal ends E_1 and E_2 , which have the same asymptotic boundary \mathcal{B} , and one horospherical end E_3 , whose asymptotic boundary \mathcal{B}_3 is different from \mathcal{B} . Let $(\mathcal{A}_1, \mathcal{B})$ and $(\mathcal{A}_2, \mathcal{B})$ be the axes of E_1 and E_2 , and $1 - \mu_1$ and $1 - \mu_2$ their respective growths. Since the sum of the flux polynomial of the ends is zero, and since $\mathcal{B} \neq \mathcal{B}_3$, we obtain that the flux coefficient of E_3 is zero, and then that $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$ and $\mu_1^2 + \mu_2^2 = 2$.

Chapitre 4

Minimal disks bounded by three straight lines in Euclidean space and trinoids in hyperbolic space

Prépublication de l’Institut de Mathématiques de Jussieu n° 348, juillet 2003.

Abstract. Following Riemann’s idea, we prove the existence of a minimal disk in Euclidean space bounded by three lines in generic position and with three helicoidal ends of angles less than π . In the case of general angles, we prove that there exist at most four such minimal disks, we give a sufficient condition of existence in terms of a system of three equations of degree 2, and we give explicit formulas for the Weierstrass data in terms of hypergeometric functions. Finally, we construct constant-mean-curvature-one trinoids in hyperbolic space by the method of the conjugate cousin immersion.

4.1 Introduction

In this paper we investigate minimal disks in Euclidean space \mathbb{R}^3 bounded by three straight lines in generic position (i.e., the lines do not intersect one another and do not lie in parallel planes, in particular they are not pairwise parallel). This problem was investigated by Riemann in his posthumous memoir [Rie68]. He actually introduced the spinor representation, the Gauss map and the Hopf differential of minimal surfaces in Euclidean space. He investigated the case of minimal surfaces bounded by a contour composed of pieces of straight lines (possibly going to infinity). He studied more precisely the cases where the contour is composed of 2, 3 or 4 lines.

However, his study was not complete and sometimes not precise; in particular, he did not deal with questions of orientations. The first aim of this paper is to complete Riemann’s study of minimal surfaces bounded by three straight lines. More precisely we will investigate minimal immersions x from $\Sigma = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z \geq 0\} \setminus \{0, 1\}$ into \mathbb{R}^3 mapping $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ and $(1, \infty)$ onto three lines (in generic position) and having helicoidal ends (in the sense explained in section 4.2.2) at 0, 1 and ∞ . The method is to study the Weierstrass data of x and to use the spinor representation.

We first prove that there exist at most four minimal immersions bounded by three given lines (in generic position) with helicoidal ends of given parameters (theorem 4.21). To do this, we use a result

by Riemann: he proved that the spinor data satisfy a differential equation involving the Schwarzian derivative of the Gauss map. This is a second order equation with five regular singularities. Studying the behaviour of the Schwarzian derivative at these singular points, we prove that the Schwarzian derivative only depends on two parameters that are related by two polynomial equations of degree 2, and thus that there are at most four possibilities for the Schwarzian derivative of the Gauss map.

We next study the explicit immersion given by Riemann in his memoir [Rie68]: he introduced spinors in terms of hypergeometric functions, but he did not check that they actually gave a minimal immersion bounded by given lines. We establish this fact in proposition 4.31. More precisely, given three lines in generic position, denoting by A, B, C the distances between the lines, and $\pi\alpha, \pi\beta, \pi\gamma$ the angles of the ends (with signs as explained in section 4.2.2), we prove that to each real solution (p, q, r) (up to a sign) of the system

$$\begin{cases} p^2 - \alpha^2(p+q+r)^2 &= \varepsilon \frac{A\alpha}{2\pi} \\ q^2 - \beta^2(p+q+r)^2 &= \varepsilon \frac{B\beta}{2\pi} \\ r^2 - \gamma^2(p+q+r)^2 &= \varepsilon \frac{C\gamma}{2\pi} \end{cases}$$

where $\varepsilon \in \{1, -1\}$ (depending on the geometric configuration of the lines and on the angles) corresponds a minimal immersion (with possibly a singular point when the Hopf differential has a double zero, which is a non-generic situation) bounded by these lines and with helicoidal ends of parameters $(A, \alpha), (B, \beta), (C, \gamma)$ (theorem 4.33). In particular we prove the existence of at least one minimal immersion in the case where the angles are less than π (corollary 4.34).

However we do not know if we obtain all the solutions in this way.

Figure 4.1 is a picture of a minimal surface bounded by three lines with helicoidal ends, drawn with the software “Evolver”.

In the last part of this paper, we construct constant-mean-curvature-one (CMC-1) trinoids in hyperbolic space \mathbb{H}^3 applying the conjugate cousin method to minimal disks bounded by three straight lines in \mathbb{R}^3 . CMC-1 surfaces in \mathbb{H}^3 are called Bryant surfaces. Bryant proved in [Bry87] that they are closely related to minimal surfaces in \mathbb{R}^3 (see also [UY93] and [Ros02]); in particular there exists a representation in terms of holomorphic data analogous to Weierstrass representation.

Irreducible trinoids in \mathbb{H}^3 were first classified by Umehara and Yamada in [UY00], and then by Bobenko, Pavlyukevich and Springborn in [BPS02], using different techniques: their method has some similarities with that used in this paper to find minimal surfaces bounded by three lines in \mathbb{R}^3 (they use a spinor representation for Bryant surfaces and they obtain explicit formulas in terms of hypergeometric functions). The technique of the conjugate cousin immersion was used by Karcher in [Kar01] to construct trinoids with dihedral symmetry. Here we use this technique to construct general irreducible trinoids with a symmetry plane (actually every irreducible trinoid has a symmetry plane by the classification of [UY00]). We also prove that the asymptotic boundary points of the ends of these trinoids are distinct (except in exceptional cases) (theorem 4.49). Finally we give examples of minimal disks bounded by three lines whose conjugate cousins are invariant by some parabolic isometries.

Acknowledgements. The author is grateful to Pascal Collin for his explanations on Riemann’s memoir [Rie68], and to Harold Rosenberg for submitting this problem and for discussions about this paper.

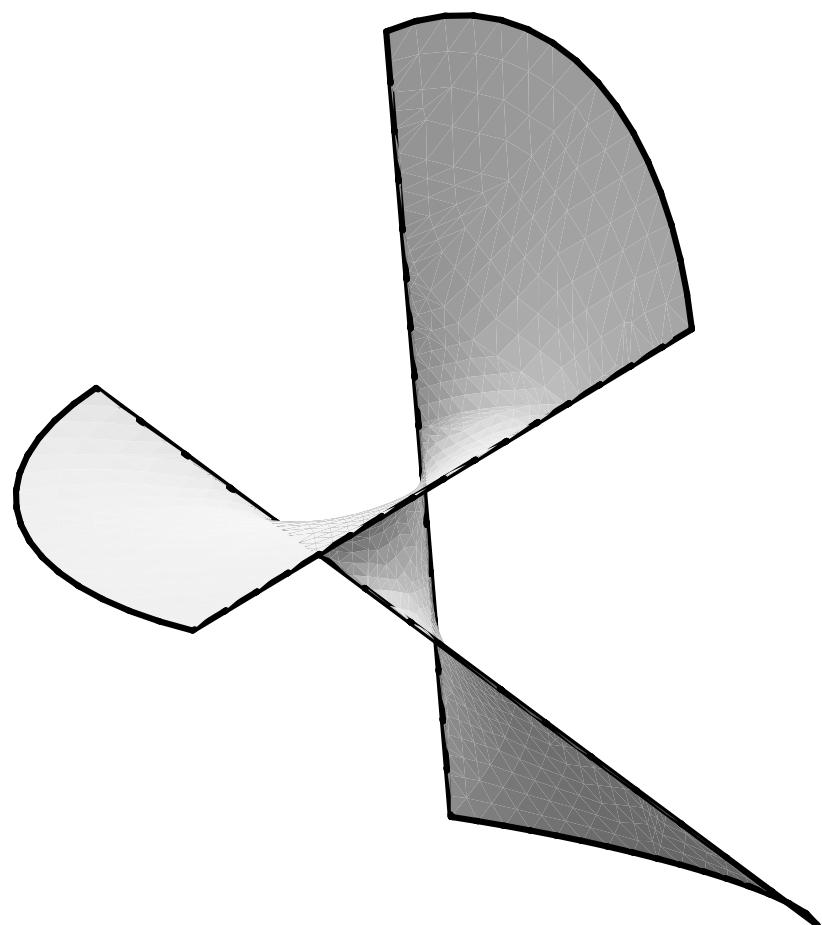


Figure 4.1: A minimal surface with three helicoidal ends.

4.2 Preliminaries

In all this paper, we will set $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$,

$$\begin{aligned}\Sigma &= \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \geq 0\} \setminus \{0, 1\}, & \Sigma_0 &= \{z \in \Sigma \mid |z| < 1\}, \\ \Sigma_1 &= \{z \in \Sigma \mid |z - 1| < 1\}, & \Sigma_\infty &= \{z \in \Sigma \mid |z| > 1\}.\end{aligned}$$

The canonical scalar product of \mathbb{R}^3 is denoted by $\langle \cdot, \cdot \rangle$. If D is a straight line in \mathbb{R}^3 , then D^\perp denotes the set of unit vectors that are orthogonal to D . The canonical basis of \mathbb{R}^3 will be denoted by $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$:

$$\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \quad \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \quad \vec{e}_3 = (0, 0, 1).$$

We define the logarithm and non-integer powers on Σ in the following way. Let $\kappa \in \mathbb{R}$. If $z = \rho e^{i\theta} \in \Sigma$ with $\rho > 0$ and $\theta \in [0, \pi]$, then $\ln z = \ln \rho + i\theta$ and $z^\kappa = \rho^\kappa e^{i\kappa\theta}$. If $z \in \Sigma$ and $z - 1 = \rho e^{i\theta}$ with $\rho > 0$ and $\theta \in [0, \pi]$, then $(z - 1)^\kappa = \rho^\kappa e^{i\kappa\theta}$ and $(1 - z)^\kappa = \rho^\kappa e^{i\kappa(\theta-\pi)} = e^{-i\pi\kappa}(z - 1)^\kappa$ (this convention is chosen in order that $(1 - z)^\kappa$ is real when z is real and less than 1).

Finally, \mathcal{D} denotes the set of the triples of straight lines in \mathbb{R}^3 that are neither pairwise concurrent, neither pairwise parallel, nor lying in parallel planes, modulo direct isometries of \mathbb{R}^3 .

4.2.1 Weierstrass representation

In this section we recall basic facts about Weierstrass representation and we introduce some notations.

Let \mathcal{S} be a Riemann surface with boundary, and $x = (x_1, x_2, x_3) : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}^3$ a conformal minimal immersion. Then we have

$$x(z) = x(z_0) + \operatorname{Re} \int_{z_0}^z ((1 - g^2), i(1 + g^2), 2g) \omega$$

where z_0 is a fixed point in \mathcal{S} and (g, ω) the Weierstrass data of x : g is a meromorphic function on \mathcal{S} and ω a holomorphic 1-form on \mathcal{S} . The poles of g are the zeros of ω , and z is a pole of g of order k if and only if z is a zero of ω of order $2k$. Conversely, if g and ω satisfy this condition, then they define a minimal immersion.

We define $X = (X_1, X_2, X_3) : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}^3$ by

$$X(z) = x(z_0) + \int_{z_0}^z ((1 - g^2), i(1 + g^2), 2g) \omega.$$

We have

$$dx_1 + i dx_2 = \bar{\omega} - g^2 \omega, \quad dx_3 = \operatorname{Re}(2g\omega).$$

The Gauss map of x is

$$N = \left(\frac{2g}{|g|^2 + 1}, \frac{|g|^2 - 1}{|g|^2 + 1} \right).$$

The orientations induced on $x(\mathcal{S})$ by the Gauss map N and the immersion x are compatible. The function g is the composition of the Gauss map and the stereographic projection with respect to the north pole of the sphere. If D is a line parallel to the vector $(\cos(\pi\alpha), \sin(\pi\alpha), 0)$ for $\alpha \in \mathbb{R}$, then the circle D^\perp corresponds to $g \in ie^{i\pi\alpha}\bar{\mathbb{R}}$.

If f is a meromorphic function on an open set $U \subset \mathcal{S}$, we define its Schwarzian derivative with respect to a local conformal coordinate z by

$$S_z f = \left(\left(\frac{f''}{f'} \right)' - \frac{1}{2} \left(\frac{f''}{f'} \right)^2 \right) dz^2.$$

If ζ is another local conformal coordinate, then $S_z f = S_\zeta f + S_z \zeta$. If f is regular at a point z_1 , then $S_z f$ is holomorphic at z_1 ; if f has a branch point of order $j-1$ at z_1 with $j \geq 2$, then $S_z f$ has a pole of order 2 at z_1 , and its coefficient of order -2 is equal to $\frac{1-j^2}{2}$.

The Hopf differential is the holomorphic 2-form on \mathcal{S} defined by

$$Q = \omega dg = \frac{1}{2} dX_3 \frac{dg}{g}.$$

The forms Q and $S_z g$ are invariant by a direct isometry of \mathbb{R}^3 . The first and second fundamental forms of the surface given by

$$I = (1 + |g|^2)^2 |\omega|^2, \quad II = -2 \operatorname{Re} Q.$$

Proposition 4.1. *Let $z \in \mathcal{S}$ and $k \in \mathbb{N}^*$. Then z is a zero of Q of order k if and only if z is a branch point of g of order k . This happens if and only if one of the following conditions holds:*

1. z is a zero of g of order $k+1$,
2. z is a pole of g of order $k+1$,
3. z is a zero of $\frac{dg}{g}$ of order k .

Proof. If z is a zero of g of order $d \in \mathbb{N}^*$, then it is not a zero of ω and it is a simple pole of $\frac{dg}{g}$. Consequently it is a zero of Q of order k if and only if $k = d-1$.

If z is a pole of g of order $d \in \mathbb{N}^*$, then it is a zero of ω of order $2d$ and it is a simple pole of $\frac{dg}{g}$. Consequently it is a zero of Q of order k if and only if $k = d-1$.

If z is neither a zero nor a pole of g , then it is not a zero of ω , and consequently it is a zero of Q of order k if and only if it is a zero of $\frac{dg}{g}$ of order k . \square

We recall the spinor representation of a minimal surface (see [KS96]):

$$x(z) = x(z_0) + \operatorname{Re} \int_{z_0}^z (\xi_1^2 - \xi_2^2, i(\xi_1^2 + \xi_2^2), 2\xi_1 \xi_2)$$

where ξ_1 and ξ_2 are holomorphic sections of a spin structure. These spinors satisfy

$$g = \frac{\xi_2}{\xi_1}, \quad \omega = \xi_1^2.$$

Two such holomorphic spinors define a minimal immersion if and only if they do not have common zeros (if they have a common zero, then the map x is not an immersion at this point). We will call (ξ_1, ξ_2) the spinor data of x .

4.2.2 Helicoidal ends

Most of the results of this section are contained in Riemann's memoir [Rie68]. Here we prove these results using modern formalism, and we give precise definitions for helicoidal ends and the signs of distances and angles.

Definition 4.2. Let D_1 and D_2 be two nonparallel and nonconcurrent oriented straight lines, and let \vec{u}_1 and \vec{u}_2 be unit vectors inducing the orientations of D_1 and D_2 . Then the unit vector

$$\vec{v} = \frac{\vec{u}_1 \times (-\vec{u}_2)}{\|\vec{u}_1 \times \vec{u}_2\|}$$

is called the vector associated to the pair (D_1, D_2) of oriented straight lines.

Definition 4.3. The signed distance of D_1 and D_2 is the number $D(D_1, D_2) = < \overrightarrow{p_1 p_2}, \vec{v} >$ where $p_1 \in D_1$ and $p_2 \in D_2$ (this number does not depend on the choices of p_1 and p_2 , and $|D(D_1, D_2)|$ is the distance between D_1 and D_2).

Definition 4.4. Let U be a neighbourhood of 0 in \mathbb{C} that is symmetric with respect to the real axis (i.e., $z \in U \iff \bar{z} \in U$), $\Omega = \Sigma \cap U$, $\Omega_1 = \Omega \cap (-\infty, 0)$, $\Omega_2 = \Omega \cap (0, +\infty)$ and $x : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ be a conformal minimal immersion that is complete at 0. Let D_1 and D_2 be two nonparallel and nonconcurrent oriented straight lines, let \vec{u}_1 and \vec{u}_2 be unit vectors inducing the orientations of D_1 and D_2 , and let \vec{v} be the vector associated to (D_1, D_2) .

We say that the immersion x has an end (at $z = 0$) bounded by the pair of oriented lines (D_1, D_2) if

1. the immersion x maps Ω_1 to a part of D_1 and $< x(z), \vec{u}_1 > \rightarrow +\infty$ when $z \rightarrow 0$ with z real and negative,
2. the immersion x maps Ω_2 to a part of D_2 and $< x(z), \vec{u}_2 > \rightarrow -\infty$ when $z \rightarrow 0$ with z real and positive.

We say that the immersion x has a helicoidal end (at $z = 0$) bounded by the pair of oriented lines (D_1, D_2) if moreover the two following conditions are satisfied:

3. the Gauss map of x has a limit when $z \rightarrow 0$,
4. the quantity $< x(z), \vec{v} >$ is bounded when $z \rightarrow 0$.

It will follow from the proof of lemma 4.7 that a helicoidal end is actually asymptotic to a helicoid.

Lemma 4.5. Assume that x has a helicoidal end bounded by (D_1, D_2) . Let N be the Gauss map of x . Then the limit point of N at 0 is $N(0) = \vec{v}$ or $N(0) = -\vec{v}$.

Proof. We have $N(z) \in D_1^\perp$ if $z \in \Omega_1$ and $N(z) \in D_2^\perp$ if $z \in \Omega_2$, so $N(0) \in D_1^\perp \cap D_2^\perp$. □

Lemma 4.6. Assume that x has an end bounded by (D_1, D_2) . Let (g, ω) be the Weierstrass data of x , and Q its Hopf differential. Then Q extends to a holomorphic 2-form on $U \setminus \{0\}$ and $S_z g$ extends to a meromorphic 2-form on $U \setminus \{0\}$.

Proof. Since a direct isometry of \mathbb{R}^3 does not change Q and $S_z g$, we can assume that D_2 is the x_1 -axis. Then x_3 is constant on Ω_2 , so $x'_3 = 0$ on Ω_2 , and thus $X'_1(z) \in i\mathbb{R}$ for $z \in \Omega_2$. And the Gauss map N is normal to the x_1 -axis on Ω_2 , so $g(\Omega_2) \subset i\bar{\mathbb{R}}$, and thus $\frac{g'}{g}(z) \in \bar{\mathbb{R}}$ for $z \in \Omega_2$. Thus $\frac{Q}{dz^2} = \frac{1}{2}X'_3\frac{g'}{g}$ is purely imaginary on Ω_2 (since it cannot be infinite). The same holds on Ω_1 . Thus we can apply the Schwarz reflection to $\frac{Q}{dz^2}$ (which is up to now defined on Ω), and we obtain a holomorphic 2-form Q defined on $U \setminus \{0\}$.

In the same way, assuming that D_2 is the x_1 -axis, we have $\frac{g''}{g'}(z) \in \bar{\mathbb{R}}$ for $z \in \Omega_2$, and so $(\frac{g''}{g'})' - \frac{1}{2}(\frac{g''}{g'})^2$ is real or infinite on Ω_2 . The same holds on Ω_1 , and we obtain a meromorphic 2-form $S_z g$ defined on $U \setminus \{0\}$ by Schwarz reflection. \square

Lemma 4.7. *Assume that x has an end bounded by (D_1, D_2) . Let (g, ω) be the Weierstrass data of x , and Q its Hopf differential. If x has a helicoidal end bounded by (D_1, D_2) , then there exist $A \in \mathbb{R}^*$ and $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ such that*

$$Q \sim i\frac{A\alpha}{2\pi}z^{-2}dz^2, \quad S_z g \sim \frac{1-\alpha^2}{2}z^{-2}dz^2 \quad (4.1)$$

when $z \rightarrow 0$.

The pair (A, α) is then defined uniquely up to a sign. Moreover, if $\pi\alpha_0$ denotes the angle of \vec{u}_1 and $-\vec{u}_2$ with $\alpha_0 \in (0, 1)$, then we have either $\alpha \in \alpha_0 + 2\mathbb{Z}$ and $A = -D(D_1, D_2)$, or $-\alpha \in \alpha_0 + 2\mathbb{Z}$ and $A = D(D_1, D_2)$.

We say that x has a helicoidal end of parameters (A, α) , and that $\pi\alpha$ is the angle of the helicoidal end.

Proof. Since a direct isometry of \mathbb{R}^3 does not change the 2-forms Q and $S_z g$, we can assume that $\vec{u}_1 = (\cos(\pi\alpha_0), \sin(\pi\alpha_0), 0)$, $\vec{u}_2 = -\vec{e}_1$, D_1 is the line $(0, 0, -A) + \mathbb{R}\vec{u}_1$ and D_2 the x_1 -axis. Then we have $\vec{v} = -\vec{e}_3$, and so $g(0) = 0$ or $g(0) = \infty$ by lemma 4.5. Moreover we have $D(D_1, D_2) = -A$.

Set $h(z) = z^{-\alpha_0}g(z)$ for $z \in \Omega$. Then $h(z) \in i\bar{\mathbb{R}}$ if $z \in \Omega_1$ (since $N(z) \in D_1^\perp$) or $z \in \Omega_2$ (since $N(z) \in D_2^\perp$). Thus h extends to a meromorphic map on $U \setminus \{0\}$ by Schwarz reflection principle. Since g has a limit at 0, h has no essential singularity at 0.

Thus there exist a integer j and a nonzero real number ρ such that $g(z) \sim i\rho z^{\alpha_0+j}$. We set $\alpha = \alpha_0 + j$. We compute that $S_z g \sim \frac{1-\alpha^2}{2}z^{-2}dz^2$.

Let $h_1(z) = X_3(z) - i\frac{A}{\pi}\ln z$ for $z \in \Omega$, with X_3 as in section 4.2.1. Then, since $x_3 = \operatorname{Re} X_3$, we have $h_1(z) \in i\mathbb{R}$ if $z \in \Omega_1$ or $z \in \Omega_2$. Thus h_1 extends to a meromorphic map on $U \setminus \{0\}$ by Schwarz reflection principle. Moreover, $x_3(z) = -\langle x(z), \vec{v} \rangle$ is bounded in the neighbourhood of 0 by condition 4 in definition 4.4, so h_1 is holomorphic at 0.

Hence we have $dX_3 \sim i\frac{A}{\pi}z^{-1}dz$, and so $Q = \frac{1}{2}dX_3\frac{dg}{g} \sim i\frac{A\alpha}{2\pi}z^{-2}dz^2$.

We now prove that the integer $j = \alpha - \alpha_0$ is even. We have

$$d(x_1 + ix_2) = \bar{\omega} - g^2\omega = \frac{\overline{dX_3}}{2\bar{g}} - \frac{gdX_3}{2} \sim \frac{A}{2\pi}(\rho^{-1}\bar{z}^{-1-\alpha}\overline{dz} + \rho z^{-1+\alpha}dz).$$

We set $z = t + i\tau$ with t and τ real. We have $\langle x, \vec{u}_1 \rangle = \operatorname{Re}((x_1 + ix_2)e^{-i\pi\alpha_0})$, so for $t < 0$ we have

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle x, \vec{u}_1 \rangle \sim -\frac{A}{2\pi} \cos(\pi(\alpha - \alpha_0))(\rho^{-1}|t|^{-1-\alpha} + \rho|t|^{-1+\alpha}).$$

Thus condition 1 in definition 4.4 implies that $-A\rho \cos(\pi(\alpha - \alpha_0)) > 0$. And we have $\langle x, -\vec{u}_2 \rangle = x_1 = \operatorname{Re}(x_1 + ix_2)$, so for $t > 0$ we have

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle x, -\vec{u}_2 \rangle \sim \frac{A}{2\pi} (\rho^{-1}t^{-1-\alpha} + \rho t^{-1+\alpha}).$$

Thus condition 2 in definition 4.4 implies that $A\rho < 0$. We conclude that $\cos(\pi(\alpha - \alpha_0)) > 0$, that is $\alpha - \alpha_0 \in 2\mathbb{Z}$.

Finally, it is clear that (4.1) defines (A, α) uniquely up to a sign. \square

Let x be an immersion having a helicoidal end of parameters (A, α) bounded by two lines D_1 and D_2 that are as in the proof of this lemma. Without loss of generality we can assume that $\alpha \in \alpha_0 + 2\mathbb{Z}$, and thus $A = -D(D_1, D_2)$. Then $\alpha > 0$ means that the Gauss map at 0 points down and that we turn in the clockwise direction when we go from D_1 to D_2 on the minimal surface, and $\alpha < 0$ means that the Gauss map at 0 points up and that we turn in the counter-clockwise direction when we go from D_1 to D_2 on the minimal surface. On the other hand, $A > 0$ means that D_1 lies below D_2 , and $A < 0$ means that D_1 lies above D_2 . Thus, $A\alpha > 0$ means that we go down when we turn in the counter-clockwise direction on the minimal surface, and $A\alpha < 0$ means that we go up when we turn in the counter-clockwise direction on the minimal surface. This last fact remains true if $-\alpha \in \alpha_0 + 2\mathbb{Z}$. Hence we say that x has a left-helicoidal end (respectively a right-helicoidal end) if $A\alpha > 0$ (respectively $A\alpha < 0$) (see figures 4.2, 4.3, 4.4 and 4.5).

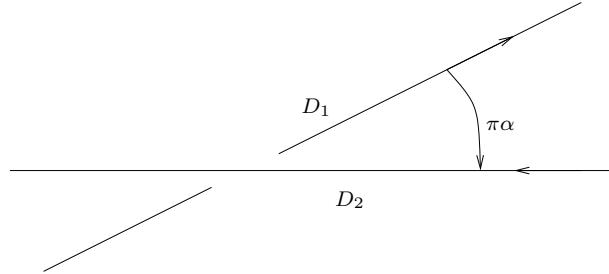


Figure 4.2: $A > 0$ and $\alpha > 0$ (left-helicoidal end).

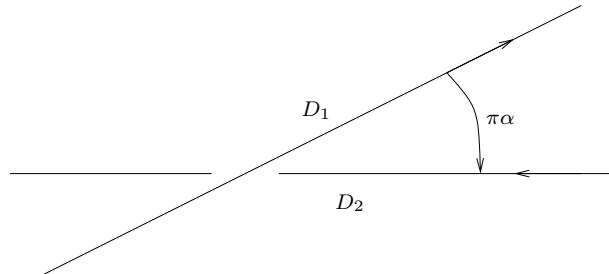


Figure 4.3: $A < 0$ and $\alpha > 0$ (right-helicoidal end).

Remark 4.8. This definition and these lemmas extend for ends at a point $z_1 \in \mathbb{R}$.

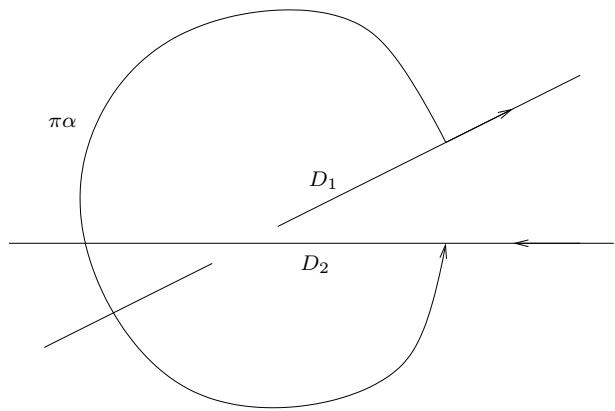


Figure 4.4: $A > 0$ and $\alpha < 0$ (right-helicoidal end).

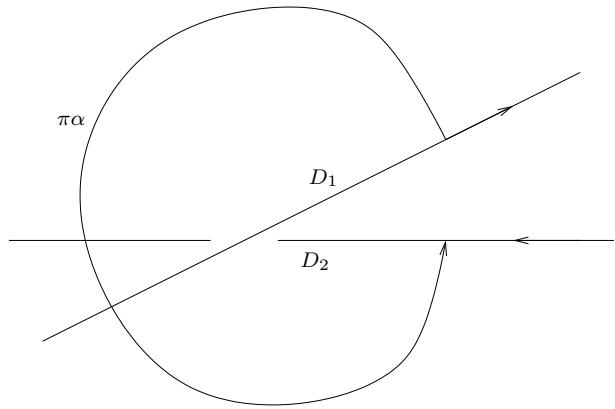


Figure 4.5: $A < 0$ and $\alpha < 0$ (left-helicoidal end).

They also extend for end at ∞ using the change of parameters $\zeta = -z^{-1}$, which maps $\{\text{Im } z > 0\}$ onto itself. We get

$$Q \sim i \frac{A\alpha}{2\pi} z^{-2} dz^2, \quad S_z g \sim \frac{1-\alpha^2}{2} z^{-2} dz^2$$

when $z \rightarrow \infty$ (because $S_\zeta g = S_z g + S_z \zeta$ and $S_z \zeta = 0$).

4.3 Minimal surfaces bounded by three lines with helicoidal ends

In this section we will study minimal disks bounded by three lines with three helicoidal ends when the triple of lines belong to \mathcal{D} , which is a generic property.

4.3.1 Geometric configuration

An element of \mathcal{D} has a representant that is described as follows.

Let D_1 be the horizontal line oriented by $\vec{u}_1 = (\cos(\pi\alpha_0), \sin(\pi\alpha_0), 0)$ for some $\alpha_0 \in (0, 1)$, D_2 the x_1 -axis oriented by $\vec{u}_2 = -\vec{e}_1$, and D_3 the line oriented by $\vec{u}_3 = (\cos(\pi\gamma') \sin \kappa, -\sin(\pi\gamma') \sin \kappa, \cos \kappa)$ for some $\gamma' \in \mathbb{R}$ and $\kappa \in \mathbb{R}$ (the number $\pi\gamma'$ is the angle of the projections of D_2 and D_3 on the horizontal plane, except if D_3 is vertical, in what case it can take any value).

The number $\pi\alpha_0$ is the geometric angle of \vec{u}_1 and $-\vec{u}_2$. Let us denote by $\pi\beta_0$ with $\beta_0 \in (0, 1)$ the geometric angle of \vec{u}_3 and $-\vec{u}_1$, and by $\pi\gamma_0$ with $\gamma_0 \in (0, 1)$ the geometric angle of \vec{u}_2 and $-\vec{u}_3$ (see figure 4.6).

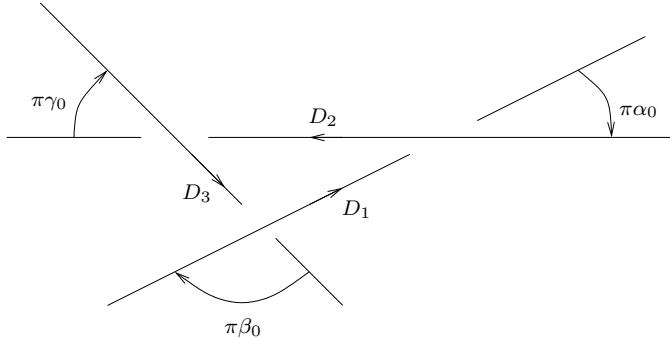


Figure 4.6: Three lines in generic position.

We denote by \vec{v}_0 , \vec{v}_1 and \vec{v}_∞ the vectors associated to (D_1, D_2) , (D_2, D_3) and (D_3, D_1) (see definition 4.2):

$$\vec{v}_0 = -\frac{\vec{u}_1 \times \vec{u}_2}{\|\vec{u}_1 \times \vec{u}_2\|} = -\vec{e}_3, \quad \vec{v}_1 = -\frac{\vec{u}_2 \times \vec{u}_3}{\|\vec{u}_2 \times \vec{u}_3\|}, \quad \vec{v}_\infty = -\frac{\vec{u}_3 \times \vec{u}_1}{\|\vec{u}_3 \times \vec{u}_1\|}.$$

We set $A = -D(D_1, D_2)$, $B = -D(D_3, D_1)$ and $C = -D(D_2, D_3)$. Finally we denote by ε_0 the sign of $\det(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$.

Proposition 4.9. *The map $L : (D_1, D_2, D_3) \mapsto (\alpha_0, \gamma_0, \beta_0, -A, -C, -B, \varepsilon_0)$ is a bijection from \mathcal{D} onto $\mathcal{K} \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \times \{1, -1\}$ where \mathcal{K} is the set of the triples $(\alpha_0, \gamma_0, \beta_0) \in \mathbb{R}^3$ satisfying*

$$\alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0 > 1, \quad -\alpha_0 + \beta_0 + \gamma_0 < 1, \quad \alpha_0 - \beta_0 + \gamma_0 < 1, \quad \alpha_0 + \beta_0 - \gamma_0 < 1. \quad (4.2)$$

Proof. The fact that $(\alpha_0, \gamma_0, \beta_0) \in \mathcal{K}$ is a consequence of Gauss-Bonnet formula applied to the spherical triangles on \mathbb{S}^2 bounded by the circles D_1^\perp , D_2^\perp and D_3^\perp .

Conversely, let $(\alpha_0, \gamma_0, \beta_0) \in \mathcal{K}$, $A, B, C \in \mathbb{R}^*$ and $\varepsilon_0 \in \{1, -1\}$. Then there exists a spherical triangle of angles $\pi\alpha_0$, $\pi\beta_0$ and $\pi\gamma_0$. The three corresponding oriented circles define unit vectors \vec{u}_1 , \vec{u}_2 and \vec{u}_3 uniquely up to a direct isometry of \mathbb{R}^3 . If the sign of $\det(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ is not equal to ε_0 , then we replace these vectors by their images by an indirect isometry of \mathbb{R}^3 (which does not change the angles of the spherical triangle). Up to now, \vec{u}_1 , \vec{u}_2 and \vec{u}_3 are uniquely determined.

Now we consider three lines D_1 , D_2 and D_3 in \mathbb{R}^3 oriented by \vec{u}_1 , \vec{u}_2 and \vec{u}_3 . We translate D_2 in the direction of $\vec{u}_1 \times \vec{u}_2$ in order that $D(D_1, D_2) = -A$. Then we translate D_3 in the direction of $\vec{u}_1 \times \vec{u}_3$ in order that $D(D_3, D_1) = -B$. Finally we translate D_3 in the direction of \vec{u}_1 in order that $D(D_2, D_3) = -C$ (this operation does not change $D(D_3, D_1)$). The lines D_1 , D_2 and D_3 are determined uniquely up to a direct isometry of \mathbb{R}^3 . This completes the proof. \square

A precise study of the space of triples of lines in generic position, and in particular a more detailed proof of proposition 4.9, can be found in [Bal03].

Definition 4.10. Two triples in \mathcal{D} are called dual configurations if their parameters only differ by the sign of ε_0 .

The dual configuration of that of figure 4.6 is shown on figure 4.7; in both configurations the lines D_1 and D_2 are horizontal, but D_3 “goes down” on figure 4.6 and “goes up” on figure 4.7.

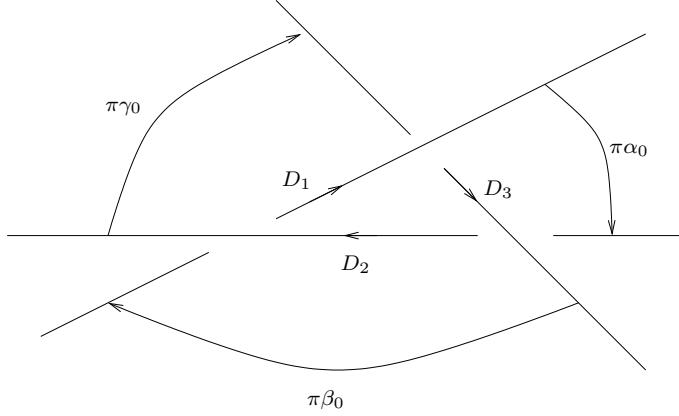


Figure 4.7: The dual configuration of that of figure 4.6.

Remark 4.11. An indirect isometry of \mathbb{R}^3 changes A , B , C and ε_0 into their opposites. The dual configuration of a triple is not the image of this triple by a symmetry, but the directions of the straight lines are symmetric.

We set $\beta' = 1 - \alpha - \gamma'$ (the number $\pi\beta'$ is the angle of the projections of D_1 and D_3 on the horizontal plane, except if D_3 is vertical, in what case it can take any value).

Since \vec{v}_1 and $-\vec{e}_3$ are normal to the x_1 -axis, there exists a rotation R about the oriented x_1 -axis that maps \vec{v}_1 onto $-\vec{e}_3$; we denote by θ its angle. We have $R(\vec{u}_2) = \vec{u}_2$ and $R(\vec{u}_3) = (\cos(\pi\gamma_0), -\sin(\pi\gamma_0), 0)$. In the same way, \vec{v}_∞ and $-\vec{e}_3$ are normal to D_1 , so there exists a rotation \hat{R} about the oriented line D_1 that maps \vec{v}_∞ onto $-\vec{e}_3$; we denote by $\hat{\theta}$ its angle. We denote by T the rotation of angle $-\pi\alpha_0$ with respect to the x_3 -axis. We have $T \circ \hat{R}(\vec{u}_1) = \vec{e}_1$, $T \circ \hat{R}(\vec{u}_3) = (\cos(\pi\beta_0), -\sin(\pi\beta_0), 0)$ and $T \circ \hat{R}(\vec{v}_\infty) = -\vec{e}_3$.

Finally we set $t = \tan \frac{\theta}{2}$ and $\hat{t} = \tan \frac{\hat{\theta}}{2}$.

Lemma 4.12. *We have*

$$\cos \theta = \frac{\cos(\pi\beta_0) + \cos(\pi\alpha_0) \cos(\pi\gamma_0)}{\sin(\pi\alpha_0) \sin(\pi\gamma_0)}, \quad \cos \hat{\theta} = \frac{\cos(\pi\gamma_0) + \cos(\pi\alpha_0) \cos(\pi\beta_0)}{\sin(\pi\alpha_0) \sin(\pi\beta_0)}.$$

Proof. We notice that the numbers $\sin(\pi\alpha_0)$, $\sin(\pi\beta_0)$ and $\sin(\pi\gamma_0)$ are positive.

We have

$$\begin{aligned} \cos(\pi\gamma_0) &= \langle \vec{u}_2, -\vec{u}_3 \rangle = \cos(\pi\gamma') \sin \kappa, \\ \sin(\pi\gamma_0) &= \sqrt{1 - \cos^2(\pi\gamma_0)} = \sqrt{\sin^2(\pi\gamma') \sin^2 \kappa + \cos^2 \kappa}, \\ \cos(\pi\beta_0) &= \langle \vec{u}_3, -\vec{u}_1 \rangle = -\cos(\pi\alpha_0) \cos(\pi\gamma') \sin \kappa + \sin(\pi\alpha_0) \sin(\pi\gamma') \sin \kappa. \end{aligned}$$

We compute that $\vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \sin(\pi\alpha_0) \vec{e}_3$ and $\vec{u}_2 \times \vec{u}_3 = (0, \cos \kappa, \sin(\pi\gamma') \sin \kappa)$. Thus we have

$$\cos \theta = \frac{\langle \vec{u}_1 \times \vec{u}_2, \vec{u}_2 \times \vec{u}_3 \rangle}{\|\vec{u}_1 \times \vec{u}_2\| \cdot \|\vec{u}_2 \times \vec{u}_3\|} = \frac{\sin(\pi\gamma') \sin \kappa}{\sqrt{\sin^2(\pi\gamma') \sin^2 \kappa + \cos^2 \kappa}}.$$

Finally we get

$$\cos(\pi\beta_0) = -\cos(\pi\alpha_0) \cos(\pi\gamma_0) + \sin(\pi\alpha_0) \sin(\pi\gamma_0) \cos \theta.$$

This proves the first formula.

And we have

$$\begin{aligned} \cos(\pi\beta_0) &= \cos(\pi\beta') \sin \kappa, \\ \sin(\pi\beta_0) &= \sqrt{1 - \cos^2(\pi\beta_0)} = \sqrt{\sin^2(\pi\beta') \sin^2 \kappa + \cos^2 \kappa}. \end{aligned}$$

We compute that $\vec{u}_3 \times \vec{u}_1 = (-\sin(\pi\alpha_0) \cos \kappa, \cos(\pi\alpha_0) \cos \kappa, \sin(\pi\beta') \sin \kappa)$. Thus we have

$$\cos \hat{\theta} = \frac{\langle \vec{u}_1 \times \vec{u}_2, \vec{u}_3 \times \vec{u}_1 \rangle}{\|\vec{u}_1 \times \vec{u}_2\| \cdot \|\vec{u}_3 \times \vec{u}_1\|} = \frac{\sin(\pi\beta') \sin \kappa}{\sqrt{\sin^2(\pi\beta') \sin^2 \kappa + \cos^2 \kappa}}.$$

Finally we have

$$\begin{aligned} \cos(\pi\gamma_0) &= -\cos(\pi(\alpha_0 + \beta')) \sin \kappa \\ &= -\cos(\pi\alpha_0) \cos(\pi\beta') \sin \kappa + \sin(\pi\alpha_0) \sin(\pi\beta') \sin \kappa \\ &= -\cos(\pi\alpha_0) \cos(\pi\beta_0) + \sin(\pi\alpha_0) \sin(\pi\beta_0) \cos \hat{\theta}. \end{aligned}$$

This proves the second formula. \square

Lemma 4.13. *The signs of $\cos \kappa$, $\sin \theta$, $\sin \hat{\theta}$, t and \hat{t} are equal to ε_0 .*

Proof. Since $\sin \theta = \frac{2t}{1+t^2}$, t and $\sin \theta$ have the same sign. In the same way \hat{t} and $\sin \hat{\theta}$ have the same sign.

By definition of θ we have $\vec{v}_1 \times (-\vec{e}_3) = \sin \theta \vec{e}_1$. We compute that

$$\vec{v}_1 \times (-\vec{e}_3) = \frac{\cos \kappa}{\sqrt{\sin^2(\pi\gamma') \sin^2 \kappa + \cos^2 \kappa}} \vec{e}_1,$$

so $\cos \kappa$ and $\sin \theta$ have the same sign.

In the same way we have $\vec{v}_\infty \times (-\vec{e}_3) = \sin \hat{\theta} \vec{u}_1$, so

$$\sin \hat{\theta} = \det(\vec{v}_\infty, -\vec{e}_3, \vec{u}_1) = \frac{\cos \kappa}{\sqrt{\sin^2(\pi\beta') \sin^2 \kappa + \cos^2 \kappa}}.$$

Finally we have $\det(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) = \sin(\pi\alpha_0) \cos \kappa$. □

4.3.2 The Hopf differential and the spinor data

Proceeding as for lemma 4.6, we get the following result.

Lemma 4.14. *Let $x : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ be a conformal minimal immersion bounded by three straight lines. Let (g, ω) be its Weierstrass data. Then its Hopf differential Q extends to a holomorphic 2-form on $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ and the Schwarzian derivative $S_z g$ of its Gauss map extends to a meromorphic 2-form on $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$.*

From now on we consider a triple of lines $(D_1, D_2, D_3) \in \mathcal{D}$. Let

$$L(D_1, D_2, D_3) = (\alpha_0, \gamma_0, \beta_0, -A, -C, -B, \varepsilon_0),$$

$\alpha \in \alpha_0 + 2\mathbb{Z}$, $\beta \in \beta_0 + 2\mathbb{Z}$ and $\gamma \in \gamma_0 + 2\mathbb{Z}$. We assume that $x : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ is a conformal minimal immersion bounded by (D_1, D_2, D_3) and having helicoidal ends of parameters (A, α) , (B, β) and (C, γ) at $0, \infty$ and 1 respectively. We denote by (g, ω) its Weierstrass data.

Proposition 4.15 (Riemann, [Rie68]). *Then the Hopf differential of x is*

$$Q = iz^{-2}(z-1)^{-2}\varphi(z)dz^2 \tag{4.3}$$

where

$$\varphi(z) = \frac{B\beta}{2\pi}z(z-1) - \frac{A\alpha}{2\pi}(z-1) + \frac{C\gamma}{2\pi}z. \tag{4.4}$$

Proof. At $z = 0$ we have $Q \sim i\frac{A\alpha}{2\pi}z^{-2}dz^2$. At $z = 1$ we have $Q \sim i\frac{C\gamma}{2\pi}(z-1)^{-2}dz^2$. At $z = \infty$ we have $Q \sim i\frac{B\beta}{2\pi}z^{-2}dz^2$. Hence the map $\varphi(z) = z^2(z-1)^2\frac{Q}{idz^2}$ has no singularity on \mathbb{C} , and we have $\varphi(z) = O(z^2)$ when $z \rightarrow \infty$, so φ is a polynomial of degree less than or equal to 2. Finally we compute that φ has the announced expression. □

Lemma 4.16. *The polynomial φ defined by (4.4) has two nonreal conjugate roots if and only if $A\alpha$, $B\beta$ and $C\gamma$ have the same sign, $\sqrt{|A\alpha|} < \sqrt{|B\beta|} + \sqrt{|C\gamma|}$, $\sqrt{|B\beta|} < \sqrt{|A\alpha|} + \sqrt{|C\gamma|}$ and $\sqrt{|C\gamma|} < \sqrt{|A\alpha|} + \sqrt{|B\beta|}$.*

It has a double real root if and only if $A\alpha$, $B\beta$ and $C\gamma$ have the same sign, and $\sqrt{|A\alpha|} = \sqrt{|B\beta|} + \sqrt{|C\gamma|}$, $\sqrt{|B\beta|} = \sqrt{|A\alpha|} + \sqrt{|C\gamma|}$ or $\sqrt{|C\gamma|} = \sqrt{|A\alpha|} + \sqrt{|B\beta|}$.

It has two distinct real roots in all other cases.

Proof. The discriminant of φ is $\frac{\delta}{4\pi^2}$ where

$$\delta = A^2\alpha^2 + B^2\beta^2 + C^2\gamma^2 - 2AB\alpha\beta - 2AC\alpha\gamma - 2BC\beta\gamma.$$

Thus the three cases in the lemma correspond respectively to $\delta < 0$, $\delta = 0$ and $\delta > 0$. The expression δ is a polynomial in the variable C , whose discriminant is equal to $16AB\alpha\beta\gamma^2$. If $A\alpha B\beta < 0$, then $\delta(C) > 0$ for all $C \in \mathbb{R}^*$.

We assume that $A\alpha > 0$ and $B\beta > 0$. Then we have $\delta(C) < 0$ if and only if

$$(\sqrt{A\alpha} - \sqrt{B\beta})^2 < C\gamma < (\sqrt{A\alpha} + \sqrt{B\beta})^2.$$

This condition is not satisfied if $C\gamma < 0$, and if $C\gamma > 0$ it is satisfied if and only if $\sqrt{C\gamma} > \sqrt{A\alpha} - \sqrt{B\beta}$, $\sqrt{C\gamma} > \sqrt{B\beta} - \sqrt{A\alpha}$ and $\sqrt{C\gamma} < \sqrt{A\alpha} + \sqrt{B\beta}$. And we have $\delta(C) = 0$ if and only if $C > 0$, and $\sqrt{C\gamma} = \sqrt{A\alpha} - \sqrt{B\beta}$, $\sqrt{C\gamma} = \sqrt{B\beta} - \sqrt{A\alpha}$ or $\sqrt{C\gamma} = \sqrt{A\alpha} + \sqrt{B\beta}$.

We deal with the case where $A\alpha < 0$ and $B\beta < 0$ in the same way. \square

We set

$$\zeta(z) = \int_0^z \varphi(\tau) d\tau.$$

This is a local diffeomorphism except at the zeros of φ . The Schwarzian derivative of g in the “coordinate” ζ satisfies

$$S_\zeta g = S_z g - S_z \zeta.$$

We set

$$\begin{aligned} \Theta = \frac{S_\zeta g}{dz^2} &= \varphi \left(\frac{1}{g'} \left(\frac{g'}{\varphi} \right)' \right)' - \frac{\varphi^2}{2} \left(\frac{1}{g'} \left(\frac{g'}{\varphi} \right)' \right)^2 \\ &= \left(\frac{g''}{g'} \right)' - \frac{1}{2} \left(\frac{g''}{g'} \right)^2 - \left(\frac{\varphi'}{\varphi} \right)' + \frac{1}{2} \left(\frac{\varphi'}{\varphi} \right)^2. \end{aligned}$$

Let (ξ_1, ξ_2) be the spinor data of x . We set

$$\xi_1 = z^{-1}(z-1)^{-1}k_1 \sqrt{dz}, \quad \xi_2 = z^{-1}(z-1)^{-1}k_2 \sqrt{dz}.$$

Then k_1 and k_2 are holomorphic functions on Σ , and we have

$$g = \frac{k_2}{k_1}, \quad \omega = z^{-2}(z-1)^{-2}k_1^2 dz, \quad Q = z^{-2}(z-1)^{-2}(k_1 k_2' - k_1' k_2) dz^2. \quad (4.5)$$

We will abusively call k_1 and k_2 the spinors associated to (g, ω) .

Lemma 4.17 (Riemann, [Rie68]). *The functions k_1 and k_2 satisfy the following relation on Σ :*

$$k_1 k'_2 - k'_1 k_2 = i\varphi. \quad (4.6)$$

They are solutions on Σ of the following differential equation:

$$k'' - \frac{\varphi'}{\varphi} k' + \frac{\Theta}{2} k = 0. \quad (4.7)$$

Proof. Equality (4.6) follows from the fact that $Q = iz^{-2}(z-1)^{-2}\varphi dz^2$.

Since $k_1^2 = \frac{i\varphi}{g'}$, we have

$$2\frac{k'_1}{k_1} = \frac{\varphi'}{\varphi} - \frac{g''}{g'}.$$

On the other hand we have

$$\frac{1}{g'} \left(\frac{g'}{\varphi} \right)' = \frac{1}{g'} \left(\frac{g''}{\varphi} - \frac{\varphi' g'}{\varphi^2} \right) = -2\frac{k'_1}{\varphi k_1}.$$

So

$$\left(\frac{1}{g'} \left(\frac{g'}{\varphi} \right)' \right)' = -2\frac{k''_1}{\varphi k_1} + 2\frac{{k'_1}^2}{\varphi k_1^2} + 2\frac{\varphi' k'_1}{\varphi^2 k_1},$$

and

$$\Theta = \varphi \left(\frac{1}{g'} \left(\frac{g'}{\varphi} \right)' \right)' - \frac{\varphi^2}{2} \left(\frac{1}{g'} \left(\frac{g'}{\varphi} \right)' \right)^2 = -2\frac{k''_1}{k_1} + 2\frac{\varphi' k'_1}{\varphi k_1}.$$

Thus k_1 is solution of equation (4.7).

We also have

$$2\frac{k'_2}{k_2} = 2\frac{g'}{g} + \frac{\varphi'}{\varphi} - \frac{g''}{g'}.$$

So

$$\frac{1}{g'} \left(\frac{g'}{\varphi} \right)' = 2\frac{g'}{\varphi g} - 2\frac{k'_2}{\varphi k_2},$$

$$\left(\frac{1}{g'} \left(\frac{g'}{\varphi} \right)' \right)' = 2\frac{g''}{\varphi g} - 2\frac{g'^2}{\varphi g^2} - 2\frac{\varphi' g'}{\varphi^2 g} - 2\frac{k''_2}{\varphi k_2} + 2\frac{{k'_2}^2}{\varphi k_2^2} + 2\frac{\varphi' k'_2}{\varphi^2 k_2},$$

$$\Theta = 2\frac{g''}{g} - 4\frac{g'^2}{g^2} - 2\frac{\varphi' g'}{\varphi g} - 2\frac{k''_2}{k_2} + 2\frac{\varphi' k'_2}{\varphi k_2} + 4\frac{g' k'_2}{g k_2} = -2\frac{k''_2}{k_2} + 2\frac{\varphi' k'_2}{\varphi k_2}.$$

Thus k_2 is solution of equation (4.7). □

Lemma 4.18. *We have*

$$\Theta(z) = \frac{\Phi(z)}{z^2(z-1)^2} + \frac{\Lambda(z)}{z(z-1)\varphi(z)} + \frac{2\varphi''}{\varphi(z)}$$

where

$$\Phi(z) = \frac{1-\beta^2}{2}z(z-1) - \frac{1-\alpha^2}{2}(z-1) + \frac{1-\gamma^2}{2}z \quad (4.8)$$

and where Λ is an affine function.

Proof. The form $S_z\zeta$ is meromorphic on $\bar{\mathbb{C}}$, with double poles at ∞ and the roots of φ . Since $\Theta dz^2 = S_z g - S_z \zeta$, by section 4.2.2 and lemma 4.14 the function Θ is meromorphic on $\bar{\mathbb{C}}$, its possible poles are 0, 1, ∞ and the zeros of φ , and these poles are at most double.

By lemma 4.7 we have $S_z g \sim \frac{1-\alpha^2}{2} z^{-2} dz^2$ when $z \rightarrow 0$. On the other hand, $S_z \zeta$ is holomorphic at 0 since 0 is not a zero of φ . Thus we have $\Theta(z) \sim \frac{1-\alpha^2}{2} z^{-2}$ when $z \rightarrow 0$. In the same way we have $\Theta(z) \sim \frac{1-\gamma^2}{2} (z-1)^{-2}$ when $z \rightarrow 1$ and $\Theta(z) \sim \frac{9-\beta^2}{2} z^{-2} dz^2$ when $z \rightarrow \infty$ (since $S_z \zeta \sim -4z^{-2} dz^2$). At a root of φ , since g and φ have branch points of the same order, the order -2 terms in $S_z g$ and $S_z \zeta$ at this root are equal, and so the order of Θ is greater than or equal to -1 .

We have $\frac{2\varphi''}{\varphi(z)} \sim 4z^{-2}$ when $z \rightarrow \infty$ (and φ'' is a constant). Consequently the function $\Lambda = z(z-1)\varphi(\Theta - z^{-2}(z-1)^{-2}\Phi) - 2z(z-1)\varphi''$ is holomorphic on \mathbb{C} , and we have $\Lambda(z) = O(z)$ when $z \rightarrow \infty$, so it is an affine function. \square

Lemma 4.19. *If the roots of φ are distinct, then there are at most four possibilities for the function Λ .*

Proof. Equation (4.7) has regular singularities at 0, 1, ∞ and the roots a_1 and a_2 of φ (see [WW63], paragraph 10.3). Moreover, at least one of the roots of φ lies in Σ , for example a_1 .

Since $a_1 \neq a_2$, the exponents of equation (4.7) at a_1 are 0 and 2, and since k_1 and k_2 are well-defined on Σ , the solutions of (4.7) have no logarithmic term at a_1 . Thus, in the neighbourhood of a_1 , equation (4.7) has a solution having the following form:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n (z - a_1)^n$$

with $\lambda_0 \neq 0$. Writing $\Theta(z) = \psi_{-1}(z - a_1)^{-1} + \psi_0 + O(z - a_1)$, since $\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \frac{1}{z-a_1} + \frac{1}{a_1-a_2} + O(z - a_1)$, reporting in equation (4.7) we get

$$-\lambda_1 + \frac{\psi_{-1}}{2} \lambda_0 = 0, \quad \left(\frac{\psi_{-1}}{2} - \frac{1}{a_1 - a_2} \right) \lambda_1 + \frac{\psi_0}{2} \lambda_0 = 0.$$

Hence we get

$$\psi_{-1} \left(\frac{\psi_{-1}}{2} - \frac{1}{a_1 - a_2} \right) + \psi_0 = 0. \quad (4.9)$$

We also compute using (4.9) that

$$\Lambda(z) = \frac{B\beta}{2\pi} (-4a_1(a_1-1) + m_1\psi_{-1}) + \frac{B\beta}{2\pi} (m_2 + m_3\psi_{-1} + m_4\psi_{-1}^2)(z - a_1)$$

with

$$\begin{aligned} m_1 &= a_1(a_1-1)(a_1-a_2), & m_2 &= -\frac{(a_1-a_2)\Phi(a_1)}{a_1(a_1-1)} - 4(2a_1-1), \\ m_3 &= 2a_1(a_1-1) + (2a_1-1)(a_1-a_2), & m_4 &= -\frac{m_1}{2}. \end{aligned}$$

Assume that a_1 and a_2 are distinct real roots. Then $a_2 \in \Sigma$ and we can apply the same argument at a_2 with a coefficient $\tilde{\psi}_{-1}$ analogous to ψ_{-1} : we have

$$\Lambda(z) = \frac{B\beta}{2\pi} (-4a_2(a_2-1) + \tilde{m}_1\tilde{\psi}_{-1}) + \frac{B\beta}{2\pi} (\tilde{m}_2 + \tilde{m}_3\tilde{\psi}_{-1} + \tilde{m}_4\tilde{\psi}_{-1}^2)(z - a_2)$$

where \tilde{m}_j has the same expression as m_j exchanging a_1 and a_2 . Identifying these two expressions of Λ , we get $\tilde{m}_2 + \tilde{m}_3\tilde{\psi}_{-1} + \tilde{m}_4\tilde{\psi}_{-1}^2 = m_2 + m_3\psi_{-1} + m_4\psi_{-1}^2$ and $m_1\psi_{-1} - \tilde{m}_1\tilde{\psi}_{-1} - 4a_1(a_1 - 1) + 4a_2(a_2 - 1) = (a_1 - a_2)(m_2 + m_3\psi_{-1} + m_4\psi_{-1}^2)$. Setting $R = a_1(a_1 - 1)\psi_{-1}$ and $\tilde{R} = a_2(a_2 - 1)\tilde{\psi}_{-1}$, we get

$$\begin{cases} 0 &= -4 - \frac{\Phi(a_1)}{a_1(a_1-1)} + \left(\frac{1}{a_1-a_2} + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1-1}\right)R - \frac{1}{a_1-a_2}\tilde{R} - \frac{1}{2a_1(a_1-1)}R^2 \\ 0 &= -4 - \frac{\Phi(a_2)}{a_2(a_2-1)} + \left(\frac{1}{a_2-a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2-1}\right)\tilde{R} - \frac{1}{a_2-a_1}R - \frac{1}{2a_2(a_2-1)}\tilde{R}^2. \end{cases} \quad (4.10)$$

Assume that a_1 and a_2 are complex conjugate roots. Since $\Theta(z) \in \mathbb{R}$ when $z \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, Λ must have real coefficients, so we have $\text{Im}(m_2 + m_3\psi_{-1} + m_4\psi_{-1}^2) = 0$ and $\text{Im}(-4a_1(a_1 - 1) + m_1\psi_{-1} - a_1(m_2 + m_3\psi_{-1} + m_4\psi_{-1}^2)) = 0$. Setting $R = a_1(a_1 - 1)\psi_{-1}$ and $\tilde{R} = \bar{R}$, since $a_2 = \overline{a_1}$, this is equivalent to system (4.10).

System (4.10) has at most four solutions (R, \tilde{R}) . Thus there are at most four possible functions Λ . \square

Lemma 4.20. *If the polynomial φ has a double real root, then there are at most three possibilities for the function Λ .*

Proof. Equation (4.7) has regular singularities at 0, 1, ∞ and the root a_1 of φ . Moreover, a_1 lies in Σ . Since a_1 is a double root of φ , the exponents of equation (4.7) at a_1 are 0 and 3, and since k_1 and k_2 are well-defined on Σ , the solutions of (4.7) have no logarithmic term at a_1 . Thus, in the neighbourhood of a_1 , equation (4.7) has a solution having the following form:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n(z - a_1)^n$$

with $\lambda_0 \neq 0$. Writing $\Theta(z) = \psi_{-1}(z - a_1)^{-1} + \psi_0 + \psi_1(z - a_1) + O((z - a_1)^2)$, since $\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \frac{2}{z - a_1}$, reporting in equation (4.7) we get

$$-2\lambda_1 + \frac{\psi_{-1}}{2}\lambda_0 = 0, \quad -2\lambda_2 + \frac{\psi_{-1}}{2}\lambda_1 + \frac{\psi_0}{2}\lambda_0 = 0, \quad \frac{\psi_{-1}}{2}\lambda_2 + \frac{\psi_0}{2}\lambda_1 + \frac{\psi_1}{2}\lambda_0 = 0.$$

Hence we get

$$\frac{\psi_{-1}^3}{16} + \frac{\psi_{-1}\psi_0}{2} + \psi_1 = 0. \quad (4.11)$$

We also compute that

$$\Lambda(z) = -4\frac{B\beta}{2\pi}a_1(a_1 - 1) + \frac{B\beta}{2\pi}n_1(z - a_1) + \frac{B\beta}{2\pi}n_2(z - a_1)^2 + \frac{B\beta}{2\pi}n_3(z - a_1)^3 + O((z - a_1)^4)$$

with

$$n_1 = a_1(a_1 - 1)\psi_{-1} - 4(2a_1 - 1), \quad n_2 = a_1(a_1 - 1) \left(\psi_0 - \frac{\Phi(a_1)}{a_1^2(a_1 - 1)^2} \right) + (2a_1 - 1)\psi_{-1} - 4,$$

$$n_3 = a_1(a_1 - 1)\psi_1 - \frac{\Phi'(a_1)}{a_1(a_1 - 1)} + 2\frac{\Phi(a_1)}{a_1(a_1 - 1)} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1 - 1} \right) + (2a_1 - 1) \left(\psi_0 - \frac{\Phi(a_1)}{a_1^2(a_1 - 1)^2} \right) + \psi_{-1}.$$

On the other hand, Λ is an affine function, so we have $n_2 = n_3 = 0$, and using (4.11) we obtain that ψ_{-1} is solution of a degree 3 polynomial equation. Thus there are at most three possible functions Λ . \square

All that has been done up to now does not depend on ε_0 , i.e., it holds for (D_1, D_2, D_3) as well as for its dual configuration.

Theorem 4.21. *There exist at most four minimal disks bounded by (D_1, D_2, D_3) or its dual configuration and with helicoidal ends of parameters (A, α) , (B, β) and (C, γ) at 0, ∞ and 1 respectively.*

Proof. By lemmas 4.19 and 4.20, it suffices to prove that for each possibility of the Schwarzian derivative there exists at most one minimal immersion bounded by (D_1, D_2, D_3) or its dual configuration and with helicoidal ends of parameters (A, α) , (B, β) , (C, γ) .

Assume that the function Θ is known. Then the set of the solutions of equation (4.7) on Σ is a vector space generated by two independent solutions. Thus, if (g, ω) and $(\tilde{g}, \tilde{\omega})$ are the Weierstrass data of two minimal immersions corresponding to Θ , then g and \tilde{g} are quotients of linear combinations of these two independent solutions, so there exists a Möbius transform $\mu : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ such that $\tilde{g} = \mu \circ g$. But the value of the Gauss map at each end is uniquely determined, so we have $g(0) = \tilde{g}(0)$, $g(1) = \tilde{g}(1)$ and $g(\infty) = \tilde{g}(\infty)$. Moreover, $g(0)$, $g(1)$ and $g(\infty)$ are pairwise distinct (since the straight lines do not lie in parallel planes), so μ is the identity, and so $\tilde{g} = g$ and $\tilde{\omega} = \omega$. \square

4.3.3 Some facts about the hypergeometric differential equation

In this section we recall some facts about the hypergeometric differential equation and hypergeometric series that will be useful to give explicit examples of minimal disks bounded by three straight lines.

Let s_1 , s_2 and s_3 be three complex numbers such that $s_3 \notin -\mathbb{N}^*$. The hypergeometric series is defined by

$$F(s_1, s_2; s_3; z) = \frac{\Gamma(s_3)}{\Gamma(s_1)\Gamma(s_2)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(s_1+n)\Gamma(s_2+n)}{\Gamma(s_3+n)} z^n$$

for $|z| < 1$.

We use the notations of section 4.3.2. We define eight numbers

$$s_{\pm\pm\pm} = \frac{1 \pm \alpha \pm \beta \pm \gamma}{2}. \quad (4.12)$$

These numbers are noninteger. We also set

$$\begin{aligned} \Pi = & (1 + \alpha + \beta + \gamma)(1 - \alpha + \beta + \gamma)(1 + \alpha - \beta + \gamma)(1 + \alpha + \beta - \gamma) \\ & \times (1 - \alpha - \beta + \gamma)(1 - \alpha + \beta - \gamma)(1 + \alpha - \beta - \gamma)(1 - \alpha - \beta - \gamma). \end{aligned} \quad (4.13)$$

We consider the following hypergeometric equation on Σ :

$$w'' + \left(\frac{1-\alpha}{z} + \frac{1-\gamma}{z-1} \right) w' + s_{---} s_{-+-} \frac{w}{z(z-1)} = 0. \quad (4.14)$$

This equation is usually denoted by $P \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & s_{---} & 0 \\ \alpha & s_{-+-} & \gamma \end{array} \right\}$. Since $\alpha, \beta, \gamma \notin \mathbb{Z}$, the fundamental system of linear independent solutions of hypergeometric equation (4.14) at the singular points is given (see section 2.2, paragraph 1 in [MOS66], or [BPS02])

- on Σ_0 by

$$w_1^{(0)}(z) = F(s_{---}, s_{-+}; 1 - \alpha; z),$$

$$w_2^{(0)}(z) = z^\alpha F(s_{+--}, s_{++}; 1 + \alpha; z),$$

- on Σ_1 by

$$w_1^{(1)}(z) = F(s_{---}, s_{-+}; 1 - \gamma; 1 - z) = z^\alpha F(s_{+--}, s_{++}; 1 - \gamma; 1 - z),$$

$$w_2^{(1)}(z) = (1 - z)^\gamma F(s_{-+}, s_{++}; 1 + \gamma; 1 - z) = z^\alpha (1 - z)^\gamma F(s_{+--}, s_{++}; 1 + \gamma; 1 - z),$$

- on Σ_∞ by

$$w_1^{(\infty)}(z) = z^{-s_{---}} F(s_{---}, s_{-+}; 1 - \beta; z^{-1}),$$

$$w_2^{(\infty)}(z) = z^{-s_{-+}} F(s_{-+}, s_{++}; 1 + \beta; z^{-1}).$$

The second expressions for $w_1^{(1)}$ and $w_2^{(1)}$ are obtained using first formula of section 2.4.1 in [MOS66].

For $z \in (-1, 0)$ we have $w_1^{(0)}(z) \in \mathbb{R}$ and $w_2^{(0)}(z) \in e^{i\pi\alpha}\mathbb{R}$; for $z \in (0, 1)$ we have $w_1^{(0)}(z) \in \mathbb{R}$ and $w_2^{(0)}(z) \in \mathbb{R}$. For $z \in (0, 1)$ we have $w_1^{(1)}(z) \in \mathbb{R}$ and $w_2^{(1)}(z) \in \mathbb{R}$; for $z \in (1, 2)$ we have $w_1^{(1)}(z) \in \mathbb{R}$ and $w_2^{(1)}(z) \in e^{-i\pi\gamma}\mathbb{R}$. For $z \in (1, +\infty)$ we have $w_1^{(\infty)}(z) \in \mathbb{R}$ and $w_2^{(\infty)}(z) \in \mathbb{R}$; for $z \in (-\infty, -1)$ we have $w_1^{(\infty)}(z) \in e^{-i\pi s_{---}}\mathbb{R}$ and $w_2^{(\infty)}(z) \in e^{-i\pi s_{-+}}\mathbb{R}$.

These solutions are connected in the following way. On $\Sigma_0 \cap \Sigma_1$ we have

$$\begin{pmatrix} w_1^{(0)} \\ w_2^{(0)} \end{pmatrix} = \nu \begin{pmatrix} w_1^{(1)} \\ w_2^{(1)} \end{pmatrix}$$

where

$$\nu = \begin{pmatrix} \nu_{11} & \nu_{12} \\ \nu_{21} & \nu_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(s_{-+})\Gamma(s_{++})} & \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(-\gamma)}{\Gamma(s_{---})\Gamma(s_{-+})} \\ \frac{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(s_{-+})\Gamma(s_{++})} & \frac{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(-\gamma)}{\Gamma(s_{---})\Gamma(s_{++})} \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

(we used fourth formula of section 2.4.1 in [MOS66] to compute this matrix). In the same way we have

$$\begin{pmatrix} w_1^{(0)} \\ w_2^{(0)} \end{pmatrix} = \hat{\nu} \begin{pmatrix} w_1^{(\infty)} \\ w_2^{(\infty)} \end{pmatrix}$$

where

$$\hat{\nu} = \begin{pmatrix} \hat{\nu}_{11} & \hat{\nu}_{12} \\ \hat{\nu}_{21} & \hat{\nu}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i\pi s_{---}} \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(s_{-+})\Gamma(s_{++})} & e^{i\pi s_{-+}} \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(-\beta)}{\Gamma(s_{---})\Gamma(s_{-+})} \\ e^{i\pi s_{++}} \frac{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(s_{-+})\Gamma(s_{++})} & e^{i\pi s_{++}} \frac{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(-\beta)}{\Gamma(s_{---})\Gamma(s_{-+})} \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

(we used fifth formula of section 2.4.1 in [MOS66] to compute this matrix; we should notice that in this formula $(-z)^{-a}$ is defined with $\arg(-z) \in (-\pi, \pi)$, and thus with this convention we get $(-z)^{-a} = e^{i\pi a} z^{-a}$). This last formula is actually valid for the analytic continuations of the solutions on Σ_0 and Σ_∞ , since the intersection of these two domains is empty.

In the sequel, σ_1 and σ_2 will denote the solutions on Σ of hypergeometric equation (4.14) such that

$$\sigma_1 = w_1^{(0)}, \quad \sigma_2 = w_2^{(0)}$$

on Σ_0 .

Lemma 4.22. We have $\sigma_1\sigma'_2 - \sigma'_1\sigma_2 = \alpha z^{\alpha-1}(1-z)^{\gamma-1}$.

Proof. Since σ_1 and σ_2 are solutions of (4.14), we get that $\sigma_1\sigma'_2 - \sigma'_1\sigma_2$ is a solution on Σ of the following equation:

$$w' = -\left(\frac{1-\alpha}{z} + \frac{1-\gamma}{z-1}\right)w.$$

Thus it is proportional to $z^{\alpha-1}(1-z)^{\gamma-1}$. And since $\sigma_1\sigma'_2 - \sigma'_1\sigma_2 \sim \alpha z^{\alpha-1}$ when $z \rightarrow 0$, we get the announced expression. \square

Lemma 4.23. We have $\nu_{12}\nu_{21} = -t^2\nu_{11}\nu_{22}$ where t has been defined in section 4.3.1.

Proof. We compute, using that $\Gamma(1+z) = z\Gamma(z)$ and $\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ (see section 1.1 in [MOS66]), that

$$\begin{aligned} \nu_{12}\nu_{21} &= \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(-\gamma)\Gamma(1+\alpha)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(s_{---})\Gamma(s_{-+-})\Gamma(s_{+-+})\Gamma(s_{+++})} \\ &= -\frac{\alpha}{\gamma} \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\gamma)\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(s_{---})\Gamma(s_{-+-})\Gamma(1-s_{-+-})\Gamma(1-s_{---})} \\ &= -\frac{\alpha}{\gamma} \frac{\sin(\pi s_{---})\sin(\pi s_{-+-})}{\sin(\pi\alpha)\sin(\pi\gamma)}, \\ \\ \nu_{11}\nu_{22} &= \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\gamma)\Gamma(1+\alpha)\Gamma(-\gamma)}{\Gamma(s_{-+-})\Gamma(s_{-++})\Gamma(s_{+-+})\Gamma(s_{++-})} \\ &= -\frac{\alpha}{\gamma} \frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(s_{-+-})\Gamma(s_{-++})\Gamma(1-s_{-++})\Gamma(1-s_{-+-})} \\ &= -\frac{\alpha}{\gamma} \frac{\sin(\pi s_{-+-})\sin(\pi s_{-++})}{\sin(\pi\alpha)\sin(\pi\gamma)}. \end{aligned}$$

Thus proving that $\nu_{12}\nu_{21} = -t^2\nu_{11}\nu_{22}$ is equivalent to prove that

$$\sin(\pi s_{---})\sin(\pi s_{-+-}) = -t^2 \sin(\pi s_{-+-})\sin(\pi s_{-++}). \quad (4.17)$$

But we have

$$2\sin(\pi s_{---})\sin(\pi s_{-+-}) = \cos(\pi\beta) - \cos(\pi(-\alpha-\gamma+1)) = \cos(\pi\beta) + \cos(\pi\alpha)\cos(\pi\gamma) - \sin(\pi\alpha)\sin(\pi\gamma),$$

$$2\sin(\pi s_{-+-})\sin(\pi s_{-++}) = \cos(\pi\beta) - \cos(\pi(-\alpha+\gamma+1)) = \cos(\pi\beta) + \cos(\pi\alpha)\cos(\pi\gamma) + \sin(\pi\alpha)\sin(\pi\gamma).$$

Thus, since $\frac{1-t^2}{1+t^2} = \cos\theta$, condition (4.17) is equivalent to

$$\cos\theta = \frac{\cos(\pi\beta) + \cos(\pi\alpha)\cos(\pi\gamma)}{\sin(\pi\alpha)\sin(\pi\gamma)},$$

which is satisfied according to lemma 4.12 and since $\pi\alpha$, $\pi\beta$ and $\pi\gamma$ are congruent to $\pi\alpha_0$, $\pi\beta_0$ and $\pi\gamma_0$ modulo 2π . \square

Lemma 4.24. We have $\hat{\nu}_{12}\hat{\nu}_{21} = -\hat{t}^2\hat{\nu}_{11}\hat{\nu}_{22}$ where \hat{t} has been defined in section 4.3.1.

Proof. Since $e^{i\pi s_{--}}e^{i\pi s_{++}} = e^{i\pi(1-\gamma)} = e^{i\pi s_{+-}}e^{i\pi s_{+-}}$, proceeding as in lemma 4.23 and exchanging the roles of β and γ , we obtain that the equality of the lemma is equivalent to

$$\cos \hat{\theta} = \frac{\cos(\pi\gamma) + \cos(\pi\alpha)\cos(\pi\beta)}{\sin(\pi\alpha)\sin(\pi\beta)}.$$

This condition is satisfied according to lemma 4.12 and since $\pi\alpha$, $\pi\beta$ and $\pi\gamma$ are congruent to $\pi\alpha_0$, $\pi\beta_0$ and $\pi\gamma_0$ modulo 2π . \square

Lemma 4.25. *We have*

$$\frac{\hat{t}\hat{\nu}_{11}}{\hat{\nu}_{21}} = e^{-i\pi\alpha} \frac{t\nu_{11}}{\nu_{21}}.$$

Proof. Proving this equality is equivalent to prove that $t \sin(\pi s_{--}) = \hat{t} \sin(\pi s_{--})$.

We have computed that

$$t^2 = -\frac{\sin(\pi s_{--}) \sin(\pi s_{--})}{\sin(\pi s_{--}) \sin(\pi s_{--})}, \quad \hat{t}^2 = -\frac{\sin(\pi s_{--}) \sin(\pi s_{--})}{\sin(\pi s_{--}) \sin(\pi s_{--})}.$$

We deduce that $t^2 \sin^2(\pi s_{--}) = \hat{t}^2 \sin^2(\pi s_{--})$. Since $\sin \theta = \frac{2t}{1+t^2}$ and $\sin \hat{\theta} = \frac{2\hat{t}}{1+\hat{t}^2}$, we deduce from lemma 4.13 that t and \hat{t} have the same sign. So it now suffices to prove that $\sin(\pi s_{--})$ and $\sin(\pi s_{--})$ have the same sign.

We have $2 \sin(\pi s_{--}) \sin(\pi s_{--}) = \cos(\pi(\gamma-\beta)) - \cos(\pi(1-\alpha)) = \cos(\pi(\gamma_0-\beta_0)) - \cos(\pi(1-\alpha_0))$. We also have $1-\alpha_0 \in (0, 1)$ and $\gamma_0-\beta_0 \in (-1, 1)$, and by (4.2) we have $1-\alpha_0 > |\gamma_0-\beta_0|$, so we get $\cos(\pi(1-\alpha_0)) < \cos(\pi(\gamma_0-\beta_0))$ and $2 \sin(\pi s_{--}) \sin(\pi s_{--}) > 0$. This proves the lemma. \square

4.3.4 Existence of a minimal surface bounded by three lines

In this section we give explicit examples of minimal disks bounded by three lines in generic position. We use the notations of section 4.3.2.

Let a , b and c be three real numbers. For $j = 1, 2$ and $z \in \Sigma$, we set

$$K_j = z^{\frac{1-\alpha}{2}} (1-z)^{\frac{1-\gamma}{2}} ((a+bz)\sigma_j + cz(1-z)\sigma'_j). \quad (4.18)$$

These functions were introduced by Riemann in his memoir [Rie68] (where they are denoted by k_1 and k_2).

Lemma 4.26 (Riemann, [Rie68]). *The functions K_1 and K_2 satisfy*

$$K_1 K'_2 - K'_1 K_2 = z^{1-\alpha} (1-z)^{1-\gamma} (\sigma_1 \sigma'_2 - \sigma'_1 \sigma_2) F(z)$$

with

$$F(z) = a(a+c\alpha)(1-z) + (a+b)(a+b-c\gamma)z - z(1-z)(b+s_{--}c)(b+s_{--}c). \quad (4.19)$$

Proof. Using the fact that σ_j is a solution of (4.14), we compute that

$$K'_j = z^{-\frac{1+\alpha}{2}} (1-z)^{-\frac{1+\gamma}{2}} ((n_1 z^2 + n_2 z(1-z) + n_3 (1-z)^2) \sigma_j) + (n_4 z^2 (1-z) + n_5 z(1-z)^2) \sigma'_j$$

with

$$\begin{aligned} n_1 &= -\frac{1-\gamma}{2}(a+b), \quad n_2 = \frac{\gamma-\alpha}{2}a + \frac{3-\alpha}{2}b + cs_{---}s_{+-}, \quad n_3 = \frac{1-\alpha}{2}a, \\ n_4 &= a+b - \frac{1+\gamma}{2}c, \quad n_5 = a + \frac{1+\alpha}{2}c. \end{aligned}$$

Thus we get

$$\begin{aligned} K_1 K'_2 - K'_1 K_2 &= z^{1-\alpha}(1-z)^{1-\gamma}(\sigma_1 \sigma'_2 - \sigma'_1 \sigma_2) \\ &\times ((a+b)n_4 - cn_1)z^2 + (an_4 + (a+b)n_5 - cn_2)z(1-z) + (an_5 - cn_3)(1-z)^2. \end{aligned}$$

The last factor in this expression is a polynomial of degree 2. We compute that its values at 0 and 1 and its degree 2 coefficient are the same as those of the polynomial F in the lemma. \square

Corollary 4.27. *The functions K_1 and K_2 satisfy*

$$K_1 K'_2 - K'_1 K_2 = \alpha F, \quad K_1 K''_2 - K''_1 K_2 = \alpha F', \quad (4.20)$$

with F as in (4.19).

Proof. The first formula comes from lemmas 4.22 and 4.26. We obtain the second one by differentiation. \square

Lemma 4.28. *Let $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ be complex numbers such that $\lambda_1^{-1}\mu_2 - \lambda_2^{-1}\mu_1 \neq 0$. Then the spinors $k_1 = \lambda_1^{-1}K_1 + \lambda_2^{-1}K_2$ and $k_2 = \mu_1 K_1 + \mu_2 K_2$ define a conformal minimal immersion $x : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$, with possibly a singular point at the root of F when F has a double root. The immersion x has, up to a translation in \mathbb{R}^3 , a helicoidal end bounded by D_1 and D_2 and of parameters (A, α) if and only if $\lambda_2 = \mu_1 = 0$, $\lambda_1 \in i\mathbb{R}^*$, $\mu_2 \in \mathbb{R}^*$ and $\alpha \lambda_1^{-1}\mu_2 a(a + \alpha c) = i\frac{A\alpha}{2\pi}$.*

Proof. The singularities of x correspond to the common zeros of k_1 and k_2 , and thus to the common zeros of K_1 and K_2 . Using (4.20) we conclude that a singular point of x is necessarily a double root of F .

Let (g, ω) be the Weierstrass data of x . We will use the expressions of σ_1 and σ_2 valid in Σ_0 , that is $\sigma_1 = w_1^{(0)}$ and $\sigma_2 = w_2^{(0)}$. We have

$$g = \frac{\mu_1 K_1 + \mu_2 K_2}{\lambda_1^{-1} K_1 + \lambda_2^{-1} K_2},$$

$$k_1 k'_2 - k'_1 k_2 = (\lambda_1^{-1}\mu_2 - \lambda_2^{-1}\mu_1)(K_1 K'_2 - K'_1 K_2) = \alpha(\lambda_1^{-1}\mu_2 - \lambda_2^{-1}\mu_1)F$$

with F as in (4.19).

Assume that x has, up to a translation in \mathbb{R}^3 , a helicoidal end bounded by D_1 and D_2 and of parameters (A, α) . Then when $z \rightarrow 0$ we have $Q \sim i\frac{A\alpha}{2\pi}z^{-2}dz^2$, so we get $i\frac{A\alpha}{2\pi} = \alpha(\lambda_1^{-1}\mu_2 - \lambda_2^{-1}\mu_1)F(0) = \alpha(\lambda_1^{-1}\mu_2 - \lambda_2^{-1}\mu_1)a(a + \alpha c)$. This implies in particular that $\lambda_1^{-1}\mu_2 - \lambda_2^{-1}\mu_1 \in i\mathbb{R}$, $a \neq 0$ and $a + \alpha c \neq 0$.

Then we have $K_1(z) \sim az^{\frac{1-\alpha}{2}}$ and $K_2(z) \sim (a + \alpha c)z^{\frac{1+\alpha}{2}}$ when $z \rightarrow 0$. We must have $g(z) \sim i\rho z^\alpha$ for some $\rho \in \mathbb{R}^*$ (see the proof of lemma 4.7), since $\alpha \in (0, 1) + 2\mathbb{Z}$. This implies that $\mu_1 = 0$ if $\alpha > 0$ and $\lambda_2 = 0$ if $\alpha < 0$.

We deal with the case where $\alpha > 0$. Then we have $g = \frac{\mu_2 K_2}{\lambda_1^{-1} K_1 + \lambda_2^{-1} K_2} \sim \lambda_1 \mu_2 \frac{a+\alpha c}{a} z^\alpha$, so $\lambda_1 \mu_2 \in i\mathbb{R}$. And since we also have $\lambda_1^{-1} \mu_2 \in i\mathbb{R}$ (because $\lambda_2^{-1} \mu_1 = 0$), we get $\mu_2^2 \in \mathbb{R}$ and $\lambda_1^2 \in \mathbb{R}$. Moreover, we have $g(z) \in i\bar{\mathbb{R}}$ if $z \in (0, 1)$ (since D_2 is the x_1 -axis), and the functions K_1 and K_2 take real values on $(0, 1)$, so we also have $\lambda_2 \mu_2 \in i\mathbb{R}$, and so $\lambda_2^2 \in \mathbb{R}$. Since x maps $(-1, 0)$ onto a straight line, and since $d(x_1 + ix_2) = \bar{\omega} - g^2 \omega = z^{-2}(z-1)^{-2}k_1^2 dz - z^{-2}(z-1)^{-2}k_2^2 dz$, the argument of $k_1^2 - k_2^2$ must be constant on $(-1, 0)$. We have $\overline{k_1^2 - k_2^2} = \lambda_1^{-2} \overline{K_1^2} + 2\lambda_1^{-1} \lambda_2^{-1} K_1 K_2 + \lambda_2^{-2} \overline{K_2^2} - \mu_2^2 K_2^2$; on the other hand we have $\arg K_1(z) \equiv \pi \frac{1-\alpha}{2} \pmod{\pi}$ and $\arg K_2(z) \equiv \pi \frac{1+\alpha}{2} \pmod{\pi}$ if $z \in (-1, 0)$, so we conclude that $\lambda_2 = 0$. Thus we have $\omega \sim \lambda_1^{-2} a^2 z^{-1-\alpha} dz$ and $g^2 \omega \sim \mu_2^2 (a+\alpha c)^2 z^{-1+\alpha} dz$. Since $x_1 \rightarrow +\infty$ when $z \rightarrow 0$ with z real and positive (by condition 2 in definition 4.4), we get $\lambda_1^2 < 0$ and $\mu_2^2 > 0$, which implies $\lambda_1 \in i\mathbb{R}^*$ and $\mu_2 \in \mathbb{R}^*$.

We proceed in the same way in the case where $\alpha < 0$.

Conversely, assume that $\lambda_2 = \mu_1 = 0$, $\lambda_1 \in i\mathbb{R}^*$, $\mu_2 \in \mathbb{R}^*$ and $\alpha \lambda_1^{-1} \mu_2 a(a+\alpha c) = i \frac{A\alpha}{2\pi}$. Then we have $\arg \overline{k_1^2} = \arg(-k_2^2) = \pi\alpha$ on $(-1, 0)$ and $\arg \overline{k_1^2} = \arg(-k_2^2) = \pi$ on $(0, 1)$, and we have $d(x_1 + ix_2) = \bar{\omega} - g^2 \omega \sim \lambda_1^{-2} a^2 \overline{z^{-1-\alpha} dz} - \mu_2^2 (a+\alpha c)^2 z^{-1+\alpha} dz$. This proves that x has an end bounded by two lines D'_1 and D'_2 that are parallel to D_1 and D_2 respectively. Moreover, we have $g(z) \sim \lambda_1 \mu_2 \frac{a+\alpha c}{a} z^\alpha$ and $Q \sim \alpha \lambda_1^{-1} \mu_2 a(a+\alpha c) z^{-2} dz^2 = i \frac{A\alpha}{2\pi} z^{-2} dz^2$, so x has a helicoidal end of parameters (A, α) by lemma 4.4. This finally implies that $D(D'_1, D'_2) = -A = D(D_1, D_2)$, and so D'_1 and D'_2 are the images of D_1 and D_2 by a translation in \mathbb{R}^3 . \square

In the sequel we will study the minimal immersion $x : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ (with possibly a singularity at a double root of F) given by the spinors $k_1 = \lambda^{-1} K_1$ and $k_2 = \mu K_2$ for some $\lambda \in \mathbb{C}^*$ and some $\mu \in \mathbb{C}^*$. We first notice the following fact.

Remark 4.29. The transformation $(a, b, c, \lambda, \mu) \rightarrow (\rho a, \rho b, \rho c, \rho \lambda, \rho^{-1} \mu)$ for $\rho \in \mathbb{R}^*$ does not change the Weierstrass data (g, ω) (and consequently does not change the immersion x), and changes $\lambda^{-1} \mu$ into $\rho^{-2} \lambda^{-1} \mu$. Thus, without loss of generality, we can assume that $|\lambda \mu^{-1}| = |\alpha|$.

Remark 4.30. Replacing (λ, μ) by $(-i\lambda, i\mu)$ would change g into $-g$ and ω into $-\omega$. Thus the immersion x would be replaced by its image by the reflection about the x_3 -axis.

Proposition 4.31. Let λ and μ be two nonzero complex numbers such that $|\lambda \mu^{-1}| = |\alpha|$. Let $x : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ be the conformal minimal immersion (with possibly a singularity at a double root of F) whose Weierstrass data are given by

$$g = \frac{k_2}{k_1}, \quad \omega = z^{-2}(z-1)^{-2}k_1^2,$$

where

$$k_1 = \lambda^{-1} K_1, \quad k_2 = \mu K_2$$

with K_1 and K_2 as in formula (4.18).

Then, up to a translation, the immersion x maps $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ and $(1, +\infty)$ to D_1 , D_2 and D_3 respectively, and has helicoidal ends of parameters (A, α) , (B, β) and (C, γ) at 0 , ∞ and 1 respectively if and only if the following conditions hold:

1. $\lambda = -\varepsilon i \alpha \mu$ where ε is the sign of $\varepsilon_0 \frac{\nu_{11}}{\alpha \nu_{21}}$ with ν as in section 4.3.3,
2. $\varepsilon \alpha \mu^2 = \frac{\nu_{11}}{\nu_{21}}$ (this implies in particular that μ is real),

3. $F = \varepsilon\varphi$ with φ as in (4.4) and F as in (4.19), i.e., the real numbers a , b and c satisfy

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{A\alpha}{2\pi} &= a(a + \alpha c) \\ \varepsilon \frac{B\beta}{2\pi} &= (b + s_{--}c)(b + s_{+-}c) \\ \varepsilon \frac{C\gamma}{2\pi} &= (a + b)(a + b - \gamma c). \end{cases} \quad (4.21)$$

Proof. We denote by Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 , Δ_1^∞ , Δ_1^0 , Δ_3^0 and Δ_3^∞ the images by x of $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, \infty)$, $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(1, 2)$ and $(2, +\infty)$.

If x has, up to a translation in \mathbb{R}^3 , a helicoidal end at 0 bounded by D_1 and D_2 and of parameters (A, α) , then by lemma 4.28 we have $\lambda \in i\mathbb{R}^*$, $\mu \in \mathbb{R}^*$ and $\alpha\lambda^{-1}\mu a(a + \alpha c) = i\frac{A\alpha}{2\pi}$. Since $|\lambda\mu^{-1}| = |\alpha|$, we have $\lambda = -\varepsilon i\alpha\mu$ with $\varepsilon = \pm 1$, and so the first equality in (4.21) holds.

From now on we assume that

$$\lambda = -\varepsilon i\alpha\mu \quad (4.22)$$

with $\varepsilon = \pm 1$ and $\mu \in \mathbb{R}^*$, and that $\frac{A\alpha}{2\pi} = a(a + \alpha c)$. Then by lemma 4.28 we can assume that the immersion x has a helicoidal end at 0 bounded by D_1 and D_2 and of parameters (A, α) (it suffices to consider the good translation in \mathbb{R}^3). Moreover we have $\Delta_1^0 \subset D_1$, $\Delta_2 \subset D_2$, Δ_1^0 contains a half of D_1 in the direction of \vec{u}_1 , and Δ_2 contains a half of D_2 in the direction of $-\vec{u}_2$.

We now prove the necessity of (4.21). By (4.20) we have $k'_1 k_2 - k'_2 k_1 = \lambda^{-1} \mu \alpha F = \varepsilon i F$ with F as in (4.19). On the other hand, if x has helicoidal ends of parameters (A, α) , (B, β) and (C, γ) at 0, ∞ and 1 respectively, then equation (4.6) holds with φ as in (4.4), so we get $\varphi = \varepsilon F$, which implies that (4.21) holds.

From now on we assume that a , b , c and ε satisfy (4.21). We study the behaviour of x at $z = 1$.

The rotation R defined in section 4.3.1 moves D_3 onto a horizontal line oriented by the vector $(\cos(\pi\gamma), -\sin(\pi\gamma), 0)$, the vector \vec{v}_1 to the vector $-\vec{e}_3$, and it does not change D_2 . Let $\tilde{x} = R \circ x$. Let $(\tilde{g}, \tilde{\omega})$ be its Weierstrass data, and \tilde{N} its Gauss map. There exists a matrix

$$h = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$$

such that

$$\tilde{g} = \frac{h_{22}g + h_{21}}{h_{12}g + h_{11}}, \quad \tilde{\omega} = (h_{12}g + h_{11})^2 \omega.$$

Then the associated spinors can be choosen as

$$\tilde{k}_1 = (h_{12}g + h_{11})k_1 = (h_{12}k_2 + h_{11}k_1), \quad \tilde{k}_2 = \tilde{g}\tilde{k}_1 = (h_{22}k_2 + h_{21}k_1).$$

We compute that

$$h = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \begin{pmatrix} 1 & it \\ it & 1 \end{pmatrix}.$$

Consequently we have

$$\begin{aligned} \tilde{k}_1 &= z^{\frac{1-\alpha}{2}}(1-z)^{\frac{1-\gamma}{2}}((a+bz)\tilde{\sigma}_1 + cz(1-z)\tilde{\sigma}'_1), \\ \tilde{k}_2 &= z^{\frac{1-\alpha}{2}}(1-z)^{\frac{1-\gamma}{2}}((a+bz)\tilde{\sigma}_2 + cz(1-z)\tilde{\sigma}'_2), \end{aligned}$$

where

$$\begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_1 \\ \tilde{\sigma}_2 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} w_1^{(1)} \\ w_2^{(1)} \end{pmatrix}$$

with

$$m = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & \mu it \\ \lambda^{-1}it & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_{11} & \nu_{12} \\ \nu_{21} & \nu_{22} \end{pmatrix}.$$

These expressions are valid for $z \in \Sigma_1$. We notice that $m_{11} \in i\mathbb{R}$ and $m_{22} \in \mathbb{R}$ since $\lambda \in i\mathbb{R}$ and $\mu \in \mathbb{R}$.

We claim that \tilde{x} has a helicoidal end at $z = 1$ of parameters (C, γ) bounded by $D_2 = R(D_2)$ and $R(D_3)$ if and only if $m_{12} = m_{21} = 0$. The proof of this claim is similar to that of lemma 4.28, so we will only outline the proof. We already know that \tilde{x} maps $(0, 1)$ to a part of D_2 .

Assume that \tilde{x} has a helicoidal end of parameters (C, γ) bounded by D_2 and $R(D_3)$. Then we must have $g(z) \sim i\rho(1-z)^\gamma$ for some $\rho \in \mathbb{R}^*$. This implies $m_{21} = 0$ if $\gamma > 0$ and $m_{12} = 0$ if $\gamma < 0$ (this follows from the fact that $w_1^{(1)}(1) = 1$ and $w_2^{(1)}(z) \sim (1-z)^\gamma$ when $z \rightarrow 1$). Moreover, \tilde{x} maps $(1, 2)$ onto a straight line, so the argument of $\tilde{k}_1^2 - \tilde{k}_2^2$ is constant on $(1, 2)$. This implies that $m_{12} = 0$ if $m_{21} = 0$ and $m_{21} = 0$ if $m_{12} = 0$ (because $w_1^{(1)}, w_2^{(1)}$ and their derivatives take real values on $(1, 2)$).

Conversely, we assume that $m_{12} = m_{21} = 0$. Since $m_{11} \in i\mathbb{R}$ and $m_{22} \in \mathbb{R}$ we have $\arg \tilde{k}_1^2 = \arg(-\tilde{k}_2^2) = \pi$ on $(1, 0)$ and $\arg \tilde{k}_1^2 = \arg(-\tilde{k}_2^2) = -\pi\gamma$ on $(1, 2)$, and we have $d(\tilde{x}_1 + i\tilde{x}_2) = \tilde{\omega} - \tilde{g}^2\tilde{\omega} \sim m_{11}^2(a+b)^2(1-z)^{-1-\gamma}dz - m_{22}^2(a+b-\gamma c)^2(1-z)^{-1+\gamma}dz$. This proves that \tilde{x} has an end bounded by two lines that are parallel to D_2 and $R(D_3)$, and the signed distance of these lines is equal to $-C$ because of the third equation in (4.21). Thus, since we know that \tilde{x} maps $(0, 1)$ to a part of D_2 , we have proved that \tilde{x} has a helicoidal end of parameters (C, γ) bounded by D_2 and $R(D_3)$. This completes proving the claim.

The condition $m_{12} = m_{21} = 0$ is satisfied if and only if $\lambda^{-1}\nu_{12} + \mu it\nu_{22} = \lambda^{-1}it\nu_{11} + \mu\nu_{21} = 0$, that is, because of (4.22), if and only if

$$\varepsilon\alpha\mu^2 = -\frac{\nu_{12}}{t\nu_{22}} = \frac{t\nu_{11}}{\nu_{21}}. \quad (4.23)$$

We recall that μ must be real. Thus there exist $\mu \in \mathbb{R}^*$ and $\varepsilon \in \{1, -1\}$ satisfying (4.23) if and only if $\nu_{12}\nu_{21} = -t^2\nu_{11}\nu_{22}$, which is true by lemma 4.23.

Henceforth we assume that μ and ε are given by (4.23). The real number μ is defined uniquely up to its sign, and ε is the sign of $\frac{t\nu_{11}}{\alpha\nu_{21}}$, i.e., of $\varepsilon_0 \frac{\nu_{11}}{\alpha\nu_{21}}$ by lemma 4.13. Thus the number λ is also defined uniquely up to its sign by (4.22). Thus we have proved the necessity of conditions 1 and 2.

We have $\Delta_1^0 \subset D_1$, $\Delta_2 = D_2$, $\Delta_3^1 \subset D_3$, Δ_1^0 contains a half of D_1 in the direction of \vec{u}_1 and Δ_3^1 contains a half of D_3 in the direction of $-\vec{u}_3$. It now suffices to check that x has a helicoidal end at ∞ bounded by D_3 and D_1 and of parameters (B, β) .

The isometry $T \circ \hat{R}$ defined in section 4.3.1 moves D_1 onto the x_1 -axis oriented by \vec{e}_1 , D_3 onto a horizontal line oriented by $(\cos(\pi\beta), -\sin(\pi\beta), 0)$ and the vector \vec{v}_∞ onto the vector $-\vec{e}_3$. Let $\hat{x} = T \circ \hat{R} \circ x$. Let $(\hat{g}, \hat{\omega})$ be its Weierstrass data, and \hat{N} its Gauss map. There exists a matrix

$$\hat{h} = \begin{pmatrix} \hat{h}_{11} & \hat{h}_{12} \\ \hat{h}_{21} & \hat{h}_{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$$

such that

$$\hat{g} = \frac{\hat{h}_{22}g + \hat{h}_{21}}{\hat{h}_{12}g + \hat{h}_{11}}, \quad \hat{\omega} = (\hat{h}_{12}g + \hat{h}_{11})^2\omega.$$

Then the associated spinors can be chosen as

$$\hat{k}_1 = (\hat{h}_{12}g + \hat{h}_{11})k_1 = (\hat{h}_{12}k_2 + \hat{h}_{11}k_1), \quad \hat{k}_2 = \hat{g}\hat{k}_1 = (\hat{h}_{22}k_2 + \hat{h}_{21}k_1).$$

We compute that

$$\hat{h} = \frac{1}{\sqrt{1+\hat{t}^2}} \begin{pmatrix} e^{i\pi\frac{\alpha}{2}} & ie^{-i\pi\frac{\alpha}{2}}\hat{t} \\ ie^{i\pi\frac{\alpha}{2}}\hat{t} & e^{-i\pi\frac{\alpha}{2}} \end{pmatrix}.$$

Consequently we have

$$\begin{aligned} \hat{k}_1 &= z^{\frac{1-\alpha}{2}}(1-z)^{\frac{1-\gamma}{2}}((a+bz)\hat{\sigma}_1 + cz(1-z)\hat{\sigma}'_1), \\ \hat{k}_2 &= z^{\frac{1-\alpha}{2}}(1-z)^{\frac{1-\gamma}{2}}((a+bz)\hat{\sigma}_2 + cz(1-z)\hat{\sigma}'_2), \end{aligned}$$

where

$$\begin{pmatrix} \hat{\sigma}_1 \\ \hat{\sigma}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{m}_{11} & \hat{m}_{12} \\ \hat{m}_{21} & \hat{m}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1^{(\infty)} \\ w_2^{(\infty)} \end{pmatrix}$$

with

$$\begin{pmatrix} \hat{m}_{11} & \hat{m}_{12} \\ \hat{m}_{21} & \hat{m}_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+\hat{t}^2}} \begin{pmatrix} \lambda^{-1}e^{i\pi\frac{\alpha}{2}} & \mu ie^{-i\pi\frac{\alpha}{2}}\hat{t} \\ \lambda^{-1}ie^{i\pi\frac{\alpha}{2}}\hat{t} & \mu e^{-i\pi\frac{\alpha}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\nu}_{11} & \hat{\nu}_{12} \\ \hat{\nu}_{21} & \hat{\nu}_{22} \end{pmatrix}.$$

These expressions are valid for $z \in \Sigma_\infty$.

We first prove that $\hat{m}_{12} = \hat{m}_{21} = 0$. Indeed, this condition is equivalent to $\lambda^{-1}e^{i\pi\frac{\alpha}{2}}\hat{\nu}_{12} + \mu ie^{-i\pi\frac{\alpha}{2}}\hat{t}\hat{\nu}_{22} = \lambda^{-1}ie^{i\pi\frac{\alpha}{2}}\hat{t}\hat{\nu}_{11} + \mu e^{-i\pi\frac{\alpha}{2}}\hat{\nu}_{21} = 0$, that is, because of (4.22), to

$$\varepsilon e^{-i\pi\alpha}\alpha\mu^2 = -\frac{\hat{\nu}_{12}}{\hat{t}\hat{\nu}_{22}} = \frac{\hat{t}\hat{\nu}_{11}}{\hat{\nu}_{21}}. \quad (4.24)$$

Since μ is defined by (4.23), this condition is equivalent to

$$\hat{\nu}_{12}\hat{\nu}_{21} = -\hat{t}^2\hat{\nu}_{11}\hat{\nu}_{22}, \quad \frac{\hat{t}\hat{\nu}_{11}}{\hat{\nu}_{21}} = e^{-i\pi\alpha}\frac{t\nu_{11}}{\nu_{21}},$$

which holds by lemmas 4.24 and 4.25. This completes proving that $\hat{m}_{12} = \hat{m}_{21} = 0$.

We claim that \hat{x} has a helicoidal end at $z = \infty$ of parameters (B, β) bounded by $T \circ \hat{R}(D_3)$ and $T \circ \hat{R}(D_1)$. Since $\lambda \in i\mathbb{R}$ and $\mu \in \mathbb{R}$, we have $\arg(\hat{m}_{11}^2) = -\pi(\beta + \gamma)$ and $\arg(\hat{m}_{22}^2) = \pi(1 + \beta - \gamma)$, and so $\arg \hat{k}_1^2 = \arg(-\hat{k}_2^2) = \pi(1 + \beta)$ on $(1, +\infty)$ and $\arg \hat{k}_1^2 = \arg(-\hat{k}_2^2) = 0$ on $(-\infty, -1)$. We also have $d(\hat{x}_1 + i\hat{x}_2) = \bar{\omega} - \hat{g}^2\hat{\omega} \sim \kappa_1 z^{-1+\beta} dz + \kappa_2 z^{-1-\beta} dz$ for some $\kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{C}^*$. This proves that \hat{x} has an end bounded by two lines that are parallel to $T \circ \hat{R}(D_3)$ and $T \circ \hat{R}(D_3)$, and the signed distance of these lines is equal to $-B$ because of the second equation in (4.21). Thus, since we know that \hat{x} maps $(1, 2)$ to a part of $T \circ \hat{R}(D_3)$, we have proved that \hat{x} has a helicoidal end of parameters (B, β) bounded by $T \circ \hat{R}(D_3)$ and $T \circ \hat{R}(D_3)$. This completes proving the claim, and this also prove that $\Delta_1 = D_1$ and $\Delta_3 = D_3$.

Thus the immersion x is bounded by D_1 , D_2 and D_3 , and it has helicoidal ends of parameters (A, α) , (B, β) and (C, γ) at 0 , ∞ and 1 respectively. \square

In his memoir [Rie68], Riemann proved the necessity of (4.21), and only with $\varepsilon = 1$: this comes from the fact that he did not take orientations precisely in consideration. Riemann also noticed the following fact (page 335).

Lemma 4.32 (Riemann, [Rie68]). *System (4.21) is equivalent to*

$$\begin{cases} p^2 - \alpha^2(p+q+r)^2 = \varepsilon \frac{A\alpha}{2\pi} \\ q^2 - \beta^2(p+q+r)^2 = \varepsilon \frac{B\beta}{2\pi} \\ r^2 - \gamma^2(p+q+r)^2 = \varepsilon \frac{C\gamma}{2\pi} \end{cases} \quad (4.25)$$

with $p = a + \frac{\alpha}{2}c$, $q = b + \frac{1-\alpha-\gamma}{2}c$ and $r = -a - b + \frac{\gamma}{2}c$.

Theorem 4.33. *A real solution (p, q, r) of system (4.25), where ε is the sign of $\varepsilon_0 \frac{\nu_{11}}{\alpha\nu_{21}}$, gives a minimal immersion $x : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ (possibly with a singular point at a double root of φ defined by (4.4)) bounded by (D_1, D_2, D_3) and having helicoidal ends of parameters (A, α) , (B, β) and (C, γ) at 0, ∞ and 1 respectively. We will denote it $\mathcal{I}(\alpha, \gamma, \beta, \varepsilon_0, p, r, q)$.*

Moreover, two different real solutions of system (4.25) give the same immersion if and only if they are opposite one to the other.

Proof. The first assertion is a consequence of proposition 4.31 and lemma 4.32.

Assume that (p, q, r) and $(\hat{p}, \hat{q}, \hat{r})$ are two real solution of (4.25). Then they correspond to two solutions (a, b, c) and $(\hat{a}, \hat{b}, \hat{c})$ of (4.21), which define functions $K_1, K_2, \hat{K}_1, \hat{K}_2$ by (4.18). If they define the same immersion, then their Weierstrass data are equal, and so $\hat{K}_1 = \pm K_1$ and $\hat{K}_2 = \pm K_2$ (because λ and μ are determined), which implies $(\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}) = \pm(a, b, c)$, and finally $(\hat{p}, \hat{q}, \hat{r}) = \pm(p, q, r)$. The converse is clear. \square

Corollary 4.34. *If $\alpha, \beta, \gamma \in (0, 1)$ (that is if $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \beta_0$ and $\gamma = \gamma_0$), then there exists a minimal immersion $x : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ (possibly with a singular point at a double root of φ) bounded by (D_1, D_2, D_3) and having helicoidal ends of parameters (A, α) , (B, β) and (C, γ) at 0, ∞ and 1 respectively.*

Proof. It suffices to prove that system (4.25) has at least one real solution. We set

$$p(y) = \sqrt{\varepsilon \frac{A\alpha}{2\pi} + \alpha^2 y^2}, \quad q(y) = \sqrt{\varepsilon \frac{B\beta}{2\pi} + \beta^2 y^2}, \quad r(y) = \sqrt{\varepsilon \frac{C\gamma}{2\pi} + \gamma^2 y^2},$$

and we define eight functions

$$F_{\pm\pm\pm}(y) = \pm p(y) \pm q(y) \pm r(y) - y$$

for real numbers y such that these expressions are defined. Then system (4.25) has a real solution if and only if at least one of the eight equations $F_{\pm\pm\pm}(y) = 0$ has a solution $y \in \mathbb{R}$. When $y \rightarrow +\infty$, we have $F_{\pm\pm\pm}(y) \sim (\pm\alpha \pm \beta \pm \gamma - 1)y$. When $y \rightarrow -\infty$, we have $F_{\pm\pm\pm}(y) \sim (\mp\alpha \mp \beta \mp \gamma - 1)y$.

We first deal with the case where $\varepsilon A\alpha$, $\varepsilon B\beta$ and $\varepsilon C\gamma$ are all positive. Then the functions $F_{\pm\pm\pm}$ are defined on the whole \mathbb{R} . Moreover we have $\alpha + \beta - \gamma - 1 < 0$ and $-\alpha - \beta + \gamma - 1 < 0$ because $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{K}$. Thus by the intermediate value theorem equation $F_{++-}(y) = 0$ has a solution $y \in \mathbb{R}$.

We now deal with the case where at least one of the numbers $\varepsilon A\alpha$, $\varepsilon B\beta$ and $\varepsilon C\gamma$ is negative (for example $\varepsilon B\beta$). We can assume that $\frac{\varepsilon B}{2\pi\beta} \leq \frac{\varepsilon A}{2\pi\alpha}$ and $\frac{\varepsilon B}{2\pi\beta} \leq \frac{\varepsilon C}{2\pi\gamma}$. Then the functions $F_{\pm,\pm,\pm}$ are defined for $|y| \geq y_0$ where $y_0 = \sqrt{\frac{|B|}{2\pi\beta}}$. We have $F_{+++}(y_0) = F_{--+}(y_0)$, $\alpha + \beta + \gamma - 1 > 0$ and $\alpha - \beta + \gamma - 1 < 0$ (because $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{K}$). Thus by the intermediate value theorem there exists $y \in \mathbb{R}$ such that $F_{+++}(y) = 0$ or $F_{--+}(y) = 0$ (depending on the sign of $F_{+++}(y_0)$). \square

Remark 4.35. If $\alpha, \beta, \gamma \in (0, 1)$, then we have $\varepsilon = \varepsilon_0$.

4.3.5 The differential equation satisfied by K_1 and K_2

This section contains technical results that will be used to construct trinoids in hyperbolic space (section 4.4). We assume here that the numbers p, q and r defined in lemma 4.32 satisfy system (4.25), and that they are real.

Lemma 4.36. *Set $\hat{\Theta}dz^2 = S_z h - S_z \zeta$ with $h = \frac{K_2}{K_1}$ and $\zeta(z) = \int_0^z \varphi(\tau)d\tau$. Then K_1 and K_2 are solutions on Σ of the following differential equation:*

$$K'' - \frac{\varphi'}{\varphi} K' + \frac{\hat{\Theta}}{2} K = 0. \quad (4.26)$$

Proof. We know that K_1 and K_2 satisfy (4.20) with $F = \varepsilon\varphi$ (because (p, q, r) is a solution of (4.25)). Then the proof is the same as that of equation (4.7) in lemma 4.17. \square

Lemma 4.37. *The function $\hat{\Theta}$ extends to a meromorphic function on $\bar{\mathbb{C}}$. Moreover we have*

$$\hat{\Theta} = \frac{\Phi}{z^2(z-1)^2} + \frac{\hat{\Lambda}}{z(z-1)\varphi} + \frac{2\varphi''}{\varphi}$$

with Φ as in (4.8) and where $\hat{\Lambda}$ is an affine function.

Proof. By proposition 4.31 there exist $\lambda, \mu \in \mathbb{C}^*$ such that the functions $k_1 = \lambda^{-1}K_1$ and $k_2 = \mu K_2$ define a minimal immersion bounded by some $(D_1, D_2, D_3) \in \mathcal{D}$, with possibly a singular point if φ has a double root. Then the Gauss map of this immersion is $g = \lambda\mu h$, so $S_z h = S_z g$. Thus $\hat{\Theta}$ extends to a meromorphic function on $\bar{\mathbb{C}}$ by Schwarz reflection, and the expression of $\hat{\Theta}$ follows from lemma 4.18 (this remains true in the case where φ has a double root, since the order of the pole of $S_z h$ at the root of φ is at most 2). \square

Lemma 4.38. *We have*

$$\begin{aligned} \hat{\Lambda}(0) &= \varepsilon(p+q+r)((\gamma^2 - \beta^2)(2p+q+r) + (1-\alpha^2)(q-r)), \\ \hat{\Lambda}(1) &= \varepsilon(p+q+r)((\alpha^2 - \beta^2)(p+q+2r) + (1-\gamma^2)(q-p)), \\ \hat{\Lambda}(1) - \hat{\Lambda}(0) &= \varepsilon(p+q+r)((\alpha^2 - \gamma^2)(p+2q+r) + (1-\beta^2)(r-p)). \end{aligned}$$

Proof. We recall that in the neighbourhood of 0 we have

$$K_j = z^{\frac{1-\alpha}{2}}(1-z)^{\frac{1-\gamma}{2}} \left((a+bz)w_j^{(0)} + cz(1-z)(w_j^{(0)})' \right)$$

for $j = 1, 2$, with $w_j^{(0)}$ as in section 4.3.3. We have

$$h(z) = z^\alpha \frac{a + \alpha c + \left(b - \alpha c + \frac{s_{+-}-s_{++}}{1+\alpha}(a + (1+\alpha)c) \right) z + O(z^2)}{a + \left(b + \frac{s_{--}-s_{-+}}{1-\alpha}(a+c) \right) z + O(z^2)}.$$

The coefficient of the order -1 term in $\hat{\Theta}$ at 0 is $\hat{s}_{-1} = \frac{1-\alpha^2}{\alpha} \frac{h_1}{h_0}$ where $h(z) = z^\alpha(h_0 + h_1 z + O(z^2))$. We compute that

$$\begin{aligned}\hat{s}_{-1} &= \frac{1}{2(p^2 - \alpha^2(p+q+r)^2)} \times \\ &\quad (\alpha^2(\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 - 1)(p+q+r)^2 + (-\alpha^2 + 5\beta^2 - 5\gamma^2 + 1)p^2 \\ &\quad + (2\alpha^2 + 2\beta^2 - 2\gamma^2 - 2)q^2 + (-2\alpha^2 + 2\beta^2 - 2\gamma^2 + 2)r^2 \\ &\quad + 2(\alpha^2 + 3\beta^2 - 3\gamma^2 - 1)pq + 2(-\alpha^2 + 3\beta^2 - 3\gamma^2 + 1)pr + 4(\beta^2 - \gamma^2)qr).\end{aligned}$$

Using that $p^2 - \alpha^2(p+q+r)^2 = \varepsilon \frac{A\alpha}{2\pi}$ we get that

$$\begin{aligned}\hat{s}_{-1} &= \varepsilon \frac{\pi}{A\alpha} \times \\ &\quad (-(\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 - 1)\varepsilon \frac{A\alpha}{2\pi} + 4(\beta^2 - \gamma^2)p^2 \\ &\quad + (2\alpha^2 + 2\beta^2 - 2\gamma^2 - 2)q^2 + (-2\alpha^2 + 2\beta^2 - 2\gamma^2 + 2)r^2 \\ &\quad + 2(\alpha^2 + 3\beta^2 - 3\gamma^2 - 1)pq + 2(-\alpha^2 + 3\beta^2 - 3\gamma^2 + 1)pr + 4(\beta^2 - \gamma^2)qr).\end{aligned}$$

On the other hand we have $\hat{s}_{-1} = -\frac{\hat{\Lambda}(0)}{\varphi(0)} + \Phi'(0) + 2\Phi(0)$, so using the fact that $\Phi'(0) + 2\Phi(0) = \frac{1-\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2}$ and $\varphi(0) = \frac{A\alpha}{2\pi}$ we conclude that

$$\hat{\Lambda}(0) = \varepsilon(p+q+r)((\gamma^2 - \beta^2)(2p+q+r) + (1 - \alpha^2)(q-r)).$$

In the neighbourhood of 1 we have

$$K_j = z^{\frac{1-\alpha}{2}}(1-z)^{\frac{1-\gamma}{2}} \left((a+bz)w_j^{(1)} + cz(1-z)(w_j^{(1)})' \right)$$

for $j = 1, 2$, with $w_j^{(1)}$ as in section 4.3.3. In the same way we compute that

$$\hat{\Lambda}(1) = \varepsilon(p+q+r)((\alpha^2 - \beta^2)(p+q+2r) + (1 - \gamma^2)(q-p)),$$

and we deduce the expression of $\hat{\Lambda}(1) - \hat{\Lambda}(0)$.

□

4.4 Application to trinoids in hyperbolic space

4.4.1 The cousin relation

We recall a few facts about the cousin relation between minimal surfaces in \mathbb{R}^3 and Bryant surfaces, i.e., constant-mean-curvature-one (CMC-1) surfaces in hyperbolic space \mathbb{H}^3 . The asymptotic boundary of \mathbb{H}^3 will be denoted by $\partial_\infty \mathbb{H}^3$.

Let S be a simply connected Riemann surface. If $x : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ is a conformal minimal immersion, I and II its first and second fundamental forms, then there exists a conformal CMC-1 immersion $\tilde{x} : S \rightarrow \mathbb{H}^3$ whose first and second fundamental forms are

$$\tilde{I} = I, \quad \tilde{II} = II + I,$$

and conversely. The immersions x and \tilde{x} are said to be cousin immersions. They are unique up to isometries of \mathbb{R}^3 and \mathbb{H}^3 respectively.

Bryant proved in [Bry87] that if \tilde{x} is such an immersion (with S non necessarily simply connected), then there exists a holomorphic immersion $F : \tilde{S} \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ where \tilde{S} is the universal cover of S such that $\tilde{x} = FF^*$ and $\det(F^{-1}dF) = 0$, where the model of hyperbolic space is

$$\mathbb{H}^3 = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid M^* = M, \mathrm{tr} M > 0, \det M = 1\}.$$

Moreover we have

$$F^{-1}dF = \begin{pmatrix} g & -g^2 \\ 1 & -g \end{pmatrix} \omega$$

where (g, ω) are the Weierstrass data of the cousin immersion x (see also [UY93]). The map F is called the Bryant representation of x .

The geodesic lines of curvature of x correspond to the geodesic lines of curvature of \tilde{x} , and they lie in planes that are orthogonal to the surface. The Schwarz reflection principle for geodesic lines of curvature also holds for Bryant surfaces. Thus a planar symmetry of x corresponds to a planar symmetry of \tilde{x} . These facts are explained in details in [Kar01] and [SET01].

The cousin immersion of the conjugate immersion of x will be called the conjugate cousin immersion of x and it will be denoted by x° . Thus the Weierstrass data of x° are $(g^\circ, \omega^\circ) = (g, i\omega)$. Moreover, straight lines of x correspond to geodesic lines of curvature of x° (hence lying in hyperbolic planes), and symmetries of x with respect to a straight line correspond to symmetries of x° with respect to a hyperbolic plane.

4.4.2 Trinoids

Sá Earp and Toubiana proved in [SET01] that an embedded end of finite total curvature is either asymptotic to the end of a rotational catenoid cousin (in which case it is called a catenoidal end) or to a horosphere (in which case it is called a horospherical end). The catenoidal ends are the embedded type I ends in the sense of [UY93]; they are asymptotically rotational surfaces (see [Dan03a]).

Definition 4.39. A Bryant surface is called a trinoid if it has genus zero and three catenoidal ends.

Consequently, a trinoid is given by a conformal CMC-1 immersion defined on $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. The three ends correspond to 0, 1 and ∞ .

The definitions of a catenoidal end and of a trinoid in [BPS02] are slightly different from ours. However it turns out that the definitions of trinoids are equivalent.

Collin, Hauswirth and Rosenberg proved many results about properly embedded Bryant surfaces ([CHR01]): a properly embedded Bryant surface of genus 0 with 1 end (respectively 2 ends, 3 ends) is a horosphere (respectively an embedded catenoid cousin, an embedded trinoid).

The aim of this section is to construct trinoids by the method of the conjugate cousin immersion. We first prove the following proposition, which is a reformulation of lemma 2.4 in [SET01] and which will be useful in the sequel.

Proposition 4.40. Let \mathcal{O} be a neighbourhood of 0 in \mathbb{C} , $\mathcal{O}^* = \mathcal{O} \setminus \{0\}$ and $\widetilde{\mathcal{O}}^*$ be the universal cover of \mathcal{O}^* . Let $\mu \in \mathbb{R}^*$ and let $x : \widetilde{\mathcal{O}}^* \rightarrow \mathbb{H}^3$ be a conformal CMC-1 immersion whose Weierstrass data

(g, ω) satisfy

$$g(z) \sim g_0 z^\mu, \quad \omega \sim \omega_0 z^{-1-\mu} dz$$

when $z \rightarrow 0$ with $g_0, \omega_0 \in \mathbb{C}^*$. Let Q be its Hopf differential.

Then x is an embedding of a punctured neighbourhood of 0 in Ω^* if and only if the 2-form $S_z g - 2Q$ is holomorphic at 0.

Proof. We set

$$g(z) = z^\mu(g_0 + g_1 z + O(z^2)), \quad \omega = z^{-1-\mu}(\omega_0 + \omega_1 z + O(z^2))dz.$$

Then we have

$$Q = z^{-2}(q_{-2} + q_{-1}z + O(1))dz^2, \quad S_z g = z^{-2}(s_{-2} + s_{-1}z + O(1))dz^2$$

$$\text{with } q_{-2} = \mu\omega_0 g_0, \quad q_{-1} = \mu\omega_1 g_0 + (1+\mu)\omega_0 g_1, \quad s_{-2} = \frac{1-\mu^2}{2}, \quad s_{-1} = \frac{1-\mu^2}{\mu} \frac{g_1}{g_0}.$$

We first assume that $\mu > 0$. Then, according to lemma 2.4 in [SET01], x is an embedding of a punctured neighbourhood of 0 in Ω^* if and only if

$$g_0\omega_0 = \frac{1-\mu^2}{4\mu}, \quad (1+\mu)\frac{\omega_1}{\omega_0} = 2\mu\omega_1 g_0 + 2(1+\mu)\omega_0 g_1. \quad (4.27)$$

The first condition in (4.27) is equivalent to $s_{-2} = 2q_{-2}$ (this means that $S_z g - 2Q$ has at most a pole of order 1 at 0). If this condition is satisfied, then since $\frac{q_{-1}}{q_{-2}} = \frac{\omega_1}{\omega_0} + \frac{1+\mu}{\mu} \frac{g_1}{g_0}$, the second condition in (4.27) is equivalent to $(1+\mu) \left(\frac{q_{-1}}{q_{-2}} - \frac{s_{-1}}{1-\mu} \right) = 2q_{-1}$, and thus to $s_{-1} = 2q_{-1}$, which completes the proof in the case where $\mu > 0$.

We now deal with the case where $\mu < 0$. The data $(g^{-1}, -g^2\omega)$ define the same CMC-1 immersion as (g, ω) (see for example [UY93]), and we have $g^{-1}(z) \sim g_0^{-1}z^{-\mu}$, $-g^2\omega \sim -g_0^2\omega_0 z^{-1+\mu}dz$, and $S_z g - 2Q$ is unchanged, so it suffices to apply the previous case with $-\mu$ instead of μ . \square

Remark 4.41. Umehara and Yamada proved in [UY93] that $S_z G = S_z g - 2Q$ where G is the hyperbolic Gauss map of the immersion x .

Let $(D_1, D_2, D_3) \in \mathcal{D}$, $(\alpha_0, \gamma_0, \beta_0, -A, -C, -B, \varepsilon_0) = L(D_1, D_2, D_3)$ (see section 4.3.1), $\alpha \in \alpha_0 + 2\mathbb{Z}$, $\beta \in \beta_0 + 2\mathbb{Z}$, $\gamma \in \gamma_0 + 2\mathbb{Z}$. Let $x : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ be a minimal immersion bounded by (D_1, D_2, D_3) or its dual configuration, and having helicoidal ends of parameters (A, α) , (B, β) and (C, γ) at 0, 1 and ∞ respectively, corresponding to a solution (p, q, r) of (4.25) where $\varepsilon = \pm 1$. Let (g, ω) be its Weierstrass data and $Q = \omega dg$ its Hopf differential.

Then the conjugate cousin immersion $x^\circ : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^3$ maps $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ and $(1, \infty)$ onto three geodesic lines of curvature \mathcal{L}_1 , \mathcal{L}_2 and \mathcal{L}_3 belonging to three hyperbolic planes \mathcal{P}_1 , \mathcal{P}_2 and \mathcal{P}_3 .

Proposition 4.42. *If $\frac{\alpha^2}{4} > \frac{A\alpha}{2\pi}$, $\frac{\beta^2}{4} > \frac{B\beta}{2\pi}$ and $\frac{\gamma^2}{4} > \frac{C\gamma}{2\pi}$, then the asymptotic boundary of each end of x° consists of one point.*

Proof. It suffices to prove that the asymptotic boundary of the end at 0 consists of one point. The Hopf differential $Q^\circ = \omega^\circ dg^\circ$ satisfies $Q^\circ \sim q_{-2}z^{-2}dz$ at 0 with $q_{-2} = -\frac{A\alpha}{2\pi}$. We proceed as in the proof of lemma 2.4 in [SET01]: since the indicial equations $\tau^2 + \alpha\tau - q_{-2}$ and $v^2 - \alpha v - q_{-2}$ have a positive discriminant $\Delta = \alpha^2 + 4q_{-2}$ (because of the hypothesis), we prove that, up to an isometry of

\mathbb{H}^3 , the Bryant representation of x is $F = \begin{pmatrix} z^\tau A_1(z) & z^\nu B_1(z) \\ z^\tau C_1(z) & z^\nu D_1(z) \end{pmatrix}$ where $\tau = \frac{-\sqrt{\Delta}-\alpha}{2}$, $\nu = \frac{-\sqrt{\Delta}+\alpha}{2}$ and where A_1, B_1, C_1 and D_1 are holomorphic functions in a neighbourhood of 0 in $\{\text{Im } z \geq 0\}$ that do not vanish at 0. Using the identification of \mathbb{H}^3 with the upper half-space model $\{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 | y_3 > 0\}$ described in [SET01], we get

$$y_1 + iy_2 = \frac{|z|^{2\tau} \overline{A_1} C_1 + |z|^{2\nu} \overline{B_1} D_1}{|z|^{2\tau} |A_1|^2 + |z|^{2\nu} |B_1|^2}, \quad y_3 = \frac{1}{|z|^{2\tau} |A_1|^2 + |z|^{2\nu} |B_1|^2}$$

(this is formula (1.2) of [SET01]). Thus we have $y_3 \rightarrow 0$ when $z \rightarrow 0$ (since τ or ν is negative), and $y_1 + iy_2 \rightarrow \frac{C_1(0)}{A_1(0)}$ or $y_1 + iy_2 \rightarrow \frac{D_1(0)}{B_1(0)}$ (depending on the sign of α). This proves the assertion. \square

From now on we assume that $\frac{\alpha^2}{4} > \frac{A\alpha}{2\pi}$, $\frac{\beta^2}{4} > \frac{B\beta}{2\pi}$ and $\frac{\gamma^2}{4} > \frac{C\gamma}{2\pi}$. Thus the lines \mathcal{L}_1 , \mathcal{L}_2 and \mathcal{L}_3 are pairwise concurrent in $\partial_\infty \mathbb{H}^3$ at the asymptotic boundary points. Applying Schwarz reflections with respect to these planes and repeating the process with respect to the new planes infinitely many times, we get a conformal CMC-1 immersion $x^\circ : \widetilde{\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}} \rightarrow \mathbb{H}^3$ where $\widetilde{\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}}$ is the universal cover of $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. This immersion x° is well-defined on $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ if and only if the planes \mathcal{P}_1 , \mathcal{P}_2 and \mathcal{P}_3 are equal.

Proposition 4.43. *If the immersion x° gives a trinoid by Schwarz reflection, then we have*

$$\frac{A\alpha}{2\pi} = \frac{\alpha^2 - 1}{4}, \quad \frac{B\beta}{2\pi} = \frac{\beta^2 - 1}{4}, \quad \frac{C\gamma}{2\pi} = \frac{\gamma^2 - 1}{4}. \quad (4.28)$$

Proof. Assume that x° gives a trinoid by Schwarz reflection. Then x° is well-defined on $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, and its ends are embedded. Let Q° be its Hopf differential. We have $Q^\circ = iQ$.

Its Weierstrass data satisfy $g^\circ(z) = g(z) \sim g_0 z^\alpha$ and $\omega^\circ = i\omega \sim \omega_0 z^{-1-\alpha} dz$ when $z \rightarrow 0$, with $g_0, \omega_0 \in \mathbb{C}^*$. Then by proposition 4.40 the form $S_z g^\circ - 2Q^\circ$ is holomorphic at 0. In particular the order -2 term vanishes, that is $\frac{1-\alpha^2}{2} + 2\frac{A\alpha}{2\pi} = 0$.

The other two identities are obtained in the same way for the ends at ∞ and 1. \square

A computation gives the following result.

Lemma 4.44. *The complex solutions of system*

$$\begin{cases} p^2 - \alpha^2(p+q+r)^2 &= \frac{\alpha^2-1}{4} \\ q^2 - \beta^2(p+q+r)^2 &= \frac{\beta^2-1}{4} \\ r^2 - \gamma^2(p+q+r)^2 &= \frac{\gamma^2-1}{4} \end{cases} \quad (4.29)$$

are $(-\frac{i}{2}, \frac{i}{2}, \frac{i}{2})$, $(\frac{i}{2}, -\frac{i}{2}, \frac{i}{2})$, $(\frac{i}{2}, \frac{i}{2}, -\frac{i}{2})$, $(U\delta, V\delta, W\delta)$ and their opposites, where

$$U = -3\alpha^4 + 2(1 + \beta^2 + \gamma^2)\alpha^2 + \beta^4 + \gamma^4 - 2(\beta^2 + \gamma^2 + \beta^2\gamma^2) + 1,$$

$$V = -3\beta^4 + 2(1 + \alpha^2 + \gamma^2)\beta^2 + \alpha^4 + \gamma^4 - 2(\alpha^2 + \gamma^2 + \alpha^2\gamma^2) + 1,$$

$$W = -3\gamma^4 + 2(1 + \alpha^2 + \beta^2)\gamma^2 + \alpha^4 + \beta^4 - 2(\alpha^2 + \beta^2 + \alpha^2\beta^2) + 1,$$

and where δ is a complex square root of $-\frac{1}{4\Pi}$ with Π defined by (4.13).

The complex solutions of system

$$\begin{cases} p^2 - \alpha^2(p+q+r)^2 = \frac{1-\alpha^2}{4} \\ q^2 - \beta^2(p+q+r)^2 = \frac{1-\beta^2}{4} \\ r^2 - \gamma^2(p+q+r)^2 = \frac{1-\gamma^2}{4} \end{cases} \quad (4.30)$$

are $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(iU\delta, iV\delta, iW\delta)$ and their opposites.

Remark 4.45. These solutions are distinct if and only if $1 - \alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 \neq 0$, $1 - \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 \neq 0$ and $1 + \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 \neq 0$.

Remark 4.46. We compute that $U + V + W$ is -4 times the discriminant of Φ .

Proposition 4.47. *The immersion x° gives a trinoid by Schwarz reflection if and only if (4.28) holds, φ has no double root, and $(p, q, r) = \pm(U\delta, V\delta, W\delta)$ in the case where $\delta \in \mathbb{R}$ or $(p, q, r) = \pm(iU\delta, iV\delta, iW\delta)$ in the case where $\delta \in i\mathbb{R}$, where U, V, W and δ are as in lemma 4.44.*

Proof. We have

$$S_z g^\circ - 2Q^\circ = \left(\frac{\Phi + 2\varphi}{z^2(z-1)^2} + \frac{\Lambda}{\varphi z(z-1)} + \frac{2\varphi''}{\varphi} \right) dz^2 + S_z \zeta$$

with $\zeta(z) = \int_0^z \varphi(\tau) d\tau$, Φ as in (4.8) and Λ as $\hat{\Lambda}$ in lemma 4.38. By proposition 4.40, x° gives a trinoid if and only if $S_z g^\circ - 2Q^\circ$ is holomorphic at $0, 1$ and ∞ . This holds if and only if $\Phi = -2\varphi$ (i.e., if (4.28) holds, i.e., if (p, q, r) is a real solution of (4.29) or (4.30)) and $\Lambda = 0$ (we recall that $\frac{2\varphi''}{\varphi} dz^2 + S_z \zeta$ is holomorphic at ∞).

By lemma 4.38 we have $\Lambda = 0$ if and only if $p + q + r = 0$ or

$$\begin{cases} (\gamma^2 - \beta^2)(2p + q + r) + (1 - \alpha^2)(q - r) = 0 \\ (\alpha^2 - \beta^2)(p + q + 2r) + (1 - \gamma^2)(q - p) = 0 \end{cases} \quad (4.31)$$

We notice that $(U, V, W) \neq (0, 0, 0)$ (since $(U\delta, V\delta, W\delta)$ is a solution of (4.29)). Thus the set of solutions of (4.31) is the complex line $\mathbb{C}(U, V, W)$. Hence the only solutions of (4.31) that are also solutions of (4.29) or (4.30) are $(U\delta, V\delta, W\delta)$, $(iU\delta, iV\delta, iW\delta)$ and their opposites.

There is a solution (p, q, r) of (4.29) or (4.30) satisfying $p + q + r = 0$ if and only if $U + V + W = 0$, i.e., if and only if φ has a double real root a_1 (by remark 4.46 and since $\Phi = -2\varphi$). In this case these solutions are again $(U\delta, V\delta, W\delta)$, $(iU\delta, iV\delta, iW\delta)$ and their opposites.

Hence, in the case where φ has a double root a_1 , the solutions (p, q, r) satisfy $p + q + r = 0$, which implies $\Lambda = 0$ by lemma 4.38. Thus the exponents of equation (4.7) at a_1 are 1 and 2. This implies that the spinors k_1 and k_2 associated to x both vanish at a_1 , and so x and x° do have a singular point at a_1 .

Moreover, the numbers p, q and r are required to be real, so the proof is complete. \square

Remark 4.48. In the case where φ has a double root, the result still holds except that the immersion giving the trinoid has a singularity at the root of φ .

Theorem 4.49. *Let μ_0, μ_1 and μ_∞ be three positive non-integer real numbers. Assume that*

$$(|[\mu_0]|, |[\mu_1]|, |[\mu_\infty]|) \in \mathcal{K}, \quad (4.32)$$

where $[r]$ denotes the unique number in $(-1, 1]$ such that $r - [r] \in 2\mathbb{Z}$, and that

$$\mu_0^4 + \mu_1^4 + \mu_\infty^4 - 2\mu_0^2\mu_1^2 - 2\mu_0^2\mu_\infty^2 - 2\mu_1^2\mu_\infty^2 + 2\mu_0^2 + 2\mu_1^2 + 2\mu_\infty^2 - 3 \neq 0. \quad (4.33)$$

Then there exists a trinoid $\mathcal{T}_{\mu_0, \mu_1, \mu_\infty}$ whose ends are of growths $1 - \mu_0$, $1 - \mu_1$ and $1 - \mu_\infty$ and having a symmetry plane.

The ends of $\mathcal{T}_{\mu_0, \mu_1, \mu_\infty}$ have distinct asymptotic boundary points if and only if $1 - \mu_0^2 - \mu_1^2 + \mu_\infty^2 \neq 0$, $1 - \mu_0^2 + \mu_1^2 - \mu_\infty^2 \neq 0$ and $1 + \mu_0^2 - \mu_1^2 - \mu_\infty^2 \neq 0$. More precisely, the ends of growths $1 - \mu_0$ and $1 - \mu_1$ (respectively $1 - \mu_0$ and $1 - \mu_\infty$, $1 - \mu_1$ and $1 - \mu_\infty$) have distinct asymptotic boundary points if and only if $1 - \mu_0^2 - \mu_1^2 + \mu_\infty^2 \neq 0$ (respectively $1 - \mu_0^2 + \mu_1^2 - \mu_\infty^2 \neq 0$, $1 + \mu_0^2 - \mu_1^2 - \mu_\infty^2 \neq 0$). In particular the three ends cannot have the same asymptotic boundary point.

Proof. We set $\alpha = \mu_0$ if $\mu_0 \in |[\mu_0]| + 2\mathbb{Z}$ and $\alpha = -\mu_0$ if $-\mu_0 \in |[\mu_0]| + 2\mathbb{Z}$ (in order to be compatible with the conventions of section 4.3.2). In the same way we set $\beta = \pm\mu_\infty$ and $\gamma = \pm\mu_1$. Let $\varepsilon_0 \in \{1, -1\}$. By proposition 4.9 there exists a triple (D_1, D_2, D_3) such that $L(D_1, D_2, D_3) = (|[\mu_0]|, |[\mu_1]|, |[\mu_\infty]|, -A, -C, -B, \varepsilon_0)$ with $\frac{A\alpha}{2\pi} = \frac{\alpha^2 - 1}{4}$, $\frac{B\beta}{2\pi} = \frac{\beta^2 - 1}{4}$, $\frac{C\gamma}{2\pi} = \frac{\gamma^2 - 1}{4}$. Then by (4.33) the corresponding φ has no double root, and so by proposition 4.47 there exists a minimal immersion $x : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$ bounded by (D_1, D_2, D_3) or its dual configuration whose conjugate cousin x° gives a trinoid by Schwarz reflection ; moreover the growths of the ends of this trinoid are $1 - \mu_0$, $1 - \mu_1$ and $1 - \mu_\infty$ respectively (it suffices to consider the coefficient of the order -2 term of Q° at each end). This proves the existence of the trinoid $\mathcal{T}_{\mu_0, \mu_1, \mu_\infty}$ (it has a symmetry plane by construction).

Up to an isometry of \mathbb{H}^3 , the hyperbolic Gauss map of x° is $G^\circ(z) = z + \frac{(a_1 - a_2)^2}{2(2z - a_1 - a_2)}$ where a_1 and a_2 are the roots of φ (see [RUY01], example 4.4; we notice that $S_z G^\circ = S_z \zeta + \frac{2\varphi''}{\varphi} dz^2$). Moreover, the limit of the hyperbolic Gauss map at a catenoidal end is the asymptotic boundary point of the end (see [SET01]). Thus, to compare the asymptotic boundary points of the ends, it suffices to compare $G^\circ(0)$, $G^\circ(1)$ and $G^\circ(\infty)$.

We have $G^\circ(0) = -\frac{(a_1 - a_2)^2}{2(a_1 + a_2)}$, $G^\circ(1) = 1 + \frac{(a_1 - a_2)^2}{2(2 - a_1 - a_2)}$ and $G^\circ(\infty) = \infty$. Thus we have $G^\circ(0) = G^\circ(1)$ if and only if $a_1 + a_2 = 2a_1a_2$, i.e., $1 - \mu_0^2 - \mu_1^2 + \mu_\infty^2 = 0$; we have $G^\circ(0) = G^\circ(\infty)$ if and only if $a_1 + a_2 = 0$, i.e., $1 - \mu_0^2 + \mu_1^2 - \mu_\infty^2 = 0$; we have $G^\circ(1) = G^\circ(\infty)$ if and only if $a_1 + a_2 = 2$, i.e., $1 + \mu_0^2 - \mu_1^2 - \mu_\infty^2 = 0$. This also implies that we never have $G^\circ(0) = G^\circ(1) = G^\circ(\infty)$. \square

Remark 4.50. If (4.32) holds but (4.33) does not hold, then there exists a “trinoid” $\mathcal{T}_{\mu_0, \mu_1, \mu_\infty}$ with one singular point.

Corollary 4.51. If $(\mu_0, \mu_1, \mu_\infty) \in \mathcal{K}$ and $\mu_0, \mu_1, \mu_\infty \in (0, 1)$ (i.e., if the growths are positive), then the trinoid $\mathcal{T}_{\mu_0, \mu_1, \mu_\infty}$ exists and its ends have distinct asymptotic boundary points.

Proof. In this case we have $\mu_j = |[\mu_j]|$ for $j = 0, 1, \infty$. The fact that $(\mu_0, \mu_1, \mu_\infty) \in \mathcal{K}$ implies that $\mu_\infty > 1 - \mu_0 - \mu_1$ and $\mu_\infty > -1 + \mu_0 + \mu_1$, and so $1 - \mu_0^2 - \mu_1^2 + \mu_\infty^2 > 1 - \mu_0^2 - \mu_1^2 + (1 - \mu_0 - \mu_1)^2 = 2(1 - \mu_0)(1 - \mu_1) > 0$. In the same way we have $1 - \mu_0^2 + \mu_1^2 - \mu_\infty^2 \neq 0$ and $1 + \mu_0^2 - \mu_1^2 - \mu_\infty^2 \neq 0$. Thus the asymptotic boundary points of the ends are distinct.

Set $d(\mu_0, \mu_1, \mu_\infty) = \mu_0^4 + \mu_1^4 + \mu_\infty^4 - 2\mu_0^2\mu_1^2 - 2\mu_0^2\mu_\infty^2 - 2\mu_1^2\mu_\infty^2 + 2\mu_0^2 + 2\mu_1^2 + 2\mu_\infty^2 - 3$. The derivative of d with respect to μ_∞^2 is equal to $2(\mu_\infty^2 - \mu_0^2 - \mu_1^2 + 1)$, which was proven to be positive. Without loss of generality we can assume that $\mu_0 \geq \mu_1$. We have $\mu_\infty < 1 - \mu_0 + \mu_1$, and so $d(\mu_0, \mu_1, \mu_\infty) < d(\mu_0, \mu_1, 1 - \mu_0 + \mu_1) = 8(\mu_1 + 1)(\mu_0 - \mu_1) \leq 0$. Thus (4.33) is satisfied, and the trinoid has no singularity. \square

Irreducible trinoids are classified by theorem 2.6 of [UY00]. They correspond to trinoids with non-integer growth ends. Theorem 2.6 of [UY00] states that there exists a trinoid $\mathcal{T}_{\mu_0, \mu_1, \mu_\infty}$ (without assuming that it has a symmetry plane) if and only if (4.33) holds and

$$\cos^2(\pi\mu_0) + \cos^2(\pi\mu_1) + \cos^2(\pi\mu_\infty) + 2\cos(\pi\mu_0)\cos(\pi\mu_1)\cos(\pi\mu_\infty) < 1, \quad (4.34)$$

and in this case this trinoid is unique (in this theorem, the β_j ($j = 1, 2, 3$) correspond to our $\mu_j - 1$ ($j = 0, 1, \infty$), the c_j to our $\frac{1-\mu_j^2}{2}$). Irreducible trinoids are also classified in [BPS02]; it is also proved that (4.34) is equivalent to (4.32) (in [BPS02] the Δ_j ($j = 1, 2, 3$) correspond to our $\frac{\|\mu_j\|}{2}$ ($j = 0, 1, \infty$)). Pictures of trinoids can be found in [BPS02] (see also [RUY01], example 4.4).

Proposition 4.52. *If (4.28) holds and if the asymptotic boundary points of the ends of x° are distinct, then x° gives a trinoid by Schwarz reflection.*

Proof. For $j = 1, 2, 3$, the oriented curve \mathcal{L}_j and the mean curvature vector of x° on \mathcal{L}_j induce an orientation of the plane \mathcal{P}_j . Denote by p_0, p_1 and p_∞ the asymptotic boundaries of the ends of x° at $0, 1$ and ∞ respectively. Then \mathcal{L}_1 goes from p_∞ to p_0 , \mathcal{L}_2 goes from p_0 to p_1 , and \mathcal{L}_3 goes from p_1 to p_∞ . Denote by Q_1, Q_2 and Q_3 the asymptotic boundaries of $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ and \mathcal{P}_3 . These are great circles in $\bar{\mathbb{C}}$. They are given the orientation induced by $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ and \mathcal{P}_3 respectively. We have $p_0 \in Q_1 \cap Q_2$, $p_1 \in Q_2 \cap Q_3$ and $p_\infty \in Q_3 \cap Q_1$. Moreover, the circles are pairwise tangent at these points, and their orientations at these points are compatible (since the boundary lines have turned of an angle π at each end, because of (4.28)). Since p_0, p_1 and p_∞ are distinct, this is not possible unless the three circles are equal (see figure 4.8). Consequently, the planes $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ and \mathcal{P}_3 are equal, and doing the Schwarz reflection of x° with respect to this plane gives a trinoid. \square

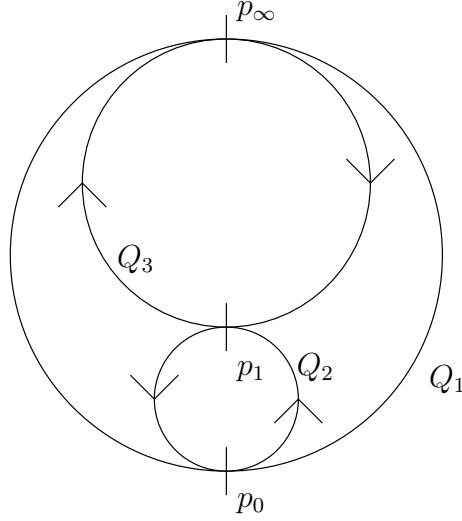


Figure 4.8: The asymptotic boundaries of the boundary planes; there is no orientation of Q_1 compatible with those of Q_2 and Q_3 .

We now describe what the immersion x° looks like in the case where $(p, q, r) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $(p, q, r) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ or $(p, q, r) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. We first notice that $(iU\delta, iV\delta, iW\delta) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $(iU\delta, iV\delta, iW\delta) =$

$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ and $(iU\delta, iV\delta, iW\delta) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ if and only if $1 - \alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 = 0$, $1 - \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 = 0$ and $1 + \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2 = 0$ respectively. Henceforth we assume that none of these conditions are satisfied.

If $(p, q, r) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, then by lemma 4.38 we have $\Lambda(0) \neq 0$, $\Lambda(1) = 0$ and $\Lambda(1) - \Lambda(0) \neq 0$, so $S_z g^\circ - 2Q^\circ$ has poles of order 1 at 0 and ∞ and is holomorphic at 1. This means that the end at 1 is embedded, but the ends at 0 and ∞ are not: the planes \mathcal{P}_2 and \mathcal{P}_3 are identical, and the plane \mathcal{P}_1 is tangent at infinity to \mathcal{P}_2 but different. Applying Schwarz reflection infinitely many times, we get a surface that is invariant by the parabolic isometry generated by the reflections with respect to \mathcal{P}_1 and \mathcal{P}_2 . The ends at 0 and ∞ are not annular ends since x° is not single-valued at 0 and ∞ .

If $(p, q, r) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, then we have $\Lambda(0) \neq 0$, $\Lambda(1) \neq 0$ and $\Lambda(1) - \Lambda(0) = 0$, so similarly the end at ∞ is embedded and the ends at 0 and 1 are not (and they are not annular ends).

If $(p, q, r) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, then we have $\Lambda(0) = 0$, $\Lambda(1) \neq 0$ and $\Lambda(1) - \Lambda(0) \neq 0$, so the end at 0 is embedded and the ends at 1 and ∞ are not (and they are not annular ends).

Then by proposition 4.52 the asymptotic boundary points of these immersions are not pairwise distinct (otherwise these immersions would give trinoids by Schwarz reflection).

Bibliographie

- [Bal03] A. Balser. On trinoids and minimal disks bounded by lines. Master's thesis, Technische Universität Darmstadt, 2003.
- [BPS02] A. Bobenko, T. Pavlyukevich, and B. Springborn. Hyperbolic constant mean curvature one surfaces : Spinor representation and trinoids in hypergeometric functions. À paraître dans Math. Z.; arXiv :math.DG/0206021, 2002.
- [Bry87] R. Bryant. Surfaces of mean curvature one in hyperbolic space. *Astérisque*, 154–155 :321–347, 1987.
- [Car92] M. do Carmo. *Riemannian Geometry*. Birkhäuser, 1992.
- [CHR01] P. Collin, L. Hauswirth, and H. Rosenberg. The geometry of finite topology Bryant surfaces. *Ann. of Math. (2)*, 153 :1–37, 2001.
- [CHR02] P. Collin, L. Hauswirth, and H. Rosenberg. The Gaussian image of mean curvature one surfaces in \mathbb{H}^3 of finite total curvature. In *Minimal Surfaces, Geometric Analysis and Symplectic Geometry, Baltimore, MD 1999, Adv. Stud. Pure Math., 34, Math. Soc. Japan, Tokyo*, pages 9–14, 2002.
- [Dan02] B. Daniel. Surfaces de Bryant dans \mathbb{H}^3 de type fini. *Bull. Sci. Math.*, 126(7) :581–594, 2002.
- [Dan03a] B. Daniel. Flux for Bryant surfaces and applications to embedded ends of finite total curvature. *Illinois J. Math.*, 47(3) :667–698, 2003.
- [Dan03b] B. Daniel. Minimal disks bounded by three straight lines in Euclidean space and trinoids in hyperbolic space. Prépublication de l'Institut de Mathématiques de Jussieu no 348; arXiv :math.DG/0307066, 2003.
- [FM97] C. Frohman and W. Meeks. The ordering theorem for the ends of properly embedded minimal surfaces. *Topology*, 36(3) :605–617, 1997.
- [Gri76] P. Griffiths. *Entire Holomorphic Mappings in One and Several Complex Variables*. Annals of Mathematics Studies. Princeton University Press, 1976.
- [HK97] D. Hoffman and H. Karcher. Complete embedded minimal surfaces of finite total curvature. In *Encyclopaedia Math. Sci., 90, Geometry, V*, pages 5–93. Springer, 1997.
- [HPR01] L. Hauswirth, J. Pérez, and P. Romon. Embedded minimal ends of finite type. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 353 :1335–1370, 2001.
- [Kar01] H. Karcher. Hyperbolic constant mean curvature one surfaces with compact fundamental domains. Prépublication, 2001.
- [KK93] N. Korevaar and R. Kusner. The global structure of constant mean curvature surfaces. *Invent. Math.*, 114 :311–332, 1993.

- [KKMS92] N. Korevaar, R. Kusner, W. Meeks, and B. Solomon. Constant mean curvature surfaces in hyperbolic space. *Amer. J. Math.*, 114 :1–43, 1992.
- [KKS89] N. Korevaar, R. Kusner, and B. Solomon. The structure of complete embedded surfaces with constant mean curvature. *J. Differential Geom.*, 30 :465–503, 1989.
- [KS96] R. Kusner and N. Schmitt. The spinor representation of surfaces in space. arXiv :dg-ga/96100050, 1996.
- [KUY97] S. Kato, M. Umehara, and K. Yamada. An inverse problem of the flux for minimal surfaces. *Indiana Univ. Math. J.*, 46 :529–559, 1997.
- [LR85] G. Levitt and H. Rosenberg. Symmetry of constant mean curvature hypersurfaces in hyperbolic space. *Duke Math. J.*, 52(1) :53–59, 1985.
- [MOS66] W. Magnus, F. Oberhettinger, and R. P. Soni. *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics*. Springer-Verlag, 1966.
- [Nab92] G. Naber. *The Geometry of Minkowski Spacetime*. Springer-Verlag, 1992.
- [Nev70] R. Nevanlinna. *Analytic Functions*. Springer-Verlag, 1970.
- [Oss69] R. Osserman. *A Survey of Minimal Surfaces*. Van Nostrand, 1969.
- [PP01] F. Pacard and F. Pimentel. Attaching handles to Bryant surfaces. À paraître dans *J. Inst. Math. Jussieu*; arXiv :math.DG/0112224, 2001.
- [Rie68] B. Riemann. Les surfaces d’aire minima pour un contour donné. In *Oeuvres mathématiques de Riemann (traduites par L. Langen)*, pages 305–352. Librairie scientifique et technique Albert Blanchard, Paris, 1968. Rédigé en 1867 par K. Hattendorf à partir d’un manuscrit de B. Riemann.
- [Rom97] P. Romon. Symmetries and conserved quantities for minimal surfaces. Prépublication de l’Université de Marne-la-Vallée no 12–97, 1997.
- [Ros92] H. Rosenberg. Some recent developments in the theory of properly embedded minimal surfaces in \mathbb{R}^3 . *Astérisque*, 206 :463–535, 1992. Séminaire Bourbaki.
- [Ros95] H. Rosenberg. Minimal surfaces of finite type. *Bull. Soc. Math. France*, 123 :351–359, 1995.
- [Ros01] W. Rossman. Mean curvature one surfaces in hyperbolic space, and their relationship to minimal surfaces in Euclidean space. *J. Geom. Anal.*, 11(4), 2001.
- [Ros02] H. Rosenberg. Bryant surfaces. In *The Global Theory of Minimal Surfaces in Flat Spaces, Martina Franca, Italy 1999, Lecture Notes in Mathematics 1775*. Springer, 2002.
- [Ros03] H. Rosenberg. Some recent developments in the theory of minimal surfaces. Prépublication, 2003.
- [RR98] L. Rodríguez and H. Rosenberg. Minimal surfaces in \mathbb{R}^3 with one end and bounded curvature. *Manuscripta Math.*, 96 :3–7, 1998.
- [RS98] W. Rossman and K. Sato. Constant mean curvature surfaces with two ends in hyperbolic space. *Experiment. Math.*, 7(2) :101–119, 1998.
- [RUY99] W. Rossman, M. Umehara, and K. Yamada. Flux for mean curvature 1 surfaces in hyperbolic 3-space, and applications. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 127(7) :2147–2154, 1999.
- [RUY01] W. Rossman, M. Umehara, and K. Yamada. Period problems for mean curvature 1 surfaces in \mathbb{H}^3 (with application to surfaces of low total curvature). À paraître dans *Adv. Stud. Pure Math., Surveys on Geometry and Integrable Systems*; arXiv :math.DG/0102185, 2001.

- [Sch83] R. Schoen. Uniqueness, symmetry, and embeddedness of minimal surfaces. *J. Differential Geom.*, 18 :791–809, 1983.
- [SET97] R. Sá Earp and É. Toubiana. *Introduction à la géométrie hyperbolique et aux surfaces de Riemann*. Bibliothèque des Sciences, Diderot, 1997.
- [SET01] R. Sá Earp and É. Toubiana. On the geometry of constant mean curvature one surfaces in hyperbolic space. *Illinois J. Math.*, 45(2) :371–401, 2001.
- [SN99] V. F. de Sousa Neto. Costa type surfaces in hyperbolic space. *Anais Acad. Brasil. Ci.*, 71(3–I) :333–338, 1999.
- [Tur55] H. L. Turrittin. Convergent solutions of ordinary linear homogeneous differential equations in the neighborhood of an irregular singular point. *Acta Math.*, 93 :27–65, 1955.
- [UY93] M. Umehara and K. Yamada. Complete surfaces of constant mean curvature 1 in the hyperbolic 3-space. *Ann. of Math. (2)*, 137 :611–638, 1993.
- [UY97] M. Umehara and K. Yamada. A duality on cmc-1 surface in hyperbolic 3-space and a hyperbolic analogue of the Osserman inequality. *Tsukuba J. Math.*, 21 :229–237, 1997.
- [UY00] M. Umehara and K. Yamada. Metrics of constant curvature 1 with three conical singularities on the 2-sphere. *Illinois J. Math.*, 44(1) :72–94, 2000.
- [WW63] E. T. Whittaker and G. W. Watson. *A Course of Modern Analysis*. Cambridge University Press, 1963.
- [Yu97] Z. Yu. The value distribution of the hyperbolic Gauss map. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 125 :2997–3001, 1997.
- [Yu98] Z. Yu. The inverse surface and the Osserman inequality. *Tsukuba J. Math.*, 22 :575–588, 1998.
- [Yu01] Z. Yu. Surfaces of constant mean curvature one in the hyperbolic three-space with irregular ends. *Tohoku Math. J.*, 53 :305–318, 2001.