UNIVERSITE PARIS 7 - DENIS DIDEROT
UFR DE MATHEMATIQUES

Année : 2002 N° |_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|

THÈSE DE DOCTORAT

Spécialité : Mathématiques

Catégories dérivées de blocs à défaut non abélien de $\mathrm{GL}_2(q)$

---

présentée par

Bertrand GONARD

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS 7

soutenue le 4 octobre 2002 devant le jury composé de :

Michel BROUÉ	(co-directeur)
Pierre CARTIER	
Meinolf GECK	(rapporteur)
Bernhard KELLER	
Jeremy RICKARD	(rapporteur)
Raphaël ROUQUIER	(co-directeur)

Remerciements

Je remercie tout d'abord vivement Michel Broué. Il m'a accordé sa confiance dès le début de mon DEA, il m'a proposé un sujet de recherche qui a comblé mes espérances, puis il m'a soutenu en toute situation. Je dois beaucoup à sa présence solide et à ses multiples talents, mathématiques comme humains. Et il m'a orienté vers Raphaël Rouquier, qui est finalement devenu co-directeur de cette thèse. L'entrain, la disponibilité, le soutien de celui-ci ont entretenu ma motivation et mon plaisir à réaliser cette thèse. Pour ses réponses rapides et précises, ses conseils d'excellente qualité, je lui exprime de chaleureux remerciements.

Je dois également beaucoup à Bernhard Keller. Son cours de DEA "méthodes de l'algèbre homologique" a été pour moi d'une importance capitale, son enseignement m'a véritablement passionné et il contribue aujourd'hui encore à mes choix mathématiques. Pendant mon doctorat j'ai de nombreuses fois frappé à la porte de son bureau et j'y ai toujours trouvé des réponses claires et précises. Je le remercie pour ses conseils mathématiques, pour sa patience et sa gentillesse, et finalement pour me faire l'honneur d'être membre de mon jury de thèse.

Jeremy Rickard et Meinolf Geck ont accepté de lire ma thèse et d'en être les rapporteurs. Leurs rapports positifs m'ont beaucoup gratifié. Je leur suis également très reconnaissant de faire le voyage jusqu'à Paris pour participer au jury. Je remercie également beaucoup Pierre Cartier, je suis très honoré qu'il ait accepté de faire partie de mon jury.

Tout le long de mon doctorat, j'ai bénéficié de l'entourage stimulant de l'équipe des groupes finis et algébriques de Paris 7. Tous ses membres m'ont un jour ou l'autre aidé en répondant à mes questions et en m'enseignant certaines notions. Pour cela je les remercie, ainsi que pour leur accueil au sein des leurs. J'ai une pensée particulière pour Dominique Martinais, que j'ai connue en travaux dirigés d'algèbre pendant ma maîtrise. Outre son enseignement exceptionnel elle m'a apporté conseils et soutien, j'ai développé pour elle une grande amitié et elle restera toujours pour moi une personne inestimable.

Je tiens à remercier Jean-Jacques Sansuc pour son appui discret mais

solide depuis le début de mon troisième cycle, et Michèle Wasse pour sa sympathie, son dévouement, et sa grande compétence.

J'ai eu la chance de bénéficier d'une ambiance de travail très agréable à Chevaleret. Je salue et remercie tous les collègues doctorants qui ont partagé mon bureau, en particulier François Martin, avec qui j'ai entamé une réelle amitié autour des jeux mathématiques et logiques, Sibylle Schroll-Rehaeuser pour qui mon amitié ne faiblira pas malgré la distance, et Kenji Lefèvre dont j'espère suivre les pérégrinations.

Un doctorat nécessite aussi de forts appuis affectifs. L'entourage de ma famille m'a beaucoup aidé, je remercie en particulier mon père Raymond Gonard et mon grand-père Henri Loubignac pour leur soutien permanent, lequel fut si important au moment du choix de mes études. Je suis aussi entouré d'un bon nombre d'amis, Ils m'apportent énormément et je les en remercie beaucoup. Enfin, Sophie, merci d'avoir été là, merci pour ta patience, ta compréhension, ta confiance.

Table des matières

1 Le groupe $\mathrm{GL}_2(q)$ **19**
- 1.1 Notations générales . . . 19
  - 1.1.1 Anneaux et corps de base . . . 19
  - 1.1.2 Groupes . . . 20
  - 1.1.3 Blocs . . . 21
  - 1.1.4 Algèbre homologique . . . 21
- 1.2 Le groupe algébrique GL_2 . . . 22
- 1.3 Le groupe $\mathrm{GL}_2(q)$ . . . 23
  - 1.3.1 Les normalisateurs des tores de G . . . 24
  - 1.3.2 Les sous-groupes de Sylow de G et leurs normalisateurs 24
- 1.4 Situation $\ell = 2$, q impair . . . 25
  - 1.4.1 Cas $q \equiv \pm 3 \pmod 8$ . . . 26
  - 1.4.2 Cas $q \equiv \pm 1 \pmod 8$ . . . 31
- 1.5 Théorie de Deligne-Lusztig . . . 32
  - 1.5.1 Résumé de la théorie . . . 32
  - 1.5.2 Application à $\mathrm{GL}_2(q)$ . . . 34

2 Isotypies **39**
- 2.1 Définitions . . . 39
  - 2.1.1 Applications de décomposition . . . 39
  - 2.1.2 Isotypies . . . 40
  - 2.1.3 La conjecture de Broué . . . 41
- 2.2 Aspect pratique . . . 41
  - 2.2.1 Centralisateurs ℓ-nilpotents . . . 41
  - 2.2.2 Eléments centraux . . . 43
- 2.3 Quotient par le ℓ-centre . . . 45
  - 2.3.1 Propriétés . . . 45
  - 2.3.2 Inflation d'une isotypie . . . 50
  - 2.3.3 Déflation d'une isotypie . . . 53
- 2.4 Isotypies dans $\mathrm{GL}_2(q)$ . . . 56
  - 2.4.1 ℓ impair, ℓ divise $q-1$ . . . 56
  - 2.4.2 ℓ impair, ℓ divise $q+1$ . . . 58
  - 2.4.3 $\ell = 2$, q impair . . . 58

3 Equivalences splendides **65**
3.1 Définitions et conjectures 65
3.1.1 Equivalences splendides 65
3.1.2 Le cas des groupes finis de type de Lie 67
3.2 Quelques propriétés générales 67
3.2.1 Complexes et homotopie 67
3.2.2 Propriétés diverses 72
3.2.3 Inflation et Déflation 75
3.2.4 Bicomplexes basculants 78
3.3 ℓ divise $q-1$ 85
3.4 ℓ divise $q+1$ 90
3.4.1 Le complexe de Deligne-Lusztig 90
3.4.2 Construction de l'isomorphisme $\mathcal{O}H_s \simeq \mathrm{End}_{\mathcal{H}^b(A)}(\Lambda_s)$ 101
3.4.3 Changement de complexe 107
3.4.4 Conclusion. 109
3.5 Complexes de Deligne-Lusztig des groupes associés 110
3.5.1 Cas de $\mathrm{SL}_2(q)$ 110
3.5.2 Quotients des complexes Λ_e et Λ_s 113
3.5.3 Restriction au bloc principal 116
3.6 Cas $\ell = 2$, $q \equiv \pm 3 \pmod 8$ 120
3.6.1 Notations 120
3.6.2 Relèvement des équivalences stables 121
3.6.3 Relèvement à GL_2 127

4 Blocs et A_∞-algèbres **131**
4.1 A_∞-algèbres 132
4.1.1 Définitions 132
4.1.2 Théorèmes 135
4.1.3 Calcul du modèle minimal d'une DG-algèbre 136
4.1.4 Lien avec la cohomologie de Hochschild 137
4.2 Etude préliminaire de la situation 140
4.2.1 Idempotents, annulation des m_n 140
4.2.2 Spécialisation des complexes 142
4.3 $\mathrm{PSL}_2(q)$ avec $q \equiv \pm 3 \pmod 8$ 146
4.3.1 Les complexes X_e et X_s 147
4.3.2 Représentants minimaux 151
4.3.3 Variante 156
4.3.4 Non-formalité de $\mathcal{A}$ 160
4.4 $\mathrm{PGL}_2(q)$ avec $q \equiv \pm 3 \pmod 8$ 161
4.5 Les blocs à défaut diédral 167
4.5.1 La classification 167
4.5.2 Le 2-bloc principal de $\mathrm{PGL}_2(q)$ 173
4.5.3 Les complexes X_e et X_s 173
4.6 $\mathrm{PGL}_2(q)$ avec q impair 175

4.6.1 Applications f_1, g_1 et s 176
4.6.2 Calcul de la A_∞-structure de $\mathcal{A}$ 180

A Contrôle de la fusion **183**
A.1 Le théorème de fusion d'Alperin 183
A.2 Conséquence sur le contrôle de la fusion 187

B Tables de caractères et matrices de décomposition **189**
B.1 $\mathrm{PSL}_2(q)$ 189
B.1.1 Cas $q \equiv 1 \pmod 4$ 189
B.1.2 Cas $q \equiv 3 \pmod 4$ 190
B.2 $\mathrm{PGL}_2(q)$ 192
B.2.1 Cas $q \equiv 1 \pmod 4$ 195
B.2.2 Cas $q \equiv 3 \pmod 4$ 196
B.3 $\mathrm{SL}_2(q)$ 197
B.4 $\mathrm{GL}_2(q)$ 199
B.5 Sous-groupes locaux de $\mathrm{GL}_2(q)$ 201
B.6 $\mathfrak{A}_4$ et $\mathfrak{S}_4$ 205
B.7 Structure des modules sur $k\mathfrak{A}_4$ et $k\mathfrak{S}_4$ 206

Introduction

Les groupes finis apparaissent naturellement dans de nombreuses situations, en mathématiques bien sûr, mais aussi dans d'autres sciences telles que la physique ou la chimie. Ils forment à ce titre une classe fondamentale d'objets mathématiques, dont la richesse et la complexité est attestée par la classification des groupes simples finis.

Un outil capital pour leur étude est la théorie des représentations linéaires. Celle-ci étudie l'algèbre kG d'un groupe fini G sur un anneau commutatif k. En considérant cette algèbre plutôt que le groupe G lui-même on accède à une palette plus vaste d'outils et de techniques mathématiques, comme l'algèbre linéaire et l'algèbre homologique.

Si k est un corps de caractéristique ℓ non nulle, alors on parle de *représentations modulaires*. Cette théorie, introduite par R. Brauer au milieu du XXème siècle, est liée à la *structure ℓ-locale* du groupe, c'est-à-dire à la structure de ses ℓ-sous-groupes, de leurs normalisateurs, etc... L'algèbre kG se décompose en somme directe de sous-algèbres indécomposables, que l'on appelle les *blocs* de kG. Pour étudier ces blocs il suffit de se concentrer sur l'un d'entre eux, le *bloc principal*, car la complexité de sa structure est au moins aussi grande que celle des autres.

A toute représentation linéaire de dimension finie on associe un *caractère*. La théorie des caractères permet d'étudier les composantes irréductibles des représentations linéaires d'un groupe fini. Si k est un corps de caractéristique nulle contenant suffisament de racines de l'unité, la théorie des caractères détermine entièrement la structure des représentations linéaires. En effet les représentations irréductibles ne peuvent pas être assemblées de façon non triviale : l'algèbre kG est semi-simple.

Par contre dans le cas où la caractéristique de k est un nombre premier ℓ non nul qui divise l'ordre du groupe, la structure d'une représentation linéaire peut être complexe, elle n'est pas déterminée par ses composantes irréductibles. La théorie des caractères permet toujours de déterminer ces composantes, mais ne renseigne pas sur leur agencement. Elle a donc toujours un rôle important mais ne suffit pas pour l'étude des blocs.

L'utilisation depuis une dizaine d'années de l'algèbre homologique constitue une approche intéressante et fructueuse de l'étude des représentations modulaires des groupes finis. Comme un bloc est une algèbre particulière, il donne lieu à plusieurs catégories comme sa catégorie de modules ou sa catégorie dérivée. On peut ainsi comparer deux blocs en comparant les catégories qui leur sont associées. On dit que deux blocs sont en équivalence *de Morita* ou *dérivée* si leurs catégories de modules ou leurs catégories dérivées sont équivalentes. Chacune de ces équivalences préserve certaines propriétés des blocs, comme le nombre de caractères irréductibles ordinaires et modulaires, le centre, l'homologie de Hochschild, etc...

En 1989 M. Broué définit la notion d'*isométrie parfaite* entre deux blocs. Il s'agit d'un isomorphisme entre les groupes des caractères de deux blocs, muni de certaines propriétés supplémentaires. Une isométrie parfaite entre deux blocs donne lieu à de fortes similitudes, essentiellement arithmétiques, entre les deux blocs. M. Broué définit aussi la notion plus forte d'*isotypie*, qui relie deux blocs dont les structures ℓ-locales sont isomorphes. Il montre ensuite que l'existence d'une équivalence entre les catégories dérivées (bornées) de deux blocs implique l'existence d'une isométrie parfaite reliant ces deux blocs.

Ces notions permettent à M. Broué d'énoncer différentes formes de sa conjecture. Nous en donnons l'expression dans le cas particulier des blocs principaux. On suppose que ℓ est un nombre premier, on note $\mathcal{O}$ un anneau de valuation discrète complet et k son corps résiduel. On suppose que $\mathcal{O}$ est de caractéristique nulle et que k est de caractéristique ℓ. De plus on suppose que $\mathcal{O}$ est "assez gros" pour tous les groupes en présence. Nous nous plaçons dans la situation suivante :

Hypothèse : Soit G un groupe fini. On suppose que les ℓ-sous-groupes de Sylow de G sont abéliens, et on note H le normalisateur de l'un d'entre eux.

Conjecture 1 : Il existe une isométrie parfaite entre les blocs principaux de $\mathcal{O}G$ et de $\mathcal{O}H$.

Conjecture 2 : Il existe une isotypie entre les blocs principaux de $\mathcal{O}G$ et de $\mathcal{O}H$.

Conjecture 3 : Il existe une équivalence dérivée entre les blocs principaux de $\mathcal{O}G$ et de $\mathcal{O}H$.

Notons que la validité de la conjecture 3 implique qu'il existe une équivalence dérivée entre les blocs principaux de kG et de kH.

La conjecture 3 est une version "structurelle" de la conjecture 1. Il manquait alors une version structurelle de la conjecture 2. En 1996, J. Rickard définit la notion d'équivalence *splendide* entre deux blocs, qui consiste en une équivalence dérivée munie de certaines propriétés, et il montre que l'existence

d'une telle équivalence implique l'existence d'une isotypie. Nous avons alors le *raffinement de Rickard de la conjecture de Broué* :

Conjecture 4 : Il existe une équivalence splendide entre les blocs principaux de $\mathcal{O}G$ et de $\mathcal{O}H$.

La validité de cette conjecture est équivalente à l'existence d'une équivalence splendide entre les blocs principaux de kG et de kH. Nous avons les implications suivantes :

$$\begin{array}{ccc} 2 & \Rightarrow & 1 \\ \Uparrow & & \Uparrow \\ 4 & \Rightarrow & 3. \end{array}$$

Il est intéressant de constater que, partant de l'étude des groupes de caractères des blocs, on est arrivé à l'étude des catégories dérivées. Les isométries parfaites et isotypies, au niveau de caractères, ont suggéré l'existence au niveau des catégories des notions beaucoup plus fines que sont les équivalences dérivées et splendides.

La classification des groupes simples finis montre que la plupart d'entre eux sont des groupes finis de type de Lie, c'est-à-dire qu'ils s'obtiennent à partir de groupes algébriques. Ceci permet d'utiliser des outils de géométrie algébrique supplémentaires. Dans cette situation, M. Broué a précisé sa conjecture en prédisant que le complexe donnant l'équivalence splendide serait le complexe donnant la cohomologie ℓ-adique d'une certaine variété de Deligne-Lusztig. Ceci implique une compatibilité des isotypies et équivalences de catégories avec l'induction de Deligne-Lusztig.

La validité de ces conjectures permettrait de déduire des informations sur le ℓ-bloc principal d'un groupe dont les ℓ-sous-groupes de Sylow sont abéliens à partir d'informations sur celui du normalisateur de l'un de ses sous-groupes de Sylow. Ce normalisateur peut être beaucoup plus petit, comme le montre par exemple le cas du Monstre pour $\ell = 11$: ce groupe est d'ordre supérieur à $8 \cdot 10^{53}$ alors que les normalisateurs de ses 11-sous-groupes de Sylow sont d'ordre 72600.

Ces conjectures ont été démontrées dans plusieurs cas, nous en donnons une liste non exhaustive :

- La conjecture 2 est démontrée dans tous les cas si $\ell = 2$ par P. Fong et M. Harris,
- Dans le cas d'un groupe fini G de type de Lie connexe défini sur un corps de caractéristique différente de ℓ, en supposant que ℓ est "bon" pour G, la conjecture 2 est démontrée par M. Broué, G. Malle et J. Michel.
- La conjecture 3 est démontrée si les sous-groupes de Sylow de G sont cycliques par J. Rickard et M. Linckelmann.
- La conjecture 4 est démontrée dans cette même situation par R. Rouquier.

- Cette conjecture est egalement démontrée pour un groupe fini de type de Lie défini sur un corps à q éléments, si ℓ divise $q-1$ mais ne divise pas l'ordre du groupe de Weyl, par L. Puig.

La conjecture de Broué ainsi que sa version plus générale concernant les blocs non principaux sont liées aux conjectures de J. L. Alperin de de E. C. Dade. La première exprime le nombre de caractères irréductibles d'un bloc comme somme alternée de nombres de caractères irréductibles de certains sous-groupes locaux, et la seconde fait intervenir en plus la hauteur des caractères. Ces conjectures ne supposent pas que les ℓ-sous-groupes de Sylow du groupe concerné sont abéliens. Par contre si la conjecture de Broué est vraie alors les conjectures d'Alperin et de Dade le sont aussi dans la situation où les sous-groupes de Sylow sont abéliens.

Cette proximité de la conjecture de Broué avec les conjectures d'Alperin et de Dade, ainsi que la difficulté que pose sa démonstration, suggèrent de la généraliser à des groupes dont les sous-groupes de Sylow ne sont pas abéliens, voire d'englober les trois conjectures en une conjecture commune. Il manque en particulier une version "structurelle" des conjectures d'Alperin et de Dade. C'est ce problème qui me motiva durant la préparation de cette thèse.

Le but de ma thèse est de donner une description de la catégorie dérivée du bloc principal d'un groupe dont les ℓ-sous-groupes de Sylow ne sont pas abéliens. J'étudie en détail le cas du groupe fini $\mathrm{GL}_2(q)$ où q est une puissance d'un nombre premier p différent de ℓ. Je décris aussi le cas des groupes linéaires qui lui sont reliés, à savoir $\mathrm{SL}_2(q)$, $\mathrm{PGL}_2(q)$ et $\mathrm{PSL}_2(q)$ (*cf* table 1).

TAB. 1 – Les groupes linéaires sur $\mathbb{F}_q$

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathbb{F}_q^\times & \twoheadrightarrow & \pm 1 \\
 & & \uparrow & & \uparrow \\
\mathbb{F}_q^\times & \rightarrowtail & \mathrm{GL}_2(q) & \twoheadrightarrow & \mathrm{PGL}_2(q) \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
\pm 1 & \rightarrowtail & \mathrm{SL}_2(q) & \twoheadrightarrow & \mathrm{PSL}_2(q)
\end{array}$$

Les cas non semi-simples sont les cas où ℓ divise $q-1$ ou $q+1$, car l'ordre de $\mathrm{GL}_2(q)$ est $q(q-1)^2(q+1)$. La seule situation dans laquelle les sous-groupes de Sylow ne sont pas abéliens est la situation dans laquelle ℓ divise

$q-1$ *et* $q+1$, il s'agit donc du cas où $\ell = 2$ et q est impair. J'étudie alors le bloc principal de $\mathrm{GL}_2(q)$ et je décris des algèbres qui sont en équivalence dérivée avec lui.

Dans le premier chapitre je fixe les notations et je commence à étudier le groupe $\mathrm{GL}_2(q)$, ainsi que le groupe algébrique $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$ où $\mathbb{F}$ est une clôture algébrique du corps à q éléments. Je décris les sous-groupes de Sylow de $\mathrm{GL}_2(q)$ et leurs normalisateurs. Si $\ell = 2$ et q est impair alors le cas où q est congru à ± 3 modulo 8 se distingue.

Je montre que si q n'est pas congru à ± 3 modulo 8 alors aucun sous-groupe local de $\mathrm{GL}_2(q)$ ne contrôle la fusion des ℓ-sous-groupes (propriété 1.4.6), ce qui implique qu'aucune isotypie n'est à espérer entre le bloc principal de $\mathrm{GL}_2(q)$ et celui de l'un de ses sous-groupes locaux. Si q est congru à ± 3 modulo 8 alors un sous-groupe local contrôle la fusion des ℓ-sous-groupes de $\mathrm{GL}_2(q)$. Il s'agit du normalisateur dans $\mathrm{GL}_2(q)$ d'un sous-groupe de Sylow de $\mathrm{SL}_2(q)$. Pour montrer qu'il contrôle la fusion des sous-groupes de $\mathrm{GL}_2(q)$ (propriété 1.4.2), je pars d'une propriété plus forte du quotient $\mathrm{PGL}_2(q)$: le normalisateur dans $\mathrm{PGL}_2(q)$ d'un 2-sous-groupe de Sylow de $\mathrm{PSL}_2(q)$ est *faiblement 2-plongé* dans $\mathrm{PGL}_2(q)$ (propriété 1.4.3).

Je termine le premier chapitre en décrivant les variétés de Deligne-Lusztig associées au groupe $\mathrm{GL}_2(q)$, et en donnant une expression de l'induction de Deligne-Lusztig dans cette situation. Le groupe de Weyl du groupe algébrique $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$ est d'ordre 2, on note e son élément trivial et s son élément non trivial. La théorie de Deligne-Lusztig donne lieu a deux variétés $\boldsymbol{Y}_e$ et $\boldsymbol{Y}_s$, puis à deux foncteurs d'inductions $R^G_{T_e}$ et $R^G_{T_s}$.

Le deuxième chapitre est consacré aux isotypies. Je commence par rappeler la définition des applications de décomposition généralisées, des isométrie parfaites et des isotypies. Je donne ensuite quelques propriétés qui permettent de réduire le nombre de vérifications à faire pour montrer qu'une application donnée est une isotypie. L'une d'entre elles en particulier permet de résoudre le problème posé par la présence d'un ℓ-centre non trivial (propriété 2.3.10).

Ensuite j'applique ces résultats à l'étude de $\mathrm{GL}_2(q)$. Je vérifie la conjecture de Broué dans les cas des sous-groupes de Sylow abéliens, c'est-à-dire si ℓ est différent de 2 et ℓ divise $q-1$ ou $q+1$. La validité de la conjecture dans ces cas était déjà connue. J'explicite l'expression des isotypies (propriétés 2.4.1 et 2.4.2), puis je vérifie que si ℓ divise $q-1$ alors l'isotypie est compatible avec l'induction $R^G_{T_e}$ et si ℓ divise $q+1$ alors elle est compatible avec l'induction $R^G_{T_s}$. Dans le premier cas, l'isotypie n'a pas de signe négatif, ce qui est conséquence du fait que $R^G_{T_e}$ est l'induction de Harish-Chandra, et que celle-ci est un foncteur entre catégories de modules.

J'étudie ensuite le cas où les sous-groupes de Sylow ne sont pas abéliens, c'est-à-dire celui où $\ell = 2$ et q est impair. Je vérifie d'abord que le bloc

principal de $\mathrm{GL}_2(q)$ n'est pas de même type que celui du normalisateur d'un sous-groupe de Sylow. Ensuite je démontre que si q est congru à ± 3 modulo 8, alors le bloc principal de $\mathrm{GL}_2(q)$ est de même type que le bloc principal du normalisateur dans $\mathrm{GL}_2(q)$ d'un sous-groupe de Sylow de $\mathrm{SL}_2(q)$ (propriétés 2.4.3 et 2.4.4).

Dans le troisième chapitre, je démontre que les isotypies obtenues dans la première partie proviennent bien d'équivalences splendides entre les catégories dérivées des blocs concernés. Je donne d'abord la définition d'une équivalence splendide, je rappelle la conjecture de Broué en terme de catégories dérivées, sa précision dans le cas des groupes finis de type de Lie, et son raffinement de Rickard. Ensuite je rappelle quelques propriétés générales qui me serviront dans la suite, en particulier un théorème de J. Rickard sur les bicomplexes basculants (théorème 3.2.20).

La théorie de Deligne-Lusztig associe à $\mathrm{GL}_2(q)$ deux complexes Λ_e et Λ_s qui donnent la cohomologie ℓ-adique des variétés de Deligne-Lusztig $\boldsymbol{Y}_e$ et $\boldsymbol{Y}_s$. Dans les cas où les sous-groupes de Sylow abéliens, je vérifie que ces complexes induisent bien des équivalences de catégories.

La variété $\boldsymbol{Y}_e$ est de dimension 0, le complexe Λ_e obtenu est donc concentré en degré 0. Si ℓ divise $q-1$ et $\ell \neq 2$, il induit une équivalence splendide de Morita entre la somme des blocs de défaut maximal de $\mathrm{GL}_2(q)$ et l'algèbre de groupe du normalisateur d'un ℓ-sous-groupe de Sylow (propriété 3.3.3), ce qui vérifie toutes les versions de la conjecture de Broué. Le fait que cette équivalence splendide soit une équivalence de Morita est lié au fait que l'isotypie obtenue dans le deuxième chapitre n'a que des signes positifs. L'existence de cette équivalence splendide de Morita était connue, c'est une conséquence de travaux plus généraux de L. Puig.

La variété $\boldsymbol{Y}_s$ est de dimension 1. L'étude du complexe Λ_s est plus longue. Je calcule son algèbre d'endomorphismes (propriété 3.4.10), je montre qu'il vérifie la propriété de disjonction (propriété 3.4.6), puis j'utilise les techniques d'algèbres différentielles graduées développées par B. Keller pour obtenir un bicomplexe basculant. Si ℓ divise $q+1$ et $\ell \neq 2$ alors ce bicomplexe réalise une équivalence splendide entre la somme des blocs de $\mathrm{GL}_2(q)$ de défaut maximal et l'algèbre de groupe du normalisateur d'un ℓ-sous-groupe de Sylow (propriété 3.4.14). Ceci vérifie donc toutes les formes de la conjecture de Broué. Ce résultat avait déjà été obtenu sous une forme moins précise par R. Rouquier.

Dans le cas des sous-groupes de Sylow non abéliens, donc si $\ell = 2$ et q est impair, les outils de géométrie algébrique utilisés précédemment ne peuvent pas permettre d'obtenir des équivalences de catégories. Pour obtenir les équivalences splendides présagées par l'existence des isotypies exhibées dans le premier chapitre, je me place tout d'abord dans le quotient $\mathrm{PGL}_2(q)$. Je pars du fait que le normalisateur d'un sous-groupe de Sylow de $\mathrm{PSL}_2(q)$

dans $\mathrm{PGL}_2(q)$ est faiblement ℓ-plongé dans $\mathrm{PGL}_2(q)$; ceci donne lieu grâce à un théorème de M. Broué à une équivalence *stable* entre les blocs principaux des deux groupes concernés, *i.e.,* une équivalence entre les catégories stables de ces deux blocs. Ensuite je relève cette équivalence stable en une équivalence dérivée, grâce à un théorème de M. Linckelman. Pour cela je traite séparément les cas $q \equiv 3 \pmod 8$ et $q \equiv 5 \pmod 8$, le premier donnant lieu en fait à une équivalence de Morita (propriétés 3.6.4 et 3.6.6). Finalement grâce à des résultats de R. Rouquier, je relève les équivalences obtenues au groupe $\mathrm{GL}_2(q)$ (théorème 3.6.9).

Je traite ensuite le cas des groupes reliés à $\mathrm{GL}_2(q)$. Pour $\mathrm{SL}_2(q)$ (section 3.5.1), la théorie de Deligne et Lusztig donne le même type de résultats que pour $\mathrm{GL}_2(q)$. A ce stade, pour chacun de ces deux groupes j'ai défini un module Λ_e et un complexe Λ_s. J'étudie alors leurs analogues dans les groupes $\mathrm{PGL}_2(q)$ et $\mathrm{PSL}_2(q)$, dans le but de les utiliser dans la section suivante. Je calcule leurs algèbres d'endomorphismes et je montre que l'image du complexe Λ_s vérifie toujours la propriété de disjonction (section 3.5.2).

Le quatrième chapitre est consacré à l'application de la notion de A_∞-*algèbre* à ma situation. C'est en effet ce cadre qui me permet de donner une description naturelle de la catégorie dérivée du bloc principal de $\mathrm{GL}_2(q)$ si $\ell = 2$ et q est impair.

Les A_∞-algèbres ont été définies en 1963 par J. Stasheff. Elle permettent en particulier de formaliser des problèmes de topologie algébrique, comme le défaut d'associativité de la composition des chemins dans un espace topologique. Elles ont été utilisées dans les années 90 par M. Kontsevich pour énoncer sa conjecture sur la symétrie miroir. Intuitivement, une A_∞-algèbre est une algèbre "associative à homotopie près". Une propriété importante des A_∞-algèbres et A_∞-modules est que tout quasi-isomorphisme est inversible à homotopie près, c'est-à-dire que les catégories homotopique et dérivée d'une A_∞-algèbre sont équivalentes.

La stratégie mise en œuvre pour décrire le bloc principal B de $\mathrm{GL}_2(q)$ si $\ell = 2$ est la suivante : j'ai obtenu deux complexes Λ_e et Λ_s dans le troisième chapitre. Ils vérifient la propriété de disjonction, leurs composantes sont projectives, mais ni l'un ni l'autre n'est générateur de la catégorie dérivée du bloc principal de $\mathrm{GL}_2(q)$. Par contre leur somme directe engendre bien cette catégorie, mais elle ne vérifie plus la propriété de disjonction : son algèbre différentielle graduée d'endomorphismes

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}nd_B(\Lambda_e \oplus \Lambda_s)$$

n'est pas homotope à une algèbre concentrée en degré 0. En effet son homologie n'est pas concentrée en degré 0, il existe des morphismes non homotopes à zéro de $\Lambda_e \oplus \Lambda_s$ vers un décalé strict de lui-même.

Mais l'homologie de $\mathcal{E}$ est munie d'une structure supplémentaire. Un théorème de T. V. Kadeishvili dit que si A est une A_∞-algèbre, alors il existe une structure de A_∞-algèbre sur son homologie H^*A telle que les A_∞-algèbres ainsi obtenues A et H^*A soient quasi-isomorphes. Ainsi leurs catégories dérivées sont équivalentes. Or $\mathcal{E}$ est une DG-algèbre, donc une A_∞-algèbre particulière.

Il existe donc une structure de A_∞-algèbre sur l'homologie $H^*\mathcal{E}$ la rendant quasi-isomorphe à $\mathcal{E}$. En notant $\mathcal{D}A$ la catégorie dérivée de A si A est une algèbre associative, et $\mathcal{D}_\infty A$ la catégorie dérivée de A si A est une A_∞-algèbre, on a la composition d'équivalences triangulées de catégories

$$\mathcal{D}A \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_\infty\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}_\infty H^*\mathcal{E} \ .$$

Il est à noter que la A_∞-structure que l'on donne à $H^*\mathcal{E}$ n'est pas canonique, elle dépend du choix d'une section de la différentielle de $\mathcal{E}$.

Je commence le troisième chapitre par des rappels sur les A_∞-algèbres, puis j'énonce les résultats que j'utilise par la suite, en particulier des formules dues à V. Gugenheim, J. Stasheff et S. Merkulov permettant de calculer une A_∞-structure adéquate de $H^*\mathcal{E}$ (propriété 4.2).

Nous savons donc que la catégorie dérivée du bloc principal de $\mathrm{GL}_2(q)$ est équivalente à la catégorie dérivée d'une A_∞-algèbre A. Cette A_∞-algèbre est minimale, c'est-à-dire que sa différentielle est nulle. Il s'agit donc d'une algèbre graduée associative à laquelle est ajoutée une A_∞-structure. Une telle structure est la donnée d'applications m_n pour tout entier strictement positif n. Je constate que dans notre situation ces applications sont nulles pour tout $n > 5$ (lemme 4.2.2).

J'explicite complètement la A_∞-algèbre obtenue dans les cas de $\mathrm{PSL}_2(q)$ et de $\mathrm{PGL}_2(q)$ en supposant que q est congru à 3 ou 5 modulo 8. La DG algèbre $\mathcal{E}$ et son homologie $H^*\mathcal{E}$ sont dans ce cas très petites (l'homologie est de dimension respectivement 10 et 20). Grâce à l'équivalence splendide obtenue dans le troisième chapitre on connaît leur structure. Je constate alors que dans ces deux cas il est possible de choisir une A_∞-structure telle que les m_n soient nuls pour $n > 3$ (sections 4.3 et 4.4).

Je généralise ensuite ce résultat au cas de $\mathrm{PGL}_2(q)$ avec q impair quelconque. J'utilise pour ceci les travaux de K. Erdmann, T. Holm et M. Linckelmann. Ils ont classifié tous les blocs à groupe de défaut diédral, semi-diédral et quaternionique, à équivalence de Morita et dérivée près. Ils décrivent chacune de ces classes d'équivalence en terme d'algèbres de carquois. Le bloc principal de $\mathrm{PGL}_2(q)$ étant de défaut diédral, ceci me permet de calculer la structure de la A_∞-algèbre obtenue. Je montre alors qu'il est possible de choisir cette structure de façon à ce que tous les m_n soient nuls pour $n > 3$.

On trouvera en annexe A des rappels sur le théorème de fusion d'Alperin ainsi que sur le contrôle de la fusion. En annexe B figurent les tables de caractères des groupes $\mathrm{PSL}_2(q)$, $\mathrm{PGL}_2(q)$, $\mathrm{SL}_2(q)$, $\mathrm{GL}_2(q)$, $\mathfrak{A}_4$ et $\mathfrak{S}_4$, ainsi que leurs matrices de décomposition et de Cartan en caractéristique 2, puis la structure des modules projectifs indécomposables pour $\mathfrak{A}_4$ et $\mathfrak{S}_4$.

Chapitre 1

Le groupe $\mathbf{GL_2}(q)$

Dans ce chapitre nous définissons les notations qui seront utilisées dans toute la thèse, et nous donnons des propriétés générales du groupe $\mathrm{GL}_2(q)$. Nous rappellerons également les résultats de la théorie de Deligne-Lusztig appliquée au groupe $\mathrm{GL}_2(q)$.

1.1 Notations générales

1.1.1 Anneaux et corps de base

Soit ℓ un nombre premier. On fixe un *système ℓ-modulaire* $(K, \mathcal{O}, k)$, c'est-à-dire que l'on choisit un anneau de valuation discrète complet $\mathcal{O}$, de corps résiduel k, tels que $\mathcal{O}$ soit de caractéristique nulle et k de caractéristique non-nulle ℓ. On note K le corps des fractions de $\mathcal{O}$.

On note $\mathcal{P}$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}$, si bien que $\mathcal{P} = \ell\mathcal{O}$ et $k = \mathcal{O}/\mathcal{P}$.

On suppose de plus que $\mathcal{O}$ est assez gros pour tous les groupes finis en présence, *cf* [Se1, Chapitre 3].

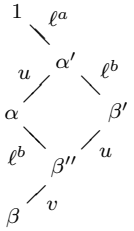
Soit p un nombre premier et $\mathbb{F}$ un corps algébriquement clos de caractéristique p. Soit q une puissance de p, on note $\mathbb{F}_{q^2}$ le sous-corps de $\mathbb{F}$ à q^2 éléments, et $\mathbb{F}_q$ le sous-corps de $\mathbb{F}_{q^2}$ à q éléments.

On choisit un générateur β du groupe cyclique $\mathbb{F}_{q^2}^\times$ et on pose $\alpha = \beta^{q+1}$. Ainsi α engendre $\mathbb{F}_q^\times$.

Pour tout entier n, soit $\boldsymbol{\mu}_n$ le sous-groupe multiplicatif de $\mathcal{O}^*$ contenant les x tels que $x^n = 1$. On choisit un générateur ζ de $\boldsymbol{\mu}_{q^2-1}$, donc une racine de l'unité d'ordre q^2-1 de $\mathcal{O}$. On pose $\xi = \zeta^{q+1}$, donc ξ est une racine de l'unité d'ordre $q-1$ de $\mathcal{O}$ et ξ engendre $\boldsymbol{\mu}_{q-1}$. Ainsi les assignations $\beta \mapsto \zeta$ et $\alpha \mapsto \xi$ induisent des isomorphismes de groupes $\mathbb{F}_{q^2}^\times \xrightarrow{\sim} \boldsymbol{\mu}_{q^2-1}$ et $\mathbb{F}_q^\times \xrightarrow{\sim} \boldsymbol{\mu}_{q-1}$.

On définit a, b, u et v comme étant les uniques entiers tels que $q-1 = \ell^a u$, $q+1 = \ell^b v$, et u et v sont premiers à ℓ.

On pose $\beta' = \beta^{uv}$, $\alpha' = \alpha^u$, et $\beta'' = \beta^v$, ce que l'on peut schématiser comme suit, où une ligne montant de t à t' indexée par w signifie que $t' = t^w$:



On pose également $\zeta' = \zeta^{uv}$, $\xi' = \xi^u$ et $\zeta'' = \zeta^v$. Bien sûr, ces notations sont plus simples si ℓ est différent de 2.

1.1.2 Groupes

Tous les groupes seront notés multiplicativement, leur unité sera notée e. Si n est un entier on notera C_n le groupe cyclique d'ordre n, $\mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$, $\mathfrak{A}_n$ le sous-groupe d'indice 2 de $\mathfrak{S}_n$ contenant les permutations paires, puis D_{2n} le groupe diédral d'ordre $2n$, défini par générateurs et relations de la façon suivante :

$$D_{2n} = \{r,\, s \mid r^n = s^2 = e,\ srs = r^{-1}\}.$$

Si n est pair, on note Q_{2n} le groupe quaternionique d'ordre $2n$ défini par :

$$Q_{2n} = \{r,\, s \mid r^n = e,\ s^2 = r^{n/2},\ srs^{-1} = r^{-1}\},$$

et si n est un multiple de 4 on note SD_{2n} le groupe semi-diédral, défini par :

$$SD_{2n} = \{r,\, s \mid r^n = s^2 = e,\ srs = r^{n/2-1}\}.$$

Si G est un groupe et H un sous-groupe de G nous noterons $N_G(H)$ et $C_G(H)$ respectivement le normalisateur et le centralisateur de H dans G. Nous noterons $Z(G)$ le centre de G, et G' le sous-groupe engendré par les crochets $ghg^{-1}h^{-1}$ où g et h parcourent G. On note G^{op} le groupe opposé de G, c'est-à-dire le groupe dont l'ensemble sous-jacent est celui de G et la multiplication est définie par $(g,\, h) \mapsto hg$.

Si G est un groupe fini, on désigne par $O_{\ell'}(G)$ le plus grand sous-groupe distingué de G d'ordre premier à ℓ, et par $O^{\ell}(G)$ le plus grand quotient de G qui soit un ℓ-groupe.

On appelle sous-groupe *local* d'un groupe G un sous-groupe strict qui est le normalisateur d'un ℓ-sous-groupe.

1.1.3 Blocs

D'après [NT, théorème 6.24], deux caractères χ et χ' d'un groupe G sont dans le même ℓ-bloc de $\mathcal{O}G$ si et seulement si on a

$$\forall g \in G \quad \frac{\chi(g)|Cl(g)|}{\chi(1)} \equiv \frac{\chi'(g)|Cl(g)|}{\chi'(1)} \pmod{\mathcal{P}}.$$

où $Cl(g)$ désigne la classe de conjugaison de g dans G (on a donc $|Cl(g)| = |G|/|C_G(g)|$).

On notera $B_\ell(G)$ le ℓ-bloc principal de $\mathcal{O}G$. Le bloc principal est celui qui contient le caractère trivial, donc un caractère χ est dans $B_\ell(G)$ si et seulement si on a

$$\forall g \in G \quad \frac{\chi(g)|Cl(g)|}{\chi(1)} \equiv |Cl(g)| \pmod{\mathcal{P}}.$$

On utilisera le résultat suivant : si η est une racine de l'unité de $\mathcal{O}$ d'ordre $\ell^c w$ où ℓ ne divise pas w, alors la classe de η modulo $\mathcal{P}$ est d'ordre w.

1.1.4 Algèbre homologique

Soit A un anneau. On note A^{op} l'anneau opposé de A.

On note A-mod la catégorie des A-modules à gauche de type fini, mod-A la catégorie des A-modules à droite de type fini. On note A-proj la sous-catégorie pleine de A-mod dont les objets sont projectifs. Si B est un autre anneau, on note A-mod-B la catégorie des (A, B)-bimodules de type fini. Si A et B sont des algèbres sur un anneau commutatif R, cette catégorie est canoniquement isomorphe à la catégorie $(A \otimes_R B^{op})$-mod.

On note $\mathcal{C}(A)$ la catégorie des complexes de A-modules de type fini. Les complexes sont supposés à différentielle croissante, ainsi un complexe C est un diagramme de A-mod

$$C : \qquad \cdots\cdots\!\!\rightarrow C^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} C^i \xrightarrow{d^i} C^{i+1} \cdots\cdots\!\!\rightarrow$$

tel que $d^i \circ d^{i-1} = 0$ pour tout entier i. Pour tout entier n on note $C[n]$ le complexe décalé de n rang vers la gauche de C, défini par $C[n]^i = C^{n+i}$ et $d^i_{C[n]} = (-1)^{in} d^i_C$.

On utilisera les notations $Z^i(C) = \ker d^i$, $B^i(C) = \mathrm{im}\ d^{i-1}$ et $H^i(C) = Z^i(C)/B^i(C)$.

Ensuite on note $\mathcal{H}(A)$ la catégorie homotopique de A, dont les objets sont ceux de $\mathcal{C}(A)$ et les morphismes sont ceux de $\mathcal{C}(A)$ modulo homotopie.

On note $\mathcal{D}(A)$ la catégorie dérivée de A. Ses objets sont ceux de $\mathcal{C}(A)$, ses morphismes sont définis en localisant les morphismes de $\mathcal{H}(A)$ par rapport aux quasi-isomorphismes, *i.e.,* en inversant les quasi-isomorphismes de $\mathcal{H}(A)$ (voir [Ve] ou [Gr] pour la définition originelle, ou les articles [KZ, chapitre 1], [Ke2], et [Ke4]).

On dit qu'un objet de $\mathcal{H}(A)$ ou de $\mathcal{D}(A)$ est borné s'il est isomorphe à un complexe borné. On note alors $\mathcal{C}^b(A)$, $\mathcal{H}^b(A)$, et $\mathcal{D}^b(A)$ les sous-catégories pleines de, respectivement, $\mathcal{C}(A)$, $\mathcal{H}(A)$, et $\mathcal{D}(A)$ dont les objets sont les objets bornés. On a équivalence entre $\mathcal{D}^b(A)$ et la sous-catégorie pleine de $\mathcal{H}(A)$ dont les objets sont les complexes bornés à droite, à composantes projectives, et à homologie bornée à gauche.

On dit qu'un objet C de $\mathcal{D}(A)$ est *parfait* s'il est isomorphe à un complexe borné à composantes projectives. Nous noterons A-parf la sous-catégorie pleine de $\mathcal{D}(A)$ dont les objets sont parfaits.

Si C est un objet parfait de $\mathcal{D}(A)$, on dit qu'il est *générateur* de $\mathcal{D}(A)$ si A-parf est la plus petite sous-catégorie triangulée pleine de $\mathcal{D}(A)$ close par facteur direct contenant C.

On dit qu'un objet C de $\mathcal{D}(A)$ *vérifie la propriété de disjonction* si pour tout entier non-nul n on a

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(C,\, C[n]) = 0.$$

Soit maintenant A une algèbre auto-injective. On note A-stab la catégorie stable de A, c'est-à-dire la catégorie dont les objets sont ceux de A-mod et les morphismes sont définis, pour X, Y objets de A-mod, par

$$\mathrm{Hom}_{A\text{-stab}}(X,\, Y) = \mathrm{Hom}_A(X,\, Y)/\mathrm{Hom}_A^{pr}(X,\, Y)$$

où $\mathrm{Hom}_A^{pr}(X,\, Y)$ désigne le sous-espace des morphismes de $\mathrm{Hom}_A(X,\, Y)$ se factorisant par un module projectif.

1.2 Le groupe algébrique GL_2

On pose $\boldsymbol{G} = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$. C'est un groupe algébrique connexe. On appelle F l'endomorphisme standard de Frobenius :

$$\begin{array}{rccc} F: & \boldsymbol{G} & \longrightarrow & \boldsymbol{G} \\ & \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) & \longmapsto & \left(\begin{smallmatrix} a^q & b^q \\ c^q & d^q \end{smallmatrix}\right). \end{array}$$

On pose $G = \mathrm{GL}_2(q)$. On a $\boldsymbol{G}^F = G$: le groupe G est l'ensemble des points fixes de $\boldsymbol{G}$ sous l'action de F.

Soit $\boldsymbol{T}$ le sous-groupe des matrices diagonales de $\boldsymbol{G}$. C'est un tore maximal de $\boldsymbol{G}$, tout tore maximal de $\boldsymbol{G}$ lui est conjugué. Il est inclus dans le sous-groupe de Borel $\boldsymbol{B}$ des matrices triangulaires supérieures et la paire $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{B})$ est stable par F. Le groupe de Weyl $W_{\boldsymbol{G}}$ de $\boldsymbol{G}$, défini par $W_{\boldsymbol{G}} = N_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{T})/C_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{T})$, est d'ordre 2. On note e son élément trivial et s son élément non trivial.

Soit $\mathcal{L} : \boldsymbol{G} \to \boldsymbol{G}$ l'application de Lang, définie par $\mathcal{L}(g) = g^{-1}F(g)$. D'après le théorème de Lang (*cf* par exemple [DM2, §3] ou [CG, §4]), comme $\boldsymbol{G}$ est connexe alors $\mathcal{L}$ est surjective. Pour tout $w \in W_{\boldsymbol{G}}$, on choisit un représentant $\dot{w}$ de w dans $N_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{T})$, puis un antécédent γ_w de $\dot{w}$ par $\mathcal{L}$. Les tores F-stables de $\boldsymbol{G}$ sont alors les conjugués ${}^{\gamma_w}\boldsymbol{T}$. L'ensemble des points fixes par F de chacun d'entre eux est appelé tore de G. On pose

$$T_w = ({}^{\gamma_w}\boldsymbol{T})^F.$$

Pour $w = e$, on choisit bien sûr $\dot{e} = 1$ et $\gamma_e = 1$. Pour $w = s$, on choisit

$$\dot{s} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \qquad \text{et} \qquad \gamma = \gamma_s = \begin{pmatrix} \beta^q & \beta \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On commettra parfois l'amalgame entre s et $\dot{s}$, en notant $s = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

On obtient deux sous-groupes de G : le sous-groupe T_e des matrices diagonales de G, que l'on appelle *tore déployé* de G, et le sous groupe T_s, engendré par ${}^{\gamma}\left(\begin{smallmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta^q \end{smallmatrix}\right)$ et appelé *tore de Coxeter* (car s est l'élément de Coxeter de $W_{\boldsymbol{G}}$).

Ces deux groupes sont abéliens, T_e est de cardinal $(q-1)^2$, isomorphe à $\mathbb{F}_q^\times \times \mathbb{F}_q^\times$, et T_s est de cardinal $q^2 - 1$, isomorphe à $\mathbb{F}_{q^2}^\times$.

Nous noterons leurs caractères ainsi : soit ω le caractère de T_s défini par

$$\omega : {}^{\gamma}\left(\begin{smallmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta^q \end{smallmatrix}\right) \longmapsto \zeta \ .$$

Les caractères irréductibles de T_s sont alors les ω^i pour $i = 0 \dots q^2 - 2$. Soit θ le caractères de $\mathbb{F}_q^\times$ défini par $\theta(\alpha) = \xi$. Les caractères de T_e sont alors les $\theta_{(i,j)}$, pour $i, j = 0 \dots q-2$, définis par

$$\theta_{(i,j)} : \left(\begin{smallmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{smallmatrix}\right) \longmapsto \theta^i(x)\theta^j(y).$$

1.3 Le groupe $\mathrm{GL}_2(q)$

Le groupe $G = \mathrm{GL}_2(q)$ est fini, de cardinal $(q-1)^2 q(q+1)$. On utilise l'injection $\mathrm{GL}_2(q) \hookrightarrow \mathrm{GL}_2(q^2)$ afin d'écrire certaines classes de $\mathrm{GL}_2(q)$ dans

$\mathrm{GL}_2(q^2)$: on conservera tout le long de ce texte la notation $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} \beta^q & \beta \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et on a alors le résultat suivant : si $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ est élément de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$, alors ${}^{\gamma}g \in \mathrm{GL}_2(q)$ si et seulement $g \in \mathrm{GL}_2(q^2)$ et $d = a^q$ et $c = b^q$.

Les caractères irréductibles de G sont donnés par la table B.12 page 200.

1.3.1 Les normalisateurs des tores de G

On pose $H_e = N_G(T_e)$. Soit W_e le sous-groupe d'ordre 2 engendré par $\dot{s} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. On a $H_e = T_e \rtimes W_e$, où l'action de W_e sur T_e est donnée par

$$\dot{s} \left(\begin{smallmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{smallmatrix}\right) \dot{s}^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} y & 0 \\ 0 & x \end{smallmatrix}\right).$$

Le groupe H_e est donc de cardinal $2(q-1)^2$, ses caractères irréductibles sont donnés par la table B.13 page 202.

De même on pose $H_s = N_G(T_s)$. Soit $W_s = {}^{\gamma}W_e$. On a $H_s = T_s \rtimes W_s$, où l'action de W_s sur T_s est donnée par (en conjuguant tous les éléments par γ) :

$$\dot{s}\left(\begin{smallmatrix} x & 0 \\ 0 & x^q \end{smallmatrix}\right)\dot{s}^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} x^q & 0 \\ 0 & x \end{smallmatrix}\right).$$

Le groupe H_s est donc de cardinal $2(q^2-1)$, ses caractères irréductibles sont donnés par la table B.14 page 202.

1.3.2 Les sous-groupes de Sylow de G et leurs normalisateurs

Si $\ell = p$, donc si ℓ divise q, alors les ℓ-sous-groupes de Sylow de G sont les sous-groupes conjugués au groupe de matrices de la forme $\left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ où $x \in \mathbb{F}_q$. Ils sont isomorphes au groupe $(\mathbb{F}_q, +)$. Cette situation ne sera pas étudiée dans cette thèse, elle est très différente des autres, et en particulier n'entre pas dans le cadre de la théorie de Deligne-Lusztig. La conjecture de Broué a été démontrée dans ce cas : M. Broué a obtenu des isotypies ([Br3, 5D]), et T. Okuyama a construit des équivalences dérivées pour le groupe $\mathrm{SL}_2(q)$ ([Ok]).

Si ℓ divise $q-1$, alors T_e contient un ℓ-sous-groupe maximal que l'on note P_e. C'est un ℓ-sous-groupe de Sylow de G si $\ell \neq 2$, car G est de cardinal $q(q-1)^2(q+1)$. On a alors $N_G(P_e) = N_G(T_e) = H_e$.

De même si ℓ divise $q+1$, alors T_s contient un ℓ-sous-groupe maximal noté P_s. C'est un sous-groupe de Sylow de G si $\ell \neq 2$. On a alors $N_G(P_s) = N_G(T_s) = H_s$.

Supposons maintenant que $\ell = 2$ et que q est impair. On a alors $q-1 = 2^a u$ et $q+1 = 2^b v$ avec u et v impairs, et l'ordre d'un ℓ-sous-groupe de Sylow de G est 2^{2a+b}. Selon la congruence de q modulo 4, l'un des entiers a et b est égal à 1 et l'autre est strictement supérieur à 1. Les sous-groupes P_e et P_s sont d'ordre respectif 2^{2a} et 2^{a+b}, ainsi l'un de ces deux groupes est d'indice 2 dans un sous-groupe de Sylow de G.

Si q est congru à 1 modulo 4, alors $b = 1$, et un sous-groupe de Sylow de G est $S_e = P_e \rtimes W_e$. Il n'est pas abélien.

Soit $H'_e = N_G(S_e)$. On obtient

$$H'_e = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x & 0 \\ 0 & x\alpha'^n \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & x \\ x\alpha'^n & 0 \end{smallmatrix}\right) \quad x \in \mathbb{F}_q^\times, n = 0 \dots 2^a - 1 \right\}.$$

Le groupe H'_e est de cardinal $2^{a+1}(q-1)$ et on a un isomorphisme

$$H'_e \simeq (C_{q-1} \times C_{2^a}) \rtimes C_2,$$

où l'action de l'élément non-trivial de C_2 sur $C_{q-1} \times C_{2^a}$ est donnée par $(x, y) \mapsto (xy, y^{-1})$ (en utilisant l'injection canonique $C_{2^a} \hookrightarrow C_{q-1}$). Ses caractères irréductibles sont donnés par la table B.15 page 203.

Si q est congru à 3 modulo 4, alors $a = 1$ et un sous-groupe de Sylow de G est $S_s = P_s \rtimes W_s$. Il n'est pas abélien non plus.

Soit $H'_s = N_G(S_s)^\gamma$. On obtient

$$H'_s = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} \beta''^n & 0 \\ 0 & \beta''^{qn} \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & \beta''^n \\ \beta''^{qn} & 0 \end{smallmatrix}\right) \quad n = 0 \dots 2^b(q-1) - 1 \right\}.$$

Le groupe H'_s est de cardinal $2^{b+1}(q-1)$, on a un isomorphisme

$$H'_s \simeq C_{2^b(q-1)} \rtimes C_2$$

où l'action de l'élément non trivial de C_2 sur $C_{2^b(q-1)}$ est donnée par $x \mapsto x^q$. Ses caractères irréductibles sont donnés par la table B.16 page 203.

On a donc vu que les ℓ-sous-groupes de Sylow de G ne sont pas abéliens si et seulement si q est impair et $\ell = 2$.

1.4 Situation $\ell = 2$, q impair

On suppose donc que $\ell = 2$ et que q est impair.

Le cardinal de G est

$$|\mathrm{GL}_2(q)| = (q-1)^2 q(q+1) = 2^{2a+b} q u^2 v,$$

donc celui de $\mathrm{PSL}_2(q)$ est

$$|\mathrm{PSL}_2(q)| = \frac{1}{2}(q-1)q(q+1) = 2^{a+b-1}quv.$$

En conséquence si $q \equiv \pm 3 \mod 8$ alors les 2-sous-groupes de Sylow de $\mathrm{PSL}_2(q)$ sont d'ordre 4, et ils sont donc abéliens. Leurs images réciproques dans $\mathrm{SL}_2(q)$ sont des sous-groupes de Sylow de $\mathrm{SL}_2(q)$. Ils ne sont plus abéliens, mais nous allons voir que leur normalisateur dans G contrôle la fusion des 2-sous-groupes de G.

Nous verrons ensuite que par contre, si $q \equiv \pm 1 \pmod 8$, alors aucun sous-groupe local ne contrôle la fusion. La définition de la notion de contrôle de la fusion figure dans l'annexe A (définition A.2.1).

1.4.1 Cas $q \equiv \pm 3 \pmod 8$

On suppose donc que $q \equiv \pm 3 \pmod 8$. Soit P' un 2-sous-groupe de Sylow de $\mathrm{SL}_2(q)$ et $H = N_G(P')$ son normalisateur dans G.

Si $q \equiv 5 \pmod 8$, on choisit pour P' le sous-groupe de $P_e \rtimes W_e$ contenant les éléments de la forme $\left(\begin{smallmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{-1} \end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix} 0 & x \\ -x^{-1} & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Si $q \equiv 3 \pmod 8$, on choisit pour P' le sous-groupe de $P_s \rtimes W_s$ défini de manière analogue, c'est-

Les structures de P' et de H sont données par la propriété suivante :

Propriété 1.4.1. *On a des isomorphismes* $P' \simeq Q_8$, $N_{\mathrm{SL}_2(q)}(P') \simeq Q_8 \rtimes C_3$, *et* $H \simeq (Q_8 \rtimes C_3) \rtimes C_{q-1}$.

Démonstration : On sépare les cas $q \equiv 5 \pmod 8$ et $q \equiv 3 \pmod 8$.

Cas $q \equiv 5 \pmod 8$

On vérifie facilement que P' est isomorphe au groupe quaternionique à 8 éléments en posant $h_I = \left(\begin{smallmatrix} \alpha' & 0 \\ 0 & -\alpha' \end{smallmatrix}\right)$ et $h_J = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, puis $h_K = h_I h_J = \left(\begin{smallmatrix} 0 & \alpha' \\ \alpha' & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Alors P' est engendré par h_I et h_J, ces deux éléments sont d'ordre 4, leurs carrés sont égaux, et $h_I h_J h_I^{-1} = h_J^{-1}$.

On calcule ensuite que

$$H = \left\{ \alpha^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha'^j \end{smallmatrix}\right), \alpha^i \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ \alpha'^j & 0 \end{smallmatrix}\right), \alpha^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & \alpha'^j \\ \alpha'^k & -\alpha'^{j+k} \end{smallmatrix}\right) \;\; i = 0 \dots q-2,\; j,k = 0 \dots 3 \right\}.$$

On pose $A = \frac{\alpha'+1}{2} \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ \alpha' & -\alpha' \end{smallmatrix}\right)$: c'est un élément d'ordre 3 et de déterminant 1. On montre que le cardinal de $N_{\mathrm{SL}_2(q)}(P')$ est 24, donc que $N_{\mathrm{SL}_2(q)}(P') \simeq Q_8 \rtimes C_3$. L'action de A sur Q_8 est donnée par $A h_I A^2 = h_J$, $A h_J A^2 = h_K$.

On pose ensuite $B = \alpha_0 \left(\begin{smallmatrix} 1 & \alpha' \\ \alpha' & 1 \end{smallmatrix}\right)$, où α_0 est une racine de $\alpha/2$. Pour affirmer que α_0 est bien élément de $\mathbb{F}_q^\times$ il faut s'assurer que 2 n'est pas un carré, on peut le vérifier dans [Se2] : 2 est un carré dans $\mathbb{F}_p$ si et seulement $p \equiv \pm 1$ mod 8, ce qui s'étend facilement à $q = p^n$ en séparant les cas n pair et n impair.

Les valeurs propres de $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \alpha' \\ \alpha' & 1 \end{smallmatrix}\right)$ sont $1 \pm \alpha'$, le déterminant de B est α, donc B est d'ordre $(q-1)$ et le groupe qu'il engendre est d'intersection triviale avec $\mathrm{SL}_2(q)$. En notant C_{q-1} celui-ci on a donc un isomorphisme $H \simeq (Q_8 \rtimes C_3) \rtimes C_{q-1}$.

Cas $q \equiv 3 \pmod 8$

On calcule que

$$H^\gamma = \Big\{ \alpha^i \beta''^j \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta'^{2j} \end{smallmatrix}\right), \alpha^i \beta''^j \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ \beta'^{2j} & 0 \end{smallmatrix}\right), \alpha^i \beta''^{j+k-1} \left(\begin{smallmatrix} \beta'^{2j+1} & 1 \\ \beta'^{2k+1} & -\beta'^{2(j+k-1)} \end{smallmatrix}\right)$$
$$i = 0 \dots q-2, \quad j,k = 0 \dots 3 \Big\}.$$

On obtient $H \cong (Q_8 \rtimes C_3) \rtimes C_{q-1}$ comme précédemment en posant (dans le groupe conjugué H^γ)

- $h_I = \left(\begin{smallmatrix} \beta'^2 & 0 \\ 0 & -\beta'^2 \end{smallmatrix}\right)$, $h_J = \left(\begin{smallmatrix} 0 & \beta' \\ \beta'^3 & 0 \end{smallmatrix}\right)$,
- $A = \frac{\beta' + \beta'^3}{2} \left(\begin{smallmatrix} \beta' & 1 \\ 1 & \beta'^3 \end{smallmatrix}\right)$,
- $B = \beta''^2 \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

□

On trouvera en annexe B les tables de caractères de $Q_8 \rtimes C_3$ (table B.17 page 204) et de H (table B.18 page 204 si $q \equiv 5 \pmod 8$, table B.19 page 205 si $q \equiv 3 \pmod 8$).

Il existe un 2-sous-groupe de Sylow S de G contenu dans H. En effet, soit S un 2-sous-groupe de Sylow de G contenant P', on a alors $P' = S \cap \mathrm{SL}_2(q)$ par maximalité de P'. Ceci impose que S normalise P', *i.e.,* $S \subseteq H$. On a alors la propriété suivante :

Propriété 1.4.2. *Le sous-groupe H contrôle la fusion des 2-sous-groupes de G.*

Pour démontrer cette propriété, on se place dans le quotient de G par son centre, on montre une propriété plus forte que le contrôle de la fusion dans $\mathrm{PGL}_2(q)$, dont nous aurons besoin par ailleurs (3.6.1), et ensuite nous en déduisons le contrôle de la fusion dans G :

Soit Z le centre de G. Pour tout sous-ensembe X de G on note $\overline{X}$ l'image de X par la projection $\mathrm{GL}_2(q) \twoheadrightarrow \mathrm{PGL}_2(q)$.

L'injection canonique $\overline{H} \hookrightarrow N_{\overline{G}}(\overline{P}')$ est un isomorphisme. En effet si $h \in G$ est tel que $\bar{h} \in N_{\overline{G}}(\overline{P}')$, alors pour tout $x \in P'$ on a $x^h \in ZP'$. Or x^h est de déterminant 1 et d'ordre une puissance de 2. Comme le 2-centre de $\mathrm{SL}_2(q)$ est inclus dans P', on a $x^h \in P'$, donc $\overline{H} = N_{\overline{G}}(\overline{P}')$.

Propriété 1.4.3. *Pour tout 2-sous-groupe non trivial Q de $\overline{H}$ on a*

$$N_{\overline{G}}(Q) = N_{\overline{H}}(Q).O_{2'}(C_{\overline{G}}(Q)).$$

Pour démontrer ceci, nous établissons le lemme suivant :

Lemme 1.4.4. *Soit w une involution de $\mathrm{PGL}_2(q)$. Alors le centralisateur de w est isomorphe à un groupe diédral, d'ordre $2(q-1)$ ou $2(q+1)$.*

Démonstration : Soit $\dot{w}$ un représentant de w dans $\mathrm{GL}_2(q)$. Comme w est d'ordre 2 dans $\mathrm{PGL}_2(q)$, alors il existe $x \in \mathbb{F}_q^\times$ tel que $\dot{w}^2 = \left(\begin{smallmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{smallmatrix}\right)$. Si x est un carré dans $\mathbb{F}_q$, alors on peut modifier $\dot{w}$ de façon à ce qu'il soit d'ordre 2. Il est alors conjugué à la matrice $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, on a alors

$$g \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) g^{-1} \in Z \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \quad \Longleftrightarrow \quad g \in H_e = T_e \rtimes W_e.$$

L'image de H_e dans $\overline{G}$ est un groupe diédral d'ordre $2(q-1)$, donc le centralisateur de w est isomorphe au groupe diédral d'ordre $2(q-1)$.

Si x n'est pas un carré dans $\mathbb{F}_q$, alors il existe une racine carrée y de x dans $\mathbb{F}_{q^2}$, et $\dot{w}$ est conjugué dans $\mathrm{GL}_2(q)$ à l'élément ${}^{\gamma}\left(\begin{smallmatrix} y & 0 \\ 0 & y^q \end{smallmatrix}\right)$ de T_s. On a

$$g^{\gamma}\left(\begin{smallmatrix} y & 0 \\ 0 & y^q \end{smallmatrix}\right) g^{-1} \in Z^{\gamma}\left(\begin{smallmatrix} y & 0 \\ 0 & y^q \end{smallmatrix}\right) \quad \Longleftrightarrow \quad g \in H_s = T_s \rtimes W_s,$$

l'image de H_s dans $\overline{G}$ est un groupe diédral d'ordre $2(q+1)$, donc le centralisateur de w est isomorphe au groupe diédral à $2(q+1)$ éléments. □

Démonstration de la propriété 1.4.3 : On a un 2-sous-groupe de Sylow $\overline{S}$ de $\overline{H}$ (donc de $\overline{G}$). On connaît la structure de S, elle dépend de la congruence de q modulo 4, mais dans les deux cas $\overline{S}$ est isomorphe au groupe diédral à 8 éléments D_8. On appelle C le sous-groupe cyclique d'ordre 4 de $\overline{S}$. C'est l'image dans $\overline{G}$ de l'un des deux groupes P_e et P_s.

Il existe un sous-groupe W de $\overline{S} \cap \mathrm{PSL}_2(q)$ tel que $\overline{S} = C \rtimes W$. Soit C' le sous-groupe d'ordre 2 de C, le groupe $C' \times W$ est alors commutatif, c'est un sous-groupe de Sylow de $\mathrm{PSL}_2(q)$. Comme il est inclus dans $\overline{S}$, il est égal à $\overline{P}'$.

On a donc la liste des classes de conjugaison de 2-sous-groupes non triviaux de $\overline{H}$:

$$\{C',\, W,\, C' \times W,\, C,\, \overline{S}\}.$$

On pose $T = C_{\overline{G}}(C)$. C'est un tore de $\overline{G}$, d'ordre $q-1$ ou $q+1$, selon qu'il est image d'un conjugué de T_e ou de T_s. Soit $T' = O_{2'}(T)$, on a

$$T = C \times T' \qquad \text{et} \qquad O_{2'}(T \rtimes W) = T'.$$

Si $Q = C'$ alors $N_{\overline{G}}(C') = C_{\overline{G}}(C')$. On a $T \rtimes W \subseteq C_{\overline{G}}(C')$ puis le lemme 1.4.4 implique l'égalité : $C_{\overline{G}}(C') = T \rtimes W$. Comme $C \subseteq \overline{H}$ on a le résultat.

Si $Q = W$ alors $N_{\overline{G}}(W) = C_{\overline{G}}(W)$. Le lemme 1.4.4 nous assure que $C_{\overline{G}}(W)$ est un groupe diédral, donc $O^2(C_{\overline{G}}(W))$ est isomorphe soit au groupe diédral à 8 éléments, soit au groupe de Klein (à 4 éléments). Comme W est inclus dans le tore qui ne contient pas C, $O^2(C_{\overline{G}}(W))$ est isomorphe au groupe de Klein. Or il contient W et C', donc on a le résultat.

Si $Q = C' \times W$, le résultat est clair car $C' \times W = \overline{P}'$ et $H = N_{\bar{G}}(\overline{P}')$. Si $Q = C$, $N_{\overline{G}}(C) = T \rtimes W$ et le résultat est immédiat, de même que si $Q = \overline{S}$ car $N_G(\overline{S}) \subset N_G(C)$. □

Démonstration de la propriété 1.4.2 : D'après la propriété A.2.2, il suffit de montrer que pour tout sous-groupe Q de S on a

$$N_G(Q) = N_H(Q) C_G(Q).$$

Soit $g \in N_G(Q)$. D'après la propriété précédente, il existe g_1 et g_2 tels que $g = g_1 g_2$, $\bar{g_1} \in N_{\overline{H}}(\overline{Q})$, et $\bar{g_2} \in O_{2'}(C_{\overline{G}}(\overline{Q}))$.

Soit $x \in Q$. Il existe $z \in Z$ tel que $x^{g_2} = zx$. Comme x est un 2-élément, l'ordre de z est une puissance de 2. Comme g_2 est un 2'-élément, l'ordre de z est premier avec 2, donc $z = 1$ et $g_2 \in C_G(Q)$.

Comme $g = g_1 g_2$, alors g_1 normalise Q. On a $\bar{g_1} \in \overline{H}$ et $Z \subseteq H$, donc $g_1 \in H$, et finalement $g \in N_H(Q) C_G(Q)$. □

On a également la propriété suivante :

Propriété 1.4.5. *Si $q \equiv \pm 3 \pmod 8$, alors le groupe $\overline{H}$ est isomorphe au groupe symétrique $\mathfrak{S}_4$.*

Démonstration : On utilise les isomorphismes $P' \simeq Q_8$ et $N_{\mathrm{SL}_2(q)}(P') \simeq Q_8 \rtimes C_3$ (*cf* propriété 1.4.1).

Soit Z' le centre de $\mathrm{SL}_2(q)$, il est d'ordre 2, ses éléments sont les matrices scalaires ± 1. Son élément non trivial est identifié à l'élément -1 de Q_8. Comme Z' est contenu dans P', on a $N_{\mathrm{PSL}_2(q)}(P'/Z') = (N_{\mathrm{SL}_2(q)}(P'))/Z'$. Le sous-groupe $\overline{P}' = P'/Z'$ est un 2-sous-groupe de Sylow de $\mathrm{PSL}_2(q)$, et on a donc $N_{\mathrm{PSL}_2(q)}(\overline{P}') = (C_2 \times C_2) \rtimes C_3$. On sait que le produit semi-direct ne peut pas être direct car l'action de C_3 sur Q_8 est d'ordre 3. On a donc $N_{\mathrm{PSL}_2}(\overline{P}') \simeq \mathfrak{A}_4$.

D'autre part, comme $Z' = Z \cap P'$, on a

$$N_{\mathrm{PGL}_2(q)}(\overline{P}') = (N_{\mathrm{GL}_2(q)}(P'))/Z = \overline{H}.$$

Comme H est de cardinal $24(q-1)$, alors $N_{\mathrm{PGL}_2(q)}(\overline{P}')$ est de cardinal 24, et $N_{\mathrm{PSL}_2(q)}(\overline{P}')$ est distingué d'indice 2 dans $N_{\mathrm{PGL}_2(q)_2}(\overline{P}')$.

Montrons que si Γ est un groupe dans lequel $\mathfrak{A}_4$ est d'indice 2 alors Γ est isomorphe soit à $\mathfrak{S}_4$ soit à $\mathfrak{A}_4 \times C_2$. Tout d'abord, $\mathfrak{S}_4$ est isomorphe à $\mathrm{Aut}(\mathfrak{A}_4)$: en effet comme $\mathfrak{A}_4$ est distingué dans $\mathfrak{S}_4$, la conjugaison par les éléments de $\mathfrak{S}_4$ induit un morphisme $\mathfrak{S}_4 \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{A}_4)$. Un élément du noyau de ce morphisme est un élément de $\mathfrak{S}_4$ qui commute à tout élément de $\mathfrak{A}_4$, donc l'unité de $\mathfrak{S}_4$, et ainsi le morphisme $\mathfrak{S}_4 \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{A}_4)$ est injectif. Mais $\mathfrak{A}_4$ contient 3 éléments d'ordre 2 et 8 éléments d'ordre 3, et il suffit d'un élément d'ordre 2 et un élément d'ordre 3 pour engendrer tout le groupe, donc un élément de $\mathrm{Aut}(\mathfrak{A}_4)$ est déterminé par l'image d'un élément d'ordre 2 et d'un élément d'ordre 3, donc il contient au maximum 24 éléments, ce qui montre que l'on a un isomorphisme $\mathfrak{S}_4 \xrightarrow{\sim} \mathrm{Aut}(\mathfrak{A}_4)$.

Comme $\mathfrak{A}_4$ est distingué dans Γ, on a un morphisme $\Gamma \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{A}_4)$. L'image de $\mathfrak{A}_4$ par ce morphisme est le sous-groupe $\mathrm{Int}(\mathfrak{A}_4)$ des automorphismes intérieurs de $\mathfrak{A}_4$, qui est isomorphe à $\mathfrak{A}_4$ car le centre de $\mathfrak{A}_4$ est trivial. L'image du morphisme $\Gamma \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{A}_4)$ est donc soit $\mathfrak{A}_4$, soit $\mathrm{Aut}(\mathfrak{A}_4)$. Dans le premier cas, on obtient un scindage de la suite exacte

$$1 \to \mathfrak{A}_4 \to \Gamma \to C_2 \to 1,$$

et donc on a un isomorphisme $\Gamma \simeq \mathfrak{A}_4 \times C_2$, dans l'autre on obtient un isomorphisme $\Gamma \simeq \mathfrak{S}_4$.

Notons que le 2-sous-groupe de Sylow de Γ est isomorphe à $C_2 \times C_2 \times C_2$ dans le premier cas, et au groupe diédral D_8 dans le second cas.

Le 2-sous-groupe de Sylow de $\overline{H}$ est l'image de celui de H par la projection canonique. Si $q \equiv 5 \pmod 8$, alors le 2-sous-groupe de Sylow de H est isomorphe à $(C_4 \times C_4) \rtimes C_2$, où l'action de C_2 sur $(C_4 \times C_4)$ est donnée par l'application $(x, y) \mapsto (y, x)$. Son intersection avec le centre s'identifie

aux éléments (x, x) de $C_4 \times C_4$, donc le 2-sous-groupe de Sylow de H est isomorphe à D_8.

Si $q \equiv 3 \pmod 8$, alors le 2-sous-groupe de Sylow de H est isomorphe à $C_8 \rtimes C_2$, où l'action de C_2 est donnée par $x \mapsto x^3$. Son intersection avec le centre est l'ensemble $\{e, x^4\}$ de C_8, donc le 2-sous-groupe de Sylow de H est isomorphe à D_8 ici aussi.

Finalement on a un isomorphisme $\overline{H} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{S}_4$. □

1.4.2 Cas $q \equiv \pm 1 \pmod 8$

On suppose donc que $q \equiv \pm 1 \pmod 8$. Nous avons alors la propriété suivante :

Propriété 1.4.6. *Aucun sous-groupe local de G ne contrôle la fusion des 2-sous-groupes de G.*

Démonstration : Nous donnons une démonstration de cette propriété dans le cas $q \equiv 1 \pmod 8$, l'autre cas se faisant selon le même schéma.

Soit P un 2-sous-groupe de G, et $H = N_G(P)$ son normalisateur. On suppose que H contrôle la fusion des 2-sous-groupes de G. Il contient un 2-sous-groupe de Sylow, donc nous pouvons supposer que P est distingué dans S_e, *i.e.,* que $S_e \subseteq H$.

Comme H contrôle la fusion, pour tout sous-groupe Q de S_e on a

$$N_G(Q) \subseteq H\, C_G(Q). \tag{1.1}$$

Soit α_0 une racine de -1 dans $\mathbb{F}_q$, et Q le sous-groupe engendré par les matrices

$$h_I = \left(\begin{smallmatrix} \alpha_0 & 0 \\ 0 & -\alpha_0 \end{smallmatrix}\right) \qquad \text{et} \qquad h_J = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right).$$

On obtient bien un sous-groupe de S_e, isomorphe au groupe quaternionique Q_8, si q était congru à 5 modulo 8 alors Q serait un 2-sous-groupe de Sylow de $\mathrm{SL}_2(q)$.

Le centralisateur de Q est alors le centre de G, qui est évidemment inclus dans H, donc on a $N_G(Q) \subseteq H$.

Nous avons calculé dans la démonstration de la propriété 1.4.1 que $N_G(Q)$ contient l'élément $A = \frac{\alpha_0+1}{2}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ \alpha_0 & -\alpha_0 \end{smallmatrix}\right)$.

On rappelle que

$$S_e = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} \alpha'^n & 0 \\ 0 & \alpha'^m \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & \alpha'^n \\ \alpha'^m & 0 \end{smallmatrix}\right) \mid n, m = 1 \dots 2^a \right\}.$$

Soit Q_0 le sous-groupe de S_e défini par

$$Q_0 = \left\{ \alpha'^n \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \alpha'^n \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right), \alpha'^n \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \alpha'^n \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \mid n = 1 \dots 2^a \right\}.$$

En calculant les conjugués des éléments de S_e par A, on montre que si $A \in H = N_G(P)$ alors $P \subseteq Q_0$.

Si P contient un élément de la forme $\alpha'^n \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ \pm 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, alors comme $P \triangleleft S_e$, P doit contenir l'élément

$$\left(\begin{smallmatrix} \alpha' & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left[\alpha'^n \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ \pm 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \right] \cdot \left(\begin{smallmatrix} \alpha'^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \alpha'^{n+1} \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ \pm \alpha'^{-2} & 0 \end{smallmatrix}\right)$$

mais comme q est congru à 1 modulo 8 alors $\alpha'^{-2} \neq \pm 1$, donc on a une contradiction, et P est inclus dans le groupe $Q_1 = Q_0 \cap T_e$.

Si P contient un élément de la forme $\alpha'^n \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, comme $A \in H$ alors P doit contenir l'élément

$$A. \left[\alpha'^n \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \right] .A^{-1} = \alpha' n \left(\begin{smallmatrix} 0 & -\alpha_0 \\ \alpha_0 & 0 \end{smallmatrix}\right),$$

qui n'est pas dans T_e. Ainsi P est inclus dans le centre de G, donc $H = G$, ce qui contredit le fait que les sous-groupes locaux sont supposés stricts. □

1.5 Théorie de Deligne-Lusztig

1.5.1 Résumé de la théorie

La théorie de P. Deligne et G. Lusztig est publiée dans l'article [DL]. Elle est aussi exposée dans le livre de F. Digne et J. Michel [DM2]. Ce livre traite en particulier l'exemple de $\mathrm{GL}_2(q)$. Le chapitre 4 du livre de R. Carter et M. Geck [CG] donne aussi un résumé de cette théorie. Comme nous sommes concernés par le cas de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$, nous nous contenterons dans ce résumé du cas des tores, *i.e.,* nous ne considèrerons pas les sous-groupes de Levi de $\boldsymbol{G}$.

Variétés de Deligne-Lusztig

Soit $\boldsymbol{G}$ un groupe algébrique connexe sur le corps $\mathbb{F}$, défini sur $\mathbb{F}_q$. Soit F un endomorphisme de Frobenius associé à une structure $\mathbb{F}_q$-rationnelle de $\boldsymbol{G}$, et $\mathcal{L} : \boldsymbol{G} \to \boldsymbol{G}$ l'application de Lang, définie par $\mathcal{L}(g) = g^{-1}F(g)$.

Soit $(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{B})$ une paire F-stable composée d'un tore maximal $\boldsymbol{T}$ et d'un sous-groupe de Borel $\boldsymbol{B}$ contenant $\boldsymbol{T}$. On note $\boldsymbol{U}$ le radical unipotent de $\boldsymbol{B}$.

Pour tout élément w du groupe de Weyl $W_{\boldsymbol{G}} = N_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{T})/\boldsymbol{T}$ de $\boldsymbol{G}$, on choisit un représentant $\dot{w}$ de w dans $N_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{T})$, et un élément $\gamma_{\dot{w}}$ de $\boldsymbol{G}$ tel que $\mathcal{L}(\gamma_{\dot{w}}) = \dot{w}$. On note $\boldsymbol{T}_{\dot{w}} = {}^{\gamma_{\dot{w}}}\boldsymbol{T}$, $\boldsymbol{B}_{\dot{w}} = {}^{\gamma_{\dot{w}}}\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{U}_{\dot{w}} = {}^{\gamma_{\dot{w}}}\boldsymbol{U}$.

On appelle *variété de Deligne-Lusztig associée à* $\dot{w}$ la variété $\boldsymbol{Y}_{\dot{w}}$ définie par (*cf* [DL, 1.11.4]) :

$$\boldsymbol{Y}_{\dot{w}} = \{g \in \boldsymbol{G} \mid \mathcal{L}(g) \in F(\boldsymbol{U}_{\dot{w}})\} / (F(\boldsymbol{U}_{\dot{w}}) \cap \boldsymbol{U}_{\dot{w}}).$$

Cette variété est notée $\widetilde{X}(\dot{w})$ dans [DL]. Nous faisons dorénavant l'abus de notations consistant à noter respectivement γ_w, $\boldsymbol{T}_w$, $\boldsymbol{B}_w$, $\boldsymbol{U}_w$ et $\boldsymbol{Y}_w$ au lieu de $\gamma_{\dot{w}}$, $\boldsymbol{T}_{\dot{w}}$, $\boldsymbol{B}_{\dot{w}}$, $\boldsymbol{U}_{\dot{w}}$ et $\boldsymbol{Y}_{\dot{w}}$.

La variété $\boldsymbol{Y}_w$ est lisse, sa dimension est la longueur $l(w)$ de w dans $W_{\boldsymbol{G}}$. La multiplication de $\boldsymbol{G}$ induit sur $\boldsymbol{Y}_w$ une action de $G = \boldsymbol{G}^F$ à gauche (car $F(g) = g$ pour tout $g \in G$) et une action de $T_w = {\boldsymbol{T}_w}^F$ à droite (car $\boldsymbol{U}_w$ est normalisé par $\boldsymbol{T}_w$, donc par T_w).

L'endomorphisme F n'agit pas sur $\boldsymbol{Y}_w$ en général. Si δ est l'ordre de w dans $W_{\boldsymbol{G}}$, alors F^δ agit sur $\boldsymbol{Y}_w$. Il est possible de tordre l'action de F sur $\boldsymbol{G}$ pour qu'elle agisse vraiment sur $\boldsymbol{Y}_w$, *cf* [Ro5, 4.1.2.]. Si F induit l'action triviale sur $W_{\boldsymbol{G}}$, l'action tordue est définie par $F_w : g \mapsto F(g)w'$ où $w' = \gamma_w \dot{w} \gamma_w^{-1}$, *i.e.*, w' représente w dans $N_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{T}_w)$.

Complexes de Deligne-Lusztig

On s'intéresse ensuite à la cohomologie ℓ-adique à support compact du faisceau constant égal à $\mathcal{O}$ sur $\boldsymbol{Y}_w$. Celle-ci est notée $H_c^*(\boldsymbol{Y}_w, \mathcal{O})$, elle est définie comme étant la cohomologie d'un objet de la catégorie dérivée bornée $\mathcal{D}^b(\mathcal{O}[G \times {T_w}^{op}])$ noté $\mathrm{R}\Gamma_c(\boldsymbol{Y}_w, \mathcal{O})$. On renvoie à [FK, I, §8] pour la définition de cet objet.

Dans l'article [Ri3], J. Rickard montre qu'il existe un objet canonique de la catégorie *homotopique* $\mathcal{H}^b(\mathcal{O}[G \times {T_w}^{op}])$ noté $\Lambda_c(\boldsymbol{Y}_w, \mathcal{O})$ isomorphe à $\mathrm{R}\Gamma_c(\boldsymbol{Y}_w, \mathcal{O})$ dans la catégorie dérivée $\mathcal{D}^b(\mathcal{O}[G \times {T_w}^{op}])$ (*cf* [Ri3, 3.1, 3.2]). De plus, cet objet est un complexe de $\mathcal{O}G$-modules de ℓ-permutation.

Dans l'article [Ro5], R. Rouquier donne une construction fonctorielle d'un complexe borné de $\mathcal{O}[G \times {T_w}^{op}]$-modules noté $\tilde{\mathrm{R}}\Gamma_c(\boldsymbol{Y}_w, \mathcal{O})$ (*cf* [Ro5, 2.2.5]) qui représente $\mathrm{R}\Gamma_c(\boldsymbol{Y}_w, \mathcal{O})$ dans la catégorie dérivée. De plus, si la variété $\boldsymbol{Y}_w$ est munie d'une action d'un monoïde quelconque Υ alors $\tilde{\mathrm{R}}\Gamma_c(\boldsymbol{Y}_w, \mathcal{O})$ est un vrai complexe de Υ-modules, *i.e.*, les actions sur la variété $\boldsymbol{Y}_w$ induisent de véritables actions sur le complexe $\tilde{\mathrm{R}}\Gamma_c(\boldsymbol{Y}_w, \mathcal{O})$, et non plus des actions définies à homotopies près. On obtient en particulier une action de l'endomorphisme de Frobenius tordu F_w défini ci-dessus.

On notera dans toute la suite Λ_w l'objet de la catégorie homotopique représentant $\tilde{\mathrm{R}}\Gamma_c(\boldsymbol{Y}_w, \mathcal{O})$.

Induction de Deligne-Lusztig

Le complexe Λ_w induit par produit tensoriel un couple de foncteurs bi-adjoints entre catégories homotopiques :

$$\mathcal{H}^b(\mathcal{O}G) \underset{R_{T_w}^G=\Lambda_w\otimes_{\mathcal{O}T_w}-}{\overset{{}^*R_{T_w}^G=\Lambda_w^\vee\otimes_{\mathcal{O}G}-}{\rightleftarrows}} \mathcal{H}^b(\mathcal{O}T_w).$$

Notons que le complexe $\tilde{\mathrm{R}}\Gamma_c(\boldsymbol{Y}_w, \mathcal{O})$ n'est pas un complexe de modules de type fini en général, mais qu'il est homotope à un complexe de modules de type finis.

Les foncteurs $R_{T_w}^G$ et ${}^*R_{T_w}^G$ sont appelés respectivement *induction* et *restriction de Deligne-Luztig*. Ils induisent des correspondances entre les groupes de caractères de G et de T_w, *cf* [DM2, chapitre 11]. Si w est l'unité de $W_{\boldsymbol{G}}$, alors on retrouve l'induction et la restriction de Harish-Chandra.

1.5.2 Application à $\mathrm{GL}_2(q)$

On pose de nouveau $\boldsymbol{G} = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F})$, et on utilise les notations de la section 1.2 page 22. Dans ce cas $\boldsymbol{T}$ est le sous-groupe de $\boldsymbol{G}$ contenant les matrices diagonales. On choisit pour sous-groupe de Borel $\boldsymbol{B}$ le sous-groupe de $\boldsymbol{G}$ contenant les matrices triangulaires supérieures (c'est donc bien un sous-groupe de Borel F-stable). Alors son radical unipotent $\boldsymbol{U}$ est le sous-groupe de $\boldsymbol{G}$ contenant les matrices de la forme $\left(\begin{smallmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ où $x \in \mathbb{F}$.

Cas $w = e$

On note $U = \boldsymbol{U}^F$, donc U est le sous groupe de G contenant les matrices de la forme $\left(\begin{smallmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ où $x \in \mathbb{F}_q$. La multiplication de G induit une action à gauche de G sur l'ensemble G/U, et comme $T_e \subseteq N_G(U)$, elle induit également une action à droite de T_e sur G/U.

Propriété 1.5.1. *On a un isomorphisme de variétés algébriques*

$$\varphi : G/U \xrightarrow{\sim} \boldsymbol{Y}_e,$$

compatible aux actions de G et de T_e.

Démonstration : On a $F(\boldsymbol{U}) = \boldsymbol{U}$, donc

$$\boldsymbol{Y}_e = \{g \in \boldsymbol{G} \mid \mathcal{L}(g) \in \boldsymbol{U}\}/\boldsymbol{U}.$$

On définit φ par $\varphi(gU) = g\boldsymbol{U}$. Il est clair que φ est bien défini et injectif. Montrons qu'il est surjectif.

Soit $g \in \boldsymbol{G}$ tel que $g\boldsymbol{U} \in \boldsymbol{Y}_e$. Il existe alors $x \in \mathbb{F}$ tel que $\mathcal{L}(g) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Comme $\mathbb{F}$ est algébriquement clos il existe $y \in \mathbb{F}$ tels que $y - y^q = x$. On a alors

$$g \left(\begin{smallmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(q) \quad \text{et} \quad g \left(\begin{smallmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \boldsymbol{U} = g\boldsymbol{U}.$$

donc on a un antécédent de $g\boldsymbol{U}$ par φ.

Comme les deux variétés sont des ensembles de points, φ et sa réciproque sont algébriques. La compatibilité aux actions de G et de T_e est immédiate. □

La variété $\boldsymbol{Y}_e$ étant de dimension nulle, sa cohomologie $H_c^*(\boldsymbol{Y}_e, \mathcal{O})$ est concentrée en degré 0. Un représentant de Λ_e dans la catégorie des complexes de $\mathcal{O}[G \times {T_e}^{op}]$-modules est donc le bimodule $\mathcal{O}[G/U]$.

Les images des caractères de T_e par $R_{T_e}^G$ sont données dans [DM2, chapitre 15]. En utilisant les notations pages 23 et 200, on a

$$\begin{aligned} &\text{si } i \neq j \qquad R_{T_e}^G(\theta_{(i,j)}) = R_{T_e}^G(\theta_{(j,i)}) = \varphi_{i\,j} \\ &\text{et} \qquad\qquad\quad R_{T_e}^G(\theta_{(i,i)}) = \varphi_i + \varphi_i' \ . \end{aligned}$$

Cas $w = s$

On note toujours s l'élément non trivial du groupe de Weyl $W_{\boldsymbol{G}}$ de $\boldsymbol{G}$, *cf* 1.2. Soit $\boldsymbol{Y}_s$ la variété de Deligne-Lusztig associée à s. D'après [DL, 2.2], $\boldsymbol{Y}_s$ est isomorphe à la courbe affine définie par

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^2 \mid (xy^q - x^q y)^{q-1} = -1 \right\}.$$

Nous allons le démontrer.

On rappelle que l'on a choisi $\dot{s} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\gamma = \gamma_s = \left(\begin{smallmatrix} \beta^q & \beta \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ où β est un générateur de $\mathbb{F}_{q^2}^\times$. Le tore T_s est alors engendré par $\gamma \left(\begin{smallmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta^q \end{smallmatrix}\right) \gamma^{-1}$.

Comme $\mathcal{L}(\gamma) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, on a $F(\boldsymbol{U}_s) \cap \boldsymbol{U}_s = 1$, donc par définition

$$\boldsymbol{Y}_s = \mathcal{L}^{-1}(F(\boldsymbol{U}_s)).$$

Soit $\boldsymbol{Y}_s'$ la variété définie par

$$\boldsymbol{Y}_s' = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^2 \mid (xy^q - x^q y)^{q-1} = -1 \right\},$$

on a donc la propriété suivante :

Propriété 1.5.2. *Les variétés algébriques* $\boldsymbol{Y}_s$ *et* $\boldsymbol{Y}_s{}'$ *sont isomorphes.*

Démonstration : Soit φ l'application algébrique définie par

$$\begin{aligned} \varphi : \boldsymbol{Y}_s &\longrightarrow \boldsymbol{Y}_s{}' \\ g &\longmapsto g\begin{pmatrix} \beta^q \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Montrons que φ est bien définie. Soit g un élément de $\boldsymbol{Y}_s$, soit $u \in \mathbb{F}$ tel que $F(g)F(\gamma) = gF(\gamma)\left(\begin{smallmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et soit $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \varphi(g)$. On a

$$\begin{aligned} \det \left(\begin{smallmatrix} x & x^q \\ y & y^q \end{smallmatrix}\right) = &= \det \left[g\gamma \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) (1\ 0) + F\left(g\gamma \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\right) (0\ 1) \right] \\ &= \det \left[g\gamma \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) + gF(\gamma) \left(\begin{smallmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \right] \\ &= \det g \det \gamma \left[\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \right] \\ &= \det g(\beta^q - \beta). \end{aligned}$$

Donc $xy^q - x^q y \neq 0$ et

$$(xy^q - x^q y)^q = \det g(\beta - \beta^q) = -(xy^q - x^q y),$$

puis $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ est élément de $\boldsymbol{Y}_s{}'$.

On définit l'application ψ par

$$\begin{aligned} \psi : \boldsymbol{Y}_s{}' &\longrightarrow \boldsymbol{Y}_s \\ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) &\longmapsto \left(\begin{smallmatrix} x & x^q \\ y & y^q \end{smallmatrix}\right) \gamma^{-1}. \end{aligned}$$

C'est une application algébrique, on montre facilement qu'elle est bien définie, *i.e.*, que

$$\mathcal{L}(\psi \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)) \in F(\boldsymbol{U}).$$

On montre ensuite que ψ est l'inverse de φ. Il est clair que $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}$. Pour l'autre sens, si $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \varphi(g)$, en posant $\mathcal{L}(g) = F(\gamma)\left(\begin{smallmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)F(\gamma^{-1})$, on a

$$\left(\begin{smallmatrix} x^q \\ y^q \end{smallmatrix}\right) = F(g) \left(\begin{smallmatrix} \beta \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = gF(\gamma) \left(\begin{smallmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) F(\gamma^{-1}) \left(\begin{smallmatrix} \beta \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$$

$$\text{donc} \qquad \psi \circ \varphi(g) = g \left(\left(\begin{smallmatrix} \beta^q & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) + F(\gamma) \left(\begin{smallmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) F(\gamma^{-1}) \left(\begin{smallmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \right) \gamma^{-1}$$

et comme $\gamma^{-1} \left(\begin{smallmatrix} \beta^q \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ alors $\left(\begin{smallmatrix} 0 & u \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) F(\gamma^{-1}) \left(\begin{smallmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = 0$, et $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}$. □

On vérifie facilement que la variété $\boldsymbol{Y}_s{}'$ –donc la variété $\boldsymbol{Y}_s$– est lisse, ce qui est déjà assuré par [DL, 1.4].

Actions

La multiplication de $\boldsymbol{G}$ induit sur la variété $\boldsymbol{Y}_s$ une action à gauche de G et une action à droite de T_s. L'action de G devient par transport de structure *via* φ la restriction de l'action canonique de $\boldsymbol{G}$ sur $\mathbb{F}^2$ par multiplication à gauche, et l'action de T_s devient l'action de multiplication par un scalaire définie par

$$\text{si } t = \gamma \begin{pmatrix} \beta^i & 0 \\ 0 & \beta^{qi} \end{pmatrix} \gamma^{-1}, \text{ alors } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot t = \begin{pmatrix} x\beta^i \\ y\beta^i \end{pmatrix}.$$

La variété $\boldsymbol{Y}_s$ est munie d'un endomorphisme de Frobenius F_s défini par $g \mapsto F(g)s'$, où $s' = \gamma \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \gamma^{-1}$ (*cf* définition de F_w page 33). On montre que par transport de structure cette action devient l'action naturelle :

$$F_s : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x^q \\ y^q \end{pmatrix}.$$

Cette action commute avec celle de G, mais pas avec celle de T_s : on a $tF_s = F_s t^q$. Donc l'action de F_s^2 commute avec celle de T_s.

Composantes connexes

On note dorénavant $\boldsymbol{Y}_s$ pour $\boldsymbol{Y}_s'$.

Si q est impair, on choisit dans $\mathbb{F}$ une racine de l'unité d'ordre $2(q-1)$ et on l'appelle μ. Si q est pair, on choisit une racine de l'unité d'ordre $(q-1)$, donc on peut poser $\mu = \alpha$. L'équation définissant $\boldsymbol{Y}_s$ est

$$\prod_{i=1}^{q-1} (xy^q - x^q y - \mu^{2i-1}) = 0.$$

Ceci définit alors les composantes connexes de $\boldsymbol{Y}_s$, grâce au lemme suivant :

Lemme 1.5.3. *Soit a un élément non nul de $\mathbb{F}$. Le polynôme $xy^q - x^q y - a$ est irréductible dans $\mathbb{F}[x, y]$.*

Démonstration : Supposons que P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{F}[x, y]$ tels que $PQ = xy^q - x^q y - a$. En posant $x = 0$ on obtient que les polynômes $P(0, y)$ et $Q(0, y)$ sont des constantes. De même, en posant $y = 0$, les polynômes $P(x, 0)$ et $Q(x, 0)$ sont des constantes. Donc il existe des ploynômes

P' et Q' et des constantes a_1 et a_2 tels que $P = xyP' + a_1$ et $Q = xyQ' + a_2$. Mais alors

$$xy^q - x^q y - a = x^2y^2P'Q' + xy(a_2P' + a_1Q') + a_1a_2.$$

Supposons que P' et Q' sont non nuls. Alors pour chacun d'entre eux il existe un monôme x^iy^j tel que pour tout autre monôme x^ky^l on a $k \leq i$ et $j < l$ (c'est le monôme de plus haut degré en y parmi les monômes de plus degré en x). Soit R le produit de ces deux monômes multiplié par x^2y^2. C'est un monôme de PQ. Il est de degré supérieur ou égal à tous les autres monômes de PQ en x, et tous les autres monômes de PQ de degré maximal en x sont de degré en y strictement inférieur à celui de R. Donc R ne peut être annulé dans le développement de PQ. Or aucun monôme de $xy^q - x^qy - a$ n'est divisible par x^2y^2. Ainsi P' ou Q' est nul et $xy^q - x^qy - a$ est irréductible. □

On appelle $\boldsymbol{Y}_s(a)$ la composante connexe de $\boldsymbol{Y}_s$ définie par l'équation $xy^q - x^qy = a$, où a est une puissance impaire de μ. On vérifie que G et T agissent sur les composantes connexes via le déterminant : si $g \in G$ alors g envoie $\boldsymbol{Y}_s(a)$ sur $\boldsymbol{Y}_s(a \det g)$ et si $t \in T$ alors t envoie $\boldsymbol{Y}_s(a)$ sur $\boldsymbol{Y}_s(a \det t)$.

L'endomorphisme de Frobenius F_s envoie quant à lui la composante connexe $\boldsymbol{Y}_s(a)$ sur la composante connexe $\boldsymbol{Y}_s(-a)$. Si q est pair il ne permute donc pas les composantes connexes.

Induction $R_{T_s}^G$

Nous étudierons en détail le complexe $\tilde{\mathrm{R}}\Gamma(\boldsymbol{Y}_s, \mathcal{O})$ dans la section 3.4. Donnons tout de suite l'image des caractères de T_s par l'induction $R_{T_s}^G$, toujours grâce à [DM2, chapitre 15] et en utilisant les notations pages 23 et 200 :

$$\text{si } (q+1) \not| \, i, \qquad R_{T_s}^G(\omega_i) = -\psi_i \ ,$$

$$\text{et} \qquad\qquad R_{T_s}^G(\omega_{(q+1)i}) = \varphi_i - \varphi_i' \ .$$

Chapitre 2

Isotypies

La notion de *types de blocs* a été introduite en 1971 par R. Brauer ([Bra]). En 1990, M. Broué a défini dans son article [Br3] la notion d'*isotypie* entre deux blocs, donnant ainsi une nouvelle approche des types de blocs : deux blocs sont dits de même type s'ils sont reliés par une isotypie. Les isotypies permettent de dégager les propriétés générales (essentiellement arithmétiques) d'un type de bloc.

Dans ce chapitre nous allons donner la définition d'une isotypie, puis quelques lemmes permettant de montrer qu'une application est une isotypie. Ensuite nous nous intéresserons au cas du groupe $\mathrm{GL}_2(q)$, où q est une puissance d'un nombre premier.

2.1 Définitions

On utilise toujours le système modulaire $(K, \mathcal{O}, k)$ défini page 19, en supposant toujours que $\mathcal{O}$ est de caractéristique nulle et assez gros pour tous les groupes en présence, et que k de caractéristique non nulle ℓ.

Pour tout groupe fini G on note toujours $B_\ell(G)$ le bloc principal de $\mathcal{O}G$.

2.1.1 Applications de décomposition

Soit R un anneau commutatif, G un groupe fini et B un bloc de RG associé à l'idempotent central primitif b. Suivant [Br3], on note $CF(B, R)$ le R-module des fonctions centrales $\chi : G \to R$ qui vérifient

$$\forall g \in G \quad \chi(bg) = \chi(g)$$

et $CF_{\ell'}(B, R)$ le R-module des fonctions de $CF(B, R)$ nulles en dehors des ℓ'-éléments de G.

Soit x un ℓ-élément de G. On sait grâce au troisième théorème principal de Brauer que le *correspondant de Brauer* du bloc principal de $\mathcal{O}C_G(x)$ est le bloc principal de $\mathcal{O}G$ (*cf* par exemple [Al2, 14.1]). En conséquence la définition des applications de décomposition généralisées est la suivante (*cf* [Br1]) :

$$\begin{aligned} d_G^x(\chi) : C_G(x) &\longrightarrow K \\ x' &\longmapsto \begin{cases} \chi(xx') & \text{si } x' \in C_G(x)_{\ell'} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

2.1.2 Isotypies

On note Ξ un système de représentants des classes de conjugaison des ℓ-éléments de G. La famille des d_G^x pour $x \in \Xi$ donne une isométrie bijective

$$CF(B_\ell(G), K) \xrightarrow{(d_G^x)_{x\in\Xi}} \bigoplus_{x\in\Xi}^{\perp} CF_{\ell'}(B_\ell(C_G(x)), K). \tag{2.1}$$

Soit H un sous-groupe de G. On suppose que H contrôle la fusion des ℓ-sous-groupes de G (*cf* annexe A). Par exemple si H est le normalisateur d'un ℓ-sous-groupe de Sylow de G et si ce sous-groupe de Sylow est abélien, alors en vertu du théorème de Burnside (corollaire A.2.3) H contrôle la fusion des ℓ-sous-groupes de G.

Le contrôle de la fusion implique que si Ξ est un système de représentants des classes de conjugaison des ℓ-éléments de H, alors c'est aussi un système de représentants des classes de conjugaison des ℓ-éléments de G.

On considère une famille $(I^x)_{x\in\Xi}$ d'applications

$$I^x : CF(B_\ell(C_H(x)), K) \longrightarrow CF(B_\ell(C_G(x)), K),$$

et pour tout $x \in \Xi$ on appelle D^x le diagramme

$$\begin{array}{ccc} CF(B_\ell(H), K) & \xrightarrow{I} & CF(B_\ell(G), K) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle d_H^x} & D^x & \Big\downarrow{\scriptstyle d_G^x} \\ CF(B_\ell(C_H(x)), K) & \xrightarrow[I^x]{} & CF(B_\ell(C_G(x)), K). \end{array}$$

Définition 2.1.1. *La famille d'applications $(I^x)_{x\in\Xi}$ est dite compatible à la fusion si pour tout $x \in \Xi$ le diagramme D^x commute.*

Pour tout bloc B de $\mathcal{O}G$ on note $\mathbb{Z}\mathrm{Irr}(B, K)$ le groupe abélien engendré par les caractères irréductibles de B. C'est le groupe de Grothendieck de la catégorie B-mod, et on a $K \otimes \mathbb{Z}\mathrm{Irr}(B, K) = CF(B, K)$.

La définition suivante est conséquence du lemme [Br3, 4.1] :

Définition 2.1.2. *Une isométrie $I : CF(B_\ell(H), K) \to CF(B_\ell(G), K)$ induite par une isométrie $I_\mathbb{Z} : \mathbb{Z}\mathrm{Irr}(B_\ell(H), K) \to \mathbb{Z}\mathrm{Irr}(B_\ell(G), K)$ est dite parfaite si elle établit par restriction des bijections entre les sous-espaces $CF(B_\ell(H), \mathcal{O})$ et $CF(B_\ell(G), \mathcal{O})$, et entre les sous-espaces $CF_{\ell'}(B_\ell(H), K)$ et $CF_{\ell'}(B_\ell(G), K)$.*

Notons qu'une isométrie $I : CF(B_\ell(H), K) \to CF(B_\ell(G), K)$ est induite par une isométrie $I_\mathbb{Z} : \mathbb{Z}\mathrm{Irr}(B_\ell(H), K) \to \mathbb{Z}\mathrm{Irr}(B_\ell(G), K)$ si et seulement si elle envoie tout caractère irréductible sur un caractère irréductible précédé d'un signe, *i.e.*, pour tout caractère irréductible χ de $B_\ell(H)$ il existe φ caractère irréductible de $B_\ell(G)$ et $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ tels que $I(\chi) = \varepsilon\varphi$.

Enfin, la définition d'une isotypie est :

Définition 2.1.3. *Si l'on a une famille d'isométries parfaites $(I^x)_{x\in\Xi}$ compatible à la fusion, alors l'application $I = I^1$ est appelée isotypie. On dit que la famille $(I^x)_{x\in\Xi}$ est le système local de I. S'il existe une isotypie entre $CF(B_\ell(H), K)$ et $CF(B_\ell(G), K)$ alors on dit que les blocs $B_\ell(H)$ et $B_\ell(G)$ sont de même type.*

2.1.3 La conjecture de Broué

On peut maintenant énoncer la conjecture de Broué, sous sa forme faible (*cf* [Br3]) :

Conjecture 2.1.4 (Broué). *Soit G un groupe fini dont les ℓ-sous-groupes de Sylow sont abéliens. Soit H le normalisateur dans G de l'un de ses sous-groupes de Sylow. Alors les blocs principaux de $\mathcal{O}H$ et de $\mathcal{O}G$ sont de même type.*

2.2 Aspect pratique

Les lemmes de cette section aident à construire une isotypie.

2.2.1 Centralisateurs ℓ-nilpotents

Rappelons la définition originelle d'un groupe ℓ-nilpotent :

Définition 2.2.1. *On dit qu'un groupe G est ℓ-nilpotent si*

$$O^\ell(G) = G/O_{\ell'}(G).$$

En particulier tout groupe abélien est ℓ-nilpotent.

Lemme 2.2.2. *Un groupe G est ℓ-nilpotent si et seulement si son bloc principal n'a qu'un seul caractère modulaire irréductible.*

Ceci équivaut à demander que l'espace vectoriel $CF_{\ell'}(B_\ell(G), K)$ soit de dimension 1, il est alors engendré par le caractère modulaire trivial.

Ce lemme est conséquence des faits suivants :

- la projection canonique $G \twoheadrightarrow G/O_{\ell'}(G)$ induit une bijection entre les blocs de $\mathcal{O}G$ et ceux de $\mathcal{O}[G/O_{\ell'}(G)]$,
- le noyau du bloc principal de G est $O_{\ell'}(G)$, *cf* [NT, Théorème 8.1].

Dans toute la suite on suppose que G est un groupe fini, et que H est un sous-groupe de G contrôlant la fusion des ℓ-sous-groupes de G. On note toujours Ξ un système de représentants des classes de conjugaison de ℓ-éléments de H.

On suppose que l'on a un isomorphisme

$$I : CF(B_\ell(H), K) \longrightarrow CF(B_\ell(G), K)$$

envoyant caractère irréductible sur caractère irréductible au signe près.

Lemme 2.2.3. *Soit x un élément de Ξ tel que $C_H(x)$ et $C_G(x)$ soient ℓ-nilpotents. On suppose que l'isomorphisme canonique*

$$\varphi : O^\ell(C_H(x)) \xrightarrow{\sim} O^\ell(C_G(x))$$

est un isomorphisme et qu'il existe $\varepsilon(x) \in \{\pm 1\}$ tel que pour tout caractère irréductible χ de $B_\ell(H)$ on ait $I(\chi)(x) = \varepsilon(x).\chi(x)$.

Il existe alors une isométrie parfaite

$$I^x : CF(B_\ell(C_H(x)), K) \to CF(B_\ell(C_G(x)), K)$$

rendant le diagramme D^x commutatif.

Démonstration : Si $C_H(x)$ est ℓ-nilpotent, alors d'après le lemme 2.2.2 l'espace $CF_{\ell'}(B_\ell(C_H(x)), K)$ s'identifie à K *via* le caractère modulaire trivial. L'application d_H^x devient l'application qui à une fonction centrale α associe le scalaire $\alpha(x)$.

De plus comme la projection canonique $C_H(x) \twoheadrightarrow O^\ell(C_H(x))$ a pour noyau $O_{\ell'}(C_H(x))$ elle induit un isomorphisme :

$$\pi_H : CF(O^\ell(C_H(x)), K) \xrightarrow{\sim} CF(B_\ell(C_H(x)), K).$$

On exprime de la même façon l'application d_G^x, et on obtient également un isomorphisme π_G.

Le morphisme $\varphi : O^\ell(C_H(x)) \to O^\ell(C_G(x))$ induit par l'injection canonique $C_H(x) \hookrightarrow C_G(x)$ est par hypothèse un isomorphisme. On a donc un isomorphisme

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{\varphi}: & CF(O^\ell(C_H(x)),K) & \longrightarrow & CF(O^\ell(C_G(x)),K) \\ & \beta & \longmapsto & \beta \circ \varphi^{-1}. \end{array}$$

On pose $I^x = \varepsilon(x).\pi_G \circ \widetilde{\varphi} \circ \pi_H^{-1}$. C'est un isomorphisme, il est clair qu'il envoie les fonctions centrales à valeurs dans $\mathcal{O}$ sur les fonctions centrales à valeurs dans $\mathcal{O}$. On vérifie que pour tout caractère irréductible χ de $B_\ell(C_H(x))$, on a $I^x(\chi)(x) = \varepsilon(x)\chi(x)$, donc la restriction

$$I^x_{\ell'} : CF_{\ell'}(B_\ell(C_H(x)),K) \to CF_{\ell'}(B_\ell(C_G(x)),K)$$

de I^x induit la multiplication par $\varepsilon(x)$ sur K *via* les caractères modulaires triviaux de $C_H(x)$ et de $C_G(x)$. Ainsi I^x est une isométrie parfaite.

Si χ est maintenant un caractère irréductible de $B_\ell(H)$, on a

$$I^x_{\ell'} \circ d^x_H(\chi) = \varepsilon(x).\chi(x) = (I(\chi))(x) = d^x_G \circ I(\chi)$$

d'où la commutativité du diagramme D^x. □

2.2.2 Eléments centraux

On suppose toujours que l'on a une isométrie

$$I : CF(B_\ell(H),K) \longrightarrow CF(B_\ell(G),K)$$

envoyant caractère irréductible sur caractère irréductible au signe près.

Lemme 2.2.4. *On suppose que le diagramme D^1 est commutatif, donc que $I \circ d^1_H = d^1_G \circ I$. On a alors équivalence entre les assertions suivantes :*

1. *pour tout $z \in \Xi$ central et tout χ irréductible, $\frac{\chi(z)}{\chi(1)} = \frac{(I(\chi))(z)}{(I(\chi))(1)}$,*
2. *pour tout $z \in \Xi$ central, $I \circ d^z_H = d^z_G \circ I$.*

Démonstration : Le lemme de Schur implique que si χ est irréductible et z est central, alors la représentation irréductible de caractère χ envoie z sur une homothétie. Celle-ci est alors de rapport $\frac{\chi(z)}{\chi(1)}$. Ainsi pour tout $g \in G$ on a $\chi(zg) = \frac{\chi(z)}{\chi(1)}\chi(g)$. On en déduit que

$$d^z_H(\chi) = \frac{\chi(z)}{\chi(1)} d^1_H(\chi)$$

puis

$$I \circ d_H^z(\chi) = \frac{\chi(z)}{\chi(1)} I \circ d_H^1(\chi) \qquad \text{et} \qquad d_G^z \circ I(\chi) = \frac{(I(\chi))(z)}{(I(\chi))(1)} d_G^1 \circ I(\chi)$$

ce qui implique le lemme. □

Le lemme [Br3, 4.5] peut donc être énoncé comme ceci :

Lemme 2.2.5. *Supposons que I est compatible à la fusion de système local (I^x). Alors I envoie $CF_{\ell'}(B_\ell(H), \mathcal{O})$ dans $CF_{\ell'}(B_\ell(G), \mathcal{O})$.*

Si de plus I^x envoie $CF_{\ell'}(B_\ell(C_H(x)), \mathcal{O})$ dans $CF_{\ell'}(B_\ell(C_G(x)), \mathcal{O})$ pour tout $x \in \Xi$ non central et $I^z = I$ pour tout $z \in \Xi$ central, alors I est une isométrie parfaite.

En effet, dans la démonstration du lemme [Br3, 4.5], le fait que I^x envoie $CF_{\ell'}(B_\ell(C_H(x)), \mathcal{O})$ dans $CF_{\ell'}(B_\ell(C_G(x)), \mathcal{O})$ pour tout x non trivial n'est pas utile pour démontrer que I envoie $CF_{\ell'}(B_\ell(H), \mathcal{O})$ dans $CF_{\ell'}(B_\ell(G), \mathcal{O})$: ceci est conséquence du fait que les caractères modulaires irréductibles de $B_\ell(H)$ engendrent $CF_{\ell'}(B_\ell(H), \mathcal{O})$ sur $\mathcal{O}$.

Ensuite, comme $I^1 = I^z$ pour $z \in \Xi$ central, les I^z envoient aussi le sous-espace $CF_{\ell'}(B_\ell(H), \mathcal{O})$ dans $CF_{\ell'}(B_\ell(G), \mathcal{O})$, et donc on obtient la deuxième assertion.

La remarque en bas de la page 73 de [Br3] permet d'énoncer le lemme suivant, conséquence de la décomposition 2.1 page 40 :

Lemme 2.2.6. *S'il existe pour tout $x \in \Xi$ non trivial une application*

$$I^x : CF(C_H(x), K) \longrightarrow CF(C_G(x), K)$$

telle le diagramme D^x commute, alors le diagramme D^1 commute.

Si de plus les I^x pour x non trivial sont des isométries parfaites alors I est une isotypie.

Ce lemme peut être utile car il permet d'éviter de démontrer la commutativité du diagramme D^1. Il perd son utilité si le ℓ-centre de H est non trivial : pour l'utiliser il faudrait démontrer la commutativité des diagrammes D^z pour $z \in \Xi$ central différent de 1, mais celle-ci s'exprime en vertu du lemme 2.2.4 par

$$\frac{\chi(z)}{\chi(1)} . I^z \circ d_H^1(\chi) = \frac{I^z(\chi)(z)}{I^z(\chi)(1)} . d_G^1 \circ I^z(\chi),$$

pour tout $z \in \Xi$ central et χ irréductible, donc elle est aussi compliquée que celle de D^1.

On va montrer dans la section suivante que si les ℓ-sous-groupes des Sylow de H sont abéliens alors on peut énoncer un analogue du lemme 2.2.6 en supposant que les hypothèses sont vraies juste pour $x \in \Xi$ non central, au lieu de non trivial (lemme 2.3.10).

2.3 Quotient par le ℓ-centre

2.3.1 Propriétés

Soit G un groupe fini, et P un ℓ-sous-groupe de Sylow de G. On suppose que P est abélien. Soit Z le ℓ-centre de G, *i.e.*, $Z = Z_\ell(G) = Z(G) \cap P$. Tous les résultats de cette section deviennent triviaux si $Z = 1$.

Pour X un sous-groupe ou un élément de G on notera $\overline{X}$ son image par la projection canonique $G \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow G/Z$.

Si φ est un caractère de $\overline{G}$, on notera $\widetilde{\varphi}$ le caractère de G obtenu par inflation. Si χ est un caractère de G constant sur Z on notera $\bar{\chi}$ le caractère défini par $\bar{\chi}(\bar{g}) = \chi(g)$. Ces deux correspondances sont réciproques l'une de l'autre, et à un caractère irréductible elle associent un caractère irréductible.

Si Ξ désigne toujours un système de représentants des classes de conjugaison de ℓ-éléments de G, alors on peut choisir Ξ tel que $\Xi = Z \times \overline{\Xi}$ où $\Xi \subset P$, et l'image de $\overline{\Xi}$ par la projection par rapport à Z est un système de représentants des classes de conjugaison de ℓ-éléments de $\overline{G}$.

Soit $N = N_G(P)$. Alors Ξ désigne également l'ensemble des classes de conjugaison de ℓ-éléments de N, c'est une conséquence du fait que N contrôle la fusion des ℓ-sous-groupes de G. Ceci implique en particulier que Z est aussi le ℓ-centre de N. En effet, il est clair que $Z \subseteq Z(N) \cap P$, et si $x \in Z(N) \cap P$, $g \in G$, alors x et gxg^{-1} sont conjugués dans G, donc dans N, et ils sont égaux car $x \in Z(N)$.

Ensuite on a le lemme suivant :

Lemme 2.3.1. *Le groupe $G' \cap Z(G)$ est un ℓ'-groupe. Si x et y sont deux éléments de P, alors ils sont conjugués dans G si et seulement si $\bar{x}$ et $\bar{y}$ sont conjugués dans $\overline{G}$ et $xG' = yG'$.*

Démonstration : D'après [Go, 4.4], on a

$$P = (P \cap N') \times (P \cap Z(N)) \quad \text{et} \quad P \cap G' = P \cap N',$$

donc

$$1 = (P \cap N') \cap Z = (P \cap G') \cap Z = G' \cap P \cap Z(G),$$

et $G' \cap Z(G)$ est un ℓ'-groupe.

Soit $x, y \in P$. Si x et y sont conjugués dans G alors $\bar{x}$ et $\bar{y}$ sont conjugués dans $\overline{G}$.

Par contrôle de la fusion x et y sont conjugués dans N. De plus on peut les décomposer sous la forme $x = x_1x_2$, $y = y_1y_2$ avec x_1, $y_1 \in P \cap G'$ et

x_2, $y_2 \in P \cap Z(N)$. Il existe donc $h \in N$ tel que $x_1 = y_1^h$, et $x_2 = y_2$. Donc $x = y_1^h y_2 = y(y_1^{-1}h^{-1}y_1 h) \in yG'$.

Réciproquement si $\bar{x}$ et $\bar{y}$ sont conjugués dans $\overline{G}$ et $xG' = yG'$, alors il existe $g \in G$ tel que $y^{-1}x^g \in Z$. Donc $y^{-1}x(x^{-1}g^{-1}xg) \in Z$. Or $y^{-1}x \in G'$ et $G' \cap Z = 1$ donc $y^{-1}x^g = 1$, x et y sont conjugués dans G. □

Lemme 2.3.2. *Si $g \in G$, on a $\overline{C_G(g)} = C_{\overline{G}}(\bar{g})$, et $\overline{C_G(g)_{\ell'}Z} = C_{\overline{G}}(\bar{g})_{\ell'}$. Par conséquent les opérations $\varphi \mapsto \widetilde{\varphi}$ et $\chi \mapsto \bar{\chi}$ envoient un caractère du bloc principal sur un caractère du bloc principal.*

Démonstration : Clairement $\overline{C_G(g)} \subset C_{\overline{G}}(\bar{g})$. Si $h \in G$ est tel que $\bar{h} \in C_{\overline{G}}(\bar{g})$, alors $g^{-1}g^h \in Z$. Or $g^{-1}g^h \in G'$ donc $g^{-1}g^h = 1$ et $h \in C_G(g)$.

On a $\overline{C_G(g)_{\ell'}Z} \subset C_{\overline{G}}(\bar{g})_{\ell'}$. Réciproquement si $h \in G$ est tel que $\bar{h} \in C_{\overline{G}}(\bar{g})_{\ell'}$, alors $h \in C_G(g)$. Soit n l'ordre de $\bar{h}$, on a $h^n = z \in Z$. Soit m l'ordre de z, comme m est multiple de ℓ et n est premier avec ℓ, il existe u et v tels que $un + vm = 1$. On a donc $hz^{-u} = h^{un+vm-un} = h^{vm}$ et $h^{vmn} = 1$ donc hz^{-u} est un ℓ'-élément de $C_G(g)$, et $h \in C_G(g)_{\ell'}Z$.

Si $\chi \in \mathrm{Irr}_K(G)$, on sait que χ est dans le bloc principal de $\mathcal{O}G$ si et seulement si on a (*cf* 1.1.3)

$$\forall g \in G \qquad \frac{\chi(g)|Cl(g)|}{\chi(1)} \equiv |Cl(g)| \pmod{\ell\mathcal{O}}.$$

Donc si $\chi \in B_\ell(G)$ et χ est constant sur Z alors $\bar{\chi} \in B_\ell(\overline{G})$ et si $\varphi \in B_\ell(\overline{G})$ alors $\widetilde{\varphi} \in B_\ell(G)$. □

On note $\mathrm{Irr}_K^1(G)$ l'ensemble des caractères irréductibles de G de degré 1. Le produit tensoriel en fait un groupe abélien. On note $\mathrm{Irr}_K^1(B_\ell(G))$ l'ensemble des caractères irréductibles de degré 1 du bloc principal de G, c'est un sous-groupe de $\mathrm{Irr}_K^1(G)$.

Si C est un groupe abélien, alors $\mathrm{Irr}_K^1(C) = \mathrm{Irr}_K(C)$ et on a un isomorphisme canonique $\mathrm{Irr}_K(B_\ell(C)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Irr}_K(C_\ell)$ obtenu en composant l'injection $\mathrm{Irr}_K(B_\ell(C)) \hookrightarrow \mathrm{Irr}_K(C)$ et la restriction $\mathrm{Irr}_K(C) \twoheadrightarrow \mathrm{Irr}_K(C_\ell)$.

Lemme 2.3.3. *Il existe un morphisme $\mathrm{Irr}_K(Z) \to \mathrm{Irr}_K^1(B_\ell(G))$, qui est un scindage du morphisme canonique de restriction $\mathrm{Irr}_K^1(B_\ell(G)) \to \mathrm{Irr}_K(Z)$.*

Ainsi tout caractère irréductible de Z se relève en un caractère du bloc principal de G, et ce relèvement est compatible avec les lois de groupes.

Démonstration : On a $P = (P \cap G') \times Z$, donc l'inclusion $P \hookrightarrow G$ induit un isomorphisme $Z \xrightarrow{\sim} (G/G')_\ell$. On a donc un isomorphisme

$$\varphi_1 : \mathrm{Irr}_K(Z) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Irr}_K((G/G')_\ell)$$

qui à $\chi \in \mathrm{Irr}_K(Z)$ associe le caractère $zG' \mapsto \chi(z)$. On compose celui-ci avec l'inverse de l'isomorphisme canonique $\mathrm{Irr}_K(B_\ell(G/G')) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Irr}_K((G/G')_\ell)$, puis l'inflation donne un morphisme $\mathrm{Irr}_K(B_\ell(G/G')) \to \mathrm{Irr}_K^1(G)$, qui envoie bien un caractère du bloc principal de G/G' sur un caractère du bloc principal de G.

Soit θ^G l'image d'un caractère θ de $\mathrm{Irr}_K(Z)$ par la composition de ces morphismes. Si $z \in Z$, on a $\theta^G(z) = (\varphi_1(\theta))((zG')_\ell) = \theta(z)$, on a donc obtenu un scindage de la restriction $\mathrm{Irr}_K^1(G_\ell(G)) \to \mathrm{Irr}_K(Z)$. □

Fixons les notations pour la suite, en notant θ_1 et θ^G les images successives de $\theta \in \mathrm{Irr}_K(Z)$ par la composition :

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Irr}_K(Z) & \longrightarrow & \mathrm{Irr}_K((G/G')_\ell) & \longrightarrow & \mathrm{Irr}_K^1(B_\ell(G)) \\ \theta & \longmapsto & \theta_1 & \longmapsto & \theta^G \end{array} . \tag{2.2}$$

Ainsi si $\theta \in \mathrm{Irr}_K(Z)$ et $g \in G$, on a $\theta^G(g) = \theta_1((gG')_\ell)$. Il existe un unique $z \in Z$ tel que $(gG')_\ell = zG'$, on a $\theta_1((gG')_\ell) = \theta(z)$.

Cette construction peut être faite en remplaçant G par tout sous-groupe X de G contenant Z. Comme l'application $\theta \to \theta^X$ est un scindage de la restriction $\mathrm{Irr}_K^1(B_\ell(X)) \to \mathrm{Irr}_K(Z)$, on obtient que pour tout $g \in X$ on a $\theta^X(g) = \theta^G(g)$.

Si $\chi \in \mathrm{Irr}_K(B_\ell(G))$, alors il existe $\theta \in \mathrm{Irr}_K(Z)$ tel que la restriction de χ à Z vaut $\chi(1)\theta$. On note θ_χ ce caractère. Le caractère

$$(\theta_\chi^{-1})^G \times \chi$$

est constant sur Z, donc il existe $\varphi \in \mathrm{Irr}_K(B_\ell(\overline{G}))$ tel que $\chi = \theta_\chi^G \times \widetilde{\varphi}$. On a ainsi une correspondance bijective :

$$\mathrm{Irr}_K(B_\ell(G)) \longleftrightarrow \mathrm{Irr}_K(Z) \times \mathrm{Irr}_K(B_\ell(\overline{G})).$$

Cette correspondance induit un isomorphisme

$$A(G) : CF(B_\ell(G), K) \longrightarrow \mathrm{Irr}_K(Z) \times CF(\overline{G}, K)$$

Soit χ, φ et θ des caractères irréductibles de respectivement $B_\ell(G)$, $B_\ell(\overline{G})$, et Z. L'expression de $A(G)$ et de son inverse sont données par

$$\begin{array}{lccc} A(G) : & \chi & \longmapsto & (\theta_\chi, \overline{(\theta_\chi^G)^{-1}\chi}) \\ A(G)^{-1} : & (\theta, \varphi) & \longmapsto & \theta^G \times \widetilde{\varphi}. \end{array}$$

Une construction identique donne un isomorphisme $A(X)$ pour tout sous-groupe X de G contenant Z. Les deux lemmes suivant expriment les applications de décomposition *via* les isomorphismes $A(X)$.

Lemme 2.3.4. *Pour tout $x \in \overline{\overline{\Xi}}$, on a un diagramme $\widetilde{D^x}$ commutatif*

$$\begin{array}{ccc} CF(B_\ell(G),K) & \xrightarrow{A(G)} & \mathrm{Irr}_K(Z) \times CF(B_\ell(\overline{G}),K) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle d_G^x} & \widetilde{D^x} & \Big\downarrow{\scriptstyle \Phi_{\overline{G},\,x}} \\ CF(B_\ell(C_G(x)),K) & \xrightarrow[A(C_G(x))]{} & \mathrm{Irr}_K(Z) \times CF(B_\ell(C_{\overline{G}}(\bar{x})),K). \end{array}$$

en posant

$$\Phi_{\overline{G},\,x}(\theta_0,\,\varphi) = \sum_{\theta \in \mathrm{Irr}_k(Z)} \left(\theta,\, \frac{\theta_0^G(x)}{|Z|} d_{\overline{G}}^{\bar{x}}(\varphi)\right)$$

pour tout $\theta_0 \in \mathrm{Irr}_K(Z)$ et $\varphi \in CF(B_\ell(\overline{G}),K)$.

Démonstration : Soit $\theta_0 \in \mathrm{Irr}_K(Z)$ et $\varphi \in CF(B_\ell(\overline{G}),K)$. Il existe une famille $(\varphi_\theta)_\theta$ d'éléments de $CF(B_\ell(C_{\overline{G}}(\bar{x})),K)$ indexée par $\mathrm{Irr}_K(Z)$ telle que

$$d_G^x(\theta_0^G \times \widetilde{\varphi}) = \sum_\theta \theta^{C_G(x)} \times \widetilde{\varphi_\theta}.$$

Pour tout $y \in C_G(x)$, on considère la fonction centrale définie sur Z par $z \mapsto d_G^x(\theta_0^G \times \widetilde{\varphi})(zy)$. Soit θ' un caractère irréductible de Z. On a

$$\langle\, \theta' \mid \sum_\theta (\theta^{C_G(x)} \times \widetilde{\varphi_\theta})(\cdot\, y)\,\rangle_Z = \theta'^{C_G(x)}(y)\varphi_{\theta'}(\bar{y}),$$

et d'autre part

$$\langle\, \theta' \mid (d_G^x(\theta_0^G \times \widetilde{\varphi}))(\cdot\, y)\,\rangle_Z = \frac{1}{|Z|}\sum_{z\in Z} \theta'(z)(d_G^x(\theta_0^G \times \widetilde{\varphi}))(z^{-1}y).$$

Donc si y n'appartient pas à $ZC_G(x)_{\ell'}$ alors $\varphi_\theta(\bar{y}) = 0$ pour tout θ. Par contre s'il existe $z_0 \in Z$ et $y' \in C_G(x)_{\ell'}$ tels que $y = z_0y'$, alors on a

$$\begin{aligned} \varphi_\theta(\bar{y}) &= \frac{1}{|Z|}\theta^{C_G(x)}(y^{-1})\theta(z_0)(\theta_0^G \times \widetilde{\varphi})(xy') \\ &= \frac{1}{|Z|}\theta_0^G(x)\varphi(\bar{x}\bar{y'}). \end{aligned}$$

Ainsi $\varphi_\theta = \frac{\theta_0^G(x)}{|Z|} d_{\overline{G}}^{\bar{x}}(\varphi)$ pour tout $\theta \in \mathrm{Irr}_K(Z)$, d'où le résultat. □

On définit maintenant, pour $x \in \overline{\overline{\Xi}}$ et $z \in Z$, l'application "inclusion tordue"

$$e_X^{zx} : CF_{\ell'}(B_\ell(C_G(x)),K) \longrightarrow CF(B_\ell(C_G(x)),K)$$

par $e_G^{zx}(\chi) : y \mapsto \chi(z^{-1}y)$.

Vérifions que $e_G^{zx}(\chi)$ est dans le bloc principal de $C_G(x)$: pour θ parcourant l'ensemble des caractères irréductibles de Z, soit φ_θ l'élément de $CF(B_\ell(C_{\overline{G}}(x)), K)$ tel que

$$\chi = \sum_\theta \theta^{C_G(x)} \otimes \widetilde{\varphi_\theta}.$$

On a alors

$$e_G^{zx}(\chi) = \sum_\theta \theta(z^{-1})\theta^{C_G(x)} \otimes \widetilde{\varphi_\theta}$$

donc $e_G^{zx}(\chi)$ est combinaison linéaire des $\theta^{C_G(x)} \otimes \widetilde{\varphi}$. Il vit donc le bloc principal de $C_G(x)$.

Finalement, on définit $\widetilde{d_G^x} = \sum_{z \in Z} e_G^{zx} \circ d_G^{zx}$ pour tout $x \in \overline{\Xi}$. On verra dans la démonstration suivante que $\widetilde{d_G^x}$ est la restriction des fonctions au sous-groupe $ZC_G(x)_{\ell'}$.

Lemme 2.3.5. *Pour tout $x \in \overline{\Xi}$, on obtient un diagramme commutatif $\widetilde{E^x}$*

$$\begin{array}{ccc} CF(B_\ell(G), K) & \xrightarrow{A(G)} & \mathrm{Irr}_K(Z) \times CF(B_\ell(\overline{G}), K) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \widetilde{d_G^x}} & \widetilde{E^x} & \Big\downarrow{\scriptstyle \Psi_{\overline{G},\,x}} \\ CF(B_\ell(C_G(x)), K) & \xrightarrow[A(C_G(x))]{} & \mathrm{Irr}_K(Z) \times CF(B_\ell(C_{\overline{G}}(\bar{x})), K) \end{array}$$

en posant

$$\Psi_{\overline{G},\,x}(\theta,\, \varphi) = (\theta,\, \theta^G(x).d_{\overline{G}}^{\bar{x}}(\varphi)).$$

pour tout $\theta \in \mathrm{Irr}_K(Z)$ et $\varphi \in CF(B_\ell(\overline{G}), K)$.

Démonstration : Soit $\chi_0 = \theta_0^G \times \widetilde{\varphi_0}$ un caractère irréductible de $B_\ell(G)$. Il existe une famille de fonctions centrales $\varphi_\theta \in CF(B_\ell(C_{\overline{G}}(x)), K)$ indexée par les caractères irréductibles θ de Z telle que

$$\widetilde{d_G^x}(\chi_0) = \sum_\theta \theta^{C_G(x)} \times \widetilde{\varphi_\theta}.$$

On a donc l'égalité de fonctions sur $C_G(x)$ suivante :

$$\widetilde{\varphi_\theta} = (\theta^{C_G(x)})^{-1}.\langle\, \theta \,|\, \widetilde{d_G^x}(\chi_0)\,\rangle_Z.$$

Si $y \in C_G(x)$ alors

$$\widetilde{\varphi_\theta}(y) = \theta^{C_G(x)}(y^{-1})\frac{1}{|Z|}\sum_{z,\,z' \in Z} \theta(z')[d_G^{zx}(\theta_0^G \times \widetilde{\varphi_0})](z^{-1}z'^{-1}y).$$

Si $y \notin ZC_G(x)_{\ell'}$ alors pour tout $z'' \in Z$ on a $(d_G^{zx}(\theta_0^G \times \widetilde{\varphi_0}))(z''y) = 0$, et $\widetilde{\varphi_\theta}(y) = 0$.

Si $y = z_0 y'$ avec $z_0 \in Z$ et $y' \in C_G(x)_{\ell'}$, on a

$$\begin{aligned}\widetilde{\varphi_\theta}(y) &= \theta^{C_G(x)}(y^{-1})\frac{1}{|Z|}\sum_{z\in Z}\theta(z_0 z^{-1})[(\theta_0^G \times \widetilde{\varphi_0})(xzz_0^{-1}y)] \\ &= \theta_0^G(x)\varphi_0(\bar{x}\bar{y})\langle\,\theta\,|\,\theta_0\,\rangle_Z\end{aligned}$$

En conséquence $(A(C_G(x))\circ\widetilde{d_G^x})(\chi_0)$ est l'élément $(\theta_0, \varphi_{\theta_0})$ et le caractère φ_{θ_0} envoie un élément $\bar{y}$ de $C_{\overline{G}}(\bar{x})$ sur 0 si $\bar{y} \notin C_{\overline{G}}(\bar{x})_{\ell'}$ et sur $\theta_0^G(x)\varphi_0(\bar{x}\bar{y})$ si $\bar{y} \in C_{\overline{G}}(\bar{x})_{\ell'}$. Comme $A(G)(\chi_0) = (\theta_0, \varphi_0)$, le lemme est démontré. □

2.3.2 Inflation d'une isotypie

On suppose toujours que G est un groupe fini. Soit H un sous-groupe de G contrôlant la fusion des ℓ-éléments, P un sous-groupe de Sylow de H. On suppose que P est abélien, et on note Z le ℓ-centre de H, donc de G.

Pour X un sous-groupe ou un élément de G on note toujours $\overline{X}$ son image par la projection canonique $G \twoheadrightarrow G/Z$.

Propriété 2.3.6 (Rouquier). *Si $\overline{I}$ est une isotypie entre les blocs principaux de $\overline{H}$ et de $\overline{G}$, alors $\overline{I}$ s'étend en une isotypie entre les blocs principaux de H et de G.*

Démonstration : Soit $\overline{I} : CF(B_\ell(\overline{H}), K) \to CF(B_\ell(\overline{G}), K)$ une isotypie de système local $(\overline{I}^x)_{x\in\overline{\Xi}}$. Pour $x \in \overline{\Xi}$, on définit une application

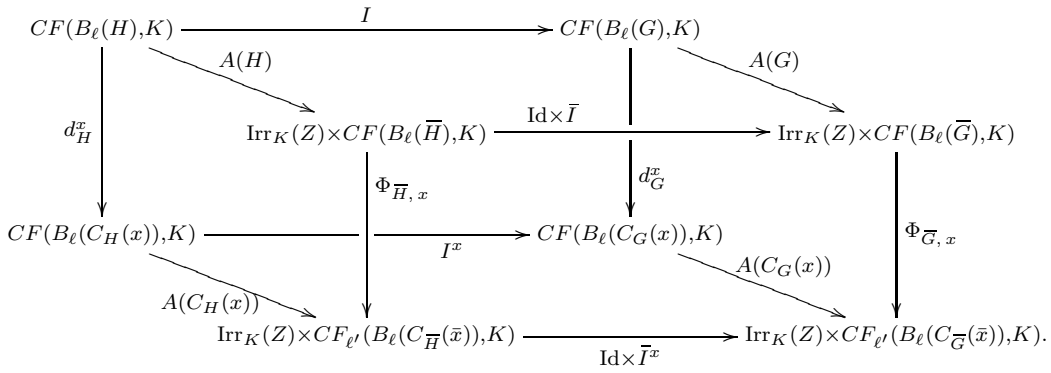
$$I^x : CF(B_\ell(C_H(x)), K) \to CF(B_\ell(C_H(x)), K)$$

en posant, si $\theta \in \mathrm{Irr}_K(Z)$ et $\varphi \in \mathrm{Irr}_K(B_\ell(C_{\overline{H}}(x)))$:

$$I^x :\ \theta^{C_H(x)} \otimes \widetilde{\varphi} \mapsto \theta^{C_G(x)} \otimes \widetilde{\overline{I}^x(\varphi)}$$

Pour $x \in \overline{\Xi}$ et $z \in Z$, $z \neq 1$, on pose $I^{zx} = I^x$. On va montrer que $I = I^1$ est une isotypie de système local $(I^{zx})_{x\in\overline{\Xi},\, z\in Z}$.

Soit x un élément de $\overline{\Xi}$. On considère le cube suivant :



Par définition de I et de I^x, les faces haute et basse sont commutatives. Par le lemme 2.3.4, les faces gauche et droite sont commutatives. Il est immédiat que la face avant est commutative grâce au fait que $\theta^H(x) = \theta^G(x)$. En conséquence, la face arrière est commutative.

Soit χ un caractère irréductible de $B_\ell(H)$. On a $d_H^{zx}(\chi) = \theta_\chi(z) d_H^x(\chi)$. Par construction de I on a $\theta_\chi = \theta_{I(\chi)}$. Ceci implique que le cube est entièrement commutatif si on remplace les x par des zx. Ainsi l'application I^1 est compatible à la fusion, de système local $(I^x)_{x\in\Xi}$.

Montrons que pour tout $x \in \Xi$, I^x envoie $CF_{\ell'}(B_\ell(C_H(x)),\mathcal{O})$ dans $CF_{\ell'}(B_\ell(C_G(x)),\mathcal{O})$.

Comme les caractères modulaires irréductibles forment une base sur $\mathcal{O}$ de $CF_{\ell'}(B_\ell(C_H(x)),\mathcal{O})$, il suffit de montrer que $I^x(\chi_0) \in CF_{\ell'}(B_\ell(C_G(x)),\mathcal{O})$ pour tout caractère modulaire irréductible χ_0 de $B_\ell(C_H(x))$. Le diagramme D^x étant commutatif, et χ_0 étant élément de $CF_{\ell'}(B_\ell(C_H(x)),K)$, on sait déjà que $I^x(\chi_0)$ est élément de $CF_{\ell'}(B_\ell(C_G(x)),K)$.

L'application de décomposition $d^1_{C_H(x)}$ est surjective, les coefficients de sa matrice dans les bases usuelles sont éléments de $\mathcal{O}$. Donc il existe une famille $(\lambda_{\theta,\varphi})$ d'éléments de $\mathcal{O}$, indexée par les caractères irréductibles ordinaires de Z et de $B_\ell(C_{\overline{H}}(\bar{x}))$, telle que

$$\chi_0 = \sum_{\theta,\varphi} \lambda_{\theta,\varphi}\theta^{C_H(x)} \times \widetilde{\varphi}.$$

Par définition de I^x on a

$$I^x(\chi_0) = \sum_{\theta,\varphi} \lambda_{\theta,\varphi}\theta^{C_G(x)} \times \widetilde{\overline{I}^x(\varphi)}.$$

Comme φ est un caractère de $C_{\overline{H}}(\bar{x})$, il est à valeur dans $\mathcal{O}$. Comme $\overline{I}^x$ est une isométrie parfaite, $\widetilde{\overline{I}^x(\varphi)}$ est à valeurs dans $\mathcal{O}$. Ainsi $I^x(\chi_0)$ est élément de $CF(B_\ell(C_G(x)),\mathcal{O})$, donc finalement de $CF_{\ell'}(B_\ell(C_G(x)),\mathcal{O})$.

Grâce au lemme 2.2.5, nous pouvons affirmer que I est une isotypie parfaite et qu'elle est compatible à la fusion de système local $(I^x)_{x\in\Xi}$.

Mais nous ne pouvons pas encore affirmenr que I est une isotypie. Nous ne savons pas encore que les I^x pour x élément non central de Ξ sont des isométries parfaites. Une définition plus complète des isotypies aurait permis de conclure, *cf* [Br3, remarque 2 page 74].

La seule propriété manquante est le fait que I^x envoie $CF(B_\ell(C_H(x)),\mathcal{O})$ dans $CF(B_\ell(C_G(x)),\mathcal{O})$ pour tout x non central. Nous allons directement montrer que I^x est une isométrie parfaite pour tout $x\in\overline{\Xi}$, en vérifiant la première définition, *cf* [Br3, 1.1].

Pour $x\in\overline{\Xi}$, soit $\bar{\mu}^{\bar{x}}$ le caractère de $C_{\overline{G}}\bar{x}\times C_{\overline{H}}(\bar{x})$ qui donne l'isotypie $\bar{I}^x$, et μ^x le caractère de $C_G(x)\times C_H(x)$ qui donne I^x.

Nous savons que pour tout sous-groupe X de G contenant Z on a un isomorphisme canonique $i_X : (X/X')_\ell \xrightarrow{\sim} Z$. Si $g\in X$, nous savons alors que $\theta^X(g)=\theta(i_X((gX')_\ell))$ pour tout $\theta\in \mathrm{Irr}_K(Z)$.

Si $g\in C_G(x)$, $h\in C_H(x)$, on définit $\delta_x(g,\,h)$ comme étant égal à 1 si $i_{C_G(x)}(g)=i_{C_H(x)}(h)$, et à 0 sinon. Nous avons alors

$$\sum_{\theta\in\mathrm{Irr}_K(Z)}\theta^{C_H(x)}(h)\theta^{C_G(x)}(g^{-1})=|Z|\delta_x(g,\,h).$$

Par définition de I^x on a

$$\begin{aligned}\mu^x(g,h) &= \sum_{\chi\in\mathrm{Irr}_K(B_\ell(C_H(x)))}\chi(h).(I(\chi))(g^{-1})\\ &= \sum_{\substack{\theta\in\mathrm{Irr}_K(Z)\\ \varphi\in\mathrm{Irr}_K(B_\ell(C_{\overline{H}}(\bar{x})))}}\theta^{C_H(x)}(h)\theta^{C_G(x)}(g^{-1})\varphi(\bar{h}).(\bar{I}(\varphi))(\bar{g}^{-1})\\ &= \delta_x(g,\,h)|Z|\bar{\mu}^{\bar{x}}(\bar{g},\,\bar{h}).\end{aligned}$$

Or on a $|C_G(g)|=|Z|.|C_{\overline{G}}(\bar{g})|$, $|C_H(h)|=|Z|.|C_{\overline{H}}(\bar{h})|$, et comme le caractère $\bar{\mu}^{\bar{x}}$ et parfait alors $\frac{\bar{\mu}^{\bar{x}}(\bar{g},\bar{h})}{|C_{\overline{G}}(\bar{g})|}$ et $\frac{\bar{\mu}^{\bar{x}}(\bar{g},\bar{h})}{|C_{\overline{H}}(\bar{h})|}$ sont éléments de $\mathcal{O}$. Donc $\frac{\mu^x(g,h)}{|C_G(g)|}$ et $\frac{\mu^x(g,h)}{|C_H(h)|}$ sont éléments de $\mathcal{O}$.

Si g et h sont tels que $\mu^x(g,h)\neq 0$, alors $\bar{\mu}^{\bar{x}}(\bar{g},\bar{h})\neq 0$ et $\delta_x(g,\,h)=1$. On veut montrer que g est d'ordre premier à ℓ si et seulement h est d'ordre premier à ℓ.

Supposons que l'ordre de g est premier à ℓ. Il en est donc de même pour celui de $\bar{g}$, et pour celui de $\bar{h}$ car $\bar{\mu}^{\bar{x}}(\bar{g},\bar{h})\neq 0$. On a donc $h_\ell\in Z$, *i.e.,* il existe un entier a non multiple de ℓ tel que $h^a\in Z$.

Mais $g(C_G(x)')$ est aussi d'ordre premier à ℓ dans $C_G(x)/C_G(x)'$, donc $(g(C_G(x)'))_\ell = C_G(x)'$, puis comme $\delta_x(g, h) = 1$, alors $h(C_H(x)')$ est un ℓ'-élément. Il existe donc un entier b non multiple de ℓ tel que $h^b \in C_H(x)'$. Finalement on a $h^{ab} \in C_H(x)' \cap Z = 1$, et h est bien un ℓ'-élément.

On a obtenu que I^x est une isométrie parfaite pour tout $x \in \overline{\Xi}$. Ceci implique que les I^x sont des isométries parfaites pour tous les x de Ξ, et donc on en conclut que I^1 est une isotypie, de système local $(I^x)_{x\in\Xi}$. □

2.3.3 Déflation d'une isotypie

Nous allons démontrer la réciproque suivante de la proposition précédente :

Propriété 2.3.7. *Soit I une isotypie entre les blocs principaux de H et G telle que*

$$\forall x \in \overline{\Xi},\ \theta \in \mathrm{Irr}_K(Z),\ \text{et}\ \chi \in \mathrm{Irr}_K(B_\ell(C_H(x))),$$

$$I^x(\theta^{C_H(x)} \otimes \chi) = \theta^{C_G(x)} \otimes I^x(\chi). \quad (2.3)$$

Alors il existe une isotypie $\overline{I}$ entre les blocs principaux de $\overline{H}$ et $\overline{G}$.

Nous allons donner une version de cette propriété aux hypothèses plus faibles, qui en particulier n'exigent pas que I soit une isotypie.

Propriété 2.3.8. *Supposons que pour tout $x \in \overline{\Xi}$, on a une application linéaire*

$$I^x : CF(B_\ell(C_H(x)), K) \longrightarrow CF(B_\ell(C_G(x)), K)$$

envoyant bijectivement caractère irréductible sur caractère irréductible au signe près, et que la famille $(I^x)_{x\in\overline{\Xi}}$ satisfait les propriétés suivantes :

1. *pour tout x élément de $\overline{\Xi}$ différent de 1, I^x envoie $CF(B_\ell(C_H(x)), \mathcal{O})$ dans $CF(B_\ell(C_G(x)), \mathcal{O})$;*
2. *pour tout x élément de $\overline{\Xi}$ différent de 1, le diagramme D^x commute ;*
3. *pour tout $x \in \overline{\Xi}$ et tout χ caractère irréductible de $B_\ell(C_H(x))$ on a $\theta_{I^x(\chi)} = \theta_\chi$.*

Alors on a une isotypie $\overline{I}$ entre les blocs principaux de $\overline{H}$ et de $\overline{G}$.

Si I est une isotypie, alors les hypothèses 1 et 2 sont vérifiées. L'hypothèse 3 est impliquées par l'hypothèse 2.3 de la propriété 2.3.7, donc la propriété 2.3.7 est conséquence de la propriété 2.3.8.

Démonstration : Soit x un élément de $\overline{\Xi}$, et φ un caractère irréductible de $B_\ell(C_{\overline{H}}(\bar{x}))$. On note 1_Z le caractère trivial de Z. L'hypothèse 3 nous assure que $I^x(1_Z^{C_H(x)} \times \widetilde{\varphi})$ est de la forme $1_Z^{C_G(x)} \times \widetilde{\psi}$, où ψ est, au signe près, un caractère irréductible de $B_\ell(C_{\overline{G}}(\bar{x}))$. On pose alors $\bar{I}^x(\varphi) = \psi$. Ceci définit une isométrie

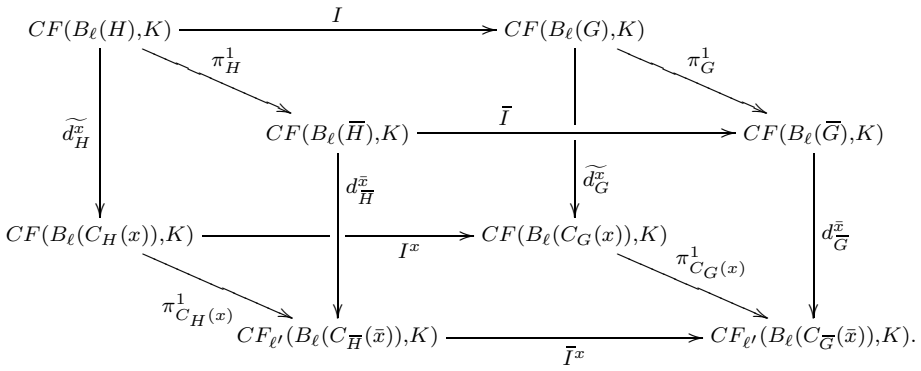
$$\bar{I}^x : CF(B_\ell(C_{\overline{H}}(\bar{x})), K) \longrightarrow CF(B_\ell(C_{\overline{G}}(\bar{x})), K).$$

Pour tout sous-groupe X de G contenant Z, on note

$$\pi_X^1 : CF(B_\ell(X), K) \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow CF(B_\ell(\overline{X}), K)$$

la projection envoyant un caractère irréductible $\theta^X \times \widetilde{\varphi}$ sur φ si $\theta = 1_Z$, et sur 0 sinon.

On considère le cube suivant :



Par définition de $\bar{I}^x$ et de $\bar{I} = \bar{I}^1$, les faces haut et bas sont commutatives. En conséquence du lemme 2.3.5, les faces gauche et droite sont commutatives.

Montrons que la face arrière est commutative. On suppose d'abord que x est différent de 1 (donc x n'est pas central).

On a $I^x \circ e_H^{xz} = e_G^{xz} \circ I$: soit $\chi \in CF_{\ell'}(B_\ell(C_H(x)), K)$. Il existe des éléments φ_θ de $CF(B_\ell(C_{\overline{H}}(\bar{x})), K)$ tels que $\chi = \sum_\theta \theta^{C_H(x)} \otimes \widetilde{\varphi_\theta}$. On a alors

$$e_H^{xz}(\chi) = \sum_\theta \theta(z^{-1})\theta^{C_H(x)} \otimes \widetilde{\varphi_\theta}$$

donc

$$I^x \circ e_H^{xz}(\chi) = \sum_\theta \theta(z^{-1}) I^x(\theta^{C_H(x)} \otimes \widetilde{\varphi_\theta}).$$

Or l'hypothèse 3. nous dit que $\theta_{I^x(\chi)} = \theta_\chi$. Donc pour tout θ il existe ψ_θ élément de $CF(B_\ell(C_{\overline{G}}(\bar{x})), K)$ tel que

$$I^x(\theta^{C_H(x)} \otimes \widetilde{\varphi_\theta}) = \theta^{C_G(x)} \otimes \widetilde{\psi_\theta}$$

donc

$$I^x \circ e_H^{xz}(\chi) = e_G^{zx}\left(\sum_\theta \theta^{C_G(x)} \otimes \widetilde{\psi_\theta}\right) = e_G^{zx} \circ I^x(\chi).$$

et on a bien $I^x \circ e_H^{xz} = e_G^{xz} \circ I$.

On a $I^x \circ d_H^{xz} = d_G^{xz} \circ I$: si χ est un caractère irréductible de $B_\ell(H)$ alors $d_H^{xz}(\chi) = \theta_\chi(z) d_H^x(\chi)$. Comme $\theta_\chi = \theta_{I(\chi)}$ alors on a $I^x \circ d_H^{xz}(\chi) = d_G^{xz} \circ I(\chi)$ (puisque x n'est pas central).

On a donc montré que la face arrière du cube est commutative si $x \neq 1$.

On pose $I^{zx} = I^x$ pour $x \in \overline{\Xi}\backslash\{1\}$ et $z \in Z$. Comme on a $\theta_{I^x(\chi)} = \theta_\chi$ pour tout caractère irréductible χ de $B_\ell(C_H(x))$, les diagrammes D^x commutent pour tout $x \in \Xi\backslash Z$.

Comme I est une isométrie, I envoie l'orthogonal de

$$\overset{\perp}{\bigoplus_{x\in\Xi\backslash Z}} CF_{\ell'}(B_\ell(C_H(x)), K)$$

sur l'orthogonal de

$$\overset{\perp}{\bigoplus_{x\in\Xi\backslash Z}} CF_{\ell'}(B_\ell(C_G(x)), K).$$

Or ces orthogonaux sont les images respectives de $\widetilde{d_H^1}$ et de $\widetilde{d_G^1}$, *via* l'isomorphisme 2.1 page 40, donc la face arrière du cube pour $x = 1$ commute.

Finalement la commutativité de la face avant du cube résulte de celle de toutes les autres, car π_H^1 est surjectif.

Par hypothèse, I^x envoie $CF(B_\ell(C_H(x)), \mathcal{O})$ dans $CF(B_\ell(C_G(x)), \mathcal{O})$ pour $x \in \overline{\Xi}\backslash\{1\}$, ce qui implique que $\overline{I}^x$ envoie $CF(B_\ell(C_{\overline{H}}(\bar{x})), \mathcal{O})$ dans $CF(B_\ell(C_{\overline{G}}(\bar{x})), \mathcal{O})$ pour tout $x \in \overline{\Xi}\backslash 1$, donc finalement pour tout $x \in \overline{\Xi}$ par le lemme 2.2.5. On a ainsi démontré que $\overline{I}$ est une isotypie de système local $(\overline{I}^x)$. □

Remarque 2.3.9. Si l'on a une isotypie entre les blocs principaux de $\overline{H}$ et de $\overline{G}$, on obtient une isotypie entre les blocs principaux de H et de G grâce à la construction donnée dans la démonstration de la propriété 2.3.6. A partir de celle-ci on obtient une isotypie entre les blocs principaux de $\overline{H}$ et de $\overline{G}$ grâce à la démonstration de la propriété 2.3.8. Alors on retrouve l'isotypie de départ, *i.e.,* la première construction est "inverse à droite" de la seconde. Par contre pour avoir l'autre sens, il faudrait supposer que l'isotypie I entre les blocs principaux de H et de G vérifie, en plus de l'hypothèse 2.3 propriété 2.3.7, l'hypothèse suivante : si pour un caractère irréductible φ de $B_\ell(C_{\overline{H}}(\bar{x}))$ on a

$$I^x(1_Z^{C_H(x)} \times \widetilde{\varphi}) = 1_Z^{C_G(x)} \times \widetilde{\psi},$$

alors pour tout $\theta \in \mathrm{Irr}_K(Z)$ on a

$$I^x(\theta_Z^{C_H(x)} \times \widetilde{\varphi}) = \theta_Z^{C_G(x)} \times \widetilde{\psi}.$$

Ceci correspond à une hypothèse de "$\mathrm{Irr}_K(Z)$-linéarité".

En combinant les deux propriétés précédentes on obtient la généralisation suivante du lemme 2.2.6 :

Propriété 2.3.10. *Supposons que pour tout $x \in \overline{\Xi}$, on a une application linéaire*

$$I^x : CF(B_\ell(C_H(x)), K) \longrightarrow CF(B_\ell(C_G(x)), K)$$

envoyant bijectivement caractère irréductible sur caractère irréductible au signe près, et que la famille $(I^x)_{x\in\overline{\Xi}}$ satisfait les propriétés suivantes :

1. *pour tout x élément de $\overline{\Xi}$ différent de 1, I^x envoie $CF(B_\ell(C_H(x)), \mathcal{O})$ dans $CF(B_\ell(C_G(x)), \mathcal{O})$;*
2. *pour tout x élément de $\overline{\Xi}$ différent de 1, le diagramme D^x commute ;*
3. *pour tout $\theta \in \mathrm{Irr}_K(Z)$, $x \in \overline{\Xi}$ et $\chi \in \mathrm{Irr}_K(B_\ell(C_H(x)))$ on a*

$$I^x(\theta^{C_H(x)} \times \chi) = \theta^{C_G(x)} \times I^x(\chi).$$

Alors, en posant $I^{zx} = I^x$ pour tout $z \in Z$ et $x \in \overline{\Xi}$, l'application I est une isotypie entre $B_\ell(H)$ et $B_\ell(G)$, de système local $(I^x)_{x\in\Xi}$.

2.4 Isotypies dans $\mathrm{GL}_2(q)$

On utilise de nouveau les notations définies dans les sections 1.1 et 1.3, donc en particulier on pose $G = \mathrm{GL}_2(q)$. Nous allons d'abord vérifier la conjecture de Broué dans les cas des ℓ-sous-groupes de Sylow abéliens (et ℓ ne divisant pas q). La validité de la conjecture dans ces cas est déjà connue, grâce aux travaux de M. Broué, G. Malle et J. Michel, *cf* [BMM] et [BMi].

Ensuite, dans le cas $\ell = 2$ et q impair, donc quand les sous-groupes de Sylow ne sont pas abéliens, nous montrerons que si q est congru à 3 ou 5 modulo 8, alors le bloc principal de G est de même type que le bloc principal du normalisateur dans G d'un sous-groupe de Sylow de $\mathrm{SL}_2(q)$.

2.4.1 ℓ impair, ℓ divise $q-1$

Dans ce cas le ℓ-sous-groupe de Sylow P_e de G est abélien, son normalisateur est H_e. Les caractères irréductibles de G et de H_e sont donnés par les tables B.12 et B.13 page 200.

Les caractères irréductibles du bloc principal de $\mathcal{O}G$ sont :

- $\varphi_{\lambda u}$ pour $\lambda = 0 \dots \ell^a - 1$
- $\varphi'_{\lambda u}$ pour $\lambda = 0 \dots \ell^a - 1$
- $\varphi_{\lambda u\, \mu u}$ pour $\lambda,\, \mu = 0 \dots \ell^a - 1 \quad \lambda < \mu.$

Les caractères irréductibles du bloc principal de $\mathcal{O}H_e$ sont :

- $\chi_{\lambda u}$ pour $\lambda = 0 \dots \ell^a - 1$
- $\chi'_{\lambda u}$ pour $\lambda = 0 \dots \ell^a - 1$
- $\chi_{\lambda u\, \mu u}$ pour $\lambda,\, \mu = 0 \dots \ell^a - 1 \quad \lambda < \mu.$

Propriété 2.4.1. *Il existe une isotypie I entre les blocs principaux de $\mathcal{O}H_e$ et de $\mathcal{O}G$ telle que*

$$I^1 : CF(B_\ell(H_e), K) \longrightarrow CF(B_\ell(G), K)$$
$$\begin{pmatrix} \chi_{\lambda u} \\ \chi'_{\lambda u} \\ \chi_{\lambda u\, \mu u} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \varphi_{\lambda u} \\ \varphi'_{\lambda u} \\ \varphi_{\lambda u\, \mu u} \end{pmatrix}.$$

Démonstration : On rappelle que $\alpha' = \alpha^u$. Les classes de conjugaison de ℓ-éléments sont représentées par :

- $\left(\begin{smallmatrix} \alpha'^r & 0 \\ 0 & \alpha'^r \end{smallmatrix}\right)$ pour $r = 0 \dots \ell^a - 1$ (les éléments centraux)
- $\left(\begin{smallmatrix} \alpha'^r & 0 \\ 0 & \alpha'^s \end{smallmatrix}\right)$ pour $r, s = 0 \dots \ell^a - 1 \quad r < s.$

Si h est un ℓ-élément non central de ce système, donc $h = \left(\begin{smallmatrix} \alpha'^r & 0 \\ 0 & \alpha'^s \end{smallmatrix}\right)$ avec $r < s$, alors on a $C_{H_e}(h) = C_G(h) = T_e$. C'est un groupe abélien donc ℓ-nilpotent. On a évidemment $O^\ell(C_{H_e}(h)) \simeq O^\ell(C_G(h))$, et $I(\chi)(h) = \chi(h)$ pour tout χ caractère irréductible de $B_\ell(H_e)$. On utilise donc le lemme 2.2.3. Il nous donne une isométrie parfaite I^h pour chacun de ces h.

Comme les sous-groupes de Sylow de G sont abéliens, on peut utiliser la propriété 2.3.10. Il reste juste à vérifier son hypothèse 3. :

pour tout élément h de $\overline{\Xi}$, tout caractère irréductible θ de $Z_\ell(H_e)$ et caractère irréductible χ de $B_\ell(C_{H_e}(h))$, on a

$$I^h(\theta^{C_{H_e}(h)} \times \chi) \quad = \quad \theta^{C_G(h)} \times I^h(\chi). \tag{2.4}$$

Cette égalité est triviale pour $h \neq 1$. Si $h = 1$, alors les θ^{H_e} et les θ^G sont les $\chi_{\lambda u}$ et les $\varphi_{\lambda u}$ pour $\lambda = 0 \dots \ell^a - 1$, l'égalité 2.4 est alors immédiate, et la propriété est démontrée. □

La conjecture de Broué 2.1.4 est donc vérifiée dans ce cas. On peut ajouter qu'elle est bien compatible avec l'induction de Deligne-Lusztig : on a en effet $R^G_{T_e} = I^1 \circ \mathrm{Ind}^{H_e}_{T_e}$ (voir l'expression de $R^G_{T_e}$ page 35).

2.4.2 ℓ impair, ℓ divise $q+1$

Dans ce cas le sous-groupe P_s est abélien, c'est un ℓ-sous-groupe de Sylow de G. Son normalisateur est H_s, les caractères irréductibles de celui-ci sont donnés par la table B.14 page 202.

Les caractères du bloc principal de $\mathcal{O}G$ sont :

- φ_0
- φ'_0
- $\psi_{\lambda(q-1)v}$ pour $\lambda = 1 \dots \ell^b - 1$.

Les caractères du bloc principal de $\mathcal{O}H_s$ sont :

- χ_0
- χ'_0
- $\chi''_{\lambda(q-1)v}$ pour $\lambda = 1 \dots \ell^b - 1$.

Propriété 2.4.2. *Il existe une isotypie I telle que*

$$I^1 : CF(B_\ell(H_s), K) \longrightarrow CF(B_\ell(G), K)$$
$$\begin{pmatrix} \chi_0 \\ \chi'_0 \\ \chi''_{\lambda(q-1)v} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ -\varphi'_0 \\ -\psi_{\lambda(q-1)v} \end{pmatrix}.$$

Démonstration : Rappelons que dans ce cas $\beta' = \beta^{(q-1)v}$. L'ensemble des $\gamma\left(\begin{smallmatrix} \beta'^r & 0 \\ 0 & \beta'^{qr} \end{smallmatrix}\right)$ où $r = 1 \dots \ell^b - 1$ est un système de représentants des classes de conjugaison de ℓ-éléments de H_s. Le centralisateur d'un tel élément dans H_s et dans G est T_s. Il faut donc juste vérifier que pour caractère irréductible χ de $B_\ell(H_s)$ on a

$$I(\chi)(\gamma\left(\begin{smallmatrix} \beta'^r & 0 \\ 0 & \beta'^{qr} \end{smallmatrix}\right)) = \chi(\gamma\left(\begin{smallmatrix} \beta'^r & 0 \\ 0 & \beta'^{qr} \end{smallmatrix}\right)),$$

ce qui est immédiat grâce aux signes négatifs. Par application des lemmes 2.2.3 et 2.2.6, on obtient bien une isotypie. □

La conjecture 2.1.4 de Broué est donc démontrée dans ce cas. L'isotypie I est encore compatible avec l'induction de Deligne-Lusztig, *i.e.*, on a $R_{T_s}^G = I^1 \circ \mathrm{Ind}_{T_s}^{H_s}$ (voir l'induction de Deligne-Lusztig page 38).

2.4.3 $\ell = 2$, q impair

Dans ce cas les sous-groupes de Sylow de G ne sont pas abéliens. On note toujours $q-1 = 2^a u$ et $q+1 = 2^b v$ avec u et v impairs. Selon la congruence de q modulo 4, l'un des entiers a et b est égal à 1 et l'autre est strictement supérieur à 1.

Les caractères du bloc principal de G sont les suivants :

- $\varphi_{\lambda u}$ pour $\lambda = 0 \dots 2^a - 1$
- $\varphi'_{\lambda u}$ pour $\lambda = 0 \dots 2^a - 1$
- $\varphi_{\lambda u\, \mu u}$ pour $\lambda, \mu = 0 \dots 2^a - 1 \quad \lambda < \mu$
- $\psi_{\lambda u v}$ pour $\lambda = 1 \dots 2^{a+b} - 1 \quad 2^b \nmid \lambda$.

Selon que q est congru à 1 ou 3 modulo 4, on a pour normalisateur d'un sous-groupe de Sylow de G l'un des deux groupes H'_e ou H'_s, leurs tables de caractères figurent pages 203 et 203 (tables B.15 et B.16).

Si $q \equiv 1 \pmod 4$, les caractères du bloc principal de $\mathcal{O}H'_e$ sont :

- $\chi_{\lambda u}$ pour $\lambda = 0 \dots 2^a - 1$
- $\chi'_{\lambda u}$ pour $\lambda = 0 \dots 2^a - 1$
- $\chi_{\lambda u\, \mu}$ pour $\lambda, \mu = 0 \dots 2^a - 1 \quad 2^a \nmid (\lambda u - \mu)$, $\chi_{\lambda u\, \mu} = \chi_{\lambda u\, \lambda u - \mu}$.

Si $q \equiv 3 \pmod 4$, les caractères du bloc principal de $\mathcal{O}H'_s$ sont :

- χ_0 et χ_u
- χ'_0 et χ'_u
- $\chi''_{\lambda u}$ pour $\lambda = 1 \dots 2^{b+1} - 1$, $\lambda \neq 2^b$.

On constate donc que les blocs principaux de $\mathcal{O}H'_e$ et $\mathcal{O}H'_s$ n'ont pas autant de caractères irréductibles que celui de G.

On peut même faire le constat suivant : si on note $c = \mathrm{Max}\{a, b\}$, alors $c \geq 2$, et le bloc principal de $\mathcal{O}G$ contient des caractères de hauteur 0, 1 et c. Or les blocs principaux de $\mathcal{O}H'_e$ et de $\mathcal{O}H'_s$ (et même de $\mathcal{O}H_e$ et $\mathcal{O}H_s$) n'ont que des caractères de hauteur 0 et 1. Une isotypie entre bloc principaux conservant la hauteur des caractères ([Br3, théorème 1.5]), on est assuré que les blocs principaux de ces groupes ne sont pas de même type que celui de $\mathcal{O}G$.

Nous avons vu que dans le cas $q \equiv \pm 1 \pmod 8$ aucun sous-groupe local ne contrôle la fusion des 2-sous-groupes de G (propriété 1.4.6), donc dans ce cas aucun bloc principal de sous-groupe local de G n'est de même type que celui de G.

Dans le cas $q \equiv \pm 3 \pmod 8$ le normalisateur dans G d'un sous-groupe de Sylow de $\mathrm{SL}_2(q)$ contrôle la fusion (propriété 1.4.2). Nous allons montrer que l'on a une isotypie entre le bloc principal de ce groupe et celui de G.

Nous supposons donc pour le reste de cette section que $q \equiv \pm 3 \mod 8$, *i.e.,* que $\{a, b\} = \{1, 2\}$.

Cas $q \equiv 5 \mod 8$

Soit P' un 2-sous-groupe de Sylow de $\mathrm{SL}_2(q)$, et $H = N_G(P')$. En vertu de la propriété 1.4.2, le sous-groupe H contrôle la fusion des 2-sous-groupes de G.

Les caractères irréductibles de H sont donnés par la table B.18 page 204.

Les caractères du bloc principal de $\mathcal{O}G$ sont donnés page 201, dans notre situation ce sont :

- $\varphi_{\lambda u}$ pour $\lambda = 0 \dots 3$
- $\varphi'_{\lambda u}$ pour $\lambda = 0 \dots 3$
- $\varphi_{\lambda u\, \mu u}$ pour $\lambda, \mu = 0 \dots 3$ $\lambda < \mu$
- $\psi_{\lambda u v}$ pour $\lambda = 1 \dots 7$ λ impair.

Les caractères du bloc principal de $\mathcal{O}H$ sont :

- $\chi_{\lambda u}$ pour $\lambda = 0 \dots 3$
- $\chi''_{\lambda u}$ pour $\lambda = 0 \dots 3$
- $\chi'_{\frac{u-1}{2}+\lambda u}$ pour $\lambda = 0 \dots 3$
- $\chi^{(4)}_{\lambda u}$ pour $\lambda = 0, 1$
- $\chi'''_{\frac{\lambda u-1}{2}}$ pour $\lambda = 1, 3$.

Propriété 2.4.3. *Il existe une isotypie I telle que*

$$I : CF(B_\ell(H), K) \longrightarrow CF(B_\ell(G), K)$$
$$\begin{pmatrix} \chi_{\lambda u} \\ \chi''_{\lambda u} \\ \chi'_{\frac{u-1}{2}+\lambda u} \\ \chi^{(4)}_{\lambda u} \\ \chi'''_{\frac{\lambda u-1}{2}} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -\varphi_{\lambda u} \\ \varphi'_{\lambda u+2u} \\ \varphi_{\mu u\, \nu u} \\ \varphi_{u-\lambda u\, 3u-\lambda u} \\ \psi_{\lambda u v} \end{pmatrix}.$$

Les images des χ'_i, pour $i = i(\lambda) = \frac{u-1}{2} + \lambda u$ sont les $\varphi_{\mu u\, \nu u}$ tels que $\mu + \nu$ est impair. Plus précisément, les correspondances sont

$$\text{si } u \equiv 1 \text{ ou } 3 \pmod 8 : \begin{pmatrix} \chi'_{\frac{u-1}{2}} \\ \chi'_{\frac{3u-1}{2}} \\ \chi'_{\frac{5u-1}{2}} \\ \chi'_{\frac{7u-1}{2}} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \varphi_{2u\, 3u} \\ \varphi_{0\, 3u} \\ \varphi_{0\, u} \\ \varphi_{u\, 2u} \end{pmatrix},$$

$$\text{si } u \equiv 5 \text{ ou } 7 \pmod 8 : \begin{pmatrix} \chi'_{\frac{u-1}{2}} \\ \chi'_{\frac{3u-1}{2}} \\ \chi'_{\frac{5u-1}{2}} \\ \chi'_{\frac{7u-1}{2}} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \varphi_{0\,u} \\ \varphi_{u\,2u} \\ \varphi_{2u\,3u} \\ \varphi_{0\,3u} \end{pmatrix}.$$

Démonstration : Considérons le système de représentants des classes de 2-éléments suivant :

- $\left(\begin{smallmatrix} \alpha'^r & 0 \\ 0 & \alpha'^r \end{smallmatrix}\right)$ pour $r = 0 \dots 3$ (les éléments centraux)
- $\left(\begin{smallmatrix} \alpha'^r & 0 \\ 0 & \alpha'^s \end{smallmatrix}\right)$ pour $r, s = 0 \dots 3 \quad r < s$
- $\left(\begin{smallmatrix} 0 & \alpha'^r \\ \alpha'^{r+1} & 0 \end{smallmatrix}\right)$ pour $r = 0, 1.$

Soit h un élément de la deuxième catégorie. On a

$$C_H(h) = \left\{ \alpha^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha'^j \end{smallmatrix}\right) \quad i = 0 \dots q-2,\, j = 0 \dots 3 \right\},$$

$$C_G(h) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} \alpha^i & 0 \\ 0 & \alpha^j \end{smallmatrix}\right) \quad i, j = 0 \dots q-2 \right\}.$$

Ces deux groupes sont abéliens, $C_H(h) \cong C_{q-1} \times C_4$ et $C_G(h) \cong C_{q-1} \times C_{q-1}$, donc $O^2(C_H(h)) \cong O^2(C_G(h)) \cong C_4 \times C_4$. On a pour tout χ irréductible $\chi(h) = -I(\chi)(h)$, ce qui justifie que $\chi_{\lambda u}$ est envoyé sur $-\varphi_{\lambda u}$, que $\chi''_{\lambda u}$ est envoyé sur $\varphi'_{\lambda u+2u}$, et permet d'obtenir les images des $\chi'_{\frac{u-1}{2}+\lambda u}$. Par application du lemme 2.2.3 pour chaque h on obtient une isométrie parfaite

$$I^h : CF(B_\ell(C_H(h)), K) \to CF(B_\ell(C_G(h)), K).$$

Soit h un élément de la troisième catégorie. On a

$$C_H(h) = \left\{ \alpha^i \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \alpha^i \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ \alpha' & 0 \end{smallmatrix}\right) \quad i = 0 \dots q-2 \right\},$$

$$C_G(h) = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} \alpha^i & \alpha^j \\ \alpha'\alpha^j & \alpha^i \end{smallmatrix}\right) \quad i, j = 0 \dots q-2 \right\}.$$

On montre que ces groupes sont cycliques : $C_H(h) \cong C_{2(q-1)}$, engendré par exemple par $\alpha^{\frac{1-u}{2}} \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ \alpha' & 0 \end{smallmatrix}\right)$, et $C_G(h) \cong C_{q^2-1}$, engendré par $\left(\begin{smallmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2\alpha' & a_1 \end{smallmatrix}\right)$ où $a_1 = \frac{1}{2}(\beta + \beta^q)$ et $a_2 = \frac{1}{2}\beta^{-uv}(\beta - \beta^q)$. On a $O^2(C_{2(q-1)}) \simeq O^2(C_{q^2-1})$, pour tout χ irréductible $\chi(h) = -I(\chi)(h)$, donc encore une fois on applique le lemme 2.2.3, qui donne des isométries parfaites I^h.

On vérifie que $\frac{\chi(x)}{\chi(1)} = \frac{(I(\chi))(x)}{(I(\chi))(1)}$ pour tout 2-élément central x et tout caractère irréductible χ. Montrons que le diagramme D^1 est commutatif.

Le calcul montre que l'espace $CF_{\ell'}(B_\ell(H), K)$ a pour base $\{\tilde{\chi}_0, \tilde{\chi}_1\}$ avec

$$\tilde{\chi}_0 = \sum_\lambda (\chi_{\lambda u} + \chi''_{\lambda u}) + 2\sum_\lambda \chi'''_{\frac{\lambda u-1}{2}},$$

$$\tilde{\chi}_1 = \sum_\lambda (\chi'_{\frac{u-1}{2}+\lambda u} + \chi''_{\lambda u}) + 2\sum_\lambda (\chi^{(4)}_{\lambda u} + \chi'''_{\frac{\lambda u-1}{2}}).$$

L'espace $CF_{\ell'}(B_\ell(G), K)$ a pour base $\{\tilde{\varphi}_0, \tilde{\varphi}_1\}$ avec

$$\tilde{\varphi}_0 = \sum_\lambda (-\varphi_{\lambda u} + \varphi'_{\lambda u}) + 2\sum_\lambda \psi_{\lambda uv},$$

$$\tilde{\varphi}_1 = \sum_{\lambda,\mu} \varphi_{\lambda u\, \mu u} + \sum_\lambda \varphi'_{\lambda u} + \sum_\lambda \psi_{\lambda uv}.$$

Ceci montre que le diagramme D^1 commute. On pose ensuite $I^x = I$ pour tout 2-élément central x, on utilise le lemme 2.2.4. Ceci montre que le diagramme D^x est commutatif. Ensuite on applique le lemme 2.2.5, il montre que I est bien une isotypie. □

Cas $q \equiv 3 \mod 8$

Soit P' un 2-sous-groupe de Sylow de $\mathrm{SL}_2(q)$, et $H = {}^\gamma N_G(P')$. On sait grâce à la propriété 1.4.2 que H^γ contrôle la fusion des 2-sous-groupes de G.

La table B.19 page 205 donne les caractères irréductibles de H.

Les caractères du bloc principal de $\mathcal{O}H$ sont χ_0, χ_u, $\chi'_{\frac{u-1}{2}}$, $\chi'_{\frac{3u-1}{2}}$, $\chi_0^{(4)}$, χ''_0, χ''_u et $\chi'''_{\frac{u-1}{2}}$.

Propriété 2.4.4. *Il existe une isotypie I telle que :*

$$I : \begin{pmatrix} \chi_0 \\ \chi_u \\ \chi'_{\frac{u-1}{2}} \\ \chi'_{\frac{3u-1}{2}} \\ \chi_0^{(4)} \\ \chi''_0 \\ \chi''_u \\ \chi'''_{\frac{u-1}{2}} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_u \\ \psi_{5uv} \\ \psi_{uv} \\ \psi_{2uv} \\ \varphi'_u \\ \varphi'_0 \\ \varphi_{0\,u} \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_u \\ \psi_{uv} \\ \psi_{5uv} \\ \psi_{2uv} \\ \varphi'_u \\ \varphi'_0 \\ \varphi_{0\,u} \end{pmatrix}.$$

La première possibilité est l'expression de I si $uv \equiv 1$ ou $3 \mod 8$, la deuxième si $uv \equiv 5$ ou $7 \mod 8$.

On remarque que cette isotypie n'a que des signes positifs. On verra dans la section 3.6 qu'elle provient d'une équivalence de Morita (théorème 3.6.9).

Démonstration : On considère le système de représentants des classes de conjugaison des 2-éléments suivant : $\pm\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$, $\pm h_I$, $\pm\alpha^{\frac{u-1}{2}}B$ et $\pm\alpha^{\frac{u-1}{2}}h_JB$. Si h est l'un d'eux et χ un caractère irréductible alors on a $d_H^{-h}(\chi) = \frac{\chi(-1)}{\chi(1)}d_H^h(\chi)$, or on vérifie que $\frac{\chi(-1)}{\chi(1)} = \frac{I(\chi)(-1)}{I(\chi)(1)}$ pour tout caractère χ irréductible, ainsi la commutativité de D^{-h} est impliquée par celle de D^h. On se restreint donc aux 2-éléments 1, h_I, $\alpha^{\frac{u-1}{2}}B$ et $\alpha^{\frac{u-1}{2}}h_JB$ (mais on ne peut pas pour autant se passer de montrer la commutativité de D^1).

Si $h = 1$, on montre que l'espace $CF_{\ell'}(B_\ell(H), K)$ a pour base $\{\tilde{\chi}_0, \tilde{\chi}_1\}$ avec

$$\tilde{\chi}_0 = \chi_0 + \chi_u + \chi_0'' + \chi_u'' + 2\chi_{\frac{u-1}{2}}''',$$

$$\tilde{\chi}_1 = \chi'_{\frac{u-1}{2}} + \chi'_{\frac{3u-1}{2}} + \chi_0'' + \chi_u'' + \chi_{\frac{u-1}{2}}''' + \chi_0^{(4)}.$$

L'espace $CF_{\ell'}(B_\ell(G), K)$ a pour base $\{\tilde{\varphi}_0, \tilde{\varphi}_1\}$ avec

$$\tilde{\varphi}_0 = \varphi_0 + \varphi_u + \varphi_0' + \varphi_u' + 2\varphi_{0\,u},$$

$$\tilde{\varphi}_1 = \psi_{uv} + \psi_{2uv} + \psi_{5uv} + \varphi_0' + \varphi_u' + \varphi_{0\,u}.$$

Le diagramme D^1 est donc commutatif.

Si $h = h_I$, alors h est conjugué à l'élément ${}^\gamma\left(\begin{smallmatrix}\beta^n&0\\0&\beta^{qn}\end{smallmatrix}\right)$ de G avec $n = (q-1)v$. On a

$$C_H(h) = \left\{\alpha^i\beta''^j\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&\beta'^{2j}\end{smallmatrix}\right) \quad i = 0\dots q-2,\ j = 0\dots 3\right\},$$

$$C_G(h)^\gamma = \left\{\left(\begin{smallmatrix}\beta^i&0\\0&\beta^{qi}\end{smallmatrix}\right) \quad i = 0\dots q^2-2\right\}.$$

donc $C_H(h) \cong C_{4(q-1)}$, engendré par exemple par $\beta''\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&\beta'^2\end{smallmatrix}\right)$, et $C_G(h) \cong C_{q^2-1}$. On a $O^2(C_{4(q-1)}) = O^2(C_{q^2-1})$, et pour tout χ irréductible on a $\chi(h) = I(\chi)(h)$.

Si $h = \alpha^{\frac{u-1}{2}}B$, alors h est conjugué à l'élément $h' = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&-1\end{smallmatrix}\right)$ de G, on a

$$C_H(h) = \left\{\alpha^i\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right),\ \alpha^i\beta''^2\left(\begin{smallmatrix}0&1\\-1&0\end{smallmatrix}\right) \quad i = 0\dots q-2\right\},$$

$$C_G(h')^\gamma = \left\{\left(\begin{smallmatrix}\alpha^i&\alpha^j\beta''^2\\-\alpha^j\beta''^2&\alpha^i\end{smallmatrix}\right) \quad i,j = 0\dots q-2\right\}.$$

ce qui donne $C_H(h) \cong C_{q-1} \times C_2$, avec C_{q-1} engendré par $\alpha \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et C_2 engendré par $\alpha^{\frac{u-1}{2}} \beta''^2 \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Le groupe $C_G(h')$ est commutatif, il a quatre 2-éléments : ± 1 et $\pm \beta'^2 \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ donc $O^2(C_G(h')) \cong C_2 \times C_2 \cong O^2(C_H(h))$. Enfin on a bien $\chi(h) = I(\chi)(h')$ pour tout χ irréductible grâce aux associations $I(\chi''_0) = \varphi'_u$ et $I(\chi''_u) = \varphi'_0$.

Si $h = \alpha^{\frac{u-1}{2}} h_J B$, alors h est conjugué à l'élément $\gamma \left(\begin{smallmatrix} \beta^n & 0 \\ 0 & \beta^{qn} \end{smallmatrix}\right)$ de G avec $n = 5uv$, les centralisateurs sont les mêmes que pour le cas $h = h_I$, on vérifie que pour tout χ irréductible on a $\chi(h) = I(\chi)(h)$ (ce qui nécessite l'examen de la congruence de uv modulo 8).

Pour ces trois dernières classes d'éléments on applique le lemme 2.2.3, puis les lemmes 2.2.4 et 2.2.5, et on obtient l'isotypie désirée. □

Chapitre 3

Equivalences splendides

Ce chapitre montre que les isotypies obtenues au chapitre précédent proviennent bien d'équivalences splendides de catégories dérivées. Nous étudierons en détail les complexes de Deligne-Lusztig Λ_e et Λ_s, ainsi que leurs analogues dans les groupes $\mathrm{SL}_2(q)$, $\mathrm{PGL}_2(q)$ et $\mathrm{PSL}_2(q)$.

3.1 Définitions et conjectures

On garde les notations relatives au groupe $G = \mathrm{GL}_2(q)$ définies dans le chapitre 1 sections 1.1 à 1.3, ainsi que le système modulaire $(K, \mathcal{O}, k)$ où k est de caractéristique non nulle ℓ.

3.1.1 Equivalences splendides

La version forte de la conjecture de Broué est la suivante :

Conjecture 3.1.1 (Broué). *Soit G un groupe fini dont les ℓ-sous-groupes de Sylow sont abéliens. Soit H le normalisateur dans G de l'un de ces sous-groupes de Sylow. Alors il existe une équivalence triangulée entre les catégories dérivées bornées $\mathcal{D}^b(B_\ell(G))$ et $\mathcal{D}^b(B_\ell(H))$.*

Cette conjecture implique qu'il existe une isométrie parfaite entre les blocs principaux $B_\ell(G)$ et $B_\ell(H)$, *cf* [Br3, 3.1].

Dans son article [Ri4], J. Rickard énonce son *raffinement de la conjecture de Broué* :

Conjecture 3.1.2 (Rickard). *Sous les hypothèses de 3.1.1, il existe une équivalence splendide entre les catégories $\mathcal{D}^b(B_\ell(G))$ et $\mathcal{D}^b(B_\ell(H))$.*

Une équivalence splendide est une équivalence dérivée particulière, donc la conjecture 3.1.2 implique la conjecture 3.1.1. Notons qu'une équivalence splendide est même une équivalence des catégories homotopiques $\mathcal{H}^b(B_\ell(G))$ et $\mathcal{H}^b(B_\ell(H))$. Mais la propriété forte d'une telle équivalence est qu'elle induit une isotypie entre les blocs $B_\ell(G)$ et $B_\ell(H)$, alors qu'une équivalence dérivée n'implique que l'existence d'une isométrie parfaite. Ainsi la conjecture 3.1.2 implique la conjecture 2.1.4.

Donnons la définition d'une équivalence splendide. On sait grâce au théorème de Rickard (*cf* [Ri1] et [Ri2]) qu'une équivalence triangulée entre catégories dérivées est induite par un complexe de bimodules. La caractérisation d'une équivalence splendide porte sur ce complexe.

Soient G et H deux groupes finis dont les ℓ-sous-groupes de Sylow sont isomorphes. Soient A et B des sommes directes de blocs de $\mathcal{O}G$ et de $\mathcal{O}H$ respectivement, ou de kG et de kH.

Définition 3.1.3. *Un complexe splendide X est un complexe de (A, B)-bimodules borné, à composantes projectives en tant que A-modules à gauche et en tant que B-modules à droite, satisfaisant les propriétés suivantes :*

1. *le complexe $X^\vee \otimes_B X$ est isomorphe à A dans la catégorie homotopique $\mathcal{H}^b(A \otimes A^{op})$, et le complexe $X \otimes_A X^\vee$ est isomorphe à B dans la catégorie homotopique $\mathcal{H}^b(B \otimes B^{op})$;*
2. *les composantes de X sont des modules de ℓ-permutation.*

Le complexe X est donc un objet de la catégorie $\mathcal{H}^b(A \otimes B^{op})$ qui, d'après la première propriété, vérifie la propriété de disjonction dans les catégories $\mathcal{H}^b(A)$ et $\mathcal{H}^b(B^{op})$. Cette première propriété équivaut au fait que les foncteurs

$$\begin{aligned} X \otimes^{\mathbf{L}}_B - \ &: \ \mathcal{H}^b(B) \longrightarrow \mathcal{H}^b(A) \\ \text{et} \quad X^\vee \otimes^{\mathbf{L}}_A - \ &: \ \mathcal{H}^b(A) \longrightarrow \mathcal{H}^b(B) \end{aligned} \tag{3.1}$$

sont des équivalences de catégories inverses l'une de l'autre. Une telle équivalence, *i.e.,* une équivalence induite par un complexe splendide, est appelée *équivalence splendide*. Comme les composantes de X sont projectives à gauche et à droite, alors les foncteurs 3.1 sont en fait des foncteurs usuels de produit tensoriel de complexes.

La deuxième propriété induit la compatibilité à la fusion. Désignons par P un sous-groupe de Sylow de G et de H, et pour tout L sous-groupe commun de G et de H notons ΔL le sous-groupe diagonal

$$\Delta L = \{(x, x^{-1}) \mid x \in L\} \ \in \ G \times H^{op}.$$

La deuxième propriété équivaut alors à dire que les facteurs directs indécomposables des composantes de X sont de source triviale et de vortex contenu dans le sous-groupe diagonal ΔP de $G \times H^{op}$.

3.1.2 Le cas des groupes finis de type de Lie

Soit $\boldsymbol{G}$ un groupe algébrique réductif connexe sur $\mathbb{F}$ muni d'un endomorphisme de Frobenius F et soit $G = \boldsymbol{G}^F$. Comme on l'a vu dans la section 1.5, à tout élément w du groupe de Weyl $W_{\boldsymbol{G}}$ de $\boldsymbol{G}$ est associé un tore maximal F-stable $\boldsymbol{T}_w$ de $\boldsymbol{G}$, puis un sous-groupe $T_w = \boldsymbol{T}_w^F$ de G que l'on appelle toujours tore de G, et enfin un objet Λ_w de la catégorie homotopique $\mathcal{H}^b(\mathcal{O}[G \times {T_w}^{op}])$ (voir définitions pages 32 et suivante).

Supposons qu'un ℓ-sous-groupe de Sylow de G soit inclus dans un tore T_w pour un certain w de $W_{\boldsymbol{G}}$. On note alors H le normalisateur de ce sous-groupe de Sylow dans G, puis $B_\ell(G)$ et $B_\ell(H)$ les blocs principaux de $\mathcal{O}G$ et de $\mathcal{O}H$ respectivement, et b_G, b_H les idempotents centraux primitifs qui leur sont associés. Dans cette situation (et même dans une situation plus générale, *cf* [Br3, 6] et [BMa, 1A]) la conjecture de Broué est plus précise :

Conjecture 3.1.4 (Broué). *Il existe une structure de complexe de $\mathcal{O}H$-modules à droite sur Λ_w, le complexe $b_G.\Lambda_w.b_H$ réalise alors une équivalence dérivée entre les catégories $\mathcal{D}^b(B_\ell(G))$ et $\mathcal{D}^b(B_\ell(H))$.*

Cette conjecture implique donc que le complexe $b_G.\Lambda_w.b_H$ est basculant, et que son algèbre d'endomorphismes dans la catégorie dérivée de $B_\ell(G)$ est isomorphe à $B_\ell(H)$.

Dans son article [Ri3], en construisant l'objet $\Lambda_c(\boldsymbol{Y}_w, \mathcal{O})$ de la catégorie $\mathcal{H}^b(B_\ell(G) \otimes B_\ell(\mathcal{O}T_w)^{op})$, J. Rickard montre que ses composantes sont des modules de ℓ-permutation, ce qui montre la cohésion des conjectures 3.1.4 et 3.1.2.

3.2 Quelques propriétés générales

3.2.1 Complexes et homotopie

Lemme 3.2.1. *Soit P un complexe borné à droite à composantes projectives, Q un complexe borné à composantes projectives. On suppose que P et Q sont quasi-isomorphes. Alors pour un n assez petit, $\tau_{\geq n}P$ est un complexe borné à composantes projectives, quasi-isomorphe à P.*

Démonstration : Supposons que $Q^i = 0$ pour tout $i \leq 0$. On a donc $H^i(P) = 0$ pour tout $i \geq 0$. Nous allons montrer que le module $P^0/B^0(P)$ est projectif. Ainsi le complexe

$$\tau_{\geq 0}P \ : \quad \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow P^0/B^0(P) \longrightarrow P^1 \longrightarrow \cdots$$

sera borné à composantes projectives.

Comme les complexes sont bornés à droite à composantes projectives, il existe un morphisme de complexes $s : P \to Q$ inversible dans la catégorie homotopique. Soit $t : Q \to P$ un représentant de son inverse et r une application satisfaisant $1_P - ts = dr + rd$. On a en particulier

$$1_{P^0} = d^{-1}r^0 + r^1d^0.$$

L'application r^1d^0 est nulle sur $Z^0(P) = B^0(P)$. Elle donne donc un morphisme $P^0/B^0(P) \to P^0$. La composée de celui-ci avec la projection canonique $P^0 \twoheadrightarrow P^0/B^0(P)$ est l'identité. Ainsi $P^0/B^0(P)$ est facteur direct de P^0, et il est projectif. □

On a de plus le corollaire :

Corollaire 3.2.2. *Soit P un complexe borné à composantes projectives. On note a le plus grand entier tel que $H^n(P) = 0$ pour tout $n < a$, et b le plus petit entier tel que $H^n(P) = 0$ pour tout $n > b$. Alors le complexe $\tau_{\geq a}\tau_{\leq b}P$ est isomorphe à P dans la catégorie homotopique.*

Dans la catégorie des complexes on a une unique décomposition en somme directe $\tau_{\geq a}\tau_{\leq b}P = P_1 \oplus P_2$ où P_1 n'a pas de facteur direct homotope à zéro, et P_2 est homotope à zéro. Le complexe P_1, isomorphe à P dans la catégorie homotopique, est uniquement déterminé à isomorphime de complexes près.

Définition 3.2.3. *Soit P un complexe borné à composantes projectives. On appelle* représentant minimal de P dans la catégorie des complexes *l'objet de la catégorie des complexes noté P_1 construit ci-dessus.*

Lemme 3.2.4. *Soit R un anneau, S une R-algèbre plate sur R. Alors pour tout complexe de R-modules E et tout entier n on a $H^n(S \otimes E) \simeq S \otimes H^n(E)$.*

Démonstration : Soit d la différentielle de E. On considère la suite exacte

$$0 \to \ker d^n \to E^n \to \text{im } d^n \to 0.$$

Comme S est plate sur R la suite

$$0 \to S \otimes \ker d^n \to S \otimes E^n \to S \otimes \text{im } d^n \to 0$$

est toujours exacte. Il est clair que $S \otimes \text{im } d^n = \text{im } (1_S \otimes d^n)$, donc on a un isomorphisme $S \otimes \ker d^n \simeq \ker (1_S \otimes d^n)$.

On considère ensuite la suite exacte

$$0 \to \text{im } d^{n-1} \to \ker d^n \to H^n(E) \to 0.$$

De même, S étant plate, on a une suite exacte

$$0 \to \text{im } (1_S \otimes d^{n-1}) \to S \otimes \ker d^n \to S \otimes H^n(E) \to 0.$$

Or on a $S \otimes \ker d^n = \ker 1_S \otimes d^n$ et une suite exacte

$$0 \to \operatorname{im}(1_S \otimes d^{n-1}) \to \ker(1_S \otimes d^n) \to H^n(S \otimes E) \to 0$$

d'où l'isomorphisme $S \otimes H^n(E) \simeq H^n(S \otimes E)$. □

Rappelons la construction suivante (voir par exemple [Ke3, 8.1.4]) :

Définition 3.2.5. *Soit A un anneau, C et D deux complexes de A-modules. On appelle* complexe des morphismes de C dans D *le complexe $\mathcal{H}om_A(C, D)$ défini par*

$$\mathcal{H}om_A(C, D)^n = \prod_{i \in \mathbb{Z}} \operatorname{Hom}_A(C^i, D^{i+n}),$$

$$d(f) = d_D \circ f - (-1)^n f \circ d_C \qquad \text{pour tout } f \in \mathcal{H}om_A(C, D)n.$$

On note $\mathcal{E}nd_A(C) = \mathcal{H}om_A(C, C)$. Pour tout n on a la propriété suivante :

$$H^n(\mathcal{H}om_A(C, D)) = \operatorname{Hom}_{\mathcal{H}(A)}(C, D[n]).$$

Propriété 3.2.6. *Soit R un anneau commutatif noethérien, S une algèbre plate sur R, G un groupe fini et A un facteur direct de l'algèbre RG. Soit C et D deux complexes de A-modules, C étant borné à composantes de type fini. On a alors un isomorphisme*

$$S \otimes_R \operatorname{Hom}_{\mathcal{H}(A)}(C, D) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{\mathcal{H}(S \otimes_R A)}(S \otimes_R C, S \otimes_R D).$$

Démonstration : D'après [Bki, chap. I, §2, n°10, prop. 11] pour tout R-module X de type fini et tout R-module Y on a un isomorphisme canonique que l'on notera toujours τ par abus de notations :

$$\tau : S \otimes_R \operatorname{Hom}_R(X, Y) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_S(S \otimes_R X, S \otimes_R Y).$$

L'image par cet isomorphisme de $\lambda \otimes f$ est l'application qui à $\mu \otimes x \in S \otimes X$ associe $\lambda\mu \otimes f(x)$.

Si de plus X et Y sont des G-modules, alors le R-module $\operatorname{Hom}_R(X, Y)$ est muni d'une action de G en posant pour $g \in G$, $\varphi \in \operatorname{Hom}_R(X, Y)$ et $x \in X$:

$$(g\varphi)(x) = g(\varphi(g^{-1}x)).$$

On a alors $\operatorname{Hom}_{RG}(X, Y) = (\operatorname{Hom}_R(X, Y))^G$, *i.e.*, $\operatorname{Hom}_{RG}(X, Y)$ est l'ensemble des points fixes de $\operatorname{Hom}_R(X, Y)$ pour cette action.

De même on a $\operatorname{Hom}_{SG}(S \otimes X, S \otimes Y) = (\operatorname{Hom}_S(S \otimes X, S \otimes Y))^G$, et l'isomorphisme τ est compatible avec cette action. Il induit un isomorphisme

$$\tau : S \otimes \operatorname{Hom}_{RG}(X, Y) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{SG}(S \otimes X, S \otimes Y).$$

Si X et Y sont des A-modules alors τ est en fait un isomorphisme :

$$\tau : S \otimes \mathrm{Hom}_A(X, Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{S\otimes A}(S \otimes X, S \otimes Y).$$

Considérons maintenant deux complexes de A-modules C et D, où C est borné, à composantes de type fini. On note d_R la différentielle du complexe $\mathcal{H}om_A(C, D)$ et d_S celle du complexe $\mathcal{H}om_{SA}(S \otimes C, S \otimes D)$.

Comme C est un complexe borné, pour tout n l'isomorphisme τ s'étend en un isomorphisme $S \otimes (\mathcal{H}om_A(C, D))^n \xrightarrow{\sim} (\mathcal{H}om_{SA}(S \otimes C, S \otimes D))^n$. On vérifie que $\tau \circ (1_S \otimes d_R) = d_S \circ \tau$, donc que τ définit un isomorphisme de complexes.

Celui-ci induit donc un isomorphisme en homologie de degré 0

$$\begin{array}{rcl} H^0(\tau) : H^0(S \otimes (\mathcal{H}om_A(C, D))) & \xrightarrow{\sim} & H^0(\mathcal{H}om_{SA}(S \otimes C, S \otimes D)) \\ & = & \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(SA)}(S \otimes C, S \otimes D). \end{array}$$

Le lemme 3.2.4 nous assure que

$$H^0(S \otimes \mathcal{H}om_A(C, D)) \simeq S \otimes H^0(\mathcal{H}om_A(C, D)),$$

donc on a l'isomorphisme désiré. □

Propriété 3.2.7. *Soit $\mathcal{O}$ un anneau de valuation discrète, k son corps résiduel. Soit $C = \cdots \to C^i \xrightarrow{d^i} C^{i+1} \to \cdots$ un complexe borné de $\mathcal{O}$-modules libres, tel que pour tout $i \neq 0$, $H^i(k \otimes_{\mathcal{O}} C) = 0$.*

Alors $H^0(C)$, vu comme complexe concentré en degré 0, est facteur direct de C, et ces deux complexes sont homotopes.

Démonstration : Comme les modules C^i sont libres, l'application canonique $k \otimes H^i(C) \to H^i(k \otimes C)$ est injective pour tout $i \in \mathbb{Z}$ et donc $H^i(C) = 0$ pour tout entier i.

On construit tout d'abord un endomorphisme f de C homotope à 0 tel que $f^i = \mathrm{Id}_{C^i}$ pour tout $i \neq 0$.

Soit n un entier tel que $C^p = 0$ pour tout $p > n$. On suppose $n > 1$ pour simplifier. On a alors d^{n-1} surjectif et C^n projectif, donc il existe un morphisme r^n tel que $d^{n-1} \circ r^n = \mathrm{Id}_{C^n}$:

$$\begin{array}{ccccc} C^{n-1} & \xrightarrow{d^{n-1}} & C^n & \longrightarrow & 0 \\ & \searrow^{r^n} & \downarrow \mathrm{Id} & & \\ C^{n-1} & \xrightarrow[d^{n-1}]{} & C^n & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Le morphisme $\mathrm{Id}_{C^{n-1}} - r^n \circ d^{n-1}$ est à valeurs dans $\ker d^{n-1}$, donc comme $H^{n-1}(C) = 0$ c'est une surjection à valeurs dans $\mathrm{im}\, d^{n-2}$. La projectivité de C^{n-1} nous assure donc qu'il existe un morphisme $r^{n-1} : C^{n-1} \to C^{n-2}$ tel que $\mathrm{Id}_{C^{n-1}} = r^n \circ d^{n-1} + d^{n-2} \circ r^{n-1}$. On construit ainsi par récurrence une famille de morphismes $(r^i : C^i \to C^{i-1})_{i>0}$ telle que $\mathrm{Id}_{C^i} = r^{i+1} \circ d^i + d^{i-1} \circ r^i$.

Pour construire les r^i pour i négatif on utilise la dualité : comme les C^i sont projectifs, leurs duaux C^i_* sont projectifs (on note exceptionnellement les duaux sur k par une étoile en bas). On a besoin de l'hypothèse $H^i(k \otimes C) = 0$ pour montrer que $H^i(C_*) = 0$: comme k est un corps on a

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(k)}(k \otimes C[i],\, k) = \mathrm{Hom}_k(H^i(k \otimes C),\, k) = H^i(k \otimes C)_*.$$

D'autre part

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(k)}(k \otimes C[i],\, k) = H^i(\mathcal{H}om_k(k \otimes C,\, k)) = H^i(k \otimes C_*)$$

donc comme $H^i(C_*)$ est un sous-espace de $H^i(k \otimes C_*)$, on a $H^i(C_*) = 0$ pour tout entier i.

On obtient de la même façon que précédemment une famille de morphismes $(s^i)_{i<0}$

$$\begin{array}{ccccccc}
C^0_* & \xrightarrow{d^{-1}_*} & C^{-1}_* & \xrightarrow{d^{-2}_*} & C^{-2}_* & \longrightarrow & \cdots \\
 & \swarrow^{s^0} & \downarrow \mathrm{Id} & \swarrow^{s^{-1}} & \downarrow \mathrm{Id} & & \\
C^0_* & \xrightarrow[d^{-1}_*]{} & C^{-1}_* & \xrightarrow[d^{-2}_*]{} & C^{-2}_* & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

telle que $s^i \circ d^{i-1}_* + d^i_* \circ s^{i+1} = \mathrm{Id}_{C^i_*}$ pour tout $i \leq 0$. Mais comme les C^i sont projectifs on a un isomorphisme canonique $C^i \xrightarrow{\sim} C^i_{**}$, qui envoie l'identité sur l'identité. En dualisant on a $s^{i+1}_* \circ d^i + d^{i-1} \circ s^i_* = \mathrm{Id}_{C^i}$, on pose donc $r^i = s^i_*$ pour tout $i \leq 0$.

On pose ensuite $f^i = \mathrm{Id}_{C^i}$ pour $i \neq 0$, $f^0 = r^1 \circ d^0 + d^{-1} \circ r^0$, puis on vérifie que f est un endomorphisme de complexes. Par construction f est homotope à 0.

Soit g l'endomorphime de C^0 défini par $g = \mathrm{Id}_{C^0} - f^0$. On a alors la factorisation

$$\bar{g} : \mathrm{coker}\, d^{-1} \to \ker d^0.$$

Soit C_+, C_- et H^0 les complexes

$$\begin{aligned}
C_+ &: \quad \cdots \;\; 0 \;\to\; 0 \;\to\; \mathrm{coker}\, d^{-1} \to C^1 \to C^2 \cdots \\
C_- &: \quad \cdots C^{-2} \to C^{-1} \to \;\; \ker d^0 \;\; \to\; 0 \;\to\; 0 \;\cdots \\
H^0 &: \quad \cdots \;\; 0 \;\to\; 0 \;\to\; H^0(C) \;\to\; 0 \;\to\; 0 \;\cdots \quad .
\end{aligned}$$

Le morphisme $\bar{g}$ induit un morphisme de complexes $C_+ \to C_-$, et on a les morphismes évidents $C_- \hookrightarrow C \twoheadrightarrow C_+$ et $C_- \twoheadrightarrow H^0 \hookrightarrow C_+$.

On considère les morphismes de complexes donnés par les compositions :

$$\varphi : C \twoheadrightarrow C_+ \xrightarrow{\bar{g}} C_- \twoheadrightarrow H^0 \qquad \text{et} \qquad \psi : H^0 \hookrightarrow C_+ \xrightarrow{\bar{g}} C_- \hookrightarrow C.$$

On a alors les résultats suivants, qui démontrent le lemme :

- $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_{H^0}$.
- $\psi \circ \varphi$ est homotope à l'identité de C. En effet on sait que f est homotope à 0, donc il suffit de montrer que $\psi \circ \varphi + f - \mathrm{Id}_C$ est homotope à 0, ce qui est immédiat en prenant par exemple comme homotopie l'application h nulle en dehors de C^0 et définie par $h^0 = r^0 \circ r^1 \circ d^0$ sur C^0.

Ainsi φ et ψ sont des isomorphismes dans la catégorie homotopique, inverses l'un de l'autre, et H^0 est facteur direct de C. □

Lemme 3.2.8. *Soit R un anneau commutatif, I un idéal de R et $S = R/I$. Soit C un complexe borné à droite de modules libres sur R, tel que pour tout entier n l'homologie $H^n(C)$ soit libre sur R. Alors on a un isomorphime*

$$S \otimes_R H^n(C) \to H^n(S \otimes_R C).$$

Démonstration : Comme C est borné à droite, à composantes libre, et comme son homologie est libre sur R, on montre par une construction similaire à celle de la démonstration de la propriété précédente que C est homotope à son homologie. Ainsi les complexes C et $H^*(C)$ sont isomorphes dans la catégorie $\mathcal{H}(R)$, donc les complexes $S \otimes C$ et $S \otimes H^*(C)$ sont isomorphes dans la catégorie $\mathcal{H}(S)$, ce qui implique que leurs homologies sont isomorphes. □

3.2.2 Propriétés diverses

On considère de nouveau que $\mathcal{O}$ est une anneau de valuation discrète complet, de corps résiduel k et de corps des fractions K.

Propriété 3.2.9. *Soit R une $\mathcal{O}$-algèbre libre commutative et locale (donc telle que $R/\mathrm{rad}(R) = k$), A et B deux R-algèbres libres non nulles, et*

$$\varphi : A \to B$$

un morphisme d'algèbres R-linéaire tel que

$$\mathrm{Id}_K \otimes_{\mathcal{O}} \varphi : K \otimes_{\mathcal{O}} A \to K \otimes_{\mathcal{O}} B$$

soit un isomorphisme. Si $k \otimes_R A$ est semi-simple, alors φ est un isomorphisme.

Il est immédiat dans cette situation que A et B sont de même rang sur R (ou sur $\mathcal{O}$), et que φ est injective.

Démonstration : Supposons d'abord que $k \otimes_R A$ est simple. Le morphisme

$$\mathrm{Id}_k \otimes_R \varphi : k \otimes_R A \longrightarrow k \otimes_R B$$

a pour noyau un idéal bilatère de $k \otimes_R A$, qui peut être soit 0 soit $k \otimes_R A$ car $k \otimes_R A$ est simple. Il ne peut être $k \otimes_R A$ tout entier car $\mathrm{Id}_k \otimes_R \varphi$ envoie l'unité de $k \otimes_R A$ sur celle de $k \otimes_R B$. Ainsi $\mathrm{Id}_k \otimes \varphi$ est injectif. Comme A et B ont même rang sur R, $k \otimes_R A$ et $k \otimes_R B$ ont même dimension sur k et donc $\mathrm{Id}_k \otimes_R \varphi$ est un isomorphisme.

On a donc $B = \mathrm{im}\ \varphi + \mathrm{rad}(R)B$, et par application du lemme de Nakayama φ est surjectif.

Si $k \otimes_R A$ est semi-simple, notons $(e_1, \ldots, e_r)$ les idempotents centraux primitifs de A. Comme $1_B = \varphi(1_A) = \sum \varphi(e_i)$, l'algèbre B est somme directe des algèbres $B\varphi(e_i)$. Grâce au théorème de relèvement des idempotents, les algèbres $k \otimes_R Ae_i$ sont simples. Ainsi les restrictions $\varphi_i : Ae_i \to B\varphi(e_i)$ sont surjectives grâce à ce qui précède. Finalement φ est surjectif, c'est donc un isomorphisme. □

Lemme 3.2.10. *Soit G un groupe fini, et M un kG-module de type fini indécomposable. S'il existe un sous-groupe H de G tel que M soit facteur direct de $\mathrm{Ind}_H^G k$, alors M est de source triviale et il existe un vortex de M contenu dans H.*

Démonstration : Soit P un sous-groupe de Sylow de H. Comme M est relativement H-projectif, alors M est relativement P-projectif, et donc H contient un vortex de M.

Si Q est un vortex de M, alors M est facteur direct de $\mathrm{Ind}_Q^G \mathrm{Res}_Q^G M$, donc en utilisant le théorème de Mackey :

$$\begin{aligned} M \ \mid\ & \mathrm{Ind}_Q^G \mathrm{Res}_Q^G \mathrm{Ind}_H^G k \\ & \simeq \bigoplus_{\gamma \in Q\backslash G/H} \mathrm{Ind}_{Q \cap H^\gamma}^G k. \end{aligned}$$

Il existe donc γ tel que M est facteur direct de $\mathrm{Ind}_{Q\cap H^\gamma}^G k$, ce qui implique qu'un conjugué de Q est inclus dans $Q \cap H^\gamma$, donc que $Q \subset H^\gamma$. Ainsi M est facteur direct de $\mathrm{Ind}_Q^G k$, donc de source triviale. □

La propriété suivante est due à S. Bouc (*cf* [Bou]). On renvoie à [AB], [Br2], et [Ro4, 4] pour les définitions et propriétés des morphismes et foncteurs de Brauer (notés respectivement br et Br).

Propriété 3.2.11. *Soit G un groupe fini, et $f : V \to W$ une application G-linéaire entre $\mathcal{O}G$-modules de ℓ-permutation, V n'ayant pas de composante projective. Soit $P_1, \ldots, P_n$ des vortex des composantes indécomposables de V. Si pour tout i, l'application $Br_{P_i}(f)$ est une injection, alors f est une injection scindée.*

Nous en donnons une démonstration très proche de celle de [Ro3, lemme 3.6 (i)] :

Démonstration : Soit S un ℓ-sous-groupe de Sylow de G. La restriction

$$\mathrm{Res}_S^G f : \mathrm{Res}_S^G V \longrightarrow \mathrm{Res}_S^G W$$

est une injection scindée si et seulement si f est une injection scindée. De plus les vortex des composantes indécomposables de V sont conjugués à ceux des composantes indécomposables de $\mathrm{Res}_S^G V$. En conséquence on peut supposer que G est un ℓ-groupe.

Supposons que V est indécomposable. Alors il existe un ℓ-sous-groupe P de G tel que $V = \mathcal{O}G/P$, et P est un vortex de V (*cf* , par exemple [Br2]). On a $Br_P(V) = kN_G(P)/P$, et par hypothèse $Br_P(f)$ est une injection.

Soit Q un ℓ-sous-groupe de G tel que $\mathcal{O}G/Q$ soit une composante irréductible de W. On a un isomorphisme de $N_G(P)/P$-modules :

$$Br_P(\mathcal{O}G/Q) = \bigoplus_{\gamma \in N_G(P)\backslash T_G(P,Q)/Q} kN_G(P)/(N_G(P) \cap {}^{\gamma}Q)$$

où $T_G(P, Q)$ désigne le transporteur de P dans Q, *i.e.,* l'ensemble des $g \in G$ tels que $P^g \subseteq Q$. Comme $Br_P(f)$ est une injection de $kN_G(P)/P$-modules et comme $Br_P(V)$ est un $kN_G(P)/P$-module projectif indécomposable, il existe un sous-groupe Q de G tel qu'une composante indécomposable W_1 de W soit isomorphe à $\mathcal{O}G/Q$, et tel que $kN_G(P)/P$ soit facteur direct d'un module $kN_G(P)/(N_G(P) \cap {}^{\gamma}Q)$. Ceci impose que $P = N_{\gamma Q}(P)$, et donc comme ${}^{\gamma}Q$ est un ℓ-groupe, que Q est conjugué à P.

En composant f avec la projection canonique $W \twoheadrightarrow W_1$, on a une application $f_1 : \mathcal{O}G/P \to \mathcal{O}G/P$ telle que $Br_P(f_1)$ soit un isomorphisme. Le foncteur de Brauer donne un morphisme surjectif d'anneaux

$$Br_P : \mathrm{End}_{\mathcal{O}G}(\mathcal{O}G/P) \twoheadrightarrow \mathrm{End}_{kN_G(P)/P}(kN_G(P)/P),$$

envoyant f_1 sur un élément inversible. Comme $\mathcal{O}G/P$ est indécomposable, la $\mathcal{O}$-algèbre $\mathrm{End}_{\mathcal{O}G}(\mathcal{O}G/P)$ est locale, donc f_1 est inversible modulo l'idéal maximal de $\mathcal{O}$, et comme $\mathcal{O}$ est supposé complet pour sa valuation discrète, f_1 est inversible, d'où le résultat si V est indécomposable.

Dans le cas général, on choisit une composante indécomposable V_1 de V et on compose f avec l'injection $V_1 \hookrightarrow V$. Alors $f(V_1)$ est facteur direct de W, on considère $f' : V/V_1 \longrightarrow W/f(V_1)$, et on aboutit au résultat par récurrence. □

3.2.3 Inflation et Déflation

Soit G un groupe fini, N un sous-groupe distingué de G, et k un corps assez gros pour G. Pour tout X sous-ensemble ou un élément de G on notera $\overline{X}$ l'image de X par la projection canonique $G \twoheadrightarrow G/N$.

Le $(kG,\, k\overline{G})$-bimodule $k\overline{G}$ définit les foncteurs inflation et déflation :

$$kG\text{-mod} \underset{\mathrm{Inf}_{\overline{G}}^{G}=kGk\overline{G}\otimes_{k\overline{G}}-}{\overset{\mathrm{Def}_{\overline{G}}^{G}=k\overline{G}\otimes_{kG}-}{\rightleftarrows}} k\overline{G}\text{-mod}.$$

L'inflation est adjointe à droite de la déflation, et le composé Def $\circ$ Inf est le foncteur identité.

On suppose de plus que k est de caractéristique non nulle ℓ, et que N est un ℓ-groupe. Alors, par exemple d'après le lemme [Ro2, 10.2.9], la déflation réalise une bijection entre les classes d'équivalence de modules projectifs. En conséquence, l'inflation induit une bijection entre les groupes de Grothendieck $R(kG)$ et $R(k\overline{G})$. Elle envoie donc un module simple sur un module simple. De plus, la déflation envoie un module non nul sur un module non nul, et donc l'inflation envoie un indécomposable sur un indécomposable.

Propriété 3.2.12. *1. Si M est un kG-module indécomposable tel que M et $\mathrm{Def}_{\overline{G}}^{G}M$ ont même dimension, alors tout vortex de M contient N.*

2. Si $\overline{M}$ est un $k\overline{G}$-module indécomposable de vortex $\overline{Q} = Q/N$ (où Q est un ℓ-sous-groupe de G contenant N) et de source U, alors $\mathrm{Inf}_{\overline{G}}^{G}\overline{M}$ a pour vortex Q et pour source $\mathrm{Inf}_{\overline{Q}}^{Q}U$.

Démonstration : La dimension sur k de $\overline{M} = \mathrm{Def}_{\overline{G}}^{G}M$ est égale à celle de $\mathrm{Hom}_{k\overline{G}}(\overline{M},\, k\overline{G})$. On a

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{k\overline{G}}(\overline{M},\, k\overline{G}) &\simeq \mathrm{Hom}_{kG}(M,\, \mathrm{Inf}_{\overline{G}}^{G}k\overline{G}) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{kG}(M,\, \mathrm{Ind}_{N}^{G}k) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{kN}(\mathrm{Res}_{N}^{G}M,\, k)\end{aligned}$$

donc la dimension de $\overline{M}$ est égale à celle de la tête de $\mathrm{Res}_{N}^{G}M$. Si M et $\overline{M}$ ont même dimension, $\mathrm{Res}_{N}^{G}M$ est alors semi-simple et donc est une puissance du module trivial k^n.

Soient Q et U respectivement un vortex et une source de M. D'après par exemple [Al2, théorème 9.4, démonstration], U est facteur direct de $\mathrm{Res}_{Q}^{G}M$. Donc $\mathrm{Res}_{Q\cap N}^{Q}U$ est facteur direct de $\mathrm{Res}_{Q\cap N}^{G}M = \mathrm{Res}_{Q\cap N}^{N}k^n$. Ainsi pour tout $\gamma \in G$, $\mathrm{Res}_{Q^\gamma\cap N}^{Q^\gamma}U^\gamma$ est une puissance du module trivial.

Comme M est facteur direct de $\mathrm{Ind}_Q^G U$, en restreignant à N et en appliquant le théorème de Mackey on obtient :

$$\begin{aligned} k^n \quad | \quad & \mathrm{Res}_N^G \mathrm{Ind}_Q^G U \\ & \simeq \bigoplus_{\gamma \in N\backslash G/Q} \mathrm{Ind}_{N\cap Q^\gamma}^N \mathrm{Res}_{N\cap Q^\gamma}^{Q^\gamma} U^\gamma. \end{aligned}$$

Soit $R = N \cap Q^\gamma$. Comme on a $\mathrm{Hom}_{kN}(\mathrm{Ind}_R^N k,\, k) = \mathrm{Hom}_{kR}(k,\, k)$, alors $\mathrm{Ind}_R^N k$ a pour tête le module trivial et donc est indécomposable. Ainsi il existe γ tel que $N \cap Q^\gamma = N$, ce qui montre le premier point.

Soit maintenant $\overline{M}$ un $k\overline{G}$-module indécomposable, et $M = \mathrm{Inf}_{\overline{G}}^G \overline{M}$. On a $\mathrm{Def}_{\overline{G}}^G M = \overline{M}$, donc d'après ce qui précède, si Q' est un vortex de M alors $N \subset Q'$.

Comme $\overline{M}$ est facteur direct de $\mathrm{Ind}_{\overline{Q}}^{\overline{G}} U$, alors M est facteur direct de

$$\mathrm{Inf}_{\overline{G}}^G \mathrm{Ind}_{\overline{Q}}^{\overline{G}} U = \mathrm{Ind}_Q^G \mathrm{Inf}_{\overline{Q}}^Q U$$

car les $(kG,\, k\overline{Q})$-bimodules $k\overline{G}$ et $kG \otimes_{kQ} k\overline{Q}$ sont isomorphes. En conséquence, quitte à remplacer Q' par un de ses conjugués, on peut supposer que $Q' \subset Q$.

Si U' est une source de M, alors M est facteur direct de $\mathrm{Ind}_{Q'}^G U'$, donc en appliquant la déflation $\overline{M}$ est facteur direct de $\mathrm{Ind}_{\overline{Q}'}^{\overline{G}} \mathrm{Def}_{\overline{Q}'}^{Q'} U'$. Ici on utilise l'isomorphisme de $(k\overline{G},\, kQ')$-bimodules $k\overline{G} \otimes_{k\overline{Q}'} kQ' \simeq k\overline{G} \otimes_{kG} kG$. Ainsi $\overline{Q} \subset \overline{Q}'$ et donc $Q = Q'$.

Comme U est indécomposable alors $\mathrm{Inf}_{\overline{Q}}^Q U$ l'est aussi, et donc c'est une source de M. □

Pour la propriété suivante, nous remplaçons N par un ℓ-sous-groupe central Z. Soit H un sous-groupe de G contenant Z.

On rappelle que si H' est un autre sous-groupe de G, si C et D sont des complexes respectivement de $\mathcal{O}[G \times H^{op}]$-modules et de $\mathcal{O}[G \otimes H'^{op}]$-modules, alors le complexe $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}G}(C,\, D)$ est muni d'une structure de complexe de $\mathcal{O}[H \otimes H']$-modules définie de la façon usuelle : soit f est un morphisme $\mathcal{O}G$-linéaire d'une composante C^i de C vers une composante D^j de D, soit x un élément de C^i, soit h, h' des éléments respectivement de H et de H'. Alors on a

$$h.f.h' : x \mapsto f(x.h).h'.$$

Propriété 3.2.13. *Soit C un complexe de $\mathcal{O}[G \times H^{op}]$-modules de ℓ-permutation. On suppose que le vortex de tout facteur direct indécomposable d'une*

composante de C contient ΔZ. Alors il existe un isomorphime canonique de complexes de $\mathcal{O}[H \times H^{op}]$-modules

$$\mathcal{O}\overline{H} \otimes_{\mathcal{O}H} \mathcal{E}nd_{\mathcal{O}G}(C) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}nd_{\mathcal{O}\overline{G}}(\overline{C}).$$

Cet isomorphisme est compatible avec les structures d'algèbres différentielles graduées.

Remarque 3.2.14. Dans cette situation, le complexe $\mathcal{O}\overline{H} \otimes_{\mathcal{O}H} \mathcal{E}nd_{\mathcal{O}G}(C)$ a une structure d'algèbre différentielle graduée dont la différentielle est induite par celle de $\mathcal{E}nd_{\mathcal{O}G}(C)$ et dont la multiplication est donnée par

$$\bar{h} \otimes f \,.\, \bar{h'} \otimes f' = \bar{h} \otimes fh'f'$$

où h, $h' \in H$ et f, $f' \in \mathcal{E}nd_{\mathcal{O}G}(C)$. Cette multiplication aurait été plus naturelle si l'on avait utilisé l'isomorphisme

$$\mathcal{O}\overline{H} \otimes_{\mathcal{O}H} \mathcal{E}nd_{\mathcal{O}G}(C) \simeq \mathcal{O} \otimes_{\mathcal{O}Z} \mathcal{E}nd_{\mathcal{O}G}(C)$$

mais dans ce cas l'action à droite de H sur $\mathcal{O} \otimes_{\mathcal{O}Z} \mathcal{E}nd_{\mathcal{O}G}(C)$ est donnée par $h.\lambda \otimes f = \lambda \otimes (h.f)$ où $h \in H$, $\lambda \in \mathcal{O}$ et $f \in \mathcal{E}nd_{\mathcal{O}G}(C)$.

Démonstration : Soit Q un ℓ-sous-groupe de H contenant Z. Comme Z est central, alors pour tout x élément de $\mathrm{Ind}_{\Delta Q}^{G \times H^{op}} \mathcal{O}$ et tout élément z de Z on a $zx = xz$. En conséquence, si M est un $\mathcal{O}[G \times H^{op}]$-module de ℓ-permutation dont les vortex sont de la forme ΔQ où $Z \subset Q$, alors on a des isomorphismes de $\mathcal{O}[G \otimes H^{op}]$-modules

$$\mathcal{O}\overline{G} \otimes_{\mathcal{O}G} M \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}\overline{G} \otimes_{\mathcal{O}G} M \otimes_{\mathcal{O}H} \mathcal{O}\overline{H} \xrightarrow{\sim} M \otimes_{\mathcal{O}H} \mathcal{O}\overline{H}.$$

Si M' est un facteur direct de M indécomposable, alors comme M' est de source triviale le théorème de Mackey montre que

$$\mathrm{Res}_{G\times 1}^{G\times H^{op}} M' \;\Big|\; \bigoplus_{\gamma \in (G\times 1)\backslash G\times H^{op}/\Delta Q} \mathrm{Ind}_{(G\times 1)\cap \Delta Q^{\gamma}}^{G\times 1} \mathcal{O},$$

donc M est projectif en tant que $\mathcal{O}G$-module, puis $\overline{M}$ est projectif en tant que $\mathcal{O}\overline{G}$-module.

En conséquence, on a un isomorphisme de complexes de $\mathcal{O}[H \times H^{op}]$-bimodules

$$C^{\vee} \otimes_{\mathcal{O}G} C \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}nd_{\mathcal{O}G}(C),$$

puis on a les isomorphismes de complexes de $\mathcal{O}[H \times H^{op}]$-modules suivants :

$$\begin{aligned} \mathcal{O}\overline{H} \otimes_{\mathcal{O}H} C^{\vee} \otimes_{\mathcal{O}G} C &\simeq C^{\vee} \otimes_{\mathcal{O}G} \mathcal{O}\overline{G} \otimes_{\mathcal{O}G} C \\ &\simeq \overline{C}^{\vee} \otimes_{\mathcal{O}\overline{G}} \overline{C} \\ &\simeq \mathcal{E}nd_{\mathcal{O}\overline{G}}(\overline{C}) \end{aligned}$$

ce qui démontre que l'on a un isomorphisme

$$\Phi : \mathcal{O}\overline{H} \otimes_{\mathcal{O}H} \mathcal{E}nd_{\mathcal{O}G}(C) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}nd_{\mathcal{O}\overline{G}}(\overline{C}).$$

Montrons que cet isomorphisme est naturel, en le sens suivant : soit C^i et C^j deux composantes de C, f un élément de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}G}(C^i, C^j)$. Alors l'image de $\bar{1} \otimes f$ par Φ est l'application

$$\begin{array}{rccc} \bar{f} : & \overline{C}^i & \longrightarrow & \overline{C}^j \\ & \bar{1} \otimes x & \longmapsto & \bar{1} \otimes f(x). \end{array} \tag{3.2}$$

En vertu de l'existence d'un isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} {C^i}^\vee \otimes_{\mathcal{O}G} C^j & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}G}(C^i, C^j) \\ \varphi \otimes y & \longmapsto & [x \mapsto \varphi(x)y]\,, \end{array}$$

il suffit de vérifier 3.2 pour un élément f de la forme $x \mapsto \varphi(x)y$ où $\varphi \in {C^i}^\vee = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(C^i, \mathcal{O})$ et $y \in C^j$. L'image de $\bar{1} \otimes f$ par Φ est l'application

$$\bar{1} \otimes x \longmapsto (\bar{1} \otimes \varphi)(\bar{1} \otimes x).(\bar{1} \otimes y) \;=\; \bar{1} \otimes (\varphi(x).y),$$

donc l'isomorphisme Φ est bien naturel, et ceci montre qu'il est multiplicatif. □

Lemme 3.2.15. *Soit G un groupe fini, Z un sous-groupe central de G, et A le ℓ-bloc principal de $\mathcal{O}G$. Alors $\mathcal{O} \otimes_{\mathcal{O}Z} A$ est le ℓ-bloc principal de G/Z.*

Démonstration : Les blocs de $\mathcal{O}G$ correspondent à ceux de kG car $\mathcal{O}$ est complet pour sa valuation discrète, donc il suffit de montrer que $k \otimes_{kZ} A$ est le bloc principal de $k[G/Z]$.

Soit Z_ℓ la ℓ-partie de Z, et $Z_{\ell'}$ sa ℓ'-partie. L'algèbre kZ_ℓ est locale. Le théorème de relèvement des idempotents implique donc que $k \otimes_{kZ_\ell} A$ est le bloc principal de $k[G/Z_\ell]$.

Comme Z/Z_ℓ est inclus dans $O_{\ell'}((G/Z_\ell))$, le bloc principal de $k[G/Z]$ est $k \otimes_{kZ_{\ell'}} k \otimes_{kZ_\ell} A$, d'où le résultat. □

3.2.4 Bicomplexes basculants

Dans cette section, $\mathcal{O}$ est supposé être un anneau de valuation discrète complet. On pourra consulter [Br4] pour les questions relatives à l'adjonction.

Le cas des bimodules

Théorème 3.2.16. *Soit A et B deux $\mathcal{O}$-algèbres de type fini. On considère un bimodule M de A-mod-B, et un bimodule N de B-mod-A tels que la paire de foncteurs $(M \otimes_B -,\ N \otimes_A -)$ soit bi-adjointe. On suppose que $N \otimes_A M \simeq B$. Alors le couple $(M,\ N)$ réalise une équivalence de Morita entre B et une sous-algèbre A' de A, et on a $A = A' \oplus \mathrm{Ann}_A(M)$.*

Ce théorème découle du lemme suivant :

Lemme 3.2.17. *Soit A et B deux $\mathcal{O}$-algèbres de type fini telles que A est indécomposable et B est non nulle. Les hypothèses du théorème ci-dessus impliquent que $M \otimes_B N \simeq A$ (et donc que A et B sont équivalentes au sens de Morita).*

Démonstration : Le fait que la paire de foncteurs $(N \otimes_A -,\ M \otimes_B -)$ est adjointe équivaut à l'existence, pour tout $X \in A$-mod et $Y \in$ mod-B, d'un isomorphisme fonctoriel :

$$\varphi = \varphi_{X,Y} : \mathrm{Hom}_B(N \otimes_A X,\ Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_A(X,\ M \otimes_B Y).$$

Si on prend $X = A$, $Y = N$ alors on a un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_B(N,\ N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(A,\ M \otimes_B N).$$

On appelle η_A l'image de l'identité de N par cet isomorphisme. De même en posant $X = M$ et $Y = B$, on appelle ε_B l'image réciproque de l'identité de M par l'isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_B(N \otimes_A M,\ B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(M,\ M).$$

En utilisant la fonctorialité de φ on montre que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{\quad 1_N \quad} & N \\ & {\scriptstyle 1_N \otimes \eta_A} \searrow \quad \nearrow {\scriptstyle \varepsilon_B \otimes 1_N} & \\ & N \otimes_A M \otimes_B N & \end{array} \tag{3.3}$$

donc $1_N \otimes \eta_A$ est une injection scindée de source N et de but $N \otimes_A M \otimes_B N$. Mais par hypothèse ce dernier module est isomorphe à N. Comme tous les modules sont de type fini sur $\mathcal{O}$, ceci implique que $1_N \otimes \eta_A$ est un isomorphisme.

En utilisant maintenant le fait que la paire de foncteurs $(M \otimes_B -,\ N \otimes_A -)$ est adjointe on montre que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{\quad 1_N \quad} & N \\ & {\scriptstyle \eta_B \otimes 1_N} \searrow \quad \nearrow {\scriptstyle 1_N \otimes \varepsilon_A} & \\ & N \otimes_A M \otimes_B N & \end{array}$$

donc $1_N \otimes \varepsilon_A$ est une surjection scindée, et puisque $N \otimes_A M \simeq B$ c'est un isomorphisme.

On considère les deux applications

$$\eta = \eta_A : A \longrightarrow M \underset{B}{\otimes} N \qquad \text{et} \qquad \varepsilon = \varepsilon_A : M \underset{B}{\otimes} N \longrightarrow A.$$

Montrons que la composée $\varepsilon\eta$ est inversible.

On note toujours $\mathcal{P}$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}$. L'algèbre $\mathrm{End}_A(A)_A$ est locale car A est indécomposable en tant qu'algèbre. Ceci signifie que si $\varepsilon\eta$ n'est pas inversible alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $(\varepsilon\eta)^n \in \mathcal{P}.\mathrm{End}_A(A)_A$. Mais alors $(1_N \otimes \varepsilon\eta)^n \in \mathcal{P}.\mathrm{End}_B(N)_A$ puis $1_N \in \mathcal{P}.\mathrm{End}_B(N)_A$ car $1_N \otimes \varepsilon\eta$ est inversible. Ceci implique par le lemme de Nakayama que $N = 0$, ce qui est faux car $N \otimes_A M \simeq B$ et $B \neq 0$.

Comme $\varepsilon\eta$ est un isomorphisme, alors A est facteur direct de $M \otimes_B N$: il existe un (A, A)-bimodule Q tel que $A \oplus Q \simeq M \otimes_B N$. En tensorisant à gauche par N sur A on obtient $N \oplus N \otimes_A Q \simeq N$, donc $N \otimes_A Q = 0$. Puis on tensorise par M :

$$0 = M \otimes_B N \otimes_A Q = Q \oplus (Q \otimes_A Q)$$

ce qui implique que $Q = 0$ puis le résultat voulu : $M \otimes_B N \simeq A$. □

Montrons que ce lemme implique le théorème 3.2.16.

Notons $A_1 \dots A_n$ les blocs de A, $M_i = A_i \otimes_A M$ et $N_i = N \otimes_A A_i$. Soit J le sous-ensemble de $\{1 \dots n\}$ contenant les i tels que $M_i \neq 0$, on a $A = A' \oplus A''$ où

$$A' = \bigoplus_{j \in J} A_j \qquad \text{et} \qquad A'' = \bigoplus_{j \notin J} A_j.$$

Soit $B_j = N_j \otimes_{A_j} M_j$ pour $j \in J$. Les B_j sont des sous-algèbres de B, et comme $B \simeq N \otimes_A M$ alors

$$B \simeq \bigoplus_{j \in J} B_j.$$

De plus on a $B_j = N \otimes_A M_j$ donc $M \otimes_B B_j = M_j$. Ainsi pour tout $j \in J$ on a $B_j \neq 0$.

Montrons que pour $j \in J$, la paire de foncteurs $(M_j \otimes_{B_j} -,\ N_j \otimes_{A_j} -)$ réalise une bi-adjonction entre les catégories A_j-mod et B_j-mod. Pour cela on utilise le fait que si Γ est une algèbre, Λ une sous-algèbre de Γ (ce qui induit une structure de Λ-module sur Γ), X et Y des Γ-modules, alors

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_\Gamma(\Lambda \otimes_\Lambda X,\ \Lambda \otimes_\Lambda X') &\simeq \mathrm{Hom}_\Gamma(X,\ \Lambda \otimes_\Lambda X') \\ &\simeq \mathrm{Hom}_\Gamma(\Lambda \otimes_\Lambda X,\ X') \\ &\simeq \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda \otimes_\Lambda X,\ \Lambda \otimes_\Lambda X'). \end{aligned}$$

Soit $X \in A_j$-mod, $Y \in B_j$-mod. On a les isomorphismes :

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{B_j}(N_j \underset{A_j}{\otimes} X,\, Y) &\simeq \mathrm{Hom}_B(N \underset{A}{\otimes} A_j \underset{A_j}{\otimes} X,\, Y) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_A(X,\, M \underset{B}{\otimes} Y) \simeq \mathrm{Hom}_{A_j}(X,\, M_j \underset{B_j}{\otimes} Y).\end{aligned}$$

De même $\mathrm{Hom}_{A_j}(M_j \otimes_{B_j} Y,\, X) \simeq \mathrm{Hom}_{B_j}(Y,\, N_j \otimes_{A_j} X)$.

On peut donc appliquer le lemme 3.2.17, l'algèbre A_j est indécomposable, B_j est non nulle, la paire de foncteurs $(M_j \otimes_{B_j} -,\, N_j \otimes_{A_j} -)$ est bi-adjointe, et enfin $N_j \otimes_{A_j} M_j \simeq B_j$, donc $M_j \otimes_{B_j} N_j \simeq A_j$ et on a une équivalence de Morita entre A_j et B_j. Par somme directe, le couple $(M,\, N)$ réalise une équivalence de Morita entre A' et B.

Il reste à montrer que $A'' = \mathrm{Ann}_A(M)$. Par définition de A'', il est clair que $A'' \subset \mathrm{Ann}_A(M)$. Ensuite, l'application $\eta : A' \to M \otimes_B N$ est un isomorphisme A-linéaire, si $a \in \mathrm{Ann}_A(M)$ alors $\eta(a1_{A'}) = a\eta(1_{A'}) = 0$, donc $a1_{A'} = 0$ et $a \in A''$. □

Remarque 3.2.18. On peut ajouter que l'équivalence de Morita donnée par la paire $(M,\, N)$ permute les blocs de A' et de B. Notons $\{A_i\}_{i\in I}$ les blocs de A' et $\{B_j\}_{j\in J}$ ceux de B. On montre alors que pour tout $i \in I$, il existe un unique $j \in J$ tel que $A_i \otimes_A M \otimes_B B_j \not\simeq 0$.

En effet, si $i \in I$, on a $B \simeq N \otimes_A M = \bigoplus_{i\in I} (NA_i \otimes_A A_iM)$ ce qui donne une décomposition de B en sous-algèbres : pour tout i il existe un ensemble d'indices J_i tel que $NA_i \otimes_A A_iM \simeq \bigoplus_{j\in J_i} B_j$. Après produit tensoriel à gauche par M ceci donne $A_iM \simeq \bigoplus_{j\in J_i} MB_j$.

En utilisant de même l'isomorphisme $A' \simeq M \otimes_B N$ on obtient que les MB_j sont des sommes directes de A_iM, donc les J_i sont tous de cardinal 1, et il existe une bijection $\sigma : I \to J$ telle que $A_iM \simeq MB_{\sigma(i)}$ pour tout i.

Remarque 3.2.19. Supposons que A et B sont deux $\mathcal{O}$-algèbres symétriques de type fini, que l'on a un $(A,\, B)$-bimodule M qui est projectif en tant que A-module à gauche et en tant que B-module à droite, et tel que $\mathrm{End}_A(M) \simeq B$. Alors M réalise une équivalence de Morita entre A' et B, où A' est toujours la sous-algèbre de A telle que $A = A' \oplus \mathrm{Ann}_A(M)$.

En effet comme A et B sont symétriques, les duaux de M sur $\mathcal{O}$, A et B sont isomorphes. Soit N l'un d'entre eux. Comme M est projectif sur A alors la paire de foncteurs $(M \otimes_B -,\, N \otimes_A -)$ est adjointe, et comme M est projectif sur B alors N est projectif en tant que B-module à droite, et donc la paire $(N \otimes_A -,\, M \otimes_B -)$ est adjointe également. De plus on a $N \otimes_A M \simeq \mathrm{End}_A(M) \simeq B$, donc on peut appliquer le théorème 3.2.16.

Le cas des bicomplexes

Le théorème 3.2.16 se généralise aux catégories homotopiques, *cf* [Ri4, Théorème 2.1] :

Théorème 3.2.20 (Rickard). *Soit A et B deux $\mathcal{O}$-algèbres de type fini. On considère un complexe de (A, B)-bimodules C et un complexe de (B, A)-bimodules D tels que la paire de foncteurs $(C \otimes_B -, D \otimes_A -)$ entre les catégories homotopiques bornées $\mathcal{H}^b(B)$ et $\mathcal{H}^b(A)$ soit bi-adjointe. On suppose que $D \otimes_A C \simeq B$ dans $\mathcal{H}^b(B \otimes B^{op})$. Alors le couple (C, D) réalise une équivalence entre les catégories homotopiques bornées de B et d'une sous-algèbre A' de A telle que $A = A' \oplus \mathrm{Ann}_{\mathcal{H}^b(A)}(C)$.*

On définit ici $\mathrm{Ann}_{\mathcal{H}^b(A)}(C)$ comme étant la somme des blocs A_i de A tels que le complexe $A_i \otimes_A C$ soit homotope à zéro.

Pour la démonstration de ce théorème on a besoin de la propriété suivante : si $i : C \to C$ est un monomorphisme (ou un épimorphisme) scindé de $\mathcal{H}^b(A)$ alors c'est un isomorphisme. De façon plus générale, si $\mathcal{A}$ est une catégorie on définit la propriété $\mathrm{P}(\mathcal{A})$ par :

Propriété $\mathbf{P}(\mathcal{A})$: *Soit X un objet de $\mathcal{A}$, et i, p deux flèches de $\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(X)$ telles que $pi = 1_X$. Alors p et i sont des isomorphismes.*

On montre que cette propriété est vraie dans les cas suivants :

- $\mathcal{A} = K$-ev la catégorie des espaces vectoriels sur un corps K ;
- $\mathcal{A} = R$-mod la catégorie des modules de type fini sur un anneau commutatif R. En effet si $\mathcal{M}$ est un idéal maximal de R et $K = R/\mathcal{M}$, alors d'après le cas précédent $1_K \otimes_R i$ est un isomorphisme. Donc i est un isomorphisme, par exemple grâce à [Bki, chap. II, §3, n°3, prop. 11] ;
- $\mathcal{A} = A$-mod la catégorie des modules de type fini sur une R-algèbre de type fini A, où R est un anneau commutatif. Il suffit de restreindre les modules à R ;
- $\mathcal{A} = \mathcal{C}(\mathcal{A}')$ la catégorie des complexes à composantes dans la catégorie $\mathcal{A}'$, où $\mathcal{A}'$ est telle que $\mathrm{P}(\mathcal{A}')$ est vraie. Ceci est immédiat.

Pour le cas des catégories homotopiques on a besoin du lemme suivant :

Lemme 3.2.21. *Soit A une algèbre de type fini sur un corps commutatif, X un complexe borné de A-modules sans facteur direct homotope à 0. Si f est un endomorphisme de X homotope à zéro alors f est nilpotent.*

Démonstration : On montre que si la composante f_{n-1} de f en degré $n-1$ est nilpotente, alors la composante f_n l'est aussi. Comme X est borné on démontre ainsi le lemme par récurrence. On aurait pu choisir de montrer l'implication inverse : si f_{n+1} est nilpotente alors f_n l'est aussi.

Soit m un entier tel que $f_{n-1}^m = 0$. Il suffit de montrer que f_n^m est nilpotent. Comme f^m est aussi homotope à zéro, on peut remplacer f par f^m, donc on suppose que $f_{n-1} = 0$, et on montre que f_n est nilpotent. Soit d la différentielle de X et r une application telle que $f = rd + dr$.

Tout d'abord, on considère le morphisme

$$g = f_n - d_{n-1} \circ r_n = r_{n+1} \circ d_n.$$

Montrons que g est nilpotent. Les modules im (g^k) pour $k \in \mathbb{N}$ forment une suite décroissante de sous-modules de X^n, donc comme A est artinienne il existe un entier m tel que

$$\forall k \geq m \qquad \text{im } (g^k) = \text{im } (g^{k+1}).$$

On pose $Y = \text{im } (g^m)$, c'est un espace vectoriel de dimension finie sur le corps de base de A. L'application $g^m : Y \to Y$ est une surjection, donc c'est g^m est un automorphisme de Y. Or $g^m = (r_{n+1}d_n)^m$ donc d_n est un isomorphisme $Y \xrightarrow{\sim} d_n(Y)$.

L'application $g^m : X^n \to X^n$ est à valeurs dans Y, sa restriction à Y est un isomorphisme, donc Y est un facteur direct de X^n.

L'application $d_n g^m r_{n+1} : X^{n+1} \to X^{n+1}$ est à valeurs dans $d_n(Y)$, sa restriction à $d_n(Y)$ est un isomorphisme comme le montre le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow[\sim]{g^{m+1}} & Y \\ {\scriptstyle d_n}\downarrow\wr & & \wr\downarrow{\scriptstyle d_n} \\ d_n(Y) & \xrightarrow[dg^m r]{} & d_n(Y) \end{array}$$

donc $d_n(Y)$ est un facteur direct de X^{n+1}. Finalement le complexe

$$\cdots\ 0 \to Y \xrightarrow{\sim} d_n(Y) \to 0\ \cdots$$

est facteur direct de X, ce qui impose $Y = 0$ car par hypothèse X n'a pas de facteur direct homotope à zéro. On a donc $g^m = 0$.

Pour tout entier k on a $g^k = (f_n - dr)^k = f_n^k - dr f_n^{k-1}$ car $f_{n-1} = 0$, donc $f_n^m = dr f_n^{m-1}$, puis en multipliant à gauche par f_n, $(f_n)^{m+1} = 0$, et ainsi par récurrence f est nilpotent. □

Corollaire 3.2.22. *Soit A une R-algèbre de type fini, où R est un anneau commutatif. La propriété* $\mathrm{P}(\mathcal{H}^b(A))$ *est vraie.*

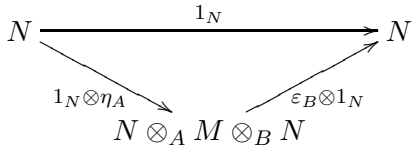
Démonstration : Soit X un complexe borné de A-modules, et i, p, deux endomorphismes de $\mathcal{H}^b(A)$ tels que $pi = 1_X$. Comme X est isomorphe dans

$\mathcal{H}^b(A)$ à un complexe sans facteur direct homotope à zéro, on peut le supposer lui-même sans facteur direct homotope à zéro.

Supposons d'abord que R est un corps. Soient $\tilde{i}$ et $\tilde{p}$ des antécédents de i et de p par l'application $\mathrm{End}_{\mathcal{C}^b(A)}(X) \to \mathrm{End}_{\mathcal{H}^b(A)}(X)$. Par hypothèse, la composée $\tilde{p}\tilde{i}$ est homotope à l'identité de X, donc par application du lemme précédent il existe un endomorphisme de X nilpotent n tel que $\tilde{p}\tilde{i} = 1_X + n$. Mais $1_X + n$ est inversible et donc en vertu de la proposition $\mathrm{P}(\mathcal{C}^b(A))$ les applications $\tilde{p}$ et $\tilde{i}$ sont inversibles, et *a fortiori* les applications p et i.

Dans le cas général, soit $\mathcal{M}$ un idéal maximal de R et $K = R/\mathcal{M}$. Alors $1_K \otimes_R i$ et $1_K \otimes_R p$ sont des isomorphismes, donc toujours en appliquant [Bki, chap. II, §3, n°3, prop. 11] on obtient que i et p sont des isomorphismes. □

Démonstration du théorème 3.2.20 : La démonstration se calque sur celle du théorème 3.2.16 et du lemme 3.2.17. On a besoin de la propriété $\mathrm{P}(\mathcal{H}^b(A))$ car on obtient des diagrammes commutatifs du type



et on sait que $N \otimes_A M \otimes_B N \simeq N$, donc la propriété $\mathrm{P}(\mathcal{H}^b(A))$ justifie qu'alors les morphismes $1_N \otimes \eta_A$ et $\varepsilon_B \otimes 1_N$ sont des isomorphismes.

On utilise également le fait que

$$\mathrm{End}_{\mathcal{H}^b(A\otimes A^\circ)}(A) = \mathrm{End}_A(A)_A$$

donc si A est indécomposable alors $\mathrm{End}_{\mathcal{H}^b(A\otimes A^{op})}(A)$ est locale comme dans le cas des modules. □

De même la remarque 3.2.19 se généralise :

Corollaire 3.2.23. *Soit A et B deux $\mathcal{O}$-algèbres symétriques de type fini, et C un complexe borné de (A, B)-bimodules projectifs en tant que A-modules à gauche et que B-modules à droite, tel que $\mathrm{End}_{\mathcal{H}^b(A)}(C) \simeq B$ dans $\mathcal{H}^b(B \otimes B^{op})$. Alors C réalise une équivalence entre les catégories homotopiques bornées de A' et de B, où A' est la sous-algèbre de A telle que $A = A' \oplus \mathrm{Ann}_{\mathcal{H}^b(A)}(C)$.*

Remarque 3.2.24. Si P est un objet parfait de $\mathcal{D}^b(A)$, alors $\mathrm{End}_{\mathcal{D}^b(A)}(P) = \mathrm{End}_{\mathcal{H}^b(A)}(P)$, donc le théorème et le corollaire précédents s'expriment aussi bien en remplaçant les catégories homotopiques par les catégories dérivées.

Tout comme dans le cas des modules, ces équivalences se décomposent en équivalences de blocs, *i.e.,* elles établissent une correspondance bijective entre les blocs de A' et ceux de B.

3.3 ℓ divise $q-1$

Revenons au groupe $G = \mathrm{GL}_2(q)$ et reprenons les notations définies dans les sections 1.2 et 1.3. On suppose que ℓ est un nombre premier impair divisant $q-1$. On pose toujours $q-1 = \ell^a u$ où ℓ ne divise pas u. On rappelle que T_e désigne le sous-groupe de G contenant les matrices diagonales, et W_e le sous-groupe d'ordre 2 engendré par $s = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Le tore T_e contient un ℓ-sous-groupe de Sylow P_e de G et on a $H_e = N_G(P_e) = T_e \rtimes W_e$, où l'action de W_e sur T_e est donnée par $s \left(\begin{smallmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{smallmatrix}\right) s^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} y & 0 \\ 0 & x \end{smallmatrix}\right)$.

On va obtenir une équivalence *de Morita* entre $B_\ell(G)$ et $B_\ell(H_e)$, comme le laissait supposer le fait que l'on ait obtenu dans ce cas une isotypie à signes positifs (*cf* propriété 2.4.1). De plus cette équivalence est donnée par le module réalisant l'induction de Harish-Chandra, ce qui vérifie le conjecture 3.1.4. Ce résultat est conséquence de résultats de L. Puig ([Pu]). Nous allons en donner une démonstration directe.

Soit U le sous-groupe de G composé des matrices unipotentes $\left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ où $x \in \mathbb{F}_q$. Comme on l'a vu dans la section 1.5.2, le module $\Lambda_e = \mathcal{O}G/U$ est le module donnant l'induction de Harish-Chandra.

Soit $\mathcal{H}_e$ la $\mathbb{Z}$-algèbre définie par :

$$\mathcal{H}_e = \mathbb{Z}[T_e \rtimes \langle F_e \rangle]/\langle \omega_e \rangle$$

où F_e est un élément d'ordre infini, dont l'action sur T_e est donnée par $F_e t = {}^s t F_e$ pour tout $t \in T_e$, et où $\langle \omega_e \rangle$ est l'idéal engendré par l'élément ω_e défini par

$$\omega_e = F_e^2 - q - \sum_{\substack{t \in T_e \\ \det t = -1}} t F_e.$$

On fera l'amalgame entre les éléments de $\mathbb{Z}[T_e \rtimes \langle F_e \rangle]$ et leur image dans $\mathcal{H}_e$.

Soit R un anneau commutatif. On a la propriété suivante :

Propriété 3.3.1. *On a un isomorphisme d'algèbres*

$$f_1 : R \otimes \mathcal{H}_e \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{RG}(RG/U).$$

Démonstration : En tant que R-module, $\mathrm{End}_{RG}(RG/U)$ admet une base indexée par $U\backslash G/U$: si $g \in G$, on définit

$$\begin{aligned} b_g : RG/U &\longrightarrow RG/U \\ hU &\longmapsto \sum_{\substack{\gamma \in G/U \\ \gamma U \subset UgU}} h\gamma U. \end{aligned}$$

Alors les b_g sont dans $\mathrm{End}_{RG}(RG/U)$ et la famille $\{b_g\}$ pour g parcourant un système de représentants de $U\backslash G/U$ en est une base.

Grâce à la décomposition de Bruhat

$$G = \coprod_{h \in H_e} UhU$$

on obtient que la famille $\{b_h \mid h \in H_e\}$ est une base de $\mathrm{End}_{RG}(RG/U)$.

On peut définir l'application b_h par sa valeur en U car elle est RG-linéaire. Si $t \in T_e$, on a $b_t(U) = tU$ et si $h = \left(\begin{smallmatrix} 0 & a \\ c & 0 \end{smallmatrix}\right)$ on a

$$b_h(U) = \sum_{d \in \mathbb{F}_q} \left(\begin{smallmatrix} d & a \\ c & 0 \end{smallmatrix}\right) U.$$

On a alors les égalités $b_t b_{t'} = b_{tt'}$, $b_t b_s = b_{ts}$, $b_s b_t = b_{st}$, et on calcule que

$$(b_s)^2 = q b_1 + \sum_{\substack{t \in T_e \\ \det t = -1}} b_{ts}.$$

On considère l'application

$$f_1 : R \otimes \mathcal{H}_e \longrightarrow \mathrm{End}_{RG}(RG/U)$$

qui, pour tout $t \in T_e$, envoie t sur b_t et tF sur b_{ts}. Grâce à la définition de ω_e, il est immédiat que f_1 est un isomorphisme d'algèbres. □

Propriété 3.3.2. *Si R contient une racine carrée r de q telle que r et $r+1$ soient inversibles, et si 2 et $q+1$ sont inversibles, alors on a un isomorphisme d'algèbres $f_2 : RH_e \xrightarrow{\sim} R \otimes \mathcal{H}_e$.*

Démonstration : On définit les deux éléments suivants de $\mathcal{H}_e$:

$$C = \sum_{\substack{t \in T_e \\ \det t = 1}} t \qquad D = \sum_{\substack{t \in T_e \\ \det t = -1}} t.$$

On a alors $C^2 = D^2 = (q-1)C$, $CD = DC = (q-1)D$, et F_e commute avec C et D.

On considère l'application R-linéaire suivante :

$$\begin{aligned} f_2 : RH_e &\longrightarrow R \otimes \mathcal{H}_e \\ t &\longmapsto t \\ s &\longmapsto \sigma, \end{aligned}$$

où σ est un élément de $R \otimes \mathcal{H}_e$. On pose $f_2(ts) = t\sigma$. On veut que la définition de σ fasse de f_2 un morphisme d'algèbres. Il faut donc avoir les égalités $\sigma^2 = 1$ et $f_2(st) = \sigma t$, *i.e.*, $f_2(sts) = \sigma t \sigma$.

On obtient que

$$\sigma = \frac{1}{r}F_e - \frac{1}{q+1}D - \frac{r-1}{r(r+1)(q+1)}CF_e$$

satisfait les bonnes propriétés. La surjectivité de f_2 est conséquence du fait que les éléments de T_e sont atteints, et que l'élément F_e est l'image de

$$rs + \frac{1}{2}\sum_{\substack{t\in T_e \\ \det t=-1}} t + \frac{r-1}{2(r+1)}\sum_{\substack{t\in T_e \\ \det t=1}} ts.$$

On a donc une surjection R-linéaire entre deux modules libres de même rang, c'est donc une bijection. Ainsi f_2 est un isomorphisme d'algèbres. □

Supposons que $R = \mathcal{O}$: les éléments 2 et $q+1$ sont inversibles car $\ell \neq 2$ et $\ell \,|\, (q-1)$. Les racines carrées de q sont dans $\mathcal{O}$ car $\mathcal{O}$ est complet pour sa valuation discrète : un élément x de $\mathcal{O}$ est alors un carré si et seulement si son image dans k est un carré, et l'image de q dans k est 1, qui est bien un carré.

Soit r et $-r$ ces deux racines. On a $\ell^a \,|\, (q-1) = (r-1)(r+1)$, si ℓ divisait $r-1$ et $r+1$, alors ℓ diviserait 2 donc ℓ^a divise soit $r-1$, soit $r+1$. On choisit r de façon à avoir ℓ^a divisant $r-1$. Ainsi $r+1$ est bien inversible dans $\mathcal{O}$, et l'application des deux propriétés précédentes montre que la composition $f = f_1 \circ f_2$ est un isomorphisme d'algèbres $\mathcal{O}H_e \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{\mathcal{O}G}(\mathcal{O}G/U)$.

De même comme $q \equiv 1$ et $\ell \not\equiv 2$, on a un isomorphisme d'algèbres $kH_e \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{kG}(kG/U)$.

Le module $\Lambda_e = \mathcal{O}G/U$ est un $(\mathcal{O}G, \mathrm{End}_{\mathcal{O}G}(M))$-bimodule, il devient donc *via* f un $(\mathcal{O}G, \mathcal{O}H_e)$-bimodule.

Le bimodule Λ_e est projectif sur $\mathcal{O}G$ car U est d'ordre inversible dans $\mathcal{O}$. Si $\pi : \mathcal{O}G \twoheadrightarrow \Lambda_e$ désigne la projection canonique par rapport à U, alors en posant

$$\sigma(gU) = \frac{1}{|U|}\sum_{v\in U} gv$$

on obtient une section $\mathcal{O}G$-linéaire de π. De plus les morphismes π et σ sont $(\mathcal{O}G, \mathcal{O}T_e)$-bilinéaires.

Montrons que Λ_e est projectif sur $\mathcal{O}H_e$: comme $H_e = T_e \rtimes W_e$ et W_e est d'ordre 2 qui est premier à ℓ, il suffit de vérifier que Λ_e est projectif en tant que $\mathcal{O}T_e$-module à droite. L'action de $\mathcal{O}H_e$ sur Λ_e est définie *via* l'isomorphisme d'algèbres $f : \mathcal{O}H_e \to \mathrm{End}_{\mathcal{O}G}(\Lambda_e)$ défini dans les démonstrations

des propriétés 3.3.1 et 3.3.2. Cet isomorphisme envoie un élément t de T_e sur l'endomorphisme b_t de Λ_e. On sait que si $g \in G$, alors $b_t(gU) = gtU$, donc l'action de T_e sur Λ_e est bien l'action usuelle $gU.t = gtU$.

Il est clair que T_e agit librement sur G/U : pour tout $g \in G$, $t \in T_e - \{1\}$ on a $gU \neq gU.t$. Donc Λ_e est un $\mathcal{O}T_e$-module libre, et *a fortiori* projectif.

Calculons l'annulateur de Λ_e dans $\mathcal{O}G$. Les blocs de $\mathcal{O}G$ sont (voir la table de caractères B.12 page 200) :

- B_i pour $i = 0 \dots u-1$, contenant les caractères de la forme $\varphi_{i+\lambda u}$, $\varphi'_{i+\lambda u}$ et $\varphi_{i+\lambda u\, i+\mu u}$;
- B_{ij} pour $i, j = 0 \dots u-1$, $i \neq j$, contenant les $\varphi_{i+\lambda u\, j+\mu u}$;
- C_i pour $i = 1 \dots (q+1)u - 1$, contenant les $\psi_{i+\lambda(q+1)u}$.

Les B_i et les $B_{i\,j}$ sont les blocs de défaut maximal ℓ^{2a}. Les u blocs B_i contiennent ℓ^a caractères de la forme φ_j, autant de la forme φ'_j, et $\frac{\ell^a(\ell^a-1)}{2}$ de la forme φ_{jk} chacun. Les blocs B_{ij}, au nombre de $\frac{u(u-1)}{2}$, contiennent ℓ^{2a} caractères chacun.

Pour calculer le caractère de Λ_e en tant que $\mathcal{O}[G \times {T_e}^{op}]$-module, on utilise l'isomorphisme

$$\mathcal{O}G/U \simeq \mathrm{Ind}_{(U\times 1)\times\Delta T_e}^{G\times {T_e}^{op}} \mathcal{O}.$$

on obtient

$$\chi_{\Lambda_e} = \sum_i \varphi_i \times \theta_{(i,i)} + \sum_i \varphi'_i \times \theta_{(i,i)} + \sum_{i,j} \varphi_{ij} \times (\theta_{(i,j)} + \theta_{(j,i)}) \qquad (3.4)$$

donc l'annulateur de Λ_e dans $\mathcal{O}G$ est la somme de ses blocs de défaut non maximal : $\mathrm{Ann}_{\mathcal{O}G}(\Lambda_e) = \bigoplus_i C_i$. On pose

$$A = \mathcal{O}G/\mathrm{Ann}_{\mathcal{O}G}(\Lambda_e) = \left(\bigoplus B_i\right) \oplus \left(\bigoplus B_{ij}\right).$$

On a donc la propriété suivante, conséquence du lemme 3.2.19 :

Propriété 3.3.3. *Le bimodule $\Lambda_e = \mathcal{O}G/U$ réalise une équivalence de Morita entre A et $\mathcal{O}H_e$.*

Remarque 3.3.4. On obtient également que le module kG/U réalise une équivalence de Morita entre les algèbres kH_e et la sous-algèbre $k \otimes A$ de kG.

Il reste à vérifier que l'équivalence de Morita donnée par le bimodule Λ_e induit une équivalence entre les blocs principaux de $\mathcal{O}G$ et de $\mathcal{O}H_e$. On va démontrer un résultat plus général.

On a $C_G(P_e) = T_e$. Comme P_e est distingué dans H_e, les idempotents primitifs centraux de $\mathcal{O}H_e$ sont égaux à ceux de $\mathcal{O}C_G(P_e) = \mathcal{O}T_e$, *cf* [NT, 5.2.8.]. En conséquence le morphisme de Brauer

$$br_{P_e} : (\mathcal{O}G)^{P_e} \longrightarrow kT_e$$

induit une correspondance bijective entre les blocs de défaut maximal de $\mathcal{O}G$ et ceux de $\mathcal{O}H_e$ (en fait tous les blocs de $\mathcal{O}H_e$ sont de défaut maximal, et la somme des blocs de défaut maximal de $\mathcal{O}G$ est l'algèbre A). Par le troisième théorème principal de Brauer, les blocs principaux de $\mathcal{O}G$ et de $\mathcal{O}H_e$ sont en correspondance. On a la propriété suivante :

Propriété 3.3.5. *L'équivalence de Morita donnée par Λ_e envoie un bloc sur son correspondant de Brauer.*

Démonstration : On note $Br = Br_{\Delta P_e}$ le foncteur de Brauer pour le sous-groupe de Sylow ΔP_e de $G \times {H_e}^{op}$. Ce foncteur a pour source la catégorie des $\mathcal{O}G \times \mathcal{O}{H_e}^{op}$-modules, mais si l'on considère le même foncteur défini sur la catégorie des $\mathcal{O}G \times \mathcal{O}{T_e}^{op}$-modules, alors le premier est la restriction de l'autre. On sait que si Ω est un $G \times {T_e}^{op}$-ensemble alors $Br(\mathcal{O}\Omega) \simeq k(\Omega^{\Delta P_e})$. Pour $\Omega = G/U$ on obtient $Br(\Lambda_e) \simeq kT_e$.

On sait d'après la remarque 3.2.18 qu'une équivalence de Morita permute les blocs : si b est un bloc de A, alors il existe un unique bloc c de $\mathcal{O}H_e$ tel que $b\Lambda_e c \neq 0$. On a alors

$$Br(b\Lambda_e c) = br(b)Br(\Lambda_e)c = br(b)c$$

Ce dernier terme est non nul si et seulement si $br(b) = c$, donc si b et c sont en correspondance. □

L'équivalence donnée par Λ_e envoie donc *a fortiori* le bloc principal de $\mathcal{O}G$ sur celui de $\mathcal{O}H_e$.

Remarque 3.3.6. Les caractères du bloc principal de $\mathcal{O}T_e$ sont les caractères $\theta_{(\lambda u,\, \mu u)}$ où $(\lambda,\, \mu) = 1 \ldots \ell^a$. Les caractères du bloc principal de $\mathcal{O}G$ sont donnés pages 57 à 59. On constate donc que si $\varphi \times \chi$ est un caractère irréductible du $\mathcal{O}[G \times {T_e}^{op}]$-module Λ_e alors φ est dans le bloc principal de $\mathcal{O}G$ si et seulement si χ est dans le bloc principal de $\mathcal{O}T_e$.

Remarque 3.3.7. On vérifie de plus que Λ_e est un $\mathcal{O}[G \times {H_e}^{op}]$-module de ℓ-permutation, donc que l'équivalence qu'il induit est bien splendide. Pour ceci il suffit de montrer que $(\mathcal{O}G,\, \mathcal{O}T_e)$-bimodule $\mathcal{O}G/U$ est de ℓ-permutation car l'indice de T_e dans H_e est premier avec ℓ. Or ce bimodule est facteur direct du bimodule $\mathcal{O}G \simeq \mathrm{Ind}_{\Delta T_e}^{G \times {T_e}^{op}} k$ (grâce aux morphismes π et σ définis ci-dessus), donc en invoquant le lemme 3.2.10 tous les facteurs directs indécomposables de Λ_e sont de source triviale et de vortex contenu dans ΔT_e.

3.4 ℓ divise $q+1$

On note toujours P_s le ℓ-sous-groupe de Sylow de G inclus dans le tore de Coxeter T_s, et H_s désigne le normalisateur de P_s dans G : on a $H_s \simeq T_s \rtimes W_s$ où W_s est d'ordre 2 engendré par ${}^{\gamma}s$. On note $q+1 = \ell^b v$ avec v premier à ℓ, mais on ne fait pas pour le moment l'hypothèse que ℓ est impair divisant $q+1$.

Nous allons étudier le complexe Λ_s et calculer son algèbre d'endomorphismes, puis nous montrerons que dans ce cas précis où ℓ divise $q+1$ mais ne divise pas $q-1$, il existe une équivalence splendide entre les catégories $\mathcal{D}^b(A)$ et $\mathcal{D}^b(\mathcal{O}H_s)$, où A désigne la somme des blocs de $\mathcal{O}G$ de défaut maximal b. (Les autres blocs de $\mathcal{O}G$ sont de défaut nul et ceux de $\mathcal{O}H_s$ sont tous de défaut maximal). Toute cette partie reprend l'article [Ro1] de R. Rouquier.

3.4.1 Le complexe de Deligne-Lusztig

On considère le complexe Λ_s introduit dans la section 1.5.2, qui donne la cohomologie ℓ-adique à support compact $H_c^*(\boldsymbol{Y}_s, \mathcal{O})$ de la variété $\boldsymbol{Y}_s$, définie et étudiée dans cette même section.

Premières propriétés

On considère le complexe Λ_s comme un objet de la catégorie homotopique de $\mathcal{O}[G \times {T_s}^{op}]$. On sait qu'il peut être représenté dans la catégorie des complexes de $\mathcal{O}[G \times {T_s}^{op}]$-modules par un complexe borné à composantes projectives en tant que modules à gauche sur $\mathcal{O}G$ et que modules à droite sur $\mathcal{O}{T_s}^{op}$ (*cf* [DL, 3.5]) ou [Ri3, 2.3]). De plus, ces composantes sont des $\mathcal{O}[G \times {T_s}^{op}]$-modules de ℓ-permutation ([Ri3, 3.2] ou [Ro5, section 2.5.1]).

Le variété $\boldsymbol{Y}_s$ est munie d'une action d'un endomorphisme de Frobenius tordu F_s. Cette action commute avec celle de G, et si $t \in T_s$ l'action de tF_s est égale à celle de $F_s t^q$. On considère le monoïde $T_s \rtimes \langle F_s \rangle$, extension du groupe T_s par un élément d'ordre infini toujours noté F_s vérifiant $tF_s = F_s t^q$ pour tout $t \in T_s$. La variété $\boldsymbol{Y}_s$ est donc munie d'une action à gauche de $G \times (T_s \rtimes \langle F_s \rangle)^{op}$, et en vertu de la construction de R. Rouquier (*cf* [Ro5, section 2.3]), le complexe Λ_s est un complexe de $\mathcal{O}[G \times (T_s \rtimes \langle F_s \rangle)^{op}]$-modules.

D'après [De, Arcata, III, 3.6] , comme $\boldsymbol{Y}_s$ est une courbe affine lisse, on a $H_c^i(\boldsymbol{Y}_s, \mathcal{O}) = 0$ si $i \neq 1, 2$. De plus, grâce à [De, Arcata, III, 3.5], les groupes $H_c^i(\boldsymbol{Y}_s, \mathcal{O})$ sont libres sur $\mathcal{O}$.

On rappelle que $H_c^*(\boldsymbol{Y}_s, K)$ est par définition le $K[G \times {T_s}^{op}]$-module gradué $K \otimes_{\mathcal{O}} H_c^*(\boldsymbol{Y}_s, \mathcal{O})$.

Pour $i = 1$, 2, nous allons déterminer le caractère du $\mathcal{O}[G \times {T_s}^{op}]$-module $H_c^i(\boldsymbol{Y}_s, \mathcal{O}) = H^i(\Lambda_s)$. Rappelons que les caractères de G et de T_s sont donnés pages 200 et 23.

La lissité de $\boldsymbol{Y}_s$ nous permet d'utiliser la dualité de Poincaré [De, Arcata, VI, 2.2] : pour tout i on a un isomorphisme

$$H_c^i(\boldsymbol{Y}_s, \mathcal{O}) \simeq (H^{2-i}(\boldsymbol{Y}_s, \mathcal{O}))^\vee,$$

où $H^*(\boldsymbol{Y}_s, \mathcal{O})$ désigne la cohomologie ℓ-adique de $\boldsymbol{Y}_s$.

Cet isomorphisme est $\mathcal{O}G \otimes \mathcal{O}{T_s}^{op}$-linéaire. La cohomologie d'un faisceau est le foncteur dérivé du foncteur de section globale, donc le premier groupe de cohomologie $H^0(\boldsymbol{Y}_s, \mathcal{O})$ du faisceau constant sur $\boldsymbol{Y}_s$ est le $\mathcal{O}$-module libre ayant pour base l'ensemble des composantes connexes de $\boldsymbol{Y}_s$.

L'action de G et de T_s sur les composantes connexes de $\boldsymbol{Y}_s$ a été donnée page 38. On calcule donc le caractère χ_2 du $\mathcal{O}[G \times {T_s}^{op}]$-module $H_c^2(\boldsymbol{Y}_s, \mathcal{O})$. On obtient

$$\chi_2 = \sum_{i=1\ldots q-1} \varphi_i \times \omega^{(q+1)i}, \tag{3.5}$$

(si $\boldsymbol{\mu}_{q^2-1}$ est le groupe des racines (q^2-1)-èmes de l'unité de $\mathcal{O}$, engendré par ζ, et si $\theta : \mathbb{F}_{q^2}^\times \to \boldsymbol{\mu}_{q^2-1}$ est l'isomorphisme défini par $\beta \mapsto \zeta$, alors les caractères φ_i et $\omega^{(q+1)i}$ sont définis par $g \mapsto \theta(\det g)^i$.)

Pour le caractère χ_1 du $\mathcal{O}[G \times {T_s}^{op}]$-module $H_c^1(\boldsymbol{Y}_s, \mathcal{O})$, on utilise l'expression de l'induction de Deligne-Lusztig $R_{T_s}^G$ donnée page 38. On a

$$\chi_2 - \chi_1 = \sum_\omega R_{T_s}^G(\omega) \times \omega$$

où la somme est faite sur les caractères irréductibles de T_s. Ceci permet d'obtenir le caractère virtuel $(\chi_2 - \chi_1)$, et donc on en déduit

$$\chi_1 = \sum_{i=1\ldots q-1} \varphi_i' \times \omega^{(q+1)i} + \sum_{\substack{j=1\ldots q^2-1 \\ j \not\equiv 0 \pmod{q+1}}} \psi_j \times (\omega^j + \omega^{qj}). \tag{3.6}$$

On a donc $K \otimes H_c^1(\boldsymbol{Y}_s, \mathcal{O}) = V_S \oplus V_C$ où V_S est le $K[G \times {T_s}^{op}]$-module de caractère $\sum \varphi_i' \times \omega^{(q+1)i}$ et V_C le $K[G \times {T_s}^{op}]$-module de caractère $\sum \psi_j \times (\omega^j + \omega^{qj})$. (On a choisi S pour Steinberg et C pour cuspidal).

Ensuite on a $V_S = \oplus_i W_i$ et $V_C = \oplus_j W'j$, en notant W_i le module de caractère $\varphi_i' \times \omega^{(q+1)i}$ et W_j' celui de caractère $\psi_j \times (\omega^j)$ (on rappelle que $\psi_j = \psi_{qj}$).

Remarque 3.4.1. Les caractères du bloc principal de $\mathcal{O}T_s$ sont les caractères $\omega^{\lambda uv}$ où $\lambda = 1 \ldots \ell^{a+b}$. Les caractères du bloc principal de $\mathcal{O}G$ sont

donnés pages 57 à 59. Comme dans le cas de Λ_e, on constate que si $\varphi \times \chi$ est un caractère irréductible du $\mathcal{O}[G \times {T_s}^{op}]$-module $H_c^*(\boldsymbol{Y}_s, \mathcal{O})$ alors φ est dans le bloc principal de $\mathcal{O}G$ si et seulement si χ est dans le bloc principal de $\mathcal{O}T_s$.

En d'autres termes on a $e.\Lambda_s = \Lambda_s.f$ où e et f sont les idempotents primitifs centraux associés aux blocs principaux de $\mathcal{O}G$ et de $\mathcal{O}T_s$ respectivement.

Nous allons maintenant déterminer l'action de l'endomorphisme de Frobenius F_s sur les groupes de cohomologie $H_c^*(\boldsymbol{Y}_s, \mathcal{O})$.

Action de F_s sur $H_c^2(\boldsymbol{Y}_s, \mathcal{O})$

La dualité de Poincaré n'est pas F_s-linéaire, elle fait intervenir le *twist de Tate*, *cf* [Sr, page 47] ou [Ta].

Notons $\hat{\mathcal{O}}$ le $\mathcal{O}\langle F_s\rangle$-module dont le $\mathcal{O}$-module sous-jacent est $\mathcal{O}$ et l'action de F_s est donnée par $x \mapsto x^q$. Si V est un $\mathcal{O}\langle F_s\rangle$-module alors pour tout entier naturel n on note $V(n) = V \otimes_{\mathcal{O}} \hat{\mathcal{O}}^{\otimes n}$.

La dualité de Poincaré donne alors pour $i = 1, 2$ un isomorphisme F_s-linéaire

$$H_c^i(\boldsymbol{Y}_s, \mathcal{O}) \simeq (H^{2-i}(\boldsymbol{Y}_s, \mathcal{O}))(1)^\vee.$$

Supposons que q est impair. On connaît l'action de F_s sur les composantes connexes de $\boldsymbol{Y}_s$: elle inverse les composantes $\boldsymbol{Y}_s(a)$ et $\boldsymbol{Y}_s(-a)$. On en déduit que son action sur $H^0(\boldsymbol{Y}_s, \mathcal{O})$ est donnée par la matrice de taille $(q-1) \times (q-1)$

$$\begin{pmatrix} & & 1 \\ & \iddots & \\ 1 & & \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

en prenant pour base de $H^0(\boldsymbol{Y}_s, \mathcal{O})$ l'ensemble des composantes connexes convenablement ordonné. Ainsi F_s agit sur $H_c^2(\boldsymbol{Y}_s, \mathcal{O})$ comme la matrice

$$\begin{pmatrix} & & q \\ & \iddots & \\ q & & \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

On sait que le caractère du $\mathcal{O}[G \times {T_s}^{op}]$-module $H_c^2(\boldsymbol{Y}_s, \mathcal{O})$ est

$$\chi_2 = \sum_{i=1\ldots q-1} \varphi_i \times \omega^{(q-1)i}.$$

Si on prend pour base de $H_c^2(\boldsymbol{Y}_s, K)$ l'ensemble $(e_1, \ldots, e_{q-1})$, où chaque e_i est tel que Ke_i est le $K[G \times {T_s}^{op}]$-module de caractère $\varphi_i \times \omega^{(q-1)i}$, alors la matrice de F_s est diagonale car les actions de G et de F_s commutent, par application du lemme de Schur. Ses valeurs propres sont celles de la matrice 3.8, donc q et $-q$ de multiplicité $\frac{q-1}{2}$ chacune. On montre par un calcul que la matrice de F_s est

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} q & \\ & -q \end{pmatrix} & \\ & \ddots \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

donc que les q et les $-q$ sont en alternance, mais ceci sera démontré autrement dans la suite.

Si q est pair, alors F_s ne permute pas les composantes connexes de $\boldsymbol{Y}_s$, donc il agit sur $H_c^2(\boldsymbol{Y}_s, \mathcal{O})$ comme la multiplication par q.

Changement d'endomorphisme de Frobenius

On fixe pour la suite l'élément t_0 de T_s défini par

$$t_0 = \begin{cases} \gamma \begin{pmatrix} \beta^{\frac{q-1}{2}} & \\ & \beta^{q\frac{q-1}{2}} \end{pmatrix} \gamma^{-1} & \text{si } q \text{ est impair,} \\ 1 & \text{si } q \text{ est pair.} \end{cases} \tag{3.10}$$

C'est un élément de déterminant -1, donc il envoie la composante connexe $\boldsymbol{Y}_s(a)$ sur la composante connexe $\boldsymbol{Y}_s(-a)$, comme l'endomorphisme F_s.

On pose $F' = t_0 F_s$. Ainsi F' ne permute pas les composantes connexes de $\boldsymbol{Y}_s$. On va s'intéresser à F' plutôt qu'à F_s. Remarquons que t_0^{q+1} est l'élément central $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ de G, et donc $F'^2 = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) F_s^2$.

On désigne toujours par U le sous-groupe de G contenant les matrices $\left(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ avec $x \in \mathbb{F}_q$.

Grâce à [Ro5, théorème 2.2] on a un isomorphisme de $\mathcal{O}[T_s \times \langle F' \rangle]$-modules à droite

$${}^U H_c^*(\boldsymbol{Y}_s, \mathcal{O}) \simeq H_c^*(U\backslash\boldsymbol{Y}_s, \mathcal{O}). \tag{3.11}$$

Nous allons étudier cette variété $U\backslash\boldsymbol{Y}_s$ et sa cohomologie.

Cohomologie de la variété $U\backslash\boldsymbol{Y}_s$

Comme U ne permute pas les composantes connexes de $\boldsymbol{Y}_s$, les composantes connexes de $U\backslash\boldsymbol{Y}_s$ sont les $U\backslash\boldsymbol{Y}_s(a)$ (où a parcourt l'ensemble des

éléments de $\mathbb{F}$ tels que $a^{q-1} = -1$). En utilisant la propriété [DM2, 10.7] on a donc

$$H_c^*(U\backslash \boldsymbol{Y}_s, \mathcal{O}) \simeq \bigoplus_a H_c^*(U\backslash \boldsymbol{Y}_s(a), \mathcal{O}).$$

Comme l'endomorphisme F' ne permute pas les composantes connexes de $\boldsymbol{Y}_s$, et il commute avec l'action de U, il se restreint en un endomorphisme de chaque $U\backslash \boldsymbol{Y}_s(a)$ et donc de chaque groupe de cohomologie $H_c^i(U\backslash \boldsymbol{Y}_s(a), \mathcal{O})$.

Propriété 3.4.2. *La cohomologie ℓ-adique à support compact de la variété $U\backslash \boldsymbol{Y}_s(a)$ est donnée en tant que $\mathcal{O}\langle F' \rangle$-module par*

$$H_c^i(U\backslash \boldsymbol{Y}_s(a), \mathcal{O}) = \begin{cases} \mathcal{O}(i-1) & \text{si } i = 1,\ 2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{3.12}$$

On rappelle que $\mathcal{O}(n)$ désigne le twist de Tate $x \mapsto x^{q^n}$. Ainsi l'endomorphisme F' est l'identité sur $H_c^1(U\backslash \boldsymbol{Y}_s(a), \mathcal{O})$ et l'application $x \mapsto x^q$ sur $H_c^2(U\backslash \boldsymbol{Y}_s(a), \mathcal{O})$.

Démonstration : Considérons le morphisme

$$\begin{array}{rccc} \varphi_a : & \boldsymbol{Y}_s(a) & \longrightarrow & \mathbb{A}^1 - \{0\} \\ & \binom{x}{y} & \longmapsto & y \end{array} .$$

C'est une application algébrique, elle est bien à valeurs non nulles car si $\binom{x}{y} \in \boldsymbol{Y}_s(a)$ alors $y \neq 0$. Comme $\mathbb{F}$ est algébriquement clos, elle est surjective et la fibre de chaque point contient exactement q points. Pour $g \in U$ et $v \in \boldsymbol{Y}_s(a)$ on a $\varphi_a(gv) = \varphi_a(v)$, donc φ_a se factorise en un morphisme

$$\bar{\varphi}_a : \quad U\backslash \boldsymbol{Y}_s(a) \quad \longrightarrow \quad \mathbb{A}^1 - \{0\}$$

qui est toujours surjectif. Il est également injectif, car les fibres par φ_a sont de cardinal q, qui est aussi le cardinal de U. Comme φ_a est séparable et $\mathbb{A}^1 - \{0\}$ est lisse (donc normale), en utilisant [Bor, II.6] on obtient que φ_a est un isomorphisme de variétés algébriques.

L'action de F' sur $\mathbb{A}^1 - \{0\}$ induite par φ_a est $y \mapsto y^q \beta^{\frac{q-1}{2}}$. Soit τ une racine carrée de β. On a un automorphisme de $\mathbb{A}^1 - \{0\}$ en posant $y \mapsto \tau^q y$. En composant celui-ci avec φ_a, on obtient un isomorphisme $\psi_a : U\backslash \boldsymbol{Y}_s(q) \to \mathbb{A}^1 - \{0\}$, l'action de F' est alors l'endomorphisme de Frobenius usuel $y \mapsto y^q$.

L'isomorphisme ψ_a induit un isomorphisme de $\mathcal{O}\langle F' \rangle$-modules

$$H_c^*(U\backslash \boldsymbol{Y}_s(a), \mathcal{O}) \simeq H_c^*(\mathbb{A}^1 - \{0\}, \mathcal{O}).$$

On utilise la partition

$$\mathbb{A}^1 = (\mathbb{A}^1 - \{0\}) \amalg \{0\}.$$

Comme $\mathbb{A}^1 - \{0\}$ est ouvert dans $\mathbb{A}^1$ la propriété [DM2, 10.7] donne une suite exacte longue

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & H_c^0(\mathbb{A}^1 - \{0\},\, \mathcal{O}) & \longrightarrow & H_c^0(\mathbb{A}^1,\, \mathcal{O}) & \longrightarrow & H_c^0(\{0\},\, \mathcal{O}) \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & H_c^1(\mathbb{A}^1 - \{0\},\, \mathcal{O}) & \longrightarrow & H_c^1(\mathbb{A}^1,\, \mathcal{O}) & \longrightarrow & H_c^1(\{0\},\, \mathcal{O}) \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & H_c^2(\mathbb{A}^1 - \{0\},\, \mathcal{O}) & \longrightarrow & H_c^2(\mathbb{A}^1,\, \mathcal{O}) & \longrightarrow & H_c^2(\{0\},\, \mathcal{O}) \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

qui est une suite exacte de $\mathcal{O}\langle F' \rangle$-modules par fonctorialité.

La propriété [DM2, 10.11] nous donne les colonnes deux et trois : le $\mathcal{O}\langle F' \rangle$-module gradué $H_c^*(\{0\},\, \mathcal{O})$ est le module trivial concentré en degré 0, et le $\mathcal{O}\langle F' \rangle$-module gradué $H_c^*(\mathbb{A}^1,\, \mathcal{O})$ est le module $\mathcal{O}(1)$ concentré en degré 2. La suite exacte longue 3.4.1 devient alors

$$\begin{array}{ccccc}
0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathcal{O} \\
 & & \downarrow & & \\
 & & \mathcal{O} & \longrightarrow & 0 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \\
 & & \mathcal{O}(1) & \longrightarrow & \mathcal{O}(1) \longrightarrow 0
\end{array}$$

ce qui démontre la propriété. □

Action de F_s sur la partie non cuspidale de $H_c^1(\boldsymbol{Y}_s,\, K)$

On calcule les restrictions des caractères de $\mathrm{GL}_2(q)$ à U. On obtient que les φ_i sont constants sur U, que la restriction de chaque φ_i' à U est égale au caractère de la représentation régulière χ_U, et que celle de chaque ψ_i est égale à $\chi_U - \varphi_0$, où φ_0 est la représentation triviale. En conséquence ${}^U V_S$ est isomorphe en tant que KU-module à K^{q-1}, où K désigne la représentation triviale de U, et V_C n'a pas de point fixe par U, c'est donc la partie cuspidale de $H_c^1(\boldsymbol{Y}_s,\, K)$.

Plus précisément, en utilisant la décomposition $V_S = \bigoplus_i W_i$ de KG-modules, on a pour tout i un isomorphime de KU-modules ${}^U W_i \simeq K$.

On sait que F' induit un endomorphisme de V_S, lequel commute avec l'action de G, en conséquence, par application du lemme de Schur, F' envoie chaque W_i sur lui-même et cette action est donnée par un scalaire. La propriété 3.12 nous dit que F' agit comme l'identité sur ${}^U H_c^1(\boldsymbol{Y}_s,\, K) = {}^U V_S$, donc F' agit comme l'identité sur V_S.

On déduit de ceci l'action de F_s sur V_S : si q est impair on a $\omega^{(q+1)i}(t_0) = (-1)^i$, donc F_s agit comme le scalaire $(-1)^i$ sur W_i, pour $i = 1 \dots q-1$. Si q est pair alors F_s agit comme l'identité sur V_S.

Comme ${}^U H_c^2(\boldsymbol{Y}_s, K) = H_c^2(\boldsymbol{Y}_s, K)$, on obtient également que F' agit comme la multiplication par q sur $H_c^2(\boldsymbol{Y}_s, K)$, et donc que F_s agit comme la matrice 3.9 sur $H_c^2(\boldsymbol{Y}_s, K)$ si q est impair, et comme la multiplication par q si q est pair.

Action de F_s sur la partie cuspidale de $H_c^1(\boldsymbol{Y}_s, K)$

Nous utilisons pour finir la formule de Lefschetz. Comme l'équation de $\boldsymbol{Y}_s$ est $(xy^q - x^q y)^{q-1} = -1$, il est clair que $\boldsymbol{Y}_s$ n'a pas de point fixe par F_s. On a donc par le théorème [DM2, 10.4]

$$\mathrm{Tr}(F_s \mid H_c^*(\boldsymbol{Y}_s, \mathcal{O})) = |\boldsymbol{Y}_s^{F_s}| = 0.$$

Comme les caractères φ_i sont de degré 1 et les caractères φ_i' de degré q, on a $\mathrm{Tr}(F_s \mid H_c^2(\boldsymbol{Y}_s, K)) = \mathrm{Tr}(F_s \mid V_S)$, et donc $\mathrm{Tr}(F_s \mid V_C) = 0$.

On rappelle que pour $j = 1 \dots q^2 - 1$ non multiple de $q+1$, on note W_j' le $K[G \times {T_s}^{op}]$-module de caractère $\psi_j \times \omega^j$. On a $V_C = \oplus_j W_j'$.

La partie V.3 de [DM1] permet de calculer les valeurs propres de F_s^2 sur chaque W_j'. Comme l'action de F_s^2 commute avec celles de G et de T_s, par le lemme de Schur F_s^2 agit comme un scalaire λ_j sur chaque W_j'. Dans [DM1] sont définis les scalaires

$$N_s^2(\omega_j)(1) = \frac{1}{|T_s|} \sum_{t \in T_s} \omega_j(t^{-1}) \,\mathrm{Tr}(tF_s^2 \mid H_c^*(\boldsymbol{Y}_s, K))$$

et

$$R_s^{\omega_j}(1) = \mathrm{Tr}(1 \mid H_c^*(\boldsymbol{Y}_s, K)_{\omega_j}),$$

où $H_c^*(\boldsymbol{Y}_s, K)_{\omega_j}$ désigne la composante de $H_c^*(\boldsymbol{Y}_s, K)$ de caractère ω_j, donc dans notre cas W_j'. On a alors d'après [DM1, V, 3.14]

$$\lambda_j = N_s^2(\omega_j)(1).R_s^{\omega_j}(1)^{-1}.$$

Comme V_C est en degré 1 on a

$$R_s^{\omega_j}(1) = -R_{T_s}^G(\omega_j)(1) = -\psi_j(1) = -(q-1).$$

Par la formule de Lefschetz on a $\mathrm{Tr}(tF_s^2 \mid H_c^*(\boldsymbol{Y}_s, K)) = |{\boldsymbol{Y}_s}^{tF_s^2}|$. Si $t = {}^{\gamma}\left(\begin{smallmatrix} \beta^i & \\ & \beta^{qi} \end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in {\boldsymbol{Y}_s}^{tF_s^2}$ alors

$$(xy^q - x^q y)^q = -\beta^i (xy^q - x^q y),$$

donc si $t \neq 1$ alors ${\mathbf{Y}_s}^{tF_s^2}$ est vide, et si $t = 1$ on a

$$ {\mathbf{Y}_s}^{F_s^2} = \left\{ \binom{x}{y} \mid x,\, y \in \mathbb{F}_{q^2},\ xy^q \neq x^q y \right\}, $$

ce qui donne $|{\mathbf{Y}_s}^{F_s^2}| = (q^2-1)(q^2-q)$, puis $N_s^2(\omega_j)(1) = q^2 - q$, et enfin $\lambda_j = -q$.

Par le lemme de Schur, comme $tF_s = F_s t^q$ alors F_s envoie W_j' sur W_{qj}' et cette action est donnée par un scalaire. Soit μ_j ce scalaire. On a $\mu_j \mu_{qj} = \lambda_j = -q$, donc l'action de F_s sur l'espace $W_j' \oplus W_{qj}'$ est donnée par la matrice

$$ \begin{pmatrix} & \mu_j I_{qj} \\ \frac{-q}{\mu_j} I_j & \end{pmatrix} $$

où $I_j : W_j' \to W_{qj}'$ est l'identité du KG-module $\mathrm{Res}_G^{G \times {T_s}^{op}} W_j'$, (lequel est isomorphe au module $\mathrm{Res}_G^{G \times {T_s}^{op}} W_{qj}'$). Les valeurs propres de cette matrice sont $\pm\sqrt{-q}$, donc quitte à multiplier les bases par des scalaires on peut poser que F_s agit comme la matrice $\left(\begin{smallmatrix} & \sqrt{-q} \\ \sqrt{-q} & \end{smallmatrix}\right)$ sur $W_j' \oplus W_{qj}'$. Ceci confirme que la somme des valeurs propres de F_s sur V_C est nulle.

Calcul de F_s^2

Propriété 3.4.3. *L'action de F_s^2 sur $H_c^*(\mathbf{Y}_s, K)$ est égale à celle de*

$$ -q\mathrm{Id} + \sum_{\substack{t \in T_s \\ \det t = -1}} tF_s. $$

Démonstration : On déduit des trois parties précédentes que F_s^2 agit comme la multiplication par q^2 sur H_c^2, comme l'identité sur V_S, et comme la multiplication par $-q$ sur V_C. Ainsi $F_s^2 + q$ agit comme $q(q+1)$ sur H_c^2, comme $(q+1)$ sur V_S et comme 0 sur V_C.

Supposons que q est impair. On conserve l'élément t_0 de T_s défini page 93 (3.10). L'ensemble des éléments de T_s de déterminant -1 est égal à l'ensemble des $t_0^{2\lambda+1}$ pour $\lambda = 1 \ldots q+1$. On a $\omega^{(q+1)i}(t_0^{2\lambda+1}) = (-1)^i$ donc $t_0^{2\lambda+1} F_s$ agit comme la multiplication par q sur $H_c^2(\mathbf{Y}_s, K)$ et comme l'identité sur V_S pour tout $\lambda = 1 \ldots q+1$, d'où le résultat pour H_c^2 et V_S.

On a $\omega_j(t_0^{2\lambda+1}) = \beta^{j(2\lambda+1)\frac{q-1}{2}}$ donc pour $j = 1 \ldots q^2 - 1$ non multiple de $q+1$ on a

$$ \sum_{\lambda=1}^{q+1} \omega_j(t_0^{2\lambda+1}) = 0, $$

d'où le résultat pour V_C.

Si q est pair, alors on choisit $t_0 = \gamma\left(\begin{smallmatrix} \beta^{q-1} & 0 \\ 0 & \beta^{1-q} \end{smallmatrix}\right)$. L'ensemble des éléments de T_s de déterminant 1 est égal à l'ensemble des t_0^λ pour $\lambda = 1 \dots q+1$. Ces éléments agissent trivialement sur H_c^2 et V_S. Leur somme annule encore la composante V_C, d'où le résultat. □

Remarque 3.4.4. Toujours en posant $F' = t_0 F_s$, on déduit de cette propriété que l'action de F'^2 est égale à celle de

$$-q\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) + \sum_{\substack{t \in T_s \\ \det t = 1}} tF'.$$

Disjonction de Λ_s

Nous utiliserons la propriété suivante :

Propriété 3.4.5. *On a un isomorphisme de variétés algèbriques*

$$\mathrm{SL}_2(q)\backslash Y_s \xrightarrow{\sim} (\mathbb{A}^1)^{q-1}.$$

Démonstration : Les composantes connexes de $\boldsymbol{Y}_s$ sont les $\boldsymbol{Y}_s(a)$, elles sont au nombre de $(q-1)$. Comme $\mathrm{SL}_2(q)$ ne les permute pas, on a un isomorphisme

$$\mathrm{SL}_2(q)\backslash \boldsymbol{Y}_s = \coprod_a \mathrm{SL}_2(q)\backslash \boldsymbol{Y}_s(a).$$

Il suffit donc de montrer que pour tout a il existe un isomorphisme

$$\mathrm{SL}_2(q)\backslash \boldsymbol{Y}_s(a) \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^1.$$

L'injection de variétés algébriques $\boldsymbol{Y}_s(a) \hookrightarrow \boldsymbol{Y}_s$ se factorise en un morphime de variétés algèbriques

$$\varphi : \mathrm{SL}_2(q)\backslash \boldsymbol{Y}_s(a) \longrightarrow \mathrm{GL}_2(q)\backslash \boldsymbol{Y}_s.$$

Il est clair que ce morphisme est bijectif et séparable.

On sait que $G = \boldsymbol{G}^F$ est le noyau de l'application de Lang, donc celle-ci se factorise en un morphime bijectif $G\backslash \boldsymbol{G} \to \boldsymbol{G}$. Comme $\boldsymbol{Y}_s = \mathcal{L}^{-1}(F(\boldsymbol{U}))$, on a un morphisme de variétés algébriques bijectif

$$\psi : \mathrm{GL}_2(q)\backslash \boldsymbol{Y}_s \longrightarrow F(\boldsymbol{U}).$$

L'application de Lang est séparable (*cf* [Bor, A REMPLIR]), donc la composition $\psi \circ \varphi$ est séparable. La variété $F(\boldsymbol{U})$ est lisse (donc normale), donc en utilisant [Bor, II.6] on obtient que $\psi \circ \varphi$ est un isomorphisme de variétés algébriques. Comme on a $F(\boldsymbol{U}) \simeq \mathbb{A}^1$ on obtient le résultat. □

La propriété suivante est capitale, elle montre que Λ_s vérifie la propriété de disjonction.

Propriété 3.4.6. *Si* $n \neq 0$ *alors* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}^b(kG)}(k \otimes \Lambda_s,\, k \otimes \Lambda_s[n]) = 0$.

Les produits tensoriels sont pris au dessus de $\mathcal{O}$.

Démonstration : Seule la structure de $\mathcal{O}G$-module des composantes de Λ_s nous intéresse dans cette démonstration, en conséquence on suppose que Λ_s est le complexe représentant minimal de sa classe dans $\mathcal{H}^b(\mathcal{O}G)$, comme défini en 3.2.3. C'est-à-dire que l'on suppose que Λ_s est un complexe de $\mathcal{O}G$-modules projectifs concentré en degrés 1 et 2, sans facteur direct homotope à zéro.

Il suffit donc de montrer la propriété pour $n = \pm 1$. Or on a

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}^b(kG)}(k\Lambda_s,\, k\Lambda_s[n]) = H^n(\mathcal{E}nd_{kG}(k\Lambda_s))$$

et le complexe $\mathcal{E} = \mathcal{E}nd_{kG}(k\Lambda_s)$ est autodual sur k, *i.e.*, On a

$$\mathcal{H}om_k(\mathcal{E},\, k) \simeq \mathcal{E}.$$

Ceci implique que

$$H^n(\mathcal{E}) \simeq H^n(\mathcal{H}om_k(\mathcal{E},\, k)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(k)}(\mathcal{E},\, k[n]) \simeq \mathrm{Hom}_k(H^{-n}(\mathcal{E}),\, k)$$

et donc il suffit de montrer la propriété pour $n = -1$. On a

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}^b(kG)}(k\Lambda_s,\, k\Lambda_s[-1]) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}^b(kG)}(H^2(k\Lambda_s)[-1],\, k\Lambda_s).$$

Il suffit donc de montrer que pour tout sous-quotient irréductible V de $H^2(k\Lambda_s)$ on a

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}^b(kG)}(V[-1],\, k\Lambda_s) = 0.$$

Pour ceci il suffit de montrer que

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}^b(k\mathrm{SL}_2(q))}(\mathrm{Res}^{\mathrm{GL}_2}_{\mathrm{SL}_2} V[-1],\, \mathrm{Res}^{\mathrm{GL}_2}_{\mathrm{SL}_2} k\Lambda_s) = 0.$$

Nous savons que les composantes de Λ_s sont libres sur $\mathcal{O}$ et que l'homologie $H^*(\Lambda_s)$ l'est aussi. Grâce au lemme 3.2.8 nous en déduisons donc que pour tout entier n on a

$$H^n(k \otimes \Lambda_s) = k \otimes H^n(\Lambda_s).$$

Le caractère modulaire de $H^2(k \otimes \Lambda_s)$ est donc l'image du caractère χ_2 de $H^2(\Lambda_s)$ par l'application de décomposition. Comme χ_2 est somme de caractères de degré 1, le caractère modulaire de $H^2(k \otimes \Lambda_s)$ est somme de caractères modulaires de degré 1, et donc le sous-quotient V de $H^2(k\Lambda_s)$ est de degré 1.

De plus d'après la section B.3 le seul caractère modulaire de degré 1 de $\mathrm{SL}_2(q)$ est le caractère modulaire trivial, donc $\mathrm{Res}^{\mathrm{GL}_2}_{\mathrm{SL}_2} V$ est le module trivial. Or on a

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}^b(k\mathrm{SL}_2(q))}(k[-1],\, \mathrm{Res}^{\mathrm{GL}_2}_{\mathrm{SL}_2} k\Lambda_s) = H^1(\mathcal{H}om_{k\mathrm{SL}_2(q)}(k,\, \mathrm{Res}^{\mathrm{GL}_2}_{\mathrm{SL}_2} k\Lambda_s))$$

et par définition des point fixes d'un objet de la catégorie homotopique

$$\mathcal{H}om_{k\mathrm{SL}_2(q)}(k,\, \mathrm{Res}^{\mathrm{GL}_2}_{\mathrm{SL}_2} k\Lambda_s) = {}^{\mathrm{SL}_2}k\Lambda_s,$$

donc il suffit de montrer que

$$H^1({}^{\mathrm{SL}_2}k\Lambda_s) = 0.$$

Par le théorème [Ri3, 4.1] de J. Rickard, on a

$${}^{\mathrm{SL}_2}k\Lambda_s \simeq \Lambda_c(\mathrm{SL}_2(q)\backslash \boldsymbol{Y}_s,\, k).$$

On sait grâce à la propriété 3.4.5 que $\mathrm{SL}_2(q)\backslash \boldsymbol{Y}_s \simeq (\mathbb{A}^1)^{q-1}$. D'après les théorèmes [DM2, 10.7(ii) et 10.11], la cohomologie $H^*_c((\mathbb{A}^1)^{q-1},\, k)$ est concentrée en degré 2, donc $H^1({}^{\mathrm{SL}_2}k\Lambda_s) = 0$. Ceci termine la démonstration. □

Extension des scalaires $K \otimes_{\mathcal{O}} \mathrm{End}_{\mathcal{H}^b(A)}(\Lambda_s)$

Notation 3.4.7. *On note dorénavant A la somme des blocs de $\mathcal{O}G$ dans lesquels vivent les composantes de Λ_s.*

On a donc $A \otimes_{\mathcal{O}G} \Lambda_s = \Lambda_s$, et $\mathcal{O}G = A \oplus \mathrm{Ann}_{\mathcal{H}^b(\mathcal{O}G)}(\Lambda_s)$.

Remarque 3.4.8. Dans le cas où $\ell \,|\, q+1$, $\ell \neq 2$, les blocs de $\mathcal{O}G$ de défaut maximal contiennent tous les caractères φ_i, φ'_i et ψ_j. Les autres blocs sont de défaut nul, ils contiennent les $\varphi_{i,\,j}$. Si on choisit un représentant minimal de Λ_s dans le catégorie $\mathcal{C}^b(\mathcal{O}G)$ (*cf* définition 3.2.3), alors la connaissance des caractères de $H^*(\Lambda_s)$ montre que ce représentant vit dans la somme des blocs de défaut maximal, *i.e.,* A est la somme des blocs de $\mathcal{O}G$ de défaut maximal.

On considère donc Λ_s comme un complexe de $A \otimes \mathcal{O}T_s{}^{op}$-modules.

Comme K est le corps des fractions de $\mathcal{O}$, c'est une $\mathcal{O}$-algèbre plate sur $\mathcal{O}$. On sait que le complexe Λ_s est borné à composantes de type fini, ainsi la propriété 3.2.6 nous donne un isomorphisme

$$K \otimes \mathrm{End}_{\mathcal{H}^b(A)}(\Lambda_s) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{\mathcal{H}^b(K\otimes A)}(K \otimes \Lambda_s).$$

Nous allons montrons que $\mathrm{End}_{\mathcal{H}^b(A)}(\Lambda_s)$ est libre sur $\mathcal{O}$ en utilisant la propriété 3.2.7.

Le complexe Λ_s est borné. Ses composantes $(\Lambda_s^i)_{i\in\mathbb{Z}}$ sont libres sur $\mathcal{O}$, donc les $\mathcal{O}$-modules $\mathrm{Hom}_A(\Lambda_s^i,\, \Lambda_s^j)$ sont libres et le complexe $\mathcal{E}nd_A(\Lambda_s)$ est borné à composantes libres sur $\mathcal{O}$.

On sait grâce à la propriété 3.4.6 que pour tout entier i non nul

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(kA)}(k \otimes \Lambda_s,\, k \otimes \Lambda_s[i]) = 0,$$

donc $H^i(\mathcal{E}nd_{kA}(k\otimes\Lambda_s)) = 0$ pour tout $i \neq 0$. Or les modules Λ_s^i étant libres sur $\mathcal{O}$, on a des isomorphismes

$$\tau_{i,\,j} : k \otimes_{\mathcal{O}} \mathrm{Hom}_A(\Lambda_s^i,\, \Lambda_s^j) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{kA}(k \otimes_{\mathcal{O}} \Lambda_s^i,\, k \otimes_{\mathcal{O}} \Lambda_s^j)$$

pour tous i, j, et ces isomorphismes commutent avec les différentielles des complexes $\mathcal{E}nd_{kA}(k\otimes\Lambda_s)$ et $k\otimes\mathcal{E}nd_A(\Lambda_s)$. Ces deux complexes sont donc isomorphes, et on peut appliquer la propriété 3.2.7. Le $\mathcal{O}$-module $\mathrm{End}_{\mathcal{H}^b(A)}(\Lambda_s)$ est facteur direct de $\mathcal{E}nd_A(\Lambda_s)$. Celui-ci est libre sur $\mathcal{O}$, donc $\mathrm{End}_{\mathcal{H}^b(A)}(\Lambda_s)$ est libre sur $\mathcal{O}$.

On a donc obtenu la propriété suivante :

Propriété 3.4.9. *L'extension des scalaires de $\mathcal{O}$ à K donne une injection*

$$\mathrm{End}_{\mathcal{H}^b(A)}(\Lambda_s) \to \mathrm{End}_{\mathcal{H}^b(K\otimes A)}(K \otimes \Lambda_s).$$

3.4.2 Construction de l'isomorphisme $\mathcal{O}H_s \simeq \mathrm{End}_{\mathcal{H}^b(A)}(\Lambda_s)$

L'action de T_s et de F_s à droite sur Λ_s donne un morphisme d'algèbres

$$g_0 : \mathcal{O}[T_s \rtimes \langle\, F_s \,\rangle] \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathcal{H}^b(A)}(\Lambda_s).$$

On définit celui-ci par $g_0(a) : x \mapsto x.a$ si $a \in \mathcal{O}[T_s \rtimes \langle\, F_s \,\rangle]$ et $x \in \Lambda_s$.

On considère le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}[T_s \rtimes \langle\, F_s \,\rangle] & \xrightarrow{\quad g_0 \quad} & \mathrm{End}_{\mathcal{H}^b(A)}(\Lambda_s) \\ \downarrow & & \downarrow \\ K[T_s \rtimes \langle\, F_s \,\rangle] & \xrightarrow{1_K\otimes g_0} & \mathrm{End}_{\mathcal{H}^b(KA)}(K \otimes \Lambda_s). \end{array}$$

Les flèches verticales sont données par extension des scalaires de $\mathcal{O}$ à K. En vertu de la propriété 3.4.9 la deuxième flèche est injective.

Comme KA est semi-simple, on a

$$\mathrm{End}_{\mathcal{H}^b(KA)}(K \otimes \Lambda_s) \simeq \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathrm{End}_{KA}(H^n(K \otimes \Lambda_s)).$$

On définit l'élément suivant de $\mathcal{O}[T_s \rtimes \langle F_s \rangle]$:

$$\omega_s = F_s^2 + q - \sum_{\substack{t \in T_s \\ \det t = -1}} tF_s.$$

La propriété 3.4.3 montre que cet élément est dans le noyau de g_0, donc le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}[T_s \rtimes \langle F_s \rangle]/\langle \omega_s \rangle & \xrightarrow{g_1} & \mathrm{End}_{\mathcal{H}^b(A)}(\Lambda_s) \\ \downarrow & & \downarrow \\ K[T_s \rtimes \langle F_s \rangle]/\langle \omega_s \rangle & \xrightarrow{1_K \otimes g_1} & \mathrm{End}_{\mathcal{H}^b(KA)}(K \otimes \Lambda_s). \end{array}$$

Montrons que $1_K \otimes g_1$ est injective. On rappelle que V_C désigne la composante cuspidale de $K \otimes H^1(\Lambda_s)$, et qu'elle est somme directe des espace W'_j pour $j = 1 \dots q^2 - 1$ non multiple de $q+1$. Tout élément a de $K[T_s \rtimes \langle F_s \rangle]/\langle \omega_s \rangle$ s'écrit de façon unique $a = a_1 + a_2 F_s$ où a_1, $a_2 \in KT_s$. L'action de F_s envoie la composante W'_j dans la composante W'_{qj} alors que tout élément de T_s l'envoie sur elle-même. Donc si a est dans le noyau de $1_K \otimes g_1$ alors a_1 et $a_2 F_s$ sont aussi dans ce noyau. Comme l'action de F_s sur chaque espace W'_j est non-nulle a_2 est également dans ce noyau.

Comme le caractère $\mathrm{Res}^{G \times {T_s}^{op}}_{1 \times {T_s}^{op}} \chi_1$ du $K{T_s}^{op}$-module $H^1_c(\boldsymbol{Y}_s, K)$ contient tous les caractères de T_s on a $a_1 = a_2 = 0$, et donc $1_K \otimes g_1$ est injective.

La dimension sur K de $\bigoplus \mathrm{End}_{KA}(H^n(K \otimes \Lambda_s))$ est égale à

$$(q-1) + (q-1) + 4\frac{q(q-1)}{2} = 2(q^2-1),$$

donc $1_K \otimes g_1$ est un isomorphisme.

Pour tout élément x de $\mathcal{O}[T_s \rtimes \langle F_s \rangle]$ ou de $K[T_s \rtimes \langle F_s \rangle]$, on note $\bar{x}$ la classe de x modulo ω_s. Le $\mathcal{O}$-module $\mathcal{O}[T_s \rtimes \langle F_s \rangle]/\langle \omega_s \rangle$ est libre, il est engendré par la famille $\{\bar{t}, \bar{t}\overline{F}_s\}$ où t parcourt T_s. L'extension des scalaires

$$\mathcal{O}[T_s \rtimes \langle F_s \rangle]/\langle \omega_s \rangle \to K[T_s \rtimes \langle F_s \rangle]/\langle \omega_s \rangle$$

est une injection. Ainsi l'application g_1 est injective. Nous allons montrer qu'elle est surjective si ℓ divise $q+1$ ou si ℓ ne divise ni $q-1$ ni $q+1$.

On note dorénavant

$$\mathcal{H}_s = \mathbb{Z}[T_s \rtimes \langle F_s \rangle]/\langle \omega_s \rangle,$$

et on fera l'amalgame entre les éléments de $\mathbb{Z}[T_s \rtimes \langle F_s \rangle]$ et leur image dans $\mathcal{H}_s$.

Propriété 3.4.10. *Supposons que ℓ divise $q+1$. Alors le morphisme d'algèbres $g_1 : \mathcal{O}[T_s \rtimes \langle F_s \rangle]/\langle \omega_s \rangle \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathcal{H}^b(A)}(\Lambda_s)$ est un isomorphisme.*

Démonstration : Les algèbres $\mathcal{O}[T_s \rtimes \langle F_s \rangle]/\langle \omega_s \rangle$ et $\mathrm{End}_{\mathcal{H}^b(A)}(\Lambda_s)$ sont libres sur $\mathcal{O}$ de même rang, car $1_K \otimes g_1$ est un isomorphisme. Il suffit donc de montrer que l'injection g_1 est scindée.

On considère les algèbres $\mathcal{O}[T_s \rtimes \langle F_s \rangle]/\langle \omega_s \rangle$ et $\mathrm{End}_{\mathcal{H}^b(A)}(\Lambda_s)$ comme des $(\mathcal{O}T_s, \mathcal{O}T_s)$-bimodules, et g_1 comme un morphisme de $(\mathcal{O}T_s, \mathcal{O}T_s)$-bimodules.

Soit V le bimodule $\mathcal{O}[T_s \rtimes \langle F_s \rangle]/\langle \omega_s \rangle$. On a $V = V_1 \oplus V_2$, où V_1 est le $(\mathcal{O}T_s, \mathcal{O}T_s)$-bimodule $\mathcal{O}T_s$ et V_2 le bimodule ayant pour base sur $\mathcal{O}$ l'ensemble des tF_s pour $t \in T_s$. On a alors

$$V_1 \simeq \mathrm{Ind}_{\Delta T_s}^{T_s \times {T_s}^{op}} \mathcal{O} \qquad \text{et} \qquad V_2 \simeq \mathrm{Ind}_{\Delta' T_s}^{T_s \times {T_s}^{op}} \mathcal{O} \tag{3.13}$$

où $\Delta T_s = \{(t, t^{-1}) \mid t \in T_s\}$ et $\Delta' T_s = \{(t, t^{-q}) \mid t \in T_s\}$. On note S le ℓ-sous-groupe de Sylow de T_s, et on définit de la même façon les sous-groupes ΔS et $\Delta' S$ de $T_s \times {T_s}^{op}$.

On en déduit que ΔS est un vortex des composantes indécomposables de V_1, et que $\Delta' S$ est un vortex des composantes indécomposables de V_2. Donc, grâce à la propriété 3.2.11, si $Br_{\Delta S}(g_1)$ et $Br_{\Delta' S}(g_1)$ sont des injections scindées alors g_1 est également une injection scindée.

Ramenons l'étude de $Br_{\Delta' S}(g_1)$ à celle de $Br_{\Delta S}(g_1)$: si G est un groupe fini quelconque et σ un automorphisme de G, alors pour tout sous-groupe H de G et tout anneau R on a un foncteur *torsion par σ* :

$$\tilde{\sigma} : RH\text{-mod} \to R[\sigma^{-1}H]\text{-mod}$$

qui est une équivalence de catégories. Ce foncteur est compatible au foncteur de Brauer dans le sens suivant : si P est un ℓ-sous-groupe de G, alors le diagramme de foncteurs

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}G\text{-mod} & \xrightarrow{\tilde{\sigma}} & \mathcal{O}G\text{-mod} \\ {\scriptstyle Br_{\sigma(P)}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Br_P} \\ kN_G(\sigma(P))\text{-mod} & \xrightarrow[\tilde{\sigma}]{} & kN_G(P)\text{-mod} \end{array}$$

est commutatif. On considère alors l'automorphisme d'ordre 2 suivant :

$$\begin{array}{rcl} \sigma : T_s \times {T_s}^{op} & \longrightarrow & T_s \times {T_s}^{op} \\ (t_1,\, t_2) & \longmapsto & (t_1,\, t_2^q). \end{array}$$

Comme $\Delta' S = \sigma(\Delta S)$, si $Br_{\Delta S}(g_1)$ est une injection scindée alors $Br_{\Delta' S}(g_1)$ est également une injection scindée.

Si Ω est un $T_s \times {T_s}^{op}$-ensemble, et L un ℓ-sous-groupe de $T_s \times {T_s}^{op}$, alors $Br_L(\mathcal{O}\Omega) \simeq k[\Omega^L]$, on a donc

$$Br_{\Delta S}(k[T_s \times {T_s}^{op}/\Delta T_s]) = k[{}^{\Delta S}(T_s \times {T_s}^{op}/\Delta T_s)] = k[T_s \times {T_s}^{op}/\Delta T_s]$$

et, puisque l'on suppose que $\ell \,|\, q+1$,

$$Br_{\Delta S}(k[T_s \times {T_s}^{op}/\Delta' T_s]) = k[{}^{\Delta S}(T_s \times {T_s}^{op}/\Delta' T_s)] = 0.$$

Ainsi on a $Br_{\Delta S}(V) = kT_s$.

Comme pour $t \in T_s$ l'image $g_1(t)$ est la multiplication à droite par t, on obtient que l'image de t par

$$Br_{\Delta S}(g_1) : kT_s \to Br_{\Delta S}(\mathrm{End}_{\mathcal{H}^b(A)}(\Lambda_s))$$

est la multiplication à droite par t, ou plutôt, pour être rigoureux, son image par

$$br_{\Delta S} : {}^{\Delta S}\mathrm{End}_{\mathcal{H}^b(A)}(\Lambda_s) \to Br_{\Delta S}(\mathrm{End}_{\mathcal{H}^b(A)}(\Lambda_s)).$$

On sait que Λ_s est un complexe de modules de ℓ-permutation, et la propriété 3.4.6 implique que

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}^b(A)}(\Lambda_s,\, \Lambda_s[i]) = 0 \qquad \text{pour tout } i \neq 0,$$

donc en utilisant la démonstration de [Ri4, théorème 4.1] on obtient un isomorphisme de $(kT_s,\, kT_s)$-bimodules

$$\varphi_0 : Br_{\Delta S}^{T_s \times {T_s}^{op}}(\mathrm{End}_{\mathcal{H}^b(A)}(\Lambda_s)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{\mathcal{H}^b(kT_s)}(Br_{\Delta S}^{G \times {T_s}^{op}}(\Lambda_s))$$

dont l'expression est la suivante : soit f un endomorphisme du complexe Λ_s et $\bar{f}$ sa classe dans $\mathrm{End}_{\mathcal{H}^b(A)}(\Lambda_s)$. On suppose que $\bar{f}$ est stable par ΔS, et on note $\bar{\bar{f}}$ sa classe dans $Br_{\Delta S}^{T_s \times {T_s}^{op}}(\mathrm{End}_{\mathcal{H}^b(A)}(\Lambda_s))$. Alors l'image de $\bar{\bar{f}}$ par φ_0 est la classe dans $\mathrm{End}_{\mathcal{H}^b(kT_s)}(Br_{\Delta S}^{G \times {T_s}^{op}}(\Lambda_s))$ du morphisme de complexes

$$Br_{\Delta S}^{G \times {T_s}^{op}}(f) : Br_{\Delta S}^{G \times {T_s}^{op}}(\Lambda_s) \to Br_{\Delta S}^{G \times {T_s}^{op}}(\Lambda_s).$$

En posant $g_2 = \varphi_0 \circ Br_{\Delta S}(g_1)$, on obtient une application

$$g_2 : kT_s \to \mathrm{End}_{\mathcal{H}^b(kT_s)}(Br_{\Delta S}^{G \times {T_s}^{op}}(\Lambda_s)).$$

On déduit de l'expression de φ_0 que si $t \in T_s$ alors $g_2(t)$ est la multiplication à droite par t. Comme φ_0 est un isomorphisme on est ramené à montrer que g_2 est une injection scindée.

On utilise ensuite [Ro5, théorème 2.29], qui montre que l'on a un isomorphisme de complexes de $k[T_s \times {T_s}^{op}]$-modules

$$Br_{\Delta S}^{G \times {T_s}^{op}}(\Lambda_c(\boldsymbol{Y}_s, \mathcal{O})) \xrightarrow{\sim} \Lambda_c({\boldsymbol{Y}_s}^{\Delta S}).$$

Cet isomorphisme est $k[T_s \times {T_s}^{op}]$-linéaire pour les structures canoniques de $k[T_s \times {T_s}^{op}]$-modules de sa source et de son but. Il induit donc un isomorphisme

$$\varphi_1 : \mathrm{End}_{\mathcal{H}^b(kT_s)}(Br_{\Delta S}^{G \times {T_s}^{op}}(\Lambda_c(\boldsymbol{Y}_s, \mathcal{O}))) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{\mathcal{H}^b(kT_s)}(\Lambda_c({\boldsymbol{Y}_s}^{\Delta S})).$$

et l'image de la multiplication à droite par un élément $t \in T_s$ est la multiplication à droite par t sur $\Lambda_c({\boldsymbol{Y}_s}^{\Delta S})$ induite par la multiplication à droite sur ${\boldsymbol{Y}_s}^{\Delta S}$.

On pose $g_3 = \varphi_1 \circ g_2$ et on est ramené à montrer que

$$g_3 : kT_s \to \mathrm{End}_{\mathcal{H}^b(kT_s)}(\Lambda_c({\boldsymbol{Y}_s}^{\Delta S}))$$

qui à $t \in T_s$ associe la multiplication à droite par t est une injection scindée.

Soit (t, t^{-1}) un élément de ΔS, et $\binom{x}{y}$ un élément de $\boldsymbol{Y}_s$, donc un couple d'éléments de $\mathbb{F}^2$ tel que

$$(xy^q - x^q y)^{q-1} = -1.$$

Soit i un entier tel que $t = \left(\begin{smallmatrix} \beta^i & 0 \\ 0 & \beta^{qi} \end{smallmatrix}\right)$. L'action de (t, t^{-1}) sur $\binom{x}{y}$ est donnée par

$$(t, t^{-1}) \binom{x}{y} = \gamma t \gamma^{-1} \binom{x}{y} \beta^i,$$

donc (en rappelant que l'on suppose que $\ell | q+1$), $\binom{x}{y}$ est stable par (t, t^{-1}) si et seulement s'il existe $z \in \mathbb{F}$ tel que

$$\gamma^{-1} \binom{x}{y} = \binom{z}{0}.$$

Ceci impose que

$${\boldsymbol{Y}_s}^{\Delta S} = \left\{ \binom{y\beta^q}{y} \mid y \in \mathbb{F}_{q^2}^{\times} \right\}.$$

Cette variété est un ensemble de points, donc $\Lambda_c({\boldsymbol{Y}_s}^{\Delta S}) = k[{\boldsymbol{Y}_s}^{\Delta S}]$. On a un isomorphisme

$$\begin{array}{rccc} \psi : & {\boldsymbol{Y}_s}^{\Delta S} & \xrightarrow{\sim} & T_s \\ & \binom{y\beta^q}{y} & \longmapsto & \gamma \left(\begin{smallmatrix} y & 0 \\ 0 & y^q \end{smallmatrix}\right) \gamma^{-1} \end{array}$$

qui est bien $T_s \times {T_s}^{op}$-linéaire si l'on donne à T_s la structure de $T_s \times {T_s}^{op}$-ensemble induite par la multiplication et à ${\boldsymbol{Y}_s}^{\Delta S}$ la structure induite par la structure de (G, T_s)-bi-ensemble de $\boldsymbol{Y}_s$.

On a ainsi un dernier isomorphisme

$$\begin{aligned} \varphi_2 : \mathrm{End}_{\mathcal{H}^b(kT_s)}(\Lambda_c({\boldsymbol{Y}_s}^{\Delta S})) &\longrightarrow kT_s \\ f &\longmapsto \psi(f(1)) \end{aligned}$$

qui est $k[T_s \times {T_s}^{op}]$-linéaire, et envoie la multiplication à droite par t sur l'élément t lui-même. Ainsi $\varphi_2 \circ g_3$ est l'identité de kT_s, et la démonstration est terminée. □

On a ensuite la propriété suivante :

Propriété 3.4.11. *Soit R un anneau commutatif. Supposons que 2 et $q-1$ sont inversibles dans R, et que R contient une racine carrée r de $-q$ inversible, telle que $r+1$ est inversible. Alors les algèbres RH_s et $R \otimes \mathcal{H}_s$ sont isomorphes.*

Démonstration : Comme pour la démonstration de la propriété 3.3.2, on définit les deux éléments suivants de $\mathcal{H}_s$:

$$C = \sum_{\substack{t \in T_s \\ \det t = 1}} t \qquad D = \sum_{\substack{t \in T_s \\ \det t = -1}} t,$$

et on a $C^2 = D^2 = (q+1)C$, $CD = DC = (q+1)D$.

Soit $g_2 : RH_s \to R \otimes \mathcal{H}_s$ l'application R-linéaire définie par $g_2(t) = t$ si $t \in T_s$, et $g_2(s) = \sigma$ où

$$\sigma = \frac{1}{r}F_s + \frac{1}{q-1}D - \frac{r-1}{r(r+1)(q-1)}CF_s.$$

On a alors $\sigma^2 = 1$, et $\sigma t = t^q \sigma$ pour tout $t \in T_s$, donc g_2 est un morphisme d'algèbres. Il est surjectif car F_s est l'image de

$$rs + \frac{1}{2}\sum_{\substack{t \in T_s \\ \det t = -1}} t - \frac{r-1}{2(r+1)}\sum_{\substack{t \in T_s \\ \det t = 1}} ts.$$

qui est bien élément de RH_s. Enfin, comme $R[T_s \rtimes F_s]/\langle\, \omega_s \,\rangle$ est libre sur R de rang $2(q^2-1)$, g_2 est un isomorphisme d'algèbres. □

On a le corollaire immédiat des deux propriétés précédentes, en rappelant que si $\ell \neq 2$ et $\ell \,|\, q+1$ alors H_s désigne le normalisateur dans G d'un ℓ-sous-groupe de Sylow de G :

Corollaire 3.4.12. *Supposons que $\ell \neq 2$ et $\ell \,|\, q+1$. On a un isomorphisme d'algèbres*

$$g : \mathcal{O}H_s \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{\mathcal{H}^b(A)}(\Lambda_s).$$

On a aussi cette conséquence de la propriété 3.4.11 :

Corollaire 3.4.13. *Si $\ell \neq 2$, et ℓ ne divise ni $q+1$, ni $q+1$ alors le morphisme d'algèbres $g_1 : \mathcal{O}[T_s \rtimes \langle F_s \rangle]/\langle \omega_s \rangle \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathcal{H}^b(A)}(\Lambda_s)$ est un isomorphisme.*

Démonstration : Les suppositions faites sur ℓ nous permettent d'appliquer la propriété 3.4.11 en posant $R = k$. Les algèbres $k[T_s \rtimes \langle F_s \rangle]/\langle \omega_s \rangle$ et kH_s sont donc isomorphes. Or kH_s est semi-simple, car l'ordre de H_s est $2(q-1)(q+1)$. On applique ensuite la propriété 3.2.9 au morphisme g_1, en posant $R = \mathcal{O}$. On sait que $\mathrm{Id}_K \otimes_{\mathcal{O}} g_1$ est un isomorphisme, et que $k \otimes \mathcal{H}_s$ est semi-simple, donc g_1 est un isomorphisme. □

3.4.3 Changement de complexe

Le complexe Λ_s est un complexe de $\mathcal{O}[T_s \rtimes \langle F_s \rangle]$-modules à droite. L'action de ω_s n'étant pas nulle, ce n'est pas un complexe de $\mathcal{O} \otimes \mathcal{H}_s$-modules. On va donc le transformer, suivant la méthode de Keller ([Ke3, 8.3.1]) :

Le complexe $\mathcal{B} = \mathcal{E}nd_A(\Lambda_s)$ a une structure d'algèbre différentielle graduée (DG-algèbre). On considère sa sous-DG-algèbre $\mathcal{B}'$ définie par le complexe

$$\cdots \to \mathcal{B}^{-2} \to \mathcal{B}^{-1} \to Z^0(\mathcal{B}) \to 0 \to \cdots .$$

On note dorénavant $B = \mathrm{End}_{\mathcal{H}^b(A)}(\Lambda_s) = H^0(\mathcal{B})$. Comme $Z^0(\mathcal{B}) = \mathrm{End}_{\mathcal{C}^b(A)}(\Lambda_s)$, on a une surjection $\pi : \mathcal{B}' \twoheadrightarrow B$, qui fait de B un $\mathcal{B}'$-DG-module. Les morphismes de complexes $\mathcal{B}' \hookrightarrow \mathcal{B}$ et $\mathcal{B}' \twoheadrightarrow B$ sont des quasi-isomorphismes car pour tout entier non nul i on a

$$H^i(\mathcal{B}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}^b(A)}(\Lambda_s, \Lambda_s[i]) = 0.$$

Le complexe Λ_s est un $\mathcal{B}$-DG-module à droite, donc par restriction un $\mathcal{B}'$-DG-module à droite. Soit $p : P_{\Lambda_s} \twoheadrightarrow \Lambda_s$ une de ses résolutions *homotopiquement projectives* en tant que $A \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{B}'^{op}$-DG-module, *cf* [Ke3, 8.2.4]. On définit le complexe de (A, B)-bimodules Λ' par

$$\Lambda' = P_{\Lambda_s} \otimes_{\mathcal{B}'} B^{op}.$$

La construction de P_{Λ_s} donnée dans [Ke3, 8.4] montre que P_{Λ_s} peut être choisi borné à droite, à composantes $A \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{B}'^{op}$-projectives, on le choisit

donc ainsi. En conséquence Λ' est borné à droite, à composantes $A \otimes_{\mathcal{O}} B^{op}$-projectives : en effet, P_{Λ_s} est construit à partir du module $A \otimes \mathcal{B}'^{op}$ par dévissage, *cf* [Ke3, 8.1.3], donc il suffit de vérifier que $(A \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{B}'^{op}) \otimes_{\mathcal{B}'} B^{op}$ est à composantes projectives, ce qui est évident car

$$(A \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{B}'^{op}) \otimes_{\mathcal{B}'} B^{op} = A \otimes_{\mathcal{O}} B^{op}.$$

Comme Λ_s est borné à composantes A-projectives, Λ_s est homotopiquement projectif sur A, donc le quasi-isomorphisme p est inversible dans la catégorie $\mathcal{H}(A)$ et il existe un quasi-isomorphisme A-linéaire $q : \Lambda_s \to \Lambda'$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_s & \xrightarrow{\quad q \quad} & \Lambda' \\ & {\scriptstyle p}\nwarrow \quad \nearrow{\scriptstyle 1\otimes\pi} & \\ & P_{\Lambda_s} & \end{array}$$

commute dans $\mathcal{H}(A)$. De plus comme p et π sont $\mathcal{B}'$-linéaires alors q est "B-linéaire à homotopie près", *i.e.,* pour tout $b \in B$ on a $q \circ b = r(b) \circ q$ dans $\mathcal{H}(A)$, où $r(b)$ est la multiplication à droite par b. En d'autres termes, si on considère le morphisme d'algèbres

$$r : B \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathcal{H}(A)}(\Lambda')$$

défini par la multiplication à droite, alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{End}_{\mathcal{H}^b(A)}(\Lambda_s) & \xrightarrow{\qquad r \qquad} & \mathrm{End}_{\mathcal{H}(A)}(\Lambda') \\ & {\scriptstyle q_*}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle q^*} & \\ & \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(A)}(\Lambda_s,\, \Lambda') & \end{array}$$

est commutatif. De plus, on a les équivalences

$$\mathrm{End}_{\mathcal{H}^b(A)}(\Lambda_s) \simeq \mathrm{End}_{\mathcal{D}^b(A)}(\Lambda_s) \simeq \mathrm{End}_{\mathcal{D}(A)}(\Lambda') \simeq \mathrm{End}_{\mathcal{H}(A)}(\Lambda')$$

et donc $\mathrm{End}_{\mathcal{H}(A)}(\Lambda') \simeq B$.

On a une injection de DG-algèbres $\mathcal{O}T_s \hookrightarrow \mathcal{B}'$, car $\mathcal{B}'^0 = \mathrm{End}_{\mathcal{C}^b(A)}(\Lambda_s)$. Comme p et π sont $\mathcal{B}'$-linéaires, alors p et π sont $\mathcal{O}T_s$-linéaires, et Λ_s et Λ' sont quasi-isomorphes en tant que complexes de $\mathcal{O}T_s$-modules à droite.

On sait que l'homologie de Λ_s, donc de Λ', est concentrée en degrés 1 et 2. On pose alors

$$X = \tau_{\geq 1}\Lambda'.$$

C'est un complexe borné de $A \otimes B^{op}$-modules. Par application du lemme 3.2.1, comme Λ_s est borné à composantes projectives sur A et comme Λ_s et Λ' sont quasi-isomorphes sur A, alors X est à composantes projectives sur A.

De même, X est à composantes projectives sur B^{op}. En fait les composantes de X de degré supérieur ou égal à 2 sont projectives sur $A \otimes B^{op}$, et sa composante de degré 1 est projective sur A et sur B^{op}.

Le lemme 3.2.1 nous dit aussi que Λ' et X sont isomorphes dans la catégorie $\mathcal{H}(A)$, donc on a $\mathrm{End}_{\mathcal{H}^b(A)}(X) \simeq B$.

En résumé, on a remplacé Λ_s par un complexe de (A, B)-bimodules X, où $B = \mathrm{End}_{\mathcal{H}^b(A)}(\Lambda_s)$. Ce complexe est parfait en tant que complexe de A-modules à gauche et en tant que complexe de B-modules à droite, et on a $\mathrm{End}_{\mathcal{H}^b(A)}(X) \simeq B$.

3.4.4 Conclusion.

Soit $B = \mathcal{O} \otimes \mathcal{H}_s$. On a construit un complexe de (A, B)-bimodules X, à composantes projectives à gauche et à droite, tel que $\mathrm{End}_{\mathcal{H}^b(A)}(X) \simeq B$.

On a $\mathrm{Ann}_{\mathcal{H}^b(A)}(X) = 0$, par définition de A, *cf* notation 3.4.7.

Le corollaire 3.2.23 implique donc que $\mathrm{End}_{\mathcal{H}^b(B^{op})}(X) \simeq A$, et X réalise donc une équivalence entre les catégories $\mathcal{H}^b(A)$ et $\mathcal{H}^b(B)$.

Supposons maintenant que $\ell \,|\, q+1$, $\ell \neq 2$. On a alors $B \simeq \mathcal{O}H_s$, où H_s est le normalisateur d'un ℓ-sous-groupe de Sylow de G.

L'équivalence induite par X est splendide, car chaque composante de X est facteur direct d'un module $A \otimes B^{op}$-projectifs. Finalement on a la propriété :

Propriété 3.4.14. *Si $\ell \neq 2$ et $\ell \,|\, q+1$, alors le complexe X réalise une équivalence splendide entre les algèbres A et $\mathcal{O}H_s$, où A est la somme des blocs de $\mathcal{O}G$ de défaut maximal.*

On peut ajouter que cette équivalence envoie le bloc principal de A sur le bloc principal de B. En effet, on connaît le caractère de Λ_s –donc celui de X– en tant que complexe de $A \otimes \mathcal{O}{T_s}^{op}$-modules, *cf* 3.5 et 3.6 page 91. le produit du caractère trivial de G par celui de T_s y figure, donc l'isométrie parfaite induite par X mets en correspondance ces deux caractères. Comme tous deux sont dans le bloc principal de $\mathcal{O}H_s$, alors la restriction de X au bloc principal de $\mathcal{O}G$ réalise une équivalence splendide entre les blocs principaux de $\mathcal{O}G$ et de $\mathcal{O}H_s$.

3.5 Complexes de Deligne-Lusztig des groupes associés

3.5.1 Cas de $\mathrm{SL}_2(q)$

Les méthodes utilisées dans les sections 3.3 et 3.4 s'appliquent aussi bien au groupe $\mathrm{SL}_2(q)$. Nous en donnons les résultats.

Les notations deviennent :

- $\boldsymbol{G} = \mathrm{SL}_2(\mathbb{F})$, l'endomorphisme de Frobenius F est inchangé,
- $G = \boldsymbol{G}^F = \mathrm{SL}_2(q)$,
- le tore $\boldsymbol{T}$ est l'ensemble des matrices diagonales de déterminant 1,
- le groupe de Weyl $W_{\boldsymbol{G}}$ est toujours d'ordre 2,
- les tores sont notés T'_e et T'_s pour ne pas les confondre avec ceux de $\mathrm{GL}_2(q)$,
- les groupes $\boldsymbol{U}$ et U sont toujours les groupes des matrices de la forme $\left(\begin{smallmatrix}1 & *\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$.

Le module $\Lambda_e = \Lambda_e(\mathrm{SL}_2)$ définissant l'induction de Harish-Chandra est défini par $\Lambda_e = \mathcal{O}[G/U]$. Son caractère en tant que $\mathcal{O}[G \times T_e'^{op}]$-module est

$$\varphi_0 \times \theta_{(0,0)} + \varphi'_0 \times \theta_{(0,0)} + (\varphi'_+ + \varphi'_-) \times \theta_{(\frac{q-1}{2}, \frac{q-1}{2})} + \sum_{i=1\ldots\frac{q-1}{2}} \varphi_i \times (\theta_{(i,-i)} + \theta_{(-i,i)}) \quad (3.14)$$

en utilisant les notations de la table B.11 page 198 pour les caractères de $\mathrm{SL}_2(q)$, et les notations de la page 23 pour ceux de T'_e (en le considérant comme sous-groupe de T_e).

On montre de la même façon que dans la section 3.3 que

$$\mathrm{End}_{\mathcal{O}G}(\Lambda_e) = \mathcal{O}[T'_e \rtimes \langle F'_e \rangle]/\langle \omega'_e \rangle \quad \text{avec} \quad \omega'_e = {F'_e}^2 - q\left(\begin{smallmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{smallmatrix}\right) - \sum_{t \in T'_e} tF'_e.$$

Si $\ell \neq 2$ et $\ell \,|\, q-1$, en notant H_e le normalisateur de T'_e dans $\mathrm{SL}_2(q)$, on a un isomorphisme d'algèbres

$$\mathcal{O}H_e \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}[T'_e \rtimes \langle F'_e \rangle]/\langle \omega'_e \rangle$$

obtenu en envoyant l'élément $\left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{smallmatrix}\right)$ de H_e sur

$$\frac{1}{r}F'_e - \frac{1}{q+1}\sum_{t \in T'_e} t - \frac{(r-1)}{r(r+1)(q+1)}\sum_{t \in T'_e} tF'_e$$

où r est une racine de q telle que $r+1$ soit inversible.

Pour étudier le complexe $\Lambda_s = \Lambda_s(\mathrm{SL}_2)$, on utilise les notations suivantes :

- on choisit $\dot{s} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ comme représentant de l'élément non trivial s de $W_{\boldsymbol{G}}$ dans $N_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{T})$,
- soit ρ un élément de $\mathbb{F}_{q^4}$ tel que $\rho^{q+1}(\beta^q - \beta) = 1$. On choisit $\gamma = \gamma_s = \left(\begin{smallmatrix} \rho & -\rho^q \\ \rho\beta^q & -\rho^q\beta \end{smallmatrix}\right)$,
- le tore T'_s est défini par

$$T'_s = \gamma \left\{ \left(\begin{smallmatrix} \beta^{(q-1)n} & 0 \\ 0 & \beta^{(1-q)n} \end{smallmatrix}\right) \mid n = 1 \dots q+1 \right\} \gamma^{-1},$$

- la variété de Deligne-Lusztig $\boldsymbol{Y}_s = \boldsymbol{Y}_s(\mathrm{SL}_2(q))$ est définie par

$$\boldsymbol{Y}_s = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{F}^2 \mid xy^q - x^q y = -1 \right\}.$$

On a toujours des isomorphismes de variétés algébriques

$$\mathcal{L}^{-1}(f(\boldsymbol{U})) \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\rightleftarrows}} \boldsymbol{Y}_s$$

où φ est encore défini par $g \mapsto g\gamma \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, et ψ est cette fois défini par

$$\psi : \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \longmapsto \left(\begin{smallmatrix} x & -x^q \\ y & -y^q \end{smallmatrix}\right) \gamma^{-1}.$$

On appelle F'_s l'endomorphisme de Frobenius tordu, qui agit sur $\boldsymbol{Y}_s$.

Les actions sur $\boldsymbol{Y}_s$ sont similaires à celles du cas de $\mathrm{GL}_2(q)$: l'action à droite de G est donnée par la multiplication à gauche, celle de F'_s est donnée par $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \mapsto \left(\begin{smallmatrix} x^q \\ y^q \end{smallmatrix}\right)$ et un élément $t = {}^{\gamma}\left(\begin{smallmatrix} \beta^{(q-1)n} & 0 \\ 0 & \beta^{(1-q)n} \end{smallmatrix}\right)$ de T'_s agit par $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right).t = \beta^{(q-1)n} \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$.

L'homologie $H^*_c(\boldsymbol{Y}_s, \mathcal{O})$ est concentrée en degrés 1 et 2. On note χ_i le caractère du $\mathcal{O}[G \times T'^{op}_s]$-module $H^i_c(\boldsymbol{Y}_s, \mathcal{O})$ pour $i = 1, 2$. On a $\chi_2 = \varphi_0 \times \omega^0$ et

$$\chi_1 = \varphi'_0 \times \omega^0 + \sum_{i=1 \dots \frac{q-1}{2}} \psi_i \times (\omega^i + \omega^{-i}) + (\psi'_+ + \psi'_-) \times \omega^{\frac{q+1}{2}}$$

(*cf* table B.11 pour les caractères de $\mathrm{SL}_2(q)$ et page 23 pour ceux de T'_s, vu comme sous-groupe de T_s).

On décompose le $K[G \times T'^{op}_s]$ module $H^1_c(\boldsymbol{Y}_s, K)$ en somme directe $V_S \oplus (\oplus_i W_i) \oplus V_N$, où V_S est le module de caractère $\varphi'_0 \times \omega^0$, W_i le module de caractère $\psi_i \times (\omega^i + \omega^{-i})$ et V_N le module de caractère $(\psi'_+ + \psi'_-) \times \omega^{\frac{q+1}{2}}$.

L'endomorphisme F'_s agit comme la multiplication par q sur $H^2_c(\boldsymbol{Y}_s, \mathcal{O})$, comme l'identité sur V_S, comme la matrice $\sqrt{(-1)^{i+1}q}\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$ sur chaque W_i, et comme la matrice $\pm\sqrt{(-1)^{\frac{q-1}{2}}q}\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&-1\end{smallmatrix}\right)$ sur V_N.

On obtient que $F_s'^2$ agit comme l'élément

$$-q\left(\begin{smallmatrix}-1&0\\0&-1\end{smallmatrix}\right)+\sum_{t\in T'_s} tF'_s$$

sur l'homologie $H^*_c(\boldsymbol{Y}_s, K)$. Ceci va nous permettre de vérifier la propriété 3.4.3.

On a un isomorphisme de variétés algébriques

$$\varphi : \mathrm{GL}_2(q)\times_{\mathrm{SL}_2(q)} \boldsymbol{Y}_s(\mathrm{SL}_2(q)) \xrightarrow{\sim} \boldsymbol{Y}_s(\mathrm{GL}_2(q))$$

défini ainsi : tout élément de $\mathrm{GL}_2(q)\times_{\mathrm{SL}_2(q)}\boldsymbol{Y}_s(\mathrm{SL}_2(q))$ s'écrit de façon unique comme la classe d'un élément $\left(\left(\begin{smallmatrix}\lambda&0\\0&1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\right)$ de $\mathrm{GL}_2(q)\times \boldsymbol{Y}_s(\mathrm{SL}_2(q))$. On pose

$$\varphi\left(\overline{\left(\left(\begin{smallmatrix}\lambda&0\\0&1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\right)}\right) = \tau^q\left(\begin{smallmatrix}\lambda x\\y\end{smallmatrix}\right),$$

où τ une racine carrée de β (c'est un élément de $\mathbb{F}^\times_{q^4}$). On vérifie que φ est $[\mathrm{GL}_2(q)\times T'^{op}_s]$-linéaire. Sa réciproque est donnée par

$$\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\mapsto\left(\overline{\left(\left(\begin{smallmatrix}\lambda&0\\0&1\end{smallmatrix}\right), \tau^{-q}\left(\begin{smallmatrix}\lambda^{-1}x\\y\end{smallmatrix}\right)\right)}\right)$$

avec $\lambda=\mu^{-1}(xy^q-x^qy)$ et $\mu=\tau^{q+1}$ (on retrouve la racine de -1 d'ordre $(q-1)$ utilisée dans la section 1.5.2).

Soit $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)$ un élément de $\boldsymbol{Y}_s(\mathrm{GL}_2(q))$ et soit F_1 l'action induite par l'endomorphisme F'_s sur $\boldsymbol{Y}_s(\mathrm{GL}_2(q))$. On calcule que

$$F_1 : \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right).\mapsto \beta^{\frac{q(q-1)}{2}}\left(\begin{smallmatrix}x^q\\y^q\end{smallmatrix}\right)$$

ce qui montre que $F_s = t_1F_1$, où

$$t_1=\gamma\left(\begin{smallmatrix}\beta^{q(q-1)}&0\\0&\beta^{q(1-q)}\end{smallmatrix}\right)\gamma^{-1}.$$

Or on a

$$F_1^2=-q\left(\begin{smallmatrix}-1&0\\0&-1\end{smallmatrix}\right)+\sum_{\substack{t\in T_s\\ \det t=1}} tF_1$$

car cette égalité est vérifiée par F'_s. Comme t_1 est de déterminant -1 et comme $t_1^{q+1} = -1$, on a

$$F_s^2 = -q + \sum_{\substack{t \in T_s \\ \det t = -1}} tF_s.$$

ce qui vérifie la propriété 3.4.3.

Si $\ell \neq 2$ et $\ell \,|\, q+1$, en notant H_s le normalisateur de T'_s dans $\mathrm{SL}_2(q)$, on a un isomorphisme d'algèbres

$$\mathcal{O}H_s \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}[T'_s \rtimes \langle F'_s \rangle]/\langle \omega'_s \rangle$$

obtenu en envoyant l'élément $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ de H_s sur

$$\frac{1}{r}F'_s + \frac{1}{q-1}\sum_{t \in T'_s} t - \frac{(r-1)}{r(r+1)(q-1)}\sum_{t \in T'_s} tF'_s$$

où r est une racine de $-q$ telle que $r+1$ soit inversible.

3.5.2 Quotients des complexes Λ_e et Λ_s

On note dorénavant :

- $\Lambda_e(\mathrm{GL}_2)$ et $\Lambda_s(\mathrm{GL}_2)$ les complexes Λ_e et Λ_s obtenus dans les sections 3.3 et 3.4.
- $\Lambda_e(\mathrm{SL}_2)$ et $\Lambda_s(\mathrm{SL}_2)$ les complexes définis dans la section précédente.

Soit G l'un des deux groupes $\mathrm{GL}_2(q)$ et $\mathrm{SL}_2(q)$, Z le centre de G, et $\overline{G} = G/Z$. Pour $w = e$, s on note T_e et T_s respectivement le tore déployé et le tore de Coxeter de G, puis $\overline{T}_e$ et $\overline{T}_s$ leurs images par la projection canonique $G \twoheadrightarrow \overline{G}$.

On définit le complexe

$$\Lambda_w(\overline{G}) = \mathcal{O}\overline{G} \otimes_{\mathcal{O}G} \Lambda_w(G).$$

Les composantes des complexes $\Lambda_w(G)$ sont des $\mathcal{O}[G \times {T_w}^{op}]$-modules de permutations. Nous savons que le sous-groupe ΔZ de $G \times {T_w}^{op}$ agit trivialement sur la variété $\boldsymbol{Y}_w$. En appliquant [Ro5, théorème 2.28] on obtient que ΔZ agit trivialement sur le complexe $\Lambda_w(G)$. Ceci implique que l'on a alors des isomorphismes de complexes de $\mathcal{O}[G \times {T_w}^{op}]$-modules

$$\mathcal{O}\overline{G} \otimes_{\mathcal{O}G} \Lambda_w(G) \simeq \Lambda_w(G) \otimes_{\mathcal{O}T_w} \mathcal{O}\overline{T}_w.$$

Soit Λ' un représentant minimal de $\Lambda_s(G)$ dans la catégorie des complexes de $\mathcal{O}G$-modules. Les complexes $\mathcal{O}\overline{G} \otimes_{\mathcal{O}G} \Lambda_w(G)$ et $\mathcal{O}\overline{G} \otimes_{\mathcal{O}G} \Lambda'$ sont homotopes, donc leurs homologies sont isomorphes en tant que $\mathcal{O}G$-modules gradués. Or nous savons que Λ' est concentré en degrés 1 et 2. Ceci montre que l'homologie de $\Lambda_s(\overline{G})$ est concentrée en degrés 1 et 2.

Nous savons donc que

- $\Lambda_e(\overline{G})$ est un $\mathcal{O}[\overline{G} \times \overline{T}_e{}^{op}]$-module projectif à gauche et à droite ;
- $\Lambda_s(\overline{G})$ est un complexe borné de $\mathcal{O}[\overline{G} \times \overline{T}_s{}^{op}]$-modules projectifs à gauche et à droite, dont l'homologie est concentrée en degrés 1 et 2.

Propriété 3.5.1. *Les complexes $\Lambda_s(\overline{G})$ vérifient la propriété de disjonction. On a un isomorphisme d'algèbres*

$$\mathrm{End}_{\mathcal{H}^b(\mathcal{O}\overline{G})}(\Lambda_s(\overline{G})) \simeq \mathcal{O} \otimes_{\mathcal{O}Z} \mathrm{End}_{\mathcal{H}^b(\mathcal{O}G)}(\Lambda_s(G)).$$

Démonstration : On note $\Lambda = \Lambda_s(G)$, $\overline{\Lambda} = \Lambda_s(\overline{G})$, $T = T_s$ et $\overline{T} = \overline{T}_s$. Nous procédons en deux étapes, en faisant d'abord le quotient par le ℓ-centre, puis le quotient par le ℓ'-centre.

Soit Z_ℓ le ℓ-centre de G. Nous savons que les composantes de Λ sont des $\mathcal{O}[G \times T^{op}]$-modules de ℓ-permutation, et que les vortex de leurs facteurs directs indécomposables contiennent tous le sous-groupe ΔZ_ℓ. On peut donc appliquer la propriété 3.2.13. On a un isomorphisme de complexes de $\mathcal{O}[G \times T^{op}]$-modules et d'algèbres différentielles graduées

$$\mathcal{O}[T/Z_\ell] \otimes_{\mathcal{O}T} \mathcal{E}nd_{\mathcal{O}G}(\Lambda) \simeq \mathcal{E}nd_{\mathcal{O}[G/Z_\ell]}(\mathcal{O}[G/Z_\ell] \otimes_{\mathcal{O}G} \Lambda).$$

Soit $\Lambda' = \mathcal{O}[G/Z_\ell] \otimes_{\mathcal{O}G} \Lambda$ et $Z_{\ell'}$ le ℓ'-centre de G. On a donc $\overline{\Lambda} = \mathcal{O}\overline{G} \otimes_{\mathcal{O}[G/Z_\ell]} \Lambda'$.

Soit e l'idempotent central de $\mathcal{O}[G/Z_\ell]$ associé à l'image de $Z_{\ell'}$ dans $\mathcal{O}[G/Z_\ell]$. Le complexe $\mathcal{O}[G/Z_\ell Z_{\ell'}] \otimes_{\mathcal{O}[G/Z_\ell]} \Lambda'$ est alors isomorphe au complexe $e.\Lambda'$, qui est un facteur direct de Λ'. De plus, comme ΔZ agit trivialement sur Λ' et comme e est un idempotent central de $\mathcal{O}[T/Z_\ell]$, on a $e.\Lambda' = \Lambda'.e$, et $\mathcal{E}nd_{\mathcal{O}[G/Z_\ell]}(\Lambda'.e) = e.\mathcal{E}nd_{\mathcal{O}[G/Z_\ell]}(\Lambda').e = e.\mathcal{E}nd_{\mathcal{O}[G/Z_\ell]}(\Lambda')$. On a donc un isomorphisme

$$\mathcal{E}nd_{\mathcal{O}[G/Z]}(\mathcal{O}[G/Z] \otimes_{\mathcal{O}[G/Z_\ell]} \Lambda') \simeq \mathcal{O}[T/Z] \otimes_{\mathcal{O}[T/Z_\ell]} \mathcal{E}nd_{\mathcal{O}[G/Z_\ell]}(\Lambda'),$$

ce qui donne l'isomorphisme

$$\mathcal{E}nd_{\mathcal{O}\overline{G}}(\overline{\Lambda}) \simeq \mathcal{O}\overline{T} \otimes_{\mathcal{O}T} \mathcal{E}nd_{\mathcal{O}G}(\Lambda)$$

qui est compatible avec les structures multiplicatives.

Rappelons que pour tout groupe H contenant Z et tout $\mathcal{O}H$-module M, on a un isomorphisme de $\mathcal{O}H$-modules

$$\mathcal{O}\overline{H} \otimes_{\mathcal{O}H} M \simeq \mathcal{O} \otimes_{\mathcal{O}Z} M$$

en posant que l'action de H sur $\mathcal{O}\otimes_{\mathcal{O}Z} M$ est donnée par $h.(\lambda\otimes x) = \lambda\otimes(h.x)$ pour $h \in H$, $\lambda \in \mathcal{O}$ et $x \in M$.

On a donc un isomorphisme de $\mathcal{O}[T \times T^{op}]$-modules

$$\mathcal{O}\overline{T} \otimes_{\mathcal{O}T} \mathcal{E}nd_{\mathcal{O}G}(\Lambda) \simeq \mathcal{O} \otimes_{\mathcal{O}Z} \mathcal{E}nd_{\mathcal{O}G}(\Lambda).$$

Comme les composantes de Λ sont projectives à gauche sur $\mathcal{O}G$ et à droite sur $\mathcal{O}T$ alors les composantes de $\mathcal{E}nd_{\mathcal{O}G}(\Lambda)$ sont projectives en tant que $\mathcal{O}T$-modules à gauche. Elles sont donc libres sur $\mathcal{O}Z$. Nous savons que l'homologie de $\mathcal{E}nd_{\mathcal{O}G}(\Lambda)$ est concentré en degré 0, isomorphe à

$$\mathcal{O}[T \rtimes \langle\, F_s \,\rangle]/\langle\, \omega_s \,\rangle$$

en tant qu'algèbre. Elle est donc isomorphe à $(\mathcal{O}T)^2$ en tant que $\mathcal{O}T$-module à gauche, ce qui montre qu'elle est également libre sur $\mathcal{O}Z$. Nous pouvons donc appliquer le lemme 3.2.8. On obtient

$$H^*(\mathcal{O} \otimes_{\mathcal{O}Z} \mathcal{E}nd_{\mathcal{O}G}(\Lambda)) \simeq \mathcal{O} \otimes_{\mathcal{O}Z} H^*(\mathcal{E}nd_{\mathcal{O}G}(\Lambda)).$$

Ceci montre que l'homologie du complexe $\mathcal{E}nd_{\mathcal{O}\overline{G}}(\overline{\Lambda})$ est concentrée en degré 0, donc que le complexe $\overline{\Lambda}$ vérifie la propriété de disjonction. En degré 0 on obtient l'isomorphisme

$$\mathrm{End}_{\mathcal{H}^b(\mathcal{O}\overline{G})}(\overline{\Lambda}) \simeq \mathcal{O} \otimes_{\mathcal{O}Z} \mathrm{End}_{\mathcal{H}^b(\mathcal{O}G)}(\Lambda)$$

qui hérite de la compatibilité aux structures multiplicatives. C'est donc un isomorphisme d'algèbres, ce qui démontre la propriété. □

On montre de la même façon que l'on a un isomorphisme d'algèbres

$$\mathrm{End}_{\mathcal{O}\overline{G}}(\Lambda_e(\overline{G})) \simeq \mathcal{O} \otimes_{\mathcal{O}Z} \mathrm{End}_{\mathcal{O}G}(\Lambda_e(G)).$$

On note maintenant T'_e et T'_s les tores de $\mathrm{SL}_2(q)$, et toujours T_e et T_s les tores de $\mathrm{GL}_2(q)$. On rappelle que l'on a les isomorphismes

$$\begin{aligned}
\mathrm{End}_{\mathcal{O}\mathrm{GL}_2}(\Lambda_e(\mathrm{GL}_2)) &\simeq \mathcal{O}[T_e \rtimes \langle F_e \rangle]/\langle \omega_e \rangle \\
&\qquad \text{avec} \quad \omega_e = F_e^2 - q - \sum_{\substack{t\in T_e \\ \det t=-1}} tF_e, \\
\mathrm{End}_{\mathcal{H}^b(\mathcal{O}\mathrm{GL}_2)}(\Lambda_s(\mathrm{GL}_2)) &\simeq \mathcal{O}[T_s \rtimes \langle F_s \rangle]/\langle \omega_s \rangle \\
&\qquad \text{avec} \quad \omega_s = F_s^2 + q - \sum_{\substack{t\in T_s \\ \det t=-1}} tF_s, \\
\mathrm{End}_{\mathcal{O}\mathrm{SL}_2}(\Lambda_e(\mathrm{SL}_2)) &\simeq \mathcal{O}[T'_e \rtimes \langle F'_e \rangle]/\langle \omega'_e \rangle \\
&\qquad \text{avec} \quad \omega'_e = F_e'^2 - q\left(\begin{smallmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{smallmatrix}\right) - \sum_{t\in T'_e} tF'_e, \\
\mathrm{End}_{\mathcal{H}^b(\mathcal{O}\mathrm{SL}_2)}(\Lambda_s(\mathrm{SL}_2)) &\simeq \mathcal{O}[T'_s \rtimes \langle F'_s \rangle]/\langle \omega'_s \rangle \\
&\qquad \text{avec} \quad \omega'_s = F_s'^2 + q\left(\begin{smallmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{smallmatrix}\right) - \sum_{t\in T'_s} tF'_s.
\end{aligned}$$

On obtient donc l'isomorphisme suivant, pour $G \in \{\mathrm{GL}_2(q),\ \mathrm{SL}_2(q)\}$ et $w \in \{e,\ s\}$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{End}_{\mathcal{H}^b(\mathcal{O}\overline{G})}(\Lambda_w(\overline{G})) &\simeq \mathcal{O}[\overline{T}_w \rtimes \langle \overline{F}_w \rangle]/\langle \overline{\omega}_w \rangle \\
&\qquad \text{avec} \quad \overline{\omega}_w = \overline{F}_w^2 + \varepsilon q - 2 \sum_{\substack{t\in \overline{T}_w \\ \det t=\eta}} t\overline{F}_w.
\end{aligned}$$

où

- $\varepsilon = -1$ si $w = e$ et $\varepsilon = 1$ si $w = s$,
- $\eta = -1$ si $G = \mathrm{GL}_2(q)$ et $\eta = 1$ si $G = \mathrm{SL}_2(q)$,
- l'action de $\overline{F}_w$ sur $\overline{T}_w$ est donnée par $t\overline{F}_w = \overline{F}_w t^{-1}$.

La propriété 3.5.1 est aussi valable en remplaçant $\mathcal{O}$ par k. Si $\ell = 2$ on obtient

$$\begin{aligned}
\mathrm{End}_{k\mathrm{PGL}_2}(k\Lambda_e(\mathrm{PGL}_2)) &\simeq kD_{2(q-1)}, \\
\mathrm{End}_{\mathcal{H}^b(k\mathrm{PGL}_2)}(k\Lambda_s(\mathrm{PGL}_2)) &\simeq kD_{2(q+1)}, \\
\mathrm{End}_{k\mathrm{PSL}_2}(k\Lambda_e(\mathrm{PSL}_2)) &\simeq kD_{q-1}, \\
\mathrm{End}_{\mathcal{H}^b(k\mathrm{PSL}_2)}(k\Lambda_s(\mathrm{PSL}_2)) &\simeq kD_{q+1}.
\end{aligned}$$

3.5.3 Restriction au bloc principal

On suppose toujours que $\ell = 2$. Si G est l'un des quatre groupes $\mathrm{GL}_2(q)$, $\mathrm{SL}_2(q)$, $\mathrm{PGL}_2(q)$ et $\mathrm{PSL}_2(q)$, on note $A(G)$ le 2-bloc principal de kG. En

conséquence du lemme 3.2.15 on a

$$A(\mathrm{PGL}_2) = \mathcal{O}\mathrm{PGL}_2 \otimes_{\mathcal{O}\mathrm{GL}_2} A(\mathrm{GL}_2) \quad \text{et} \quad A(\mathrm{PSL}_2) = \mathcal{O}\mathrm{PSL}_2 \otimes_{\mathcal{O}\mathrm{SL}_2} A(\mathrm{SL}_2).$$

Pour $w = e$, s on note

$$X_w(G) = A \otimes_{\mathcal{O}G} \Lambda_w(G).$$

Les $A(G)$-modules $X_e(G)$ sont projectifs, les complexes de $A(G)$-modules $X_s(G)$ sont concentrés en degré 1 et 2, à composantes projectives.

Propriété 3.5.2. *Soit G l'un des quatre groupes $\mathrm{GL}_2(q)$, $\mathrm{SL}_2(q)\}$, $\mathrm{PGL}_2(q)$ et $\mathrm{PSL}_2(q)$, soit $w \in \{e, s\}$. Soit T' la $2'$-partie du tore T_w de G. On a un isomorphisme d'algèbres*

$$\mathrm{End}_{\mathcal{H}^b(A(G))}(X_w(G)) \simeq \mathcal{O} \otimes_{\mathcal{O}T'} \mathrm{End}_{\mathcal{H}^b(\mathcal{O}G)}(\Lambda_w(G)).$$

Démonstration : Pour tout groupe H on note b_H l'idempotent central de $\mathcal{O}H$ associé au 2-bloc principal de H et $\overline{H}$ le quotient $H/Z(H)$. Nous savons donc grâce au lemme 3.2.15 que $b_{\overline{H}}$ est l'image de b_H par la projection canonique $\mathcal{O}H \twoheadrightarrow \mathcal{O}\overline{H}$.

Nous avons vu que pour $G = \mathrm{GL}_2(q)$ et $w = e$, s, on a $b_G.\Lambda_w = \Lambda_w.b_{T_w}$ (*cf* remarques 3.3.6 et 3.4.1). Nous connaissons les caractères de $\Lambda_e(\mathrm{SL}_2(q))$ et de $H^*(\Lambda_s(\mathrm{SL}_2(q)))$ (*cf* section 3.5.1), ce qui nous permet de constater que ce résultat est aussi vrai pour $G = \mathrm{SL}_2(q)$. Ceci implique que pour $G = \mathrm{GL}_2(q)$ et $\mathrm{SL}_2(q)$ on a

$$b_{\overline{G}}.\overline{\Lambda}_w = \overline{\Lambda}.b_{\overline{T}_w}.$$

Soit maintenant G l'un des quatre groupes $\mathrm{GL}_2(q)$, $\mathrm{SL}_2(q)\}$, $\mathrm{PGL}_2(q)$ et $\mathrm{PSL}_2(q)$, on note $A = A(G)$, $T = T_w$ et $\Lambda = \Lambda_w(G)$ et $X = X_w(G)$. On a des isomorphismes d'algèbres différentielles graduées

$$\mathcal{E}nd_{\mathcal{O}G}(b_G.\Lambda) \simeq \mathcal{E}nd_{\mathcal{O}G}(\Lambda.b_T) \simeq b_T.\mathcal{E}nd_{\mathcal{O}G}(\Lambda).b_T$$

donc finalement

$$\mathcal{E}nd_A(X) \simeq b_T.\mathcal{E}nd_{\mathcal{O}G}(\Lambda).$$

Soit $\mathcal{E} = \mathcal{E}nd_{\mathcal{O}G}(\Lambda)$, et $1_{\mathcal{E}}$ son unité. Nous savons donc que $b_T.1_{\mathcal{E}}$ est un idempotent central de $\mathcal{E}$. En conséquence $b_T.1_{\mathcal{E}}$ est un élément homogène de degré 0 du noyau de la différentielle de $\mathcal{E}$. On a donc un isomorphisme d'algèbres

$$H^0(b_T.\mathcal{E}) \simeq \overline{b}_T.H^0(\mathcal{E})$$

où $\overline{b}_T$ désigne l'image de $b_T.1_{\mathcal{E}}$ dans l'homologie de $\mathcal{E}$, donc $\overline{b}_T = b_T.1_H$ où 1_H est l'unité de $H^0(\mathcal{E})$. Nous avons donc un isomorphisme d'algèbres

$$\mathrm{End}_{\mathcal{H}^b(A)}(X) \simeq b_T \mathrm{End}_{\mathcal{H}^b(\mathcal{O}G)}(\Lambda).$$

Comme T est commutatif, son bloc principal est l'idempotent associé à sa ℓ'-partie T' :

$$b_T = \frac{1}{|T'|} \sum_{t \in T'} t.$$

Nous avons donc un isomorphisme d'algèbres

$$\mathrm{End}_{\mathcal{H}^b(A)}(X) \simeq \mathcal{O} \otimes_{\mathcal{O}T'} \mathrm{End}_{\mathcal{H}^b(\mathcal{O}G)}(\Lambda),$$

ce qui montre la propriété. □

Le corollaire suivant est immédiat (on convient que $D_2 = C_2$).

Corollaire 3.5.3. *On a les isomorphismes*

$$\begin{aligned}
\mathrm{End}_{k\mathrm{PGL}_2(q)}(kX_e(\mathrm{PGL}_2(q))) &\simeq kD_{2^{a+1}}, \\
\mathrm{End}_{\mathcal{H}^b(k\mathrm{PGL}_2(q))}(kX_s(\mathrm{PGL}_2(q))) &\simeq kD_{2^{b+1}}, \\
\mathrm{End}_{k\mathrm{PSL}_2(q)}(kX_e(\mathrm{PSL}_2(q))) &\simeq kD_{2^a}, \\
\mathrm{End}_{\mathcal{H}^b(k\mathrm{PSL}_2(q))}(kX_s(\mathrm{PSL}_2(q))) &\simeq kD_{2^b}.
\end{aligned}$$

Nous allons maintenant expliciter le module $kX_e(G)$ et les composantes du complexe $kX_s(G)$.

Nous savons que le bloc principal de $k\mathrm{GL}_2(q)$ a deux classes d'isomorphismes de modules simples (*cf* section B.4). On note ρ_0 le caractère modulaire trivial, ρ_1 l'autre caractère modulaire irréductible, puis P_0 et P_1 des enveloppes projectives de modules simples ayant pour caractère ρ_0 et ρ_1 respectivement. Le caractère du $\mathcal{O}G$-module $X_e(\mathrm{GL}_2)$ est

$$\sum_{\lambda=1\ldots 2^a} (\varphi_{\lambda u} + \varphi'_{\lambda u}) + 2 \sum_{\substack{(\lambda,\,\mu)=1\ldots 2^a \\ \lambda<\mu}} \varphi_{(\lambda u,\,\mu u)}$$

donc en utilisant la matrice de décomposition on obtient le caractère modulaire de $kX_e(\mathrm{GL}_2)$:

$$2^{2a+1}\rho_0 + 2^{2a}\rho_1.$$

En conséquence, en utilisant la matrice de Cartan et le fait que kX_e est projectif, on a $kX_e \simeq P_0$.

On considère le complexe de $\mathcal{O}\mathrm{GL}_2(q)$-modules X_s comme un représentant minimal de sa classe d'homotopie, donc comme un complexe $X_s^1 \to X_s^2$

de modules projectifs concentré en degrés 1 et 2. Le caractère du $\mathcal{O}\mathrm{GL}_2(q)$-modules $H^2(X_s)$ est

$$\sum_{\lambda=1\ldots 2^a} \varphi_{\lambda u}$$

Comme les composantes de X_s sont libres sur $\mathcal{O}$ on a $H^2(k\otimes_{\mathcal{O}} X_s) = k\otimes_{\mathcal{O}} H^2(X_s)$, donc le caractère modulaire du $k\mathrm{GL}_2(q)$-module $H^2(kX_s)$ est $2^a\rho_0$. En conséquence kX_s^2 est une somme directe de copies de P_0. On calcule que le caractère modulaire du $k\mathrm{GL}_2(q)$-module $H^1(kX_s)$ est

$$2^a\rho_0 + 2^{a+b}\rho_1$$

puis que le complexe kX_s est de la forme

$$P_0^n \oplus P_1^2 \longrightarrow P_0^{n+1}.$$

Mais nous savons que le complexe kX_s vérifie la propriété de disjonction (propriété 3.4.6), ce qui implique qu'aucun sous-quotient irréductible de $H^2(kX_s)$ n'est inclus dans la socle de $H^1(kX_s)$, donc la composante P_0^n de X_s^1 est dans le noyau de la différentielle. Par minimalité du complexe kX_s, on a $n = 0$. Nous en déduisons donc que le complexe kX_s est de la forme $P_1^2 \to P_0$.

Le bloc principal de $k\mathrm{PGL}_2(q)$ a aussi deux classes d'isomorphismes de modules projectifs indécomposables, ce sont les images des modules projectifs indécomposables de $\mathrm{GL}_2(q)$ par la déflation $\mathrm{GL}_2(q) \twoheadrightarrow \mathrm{PGL}_2(q)$. On note $\overline{P}_i = \mathcal{O}\mathrm{PGL}_2(q)\otimes_{\mathcal{O}\mathrm{GL}_2} P_i$ pour $i = 0, 1$. Alors $kX_e(\mathrm{PGL}_2)$ est isomorphe au module $\overline{P}_0$, est $kX_s(\mathrm{PGL}_2)$ est isomorphe à un complexe concentré en degrés 1 et 2 de la forme $\overline{P}_1^2 \to \overline{P}_0$.

Les blocs principaux de $k\mathrm{SL}_2(q)$ et $k\mathrm{PSL}_2(q)$ ont trois classes d'isomorphismes de modules projectifs indécomposables. On note P_0, P_+, P_- des représentants de celles-ci pour $k\mathrm{SL}_2(q)$, et $\overline{P}_0$, $\overline{P}_+$, $\overline{P}_-$ leurs images par la déflation $\mathrm{SL}_2(q) \twoheadrightarrow \mathrm{PSL}_2(q)$. En reproduisant la méthode utilisée ci-dessus on montre que les modules $kX_e(\mathrm{SL}_2)$ et $kX_e(\mathrm{PSL}_2)$ sont isomorphes respectivement aux modules P_0 et $\overline{P}_0$, puis que les complexes $kX_s(\mathrm{SL}_2)$ et $kX_s(\mathrm{PSL}_2)$ sont isomorphes à des complexes concentrés en degrés 1 et 2 de la forme repectivement

$$P_+ \oplus P_- \longrightarrow P_0 \qquad \text{et} \qquad \overline{P}_+ \oplus \overline{P}_- \longrightarrow \overline{P}_0.$$

Soit G l'un des quatre groupes $\mathrm{GL}_2(q)$, $\mathrm{SL}_2(q)$, $\mathrm{PGL}_2(q)$ et $\mathrm{PSL}_2(q)$. On note A, X_e, et X_s les objets $A(G)$, $X_e(G)$ et $X_s(G)$.

Propriété 3.5.4. *Le complexe $X_e\oplus X_s$ est générateur de la catégorie dérivée $\mathcal{D}(A)$.*

Démonstration : Soit $\mathcal{U}$ la sous-catégorie triangulée pleine de $\mathcal{D}(A)$ stable par extension, décalages, et facteur direct, contenant $X_e \oplus X_s$. Nous devons montrer que $\mathcal{U} = A\text{-parf}$.

Soit P_0 l'enveloppe projective du A-module trivial. Comme $X_e \simeq P_0$ alors P_0 est objet de $\mathcal{U}$. Tous les autres modules projectifs indécomposables de A sont facteurs direct de X_s^1, la composante de degré 1 de X_s, donc il suffit de montrer que X_s^1 est objet de $\mathcal{U}$.

Nous savons que X_s est de la forme $X_s^1 \longrightarrow X_s^2$ avec $X_s^2 \simeq P_0$. On considère le morphisme f défini par

$$\begin{array}{ccc} X_e[-2] : & 0 & \longrightarrow & P_0 \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1} \\ X_s : & X_s^1 & \xrightarrow[\delta]{} & P_0. \end{array}$$

Comme la source et le but de f sont éléments de $\mathcal{U}$ alors le cône $C(f)$ de f est élément de $\mathcal{U}$. On a des morphismes de complexes

$$\begin{array}{ccc} C(f) : & X_s^1 \oplus P_0 & \xrightarrow{(\delta\ 1)} & P_0 \\ {\scriptstyle p}\downarrow & {\scriptstyle (1\ 0)}\downarrow & & \downarrow \\ X_s^1[-1] : & X_s^1 & \longrightarrow & 0 \\ {\scriptstyle i}\downarrow & {\scriptstyle \binom{1}{-\delta}}\downarrow & & \downarrow \\ C(f) : & X_s^1 \oplus P_0 & \xrightarrow[(\delta\ 1)]{} & P_0 \end{array}$$

tels que $p \circ i = 1$ et $i \circ p$ est homotope à l'identité (l'homotopie est donnée par exemple par la flèche $\binom{0}{1} : P_0 \longrightarrow X_s^1$). Ceci montre que X_s^1 est objet de $\mathcal{U}$. □

3.6 Cas $\ell = 2$, $q \equiv \pm 3 \pmod 8$

3.6.1 Notations

On utilise toujours les notations définies dans le chapitre 1, en particulier dans la section 1.4.1.

On suppose que $\ell = 2$, donc que le corps k est donc de caractéristique 2. On a toujours $G = \mathrm{GL}_2(q)$, et on suppose que q est congru à 3 ou à 5 modulo 8. Soit P' un sous-groupe de Sylow de $\mathrm{SL}_2(q)$, et $H = N_G(P')$ son normalisateur dans G. On a obtenu dans le premier chapitre des isotypies

entre les blocs principaux de kG et de kH, *cf* propriétés 2.4.3 et 2.4.4 ; on va montrer dans cette section qu'elles proviennent d'équivalences splendides entre ces deux blocs.

Soit Z le centre de G. Pour tout sous-ensemble X de G on note $\overline{X}$ l'image de X par la projection canonique $G \twoheadrightarrow G/Z$, ainsi $\overline{G} = \mathrm{PGL}_2(q)$.

On note A le bloc principal de $k\overline{G}$, B celui de $k\overline{H}$.

On utilise [Br5, 6.4], qui généralise le cas où les sous-groupes de Sylow sont d'intersection triviale. Les hypothèses de ce théorème étant précisément avérées par la propriété 1.4.3, on obtient la propriété suivante :

Propriété 3.6.1. *Le foncteur de restriction de A-stab à B-stab est une équivalence de catégories, dont l'inverse est le foncteur induction.*

On sait grâce à la propriété 1.4.5 que $\overline{H}$ est isomorphe au groupe $\mathfrak{S}_4$. On connaît donc la structure des modules sur $k\overline{H}$ grâce à la section B.7 annexe B.

3.6.2 Relèvement des équivalences stables

Nous savons donc que le (B, A)-bimodule ${}_BA_A$ réalise une équivalence stable, ainsi d'après [Li2, théorème 2.1 (i)] il existe une décomposition en (B, A)-bimodules $A = V \oplus P$ où ${}_BP_A$ est projectif, ${}_BV_A$ est indécomposable, et ${}_BV_A$ réalise une équivalence A-stab $\to B$-stab.

Notons que V est projectif à gauche et à droite, et que l'on a une décomposition de (A, A)-bimodules $V^\vee \otimes_B V \simeq A \oplus P'$ où P' est un bimodule projectif.

On note σ_0 et σ_1 les deux caractères modulaires irréductibles de A, noté σ_0 et σ_0' dans les tables B.9 et B.10 pages 194 et 198. Les deux caractères modulaires irréductibles de B sont notés α_0 et α_1, *cf* table B.3 page 206. On note ensuite

- S_0, S_1 des A-modules de caractères σ_0 et σ_1,
- T_0, T_1 des B-modules de caractères α_0 et α_1,
- P_0, P_1 des enveloppes projectives de S_0 et S_1 respectivement,
- Q_0, Q_1 des enveloppes projectives de T_0 et T_1 respectivement.

La structure des modules Q_0 et Q_1 est donnée dans l'annexe B.7.

Propriété 3.6.2. *On a $V \otimes_A S_0 = T_0$ et $V^\vee \otimes_B T_0 = S_0$.*

Démonstration : Le (B, A)-bimodule P est projectif, donc il existe des entiers naturels m_{ij} pour $i, j = 0, 1$ tels que

$$P \simeq \bigoplus_{i,j} (Q_i \otimes_k P_j^\vee)^{m_{ij}}.$$

Comme S_0 et T_0 sont les modules triviaux, on a ${}_BA \otimes_A S_0 = T_0$, donc

$$T_0 = (V \otimes_A S_0) \oplus \bigoplus_i Q_i^{m_{i0}}$$

et $m_{00} = m_{10} = 0$, $V \otimes_A S_0 = T_0$.

En utilisant la décomposition $V^\vee \otimes_B V \simeq A \oplus P'$, on obtient que S_0 est facteur direct de $V^\vee \otimes_B T_0$. Or d'après [Li3, théorème 2.1 (ii)], comme T_0 est simple alors $V^\vee \otimes_B T_0$ est indécomposable. Finalement $V^\vee \otimes_B T_0 = S_0$. □

On utilisera dans la suite le fait qu'il existe des entiers m_0 et m_1 tels que

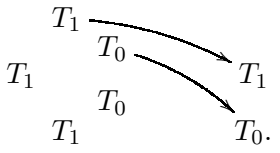
$$P \simeq (Q_0 \otimes_k P_1)^{m_0} \oplus (Q_1 \otimes_k P_1)^{m_1}. \tag{3.15}$$

On a la propriété suivante :

Propriété 3.6.3. *Le B-module $V \otimes_A S_1$ ne contient pas de sous-quotient isomorphe à T_0.*

Démonstration : On a $\mathrm{Hom}_B(V \otimes_A S_1, T_0) \simeq \mathrm{Hom}_A(S_1, V^\vee \otimes_B T_0) = 0$, donc la tête de $V \otimes_A S_1$ est une puissance de T_1. De la même façon, son socle est également une puissance de T_1. Montrons que $V \otimes_A S_1$ ne peut contenir T_0 comme sous-quotient.

Comme S_1 est simple non projectif, $V \otimes_A S_1$ est indécomposable non projectif, toujours d'après [Li3, théorème 2.1 (ii)]. Il est de longueur de Lœwy 3 au maximum, car la longueur de Lœwy de B est 4 d'après l'annexe B.7. Ainsi s'il contient T_0 comme sous-quotient, alors un de ses quotients est une extension indécomposable de T_1 par T_0. Appelons W ce quotient. L'enveloppe projective de W est Q_1, donc W est un quotient de Q_1, ce que l'on schématise comme ceci :



Comme W est également un quotient de $V \otimes_A S_1$, la surjection $Q_1 \twoheadrightarrow W$ se remonte en une application $f : Q_1 \to V \otimes_A S_1$. Celle-ci est telle que $\ker f \subset \Omega(W)$ (en désignant par Ω le foncteur de Heller, c'est-à-dire que

$\Omega(W)$ est le noyau de l'application $Q_1 \twoheadrightarrow W$). On a donc une surjection $Q_1/\ker f \twoheadrightarrow W$.

L'injection $Q_1/\ker f \hookrightarrow V \otimes_A S_1$ se restreint en une injection

$$\mathrm{soc}(Q_1/\ker f) \hookrightarrow \mathrm{soc}(V \otimes_A S_1).$$

Ainsi le socle de $(Q_1/\ker f)$ est isomorphe à une puissance de T_1. On en déduit que $(Q_1/\ker f)$ peut être isomorphe soit à T_1, soit à une extension indécomposable de T_1 par lui-même, soit à Q_1. Or on a une surjection $(Q_1/\ker f) \twoheadrightarrow W$, donc $(Q_1/\ker f)$ doit avoir un sous-quotient isomorphe à T_0, et $(Q_1/\ker f) \cong Q_1$. Mais ceci implique que Q_1 est un sous-module de $V \otimes_A S_1$, et comme B est une algèbre auto-injective, Q_1 est facteur direct de $V \otimes_A S_1$, ce qui est impossible car $V \otimes_A S_1$ est indécomposable non projectif. La propriété est donc démontrée. □

Notons $R(A)$, $R(B)$, $R^p(A)$ et $R^p(B)$ les groupes de Grothendieck des catégories respectives A-mod, B-mod, A-proj et B-proj, et considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} R(B) & \xrightarrow{I=\mathrm{Ind}_B^A} & R(A) & \xrightarrow{R=\mathrm{Res}_B^A} & R(B) \\ {\scriptstyle c_B}\uparrow & & {\scriptstyle c_A}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle c_B} \\ R^p(B) & \xrightarrow[I^p=\mathrm{Ind}_B^A]{} & R^p(A) & \xrightarrow[R^p=\mathrm{Res}_B^A]{} & R^p(B) \end{array} \tag{3.16}$$

où c_A et c_B désignent les morphismes de Cartan.

On exprimera ces applications dans les bases usuelles des groupes de Grothendieck, c'est-à-dire que l'on prendra les caractères modulaires irréductibles $\{\alpha_0, \alpha_1\}$ pour base de $R(A)$, les caractères modulaires irréductibles $\{\beta_0, \beta_1\}$ pour base de $R(B)$, et les caractères modulaires des enveloppes projectives des modules simples pour base de $R^p(A)$ et $R^p(B)$. Ainsi dans ces bases la matrice de c_B est $\left(\begin{smallmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ d'après l'annexe B.6 page 206, et la matrice de c_A est, d'après B.1 et B.2 pages 196 et 197 :

$$\left(\begin{smallmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 3 \end{smallmatrix}\right) \text{ si } q \equiv 5 \pmod 8 \qquad \text{et} \qquad \left(\begin{smallmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{smallmatrix}\right) \text{ si } q \equiv 5 \pmod 8.$$

On appelle ω_0 et ω_1 les entiers naturels tels que

$$\mathrm{Res}_B^A \beta_1 = \omega_0 \alpha_0 + \omega_1 \alpha_1. \tag{3.17}$$

L'expression de ω_0 et ω_1 dépend de la congruence de q modulo 24, mais dans tous les cas on a $\omega_0 + 2\omega_1 = q - 1$, ce qui est obtenu en appliquant 3.17 à l'élément unité de $\overline{H}$.

La matrice de R est alors $\omega = \left(\begin{smallmatrix} 1 & \omega_0 \\ 0 & \omega_1 \end{smallmatrix}\right)$, par adjonction celle de I^p est ${}^t\omega$, et donc celle de I est $c_A {}^t\omega c_B^{-1}$.

On sait que $V^\vee \otimes_B T_0 \simeq S_0$, donc en utilisant 3.15 on obtient ${}_AA \otimes_B T_0 = S_0 \oplus P_1^{m_0}$, donc

$$(c_A {}^t\omega c_B^{-1} - 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = m_0 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$\text{puis} \qquad m_0 = \frac{1}{8}(3\omega_0 - 2\omega_1) - (0 \;\; 1)\, c_A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

D'après 3.6.3 le caractère modulaire de $V \otimes_A S_1$ est de la forme $\lambda\beta_1$ où λ est un entier naturel, donc comme

$${}_BA \otimes_A S_1 = V \otimes_A S_1 \oplus Q_0^{m_0} \oplus Q_1^{m_1}$$

alors

$$\begin{pmatrix} \omega_0 \\ \omega_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \end{pmatrix} + m_0 \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + m_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

en projetant sur la première coordonnée on montre que

$$m_1 = \frac{1}{2}\omega_0 - 2m_0,$$

puis en projetant sur la deuxième coordonnée on obtient

$$\lambda = \omega_1 - (2m_0 + 3m_1) = \omega_1 - \frac{3}{2}\omega_0 + 4m_0 = -4(0 \;\; 1)c_A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

comme $\det C_A = 8$, ceci montre que

$$\lambda = \frac{1}{2} \dim_k \mathrm{Hom}_A(P_0,\, P_1).$$

Ainsi $\lambda = 1$ si $q \equiv 3 \pmod 8$ et $\lambda = 2$ si $q \equiv 5 \pmod 8$. Comme on sait que le B-module $V \otimes_A S_1$ est indécomposable, on en déduit que si $q \equiv 3 \pmod 8$ alors $V \otimes_A S_1 \simeq T_1$, et si $q \equiv 5 \pmod 8$ alors $V \otimes_A S_1$ est une extension indécomposable de T_1 par lui-même.

On traite maintenant les deux situations séparément.

Cas $q \equiv 3 \pmod 8$

Dans ce cas le bimodule ${}_BV_A$ réalise plus qu'une équivalence stable :

Propriété 3.6.4. *Le (B, A)-bimodule V réalise une équivalence de Morita entre A et B.*

Démonstration : On applique [Li2, théorème 2.1 (iii)] : le bimodule V réalise une équivalence stable entre A et B et pour tout A-module simple S le B-module $V \otimes_A S$ est simple, donc la propriété est vraie. □

Remarque 3.6.5. De plus, le bimodule V est un 2-module de permutation, car il est facteur direct de ${}_BA_A$, lui-même facteur direct de ${}_{k\overline{H}}k\overline{G}_{k\overline{G}}$, et ce dernier module est isomorphe à $\mathrm{Ind}_{\Delta\overline{H}}^{\overline{H}\times\overline{G}^{op}} k$, donc V est de source triviale (*cf* lemme 3.2.10) et de vortex diagonal.

En conséquence, l'équivalence de Morita induite par V est splendide.

Cas $q \equiv 5 \pmod 8$

Dans ce cas, le bimodule ${}_BV_A$ ne réalise pas une équivalence de Morita, car $V \otimes_A S_1$ n'est pas simple. Nous allons construire un complexe de (B, A)-bimodules réalisant une équivalence entre les catégories homotopiques de A et de B.

L'application $R(A) \to R(B)$ induite par le bimodule V a pour matrice $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&2\end{smallmatrix}\right)$, on a donc le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} R(B) & \xrightarrow[{}_AV^\vee\otimes_B-]{\left(\begin{smallmatrix}1&2\\0&2\end{smallmatrix}\right)} & R(A) & \xrightarrow[{}_BV\otimes_A-]{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&2\end{smallmatrix}\right)} & R(B) \\ \left(\begin{smallmatrix}4&2\\2&3\end{smallmatrix}\right)\uparrow c_B & & c_A\uparrow\left(\begin{smallmatrix}8&4\\4&3\end{smallmatrix}\right) & & c_B\uparrow\left(\begin{smallmatrix}4&2\\2&3\end{smallmatrix}\right) \\ R^p(B) & \xrightarrow[\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&2\end{smallmatrix}\right)]{{}_BV\otimes_A-} & R^p(A) & \xrightarrow[\left(\begin{smallmatrix}1&0\\2&2\end{smallmatrix}\right)]{{}_AV^\vee\otimes_B-} & R^p(B) \end{array} \tag{3.18}$$

L'image du A-module simple non trivial S_1 est une extension non triviale du B-module simple non trivial T_1 par lui-même. Son enveloppe projective est Q_1. En appliquant le lemme [Ro2, 10.2.12], on obtient que l'enveloppe projective du (B, A)-bimodule V est

$$(Q_0 \otimes_k P_0^\vee) \oplus (Q_1 \otimes_k P_1^\vee) \xrightarrow{(d_0\ d_1)} V.$$

Soit $\hat{V}$ le complexe de (B, A)-bimodules concentré en degrés -1 et 0 suivant :

$$0 \longrightarrow Q_1 \otimes_k P_1^\vee \xrightarrow{d_1} V \longrightarrow 0.$$

Propriété 3.6.6. *Le complexe $\hat{V}$ réalise une équivalence entre les catégories $\mathcal{H}^b(A)$ et $\mathcal{H}^b(B)$.*

Démonstration : On sait que les composantes de $\hat{V}$ sont à composantes projectives en tant que A-modules à droite et en tant que B-modules à gauche, donc d'après le corollaire 3.2.23 il suffit de montrer que

$$\hat{V} \otimes_A \hat{V}^\vee \simeq B \qquad \text{dans} \quad \mathcal{H}^b(B \otimes_k B^{op}).$$

Pour $i = 0$, 1, on note R_i le (B, A)-bimodule $Q_i \otimes_k P_i^\vee$. Alors $\hat{V} \otimes_A \hat{V}^\vee$ est le complexe de (B, B)-bimodules (centré en degré 0) suivant :

$$0 \longrightarrow R_1 \otimes_A V^\vee \longrightarrow (V \otimes_A V^\vee) \oplus (R_1 \otimes_A R_1^\vee) \longrightarrow V \otimes_A R_1^\vee \longrightarrow 0$$

où les flèches sont définies par

$$\begin{pmatrix} d_1 \otimes 1 \\ 1 \otimes d_1^\vee \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} 1 \otimes d_1^\vee & -d_1 \otimes 1 \end{pmatrix}.$$

En appliquant le foncteur $- \otimes_A R_1^\vee$ à la surjection $(d_0\ d_1) : R_0 \oplus R_1 \twoheadrightarrow V$ on obtient une surjection

$$d : (R_0 \otimes_A R_1^\vee) \oplus (R_1 \otimes_A R_1^\vee) \to V \otimes_A R_1^\vee.$$

Comme $R_1^\vee$ est un (A, B)-bimodule projectif, alors tous les modules sont projectifs en tant que (B, B)-bimodules, donc d est une surjection scindée.

D'après le diagramme 3.18, on a $V \otimes_A P_1 \simeq Q_1^2$, donc $V \otimes_A R_1^\vee \simeq (Q_1 \otimes_k Q_1^\vee)^2$. Comme c_A a pour matrice $\left(\begin{smallmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 3 \end{smallmatrix}\right)$, on a

$$P_1^\vee \otimes_A P_1 \simeq k^3 \quad \text{et} \quad P_0^\vee \otimes_A P_1 \simeq k^4,$$

$$\text{puis} \qquad R_1 \otimes_A R_1^\vee \simeq (Q_1 \otimes_k Q_1^\vee)^3 \quad \text{et} \quad R_0 \otimes_A R_1^\vee \simeq (Q_0 \otimes_k Q_1^\vee)^4.$$

Ainsi la restriction de d à $R_1 \otimes_A R_1^\vee$ est toujours une surjection scindée.

Par dualité le morphisme $1 \otimes d_1^\vee : R_1 \otimes_A V^\vee \to R_1 \otimes_A R_1^\vee$ est une injection scindée.

Comme ${}_BV_A$ réalise une équivalence stable on sait que le (B, B)-bimodule ${}_BV \otimes_A V_B^\vee$ est isomorphe à la somme directe de B et d'un bimodule projectif. Comme l'application $R(B) \to R(B)$ induite par le foncteur ${}_BV \otimes_A V^\vee \otimes_B -$ a pour matrice $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{smallmatrix}\right)$ alors on a

$${}_BV \otimes_A V_B^\vee \simeq B \oplus (Q_1 \otimes_k Q_1^\vee).$$

En conséquence le complexe $\hat{V} \otimes_A \hat{V}^\vee$ est isomorphe au complexe

$$0 \to (Q_1 \otimes_k Q_1^\vee)^2 \xrightarrow{\delta} B \oplus (Q_1 \otimes_k Q_1^\vee)^4 \xrightarrow{\delta^\vee} (Q_1 \otimes_k Q_1^\vee)^2 \to 0$$

où δ est une injection scindée, $\delta^\vee$ est une surjection scindée. Ainsi par le théorème de Krüll-Schmidt ce complexe de (B, B)-bimodules est homotopiquement équivalent à B. □

Remarque 3.6.7. Le bimodule R_1 est de 2-permutation car il est projectif, et on a vu que c'est aussi le cas du bimodule V (remarque 3.6.5). Ainsi l'équivalence induite par le complexe $\hat{V}$ est splendide.

Nous savons grâce à la propriété 1.4.5 que le sous-groupe H ne dépend pas de q, nous avons donc le corollaire suivant des propriétés 3.6.4 et 3.6.6 :

Corollaire 3.6.8. *Soit q et q' deux puissances de nombres premiers, toutes deux congrues à ± 3 modulo 8. Alors il existe une équivalence splendide entre les blocs principaux de $k\mathrm{PGL}_2(q)$ et de $k\mathrm{PGL}_2(q')$.*

On peut ajouter que si q et q' sont tous les deux congrus à 3 modulo 8 alors cette équivalence est une équivalence de Morita.

3.6.3 Relèvement à GL_2

Nous allons maintenant montrer que les équivalences splendides obtenues entre les blocs principaux de $k\mathrm{PGL}_2(q)$ et $k\overline{H}$ se relèvent en des équivalences splendides entre les blocs principaux de $k\mathrm{GL}_2(q)$ et kH. On va pour cela relever les objets V et $\hat{V}$, en utilisant les notions d'inflation et de déflation (*cf* section 3.2.3).

Pour un groupe fini quelconque G, si $Z_{\ell'}$ désigne le ℓ'-centre de G alors les ℓ-blocs principaux de kG et de $kG/Z_{\ell'}$ sont canoniquement isomorphes. On veut montrer que les 2-blocs principaux de $k\mathrm{GL}_2(q)$ et de $kN_{\mathrm{GL}_2(q)}(P')$ sont équivalents, où P' est un 2-sous-groupe de Sylow de $\mathrm{SL}_2(q)$, donc on pose

$$G = \mathrm{GL}_2(q)/Z_{2'}(\mathrm{GL}_2(q)) \quad \text{et} \quad H = N_{\mathrm{GL}_2(q)}(P')/Z_{2'}(\mathrm{GL}_2(q))$$

et il suffit de montrer que les blocs principaux de kG et de kH sont équivalents.

Soit Z le centre de G et de H, donc l'image du 2-centre de $\mathrm{GL}_2(q)$. On a $G/Z = \mathrm{PGL}_2(q)$ et $H/Z = N_{\mathrm{GL}_2(q)}(P')/Z(\mathrm{GL}_2(q))$. On note $\overline{X}$ l'image par l'application $kG \twoheadrightarrow kG/Z$ d'un élément ou d'un sous-ensemble X de kG. Si

K est un sous-groupe de H, on note toujours ΔK le sous-groupe de $G \times H^{op}$ contenant les couples (x, x^{-1}) où $x \in K$.

On considère les surjections

$$G \times H^{op} \xrightarrow{\pi_1} (G \times H^{op})/\Delta Z \xrightarrow{\pi_2} \overline{G} \times \overline{H}^{op},$$

puis on définit $\mathrm{Inf}_1 = \mathrm{Inf}^{G\times H^{op}}_{G\times H^{op}/\Delta Z}$, et de la même façon Def_1, Inf_2 et Def_2.

Soit A et B les blocs principaux de kG et kH, les blocs principaux de $k\overline{G}$ et $k\overline{H}$ sont alors $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

On considère A comme un $k[G \times H^{op}/\Delta Z]$-module. On a $\mathrm{Def}_2(A) = \overline{A}$. On applique le lemme [Ro2, 10.2.9] : en considérant le groupe $G \times H^{op}/\Delta Z$ et son 2-sous-groupe distingué $\overline{Z \times 1} = \overline{1 \times Z}$, on obtient qu'il existe un $(A \otimes_k B^{op})/\Delta Z$-bimodule $\tilde{V}$ tel que ${}_AA_B \simeq \tilde{V} \oplus P$ où P est un bimodule projectif, et $\mathrm{Def}_2(\tilde{V}) = V^\vee$. Comme V est indécomposable, alors $\tilde{V}$ l'est aussi.

Pour $i = 0$, 1, soit $\tilde{R}_i$ le $k[G \times H^{op}/\Delta Z]$-module projectif dont la déflation à $\overline{G} \times \overline{H}^{op}$ est le module $P_i \otimes_k Q_i^\vee$, en utilisant les notations de la section précédente. Toujours grâce au lemme [Ro2, 10.2.9], on a une enveloppe projective $\tilde{d} : \tilde{R}_0 \oplus \tilde{R}_1 \twoheadrightarrow \tilde{V}$. On appelle $\tilde{d}_1$ sa restriction à $\tilde{R}_1$.

On définit le complexe de (A, B)-bimodules C de la façon suivante :

- si $q \equiv 3 \pmod 8$, alors C est le bimodule $\mathrm{Inf}_1(\tilde{V})$, vu comme complexe concentré en degré 0 ;
- si $q \equiv 5 \pmod 8$, alors C est le complexe $\mathrm{Inf}_1(\tilde{R}_1 \xrightarrow{\tilde{d}_1} \tilde{V})$, où $\tilde{V}$ est placé en degré 0.

Dans les deux cas, $\mathrm{Def}_2 \circ \mathrm{Def}_1(C)$ est le complexe réalisant l'équivalence de la section précédente (et le foncteur $\mathrm{Def}_2 \circ \mathrm{Def}_1$ est bien le foncteur $C \mapsto \overline{A} \otimes_A C \otimes_B \overline{B}$). On a alors le théorème suivant :

Théorème 3.6.9. *Le complexe de (A, B)-bimodules C réalise une équivalence splendide entre les blocs A et B. Si $q \equiv 3 \pmod 8$, alors cette équivalence est une équivalence de Morita.*

Démonstration : On va utiliser le lemme [Ro2, 10.2.11]. Il faut pour cela montrer que toute composante indécomposable de C est de source triviale et de vortex Q satisfaisant les conditions :

$$\begin{aligned} & Q \cap (1 \times H^{op}) = Q \cap (G \times 1) = 1 \\ \text{et} \quad & Z \times Z^{op} \subseteq (Z \times 1)Q = (1 \times Z^{op})Q. \end{aligned} \tag{3.19}$$

On sait que le $k[G \times H^{op}/\Delta Z]$-module $\tilde{V}$ est facteur direct de kG, or

$$kG = \mathrm{Ind}^{G\times H^{op}/\Delta Z}_{\Delta H/\Delta Z} k,$$

donc $\tilde{V}$ est de source triviale par le lemme 3.2.10, et il a un vortex de la forme $\Delta Q/\Delta Z$ où Q est un sous-groupe tel que $Z \subset Q \subset H$. Par la partie 2 de la propriété 3.2.12, le module $\mathrm{Inf}_1 \tilde{V}$ est donc de source triviale, et son vortex est ΔQ, lequel vérifie bien les conditions 3.19.

Le $k[G \times H^{op}/\Delta Z]$-module $\tilde{R}_1$ est projectif indécomposable, donc facteur direct de $\mathrm{Ind}_1^{G \times H^{op}/\Delta Z} k$. Il est ainsi de source triviale et de vortex 1, et toujours par la partie 2 de la propriété 3.2.12, le module $\mathrm{Inf}_1 R_1$ est de source triviale et de vortex ΔZ, lequel vérifie les conditions 3.19.

Finalement, par application du lemme [Ro2, 10.2.11], le complexe de (A, B)-bimodules C réalise bien une équivalence splendide entre A et B. Si $q \equiv 3 \pmod 8$, alors cette équivalence est une équivalence de Morita car C est concentré en degré 0. □

Nous pouvons déduire de ce théorème une propriété de "généricité", car le bloc principal de $H = N_G(P')$ ne dépend pas de q, mais juste de sa congruence modulo 8. En effet, le $2'$-centre de H est le sous-groupe de G contenant les matrices centrales d'ordre premier avec 2, donc il est d'ordre u (en rappelant que $q - 1 = 2^a u$ où u est impair) Le groupe $H/Z_{2'}(H)$ est donc une extension centrale de $\mathfrak{S}_4$ par un groupe cyclique d'ordre 2^a. Nous avons donc le corollaire suivant :

Corollaire 3.6.10. *Soit q et q' deux puissances de nombres premiers.*

1. *Si q et q' sont tous deux congrus à 3 modulo 8, alors il existe une équivalence de Morita entre les blocs principaux de $k\mathrm{GL}_2(q)$ et de $k\mathrm{GL}_2(q')$.*
2. *Si q et q' sont tous deux congrus à 5 modulo 8, alors il existe une équivalence splendide entre les blocs principaux de $k\mathrm{GL}_2(q)$ et de $k\mathrm{GL}_2(q')$.*

Chapitre 4

Blocs et A_∞-algèbres

Nous donnons dans ce chapitre la description de certains blocs principaux en terme de A_∞-algèbres. Pour certains blocs B, nous construisons une A_∞-algèbre A telle que les catégories dérivées $\mathcal{D}B$ et $\mathcal{D}_\infty A$ soient équivalentes.

Nous nous intéressons aux 2-blocs principaux de $\mathrm{PSL}_2(q)$, $\mathrm{PGL}_2(q)$ et $\mathrm{GL}_2(q)$ où q est impair. Pour chacun de ces groupes, nous avons obtenu dans le chapitre précédent deux complexes Λ_e et Λ_s, les complexes de Deligne-Lusztig. Nous avons étudié leurs algèbres d'endomorphismes dans la catégorie homotopique. En caractéristique ℓ différente de 2 divisant $q-1$ ou $q+1$, nous avons obtenu des équivalences splendides entre le ℓ-bloc principal B_ℓ de $\mathrm{GL}_2(q)$ et l'algèbre d'endomorphismes de l'un de ces deux complexes. Nous avons montré que

$$\mathcal{D}^b B_\ell \simeq \begin{cases} \mathcal{D}^b(\mathrm{End}_{B_\ell}(X_e)) & \text{si } \ell \text{ divise } q-1 \\ \mathcal{D}^b(\mathrm{End}_{\mathcal{H}^b B_\ell}(X_s)) & \text{si } \ell \text{ divise } q+1 \end{cases}$$

où X_e et X_s désigne la partie des complexes Λ_e et Λ_s appartenant au bloc B_ℓ.

Pour le bloc principal B de $\mathrm{GL}_2(q)$ en caractéristique 2, nous sommes aménés à considérer l'algèbre d'endomorphismes de la somme directe $X = X_e \oplus X_s$ de ces deux complexes, car ni X_e ni X_s n'engendre la catégorie $\mathcal{D}B$, alors que X l'engendre bien. Mais X ne vérifie plus la propriété de disjonction : il existe dans la catégorie homotopique des morphismes non nuls de X vers un décalé strict de lui-même. En utilisant la théorie des A_∞-algèbres, nous montrons qu'il existe une équivalence dérivée entre le bloc B et une A_∞-algèbre minimale (*i.e.,* à différentielle nulle) dont l'algèbre graduée sous-jacente est

$$A = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}B}(X,\, X[n])$$

et la structure A_∞ supplémentaire $(m_3,\, m_4,\, \ldots)$ sera décrite ultérieurement.

Il est à noter que cette structure supplémentaire n'est pas canonique, elle dépend du choix d'un scindage de l'algèbre différentielle graduée $\mathcal{E}nd_B(X)$.

Pour les blocs principaux en caractéristique 2 de $\mathrm{PSL}_2(q)$ et de $\mathrm{PGL}_2(q)$ où q est congru à ± 3 modulo 8, nous explicitons totalement la structure des A_∞-algèbres que nous leur associons. Ceci est possible grâce aux équivalences splendides obtenues au chapitre précédent (théorème 3.6.9). Nous montrons que l'on peut obtenir en fait des *A_3-algèbres*, *i.e.,* des A_∞-algèbres telles que $m_n = 0$ pour tout $n \geq 4$.

Nous étendons ensuite ce résultat sur $\mathrm{PGL}_2(q)$ au cas où l'on n'impose pas de condition sur q : nous montrons que dans le cas du bloc principal en caractéristique 2 de $\mathrm{PGL}_2(q)$ où q est une puissance d'un nombre premier impair quelconque, alors un certain choix de scindage de la différentielle de $\mathcal{E}nd_B(X)$ permet d'obtenir une A_∞-algèbre qui est une A_3 -algèbre. Nous utilisons pour cela les travaux de K. Erdmann et T. Holm. Ils ont classifié tous les blocs de défaut diédral, respectivement à équivalence de Morita près et à équivalence dérivée près. Ces blocs sont décrits en termes de carquois munis de relations, ce qui permet de faire des calculs explicites.

Notation : on continue d'utiliser des modules à gauche, donc les morphismes agissent à droite. Ainsi on note dorénavant xf au lieu de l'habituel $f(x)$, et gf au lieu de $f \circ g$, et les éléments des sommes directes sont notés par des vecteurs-lignes.

On note par des parenthèses le décalage en degré, et par des crochets le décalage des complexes.

4.1 A_∞-algèbres

Nous allons d'abord rappeler les principales définitions liées aux A_∞-algèbres, puis nous citerons l'énoncé des théorèmes que nous utiliserons. Nous renvoyons à l'article de B. Keller [Ke6] pour plus de détails et pour les motivations de la théorie. La thèse de K. Lefèvre [Le] contient une démonstration de chacun des théorèmes concernant les A_∞-algèbres cités.

4.1.1 Définitions

On suppose dans toute cette section que k est un corps. Le signe $\otimes$ désigne le produit tensoriel sur k.

Définition 4.1.1 (Stasheff, 1963). *Une A_∞-algèbre (ou algèbre fortement homotopique) est un k-espace vectoriel $\mathbb{Z}$-gradué A muni d'applications*

$$m_n : A^{\otimes n} \to A \quad (n > 0)$$

k-linéaires homogènes de degré $2-n$, vérifiant pour tout n

$$\sum_{\substack{r+s+t=n\\ u=r+1+t}} (-1)^{r+st}\ m_u(\mathbf{1}^{\otimes r}\otimes m_s\otimes \mathbf{1}^{\otimes t}) = 0.$$

On a donc en particulier :

- ${m_1}^2 = 0$,
- $m_1 m_2 = m_2(m_1\otimes \mathbf{1} + \mathbf{1}\otimes m_1)$,
- $m_2(\mathbf{1}\otimes m_2 - m_2\otimes \mathbf{1}) = m_1 m_3 + m_3(m_1\otimes\mathbf{1}\otimes\mathbf{1} + \mathbf{1}\otimes m_1\otimes\mathbf{1} + \mathbf{1}\otimes\mathbf{1}\otimes m_1)$.

Notons que l'on applique ces égalités à des éléments en respectant la règle de signes de Koszul, *cf* [Ke6, 3.1] : si f et g sont deux applications et x et y deux éléments, avec g homogène de degré i et x homogène de degré j alors

$$(f\otimes g)(x\otimes y) = (-1)^{ij} f(x)\otimes g(y).$$

L'application m_1 est appelée différentielle de A, et l'application m_2 est appelée multiplication. Elle est donc "associative à homotopie près", et cette homotopie est l'application m_3 :

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \longrightarrow & (A^{\otimes 3})^i & \xrightarrow{d^i_{(A^{\otimes 3})}} & (A^{\otimes 3})^{i+1} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle m_2(1\otimes m_2 - m_2\otimes 1)} & \swarrow{\scriptstyle m_3} & \downarrow{\scriptstyle m_2(1\otimes m_2 - m_2\otimes 1)} & & \\
\cdots & \longrightarrow & A^i & \xrightarrow[m_1]{} & A^{i+1} & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

Si $m_n = 0$ pour tout $n \geq 3$ alors A est une DG-algèbre. Si $m_1 = 0$, alors A est une algèbre graduée munie d'une structure supplémentaire $(m_3, m_4, \ldots)$. On dit qu'une telle A_∞-algèbre est *minimale*.

Pour un entier k, on appellera *A_k-algèbre* une A_∞-algèbre telle que les applications m_n soient nulles pour tout $n > k$.

Définition 4.1.2. *Soit A et B deux A_∞-algèbres. Un morphisme de A_∞-algèbres entre A et B est une famille d'applications k-linéaires*

$$f_n : A^{\otimes n} \to B \quad (n > 0)$$

k-linéaires homogènes de degré $1-n$, vérifiant pour tout n

$$\sum_{\substack{r+s+t=n\\ u=r+1+t}} (-1)^{r+st}\ f_u(\mathbf{1}^{\otimes r}\otimes m_s\otimes \mathbf{1}^{\otimes t}) = \sum_{\substack{k=1\cdots n\\ i=1+\cdots+i_k=n}} (-1)^{\sigma}\ m_k(f_{i_1}\otimes\cdots f_{i_k})$$

où $\sigma = (k-1)(i_1-1) + (k-2)(i_2-1) + \cdots + (i_{k-1}-1)$.

On a donc :

- $f_1 m_1 = m_1 f_1$,
- $f_1 m_2 - m_2(f_1 \otimes f_1) = m_1 f_2 + f_2(m_1 \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes m_1)$.

ce qui exprime que f_1 est un morphisme de complexes et qu'il est "multiplicatif à homotopie près", cette homotopie étant l'application f_2.

Définition 4.1.3. *Soit A une A_∞-algèbre. Un A_∞-module sur A est un k-espace vectoriel gradué M muni d'applications*

$$m_n^M : A^{\otimes n-1} \otimes M \to M \quad (n > 0)$$

homogènes de degré $2-n$, vérifiant

$$\sum_{\substack{r+s+t=n \\ u=r+1+t}} (-1)^{r+st}\ m_u^M(\mathbf{1}^{\otimes r} \otimes m_s^* \otimes \mathbf{1}^{\otimes t}) = 0$$

où $* = M$ si $t = 0$, et A si $t > 0$.

On définit ensuite les morphismes de A_∞-modules de façon similaire à la définition des morphismes de A_∞-algèbres. Si A est une A_∞-algèbre, on note $\mathcal{C}_\infty A$ la catégorie des A_∞-modules sur A.

On a ensuite une notion d'homotopie entre morphismes de A_∞-modules, qui est une relation d'équivalence. Une propriété importante des A_∞-objets est que *tout quasi-isomorphisme entre A_∞-algèbres ou A_∞-modules est inversible modulo homotopie*. Ce théorème est dû à A. Prouté pour les A_∞-algèbres dans une version affaiblie, il figure en toute généralité dans [Le].

En conséquence, il n'y a pas lieu d'inverser formellement les quasi-isomorphismes pour passer de la catégorie homotopique à la catégorie dérivée de A. On note donc $\mathcal{D}_\infty A$ la catégorie homotopique des A_∞-modules sur A, c'est-à-dire la catégorie dont les objets sont les A_∞-modules sur A et les morphismes sont les A_∞-morphismes entre modules modulo homotopie.

Nous supposons de plus que toutes les A_∞-algèbres que nous considérons sont *strictement unitaires*, *i.e.,* qu'elles contiennent une unité stricte 1, donc un élément homogène de dégré 0 tel que

- $m_2(1 \otimes a) = m_2(a \otimes 1) = a$ pour tout élément a,
- pour tout $n \neq 2$, $m_n(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) = 0$ s'il existe i tel que $a_i = 1$.

Les catégories de A_∞-modules considérées sont supposées ne contenir que les A_∞-modules strictement unitaires, et leurs morphismes sont supposés être strictement unitaires. On renvoie au chapitre 3 de [Le] pour toute précision sur ces notions.

4.1.2 Théorèmes

On suppose que toutes les DG-algèbres et A_∞-algèbres sont des algèbres sur le corps k.

Le théorème suivant est un cas particulier du théorème [Ke1, 8.2], voir aussi l'introduction de cet article.

Théorème 4.1.4. *Soit A une algèbre, X un complexe de A-modules, et $\mathcal{E}$ la DG-algèbre $\mathcal{E}nd_A(X)$. On suppose que X est parfait et qu'il engendre $\mathcal{D}A$. Alors le foncteur $\mathcal{H}om_A(X, -) : \mathcal{D}A \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}\mathcal{E}$ est une équivalence triangulée.*

Si A est une DG-algèbre alors c'est une A_∞-algèbre particulière. Nous avons le théorème suivant ([Ke5, 7.4]) :

Théorème 4.1.5. *Supposons que A soit une DG-algèbre. Alors le foncteur canonique d'inclusion $\mathcal{D}A \to \mathcal{D}_\infty A$ est une équivalence de catégories triangulées.*

Le théorème suivant [Ke6, 3.3] est une généralisation d'un théorème dû à T. V. Kadeishvili :

Théorème 4.1.6. *Soit A une A_∞-algèbre. Il existe une structure de A_∞-algèbre $(m_1, m_2, \ldots)$ sur H^*A et un morphisme $f : H^*A \longrightarrow A$ de A_∞-algèbres tels que*

- *$m_1 = 0$ et m_2 est induit par la multiplication de A,*
- *f_1 induit l'identité sur H^*A.*

Cette structure est unique à isomorphisme de A_∞-algèbres près.

En conséquence, f est un quasi-isomorphisme de A_∞-algèbres. On appelle *modèle minimal* de A la A_∞-algèbre H^*A ainsi obtenue.

Ajoutons qu'alors les catégories $\mathcal{D}_\infty A$ et $\mathcal{D}_\infty H^*A$ sont équivalentes, en effet on a le théorème :

Théorème 4.1.7. [Ke6, 6.2] *Soit A et B deux A_∞-algèbres, et $f : A \to B$ un morphisme de A_∞-algèbres. Alors le foncteur induit $f^* : \mathcal{D}_\infty B \to \mathcal{D}_\infty A$ est une équivalence si et seulement si f est un quasi-isomorphisme.*

Pour une algèbre graduée A, on note A-Grmod la catégorie des A-modules gradués. Les équivalences de catégories triangulées assurées par les théorèmes 4.1.4, 4.1.5 et 4.1.7 donnent le théorème suivant :

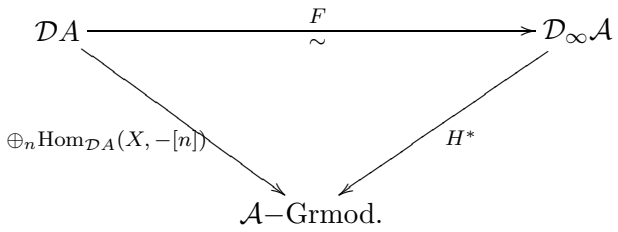
Théorème 4.1.8 (Keller). *Soit A une algèbre associative ordinaire, et X un objet parfait et générateur de $\mathcal{D}A$. Soit $\mathcal{A}$ l'algèbre graduée définie par*

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}A}(X, X[n]).$$

Alors il existe une structure de A_∞-algèbre sur $\mathcal{A}$ et une équivalence

$$F : \mathcal{D}A \longrightarrow \mathcal{D}_\infty\mathcal{A}$$

tels que le diagramme suivant de foncteurs triangulés commute :



Le foncteur F est construit de la façon suivante : on pose $\mathcal{E} = \mathcal{E}nd_A(X)$, on a alors $\mathcal{A} = H^*\mathcal{E}$. On munit $\mathcal{A}$ de la structure A_∞ fournie par le théorème 4.1.6, et on note $f : \mathcal{A} \to \mathcal{E}$ le quasi-isomorphisme également fourni par ce théorème. Le foncteur F est la composition

$$\mathcal{D}A \xrightarrow{\mathcal{H}om_A(X,-)} \mathcal{D}\mathcal{E} \xrightarrow[\text{can.}]{\text{incl.}} \mathcal{D}_\infty\mathcal{E} \xrightarrow{f^*} \mathcal{D}_\infty\mathcal{A},$$

dont chaque composante est une équivalence en vertu des théorèmes cités ci-dessus. Le foncteur d'homologie $H^* : \mathcal{D}_\infty\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$−Grmod correspond à un foncteur d'oubli de la A_∞-structure supplémentaire.

4.1.3 Calcul du modèle minimal d'une DG-algèbre

Soit $\mathcal{E}$ une DG-algèbre, on note d sa différentielle, et m sa multiplication.

Il existe une structure $(m_n)_{n\geq 1}$ de A_∞-algèbre sur l'homologie $H^*\mathcal{E}$ et un quasi-isomorphisme $f : H^*\mathcal{E} \to \mathcal{E}$ de A_∞-algèbres satisfaisant les conditions du théorème 4.1.6. Nous allons donner une méthode de calcul des applications m_n et f_n.

On considère les suites exactes

$$0 \longrightarrow Z^*\mathcal{E} \xrightarrow{i_0} \mathcal{E} \xrightarrow{p_0} (B^*\mathcal{E})(1) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow B^*\mathcal{E} \xrightarrow{i_1} Z^*\mathcal{E} \xrightarrow{p_1} H^*\mathcal{E} \longrightarrow 0$$

où p_0 est donnée par la différentielle d de $\mathcal{E}$, et i_0, i_1 et p_1 sont les injections et projections canoniques. On a ainsi $d = p_0 i_1 i_0$ (on rappelle que conformément

à nos notations, $p_0 i_1 i_0 = i_0 \circ i_1 \circ p_0$). On choisit des sections k-linéaires de p_0 et de p_1, on les note s_0 et s_1 respectivement. Elles déterminent de manière unique des rétractions r_0 et r_1 de i_0 et i_1, telles que $s_0 r_0 = 0$ et $s_1 r_1 = 0$.

On pose alors $f_1 = s_1 i_0$, $g_1 = r_0 p_1$ et $s = r_0 r_1 s_0$. On a ainsi obtenu un scindage k-linéaire de $\mathcal{E}$, c'est-à-dire que l'on a les égalités

$$\begin{gathered} f_1 g_1 = \mathrm{Id}_{H^*\mathcal{E}} \qquad sds = s \qquad dsd = d \\ sd + g_1 f_1 + ds = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}. \end{gathered} \tag{4.1}$$

Il est rapide de montrer qu'il est équivalent de choisir

- une application $f_1 : H^*\mathcal{E} \to \mathcal{E}$ à valeurs dans $Z^*\mathcal{E}$ qui est une section de la projection canonique $Z^*\mathcal{E} \to H^*\mathcal{E}$,
- une application $g_1 : \mathcal{E} \to H^*\mathcal{E}$ dont la restriction à $Z^*\mathcal{E}$ est la projection canonique,
- une application $s : \mathcal{E} \to \mathcal{E}(-1)$ dont la restriction à $B^*\mathcal{E}$ est une section de la surjection $\mathcal{E} \to B^*\mathcal{E}(1)$ induite par la différentielle de $\mathcal{E}$,

en imposant les égalités $sd + g_1 f_1 + ds = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$ et $sds = s$.

Pour tout $n \geq 2$, on définit par récurrence l'application linéaire $\varphi_n : (H^*\mathcal{E})^{\otimes n} \to \mathcal{E}$ homogène de degré $2-n$, et les applications m_n et f_n par :

$$\begin{aligned} \varphi_n &= m\left(\sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+1} f_i \otimes f_{n-i}\right) \\ m_n &= g_1 \varphi_n \qquad\qquad f_n = -s\varphi_n. \end{aligned} \tag{4.2}$$

On déduit alors du théorème [KS, 6.4, théorème 3] le théorème suivant :

Théorème 4.1.9. *Les applications $(m_n)_{n\geq 2}$ donnent à $H^*\mathcal{E}$ une structure de A_∞-algèbre, l'application $f = (f_n)_{n\geq 1}$ est un morphisme de A_∞-algèbres si $H^*\mathcal{E}$ est muni de cette structure. Ces données satisfont les conditions du théorème 4.1.6.*

Remarque 4.1.10. Le théorème de [KS] donne des formules permettant d'obtenir le modèle minimal de toute A_∞-algèbre. Par contre, il ne donne pas les signes. En suivant sa preuve on obtient que ce sont les signes donnés ci-dessus. Nous ne les utiliserons cependant pas, car dans tous les exemples que nous traiterons le corps de base sera de caractéristique 2.

4.1.4 Lien avec la cohomologie de Hochschild

Un A_∞-algèbre A peut être vue comme une algèbre graduée (A, m_2) munie d'une A_∞-structure $(m_3, m_4, \ldots)$. Dans la cas où les m_n sont nuls

pour $n \geq 4$, l'application m_3 peut être interprétée en terme de cohomologie de Hochschild.

On renvoie au livre de C. A. Weibel [We, 9] pour une théorie générale de la cohomologie de Hochschild, nous en rappelons brièvement la définition.

Soit A une algèbre graduée.

Soit $\tilde{A}$ le complexe défini par $\tilde{A}^n = A^{\otimes(2-n)}$ si $n \leq 0$, $\tilde{A}^{\otimes n} = 0$ si $n > 0$, et par la différentielle

$$d(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) = \sum_{i=0\ldots n-1} (-1)^i a_0 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n.$$

Ce complexe est une résolution projective du (A, A)-bimodule A. Si M est un (A, A)-bimodule, la cohomologie de Hochschild $HH^*(A, M)$ de A à valeurs dans M est la cohomologie du complexe $\mathcal{H}om_{A\otimes A^{op}}(\tilde{A}, M)$. On note $HZ^*(A, M)$ l'espace des cocycles de Hochschild de A à valeurs dans M, donc le noyau de la différentielle de $\mathcal{H}om_{A\otimes A^{op}}(\tilde{A}, M)$.

On munit l'algèbre A d'une différentielle m_1 nulle, on appelle $m_2 : A^{\otimes 2} \to A$ sa multiplication. Soit m_3 une application $A^{\otimes 3} \to A$. Pour $n \geq 4$ on pose $m_n = 0$. On note A_{m_3} l'algèbre A munie des applications m_n pour $n \geq 1$.

On nomme M_3 l'ensemble des applications linéaires $m_3 : A^{\otimes 3} \to A$ qui font de A_{m_3} une A_∞-algèbre.

Soit m_3 et m_3' deux éléments de M_3, et $\varphi : A_{m_3} \to A_{m_3'}$ un isomorphisme de A_∞-algèbres. Alors φ_1 est un automorphisme de l'algèbre A. Si on pose $\psi_i = \varphi_1^{-1}\,\varphi_i$ pour tout $i \geq 1$, alors $\psi : A_{m_3} \to A_{m_3''}$ est un isomorphisme de A_∞-algèbres, où $m_3'' = \varphi_1^{-1}\, m_3'(\varphi_1^{\otimes 3})$. Il vérifie $\psi_1 = 1_A$.

Pour $m_3, m_3' \in M_3$ on pose $m_3 \sim m_3'$ s'il existe un isomorphisme de A_∞-algèbres $\varphi : A_{m_3} \xrightarrow{\sim} A_{m_3'}$ tel que $\varphi_1 = \mathrm{Id}_A$. C'est une relation d'équivalence, on note $\overline{M_3}$ l'ensemble quotient de M_3 par $\sim$.

Propriété 4.1.11. *On a une injection canonique*

$$c : M_3 \hookrightarrow HZ^3(A, A(-1)),$$

qui se factorise en une application $\bar{c} : \overline{M_3} \to HH^3(A, A(-1))$.

Démonstration : Soit $m_3 \in M_3$. Comme A_{m_3} est une A_∞-algèbre, alors m_3 est une application k-linéaire $A^{\otimes 3} \to A$ de degré -1, donc l'application

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{m_3} : & A^{\otimes 5} & \longrightarrow & A(-1) \\ & a_1 \otimes \cdots \otimes a_5 & \longmapsto & a_1\, m_3(a_2 \otimes a_3 \otimes a_4)\, a_5 \end{array}$$

est élément de $\mathrm{Hom}_{A\otimes A^{op}}(A^{\otimes 5}, A(-1))$. De plus on a

$$m_2(m_3 \otimes 1 + 1 \otimes m_3) - m_3(m_2 \otimes 1 \otimes 1 - 1 \otimes m_2 \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes m_2) = 0$$

ce qui montre que $\widetilde{m_3}$ est un cocycle. On a donc une application

$$\begin{array}{rl} c: & M_3 \longrightarrow HZ^3(A,\, A(-1)) \\ & m_3 \longmapsto \widetilde{m_3} \end{array}$$

qui est évidemment injective.

Supposons que $m_3 \sim m_3'$. Il existe alors une application k-linéaire $\varphi_2 : A^{\otimes 2} \to A(-1)$ telle que

$$m_3 + \varphi_2(m_2 \otimes 1 - 1 \otimes m_2) = m_3' - m_2(\varphi_2 \otimes 1 - 1 \otimes \varphi_2).$$

L'application

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{\varphi_2}: & A^{\otimes 4} & \longrightarrow A(-1) \\ a_1 \otimes \cdots \otimes a_4 & \longmapsto & a_1\, \varphi_2(a_2 \otimes a_3)\, a_4 \end{array}$$

vérifie alors $\widetilde{\varphi_2} \circ d = \widetilde{m_3} - \widetilde{m_3'}$, donc m_3 et m_3' s'envoient sur le même élément de $HH^3(A,\, A(-1))$, ce qui montre que l'injection c se factorise en une application $\bar{c} : \overline{M_3} \to HH^3(A,\, A(-1))$. □

L'application c n'est pas surjective en général, et l'application $\bar{c}$ n'est pas injective en général. On peut juste assurer que :

– si $HZ^5(A,\, A(-2)) = 0$, alors c est surjective. En effet si $m : A^{\otimes 3} \to A(-1)$ est telle que $\widetilde{m} \in HZ^3(A,\, A(-1))$ alors l'élément

$$m(m \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes m \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes m)$$

correspond à un élément de $HZ^5(A,\, A(-2))$. Il est donc nul et m donne une structure de A_3-algèbre à A.

– Si $HZ^6(A,\, A(-2)) = 0$ alors $\bar{c}$ est injective. En effet, si $m_3 \in M_3$ est tel que le cocycle lui correspondant est un cobord, alors on obtient une application φ_2 comme indiqué dans la démonstration ci-dessus. Il faut donc qu'il existe une famille $(\varphi_3,\, \varphi_4, \ldots)$ telle que l'application $\varphi = (\mathrm{Id}_A,\, \varphi_2, \varphi_3, \ldots)$ soit un morphisme de A_∞-algèbres. Si $HZ^6(A,\, A(-2)) = 0$ alors on peut poser $\varphi_n = 0$ pour tout $n \geq 3$. Si on sait juste que $HH^6(A,\, A(-2)) = 0$ alors on obtient une application φ_3, et les conditions assurant l'existence des φ_n suivants sont plus compliquées.

Remarque 4.1.12. Cette interprétation de m_3 en terme de cohomologie de Hochschild ne se généralise pas aux m_n pour n supérieur à 3. Par contre, la cohomologie de Hochschild peut servir à montrer qu'une algèbre graduée B est *intrinsèquement formelle* c'est-à-dire que toute A_∞-algèbre dont l'homologie est isomorphe à B admet B pour modèle minimal, voir [ST, Théorème 4.7].

4.2 Etude préliminaire de la situation

On décrit ici la situation que l'on aura dans tous les cas que nous traiterons. Les notations que nous définissons seront utilisées dans tout le reste du chapitre.

Soit $\mathcal{B}$ une algèbre associative ordinaire, et X_e, X_s deux complexes de $\mathcal{B}$-modules. On note $\mathcal{E}$ la DG-algèbre $\mathcal{E}nd_{\mathcal{B}}(X_e \oplus X_s)$, c'est donc une A_∞-algèbre particulière. On note d sa différentielle et m sa multiplication.

Le complexe sous-jacent à $\mathcal{E}$ se décompose en somme directe de quatre complexes $A = \mathcal{E}nd_{\mathcal{B}}(X_e)$, $A' = \mathcal{E}nd_{\mathcal{B}}(X_s)$, $B = \mathcal{H}om_{\mathcal{B}}(X_s, X_e)$ et $B' = \mathcal{H}om_{\mathcal{B}}(X_e, X_s)$.

On note $\mathcal{A} = H^*\mathcal{E}$, et on appelle H, H', K et K' les homologies respectives de A, A', B et B'.

4.2.1 Idempotents, annulation des m_n

L'unité stricte 1 de $\mathcal{E}$ est l'identité du complexe $X_e \oplus X_s$, elle se décompose en deux idempotents orthogonaux 1_e et 1_s, respectivement l'identité de X_e, élément de A^0, et l'identité de X_s, élément de A'^0. On a

$$A = 1_e.\mathcal{E}.1_e \qquad A' = 1_s.\mathcal{E}.1_s \qquad B = 1_s.\mathcal{E}.1_e \qquad B' = 1_e.\mathcal{E}.1_s.$$

On pose $R = k^2$, et on identifie R à $k.1_e \oplus k.1_s$. Les composantes du complexe sous-jacent à $\mathcal{E}$ sont des (R, R)-bimodules, la différentielle d de $\mathcal{E}$ est (R, R)-bilinéaire. La multiplication $m : \mathcal{E} \otimes_k \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ sa factorise en une application $\mathcal{E} \otimes_R \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ qui est (R, R)-bilinéaire.

Par abus de notations, on note également 1, 1_e et 1_s les images de 1, 1_e et 1_s dans $\mathcal{A}$. On a donc

$$H = 1_e.\mathcal{A}.1_e \qquad H' = 1_s.\mathcal{A}.1_s \qquad K = 1_s.\mathcal{A}.1_e \qquad K' = 1_e.\mathcal{A}.1_s,$$

et $\mathcal{A}$ est également un (R, R)-bimodule gradué, sa multiplication est compatible avec cette structure.

On sait grâce au théorème 4.1.6 qu'il existe une structure de A_∞-algèbre minimale sur $\mathcal{A}$ et un quasi-isomorphisme $f : \mathcal{A} \to \mathcal{E}$ de A_∞-algèbres, tels que la multiplication de $\mathcal{A}$ soit induite par celle de $\mathcal{E}$, et f^1 induise l'identité de $\mathcal{A}$.

Une construction de cette A_∞-structure sur $\mathcal{A}$ et de ce quasi-isomorphisme f est donnée dans la section 4.1.3. Il est clair que les morphismes i_0, p_0, i_1 et p_1 sont (R, R)-bilinéaires. On peut choisir s_0 et s_1 également (R, R)-bilinéaires, et donc les applications f_1, g_1 et s sont (R, R)-bilinéaires. Pour

tout $n \geq 2$ l'application $\varphi_n : \mathcal{A} \otimes_k \cdots \otimes_k \mathcal{A} \to \mathcal{E}$ se factorise donc en une application $\mathcal{A} \otimes_R \cdots \otimes_R \mathcal{A} \to \mathcal{E}$ que l'on note toujours φ_n. Par suite, il en est de même des applications m_n et f_n.

Remarque 4.2.1. Cette (R, R)-bilinéarité exprime exactement le fait que $\mathcal{E}$ est une DG-catégorie à deux objets e et s, et que son modèle minimal $\mathcal{A}$ obtenu par la méthode donnée dans la section 4.1.3 est une A_∞-catégorie à deux objets.

Soit a un élément de $\mathcal{A}$. On dit que a est *réduit* s'il existe t, $t' \in \{e, s\}$ tel que $a = 1_t.a1_{t'}$. On dit que t est la source de a et que t' est son but.

Soit $(0, m_2, m_3, \ldots)$ une structure de A_∞-algèbre sur $\mathcal{A}$, compatible avec sa structure de (R, R)-bimodule. Soient $a_1, \ldots a_n$ des éléments réduits de $\mathcal{A}$. Si $m_n(a_1 \otimes \ldots \otimes a_n) \neq 0$, alors le but de a_i est égal à la source de a_{i+1} pour tout $i = 1 \ldots n-1$. Ceci traduit le fait que le signe $\otimes$ désigne le produit tensoriel sur R.

La démonstration du lemme suivant m'a été indiquée par B. Keller :

Lemme 4.2.2. *Supposons que l'on ait*

- $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(\mathcal{B})}(X_e, X_e[i]) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(\mathcal{B})}(X_s, X_s[i]) = 0$ *pour tout* $i \neq 0$.
- $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(\mathcal{B})}(X_e, X_s[i]) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(\mathcal{B})}(X_s[i], X_e) = 0$ *pour tout* $i \neq 0, 1$.

Soit $(m_1, m_2, m_3, \ldots)$ *une structure de* A_∞*-algèbre sur* $\mathcal{A}$ *compatible avec la structure de* (R, R)*-bimodule, telle que* $m_1 = 0$ *et* m_2 *est induite par la multiplication de* $\mathcal{E}$*. Alors on a* $m_n = 0$ *pour tout* $n \geq 6$.

Démonstration : On note m_2 la multiplication de $\mathcal{A}$ induite par celle de $\mathcal{E}$, et on se donne des applications (R, R)-bilinéaires $m_3, m_4, \ldots$ telles que la famille $(0, m_2, m_3, \ldots)$ définisse une structure de A_∞-algèbre sur $\mathcal{A}$, compatible avec la structure de (R, R)-bimodule.

Les hypothèses nous disent que

- H et H', les homologies de A et A', sont concentrées en degré 0,
- K, l'homologie de B, est concentrée en degrés -1 et 0,
- K', l'homologie de B', est concentrée en degrés 0 et 1.

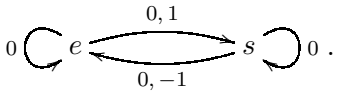
Soit n un entier strictement positif, $a_1, \ldots a_n$ des éléments réduits de $\mathcal{A}$. On note t_i et t'_i respectivement la source et le but de a_i.

On suppose que $m_n(a_1 \otimes \ldots \otimes a_n) \neq 0$. Alors on a $t'_i = t_{i+1}$ pour tout $i = 1, \ldots n-1$. Le degré maximal d'un élément $a_1 \otimes \ldots \otimes a_n$ est $\left[\frac{n+1}{2}\right]$ (où $[x]$ désigne le plus petit entier inférieur ou égal à x), et il est possible d'avoir un élément d'un tel degré en posant

- si n est impair, $t_i = e$ pour i impair et $t_i = s$ pour i pair (ou l'inverse),

- si n est pair, $t_i = e$ pour i impair et $t_i = s$ pour i pair différent de n, ou bien $t_i = e$ pour i pair et $t_i = s$ pour i impair différent de 1.

On peut schématiser ce raisonnement en considérant $\mathcal{A}$ comme une A_∞-catégorie à deux objets : les numéros accolés aux flèches donnent les degrés qu'elles peuvent avoir :



En conséquence, $m_n(a_1 \otimes \ldots \otimes a_n)$ est de degré maximal

$$\left[\frac{n+1}{2}\right] + (2-n) = 2 - \left[\frac{n}{2}\right],$$

or comme on le suppose non nul, son degré est supérieur ou égal à -1. Ceci montre que $n \leq 7$.

Si $n = 6$ ou 7, alors $m_n(a_1 \otimes \ldots \otimes a_n)$ est obligatoirement de degré -1, et $a_1 \otimes \ldots \otimes a_n$ est de degré 3 si $n = 6$ et 4 si $n = 7$. Mais ceci impose que $t_1 = e$ ou $t_n = s$, alors que le fait que $m_n(a_1 \otimes \ldots \otimes a_n)$ soit de degré -1 impose que $t_1 = s$ et $t_n = e$, on a donc une contradiction.

Ainsi $m_n = 0$ pour tout $n \geq 6$. □

Remarque 4.2.3. Si on suppose de plus que X_e est concentré en degré 0, et que X_s est concentré en degrés 0 et 1, on obtient de la même façon que $f_n = 0$ pour tout $n \geq 5$. En effet les hypothèses supplémentaires impliquent que $\mathcal{E}$ est concentré en degré -1, 0 et 1. Si $a_1, \ldots a_n$ sont des éléments réduits de $\mathcal{A}$, alors $f_n(a_1 \otimes \cdots a_n)$ est un élément de $\mathcal{E}$ de degré maximal $1 - \left[\frac{n}{2}\right]$. S'il est non-nul alors on a $n \leq 5$. On obtient de la même façon que dans la démonstration ci-dessus que $f_5 = 0$.

4.2.2 Spécialisation des complexes

On suppose dorénavant que

- le complexe X_e est un module projectif P_0 concentré en degré 0,
- le complexe X_s est concentré en degrés 0 et 1, de la forme $P_1 \xrightarrow{\delta} P_0$ où P_1 est un module projectif,
- pour tout entier non nul i on a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(\mathcal{B})}(X_s, X_s[i]) = 0$.

On est donc dans la situation du lemme 4.2.2 et de la remarque 4.2.3.

Description de la DG-algèbre $\mathcal{E}$

Les composantes non nulles de $\mathcal{E} = \mathcal{E}nd_{\mathcal{B}}(X_e \oplus X_s)$ sont :

$$A^0 = B^{-1} = B'^1 = \mathrm{End}_{\mathcal{B}}(P_0)$$

$$A'^{-1} = B'^0 = \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(P_0,\, P_1) \qquad A'^1 = B^0 = \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(P_1,\, P_0)$$

$$A'^0 = A'^0_a \oplus A'^0_b \qquad \text{avec} \qquad A'^0_a = \mathrm{End}_{\mathcal{B}}(P_1) \quad \text{et} \quad A'^0_b = \mathrm{End}_{\mathcal{B}}(P_0).$$

On peut représenter le complexe $\mathcal{E}$ de cette façon :

$$\begin{array}{ccccc} & & A^0 & & \\ & & \oplus & & \\ A'^{-1} & \xrightarrow{\binom{\delta^*}{\delta_*}} & (A'^0_a \oplus A'^0_b) & \xrightarrow{(\delta_* \ -\delta^*)} & A'^1 \\ & & \oplus & & \\ B^{-1} & \xrightarrow{\binom{\delta^*}{0}} & B^0 \oplus B'^0 & \xrightarrow{(0 \ \delta_*)} & B'^1. \end{array}$$

La table de $m : \mathcal{E}^{\otimes 2} \to \mathcal{E}$, la multiplication de $\mathcal{E}$, est donnée par le tableau 4.2.2, les combinaisons manquantes étant envoyées sur 0. On peut représenter l'algèbre $\mathcal{E}$ sous forme matricielle :

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} A^0 & B'^0 & B'^1 \\ B^0 & A'^0_a & A'^1 \\ B^{-1} & A'^{-1} & A'^0_b \end{pmatrix}.$$

TAB. 4.1 – Table de multiplication de $\mathcal{E}$

	A^0	B'^0	B'^1
A^0	A^0	B'^0	B'^1
B^{-1}	B^{-1}	A'^{-1}	A'^0_b
B^0	B^0	A'^0_a	A'^1

	A'^{-1}	A'^0	A'^1	B^{-1}	B^0
A'^{-1}		A'^{-1}	A'^0_b		B^{-1}
A'^0	A'^{-1}	A'^0	A'^1	B^{-1}	B^0
A'^1	A'^0_a	A'^1		B^0	
B'^0		B'^0	B'^1		A^0
B'^1	B'^0	B'^1		A^0	

Description de l'algèbre graduée $\mathcal{A}$

Les composantes non nulles de $\mathcal{A} = H^*\mathcal{E}$ sont :

- $H^0 = \mathrm{End}_{\mathcal{B}}(P_0)$,
- $H'^0 = \mathrm{End}_{\mathcal{HB}}(X_s)$,
- $K^{-1} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{HB}}(X_s[1],\, X_e)$, $\qquad K^0 = \mathrm{Hom}_{\mathcal{HB}}(X_s,\, X_e)$,
- $K'^0 = \mathrm{Hom}_{\mathcal{HB}}(X_e,\, X_s)$, $\qquad K'^1 = \mathrm{Hom}_{\mathcal{HB}}(X_e,\, X_s[-1])$.

La table de $m_2 : \mathcal{A}^{\otimes 2} \to \mathcal{A}$, la multiplication de $\mathcal{A}$, est donnée par le tableau 4.2.

TAB. 4.2 – Table de multiplication de $\mathcal{A}$

	H^0	H'^0	K^{-1}	K^0	K'^0	K'^1
H^0	H^0				K'^0	K'^1
H'^0		H'^0	K^{-1}	K^0		
K^{-1}	K^{-1}					H'^0
K^0	K^0				H'^0	
K'^0		K'^0		H^0		
K'^1		K'^1	H^0			

Cette structure multiplicative équivaut à la donnée d'une structure d'algèbre sur H^0 et sur H'^0, d'une structure de $(H'^0,\, H^0)$-bimodule sur K^{-1} et K^0, d'une structure de $(H^0,\, H'^0)$-bimodule sur K'^0 et K'^1, et de morphismes de $(H^0,\, H^0)$-bimodules (respectivement de $(H'^0,\, H'^0)$-bimodules) :

$$\begin{aligned} \mu_i : K'^i \otimes_{H'^0} K^{-i} &\longrightarrow H^0 \qquad i = 0,\, 1 \\ \mu'_i : K^{-i} \otimes_{H^0} K'^i &\longrightarrow H'^0 \qquad i = 0,\, 1 \end{aligned}$$

respectant les compatibilités suivantes pour $i = 0,\, 1$:

$$\begin{aligned} \mu_i(k'_1 \otimes k).k'_2 &= k'_1.\mu'_i(k \otimes k'_2) \\ \mu'_i(k_1 \otimes k').k_2 &= k_1.\mu_i(k' \otimes k_2) \end{aligned}$$

où k, k_1 et k_2 sont éléments de K^{-i}, et k', k'_1 et k'_2 sont éléments de K'^i.

Description de la structure de A_∞-algèbre sur $\mathcal{A}$

Nous allons appliquer la construction de la partie 4.1.3. Nous obtiendrons donc une structure de A_∞-algèbre sur $\mathcal{A}$ et un quasi-isomorphisme $f : \mathcal{A} \to \mathcal{E}$ de A_∞-algèbres satisfaisant les conditions du théorème 4.1.6.

Nous devons choisir

- une application $f_1 : H^*\mathcal{E} \to \mathcal{E}$ à valeurs dans $Z^*\mathcal{E}$ qui est une section de la projection canonique $Z^*\mathcal{E} \to H^*\mathcal{E}$,

- une application $g_1 : \mathcal{E} \to H^*\mathcal{E}$ dont la restriction à $Z^*\mathcal{E}$ est la projection canonique,
- une application $s : \mathcal{E} \to \mathcal{E}(-1)$ dont la restriction à $B^*\mathcal{E}$ est une section de la surjection $\mathcal{E}(-1) \to B^*\mathcal{E}$ induite par la différentielle de $\mathcal{E}$,

telles que $sd + g_1 f_1 + ds = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$ et $sds = s$.

Afin de décrire ces applications, nous donnerons une base sur k de $\mathcal{E}$ et de $\mathcal{A}$. Nous définirons des applications $f_1 : \mathcal{A} \to \mathcal{E}$, $g_1 : \mathcal{E} \to \mathcal{A}$ et $s : \mathcal{E} \to \mathcal{E}(-1)$ en donnant leurs matrices dans ces bases.

Précisément, les matrices

$$D^{-1},\ D'^{0},\ \Delta^{-1},\ \Delta^{0} \qquad \text{et} \qquad S^{0},\ S'^{1},\ \Sigma^{0},\ \Sigma^{1}$$

seront les matrices respectives des restrictions de d et de s aux sous-espaces

$$B^{-1},\ B'^{0},\ A'^{-1},\ A'^{0} \qquad \text{et} \qquad B^{0},\ B'^{1},\ A'^{0},\ A'^{1}$$

et les matrices

$$F^{-1},\ F^{0},\ F'^{0},\ F'^{1},\ \Phi \qquad \text{et} \qquad G^{-1},\ G^{0},\ G'^{0},\ G'^{1},\ \Gamma$$

seront les matrices respectives des restrictions de f_1 et de g_1 aux sous-espaces

$$K^{-1},\ K^{0},\ K'^{0},\ K'^{1},\ H'^{0} \qquad \text{et} \qquad B^{-1},\ B^{0},\ B'^{0},\ B'^{1},\ A'^{0}$$

Les matrices de d seront connues. Les matrices F^{-1}, F'^{0}, G^{0} et G'^{1} le seront également car les restrictions de f_1 aux sous-espaces K^{-1} et K'^{0} sont des inclusions canoniques, et les restrictions de g_1 aux sous-espaces B^{0} et B'^{1} sont des projections canoniques.

Les conditions devant être vérifiées par f_1, g_1, et s sont alors équivalentes aux conditions suivantes :

- les matrices $\begin{pmatrix} G^{-1} & D^{-1} \\ 0 & F^{0} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} F^{-1} & 0 \\ S^{0} & G^{0} \end{pmatrix}$ sont inverses l'une de l'autre,
- les matrices $\begin{pmatrix} G'^{0} & D'^{0} \\ 0 & F'^{1} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} F'^{0} & 0 \\ S'^{1} & G'^{1} \end{pmatrix}$ sont inverses l'une de l'autre,
- les matrices $\begin{pmatrix} \Sigma^{0} & \Gamma & \Delta^{0} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \Delta^{-1} \\ \Phi \\ \Sigma^{1} \end{pmatrix}$ sont inverses l'une de l'autre.

TAB. 4.3 – Table de f_2

	H^0	H'^0	K^{-1}	K^0	K'^0	K'^1
H^0	·	·	·	·	·	B'^0
H'^0	·	A'^{-1}	·	B^{-1}	·	·
K^{-1}	·	·	·	·	·	A'^{-1}
K^0	B^{-1}	·	·	·	A'^{-1}	A'^0_s
K'^0	·	·	·	·	·	·
K'^1	·	B'^0	·	·	·	·

On posera ensuite $m_2 = g_1 m(f_1 \otimes f_1)$ et $f_2 = -sm(f_1 \otimes f_1)$. La table 4.3 donne les espaces d'arrivée de f_2, en notant A'^0_s l'image de $s : A'^1 \to A'^0$.

L'image de f_2 sera donc incluse dans le sous-espace

$$A'^{-1} \oplus A'^0_s \oplus B^{-1} \oplus B'^0.$$

On utilisera ensuite la formule $f_3 = sm(f_2 \otimes f_1 - f_1 \otimes f_2)$. L'image de f_3 sera donc incluse dans le sous-espace $A'^{-1} \oplus B^{-1} \oplus B'^0$.

Nous pouvons ainsi montrer que l'image de $m_3 = g_1 m(f_2 \otimes f_1 - f_1 \otimes f_2)$ sera *a priori* non nulle sur 28 des 216 sous-espaces qui composent $\mathcal{A}^{\otimes 3}$.

Nous utiliserons ensuite les formules :

$$\begin{aligned} f_4 &= sm(-f_1 \otimes f_3 + f_2 \otimes f_2 - f_3 \otimes f_1) \\ m_4 &= g_1 m(f_1 \otimes f_3 - f_2 \otimes f_2 + f_3 \otimes f_1) \\ m_5 &= g_1 m(f_1 \otimes f_4 - f_2 \otimes f_3 + f_3 \otimes f_2 - f_4 \otimes f_1). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Nous savons grâce au lemme 4.2.2 et à la remarque qui le suit que les autres applications f_n et m_n seront nulles.

Remarque 4.2.4. Supposons que le complexe $X_e \oplus X_s$ est parfait et générateur de $\mathcal{DB}$. Alors, en conséquence du théorème 4.1.8, les catégories $\mathcal{DB}$ et $\mathcal{D}_\infty\mathcal{A}$ sont équivalentes.

4.3 $\mathrm{PSL}_2(q)$ avec $q \equiv \pm 3 \pmod 8$

On suppose que k est un corps algébriquement clos de caractéristique 2, et que q est une puissance d'un nombre premier telle que $q \equiv \pm 3 \pmod 8$.

Nous savons que le normalisateur d'un sous-groupe de Sylow de $\mathrm{PSL}_2(q)$ est isomorphe à $\mathfrak{A}_4$ (*cf* démonstration de la proposition 1.4.5). Ainsi grâce à

[Ro4, théorème 6.8], il existe une équivalence splendide entre le bloc principal de $k\mathrm{PSL}_2(q)$ et l'algèbre $k\mathfrak{A}_4$.

On pose donc $\mathcal{B} = k\mathfrak{A}_4$, et on utilise les notations des sections B.6 et B.7.

On a trois classes d'isomorphismes de modules projectifs indécomposables P_1, P_j et P_{j^2}. Pour $\alpha \in \{1, j, j^2\}$, l'algèbre $\mathrm{End}_{\mathcal{B}}(P_\alpha)$ est isomorphe à kC_2.

Si α et β sont deux élément distincts de $\{1, j, j^2\}$, l'espace vectoriel $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(P_\alpha, P_\beta)$ est de dimension 1, c'est le $(\mathrm{End}_{\mathcal{B}}(P_\alpha), \mathrm{End}_{\mathcal{B}}(P_\beta))$-bimodule trivial. On en choisit un élément-base e_α^β.

De plus, si $\alpha, \beta, \gamma \in \{1, j, j^2\}$, $\alpha \neq \beta$ et $\beta \neq \gamma$, alors on a $e_\alpha^\beta e_\beta^\gamma = 0$ si $\alpha \neq \gamma$. Si $\alpha = \gamma$ alors $e_\alpha^\beta e_\beta^\alpha$ est un élément de carré nul de $\mathrm{End}_{\mathcal{B}}(P_\alpha)$, nous avons donc une base $\{1, \sigma_\alpha\}$ de $\mathrm{End}_{\mathcal{B}}(P_\alpha)$.

Nous notons dorénavant σ au lieu de σ_α, et $t = 1 + \sigma$. Pour un élément $a = \lambda 1 + \mu t$ de kC_2, nous noterons $|a| = \lambda + \mu$. Nous noterons souvent e pour tout e_α^β.

4.3.1 Les complexes X_e et X_s

On considère le complexe X_e concentré en degré 0, égal au module P_1, et le complexe X_s concentré en degrés 0 et 1 défini par :

$$d = \begin{pmatrix} e_j^1 \\ e_{j^2}^1 \end{pmatrix} : P_j \oplus P_{j^2} \longrightarrow P_1. \tag{4.4}$$

Nous avons défini dans la section 3.5.3 deux complexes $kX_e(\mathrm{PSL}_2(q))$ et $kX_s(\mathrm{PSL}_2(q))$. Nous montrons dans cette section qu'il existe une équivalence entre la catégorie dérivée du bloc principal de $k\mathrm{PSL}_2(q)$ et celle de l'algèbre $k\mathfrak{A}_4$ qui envoie $kX_e(\mathrm{PSL}_2(q))$ et $kX_s(\mathrm{PSL}_2(q))$ sur les complexes X_e et X_s.

On note Q_0, Q_+ et Q_- des représentants des différentes classes d'isomorphismes des modules projectifs indécomposables du bloc principal de $k\mathrm{PSL}_2(q)$. On suppose qu'ils sont enveloppes projectives de modules simples ayant pour caractères modulaires respectivement σ_0, σ_+ et σ_- (*cf* notations section B.1).

Nous avons montré section 3.5.3 que $kX_e(\mathrm{PSL}_2(q))$ admet pour représentant minimal dans la catégorie des complexes le module Q_0 concentré en degré 0, et que $kX_s(\mathrm{PSL}_2(q))$ admet pour représentant minimal un complexe $Q_+ \oplus Q_- \to Q_0$ concentré en degrés 0 et 1 vérifiant la propriété de disjonction.

Nous utilisons les travaux de K. Erdmann, qui a classé les blocs à groupe de défaut diédral à équivalence de Morita ([Er]), ainsi que les travaux de T.

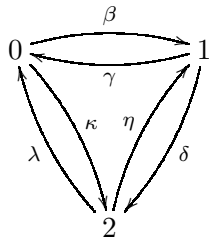
Holm et M. Linckelmann qui ont classé ces blocs à équivalence dérivée près ([Ho1],[Ho2] et [Li1]).

Cas $q \equiv 3 \pmod 8$

Nous savons que dans ce cas la matrice de Cartan du bloc principal de $k\mathrm{PSL}_2(q)$ est

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

donc en utilisant [Er] le bloc principal de $k\mathrm{PSL}_2(q)$ est équivalent au sens de Morita à l'algèbre $D(3\mathcal{K})^{1,1,1}$ définie comme étant l'algèbre du carquois muni de relations suivant :



$$\begin{gathered} \beta\delta = \delta\lambda = \lambda\beta = 0 \\ \gamma\kappa = \kappa\eta = \eta\gamma = 0 \\ \beta\gamma = \kappa\lambda \\ \lambda\kappa = \eta\delta \\ \delta\eta = \gamma\beta. \end{gathered}$$

D'après [Er, corollaire V.2.4.1] cette algèbre est isomorphe à l'algèbre $k\mathfrak{A}_4$. Notons qu'une permutation des sommets $\{0, 1, 2\}$ ne change pas la classe d'isomorphisme de cette algèbre.

Il existe donc une équivalence de Morita entre la catégorie des complexes de modules sur le bloc principal de $k\mathrm{PSL}_2(q)$ et celle des complexes de modules sur $k\mathfrak{A}_4$ qui envoie $kX_e(\mathrm{PSL}_2(q))$ sur X_e et $kX_s(\mathrm{PSL}_2(q))$ sur un complexe

$$X'_s : \qquad P_j \oplus P_{j^2} \xrightarrow{d'} P_1$$

concentré en degrés 0 et 1, vérifiant la propriété de disjonction. Il existe des scalaires λ et μ tels que

$$d' = \begin{pmatrix} \lambda e_j^1 \\ \mu e_{j^2}^1 \end{pmatrix}.$$

Quitte à multiplier par des scalaires non-nuls on peut supposer que λ et μ valent 0 ou 1. Si $\lambda = 0$ alors le morphisme

$$\begin{array}{ccc} X'_s : & P_j \oplus P_{j^2} \xrightarrow{d'} & P_1 \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (e_j^1\ 0)} \\ X'_s[-1] : & & P_j \oplus P_{j^2} \xrightarrow{d'} P_1 \end{array}$$

est un morphisme de complexe non homotope à zéro, ce qui contredit la propriété de disjonction. De même on montre que $\mu = 1$ et donc le complexe X'_s est isomorphe au complexe X_s.

Cas $q \equiv 3 \pmod 8$

Dans ce cas la matrice de Cartan du bloc principal de $k\mathrm{PSL}_2(q)$ est

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

donc en utilisant [Er] le bloc principal de $k\mathrm{PSL}_2(q)$ est équivalent au sens de Morita à l'algèbre $D(3\mathcal{A})^1$ définie comme étant l'algèbre du carquois muni de relations suivant :

$$1 \underset{\gamma}{\overset{\beta}{\rightleftarrows}} 0 \underset{\eta}{\overset{\delta}{\rightleftarrows}} 2 \qquad \begin{matrix} \beta\gamma = \eta\delta = 0 \\ \gamma\beta\delta\eta = \delta\eta\gamma\beta. \end{matrix}$$

Notons R_0, R_1 et R_2 des enveloppes projectives de modules simples associés aux sommets 0, 1 et 2. Il existe alors une équivalence de Morita entre la catégorie des complexes de modules sur le bloc principal de $k\mathrm{PSL}_2(q)$ et celle des complexes de modules sur $D(3\mathcal{A})^1$ qui envoie $kX_e(\mathrm{PSL}_2(q))$ sur le module R_0 concentré en degré 0, et le complexe $kX_s(\mathrm{PSL}_2(q))$ sur un complexe $X'_s : R_1 \oplus R_2 \to R_0$ concentré en degrés 0 et 1 vérifiant la propriété de disjonction.

Lemme 4.3.1. *Le complexe X'_s est isomorphe au complexe*

$$Y_s : \qquad R_1 \oplus R_2 \xrightarrow{\binom{\beta}{\eta}} R_0.$$

Démonstration : Soit d_1 la différentielle de X'_s. Il existe des scalaires λ_0, λ_1, μ_0 et μ_1 tels que

$$d_1 = \begin{pmatrix} \lambda_0.\beta + \lambda_1.\beta\gamma\eta \\ \mu_0.\eta + \mu_1.\eta\gamma\beta \end{pmatrix}.$$

Si $\lambda_0 = 0$ alors le morphisme de complexes

$$\begin{array}{ccc} X'_s : & R_1 \oplus R_2 & \xrightarrow{d_1} R_0 \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (\delta\eta\gamma\ 0)} \\ X'_s[-1] : & & R_1 \oplus R_2 \xrightarrow{d_1} R_0. \end{array}$$

est un morphisme de complexes non homotope à zéro, donc comme X'_s vérifie la propriété de disjonction on a $\lambda_0 \neq 0$. De même on montre que $\mu_0 \neq 0$. L'application

$$f = \frac{1}{\lambda_0\mu_0} \begin{pmatrix} \mu_0 & -\lambda_1.\beta\delta \\ -\mu_1.\eta\gamma & \lambda_0 \end{pmatrix} : R_1 \oplus R_2 \longrightarrow R_1 \oplus R_2$$

est un automorphisme de $R_1 \oplus R_2$, donc le complexe

$$R_1 \oplus R_2 \xrightarrow{f.d_1} R_0$$

est isomorphe au complexe X'_s. On vérifie qu'il s'agit bien du complexe Y_s. □

On utilise maintenant [Li1], qui montre qu'il existe une équivalence dérivée entre les algèbres $D(3\mathcal{A})^1$ et $k\mathfrak{A}_4$. Ces algèbres y sont notés respectivement A_1 et B_1. Dans la démonstration de [Li1, théorème 4] il est introduit un complexe Q de modules sur $D(3\mathcal{A})^1$. Ce complexe est la somme directe de Y_s et du complexe formé par le module $R_1 \oplus R_2$ concentré en degré 0. On note Q_1 ce dernier complexe. M. Linckelmann montre que Q réalise une équivalence

$$F_0 : \qquad \mathcal{D}(D(3\mathcal{A})^1) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(Q,-)} \mathcal{D}(k\mathfrak{A}_4{}^{op}).$$

On note F_1 l'équivalence donnée par la composition de F_0 avec le foncteur contravariant

$$\mathcal{D}(k\mathfrak{A}_4{}^{op}) \longrightarrow \mathcal{D}(k\mathfrak{A}_4)$$

de passage à la catégorie opposée.

La démonstration de [Li1, théorème 4] montre que F_1 envoie Y_s sur P_1 et Q_1 sur $P_j \oplus P_{j^2}$. De plus R_0 est le cône du morphisme de complexes

$$\begin{array}{ccc} Y_s : & R_1 \oplus R_2 & \longrightarrow R_0 \\ \downarrow & \downarrow \mathrm{Id} & \\ Q_1 : & R_1 \oplus R_2 & \end{array}$$

donc en appliquant le foncteur F_0 on a un triangle distingué

$$P_1{}^{op} \to P_j{}^{op} \oplus P_{j^2}{}^{op} \to F_0(R_0) \to P_1{}^{op}[1]$$

puis par passage à la catégorie opposée, on a un triangle distingué

$$P_j \oplus P_{j^2} \to P_1 \to F_1(R_0)[-1] \to (P_j \oplus P_{j^2})[1]$$

ce qui montre que $F_1(R_0)$ est concentré en degrés 0 et 1, de la forme

$$P_j \oplus P_{j^2} \to P_1.$$

Comme il vérifie la propriété de disjonction, il est isomorphe au complexe X_s défini ci-dessus (4.4).

En résumé, nous avons montré qu'il existe toujours une équivalence dérivée entre le bloc principal de $k\mathrm{PSL}_2(q)$ et l'algèbre $k\mathfrak{A}_4$ envoyant les complexes $kX_e(\mathrm{PSL}_2(q))$ et $kX_s(\mathrm{PSL}_2(q))$ sur les complexes X_e et X_s définis au début de cette section.

4.3.2 Représentants minimaux

Les complexes X_e et X_s étant considérés dans la catégorie homotopique $\mathcal{H}(\mathcal{B})$, nous pouvons leur choisir plusieurs représentants différents dans la catégorie des complexes $\mathcal{C}(\mathcal{B})$. Nous allons faire deux choix différents.

Tout d'abord, nous ne modifions pas les complexes X_e et X_s. Comme aucun n'a de facteur direct homotope à zéro, ils sont les plus petits complexes possibles représentant leur classe dans la catégorie homotopique.

La DG-algèbre $\mathcal{E}$

Rappelons la forme matricielle de l'algèbre différentielle graduée $\mathcal{E} = \mathcal{E}nd_{\mathcal{B}}(X_e \oplus X_s)$:

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} A^0 & B'^0 & B'^1 \\ B^0 & A'^0_a & A'^1 \\ B^{-1} & A'^{-1} & A'^0_b \end{pmatrix}.$$

Si on note un élément de $\mathcal{E}$ par

$$\begin{pmatrix} a_1^1 & (\alpha_1^2 \ \alpha_1^3) & a_1^4 \\ \begin{pmatrix} \alpha_2^1 \\ \alpha_3^1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_2^2 & \alpha_2^3 \\ \alpha_3^2 & a_3^3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \alpha_2^4 \\ \alpha_3^4 \end{pmatrix} \\ a_4^1 & (\alpha_4^2 \ \alpha_4^3) & a_4^4 \end{pmatrix}$$

où les a_i^j sont des éléments de kC_2, et les α_i^j des scalaires (et où on ne note pas les e_α^β), alors son image par d est

$$\begin{pmatrix} 0 & (\ 0 & 0\ ) & (\alpha_1^2 + \alpha_1^3)\sigma \\ |a_4^1| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \alpha_4^2\sigma & 0 \\ 0 & \alpha_4^3\sigma \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} |a_2^2 + a_4^4| \\ |a_3^3 + a_4^4| \end{pmatrix} \\ 0 & (\ 0 & 0\ ) & (\alpha_4^2 + \alpha_4^3)\sigma \end{pmatrix}.$$

Calcul du modèle minimal $\mathcal{A}$

Nous savons que l'homologie de A' est concentrée en degré 0, nous en déduisons qu'elle est de dimension 4. Les éléments du noyau $\ker d \cap A'^0$ sont les éléments

$$\begin{pmatrix} a_2^2 & \alpha_2^3 \\ \alpha_3^2 & a_3^3 \end{pmatrix} + a_4^4$$

tels que

$$|a_2^2| = |a_3^3| = |a_4^4|.$$

L'image de A'^{-1} par d admet pour base les éléments $\left(\begin{smallmatrix}\sigma & 0\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)+\sigma$ et $\left(\begin{smallmatrix}0 & 0\\ 0 & \sigma\end{smallmatrix}\right)+\sigma$.

Soit a et b les classes respectives de

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ e_{j^2}^{j} & 1 \end{pmatrix}+1 \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} 1 & e_{j}^{j^2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+1$$

dans H'^0.

les produits ab et ba sont tous les deux égaux à la classe de

$$\begin{pmatrix} 1 & e_{j}^{j^2} \\ e_{j^2}^{j} & 1 \end{pmatrix}+t.$$

Ces trois éléments sont d'ordre 2 et engendrent H'^0, donc ils fournissent un isomorphisme $H'^0 \xrightarrow{\sim} k[C_2 \times C_2]$.

Les homologies K^{-1}, K^0, K'^0 et K'^1 sont toutes de dimension 1, engendrées respectivement par σ, la classe de $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)$, $(1\ 1)$, et la classe de 1. On appelle ces quatre éléments respectivement h^{-1}, h^0, h'^0, et h'^1.

On note 1 l'unité de $H^0 = A^0 = kC_2$, $1'$ celle de $H'^0 = k[C_2 \times C_2]$, et $\sigma' = 1' + a + b + ab$. L'algèbre graduée $\mathcal{A}$ est de dimension 10, on lui choisit la base $\{1, t, 1', a, b, ab, h^{-1}, h^0, h'^0, h'^1\}$.

Sa table de multiplication est donnée par la table 4.4.

TAB. 4.4 – Table de multiplication de $H^*\mathcal{E}$.

	1	t	$1'$	a	b	ab	h^{-1}	h^0	h'^0	h'^1
1	1	t							h'^0	h'^1
t	t	1							h'^0	h'^1
$1'$			1	a	b	ab	h^{-1}	h^0		
a			a	1	ab	b	h^{-1}	h^0		
b			b	ab	1	a	h^{-1}	h^0		
ab			ab	b	a	1	h^{-1}	h^0		
h^{-1}	h^{-1}	h^{-1}								σ'
h^0	h^0	h^0							σ'	
h'^0			h'^0	h'^0	h'^0	h'^0		σ		
h'^1			h'^1	h'^1	h'^1	h'^1	σ			

Soit $\mathcal{A} = H^*\mathcal{E}$. On va maintenant donner une structure de A_∞-algèbre à $\mathcal{A}$, et un quasi-isomorphisme de A_∞-algèbres $f : \mathcal{A} \to \mathcal{E}$. On choisit donc une section s de d, une application $f_1 : \mathcal{A} \to \mathcal{E}$, et une application $g_1 : \mathcal{E} \to \mathcal{A}$

satisfaisant les égalités 4.1 page 137. La table 4.5 donne les valeurs de ces fonctions, ainsi que les bases que l'on choisit.

Les matrices définies dans la section 4.2.2 sont :

$$\begin{pmatrix} G^{-1} & D^{-1} \\ 0 & F^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G'^0 & D'^0 \\ 0 & F'^1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} F^{-1} & 0 \\ S^0 & G^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F'^0 & 0 \\ S'^1 & G'^1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} \Sigma^0 & \Gamma & \Delta^0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cccc|c} & & & & & 1 \\ 1 & & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 & & \\ & & 1 & & 1 & \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & 1 & & & 1 \\ & & & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{pmatrix} \Delta^{-1} \\ \Phi \\ \Sigma^1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & & & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & & & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & & 1 & 1 & \\ 1 & & 1 & 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & & 1 \\ \hline 1 & & & & & \\ & & 1 & & & \end{array}\right)$$

En utilisant la formule $f_2 = sm(f_1 \otimes f_1)$, on calcule les valeurs de f_2, elles sont données par la table 4.6.

Calculons maintenant m_3 et f_3 , grâce aux formules :

$$m_3 = g_1 m(f_2 \otimes f_1 + f_1 \otimes f_2) \qquad f_3 = sm(f_2 \otimes f_1 + f_1 \otimes f_2)$$

On obtient que f_3 est nulle, et que m_3 est non-nulle sur 8 des 216 espaces vectoriels qui composent $(\mathcal{A})^{\otimes 3}$:

$$\begin{array}{lcl} K^0 \otimes K'^0 \otimes K^0 & \to & K^{-1} \\ K'^1 \otimes K^0 \otimes K'^0 & \to & K'^0 \\ H'^0 \otimes K^0 \otimes K'^1 & \to & H'^0 \\ H'^0 \otimes H'^0 \otimes K^0 & \to & K^{-1} \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} K^0 \otimes K'^1 \otimes K^0 & \to & K^0 \\ K'^0 \otimes K^0 \otimes K'^1 & \to & K'^0 \\ K^0 \otimes K'^1 \otimes H'^0 & \to & H'^0 \\ K'^1 \otimes H'^0 \otimes H'^0 & \to & K'^0 \end{array}$$

Ses valeurs précises sont

$$\begin{array}{lrcl} \text{Sur } H'^0 \otimes K^0 \otimes K'^1 : & a \otimes h^0 \otimes h'^1 & \longmapsto & 1+a \\ & ab \otimes h^0 \otimes h'^1 & \longmapsto & 1+a \\ \text{Sur } K^0 \otimes K'^1 \otimes H'^0 : & h^0 \otimes h'^1 \otimes b & \longmapsto & 1+b \\ & h^0 \otimes h'^1 \otimes ab & \longmapsto & 1+b \\ \text{Sur } H'^0 \otimes H'^0 \otimes K^0 : & b \otimes a \otimes h^0 & \longmapsto & h^{-1} \\ & ab \otimes a \otimes h^0 & \longmapsto & h^{-1} \\ & b \otimes ab \otimes h^0 & \longmapsto & h^{-1} \\ & ab \otimes ab \otimes h^0 & \longmapsto & h^{-1} \\ \text{Sur } K'^1 \otimes H'^0 \otimes H'^0 : & h'^1 \otimes b \otimes a & \longmapsto & h'^0 \\ & h'^1 \otimes ab \otimes a & \longmapsto & h'^0 \\ & h'^1 \otimes b \otimes ab & \longmapsto & h'^0 \\ & h'^1 \otimes ab \otimes ab & \longmapsto & h'^0 \end{array}$$

TAB. 4.5 – Valeurs des fonctions d, s, g_1 et f_1.

	bases	d	s	g_1
A^0	1	0	0	1
	t	0	0	t
A'^{-1}	$(e\ 0)$	$\left(\begin{smallmatrix}\sigma & 0\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)+\sigma$	0	0
	$(0\ e)$	$\left(\begin{smallmatrix}0 & 0\\ 0 & \sigma\end{smallmatrix}\right)+\sigma$	0	0
A'^0_a	$\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}e\\ 0\end{smallmatrix}\right)$	0	0
	$\left(\begin{smallmatrix}t & 0\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}e\\ 0\end{smallmatrix}\right)$	$(e\ 0)$	σ'
	$\left(\begin{smallmatrix}0 & e\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)$	0	0	$1+a$
	$\left(\begin{smallmatrix}0 & 0\\ e & 0\end{smallmatrix}\right)$	0	0	$1+b$
	$\left(\begin{smallmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}0\\ e\end{smallmatrix}\right)$	0	0
	$\left(\begin{smallmatrix}0 & 0\\ 0 & t\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}0\\ e\end{smallmatrix}\right)$	$(0\ e)$	σ'
A'^0_b	1	$\left(\begin{smallmatrix}e\\ e\end{smallmatrix}\right)$	0	$1'$
	t	$\left(\begin{smallmatrix}e\\ e\end{smallmatrix}\right)$	0	$1'+\sigma'$
A'^1	$\left(\begin{smallmatrix}e\\ 0\end{smallmatrix}\right)$	0	$\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)$	0
	$\left(\begin{smallmatrix}0\\ e\end{smallmatrix}\right)$	0	$\left(\begin{smallmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$	0
B^{-1}	1	$\left(\begin{smallmatrix}e\\ e\end{smallmatrix}\right)$	0	h^{-1}
	t	$\left(\begin{smallmatrix}e\\ e\end{smallmatrix}\right)$	0	0
B^0	$\left(\begin{smallmatrix}e\\ 0\end{smallmatrix}\right)$	0	0	h^0
	$\left(\begin{smallmatrix}0\\ e\end{smallmatrix}\right)$	0	t	h^0
B'^0	$(e\ 0)$	σ	0	h'^0
	$(0\ e)$	σ	0	0
B'^1	1	0	0	h'^1
	t	0	$(0\ e)$	h'^1

	bases	f_1
H^0	1	1
	t	t
H'^0	$1'$	$\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)+1$
	a	$\left(\begin{smallmatrix}1 & e\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)+1$
	b	$\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ e & 1\end{smallmatrix}\right)+1$
	ab	$\left(\begin{smallmatrix}1 & e\\ e & 1\end{smallmatrix}\right)+t$
K^{-1}	h^{-1}	$1+t$
K^0	h^0	$\left(\begin{smallmatrix}e\\ 0\end{smallmatrix}\right)$
K'^0	h'^0	$(e\ e)$
K'^1	h'^1	1

TAB. 4.6 – Valeurs de f_2.

	H^0	H'^0	K^{-1}	K^0	K'^0	K'^1
H^0						B'^0
H'^0		A'^{-1}				
K^{-1}						
K^0					A'^{-1}	A'^0_a
K'^0						
K'^1		B'^0				

	1 t	$1'$ a b ab	h^{-1} h^0 h'^0 h'^1
1			
t			$(0\ e)$
$1'$			
a		$(0\ e)$ $(0\ e)$	
b		$(e\ 0)$ $(e\ 0)$	
ab		$(e\ 0)$ $(0\ e)$ $(e\ e)$	
h^{-1}			
h^0			$(e\ 0)$ $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$
h'^0			
h'^1		$(0\ e)$	

Les autres éléments de ces ensembles sont envoyés sur 0.

En calculant la table de $m(f_2 \otimes f_2)$ on obtient que son image est engendrée par les éléments $(e\ 0)$ de A'^{-1} et $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ de A'^0, lesquels sont envoyés sur zéro par s et par g_1, donc m_4 et f_4 sont nulles.

Ensuite, par récurrence, les applications m_n et f_n sont nulles pour tout $n \geq 4$.

4.3.3 Variante

On conserve, pour X_e et X_s, les notations de la section précédente. On note toujours $\mathcal{E}$ la DG-algèbre $\mathcal{E}nd_{\mathcal{B}}(X_e \oplus X_s)$, et $\mathcal{A}$ son modèle minimal. On rappelle que $H'^0 = \mathrm{End}_{\mathcal{H}(\mathcal{B})}(X_s)$.

Le complexe X_s choisi n'est *a priori* pas un complexe de H'^0-modules à droite. On sait grâce à [Ke3, 8.3.1] qu'il existe un complexe de $(\mathcal{B},\ H'^0)$-bimodules X'_s tel que X_s et X'_s soient quasi-isomorphes en tant que complexes de $\mathcal{B}$-modules.

On note $\mathcal{E}' = \mathcal{E}nd_{\mathcal{B}}(X_e \oplus X'_s)$, et $\mathcal{A}'$ son modèle minimal. Les A_∞-algèbres $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ sont alors isomorphes, et elles sont même égales en tant qu'algèbres graduées. Mais en calculant une structure de A_∞-algèbre sur $\mathcal{A}'$ et un quasi-isomorphisme $\mathcal{A}' \to \mathcal{E}'$, on obtiendra que f_2 est nulle sur l'espace $H'^0 \otimes H'^0$, car X'_s est un complexe de H'^0-modules à droite.

Nous allons montrer qu'il sufit d'ajouter le complexe $0 \to P_1 \xrightarrow{1} P_1 \to 0$ à X_s pour avoir un complexe de H'^0-modules à droite. On pose

$$X'_s = \qquad \cdots 0 \longrightarrow P_j \oplus P_{j^2} \oplus P_1 \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} e & 0 \\ e & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)} P_1 \oplus P_1 \longrightarrow 0 \cdots .$$

Considérons les éléments a' et b' de A'^0 définis par

$$a' = \begin{pmatrix} 1 & e & e \\ & 1 & e \\ & & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b' = \begin{pmatrix} 1 & & \\ e & 1 & \\ e & e & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a $a'^2 = b'^2 = 1$, et

$$a'b' = b'a' = \begin{pmatrix} 1 & e & e \\ e & t & e \\ e & e & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

De plus a' et b' sont dans le noyau de d, on vérifie que leurs classes dans $H^0(A')$ engendrent $H^0(A')$. On a donc un morphisme d'algèbres

$$r : \mathrm{End}_{\mathcal{H}(\mathcal{B})}(X_s) \to \mathrm{End}_{\mathcal{C}(\mathcal{B})}(X'_s)$$

donné par $a \mapsto a'$, $b \mapsto b'$. Si on le compose avec la projection canonique $\pi : \mathrm{End}_{\mathcal{C}(\mathcal{B})}(X'_s) \to \mathrm{End}_{\mathcal{H}(\mathcal{B})}(X'_s)$, on obtient un isomorphisme. On notera donc a et b les classes dans $\mathrm{End}_{\mathcal{H}(\mathcal{B})}(X'_s)$ de a' et b'.

On choisit $\{1', a, b, ab\}$ pour base de H'^0, puis les éléments-bases suivants des homologies de K^{-1} et K'^0 :

$$h^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma \\ 0 \end{pmatrix} \in K^{-1}, \qquad h'^0 = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \end{pmatrix} \in K'^0,$$

et les éléments-bases h^0 et h'^1 des homologies de K^0 et K'^1, définis comme étant les classes respectives des éléments

$$\begin{pmatrix} e \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in B^0 \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \in B'^1.$$

On choisit ensuite les bases suivantes pour les sous-espaces de $\mathcal{E}'$:

$$B^{-1} = \left\langle \tbinom{1}{0}, \tbinom{t}{0}, \tbinom{0}{1}, \tbinom{0}{t} \right\rangle$$

$$B^0 = \left\langle \tbinom{e}{0\,0}, \tbinom{0}{e\,0}, \tbinom{0\,0}{1}, \tbinom{0\,0}{t} \right\rangle$$

$$B'^0 = \langle (e\ 0\ 0), (0\ e\ 0), (0\ 0\ 1), (0\ 0\ t) \rangle$$

$$B'^1 = \langle (1\ 0), (t\ 0), (0\ 1), (0\ t) \rangle$$

$$A'^{-1} = \left\langle \tbinom{e\,\cdot\,\cdot}{\cdot\,\cdot\,\cdot}, \tbinom{\cdot\,\cdot\,\cdot}{e\,\cdot\,\cdot}, \tbinom{\cdot\,e\,\cdot}{\cdot\,\cdot\,\cdot}, \tbinom{\cdot\,\cdot\,\cdot}{\cdot\,e\,\cdot}, \tbinom{\cdot\,\cdot\,1}{\cdot\,\cdot\,\cdot}, \tbinom{\cdot\,\cdot\,t}{\cdot\,\cdot\,\cdot}, \tbinom{\cdot\,\cdot\,\cdot}{\cdot\,\cdot\,1}, \tbinom{\cdot\,\cdot\,\cdot}{\cdot\,\cdot\,t} \right\rangle,$$

$$A'^0 = \left\langle \tbinom{1\,\cdot\,\cdot}{\cdot\,\cdot\,\cdot}, \tbinom{t\,\cdot\,\cdot}{\cdot\,\cdot\,\cdot}, \tbinom{\cdot\,\cdot\,\cdot}{e\,\cdot\,\cdot}, \tbinom{\cdot\,\cdot\,\cdot}{\cdot\,e\,\cdot}, \tbinom{\cdot\,e\,\cdot}{\cdot\,\cdot\,\cdot}, \tbinom{\cdot\,\cdot\,\cdot}{\cdot\,1\,\cdot}, \tbinom{\cdot\,\cdot\,\cdot}{\cdot\,t\,\cdot}, \tbinom{\cdot\,\cdot\,\cdot}{\cdot\,\cdot\,e}, \right.$$

$$\left. \tbinom{\cdot\,\cdot\,e}{\cdot\,\cdot\,\cdot}, \tbinom{\cdot\,\cdot\,\cdot}{\cdot\,\cdot\,e}, \tbinom{\cdot\,\cdot\,\cdot}{\cdot\,\cdot\,1}, \tbinom{\cdot\,\cdot\,\cdot}{\cdot\,\cdot\,t}, \tbinom{1\,\cdot}{\cdot\,\cdot}, \tbinom{t\,\cdot}{\cdot\,\cdot}, \tbinom{\cdot\,\cdot}{1\,\cdot}, \tbinom{\cdot\,\cdot}{t\,\cdot}, \tbinom{\cdot\,1}{\cdot\,\cdot}, \tbinom{\cdot\,t}{\cdot\,\cdot}, \tbinom{\cdot\,\cdot}{\cdot\,1}, \tbinom{\cdot\,\cdot}{\cdot\,t} \right\rangle$$

$$A'^1 = \left\langle \tbinom{e\,\cdot}{\cdot\,\cdot}, \tbinom{\cdot\,\cdot}{e\,\cdot}, \tbinom{\cdot\,\cdot}{\cdot\,\cdot}{1\,\cdot}, \tbinom{\cdot\,\cdot}{\cdot\,\cdot}{t\,\cdot}, \tbinom{\cdot\,e}{\cdot\,\cdot}, \tbinom{\cdot\,\cdot}{\cdot\,e}, \tbinom{\cdot\,\cdot}{\cdot\,\cdot}{\cdot\,1}, \tbinom{\cdot\,\cdot}{\cdot\,\cdot}{\cdot\,t} \right\rangle.$$

On choisit les applications f_1, g_1 et s, définis par les matrices suivantes, toujours en utilisant les notations de la section 4.2.2 :

$$\begin{pmatrix} G^{-1} & D^{-1} \\ 0 & F^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G'^0 & D'^0 \\ 0 & F'^1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cccc} 1&1&1&& \\ &1&1&& \\ &&&1& \\ &&&&1 \\ \hline &1&&& \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} F^{-1} & 0 \\ S^0 & G^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F'^0 & 0 \\ S'^1 & G'^1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&&& \\ \hline &&&&1 \\ &1&&&1 \\ &&1&& \\ &&&1& \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} \Sigma^0 & \Gamma & \Delta^0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cccccccc|cccc|cccccccc}
&&&&&&&&&&&&1&&&&&&& \\
1&&1&&&&&&1&1&1&1&1&&&&&&& \\
&1&&1&&&&&1&1&&&&&&&&&& \\
&1&&&&&&&&&&&&&1&1&&&& \\
&&&&1&&&&1&&1&&&&&&&&& \\
&&&&&&&&&&&&&1&&&&&& \\
&&&&&&&&1&1&1&1&&1&&&&&& \\
&&&1&&&&&&&&&&&1&1&&&& \\
&&&&&&&&&&&&&&&&1&&& \\
&&&&&&&&&&&&&&&&&1&& \\
&&&&&&&&&&&&&&&&&&1& \\
&&&&&&&&&&&&&&&&&&&1 \\
&&&&&&1&&1&&&&1&1&&&&&& \\
&&1&&&&1&&&1&1&1&1&1&&&&&& \\
&&&&&&&&&&&&&&1&&&&& \\
&&&&&&&&&&&&&&&1&&&& \\
&&&&1&&&&&&&&&&&&1&1&& \\
&&&&&1&&&&&&&&&&&1&1&& \\
&&&&&&1&&&&&&&&&&&&1& \\
&&&&&&&1&&&&&&&&&&&&1
\end{array}\right)$$

et

$$\begin{pmatrix} \Delta^{-1} \\ \Phi \\ \Sigma^1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cccccccccccccccccccc}
1&1&&&&&&&&&&&1&1&&&&&& \\
&&&1&&&&&&&&&&&1&1&&&& \\
&&&&&1&1&&&&&&1&1&&&&&& \\
&&&&&&&1&&&&&&&1&1&&&& \\
&&&&&&&&1&1&&&&&&&1&&& \\
&&&&&&&&1&1&&&&&&&&1&& \\
&&&&&&&&&&1&&&&&&&&1& \\
&&&&&&&&&&&1&&&&&&&&1 \\
\hline
1&&&&&1&&&&&1&&1&&&&&&1& \\
1&&1&1&&1&&1&&&1&&1&&&&&&1& \\
1&&&&1&1&&&1&1&1&&1&&&&1&&1& \\
1&&1&1&1&&1&1&1&1&1&&1&&&&1&&1& \\
\hline
1&&&&&&&&&&&&&&&&&&& \\
&&&&&1&&&&&&&&&&&&&& \\
&&&&&&&&&&&&&&1&&&&& \\
&&&&&&&&&&&&&&&1&&&& \\
&&&&&&&1&&&&&&&&&&&& \\
&&&&&&&&1&&&&&&&&&&& \\
&&&&&&&&&1&&&&&&&&&& \\
&&&&&&&&&&1&&&&&&&&&
\end{array}\right)$$

On peut donc calculer les valeurs de l'application f_2, elles sont données par la table 4.7.

TAB. 4.7 – Valeurs de f_2.

	H^0	H'^0	K^{-1}	K^0	K'^0	K'^1
H^0						B'^0
H'^0				B^{-1}		
K^{-1}						A'^{-1}
K^0					A'^{-1}	$A_a'^0$
K'^0						
K'^1		B'^0				

	1 t	$1'$ a b ab	h^{-1} h^0 h'^0 h'^1
1			
t			$(\cdot\ e\ \cdot)$
$1'$			
a			$\binom{\cdot}{\sigma}$
b			$(\cdot\ \cdot\ 1)$
ab			$\binom{\cdot}{\sigma}$ $(\cdot\ \cdot\ 1)$
h^{-1}			$\begin{pmatrix}\cdot & e & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot\end{pmatrix}$
h^0			$\begin{pmatrix}e & e & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1 & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot\end{pmatrix}$
h'^0			
h'^1		$(\cdot\ \cdot\ 1)$ $(\cdot\ \cdot\ 1)$	

On calcule ensuite les applications f_3 et m_3. On constate que l'on perd la nullité de f_3, elle est non-nulle sur deux sous-espaces de $\mathcal{A}'^{\otimes 3}$:

$$\begin{array}{rccc} f_3 : & H'^0 \otimes K^0 \otimes K'^1 \longrightarrow A'^{-1} & & K^0 \otimes K'^1 \otimes H'^0 \longrightarrow A'^{-1} \\ & a \otimes h^0 \otimes h'^1 \longmapsto \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & e & \cdot \end{pmatrix} & & h^0 \otimes h'^1 \otimes b \longmapsto \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \\ & ab \otimes h^0 \otimes h'^1 \longmapsto \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & e & \cdot \end{pmatrix} & & h^0 \otimes h'^1 \otimes ab \longmapsto \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \end{array}$$

Quant à l'application m_3, on constate qu'elle prend les mêmes valeurs que celle de la section précédente.

Montrons que les applications f_n et m_n sont nulles pour $n \geq 4$: l'image de $m(f_2 \otimes f_2)$ contient un sous-espace de A'^{-1} et l'élément $\begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$ de A'^0, donc elle est annulée par s et par g_1.

L'image de $m(f_3 \otimes f_1)$ contient un sous-espace de A'^{-1} et l'élément $(\cdot \ \cdot \ 1)$ de B'^0, donc elle est annulée par s et par g_1.

Les images de $m(f_1 \otimes f_3)$, $m(f_2 \otimes f_3)$, et $m(f_3 \otimes f_2)$ sont incluses dans A'^1 donc annulées par s et par g_1, l'image de $m(f_3 \otimes f_3)$ est nulle.

Ainsi les f_n et les m_n sont nulles pour tout $n \geq 4$.

La A_3-algèbre $\mathcal{A}'$ est donc *égale* à la A_3-algèbre $\mathcal{A}$ obtenue dans la section précédente.

4.3.4 Non-formalité de $\mathcal{A}$

Définition 4.3.2. *Une A_∞-algèbre $\mathcal{A}$ est dite* formelle *si elle admet une algèbre graduée ordinaire pour modèle minimal.*

Nous allons montrer que la DG-algèbre $\mathcal{E}$ n'est pas formelle. Pour cela nous considérons la A_∞-algèbre obtenue dans les deux sections précédentes, et nous montrons qu'elle n'est pas isomorphe à sa sous-algèbre graduée sous-jacente.

On considère $\mathcal{A}$ comme une algèbre graduée. On note $\mathcal{A}_1$ le modèle minimal que nous avons obtenu dans les deux sections précédentes.

Supposons que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}_1$ sont isomorphes en tant que A_∞-algèbres.

D'après la propriété 4.1.11, cela implique qu'il existe une application $\varphi : \mathcal{A}^{\otimes 2} \to \mathcal{A}(-1)$ telle que pour tout $a_0 \otimes a_1 \otimes a_2 \in \mathcal{A}^{\otimes 3}$ on a

$$\begin{aligned} &m_3(a_0 \otimes a_1 \otimes a_2) \\ &\qquad = a_0\, \varphi(a_1 \otimes a_2) + \varphi(a_0 a_1 \otimes a_2) + \varphi(a_0 \otimes a_1 a_2) + \varphi(a_0 \otimes a_1)\, a_2. \end{aligned}$$

On applique cette égalité à l'élément $ab \otimes h^0 \otimes h'^1$:

$$1 + a = ab\,\varphi(h^0 \otimes h'^1) + \varphi(h^0 \otimes h'^1) + \varphi(ab \otimes h^0)h'^1. \tag{4.5}$$

Comme φ est de degré -1, l'élément $\varphi(ab \otimes h^0)$ est de degré -1 s'il est non-nul, donc l'élément $\varphi(ab \otimes h^0)h'^1$ est multiple de σ'.

En multipliant l'égalité 4.5 à gauche par $1 + a$ on obtient $0 = \sigma'\varphi(h^0 \otimes h'^1)$. En la multipliant par $1 + b$ on obtient $\sigma' = \sigma'\varphi(h^0 \otimes h'^1)$. On a une contradiction.

Ainsi la DG-algèbre $\mathcal{E}$ n'est pas formelle, il est impossible d'en obtenir un modèle minimal $(\mathcal{A}, m_3, \ldots)$ tel que $m_n = 0$ pour tout $n \geq 3$.

4.4 $\mathrm{PGL}_2(q)$ avec $q \equiv \pm 3 \pmod 8$

On suppose toujours que k est un corps algébriquement clos de caractéristique 2. Nous savons que si $q \equiv \pm 3 \pmod 8$, alors il existe une équivalence splendide entre le bloc principal de $k\mathrm{PGL}_2(q)$ et l'algèbre $k\mathfrak{S}_4$ (propriétés 3.6.4 et 3.6.6).

Soit $\mathcal{B} = k\mathfrak{S}_4$, on utilise les notations de l'annexe B, sections B.6 et B.7.

Soit X_e le module projectif Q_0 vu comme complexe concentré en degré 0 et X_s le complexe concentré en degrés 0 et 1 donné par l'application

$$\begin{pmatrix} e' \\ f' \end{pmatrix} : Q_1^2 \longrightarrow Q_0.$$

On vérifie rapidemement que X_s vérifie la propriété de disjonction, en effet on a une injection

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}(\mathcal{B})}(X_s,\, X_s[-1]) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(H^1(X_s),\, Q_1^2)$$

et l'homologie $H^1(X_s)$ ne contient comme sous-quotient simple que le module α_0, qui n'est pas facteur direct du socle de Q_1^2. De toutes façons ceci est conséquence de la remarque ci-dessous.

Remarque 4.4.1. Comme nous le verrons dans la section 4.5.3, les complexes X_e et X_s correspondent aux complexes de Deligne-Lusztig construits dans la section 3.5.3.

On utilise toutes les notations relatives aux DG- et A_∞-algèbres $\mathcal{E}$ et $\mathcal{A}$ définies dans la section 4.2.2.

On choisit les bases suivantes :

$$A^0,\, A'^0_b,\, B^{-1},\, B'^1 :\ (1,\, a,\, b,\, ab)$$

$$A'^{-1},\, B'^{0} :\ \big((e\ 0),(f\ 0),(0\ e),(0\ f)\big)$$

$$A'^{1},\, B^{0} :\ \left(\begin{pmatrix} e' \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f' \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ e' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ f' \end{pmatrix}\right)$$

$$A'^{0}_{a} :\ \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c^2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & c^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\right.$$
$$\left.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c^2 \end{pmatrix}\right)$$

On note toujours $p_1 : Z^*\mathcal{E} \twoheadrightarrow H^*\mathcal{E}$ la projection canonique des cycles sur l'homologie.

Les matrices de la différentielle d de $\mathcal{E}$ sont données page 163, on peut les utiliser pour calculer l'homologie de $\mathcal{E}$.

Les homologies H et H' sont concentrées en degré 0. On a

$$H^0 = \mathrm{End}_{\mathcal{B}}(Q_0) \simeq k[C_2 \times C_2] \qquad \text{et} \qquad H'^0 \simeq kD_8.$$

Pour vérifier cette dernière assertion notons

$$D_8 = \langle r,\, s \mid r^4 = s^2 = 1',\ srs = r^3 \rangle,$$

On alors un isomorphisme d'algèbres $kD_8 \xrightarrow{\sim} H'^0$ défini par

$$r \mapsto p_1\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1+c & c \end{pmatrix} + a\right) \quad \text{et} \quad s \mapsto p_1\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + a\right).$$

On note σ la somme des éléments de $C_2 \times C_2$, et σ' celle des éléments de D_8.

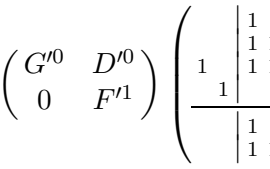
Les homologies K^{-1}, K^0, K'^0 et K'^1 sont de dimension 2, on leur choisit les bases suivantes :

- Base de K^{-1} : $h^{-1} = 1 + b$ et $l^{-1} = \sigma$,
- Base de K^0 : $h^0 = p_1\begin{pmatrix} 0 \\ e' \end{pmatrix}$ et $l^0 = p_2\begin{pmatrix} 0 \\ f' \end{pmatrix}$,
- Base de K'^0 : $h'^0 = \begin{pmatrix} f & e \end{pmatrix}$ et $l'^0 = \begin{pmatrix} 0 & f \end{pmatrix}$,
- Base de K'^1 : $h'^1 = p_1(1)$ et $l'^1 = p_1(1+a)$.

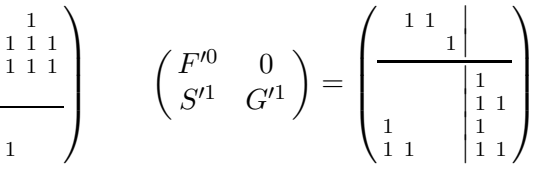
On définit alors les applications f_1, g_1 et s par

$$\begin{pmatrix} G^{-1} & D^{-1} \\ 0 & F^0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & & 1 & & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & 1 & & 1 \\ & & 1 & 1 & 1 \\ \hline & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{pmatrix} F^{-1} & 0 \\ S^0 & G^0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & & 1 & & \\ 1 & 1 & 1 & & \\ & & 1 & & 1 \\ & & 1 & 1 & \\ \hline & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{array}\right)$$

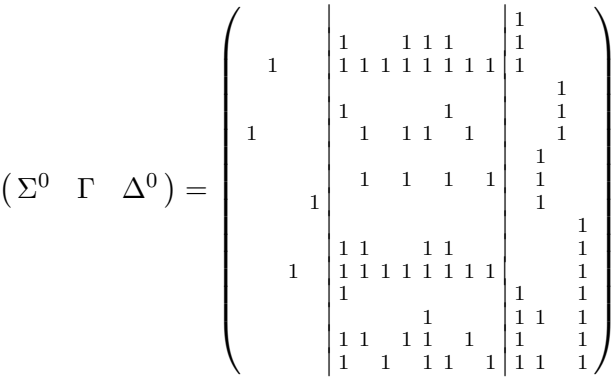
$$\begin{pmatrix} G'^0 & D'^0 \\ 0 & F'^1 \end{pmatrix}$$



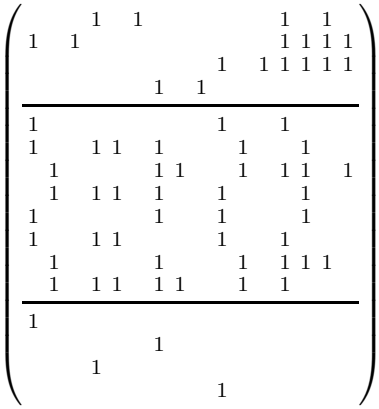
$$\begin{pmatrix} F'^0 & 0 \\ S'^1 & G'^1 \end{pmatrix} =$$



$$\begin{pmatrix} \Sigma^0 & \Gamma & \Delta^0 \end{pmatrix} =$$



$$\begin{pmatrix} \Delta^{-1} \\ \Phi \\ \Sigma^1 \end{pmatrix} =$$



La multiplication m_2 de $\mathcal{A}$ est connue sur H^0 et sur H'^0 grâce aux isomorphismes $H^0 \simeq k[C_2 \times C_2]$ et $H'^0 \simeq kD_8$. On peut la décrire sur les autres sous-espaces ainsi :

Soit V l'algèbre de groupe kC_2, t l'élément non trivial de C_2. Soit $\pi : C_2 \times C_2 \to C_2$ le morphisme défini par $a \mapsto t$, $b \mapsto 1$, et $\pi' : D_8 \to C_2$ le morphisme défini par $r \mapsto t$, $s \mapsto t$. Ces morphismes donnent à V une structure de (H^0, H'^0)-bimodule, et au dual $V^\vee$ une structure de (H'^0, H^0)-bimodule.

On a des isomorphismes de (H^0, H'^0)-modules $K'^0 \xrightarrow{\sim} V$ et $K'^1 \xrightarrow{\sim} V$ définis par $h'^0, h'^1 \mapsto 1$ et $l'^0, l'^1 \mapsto 1 + t$, puis des isomorphismes de (H'^0, H^0)-modules $K^{-1} \xrightarrow{\sim} V^\vee$ et $K^0 \xrightarrow{\sim} V^\vee$ définis par $h^{-1}, h^0 \mapsto 1$ et $l^{-1}, l^0 \mapsto 1 + t$.

La restriction de m_2 au sous-espace $(K^{-1} \oplus K^0 \oplus K'^0 \oplus K'^1)^{\otimes 2}$ est donnée par la table 4.8.

TAB. 4.8 – Extrait de la table de multiplication de $\mathcal{A}$.

	h^{-1} l^{-1}	h^0 l^0	h'^0 l'^0	h'^1 l'^1
h^{-1} l^{-1}				$\ker\pi'$ σ' σ'
h^0 l^0			$\ker\pi'$ σ' σ'	
h'^0 l'^0		$\ker\pi$ σ σ		
h'^1 l'^1	$\ker\pi$ σ σ			

On peut ensuite calculer les valeurs de f_2, elles sont données par les tables 4.9.

Les sous-espaces sur lesquels m_3 est non-nulle sont les suivants :

$$\begin{array}{lcl} K^0\otimes K'^0\otimes K^0 & \to & K^{-1} \\ K'^0\otimes K^0\otimes K'^1 & \to & K'^0 \\ K'^1\otimes K^0\otimes H'^0 & \to & H'^0 \\ K^0\otimes H'^0\otimes H'^0 & \to & K^{-1} \\ K^0\otimes H'^0\otimes K'^1 & \to & H^0 \\ H^0\otimes K^0\otimes H'^0 & \to & K^{-1} \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} K^0\otimes K'^1\otimes K^0 & \to & K^0 \\ K'^1\otimes K^0\otimes K'^0 & \to & K'^0 \\ H'^0\otimes K'^1\otimes K^0 & \to & H'^0 \\ H'^0\otimes H'^0\otimes K'^1 & \to & K'^0 \\ K'^1\otimes H^0\otimes K^0 & \to & H'^0 \\ H'^0\otimes K'^1\otimes H^0 & \to & K'^0 \end{array}$$

L'application f_3 est non-nulle sur les espaces

$$K'^1\otimes H^0\otimes K^0 \qquad \text{et} \qquad H'^0\otimes K'^1\otimes K^0.$$

Son image est incluse dans A'^{-1}, ses valeurs sont

$$\begin{array}{l} h'^1\otimes b\otimes l^0 \longmapsto (e\ \cdot) \\ h'^1\otimes ab\otimes h^0 \longmapsto (e\ \cdot) \\ h'^1\otimes ab\otimes l^0 \longmapsto (e\ \cdot) \\ l'^1\otimes b\otimes h^0 \longmapsto (e\ \cdot) \\ l'^1\otimes b\otimes l^0 \longmapsto (e\ \cdot) \\ l'^1\otimes ab\otimes l^0 \longmapsto (e\ \cdot) \end{array} \qquad \begin{array}{l} r^2\otimes h'^1\otimes h^0 \longmapsto (e\ \cdot) \\ r^2\otimes h'^1\otimes l^0 \longmapsto (e\ \cdot) \\ r^2\otimes l'^1\otimes h^0 \longmapsto (e\ \cdot) \\ sr^2\otimes h'^1\otimes l^0 \longmapsto (e\ \cdot) \\ sr^2\otimes l'^1\otimes h^0 \longmapsto (e\ \cdot) \end{array}$$

Nous allons maintenant montrer que les applications m_n et f_n sont nulles pour $n \geq 4$. Grâce aux formules 4.3 page 146, nous savons qu'il suffit de montrer que les images de $m(f_i \otimes f_{n-i})$ sont annulées par s et par g_1 pour tout $n \geq 4$ et tout i tel que $1 \leq i \leq n-1$. On utilise la table de multiplication 4.2.2 page 143.

L'image de f_3 est le sous-espace de A'^{-1} engendré par l'élément $\tilde{e} = (e\ 0)$. Soit x un élément de $\mathcal{A}$.

TAB. 4.9 – Tables de f_2.

	$1'$	r	r^2	r^3	s	sr	sr^2	sr^3	h^0	l^0
$1'$										
r		$(e\ e)$	$(e\ \cdot)$			$(e\ \cdot)$	$(e\ e)$		b	$b{+}ab$
r^2		$(e{+}f\ e{+}f)$	$(f\ e)$	$(e\ \cdot)$		$(e{+}f\ )$	$(f\ e{+}f)$	$(e\ e)$		
r^3			$(e{+}f\ e{+}f)$	$(e{+}f\ \cdot)$			$(e{+}f\ \cdot)$	$(e{+}f\ e{+}f)$	b	$b{+}ab$
s									b	$b{+}ab$
sr			$(e\ e)$	$(e\ \cdot)$			$(e\ \cdot)$	$(e\ e)$		
sr^2		$(e\ e)$	$(f\ e{+}f)$	$(e{+}f\ \cdot)$		$(e\ \cdot)$	$(f\ e)$	$(e{+}f\ e{+}f)$	b	$b{+}ab$
sr^3		$(e{+}f\ e{+}f)$	$(e{+}f\ \cdot)$			$(e{+}f\ \cdot)$	$(e{+}f\ e{+}f)$			
h'^1			$(e{+}f\ \cdot)$				$(e\ \cdot)$			
l'^1			$(f\ \cdot)$				$(f\ \cdot)$			

	h'^0	l'^0	h'^1	l'^1
1				
a				
b			$(e\ \cdot)$	$(f\ \cdot)$
ab			$(e{+}f\ \cdot)$	$(f\ \cdot)$
h^0	$(\cdot\ e)$	$(e\ \cdot)$	$\begpmatrix \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot \endpmatrix$	$\begpmatrix \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 \endpmatrix$
l^0	$(e\ \cdot)$		$\begpmatrix \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 \endpmatrix$	

Le produit $m(f_1(x) \otimes \tilde{e})$ peut être non-nul si $x \in H'^0$ ou $x \in K'^1$. Si $x \in H'^0$ alors $m(f_1(x) \otimes \tilde{e})$ est élément de A'^{-1}, donc il est annulé par s et par g_1. Si $x \in K'^1$ alors $f_1(x)$ est élément de B'^1, combinaison linéaire de 1 et de a, donc $m(f_1(x) \otimes \tilde{e})$ est élément de B'^0 et c'est un multiple de $(e\ 0)$. Ce vecteur est annulé par s car il appartient à B'^0, et par g_1 comme le montre la matrice G'^0.

Le produit $m(\tilde{e} \otimes f_1(x))$ peut être non-nul si x est élément de H'^0 ou K^0. Si $x \in H'^0$ alors $m(f_1(x) \otimes \tilde{e})$ est encore élément de A'^{-1}, donc il est annulé par s et par g_1. Si $x \in K^0$ alors $f_1(x)$ est un élément de B^0 de la forme $\binom{0}{y}$, on a

$$m(\tilde{e} \otimes f_1(x)) = (e\ 0).\binom{0}{y} = 0.$$

Montrons que l'image de $m(f_2 \otimes f_2)$ est annulée par s et par g_1. L'image de f_2 est engendrée par les vecteurs b et ab de B^{-1}, les vecteurs de la forme $(*\ 0)$ de B'^0, les vecteurs $\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ de A'^0, et par tous les vecteurs de A'^{-1}. Soient x et y deux éléments de l'image de f_2.

Si x ou y appartient à A'^{-1} alors le produit $m(x \otimes y)$ est nul ou élément de A'^{-1}, donc il est annulé par s et par g_1.

Si $x \in A'^0$, $y \in B^{-1}$, alors le produit $m(x \otimes y)$ est nul car x est élément de A'^0_a, *i.e.,* sa composante de degré 1 est le morphisme nul $Q_0 \to Q_0$:

$$\begin{array}{ccc} Q_1^2 & \longrightarrow & Q_0 \\ {\scriptstyle x}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 0} \\ Q_1^2 & \longrightarrow & Q_0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle y} \\ & & Q_0. \end{array}$$

Si $x \in B'^0$, $y \in A'^0$, alors on a

$$m(x \otimes y) = (*\ 0).\binom{0\ 0}{*\ *} = 0.$$

Si x, $y \in A'^0$ alors ils sont combinaison linéaire des matrices $\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$, et $m(x \otimes y)$ est également combinaison linéaire de ces matrices. C'est donc un élément de l'image de s, et par conséquent il est annulé par s et par g_1.

Nous avons donc montré que les applications m_4 et f_4 sont nulles.

Les images de $m(f_2 \otimes f_3)$, $m(f_3 \otimes f_2)$, et $m(f_3 \otimes f_3)$ sont également annulées par s et par g_1, car l'image de f_3 est incluse dans celle de f_2, et nous savons que l'image de $m(f_2 \otimes f_2)$ est annulée par s et par g_1.

Finalement toutes les applications m_n et f_n sont nulles pour $n \geq 4$.

4.5 Les blocs à défaut diédral

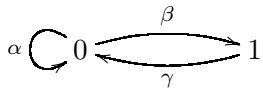
4.5.1 La classification

Les blocs à défaut diédral ont été classés par K. Erdmann ([Er]). Elle a donné une système de représentants des classes d'équivalence de Morita de tels blocs. Ce système est composé d'algèbres de carquois. Il se divise en trois familles, selon que le nombre de classes d'isomorphisme de modules simples soit 1, 2 ou 3. Nous nous intéressons aux blocs contenant deux classes de modules simples.

T. Holm a classé tout ces blocs en classes d'équivalences dérivées ([Ho1]). Il montre en particulier que la classe d'équivalence dérivée d'un bloc à défaut diédral ne dépend que de l'ordre de son groupe de défaut et d'une constante $c \in \{0, 1\}$.

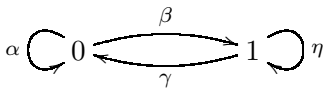
Rappelons les notations de [Er] et [Ho1] : soit k un corps de caractéristique 2, t un entier strictement positif, c un élément de $\{0, 1\}$. On note $D(2\mathcal{A})^{t,c}$ et $D(2\mathcal{B})^{t,c}$ les k-algèbres des carquois munis de relations suivants :

$D(2\mathcal{A})^{t,c}$:



$$\gamma\beta = 0 \qquad \alpha^2 = c(\alpha\beta\gamma)^t \qquad (\alpha\beta\gamma)^t = (\beta\gamma\alpha)^t$$

$D(2\mathcal{B})^{t,c}$:



$$\beta\eta = 0 \quad \alpha^2 = c(\alpha\beta\gamma)^t \qquad \eta\gamma = 0 \quad \alpha\beta\gamma = \beta\gamma\alpha \qquad \gamma\beta = 0 \quad \gamma\alpha\beta = \eta^t.$$

Leurs matrices de Cartan sont respectivement

$$\begin{pmatrix} 4t & 2t \\ 2t & t+1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & t+1 \end{pmatrix}.$$

K. Erdmann a montré que la famille

$$\{D(2\mathcal{A})^{t,c},\ D(2\mathcal{B})^{t,c} \mid t = 2^n,\ n \geq 0,\ c = 0, 1\}$$

(où, bien sur, on identifie $D(2\mathcal{A})^{1,c}$ et $D(2\mathcal{B})^{1,c}$) est un système de représentants des classes d'équivalences de Morita des blocs à défaut diédral et à deux classes d'isomorphismes de modules simples. Précisément, si le groupe de défaut d'un bloc B ayant deux classes d'isomorphismes de modules simples est

diédral d'ordre $4t$ alors B est équivalent au sens de Morita à l'une des quatres algèbres $D(2\mathcal{A})^{t,\,c}$ et $D(2\mathcal{B})^{t,\,c}$, $c = 0,\, 1$.

De plus, T. Holm a montré que la famille

$$\{D(2\mathcal{B})^{t,\,c} \mid t = 2^n,\ n \geq 0,\ c = 0,\, 1\}$$

est un système de représentants des classes d'équivalences dérivées des blocs à défaut diédral ayant deux classes d'isomorphismes de modules simples.

Une de ces algèbres étant fixée, nous noterons P_0 et P_1 les modules projectifs indécomposables correspondant aux modules simples 0 et 1.

Nous avons le lemme suivant :

Lemme 4.5.1. *Soit t une puissance de 2 et c un élément de $\{0,\, 1\}$.*

1. *Soit $B = D(2\mathcal{A})^{t,\,c}$. Les algèbres $\mathrm{End}_B(P_0)$ et kD_{4t} sont isomorphes si et seulement si $c = 0$.*
2. *Soit $B = D(2\mathcal{B})^{t,\,c}$. Les algèbres $\mathrm{End}_B(P_0)$ et $k[C_2 \times C_2]$ sont isomorphes si et seulement si $c = 0$.*

Démonstration : Si $B = D(2\mathcal{A})^{t,\,c}$, alors l'algèbre $\mathrm{End}_B(P_0)$ est définie par générateurs et relations par

$$\mathrm{End}_B(P_0) = \langle \alpha,\, \beta\gamma \mid \alpha^2 = c(\alpha.\beta\gamma)^t,\ (\beta\gamma)^2 = 0,\ (\alpha.\beta\gamma)^t = (\beta\gamma.\alpha)^t \,\rangle.$$

Si $B = D(2\mathcal{B})^{t,\,c}$, alors l'algèbre $\mathrm{End}_B(P_0)$ est définie par générateurs et relations par

$$\mathrm{End}_B(P_0) = \langle \alpha,\, \beta\gamma \mid \alpha^2 = c\,\alpha.\beta\gamma,\ (\beta\gamma)^2 = 0,\ \alpha.\beta\gamma = \beta\gamma.\alpha \,\rangle.$$

Il suffit donc de démontrer le lemme pour $B = D(2\mathcal{A})^{t,\,c}$ avec $t = 2^n$, $n \geq 0$. Il sera alors valide pour $t = 1$, donc pour $B = D(2\mathcal{B})^{t,\,c}$ avec t quelconque.

Nous commençons par montrer que si $B = D(\mathcal{A})^{t,\,0}$ alors les algèbres $\mathrm{End}_B(P_0)$ et kD_{4t} sont isomorphes, puis nous montrerons que si $B' = D(2\mathcal{A})^{t,\,1}$ alors les algèbres $\mathrm{End}_B(P_0)$ et $\mathrm{End}_{B'}(P_0)$ ne sont pas isomorphes.

Posons $B = D(2\mathcal{A})^{t,\,0}$. On utilise la définition de D_{4t} donnée section 1.1.2. Soit φ le morphisme d'algèbres défini par

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & kD_{4t} & \longrightarrow & \mathrm{End}_B(P_0) \\ & s & \longmapsto & 1 + \alpha \\ & sr & \longmapsto & 1 + \beta\gamma \end{array}$$

Nous savons que s et sr engendrent D_{4t}. Pour montrer que φ est bien défini, il faut montrer que $\varphi(s)^2 = \varphi(sr)^2 = 1$, ce qui est clair, puis que $\varphi(r)^{2t} = 1$: On a

$$\begin{aligned}
\varphi(r) &= 1 + \alpha + \beta\gamma + \alpha.\beta\gamma \\
\varphi(r)^2 &= 1 + \alpha.\beta\gamma + \beta\gamma.\alpha + \alpha.\beta\gamma.\alpha + \beta\gamma.\alpha.\beta\gamma + (\alpha.\beta\gamma)^2 \\
\varphi(r)^4 &= 1 + (\alpha.\beta\gamma)^2 + (\beta\gamma.\alpha)^2 + (\alpha.\beta\gamma)^3 + (\beta\gamma.\alpha)^3 \\
&\qquad + \alpha(\beta\gamma.\alpha)^3 + \beta\gamma(\alpha.\beta\gamma)^3 + (\alpha.\beta\gamma)^4.
\end{aligned}$$

Une récurrence montre que pour tout entier $i \geq 2$ on a

$$\begin{aligned}
\varphi(r)^{2^i} = 1 + (\alpha.\beta\gamma)^{2^{i-1}} + (\beta\gamma.\alpha)^{2^{i-1}} + (\alpha.\beta\gamma)^{2^i-1} + (\beta\gamma.\alpha)^{2^i-1} \\
+ \alpha(\beta\gamma.\alpha)^{2^i-1} + \beta\gamma(\alpha.\beta\gamma)^{2^i-1} + (\alpha.\beta\gamma)^{2^i},
\end{aligned}$$

ainsi $\varphi(r)^{2t} = 1$.

Soit ψ le morphisme d'algèbres défini par

$$\begin{array}{rccc}
\psi : & \mathrm{End}_B(P_0) & \longrightarrow & kD_{4t} \\
& \alpha & \longmapsto & 1 + s \\
& \beta\gamma & \longmapsto & 1 + sr.
\end{array}$$

Il est évident que $(\psi(\alpha))^2 = 0$ et $(\psi(\beta\gamma))^2 = 0$, donc pour vérifier que ψ est bien défini, il faut montrer que $(\psi(\alpha.\beta\gamma))^t = (\psi(\beta\gamma.\alpha))^t$. Or t est une puissance de 2 donc on a

$$(\psi(\alpha.\beta\gamma))^t + (\psi(\beta\gamma.\alpha))^t = (\psi(\alpha.\beta\gamma) + \psi(\beta\gamma.\alpha))^t = (r + r^{-1})^t = r^t + r^{-t} = 0$$

et ψ est bien défini. On a $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}$ et $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}$ donc φ et ψ sont des isomorphismes.

On pose maintenant $B = D(2\mathcal{A})^{t,0}$ et $B' = D(2\mathcal{A})^{t,1}$. La remarque suivant le théorème [Er, VI.8.1] montre que les algèbres $\mathrm{End}_B(P_0)$ et $\mathrm{End}_{B'}(P_0)$ ne sont pas isomorphes. Nous en redonnons un démonstration.

Posons $A = \mathrm{End}_B(P_0)$ et $A' = \mathrm{End}_{B'}(P_0)$. On note α et $\beta\gamma$ les générateurs de A et α' et $\beta'\gamma'$ ceux de A'. Il est clair que le radical de A (respectivement de A') est engendré par les éléments α et $\beta\gamma$ (respectivement α' et $\beta'\gamma'$), et que son socle est de dimension 1, engendré par $(\alpha.\beta\gamma)^t$ (respectivement par $(\alpha'.\beta'\gamma')^t$).

En conséquence, si A et A' sont isomorphes alors il existe un élément ω de $\mathrm{rad}A - \mathrm{rad}^2A$ tel que ω^2 est un élément non nul de $\mathrm{soc}A$: c'est l'image de α' par un hypothétique isomorphisme $A' \to A$.

Soit ω un élément de $\mathrm{rad}A - \mathrm{rad}^2A$:

$$\omega = \lambda.\alpha + \mu.\beta\gamma + \omega'$$

où ω' est élément de $\mathrm{rad}^2 A$, et (λ, μ) est élément de $k^2 - \{(0, 0)\}$. On a un automorphisme d'algèbre sur A défini par $\alpha \mapsto \beta\gamma$ et $\beta\gamma \mapsto \alpha$ donc quitte à l'appliquer à ω on peut supposer que $\lambda \neq 0$. Quitte ensuite à multiplier ω par un scalaire, on suppose que $\lambda = 1$.

Il existe des éléments X_1, X_2, X_3 et X_4 de A tels que

$$\omega' = \alpha X_1 \alpha + \alpha X_2 \beta\gamma + \beta\gamma X_3 \alpha + \beta\gamma X_4 \beta\gamma.$$

et des éléments Y_1, Y_2, Y_3 et Y_4 de A tels que

$$\omega^2 = \alpha Y_1 \alpha + \alpha Y_2 \beta\gamma + \beta\gamma Y_3 \alpha + \beta\gamma Y_4 \beta\gamma.$$

en particulier on a

$$\alpha Y_1 \alpha = \alpha[X_2 \beta\gamma + \beta\gamma X_3 + X_1 \alpha.\beta\gamma X_3 + X_2 \beta\gamma.\alpha X_1]\alpha.$$

Comme X_1 est combinaison linéaire d'éléments de la forme $\beta\gamma.(\alpha.\beta\gamma)^i$ et X_3 est combinaison linéaire d'éléments de la forme $(\alpha.\beta\gamma)^i$, on a $X_1\alpha.\beta\gamma X_3 = \beta\gamma X_3 \alpha X_1$, puis

$$\alpha Y_1 \alpha = \alpha(X_2 \beta\gamma + \beta\gamma X_3)(\alpha X_1 \alpha + \alpha).$$

Il existe des scalaires $\lambda_0 \dots \lambda_t$ et $\mu_0 \dots \mu_t$ tels que

$$X_2 = \sum_i \lambda_i (\beta\gamma.\alpha)^i \qquad \text{et} \qquad X_3 = \sum_i \mu_i (\alpha.\beta\gamma)^i.$$

Soit i_0 l'entier défini comme étant le plus petit entier i tel que $\lambda_i \neq \mu_i$ si un tel plus petit entier existe, et par $i_0 = t$ sinon. On a alors

$$\alpha Y_1 \alpha \in \mathrm{rad}^{2i_0+3} A.$$

Supposons maintenant que $\omega^2 \in \mathrm{soc}A$. Comme $\mathrm{soc}A = \mathrm{rad}^{2t} A$ alors $i_0 \geq t - 1$.

On vérifie que l'espace vectoriel $[A, A]$ engendré par les commutateurs de A admet pour base l'ensemble

$$\{(\alpha.\beta\gamma)^i \alpha,\ \beta\gamma(\alpha.\beta\gamma)^i,\ (\alpha.\beta\gamma)^i + (\beta\gamma.\alpha)^i \mid i = 1 \dots t-1\}$$

donc modulo $[A, A]$ on a

$$\begin{aligned} \omega^2 &\equiv (\alpha X_2 \beta\gamma)^2 + (\beta\gamma X_3 \alpha)^2 \\ &\equiv (\alpha.\beta\gamma)^2 X_2^2 + (\beta\gamma.\alpha)^2 X_3^2 \\ &\equiv \sum_{i \geq 0} [\lambda_i^2 (\alpha.\beta\gamma)^{2i+2} + \mu_i^2 (\beta\gamma.\alpha)^{2i+2}] \end{aligned}$$

or si $i < i_0$ alors $\lambda_i^2(\alpha.\beta\gamma)^{2i+2}+\mu_i^2(\beta\gamma.\alpha)^{2i+2} \in [A,\, A]$, et comme $i_0 \geq t-1$ on obtient $\omega^2 \in [A,\, A]$. L'intersection $[A,\, A] \cap \mathrm{soc}A$ étant restreinte à l'espace nul, on a $\omega^2 = 0$, ce qui implique qu'il n'existe pas d'isomorphisme $A' \xrightarrow{\sim} A$. □

On a aussi le lemme suivant :

Lemme 4.5.2. *Soit B un élément de $\{D(2\mathcal{A})^{t,\,c},\, D(2\mathcal{B})^{t,\,c}\}$, et C un complexe de B-module de la forme $P_1^2 \xrightarrow{\delta} P^0$ concentré en degrés 0 et 1. On suppose que C vérifie la propriété de disjonction. Alors C est isomorphe au complexe*

$$C_0 : P_1^2 \xrightarrow{\binom{\gamma}{\gamma\alpha}} P_0.$$

concentré en degré 0 et 1.

Démonstration : Soit $B = D(2\mathcal{A})^{t,\,c}$. Nous allons expliciter l'ensemble des complexes isomorphes au complexe C_0. Cela revient à calculer l'ensemble

$$E = \left\{ f^{-1}.\begin{pmatrix}\gamma\\ \gamma\alpha\end{pmatrix}.g \;\middle|\; f \in \mathrm{End}(P_1^2),\, g \in \mathrm{End}(P_0),\ f,\, g \text{ inversibles} \right\}.$$

Les espaces $\mathrm{Hom}(P_1,\, P_0)$ et $\mathrm{Hom}(P_0,\, P_1)$ admettent pour base les ensembles

$$\mathrm{Hom}(P_1,\, P_0) : \{\gamma(\alpha\beta\gamma)^i,\, \gamma(\alpha\beta\gamma)^i\alpha \mid i = 0 \ldots t-1\}$$

$$\mathrm{Hom}(P_0,\, P_1) : \{\beta(\gamma\alpha\beta)^i,\, \alpha\beta(\gamma\alpha\beta)^i \mid i = 0 \ldots t-1\}.$$

On note I le sous-espace de $\mathrm{Hom}(P_1,\, P_0)$ engendré par les $\gamma(\alpha\beta\gamma)^i$ et les $\gamma(\alpha\beta\gamma)^i\alpha$ tels que $i \geq 1$. On note J_0 et J_1 les radicaux respectifs de $\mathrm{End}(P_0)$ et $\mathrm{End}(P_1)$, puis I' le sous-espace $\mathrm{Hom}(P_1,\, P_0).J_0$. On a alors $I' = \gamma\alpha.\mathrm{End}(P_0) = \gamma.J_0$. Les inclusions

$$I \subset I' \subset \mathrm{Hom}(P_1,\, P_0)$$

sont strictes car $\gamma \in \mathrm{Hom}(P_1,\, P_0) - I'$ et $\gamma\alpha \in I' - I$. Le sous-espace

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix}\gamma\\ \gamma\alpha\end{pmatrix}.g \;\middle|\; g \in \mathrm{End}(P_0),\ g \text{ inversible} \right\}$$

est l'ensemble

$$\left\{ \begin{pmatrix} a_0\gamma + b_0\gamma\alpha + I \\ d_0\gamma\alpha + I \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ 0 & d_0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(k) \right\}.$$

Pour tout élément a de $\mathrm{End}(P_1)$, on note $a = a_0 1 + a_1$ où a_0 est un scalaire et $a_1 \in J_1$. Soit $f = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ un endomorphisme de P_1^2. Alors f est inversible si et seulement si la matrice $f_0 = \left(\begin{smallmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{smallmatrix}\right)$ est inversible. On obtient donc

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a_0\gamma + b_0\gamma\alpha + I \\ c_0\gamma + d_0\gamma\alpha + I \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(k) \right\}.$$

Supposons que C est un complexe

$$P_1^2 \xrightarrow{\delta} P_0$$

Quitte à multiplier à droite par un morphisme $\left(\begin{smallmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{smallmatrix}\right)$ inversible, on peut supposer que la différentielle δ est de la forme

$$\delta = \begin{pmatrix} a\gamma + I \\ d\gamma\alpha + I \end{pmatrix}.$$

où a, $d \in \{0, 1\}$. Si $a = 0$ alors le morphisme

$$\begin{array}{ccc} P_1^2 & \xrightarrow{\delta} & P_0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle (\alpha\beta(\gamma\alpha\beta)^{t-1}\ 0)} \\ & & P_1^2 \xrightarrow{\delta} P_0 \end{array}$$

est un morphisme de complexe non homotope à zéro. Si $d = 0$ alors le morphisme

$$\begin{array}{ccc} P_1^2 & \xrightarrow{\delta} & P_0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle (0\ \beta(\gamma\alpha\beta)^{t-1})} \\ & & P_1^2 \xrightarrow{\delta} P_0 \end{array}$$

est un morphisme de complexe non homotope à zéro.

Ainsi si C vérifie la propriété de disjonction, alors C est isomorphe à C_0. Pour montrer que C_0 vérifie la propriété de disjonction il suffit de montrer que

$$\mathrm{Hom}_B(C_0,\, P_1[-1]) = 0.$$

Aucun élément de la forme βx de $\mathrm{Hom}_B(P_0,\, P_1)$ n'est annulé par $\gamma\alpha$, aucun élément de la forme $\alpha\beta x$ n'est annulé par γ, ainsi pour tout élément x de $\mathrm{Hom}_B(P_0,\, P_1)$, si $\left(\begin{smallmatrix} \gamma \\ \gamma\alpha \end{smallmatrix}\right) x = 0$ alors $x = 0$.

Si $B = (2\mathcal{B})^{t,c}$, alors la propriété se démontre de la même façon. □

4.5.2 Le 2-bloc principal de $\mathrm{PGL}_2(q)$

On suppose que q est une puissance d'un nombre premier impair.

Nous avons les représentants suivants des 2-sous groupes de Sylow de $\mathrm{GL}_2(q)$:

- $S_e \simeq (C_{2^a} \times C_{2^a}) \rtimes C_2$ si $q \equiv 1 \pmod 4$, où l'élément non trivial de C_2 agit sur $C_{2^a} \times C_{2^a}$ par $(x, y) \mapsto (y, x)$. Le centre de ce groupe est le sous-groupe de $C_{2^a} \times C_{2^a}$ contenant les éléments de la forme (x, x).
- $S_s \simeq C_{2^{b+1}} \rtimes C_2$ si $q \equiv 3 \pmod 4$, où l'élément non trivial de C_2 agit sur $C_{2^{b+1}}$ par $x \mapsto x^{2^b-1}$. Il s'agit du groupe semi-diédral $SD_{2^{b+2}}$. Le centre de S_s est le sous-groupe d'ordre 2 de $C_{2^{b+1}}$ (donc le sous-groupe contenant l'élément x^{2^b} si x est un générateur de $C_{2^{b+1}}$).

Dans les deux cas, le centre du sous-groupe de Sylow S est l'intersection de S avec le centre de $\mathrm{GL}_2(q)$. Ainsi le quotient $S/Z(S)$ est un 2-sous-groupe de Sylow de $\mathrm{PGL}_2(q)$.

Dans le premier cas on a $S_e/Z(S_e) \simeq D_{2^a+1}$, dans le deuxième on a $S_s/Z(S_s) \simeq D_{2^b+1}$. On pose $a' = \mathrm{Max}\{a, b\}$, et $t = 2^{a'-1}$.

Les groupes de défaut du bloc principal de $k\mathrm{PGL}_2(q)$ sont donc isomorphes au groupe diédral D_{4t}. Nous savons (*cf* B.2) que ce bloc a deux classes d'isomorphismes de modules simples, et que sa matrice de Cartan est

- $\begin{pmatrix} 4t & 2t \\ 2t & t+1 \end{pmatrix}$ si $q \equiv 1 \pmod 4$,
- $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & t+1 \end{pmatrix}$ si $q \equiv 3 \pmod 4$.

Nous en déduisons donc que si $q \equiv 1 \pmod 4$ alors il existe $c \in \{0, 1\}$ tel que le bloc principal de $k\mathrm{PGL}_2(q)$ soit équivalent au sens de Morita à l'algèbre $D(2\mathcal{A})^{t,c}$, et que si $q \equiv 3 \pmod 4$ alors il existe $c \in \{0, 1\}$ tel que le bloc principal de $\mathrm{PGL}_2(q)$ soit équivalent au sens de Morita à l'algèbre $D(2\mathcal{B})^{t,c}$.

Nous savons que le module $kX_e(\mathrm{PGL}_2)$ défini dans la 3.5.3 est isomorphe à l'enveloppe projective du module trivial, et la propriété 3.5.3 nous dit que $\mathrm{End}_B(kX_e) \simeq D_{2^{a+1}}$. Le lemme 4.5.1 implique donc que $c = 0$.

Nous obtenons également que quelle que soit la congruence de q modulo 4, il existe une équivalence dérivée entre le bloc principal de $\mathrm{PGL}_2(q)$ et l'algèbre $D(2\mathcal{B})^{t,0}$.

4.5.3 Les complexes X_e et X_s

Soit B le bloc principal de $k\mathrm{PGL}_2(q)$. Nous savons que B a deux classes d'isomorphismes de modules projectifs indécomposables. Nous notons R_0

et R_1 deux représentants de ces classes, R_0 étant l'enveloppe projective du module trivial.

Nous avons construit dans les sections 3.5.2 et 3.5.3 deux complexes de B-modules $kX_e(\mathrm{PGL}_2(q))$ et $kX_s(\mathrm{PGL}_2(q))$. Nous savons que $kX_e(\mathrm{PGL}_2(q))$ est une enveloppe projective du module trivial et que $kX_s(\mathrm{PGL}_2(q))$ est un complexe concentré en degrés 1 et 2 de la forme $R_1^2 \to R_0$ vérifiant la propriété de disjonction.

Soit $E(B)$ l'élément de la famille $\{D(2\mathcal{A})^{t,0},\ D(2\mathcal{B})^{t,0}\}$ tel qu'il existe une équivalence de Morita $F : B\text{-mod} \to E(B)\text{-mod}$.

Si $\equiv 3 \pmod 4$ alors $E(B) = D(2\mathcal{B})^{t,0}$ où $t = 2^{b-1}$. Nous avons donc $F(kX_e) \simeq P_0$, et $F(kX_s)$ est isomorphe au complexe $P_1^2 \to P_0$ muni de la différentielle $\delta = \binom{\gamma}{\gamma\alpha}$. En effet, nous connaissons ses composantes puisque F est une équivalence de Morita, puis le fait qu'il vérifie la propriété de disjonction impose cette différentielle grâce au lemme 4.5.2. Nous notons Y_e et Y_s ces deux complexes.

Si $q \equiv 1 \pmod 4$, alors $E(B) = D(2\mathcal{A})^{t,0}$ où $t = 2^{a-1}$. Nous avons donc $F(kX_e) \simeq P_0$, et $F(kX_s)$ est isomorphe au complexe $P_1^2 \to P_0$ muni de la différentielle $\delta = \binom{\gamma}{\gamma\alpha}$, toujours grâce au lemme 4.5.2. Nous notons Z_e et Z_s ces deux complexes.

La proposition [Ho1, 2.1] montre que pour t et c fixés, les catégories dérivées de $D(2\mathcal{A})^{t,c}$ et de $D(2\mathcal{B}^{t,c})$ sont équivalentes. Nous pourrons donc nous contenter d'étudier le cas de $D(2\mathcal{B})^{t,0}$. Nous devons cependant déterminer l'image des complexes Z_e et Z_s.

La proposition [Ho1, 2.1] donne un complexe de $D(2\mathcal{A})$-modules Q réalisant une équivalence

$$G : \mathcal{D}(D(2\mathcal{A})) \xrightarrow[\sim]{\mathrm{Hom}(Q,-)} \mathcal{D}(D(2\mathcal{B})^{op})$$

Notons P_0 et P_1 les modules projectifs indécomposables de $D(2\mathcal{A})$ et P_0', P_1' ceux de $D(2\mathcal{B})$.

Le complexe Q est défini comme étant la somme directe $Q = Q_0 \oplus Q_1$, où Q_1 est le module P_1 concentré en degré 0 et Q_0 est le complexe $\binom{\gamma}{\gamma\alpha}$: $P_1^2 \to P_0$ concentré en degrés 0 et 1 (donc un décalé du complexe Z_s).

La démonstration de la propriété [Ho1, 2.1] montre que l'image du complexe Q_0 par l'équivalence G est le module P_0' (donc le module Y_e), et que l'image du module Q_1 est le module P_1'. De plus, le module P_0 est isomorphe

au cône du morphisme

$$\begin{array}{ccccccccc} Q_0 : & & 0 & \longrightarrow & P_1^2 & \xrightarrow{\delta} & P_0 & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & & & \downarrow \mathrm{Id} & & \downarrow & & \\ Q_1^2 : & & 0 & \longrightarrow & P_1^2 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Par application du foncteur G on obtient un triangle distingué de la catégorie dérivée de $D(2\mathcal{B})^{op}$, puis en passant à la catégorie opposée on obtient le triangle distingué de la catégorie dérivée de $D(2\mathcal{B})$:

$$G(P_0) \longrightarrow {P'_1}^2 \longrightarrow P'_0 \longrightarrow G(P_0)[1]$$

Ainsi $G(P_0)$ est isomorphe à un complexe ${P'_1}^2 \to P'_0$ concentré en degrés 0 et 1. Comme de plus il vérifie la propriété de disjonction, il est isomorphe au complexe Y_s.

Finalement, les complexes Z_e et Z_s sont envoyés respectivement sur Y_s et Y_e par l'équivalences G.

Nous remplaçons maintenant les notations Z_e et Z_s par X_e et X_s. Il suffit donc de traiter le cas de $\mathcal{B} = D(2\mathcal{B})^{t,0}$ où t est une puissance de 2 supérieure ou égale à 2, en notant X_e le complexe P_0 concentré en degré 0, et X_s le complexe $\binom{\gamma}{\gamma\alpha} : P_1^2 \to P_0$ concentré en degrés 0 et 1.

Remarque 4.5.3. Le fait que le complexe X_s soit décalé par rapport au complexe de Deligne-Lusztig ne change que le degré de certains sous-espaces des algèbres $\mathcal{E}$ et $\mathcal{A}$ que nous obtiendrons : si l'on avait gardé un complexe concentré en degrés 1 et 2, alors les sous-espaces B^{-1}, B^0, B'^0 et B^1 de $\mathcal{E}$ ainsi que les sous-espaces K^{-1}, K^0, K'^0 et K^1 de $\mathcal{A}$ auraient été en degrés respectifs -2, -1, 1 et 2 (au lieu de -1, 0, 0 et 1).

Remarque 4.5.4. L'algèbre $D(2\mathcal{B})^{2,0}$ est isomorphe à l'algèbre $k\mathfrak{S}_4$, *cf* [Er, II.7.5]. Ceci justifie le choix des complexes X_e et X_s si $q \equiv \pm 3 \pmod 8$ dans la section 4.4.

4.6 $\mathrm{PGL}_2(q)$ avec q impair

Nous allons généraliser le résultat obtenu dans la section 4.4 au cas où q est une puissance d'un nombre premier impair quelconque.

4.6.1 Applications f_1, g_1 et s

Soit t une puissance de 2 supérieure ou égale à 2, et $\mathcal{B}$ l'algèbre $D(2\mathcal{B})^{t,0}$ telle qu'elle est définie page 167.

L'algèbre $\mathcal{B}$ a deux classes d'isomorphismes de modules projectifs indécomposables, on en choisit des représentants P_0 et P_1. Leurs algèbres d'endomorphismes sont décrites par générateurs et relations par :

$$\mathrm{End}_{\mathcal{B}}(P_0) = \langle \alpha,\, \beta\gamma \mid \alpha^2 = (\beta\gamma)^2 = 0,\ \alpha.\beta\gamma = \beta\gamma.\alpha \rangle$$

$$\mathrm{End}_{\mathcal{B}}(P_1) = \langle \eta \mid \eta^{t+1} = 0 \rangle$$

Les k-espaces vectoriels de morphismes ont pour bases

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(P_0,\, P_1) : \{\beta,\, \alpha\beta\}$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(P_1,\, P_0) : \{\gamma,\, \gamma\alpha\}$$

Les éléments $\beta\gamma$ et η annulent ces deux espaces, l'élément α annule $\alpha\beta$ et $\gamma\alpha$.

Soit X_e le module P_0 vu comme complexe concentré en degré 0, et X_s le complexe

$$\begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma\alpha \end{pmatrix} : P_1^2 \longrightarrow P_0$$

concentré en degrés 0 et 1.

On utilise toutes les notations définies dans la section 4.2.2, donc $\mathcal{E}$ est la DG-algèbre $\mathcal{E}nd_{\mathcal{B}}(X_e \oplus X_s)$ et $\mathcal{A}$ est son modèle minimal.

Les complexes X_e et X_s vérifient les hypothèses du lemme 4.2.2 et de la remarque 4.2.3, donc le modèle minimal que nous obtiendrons sera une A_5-algèbre. Nous allons montrer que l'on peut choisir une A_3-algèbre.

Nous faisons les choix des bases suivantes pour la DG-algèbre $\mathcal{E}$:

$$\begin{aligned}
A'^0,\ A'^0_b,\ B^{-1},\ B'^1 :&\ \ (1,\, \alpha,\, \beta\gamma,\, \alpha.\beta\gamma) \\
A'^{-1},\ B'^0 :&\ \ \left(\begin{pmatrix} \beta & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha\beta & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \alpha\beta \end{pmatrix}\right) \\
A'^1,\ B^0 :&\ \ \left(\begin{pmatrix} \gamma \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma\alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma\alpha \end{pmatrix}\right) \\
A'^0_a :&\ \ \left(\begin{pmatrix} 1\,0 \\ 0\,0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \eta\,0 \\ 0\,0 \end{pmatrix}, \dots \begin{pmatrix} \eta^t\,0 \\ 0\,0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\,1 \\ 0\,0 \end{pmatrix}, \dots \begin{pmatrix} 0\,\eta^t \\ 0\,0 \end{pmatrix},\right. \\
&\qquad\qquad \left. \begin{pmatrix} 0\,0 \\ 1\,0 \end{pmatrix}, \dots \begin{pmatrix} 0\,0 \\ \eta^t\,0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\,0 \\ 0\,1 \end{pmatrix}, \dots \begin{pmatrix} 0\,0 \\ 0\,\eta^t \end{pmatrix}\right),
\end{aligned}$$

Puis les choix des bases suivantes pour l'homologie $\mathcal{A}$:

$$\begin{aligned} K^{-1} :&\ (\beta\gamma,\, \alpha.\beta\gamma) \\ K^{0} :&\ \left(\tbinom{\overline{0}}{\gamma}, \tbinom{\overline{\gamma\alpha}}{0} \right) \\ K'^{0} :&\ \left(\begin{pmatrix} \alpha\beta & \gamma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \alpha\beta \end{pmatrix} \right) \\ K'^{1} :&\ (\bar{1},\, \bar{\alpha}) \end{aligned}$$

(la base de A'^0 est la base de A'^0_a suivie de celle de A'^0_b).

Nous choisissons des applications f_1, g_1, et s sur les sous-espace B, B', K et K'. Nous obtenons les matrices :

$$\begin{pmatrix} G^{-1} & D^{-1} \\ 0 & F^{0} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc} & & 1 & 1 \\ & & & 1 \\ 1 & & & \\ & 1 & & \\ \hline & & & 1 \\ & & & & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{pmatrix} F^{-1} & 0 \\ S^{0} & G^{0} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc} & & 1 & \\ & & & 1 \\ \hline 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} G'^{0} & D'^{0} \\ 0 & F'^{1} \end{pmatrix} \left(\begin{array}{cc|cc} & & & 1 \\ & & & 1 \\ 1 & & & 1 \\ & 1 & & \\ \hline & & 1 & \\ & & & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{pmatrix} F'^{0} & 0 \\ S'^{1} & G'^{1} \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & & \\ & & 1 & \\ \hline & & & 1 \\ & & & \\ 1 & & & \\ & 1 & & \end{array}\right)$$

On calcule que l'image de $d|_{A'^{-1}}$ est le sous-espace de A'^0 engendré par les éléments

$$\left\{ \tbinom{\eta^t\ 0}{0\ 0} + \alpha.\beta\gamma,\, \tbinom{0\ \eta^t}{0\ 0},\, \tbinom{0\ 0}{\eta^t\ 0} + \beta\gamma,\, \tbinom{0\ 0}{0\ \eta^t} + \alpha.\beta\gamma \right\}. \tag{4.6}$$

On note sous la forme $a = \sum_{i=0\ldots t} a_i \eta^i$ les élément de $\mathrm{End}(P_1)$. Les éléments du noyau de $d|_{A'^0}$ sont les éléments

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + e_0 1 + e_1 \alpha + e_2 \beta\gamma + e_3 \alpha.\beta\gamma$$

tels que $a_0 = d_0 = e_0$, $b_0 = e_1$, et $c_0 = 0$.

Nous allons maintenant expliciter un isomorphisme $kD_{4t} \xrightarrow{\sim} H'^0$, bien que ceci ne nous serve pas dans la suite. On note les éléments de H'^0 par un de leurs représentants dans $\ker d|_{A'^0}$.

Lemme 4.6.1. *On définit un isomorphisme d'algèbre f en posant*

$$\begin{aligned} f :\ kD_{4t} &\longrightarrow H'^0 \\ s &\longmapsto \tbinom{1\,1}{0\,1} + 1 + \alpha \\ r &\longmapsto \tbinom{1\ \ 1}{\eta\ 1+\eta} + 1 + \alpha. \end{aligned}$$

Démonstration : On note $s' = f(s)$, $r' = f(r)$, et $1' = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right) + 1$. Montrons d'abord que f est bien défini. On a $s'^2 = 1'$, puis

$$s'r' = \begin{pmatrix} 1+\eta & \eta \\ \eta & 1+\eta \end{pmatrix} + 1$$

donc $(s'r')^2 = 1'$. On montre par récurrence que pour tout entier positif i on a

$$r'^{2^i} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=0\ldots i} \eta^{2^i-2^j} & \eta^{2^i-1} \\ \eta^{2^i} & \sum\limits_{j=0\ldots i} \eta^{2^i-2^j} \end{pmatrix} + 1 + \varepsilon(i)\alpha$$

où $\varepsilon(i)$ est nul si $i \neq 0$ et $\varepsilon(0) = 1$. On a donc

$$r'^{2t} = \begin{pmatrix} 1+\eta^t & 0 \\ 0 & 1+\eta^t \end{pmatrix} + 1,$$

la classe de cet élément est bien égale à celle de $1'$ dans H'^0. Nous avons donc un morphisme d'algèbres. Notons que l'on a

$$r'^{-1} = \begin{pmatrix} 1+\eta & 1 \\ \eta & 1 \end{pmatrix} + 1 + \alpha \qquad \text{et} \qquad r's' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \eta & 1 \end{pmatrix} + 1.$$

Pour montrer que f est bijectif, on décompose le k-espace-vectoriel H'^0 de la façon suivante :

$$\begin{aligned} V_0 &= \left\langle \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right) + 1,\ \left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right) + 1 + \alpha \right\rangle \\ V_i &= \left\langle \left(\begin{smallmatrix}\eta^i&0\\0&0\end{smallmatrix}\right),\ \left(\begin{smallmatrix}0&\eta^i\\0&0\end{smallmatrix}\right),\ \left(\begin{smallmatrix}0&0\\\eta^i&0\end{smallmatrix}\right),\ \left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&\eta^i\end{smallmatrix}\right) \right\rangle \quad \text{pour } i = 1\ldots t-1 \\ V_t &= \left\langle \left(\begin{smallmatrix}0&0\\\eta^t&0\end{smallmatrix}\right),\ \left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&\eta^t\end{smallmatrix}\right) \right\rangle. \end{aligned}$$

La connaissance de l'image et du noyau de d montre que l'on a une décomposition en somme directe

$$H'^0 = \bigoplus_{i=0\ldots t} V_i.$$

Pour tout $i = 1\ldots t$ on note $W_i = \bigoplus_{j=0\ldots i} V_j$. On a alors le résultat suivant :

$$r'^i \in \left(\begin{smallmatrix}0&0\\\eta^i&\eta^i\end{smallmatrix}\right) + V_{i-1} \qquad r'^{-i} \in \left(\begin{smallmatrix}\eta^i&0\\\eta^i&0\end{smallmatrix}\right) + V_{i-1}$$

$$s'r'^i \in \left(\begin{smallmatrix}\eta^i&\eta^i\\\eta^i&\eta^i\end{smallmatrix}\right) + V_{i-1} \qquad r'^i s' \in \left(\begin{smallmatrix}0&0\\\eta^i&0\end{smallmatrix}\right) + V_{i-1}$$

pour tout $i = 0 \dots t$. Ceci se montre par récurrence. Nous en déduisons que la famille

$$\mathcal{F}_i = \{1', s', r'^j, r'^{-j}, s'r'^j, r'^j s' \mid j = 1 \dots i\}$$

est une base de W_i pour tout $i = 1 \dots t-1$. De plus, en ajoutant les éléments r'^t et $r'^t s'$ à la famille $\mathcal{F}_{t-1}$ nous obtenons une base de $W_t = H'^0$.

Ainsi l'image de D_{4t} par f est une base de H'^0, et donc f est un isomorphisme. □

Soit x un élément de H'^0. Nous définissons $f_1(x)$ comme étant l'unique élément $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) + e$ du noyau de $d|_{A'^0}$ tel que $a_t = b_t = c_t = d_t = 0$. Une base de l'image de $d|_{A'^{-1}}$ est donnée ci-dessus (4.6), elle permet de vérifier que la définition de f_1 est correcte.

Nous choisissons alors la restriction de s à A'^1 de façon à obtenir la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} \Delta^{-1} \\ \Phi \\ \Sigma^1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} \begin{smallmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ 1 & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{smallmatrix} \\ \hline & & & & \\ & & & & \\ & & \Phi & & \\ & & & & \\ & & & & \\ \hline \begin{smallmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} \cdot \\ \cdot \\ 1 \\ \cdot \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{smallmatrix} & \begin{smallmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{smallmatrix} \end{array}\right)$$

Les matrices Δ^{-1} et Σ^1 sont de hauteur 4 et de largeur $4t+8$, elles sont ici décomposées en quatre blocs de largeur $t+1$ et un bloc de largeur 4.

Par définition de f_1, l'espace vectoriel engendré par les vecteurs-lignes de Δ^{-1} et de Φ est de rang $(4t+1)$. Les vecteurs-lignes de Σ^1 ne sont pas dans le noyau de $d|_{A'^0}$, et aucune de leurs combinaisons linéaires non nulles n'y est non plus, donc la matrice A est inversible.

Soit $\begin{pmatrix} \Sigma & \Gamma & \Delta \end{pmatrix}$ sa matrice inverse. On pose :

$$\begin{pmatrix} \Sigma^0 & \Gamma & \Delta^0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c} \begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \end{matrix} & \Gamma & \begin{matrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & 1 \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix} \end{array}\right) \tag{4.7}$$

La matrice Δ^0 est la matrice de $d|_{A'^0}$, alors que la matrice Σ^0 a été choisie. On vérifie que

$$A\Sigma^0 = \begin{pmatrix} \mathrm{Id} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A\Delta^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathrm{Id} \end{pmatrix}$$

et comme $\begin{pmatrix} \Sigma & \Gamma & \Delta \end{pmatrix}$ est la matrice inverse de A alors

$$A\Gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{Id} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice 4.7 est donc l'inverse de la matrice A. Nous avons terminé de définir les applications f_1, g_1 et s.

4.6.2 Calcul de la A_∞-structure de $\mathcal{A}$

Nous appliquons maintenant les formules 4.2 page 137, qui expriment les applications m_n et f_n pour $n \geq 2$.

Propriété 4.6.2. *On a $m_n = 0$ et $f_n = 0$ pour tout $n \geq 4$.*

Démonstration : Nous savons que l'image de f_2 est incluse dans la somme des sous-espaces A'^{-1}, B^{-1}, B'^0, et $A'^0_{s'}$, où $A'^0_{s'}$ représente l'intersection de A'^0 avec l'image de f_2. Si x et y sont deux élément de $\mathcal{A}$ tels que $f_2(x \otimes y) \in A'^0$,

alors $m(f_1(x) \otimes f_1(y))$ est élément de A'^1, donc $x \in K^0$ et $y \in K'^1$. Alors $f_1(x)$ est de la forme $\binom{0}{*}$, élément de B^0, puis $m(f_1(x) \otimes f_1(y))$ est de la même forme, élément de A'^1. Donc $f_2(x \otimes y)$ est combinaison linéaire des matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.8}$$

Soit x un élément de l'image de f_1 et y un élément de l'image de f_2. Nous traitons tous les cas où l'une des deux composantes $sm(x \otimes y)$ et $sm(y \otimes x)$ de f_3 peut être non nulles :

Si $x \in A'_0$, $y \in A'^0_{s'}$, alors x est élément de $f_1(H'^0)$ donc il est de la forme $\binom{a\ b}{c\ d} + e$ où $a_t = b_t = c_t = d_t = 0$, et y est combinaison linéaire des matrices 4.8. En conséquence, les produits $m(x \otimes y)$ et $m(y \otimes x)$ sont de la forme $\binom{a\ b}{c\ d}$ avec $a'_t = b'_t = c'_t = d'_t = 0$. Donc l'application s les annule.

Si $y \in A'^0_{s'}$, $x \in B^0$, alors x est de la forme $\binom{0}{*}$, et y est combinaison linéaire des matrices 4.8, donc $sm(y \otimes x)$ est élément de B^0, toujours de la forme $\binom{0}{*}$, et il est annulé par s.

Si $x \in B'^1$, $y \in B^{-1}$, alors $m(y \otimes x)$ est élément de A'^0_b, donc il est annulé par s.

Si $x \in B^0$, $y \in B'^0$, alors x est de la forme $\binom{0}{*}$, et y est de la forme $(* \ 0)$. De plus le produit d'un élément de $\mathrm{Hom}(P_0, P_1)$ par un élément de $\mathrm{Hom}(P_1, P_0)$ est un multiple de η^t. Donc $sm(x \otimes y)$ est un multiple de l'élément $(\beta \ 0)$ de A'^{-1}.

Si $x \in B'^1$, $y \in A'^0_{s'}$, alors y est en particulier élément de A'^0_a :

$$\begin{array}{ccc} P_1^2 & \longrightarrow & P_0 \\ {\scriptstyle y}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 0} \\ P_1^2 & \longrightarrow & P_0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle x} \\ & & P_0 \end{array}$$

donc le produit $m(x \otimes y)$ est nul.

Nous venons donc de montrer que l'image de f_3 est incluse dans le sous-espace de A'^{-1} engendré par le vecteur $(\beta \ 0)$.

Soit x un élément de l'image de f_1, et y un multiple de $(\beta \ 0)$.

Si le produit $m(x \otimes y)$ est non nul, alors il est élément soit de A'^{-1} (qui est annulé par g_1 et par s), soit de B'^0. Mais alors x est élément de B'^1, et $m(x \otimes y)$ est de la forme $(* \ 0)$ dans B'^0, donc il est annulé par g_1 et par s.

Si le produit $m(y \otimes x)$ est non nul et non élément de A'^{-1}, alors il est élément de B^{-1} et x est un élément de la forme $\binom{0}{*}$ de B^0, donc le produit $m(y \otimes x)$ est nul.

Soient x et y deux éléments de l'image de f_2. Le produit $m(x \otimes y)$ peut être non nul et non élément de A'^{-1} dans trois cas :

Si x, $y \in A'^0_{s'}$, alors le produit $m(x \otimes y)$ est encore combinaison linéaire des matrices 4.8, donc élément de $s(A'^1)$, et il est annulé par g_1 et par s.

Si $x \in A'^0_{s'}$, $y \in B^{-1}$, alors comme $x \in A'^0_a$ le produit $m(x \otimes y)$ est nul.

Si $x \in B'^0$, $y \in A'^0_{s'}$, alors x est de la forme $(* \ 0)$ donc le produit $m(x \otimes y)$ est nul.

Nous venons donc d'obtenir que les applications m_4 et f_4 sont nulles. Les images de $m(f_2 \otimes f_3)$, $m(f_3 \otimes f_2)$, et $m(f_3 \otimes f_3)$ sont aussi annulées par g_1 et s car l'image de f_3 est incluse dans celle de f_2.

Ainsi les applications m_n et f_n sont nulles pour tout $n \geq 4$. □

Annexe A

Contrôle de la fusion

Nous allons dans cette annexe rappeler la définition du contrôle de la fusion.

En 1967, J. Alperin a démontré son théorème de fusion dans son article [Al1]. Il permet de simplifier la définition du contrôle de la fusion, comme le montre la propriété A.2.2.

Dans son livre [Th], J. Thévenaz donne la démonstration de ce théorème dans le cadre plus général des groupes pointés. Nous allons adapter cette démonstration au cas des groupes.

On fixe un groupe fini G et un nombre premier p pour toute cette annexe. Le symbole $<$ signifie "strictement inclus".

A.1 Le théorème de fusion d'Alperin

Soit Q un p-sous-groupe de G, et $\mathcal{N}_Q$ l'ensemble des p-sous-groupes P tels que $Q < P \leq N_G(Q)$. On le munit de la relation d'équivalence engendrée par les inclusions : deux éléments P et P' sont équivalents si l'on peut aller de l'un à l'autre par une chaîne $P = R_0, R_1, \ldots, R_n = P'$ d'éléments de $\mathcal{N}_Q$ telle que pour tout $i = 1 \ldots n$ on ait $R_i \leq R_{i-1}$ ou $R_i \geq R_{i-1}$. Ainsi $\mathcal{N}_Q$ se partage en composantes connexes pour cette relation.

On dit que Q est *faiblement essentiel* si $\mathcal{N}_Q$ n'est pas connexe. Un sous-groupe faiblement essentiel ne peut être un sous-groupe de Sylow car alors $\mathcal{N}_Q$ est vide.

Le groupe $N_G(Q)$ agit par conjugaison sur $\mathcal{N}_Q$ en préservant la relation d'ordre partiel, donc la relation d'équivalence, donc il agit sur l'ensemble des composantes connexes de $\mathcal{N}_Q$. Cette action est transitive par le théorème de Sylow, car toute composante connexe contient un sous-groupe de Sylow.

On dit que Q est *essentiel* si $C_G(Q)$ n'agit pas transitivement sur l'ensemble des composantes connexes de $\mathcal{N}_Q$. Si Q est essentiel, il y a plus d'une composante connexe dans $\mathcal{N}_Q$, et donc Q est faiblement essentiel.

On considère l'action de $C_G(Q)$ sur les composantes connexes de $\mathcal{N}_Q$, on a ainsi des $C_G(Q)$-orbites, qui sont permutées transitivement par le groupe $N_G(Q)/C_G(Q)$.

Soit Y une composante connexe de $\mathcal{N}_Q$ et M le stabilisateur de Y dans $N_G(Q)$ (si Y' est une autre composante connexe de $\mathcal{N}_Q$, alors Y' est conjuguée à Y dans $N_G(Q)$, et donc M', le stabilisateur de Y', est conjugué à M). Soit $\mathcal{Y}$ l'orbite de Y sous l'action de $C_G(Q)$. L'ensemble $MC_G(Q)$ est un sous-groupe de $N_G(Q)$ car $C_G(Q)$ est distingué dans $N_G(Q)$. De plus c'est le stabilisateur de $\mathcal{Y}$. On a les équivalences

- Q est essentiel si et seulement si $MC_G(Q)$ est strictement inclus dans $N_G(Q)$;
- Q est faiblement essentiel si et seulement si M est strictement inclus dans $N_G(Q)$.

En fait Q est faiblement essentiel si et seulement si $N_G(Q)/Q$ contient un sous-groupe propre *fortement p-plongé*, qui est M/Q dans ce cas.

La propriété suivante peut aider à déterminer si un sous-groupe n'est pas essentiel, elle ne servira pas dans la démonstration du théorème d'Alperin. Un p-sous-groupe Q de G est *auto-centralisant* si tout p-sous-groupe de G centralisant Q est inclus dans Q.

Propriété A.1.1. *Si Q est essentiel alors Q est auto-centralisant.*

Démonstration : Soit $H = QC_G(Q)$, R un sous-groupe de Sylow de H. Si Q n'est pas auto-centralisant alors R contient strictement Q, donc $R \in \mathcal{N}_Q$. Soit P un sous-groupe de Sylow de $N_G(Q)$ contenant R. Tout autre sous-groupe de Sylow est de la forme P^g où $g \in N_G(Q)$. On a

$$Q < R^g \leq H^g = H$$

car H est distingué dans $N_G(Q)$. Donc il existe $h \in H$ tel que $R^g = R^h$. Comme $Q \leq R \leq QC_G(Q)$ on peut prendre $h \in C_G(Q)$.

Ainsi P^g et P^h sont dans la même composante connexe de $\mathcal{N}_Q$: ils contiennent tous les deux R^g. Donc la composante connexe de $\mathcal{N}_Q$ contenant Q est dans la même $C_G(Q)$-orbite que celle contenant P^g, et Q n'est pas essentiel. □

Soit P un p-sous-groupe de Sylow de G et soit $\varphi : Q \to R$ un isomorphisme de la catégorie de Frobenius $\mathcal{F}(G)$ tel que Q et R sont inclus dans

P. Il existe donc $g \in G$ tel que φ est induit par la conjugaison par g. Un tel isomorphisme φ est appelé *essentiel* s'il existe un sous-groupe essentiel L et un élément h de $N_G(L)$ tels que $Q \leq L \leq P$ et φ est induit par la conjugaison par h (on a alors $g = hz$ où $z \in C_G(Q)$). On dit que L *correspond* au morphisme essentiel φ.

Si φ est induit par un élément de $N_G(P)$, on dit que φ est *maximal*, *i.e.*, $g = hz$ où $h \in N_G(P)$ et $z \in C_G(Q)$.

Si Q et P sont deux p-sous-groupes de G, $Q \leq P$, on dit que Q est *pleinement normalisé* dans P si P contient un sous-groupe de Sylow de $N_G(Q)$.

On peut maintenant énoncer le théorème de fusion d'Alperin :

Théorème A.1.2. *Soit P un sous-groupe de Sylow de G, tout morphisme $Q \to R$ entre sous-groupes de P induit par la conjugaison par un élément de G est le composé d'un isomorphisme suivi par une inclusion, où l'isomorphisme est le composé d'isomorphismes qui sont soit maximaux, soit essentiels tels que le sous-groupe correspondant est pleinement normalisé dans P.*

Pour démontrer ce théorème on va se ramener au théorème suivant :

Théorème A.1.3. *Soit P un sous-groupe de Sylow de G, Q un sous-groupe de P, et h un élément de G tel que $Q \leq P^h$. Alors il existe des sous-groupes $M_1 \dots M_n$ et des éléments $h_1 \dots h_n$ tels que*

1. *$Q \leq M_i \leq P^{h_1 \dots h_i}$ pour tout i ;*
2. *$h_i \in N_G(M_i)$ pour tout i ;*
3. *$h = h_1 \dots h_n$;*
4. *chaque M_i satisfait une des trois conditions suivantes :*
   (a) *M_i est essentiel et pleinement normalisé dans $P^{h_1 \dots h_i}$;*
   (b) *M_i est maximal ;*
   (c) *$h_i \in C_G(M_i)$.*

Démonstration : Soit d l'entier tel que $|P : Q| = p^d$. On raisonne par induction sur d.

Si $d = 0$, alors $Q = P = P^h$, donc h normalise P, lequel est maximal donc satisfait la condition (b), et le théorème est démontré dans ce cas.

Supposons que d est strictement supérieur à 0. Comme tout sous-groupe d'un p-groupe est sous-normal, il existe des sous-groupes R et R' dans lesquels Q est distingué et tels que

$$Q < R \leq P \qquad \text{et} \qquad Q < R' \leq P^h.$$

Ces deux sous-groupes sont inclus dans $N_G(Q)$. Soit T un sous-groupe de Sylow de $N_G(Q)$ contenant R. Il existe alors $y \in N_G(Q)$ tel que $R' \leq T^y$.

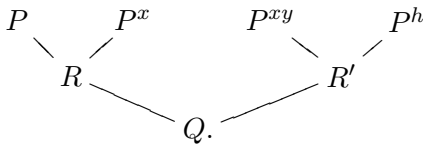
Comme P est un sous-groupe de Sylow, il existe $x \in G$ tel que $T \leq P^x$. On a alors $R \leq P$ et $R \leq P^x$. Comme $|P : R| < |P : Q|$ on peut utiliser l'induction : il existe des sous-groupes $M_1 \dots M_r$ et des éléments $x_1 \dots x_r$ satisfaisant les conditions :

1. $Q \leq M_i \leq P^{x_1 \dots x_i}$ pour $i = 1 \dots r$,
2. $x_i \in N_G(M_i)$ pour $i = 1 \dots r$,
3. $x = x_1 \dots x_r$,
4. les M_i satisfont une des trois conditions (a), (b) et (c).

On a $R' \leq P^{xy}$ et $R' \leq P^h$, donc de la même manière il existe des sous-groupes $M_{r+s+1} \dots M_{r+s+t}$ et des éléments $y_1 \dots y_t$ satisfaisant les conditions :

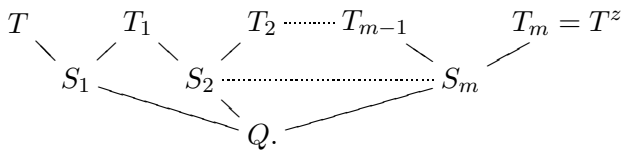
1. $Q \leq M_{r+s+i} \leq P^{xy_1 \dots y_i}$ pour $i = 1 \dots t$,
2. $y_i \in N_G(M_{r+s+i})$ pour $i = 1 \dots t$,
3. $y^{-1}x^{-1}h = y_1 \dots y_t$,
4. pour $i = 1 \dots t$, M_{r+s+i} satisfait une des trois conditions (a), (b) et (c) (la condition (a) étant : pour $i = 1 \dots t$, M_{r+s+i} est essentiel et pleinement normalisé dans $P^{xy_1 \dots y_i}$).

On est dans la situation suivante, où deux groupes sont reliés si celui du haut contient celui du bas :



Il reste donc à donner une décomposition de y. Si Q est essentiel, le résultat est acquis car Q satisfait bien la condition (a) : Q est pleinement normalisé dans P^x car T est un sous-groupe de Sylow de $N_G(Q)$ tel que $Q \leq T \leq P^x$.

Si Q n'est pas essentiel, alors par définition il existe $c \in C_G(Q)$ tel que T^{yc} est dans la même composante connexe que T. Le couple $(Q,\ c^{-1})$ satisfait la condition 4.(c), donc on doit démontrer le résultat pour $z = yc$: z est un élément de $N_G(Q)$ tel que T et T^z sont dans la même composante connexe de $\mathcal{N}_Q$. On a alors le diagramme suivant :



On a $T \leq P^x$, on choisit $z_1 \in G$ tel que $T_1 \leq P^{xz_1}$, puis z_2 tel que $T_2 \leq P^{xz_1z_2}$, puis ainsi de suite jusqu'à z_{m-1} tel que $T_{m-1} \leq P^{xz_1\dots z_{m-1}}$, et pour finir z_m tel que $z = z_1 \dots z_m$.

Les sous-groupes $S_1 \dots S_m$ sont éléments de $\mathcal{N}_Q$, donc ils contiennent strictement Q et on peut utiliser l'induction pour chacun d'entre eux : comme S_i est contenu dans $P^{xz_1\dots z_{i-1}}$ et dans $P^{xz_1\dots z_i}$, alors z_i se décompose de la façon demandée par le théorème, et ceci achève la démonstration. □

Démonstration du théorème A.1.2 : Soit Q, $R \leq P$, et $\varphi : Q \to R$ un morphisme induit par la conjugaison par un élément g de G. On a $Q^g \leq R \leq P$, donc il suffit de montrer que l'isomorphisme $Q \to Q^g$ donné par la conjugaison par g est composé d'isomorphismes du type voulu.

On applique alors le théorème A.1.3 en posant $h = g^{-1}$. On pose ensuite $L_1 = M_1$, $g_1 = h_1^{-1}$, $L_2 = M_2^{g_1}$, $g_2 = h_1h_2^{-1}h_1^{-1}$, et ainsi de suite.

On a donc $g = g_1 \dots g_n$, et g_1 donne par conjugaison un isomorphisme $Q \to Q^{g_1}$, les autres éléments g_i donnent par conjugaison des isomorphismes $Q^{g_1\dots g_{i-1}} \to Q^{g_1\dots g_i}$. De plus $Q^{g_1\dots g_i} \leq L_i$, et $g_i \in N_G(L_i)$ pour tout i.

Soit $i \in \{1 \dots n\}$. Si la condition (c) est vérifiée par le couple (M_i, h_i) alors l'isomorphisme donné par g_i est trivial donc on peut le supprimer. Si la condition (a) est vérifiée alors L_i est essentiel car conjugué à M_i, et il est pleinement normalisé dans P par conjugaison. Enfin si la condition (b) est vérifiée alors g_i induit un isomorphisme maximal. Le théorème est donc démontré. □

Le corollaire suivant est juste une autre formulation du résultat :

Corollaire A.1.4. *Soit P un sous-groupe de Sylow de G, Q un sous-groupe de P, et g un élément de G tel que $Q^g \leq P$. Alors il existe des sous-groupes $L_1 \dots L_n$ de P, des éléments h_i de $N_G(L_i)$, et un élément z de $C_G(Q^g)$ tels que :*

- *$Q^{h_1\dots h_i} \leq L_i$ pour $i = 1 \dots n$.*
- *$g = h_1 \dots h_n z$.*

De plus chaque L_i est soit égal à P, soit essentiel pleinement normalisé dans P.

A.2 Conséquence sur le contrôle de la fusion

On donne tout d'abord la définition de la notion de contrôle de la fusion, puis une simplification grâce au théorème d'Alperin.

Définition A.2.1. *Soit G un groupe fini, H un sous-groupe de G, p un nombre premier. On dit que H contrôle la fusion des p-sous-groupes de G si*

- *H contient un p-sous-groupe de Sylow P de G ;*
- *si Q est un p-sous-groupe de P et g un élément de G tel que ${}^gQ \leq H$, alors $g \in HC_G(Q)$.*

La propriété suivante est conséquence de la proposition [Th, 49.5] :

Propriété A.2.2. *Soit G un groupe fini et p un nombre premier, P un sous-groupe de Sylow de G, et H un sous-groupe de G contenant P. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) H contrôle la fusion des p-sous-groupes de G ;

(ii) on a $N_G(Q) = N_H(Q)C_G(Q)$ pour tout p-sous-groupe Q de P ;

(iii) on a $N_G(Q) = N_H(Q)C_G(Q)$ pour tout sous-groupe Q de P essentiel ou maximal, pleinement normalisé dans P.

Démonstration : Les implications $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$ sont claires.

Supposons que (iii) est vrai. Soit Q un sous-groupe de P, g un élément de G tel que ${}^gQ \leq H$. Soit P' un p-sous-groupe de Sylow de H contenant ${}^gQ$. Il existe $h \in H$ tel que ${}^gQ \leq {}^hP$, *i.e.*, ${}^{h^{-1}g}Q \leq P$. Comme on veut montrer que $g \in HC_G(Q)$, on peut supposer que ${}^gQ \leq P$.

On considère le morphisme $\varphi : Q \to {}^gQ$ donné par la conjugaison par g. D'après le théorème A.1.2, ce morphisme est composé d'isomorphismes maximaux ou essentiels dont les sous-groupes correspondants sont pleinement normalisés dans P. Soit $\varphi_1 \dots \varphi_n$ ces morphismes, $L_1 \dots L_n$ les groupes leur correspondant. Pour tout i on note Q_i la source de φ_i.

On a $Q_i \leq L_i \leq P$, et φ_i est induit par un élément de $N_G(L_i)$, donc par un élément de $N_H(L_i)C_G(L_i)$ d'après l'hypothèse (iii). Comme $Q_i \leq L_i$, l'élément de $C_G(L_i)$ induit le morphisme trivial, donc finalement φ_i est induit par un élément de H. Par composition, φ est induit par un élément de H, et donc $g \in HC_G(Q)$. □

Nous avons alors en corollaire le théorème de Burnside :

Corollaire A.2.3. *Soit G un groupe fini, P un p-sous-groupe de Sylow de G, et $H = N_G(P)$ son normalisateur dans G. Si P est abélien alors H contrôle la fusion de p-sous-groupes de G.*

Démonstration : Soit Q un p-sous-groupe strict non trivial de P. Comme P est abélien alors $P \subseteq C_G(Q)$, et Q n'est pas auto-centralisant, donc *a fortiori* non essentiel, *cf* propriété A.1.1. La condition (iii) est donc tautologique. □

Annexe B

Tables de caractères et matrices de décomposition

On utilisera dans toute cette annexe les notations définies dans le chapitre 1, en supposant que $\ell = 2$. Rappelons les principales d'entre elles :

- $\mathbb{F}$ est un corps algébriquement clos de caractéristique p impaire,
- q est une puissance de p,
- β est un générateur de $\mathbb{F}_{q^2}^\times$ dans $\mathbb{F}$,
- $\alpha = \beta^{q+1}$ donc α est un générateur de $\mathbb{F}_q^\times$,
- a, b, u et v sont les entiers tels que $q-1 = 2^a u$, $q+1 = 2^b v$, u et v étant impairs,
- $(K, \mathcal{O}, k)$ est un système 2-modulaire, $\mathcal{O}$ étant supposé assez gros pour tous les groupes en présence,
- ζ est une racine de l'unité d'ordre q^2-1 dans $\mathcal{O}$,
- $\xi = \zeta^{q+1}$.

B.1 $\mathrm{PSL}_2(q)$

On utilise dans cette partie l'article de Burkhardt [Bu], qui donne les caractères modulaires irréductibles des groupes $\mathrm{PSL}_2(q)$ en toute caractéristique.

B.1.1 Cas $q \equiv 1 \pmod 4$

La table B.1 donne les caractères irréductibles des groupes $\mathrm{PSL}_2(q)$. Les éléments sont représentés par un de leurs antécédents dans $\mathrm{SL}_2(q)$.

La table B.2 donne la restriction des caractères irréductibles de $\mathrm{PSL}_2(q)$ aux 2'-éléments. La table B.3 donne les caractères modulaires irréductibles de $\mathrm{PSL}_2(q)$.

La matrice de décomposition est :

$$\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & & & 2 & & \cdots & & & & \\
 & 1 & 1 & & & & 1 & & & & & & \\
 & 1 & & 1 & & & 1 & & \cdots & & & & \\
 & & & & 1 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & & & & \ddots & & & \ddots & & \ddots & & \\
 & & & & & & 1 & 1 & & 1 & \cdots & 1 & \\
 & & & & & & & & & & & & 1 \\
 & & & & & & & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & & & & & & 1
\end{pmatrix}.$$

Les blocs $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ sont de taille $\frac{u-1}{2} \times (u-1)$, ils apparaissent 2^{a-2} fois chacun, ainsi le 2 apparaît $2^{a-2}-1$ fois. Le bloc $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ final est de taille $\frac{q-1}{4} \times \frac{q-1}{4}$. La matrice de Cartan est :

$$\begin{pmatrix}
2^a & 2^{a-1} & 2^{a-1} & & & & & & \\
2^{a-1} & 2^{a-2}+1 & 2^{a-2} & & & & & & \\
2^{a-1} & 2^{a-2} & 2^{a-2}+1 & & & & & & \\
 & & & 2^{a-1} & & & & & \\
 & & & & \ddots & & & & \\
 & & & & & 2^{a-1} & & & \\
 & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & 1
\end{pmatrix}.$$

Tableau des $\frac{\chi(g)|Cl(g)|}{\chi(1)} \pmod 2$:

1	1	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0
1	1	$\bar{\xi}^{in}+\bar{\xi}^{-in}$	0	0	0
1	0	0	$\bar{\zeta}^{4in}+\bar{\zeta}^{-4in}$	1	1

Les caractères du bloc principal sont donc les caractères $\bar{\varphi}_0$, $\bar{\varphi}'_0$, $\bar{\varphi}_1$, $\bar{\varphi}_{-1}$, et les $\bar{\varphi}_{\lambda u\, q-1-\lambda u}$ pour $\lambda = 1 \ldots 2^{a-2}-1$.

B.1.2 Cas $q \equiv 3 \pmod 4$

La table B.4 donne les caractères irréductibles de $\mathrm{PSL}_2(q)$ si $q \equiv 3 \pmod 4$.

TAB. B.1 – Caractères irréductibles de $\mathrm{PSL}_2(q)$, $q \equiv 1 \pmod 4$

Classes	$\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}\alpha^n&0\\0&\alpha^{-n}\end{smallmatrix}\right)$ $n=1\ldots\frac{q-1}{4}$	$\left(\begin{smallmatrix}\alpha^n&0\\0&\alpha^{-n}\end{smallmatrix}\right)$ $n=1\ldots\frac{q-5}{4}$	$\gamma\left(\begin{smallmatrix}\beta^{(q-1)n}&0\\0&\beta^{(1-q)n}\end{smallmatrix}\right)$ $n=1\ldots\frac{q-1}{4}$	$\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&\alpha\\0&1\end{smallmatrix}\right)$
Cardinal de cette classe	1	$\frac{q(q+1)}{2}$	$q(q+1)$	$q(q-1)$	$\frac{q^2-1}{2}$	$\frac{q^2-1}{2}$
$\bar\varphi_0$	1	1	1	1	1	1
$\bar\varphi'_0$	q	1	1	-1	0	0
$\bar\varphi_\varepsilon$ $\varepsilon=\pm$	$\frac{q+1}{2}$	$(-1)^{\frac{q-1}{4}}$	$(-1)^n$	0	$\frac{1}{2}(1+\varepsilon\sqrt{q})$	$\frac{1}{2}(1-\varepsilon\sqrt{q})$
$\bar\varphi_{i\,q-1-i}$ $i=1\ldots\frac{q-5}{4}$	$q+1$	$\xi^{i\frac{q-1}{4}}+\xi^{-i\frac{q-1}{4}}$	$\xi^{in}+\xi^{-in}$	0	1	1
$\bar\psi_{(q-1)i}$ $i=1\ldots\frac{q-1}{4}$	$q-1$	0	0	$-\zeta^{2(q-1)in}-\zeta^{2(1-q)in}$	-1	-1

TAB. B.2 – Restrictions aux $2'$-éléments

Classes de $2'$-éléments	$\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}\alpha''^n&0\\0&\alpha''^{-n}\end{smallmatrix}\right)$ $n=1\ldots\frac{u-1}{2}$	$\gamma\left(\begin{smallmatrix}\beta''^{un}&0\\0&\beta''^{-un}\end{smallmatrix}\right)$ $n=1\ldots\frac{q-1}{4}$	$\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&\alpha\\0&1\end{smallmatrix}\right)$
$\bar\varphi_0$	1	1	1	1	1
$\bar\varphi'_0$	q	1	-1	0	0
$\bar\varphi_\varepsilon$	$\frac{q+1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}(1+\varepsilon\sqrt{q})$	$\frac{1}{2}(1-\varepsilon\sqrt{q})$
$\bar\varphi_{i\,q-1-i}$	$q+1$	$\xi^{2^{a-1}in}+\xi^{-2^{a-1}in}$	0	1	1
$\bar\psi_{(q-1)i}$	$q-1$	0	$-\zeta^{2(q-1)in}-\zeta^{2(1-q)in}$	-1	-1

TAB. B.3 – Caractères modulaires irréductibles de $\mathrm{PSL}_2(q)$, $q \equiv 1 \pmod 4$

Classes de $2'$-éléments	$\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}\alpha''^n&0\\0&\alpha''^{-n}\end{smallmatrix}\right)$ $n=1\ldots\frac{u-1}{2}$	$\gamma\left(\begin{smallmatrix}\beta''^{un}&0\\0&\beta''^{-un}\end{smallmatrix}\right)$ $n=1\ldots\frac{q-1}{4}$	$\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&\alpha\\0&1\end{smallmatrix}\right)$
σ_0	1	1	1	1	1
σ_+	$\frac{q-1}{2}$	0	-1	$\frac{1}{2}(-1+\sqrt{q})$	$\frac{1}{2}(-1-\sqrt{q})$
σ_-	$\frac{q-1}{2}$	0	-1	$\frac{1}{2}(-1-\sqrt{q})$	$\frac{1}{2}(-1+\sqrt{q})$
σ_i $i=1\ldots\frac{u-1}{2}$	$q+1$	$\xi^{2^{a-1}in}+\xi^{-2^{a-1}in}$	0	1	1
τ_i $i=1\ldots\frac{q-1}{4}$	$q-1$	0	$-\zeta^{2(q-1)in}-\zeta^{2(1-q)in}$	-1	-1

Note : $\alpha'' = \alpha^{2^{a-1}}$, $\beta'' = \beta^{2^a}$.

La table B.5 donne leurs restrictions aux $2'$-éléments, et la table B.6 donne les caractères modulaires irréductibles de $\mathrm{PSL}_2(q)$ si $q \equiv 3 \pmod 4$.

La matrice de décomposition est :

$$\begin{pmatrix}
1 & 1 & & & & & & \cdots & & \\
 & 1 & 1 & & & & 1 & & & \\
 & 1 & & 1 & & & 1 & \cdots & & \\
 & & & & 1 & \iddots & 1 & 1 & \iddots & 1 \\
 & & & & & 1 & \iddots & 1 & \cdots & \iddots \\
 & & & & & & & & 1 & \ddots \\
 & & & & & & & & & 1
\end{pmatrix}.$$

Les blocs $\begin{smallmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ 1 & 1 & \iddots \end{smallmatrix}$ sont de taille $\frac{v-1}{2} \times (v-1)$, ils apparaissent 2^{b-2} fois chacun. Le bloc $\begin{smallmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{smallmatrix}$ final est de taille $\frac{q-3}{4} \times \frac{q-3}{4}$. La matrice de Cartan est :

$$\begin{pmatrix}
2 & 1 & 1 & & & & & & \\
1 & 2^{b-2}+1 & 2^{b-2} & & & & & & \\
1 & 2^{b-2} & 2^{b-2}+1 & & & & & & \\
 & & & 2^{b-1} & & & & & \\
 & & & & \ddots & & & & \\
 & & & & & 2^{b-1} & & & \\
 & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & 1
\end{pmatrix}.$$

Tableau des $\frac{\chi(g)|Cl(g)|}{\chi(1)} \pmod 2$:

1	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0
1	0	1	$\bar{\zeta}^{(q-1)in}+\bar{\zeta}^{(1-q)in}$	0	0
1	$\bar{\xi}^{in}+\bar{\xi}^{-in}$	0	0	1	1

Les caractères du bloc principal sont donc les caractères $\bar{\varphi}_0$, $\bar{\varphi}'_0$, $\bar{\psi}_1$, $\bar{\psi}_{-1}$, et les $\bar{\psi}_{\lambda(q-1)v}$ pour $\lambda = 1 \dots 2^{b-2}-1$.

B.2 $\mathrm{PGL}_2(q)$

La table B.7 donne les caractères irréductibles de $\mathrm{PGL}_2(q)$. Les éléments sont représentés par un de leurs antécédents dans $\mathrm{GL}_2(q)$. La table B.8 donne leurs restrictions aux $2'$-éléments.

TAB. B.4 – Caractères irréductibles de $\mathrm{PSL}_2(q)$, $q \equiv 3 \pmod 4$

Classes	$\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}\alpha^n&0\\0&\alpha^{-n}\end{smallmatrix}\right)$ $n=1\ldots\frac{q-3}{4}$	$\gamma\left(\begin{smallmatrix}\beta^{(q-1)n}&0\\0&\beta^{(1-q)n}\end{smallmatrix}\right)$ $n=\frac{q+1}{4}$	$\gamma\left(\begin{smallmatrix}\beta^{(q-1)n}&0\\0&\beta^{(1-q)n}\end{smallmatrix}\right)$ $n=1\ldots\frac{q-3}{4}$	$\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&-1\\0&1\end{smallmatrix}\right)$
Cardinal de cette classe	1	$q(q+1)$	$\frac{q(q-1)}{2}$	$q(q-1)$	$\frac{q^2-1}{2}$	$\frac{q^2-1}{2}$
$\bar\varphi_0$	1	1	1	1	1	1
$\bar\varphi'_0$	q	1	-1	-1	0	0
$\bar\psi_\varepsilon$ $\varepsilon=\pm$	$\frac{q-1}{2}$	0	$(-1)^{\frac{q-3}{4}}$	$-(-1)^n$	$\frac{-1+\varepsilon\sqrt{-q}}{2}$	$\frac{-1-\varepsilon\sqrt{-q}}{2}$
$\bar\psi_{(q-1)i}$ $i=1\ldots\frac{q-3}{4}$	$q-1$	0	$-\zeta^{\frac{q^2-1}{4}i}-\zeta^{\frac{1-q^2}{4}i}$	$-\zeta^{(q-1)in}-\zeta^{(1-q)in}$	-1	-1
$\bar\varphi_{i\,q-1-i}$ $i=1\ldots\frac{q-3}{4}$	$q+1$	$\xi^{in}+\xi^{-in}$	0	0	1	1

TAB. B.5 – Restrictions aux $2'$-éléments

Classes de $2'$-éléments	$\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}\alpha^n&0\\0&\alpha^{-n}\end{smallmatrix}\right)$ $n=1\ldots\frac{q-3}{4}$	$\gamma\left(\begin{smallmatrix}\beta''^{un}&0\\0&\beta''^{-un}\end{smallmatrix}\right)$ $n=1\ldots\frac{v-1}{2}$	$\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&-1\\0&1\end{smallmatrix}\right)$
$\bar\varphi_0$	1	1	1	1	1
$\bar\varphi'_0$	q	1	-1	0	0
ψ_ε	$\frac{q-1}{2}$	0	-1	$\frac{1}{2}(-1+\varepsilon\sqrt{-q})$	$\frac{1}{2}(-1-\varepsilon\sqrt{-q})$
$\bar\psi_{(q-1)i}$	$q-1$	0	$-\zeta^{2^b ui}-\zeta^{-2^b ui}$	-1	-1
$\bar\varphi_{i\,q-1-i}$	$q+1$	$\xi^{in}+\xi^{-in}$	0	1	1

TAB. B.6 – Caractères modulaires irréductibles de $\mathrm{PSL}_2(q)$, $q \equiv 3 \pmod 4$

Classes de $2'$-éléments	$\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}\alpha^n&0\\0&\alpha^{-n}\end{smallmatrix}\right)$ $n=1\ldots\frac{q-3}{4}$	$\gamma\left(\begin{smallmatrix}\beta''^{un}&0\\0&\beta''^{-un}\end{smallmatrix}\right)$ $n=1\ldots\frac{v-1}{2}$	$\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&-1\\0&1\end{smallmatrix}\right)$
σ_0	1	1	1	1	1
σ_+	$\frac{q-1}{2}$	0	-1	$\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-q})$	$\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-q})$
σ_-	$\frac{q-1}{2}$	0	-1	$\frac{1}{2}(-1-\sqrt{-q})$	$\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-q})$
τ_i $i=1\ldots\frac{v-1}{2}$	$q-1$	0	$-\zeta^{2^b ui}-\zeta^{-2^b ui}$	-1	-1
σ_i $i=1\ldots\frac{q-3}{4}$	$q+1$	$\xi^{in}+\xi^{-in}$	0	1	1

Note : $\beta'' = \beta^{2^b}$.

TAB. B.7 – Caractères irréductibles de $\mathrm{PGL}_2(q)$

Classes	$\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&-1\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&\alpha^n\end{smallmatrix}\right)$ $n=1\ldots\frac{q-3}{2}$	$\beta^{\frac{q+1}{2}}\gamma\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&-1\end{smallmatrix}\right)$	$\gamma\left(\begin{smallmatrix}\beta^n&0\\0&\beta^{qn}\end{smallmatrix}\right)$ $n=1\ldots\frac{q-1}{2}$	$\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)$
Cardinal de cette classe	1	$\frac{q(q+1)}{2}$	$q(q+1)$	$\frac{q(q-1)}{2}$	$q(q-1)$	q^2-1
$\bar{\varphi}_0$	1	1	1	1	1	1
$\bar{\varphi}_{\frac{q-1}{2}}$	1	$(-1)^{\frac{q-1}{2}}$	$(-1)^n$	$(-1)^{\frac{q+1}{2}}$	$(-1)^n$	1
$\bar{\varphi}'_0$	q	1	1	-1	-1	0
$\bar{\varphi}'_{\frac{q-1}{2}}$	q	$(-1)^{\frac{q-1}{2}}$	$(-1)^n$	$(-1)^{\frac{q-1}{2}}$	$-(-1)^n$	0
$\bar{\varphi}_{i\,q-1-i}$ $i=1\ldots\frac{q-3}{2}$	$q+1$	$2(-1)^i$	$\xi^{in}+\xi^{-in}$	0	0	1
$\bar{\psi}_{(q-1)i}$ $i=1\ldots\frac{q-1}{2}$	$q-1$	0	0	$-2(-1)^i$	$-\zeta^{(q-1)in}-\zeta^{-(q-1)in}$	-1

TAB. B.8 – Restrictions aux $2'$-éléments

Classes de $2'$-éléments	$\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&\alpha''^n\end{smallmatrix}\right)$ $n=1\ldots\frac{u-1}{2}$	$\gamma\left(\begin{smallmatrix}\beta''^n&0\\0&\beta''^{qn}\end{smallmatrix}\right)$ $n=1\ldots\frac{v-1}{2}$	$\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)$
$\bar{\varphi}_0, \bar{\varphi}_{\frac{q-1}{2}}$	1	1	1	1
$\bar{\varphi}'_0, \bar{\varphi}'_{\frac{q-1}{2}}$	q	1	-1	0
$\bar{\varphi}_{i\,q-1-i}$	$q+1$	$\xi^{2^a in}+\xi^{-2^a in}$	0	1
$\bar{\psi}_{(q-1)i}$	$q-1$	0	$-\zeta^{2^{a+b}(q-1)in}-\zeta^{-2^{a+b}(q-1)in}$	-1

TAB. B.9 – Caractères modulaires irréductibles de $\mathrm{PGL}_2(q)$, $q \equiv 1 \pmod 4$

Classes de $2'$-éléments	$\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&\alpha''^n\end{smallmatrix}\right)$ $n=1\ldots\frac{u-1}{2}$	$\gamma\left(\begin{smallmatrix}\beta''^n&0\\0&\beta''^{qn}\end{smallmatrix}\right)$ $n=1\ldots\frac{v-1}{2}$	$\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)$
ρ_0	1	1	1	1
ρ'_0	$q-1$	0	-2	-1
ρ_i $i=1\ldots\frac{u-1}{2}$	$q+1$	$\xi^{2^a in}+\xi^{-2^a in}$	0	1
ρ'_i $i=1\ldots\frac{q-1}{4}$	$q-1$	0	$-\zeta^{2^{a+b}(q-1)in}-\zeta^{-2^{a+b}(q-1)in}$	-1

Note : $\alpha'' = \alpha^{2^a}$, $\beta'' = \beta^{2^{a+b}}$.

B.2.1 Cas $q \equiv 1 \pmod 4$

Tableau des $\frac{\chi(g)|Cl(g)|}{\chi(1)} \pmod 2$:

1	1	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0
1	1	$\bar{\xi}^{in}+\bar{\xi}^{-in}$	0	0	0
1	0	0	1	$\bar{\zeta}^{(q-1)in}+\bar{\zeta}^{-(q-1)in}$	0

Les caractères du bloc principal sont donc $\bar{\varphi}_0$, $\bar{\varphi}_{\frac{q-1}{2}}$, $\bar{\varphi}'_0$, $\bar{\varphi}'_{\frac{q-1}{2}}$, et les $\bar{\varphi}_{i\,q-1-i}$ tels que $u \,|\, i$ (ils sont au nombre de $2^{a-1}+3$).

Calcul des caractères modulaires irréductibles :

Appelons ρ_0, ρ_i pour $i = 1 \ldots \frac{u-1}{2}$, et $\rho_i{}'$ pour $i = 1 \ldots \frac{q-1}{4}$ les restrictions aux $2'$-éléments des caractères respectifs $\bar{\varphi}_0$, $\bar{\varphi}_{i\,q-1-i}$, et $\bar{\psi}_{(q-1)i}$. La restriction de chacun de ces caractères à PSL_2 est un caractère modulaire irréductible, donc ils sont eux-même irréductibles.

En faisant le compte du nombre de classes de conjugaison de $2'$-éléments on constate qu'il manque un caractère modulaire irréductible. Appelons-le ρ'_0. Le bloc principal contient au moins deux caractères modulaires irréductibles car tous ses caractères ne sont pas multiples du caractère trivial, donc ρ'_0 est dans le bloc principal.

Considérons le caractère induit de PSL_2 à PGL_2 par σ_+ (ou par σ_-). On vérifie qu'il est dans le bloc principal de PGL_2, donc combinaison linéaire à coefficients entiers positifs ou nuls de ρ_0 et de ρ'_0. Or sa restriction à PSL_2 est $\sigma_+ + \sigma_-$, ce qui impose que $\rho'_0 = \mathrm{Ind}_{\mathrm{PSL}_2}^{\mathrm{PGL}_2}\sigma_+$.

On en déduit la table B.9 des caractères modulaires irréductibles de $\mathrm{PGL}_2(q)$ pour $q \equiv 1 \pmod 4$, puis sa matrice de décomposition :

$$\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & & & 2 & & \cdots & & & & \\
 & & 1 & 1 & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & 1 & & & 1 & 1 & & & 1 & \\
 & & & & & \ddots & & & & \ddots & \cdots & & \ddots \\
 & & & & & 1 & 1 & & & 1 & 1 & & \\
 & & & & & & & & & & & 1 & \\
 & & & & & & & & & & & & \ddots \\
 & & & & & & & & & & & & 1
\end{pmatrix}.$$

Les blocs $\begin{smallmatrix} 1 & & & 1 \\ & \ddots & \iddots & \\ & 1 & 1 & \end{smallmatrix}$ sont de taille $\frac{u-1}{2} \times (u-1)$, ils apparaissent 2^{a-1} fois chacun. Le bloc $\begin{smallmatrix} 1 & & & 1 \\ & \ddots & \iddots & \\ & 1 & 1 & \end{smallmatrix}$ final est de taille $\frac{q-1}{4} \times \frac{q-1}{2}$.

La matrice de Cartan est :

$$\begin{pmatrix} 2^{a+1} & 2^a & & & & & \\ 2^a & 2^{a-1}+1 & & & & & \\ & & 2^a & \ddots & & & \\ & & & & 2^a & & \\ & & & & & 2 & \ddots \\ & & & & & & 2 \end{pmatrix}.$$

Si $q \equiv 5 \pmod 8$, les caractères du bloc principal sont $\bar{\varphi}_0$, $\bar{\varphi}_{\frac{q-1}{2}}$, $\bar{\varphi}'_0$ et $\bar{\varphi}_{u\,3u}$. Ses matrices de décomposition et de Cartan sont

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ & & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}. \tag{B.1}$$

B.2.2 Cas $q \equiv 3 \pmod 4$

Tableau des $\frac{\chi(g)|Cl(g)|}{\chi(1)} \pmod 2$:

1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	0
1	1	$\bar{\xi}^{in}+\bar{\xi}^{-in}$	0	0	0
1	0	0	1	$\bar{\zeta}^{(q-1)in}+\bar{\zeta}^{-(q-1)in}$	0

Les caractères dans le bloc principal sont $\bar{\varphi}_0$, $\bar{\varphi}_{\frac{q-1}{2}}$, $\bar{\varphi}'_0$ et les $\bar{\psi}_{(q-1)i}$ tels que $v \,|\, i$ (il sont au nombre de $2^{b-1}+3$).

Le raisonnement utilisé dans le cas $q \equiv 1 \pmod 4$ permet ici aussi d'obtenir la table B.10 des caractères modulaires irréductibles.

Sa matrice de décomposition est la suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & & & & & & & & & & & \cdots & \\ & & 1 & 1 & & & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & & & 1 & & & & & & & \\ & & & & & \ddots & & \iddots & & & & & & & & \\ & & & & & & 1 & 1 & & & & & & & & \\ & & & & & & & & 1 & & & 1 & & & & 1 \\ & & & & & & & & & \ddots & & & \ddots & & \iddots & \\ & & & & & & & & & & 1 & 1 & & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Le premier bloc $\begin{smallmatrix} 1 & & & \iddots \\ & \ddots & & \\ 1 & & 1 & \\ & \iddots & & 1 \end{smallmatrix}$ est de taille $\frac{q-3}{4} \times \frac{q-3}{2}$, les blocs $\begin{smallmatrix} 1 & & & \iddots \\ & \ddots & & \\ 1 & & 1 & \\ & \iddots & & 1 \end{smallmatrix}$ suivants sont de taille $\frac{v-1}{2} \times (v-1)$, ils sont au nombre de 2^{b-1}.

La matrice de Cartan est :

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & & & & & \\ 2 & 2^{b-1}+1 & & & & & \\ & & 2 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 2 & & \\ & & & & & 2^b & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 2^b \end{pmatrix}.$$

Si $q \equiv 3 \pmod 8$, les caractères dans le bloc principal sont $\bar{\varphi}_0$, $\bar{\varphi}_{\frac{q-1}{2}}$, $\bar{\varphi}'_0$ et $\bar{\psi}_{(q-1)v}$. Ses matrices de décomposition et de Cartan sont

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \\ & & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}. \tag{B.2}$$

B.3 $\mathrm{SL}_2(q)$

Les caractères irréductibles de $\mathrm{SL}_2(q)$ sont donnés par la table B.11.

Tableau des $\frac{\chi(g)|Cl(g)|}{\chi(1)} \pmod 2$:

1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
1	$\bar{\xi}^{in}+\bar{\xi}^{-in}$	0	$\frac{q-1}{2}$	$\frac{q-1}{2}$	$\frac{q-1}{2}$	$\frac{q-1}{2}$
1	0	$\bar{\zeta}^{in}+\bar{\zeta}^{-in}$	$\frac{q+1}{2}$	$\frac{q+1}{2}$	$\frac{q+1}{2}$	$\frac{q+1}{2}$
1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0

Les caractères modulaires irréductibles sont les restrictions de φ_0, ψ'_1 et ψ'_{-1}.

Si $q \equiv 1 \pmod 4$, la matrice de décomposition est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & & 2 & & \dots & & & & 1 & 1 & & \\ & 1 & & & 1 & & & & & & 1 & & 1 & \\ & 1 & & & 1 & & & & & & & 1 & & 1 \\ & & 1 & & & 1 & & 1 & & & & & & \\ & & & \ddots & & & \ddots & & \ddots & & & & & \\ & & & & 1 & 1 & & 1 & \dots & 1 & & & & \\ & & & & & & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & & & & & 1 & \end{pmatrix}.$$

Les blocs $\begin{smallmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ 1 & & 1 \end{smallmatrix}$ sont de taille $\frac{u-1}{2} \times (u-1)$, ils apparaissent 2^{a-1} fois chacun, ainsi le 2 apparaît $2^{a-1}-1$ fois. Le bloc $\begin{smallmatrix} 1 & \\ & \ddots \\ & & 1 \end{smallmatrix}$ final est de taille $\frac{v-1}{2} \times \frac{v-1}{2}$. La matrice de Cartan est :

TAB. B.10 – Caractères modulaires irréductibles de $\mathrm{PGL}_2(q)$, $q \equiv 3 \pmod 4$

Classes de 2′-éléments	$\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&\alpha''^n\end{smallmatrix}\right)$ $n=1\ldots\frac{u-1}{2}$	$\gamma\left(\begin{smallmatrix}\beta''^n&0\\0&\beta''^{qn}\end{smallmatrix}\right)$ $n=1\ldots\frac{v-1}{2}$	$\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)$
ρ_0	1	1	1	1
ρ'_0	$q-1$	0	-2	-1
ρ_i $i=1\ldots\frac{q-3}{4}$	$q+1$	$\xi^{2in}+\xi^{-2in}$	0	1
ρ'_i $i=1\ldots\frac{v-1}{2}$	$q-1$	0	$-\zeta^{2^{1+b}(q-1)in}-\zeta^{-2^{1+b}(q-1)in}$	-1

TAB. B.11 – Caractères irréductibles de $\mathrm{SL}_2(q)$, q impair

Classes	$\lambda\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ $\lambda=\pm1$	$\left(\begin{smallmatrix}\alpha^n&0\\0&\alpha^{-n}\end{smallmatrix}\right)$ $n=\frac{q-3}{2}$	$\gamma\left(\begin{smallmatrix}\beta^n&0\\0&\beta^{-n}\end{smallmatrix}\right)$ $n=(q-1)m$ $m=1\ldots\frac{q-1}{2}$	$\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}-1&1\\0&-1\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&\alpha\\0&1\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}-1&\alpha\\0&-1\end{smallmatrix}\right)$
Cardinal de cette classe	1	$q(q+1)$	$q(q-1)$	$\frac{q^2-1}{2}$	$\frac{q^2-1}{2}$	$\frac{q^2-1}{2}$	$\frac{q^2-1}{2}$
φ_0	1	1	1	1	1	1	1
φ'_0	q	1	-1	0	0	0	0
φ_i $i=1\ldots\frac{q-3}{2}$	$(q+1)\lambda^i$	$\xi^{in}+\xi^{-in}$	0	1	$(-1)^i$	1	$(-1)^i$
ψ_i $i=1\ldots\frac{q-1}{2}$	$(q-1)\lambda^i$	0	$-\zeta^{in}-\zeta^{-in}$	-1	$-(-1)^i$	-1	$-(-1)^i$
φ'_ε $\varepsilon=\pm1$	$\frac{q+1}{2}\lambda^{\frac{q-1}{2}}$	$(-1)^n$	0	$\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{2}r$	$\frac{1}{2}\eta+\frac{\varepsilon}{2}r$	$\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{2}r$	$\frac{1}{2}\eta-\frac{\varepsilon}{2}r$
ψ'_ε $\varepsilon=\pm1$	$\frac{q-1}{2}\lambda^{\frac{q+1}{2}}$	0	$-(-1)^m$	$-\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{2}r$	$\frac{1}{2}\eta+\frac{\varepsilon}{2}r$	$-\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{2}r$	$\frac{1}{2}\eta-\frac{\varepsilon}{2}r$

Note : $\eta=(-1)^{\frac{q-1}{2}}$, $r=\sqrt{\eta q}$.

$$\begin{pmatrix} 2^{a+1} & 2^a & 2^a & & & & & & \\ 2^a & 2^{a-1}+2 & 2^{a-1} & & & & & & \\ 2^a & 2^{a-1} & 2^{a-1}+2 & & & & & & \\ & & & 2^a & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & 2^a & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Si $q \equiv 3 \pmod 4$, la matrice de décomposition est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & & & & & \dots & & & 1 & 1 & & \\ & 1 & & & & 1 & & & & & 1 & & 1 & \\ & 1 & & & & 1 & & & & & & 1 & & 1 \\ & & 1 & & & & & & & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & & & & & & \\ & & & & 1 & & & & & & & & & \\ & & & & & 1 & & & 1 & & & & & \\ & & & & & & \ddots & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & & 1 & 1 & & \dots & & & \\ & & & & & & & & & 1 & & \ddots & & \\ & & & & & & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & & & & & 1 & \end{pmatrix}.$$

Les blocs $\begin{smallmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & 1 & 1 \end{smallmatrix} \ddots \begin{smallmatrix} & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & \end{smallmatrix}$ sont de taille $\frac{v-1}{2} \times (v-1)$, ils apparaissent 2^{b-1} fois chacun. Le bloc $\begin{smallmatrix} 1 & \\ & \ddots \\ & 1 \end{smallmatrix}$ final est de taille $\frac{u-1}{2} \times \frac{u-1}{2}$. La matrice de Cartan est :

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & & & & & \\ 2 & 2^{b-1}+2 & 2^{b-1} & & & & & \\ 2 & 2^{b-1} & 2^{b-1}+2 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & 2^b & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 2^b \end{pmatrix}.$$

B.4 $\mathrm{GL}_2(q)$

La table B.12 donne les caractères irréductibles de $\mathrm{GL}_2(q)$. Elle est tirée de [DM2, page 154]. Une accolade au-dessus d'une colonne indique le nombre de classes représentées par cette colonne, une accolade devant une ligne indique le nombre de caractères représentés par cette ligne. Ces informations servent à contrer les défauts d'indiçage.

TAB. B.12 – Caractères irréductibles de $\mathrm{GL}_2(q)$

		$(q-1)$	$\frac{(q-1)(q-2)}{2}$	$\frac{q(q-1)}{2}$	$(q-1)$
	Classes	$\begin{pmatrix}\alpha^n & 0\\ 0 & \alpha^n\end{pmatrix}$ n=0...$q-2$	$\begin{pmatrix}\alpha^n & 0\\ 0 & \alpha^m\end{pmatrix}$ n,m=0...$q-2$ $n<m$	$\gamma\begin{pmatrix}\beta^n & 0\\ 0 & \beta^{qn}\end{pmatrix}$ n=1...q^2-2 $q+1\nmid n$	$\begin{pmatrix}\alpha^n & 1\\ 0 & \alpha^n\end{pmatrix}$ n=0...$q-2$
	Cardinal de cette classe	1	$q(q+1)$	$q(q-1)$	q^2-1
$(q-1)$	φ_i i=0...$q-2$	ξ^{2in}	$\xi^{i(n+m)}$	ξ^{in}	ξ^{2in}
$(q-1)$	φ'_i i=0...$q-2$	$q\xi^{2in}$	$\xi^{i(n+m)}$	$-\xi^{in}$	0
$\frac{(q-1)(q-2)}{2}$	φ_{ij} i,j=0...$q-2$ $i<j$	$(q+1)\xi^{(i+j)n}$	$\xi^{in+jm}+\xi^{im+jn}$	0	$\xi^{(i+j)n}$
$\frac{q(q-1)}{2}$	ψ_i i=1...q^2-2 $q+1\nmid i$	$(q-1)\xi^{in}$	0	$-\zeta^{in}-\zeta^{qin}$	$-\xi^{in}$

Note : $\gamma\begin{pmatrix}\beta^n & 0\\ 0 & \beta^{qn}\end{pmatrix} \sim \gamma\begin{pmatrix}\beta^{qn} & 0\\ 0 & \beta^n\end{pmatrix}$, $\psi_i = \psi_{qi}$ où qi est compté modulo q^2-1.

On pose $\gamma = \begin{pmatrix}\beta^q & \beta\\ 1 & 1\end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(q^2)$.

Les caractères du bloc principal sont :

- $\varphi_{\lambda u}$ pour $\lambda = 0 \dots 2^a - 1$,
- $\varphi'_{\lambda u}$ pour $\lambda = 0 \dots 2^a - 1$,
- $\varphi_{\lambda u\, \mu u}$ pour $\lambda, \mu = 0 \dots 2^a - 1 \quad \lambda < \mu$,
- $\psi_{\lambda u v}$ pour $\lambda = 1 \dots 2^{a+b} - 1 \quad 2^b \nmid \lambda$.

Le bloc principal de $\mathrm{GL}_2(q)$ contient deux caractères modulaires irréductibles, le caractère trivial et un caractère de degré $q-1$, égal à la restriction d'un caractère $\psi_{\lambda uv}$ aux $2'$-éléments.

Sa matrice de décomposition est la suivante :

$$\left(\underbrace{\begin{matrix}1 & \cdots & 1\\ 0 & \cdots & 0\end{matrix}}_{2^a}\ \underbrace{\begin{matrix}1 & \cdots & 1\\ 1 & \cdots & 1\end{matrix}}_{2^a}\ \underbrace{\begin{matrix}2 & \cdots & 2\\ 1 & \cdots & 1\end{matrix}}_{2^{a-1}(2^a-1)}\ \underbrace{\begin{matrix}0 & \cdots & 0\\ 1 & \cdots & 1\end{matrix}}_{2^{a-1}(2^b-1)}\right)$$

et sa matrice de Cartan est

$$2^a \begin{pmatrix} 2^{a+1} & 2^a \\ 2^a & 2^{a-1} + 2^{b-1} \end{pmatrix}.$$

B.5 Sous-groupes locaux de $\mathrm{GL}_2(q)$

Les tables B.13 et B.14 donnent les caractères irréductibles de H_e et H_s, normalisateurs des tores T_e et T_s, et de leurs ℓ-sous-groupes de Sylow P_e et P_s si ceux-ci sont non-triviaux.

Les tables B.15 et B.16 donnent les caractères irréductibles respectivement de H'_e, normalisateur d'un 2-sous-groupe de Sylow si $q \equiv 1 \pmod 4$, et de $H's$, normalisateur d'un 2-sous-groupe de Sylow si $q \equiv 3 \pmod 4$.

On rappelle que l'on note P' un 2-sous-groupe de Sylow de $\mathrm{SL}_2(q)$, et que si $q \equiv \pm 3 \pmod 8$ alors on a des isomorphismes $P' \simeq Q_8$ et $N_{\mathrm{SL}_2(q)}(P') \simeq Q_8 \rtimes C_3$. La table B.17 donne les caractères irréductibles de $Q_8 \rtimes C_3$.

Soit $H = N_{\mathrm{GL}_2(q)}(P')$. Les caractères irréductibles de H sont donnés par la table B.18 si $q \equiv 5 \pmod 8$, et par la table B.19 si $q \equiv 3 \pmod 8$.

TAB. B.13 – Caractères irréductibles de H_e

	Classes	$\begin{pmatrix}\alpha^n & 0\\ 0 & \alpha^n\end{pmatrix}$ n=0...$q-2$ ($q-1$)	$\begin{pmatrix}\alpha^n & 0\\ 0 & \alpha^m\end{pmatrix}$ n,m=0...$q-2$, $n<m$ ($\frac{(q-1)(q-2)}{2}$)	$\begin{pmatrix}0 & 1\\ \alpha^n & 0\end{pmatrix}$ n=0...$q-2$ ($q-1$)
	Cardinal de cette classe	1	2	$q-1$
($q-1$)	χ_i i=0...$q-2$	ξ^{2in}	$\xi^{i(n+m)}$	ξ^{in}
($q-1$)	χ'_i i=0...$q-2$	ξ^{2in}	$\xi^{i(n+m)}$	$-\xi^{in}$
$\frac{(q-1)(q-2)}{2}$	χ_{ij} i,j=0...$q-2$, $i<j$	$2\xi^{(i+j)n}$	$\xi^{in+jm}+\xi^{im+jn}$	0

TAB. B.14 – Caractères irréductibles de H_s^γ

	Classes	$\begin{pmatrix}\alpha^n & 0\\ 0 & \alpha^n\end{pmatrix}$ n=0...$q-2$ ($q-1$)	$\gamma\begin{pmatrix}\beta^n & 0\\ 0 & \beta^{qn}\end{pmatrix}$ n=1...q^2-2, $q+1\nmid n$ ($\frac{q(q-1)}{2}$)	$\gamma\begin{pmatrix}0 & \beta^n\\ \beta^{qn} & 0\end{pmatrix}$ n=0...$q-2$ ($q-1$)
	Cardinal de cette classe	1	2	$q+1$
($q-1$)	χ_i i=0...$q-2$	ξ^{2in}	ξ^{in}	ξ^{in}
($q-1$)	χ'_i i=0...$q-2$	ξ^{2in}	ξ^{in}	$-\xi^{in}$
$\frac{q(q-1)}{2}$	χ''_i i=1...q^2-2, $q+1\nmid i$	$2\xi^{in}$	$\zeta^{in}+\zeta^{qin}$	0

Note : $\gamma\begin{pmatrix}\beta^n & 0\\ 0 & \beta^{qn}\end{pmatrix} \sim \gamma\begin{pmatrix}\beta^{qn} & 0\\ 0 & \beta^n\end{pmatrix}$, $\chi''_i = \chi''_{qi}$ où qi est compté modulo q^2-1.

TAB. B.15 – Caractères irréductible de H'_e

		$(q-1)$	$\frac{q-1}{2}(2^a-1)$	$(q-1)$
	Classes	$\begin{pmatrix}\alpha^n & 0\\ 0 & \alpha^n\end{pmatrix}$ $n=0\ldots q-2$	$\begin{pmatrix}\alpha^n & 0\\ 0 & \alpha^n\alpha'^m\end{pmatrix}$ $n=0\ldots q-2$ $m=1\ldots 2^a-1$	$\begin{pmatrix}0 & \alpha^n\\ \alpha^n\alpha'^m & 0\end{pmatrix}$ $n=0\ldots u-1$ $m=0\ldots 2^a-1$
	Cardinal de cette classe	1	2	2^a
$(q-1)$	χ_i $i=0\ldots q-2$	ξ^{2in}	$\xi^{2in}\xi'^{im}$	$\xi^{2in}\xi'^{im}$
$(q-1)$	χ'_i $i=0\ldots q-1$	ξ^{2in}	$\xi^{2in}\xi'^{im}$	$-\xi^{2in}\xi'^{im}$
$\frac{q-1}{2}(2^a-1)$	χ_{ij} $i=0\ldots q-2$ $j=0\ldots 2^a-1$ $2^a\nmid i-2j$	$2\xi^{in}$	$\xi^{in}(\xi'^{jm}+\xi'^{(j-i)m})$	0

Note : $\left(\begin{smallmatrix}\alpha^n & 0\\ 0 & \alpha^n\alpha'^m\end{smallmatrix}\right) \sim \left(\begin{smallmatrix}\alpha^n\alpha'^m & 0\\ 0 & \alpha^n\end{smallmatrix}\right)$, $\chi_{ij} = \chi_{ij-i}$ où $i-j$ est compté modulo 2^a.

TAB. B.16 – Caractères irréductibles de H'_s

		$(q-1)$	$\frac{q-1}{2}(2^b-1)$	$(q-1)$
	Classes	$\begin{pmatrix}\alpha^n & 0\\ 0 & \alpha^n\end{pmatrix}$ $n=0\ldots q-2$	$\begin{pmatrix}\beta''^n & 0\\ 0 & \beta''^{qn}\end{pmatrix}$ $n=1\ldots 2^b(q-1)-1$ $2^b\nmid n$	$\begin{pmatrix}0 & \beta''^n\\ \beta''^{qn} & 0\end{pmatrix}$ $n=0\ldots 2^b-1$
	Cardinal de cette classe	1	2	2^b
$(q-1)$	χ_i $i=0\ldots q-2$	$\xi^{2^b in}$	ξ^{in}	ξ^{in}
$(q-1)$	χ'_i $i=0\ldots q-2$	$\xi^{2^b in}$	ξ^{in}	$-\xi^{in}$
$\frac{q-1}{2}(2^b-1)$	χ''_i $i=1\ldots 2^b(q-1)-1$ $2^b\nmid i$	$2\xi^{in}$	$\zeta'^{in}+\zeta'^{qin}$	0

Note : $\left(\begin{smallmatrix}\beta''^n & 0\\ 0 & \beta''^{qn}\end{smallmatrix}\right) \sim \left(\begin{smallmatrix}\beta''^{qn} & 0\\ 0 & \beta''^n\end{smallmatrix}\right)$, $\chi''_i = \chi''_{qi}$ où qi est compté modulo $2^b(q-1)$.

TAB. B.17 – Caractères irréductibles de $Q_8 \rtimes C_3$

Classes	1	-1	$\pm\{h_I,h_J,h_K\}$	A	$-A$	A^2	$-A^2$
Cardinal	1	1	6	4	4	4	4
χ_0	1	1	1	1	1	1	1
χ_1	1	1	1	ω	ω	ω^2	ω^2
χ_2	1	1	1	ω^2	ω^2	ω	ω
χ'_0	2	-2	0	-1	1	-1	1
χ'_1	2	-2	0	$-\omega$	ω	$-\omega^2$	ω^2
χ'_2	2	-2	0	$-\omega^2$	ω^2	$-\omega$	ω
χ''	3	3	-1	0	0	0	0

Note : ω est une racine troisième de l'unité.

TAB. B.18 – Caractères irréductibles de H ($q \equiv 5 \pmod 8$)

		$(q-1)$	$\frac{q-1}{2}$	$(q-1)$	$(q-1)$	$\frac{q-1}{2}$
	Classes	$\begin{pmatrix}\alpha^n & 0\\ 0 & \alpha^n\end{pmatrix}$ $n=0\ldots q-2$	$\begin{pmatrix}\alpha^n & 0\\ 0 & -\alpha^n\end{pmatrix}$ $n=0\ldots\frac{q-3}{2}$	$\begin{pmatrix}\alpha^n & 0\\ 0 & \alpha'\alpha^n\end{pmatrix}$ $n=0\ldots q-2$	$\alpha^n A$ $n=0\ldots q-2$	$\begin{pmatrix}0 & \alpha^n\\ \alpha'\alpha^n & 0\end{pmatrix}$ $n=0\ldots\frac{q-3}{2}$
	Cardinal de cette classe	1	6	6	8	12
$(q-1)$	χ_i $i=0\ldots q-2$	ξ^{2in}	$(-1)^i\xi^{2in}$	$\xi'^i\xi^{2in}$	ξ^{2in}	$(-\xi')^i\xi^{2in}$
$(q-1)$	χ'_i $i=0\ldots q-2$	$2\xi^{(2i+1)n}$	0	$(1+\xi')\xi'^i\xi^{(2i+1)n}$	$-\xi^{(2i+1)n}$	0
$\frac{q-1}{2}$	$\chi_i^{(4)}$ $i=0\ldots\frac{q-3}{2}$	$2\xi^{2in}$	$2(-1)^i\xi^{2in}$	0	$-\xi^{2in}$	0
$(q-1)$	χ''_i $i=0\ldots q-2$	$3\xi^{2in}$	$-(-1)^i\xi^{2in}$	$\xi'^i\xi^{2in}$	0	$-(-\xi')^i\xi^{2in}$
$\frac{q-1}{2}$	χ'''_i $i=0\ldots\frac{q-3}{2}$	$4\xi^{(2i+1)n}$	0	0	$\xi^{(2i+1)n}$	0

TAB. B.19 – Caractères irréductibles de H ($q \equiv 3 \pmod 8$)

		$(q-1)$	$\frac{q-1}{2}$	$(q-1)$	$\frac{q-1}{2}$	$(q-1)$
	Classes	$\alpha^n \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ $n=0...q-2$	$\alpha^n h_I$ $n=0...\frac{q-3}{2}$	$\alpha^n A$ $n=0...q-2$	$\alpha^n B$ $n=0...\frac{q-3}{2}$	$\alpha^n h_J B$ $n=0...q-2$
	Cardinal de cette classe	1	6	8	12	6
$(q-1)$	χ_i $i=0...q-2$	ξ^{2in}	ξ^{2in}	ξ^{2in}	$\xi^{(2n+1)i}$	$\xi^{(2n+1)i}$
$(q-1)$	χ'_i $i=0...q-2$	$2\xi^{(2i+1)n}$	0	$-\xi^{(2i+1)n}$	0	$\xi^{(2i+1)n+i}\zeta'^2(\zeta'^{3u}-\zeta'^u)$
$\frac{q-1}{2}$	$\chi_i^{(4)}$ $i=0...\frac{q-3}{2}$	$2\xi^{2in}$	$2\xi^{2in}$	$-\xi^{2in}$	0	0
$(q-1)$	χ''_i $i=0...q-2$	$3\xi^{2in}$	$-\xi^{2in}$	0	$-\xi^{(2n+1)i}$	$\xi^{(2n+1)i}$
$\frac{q-1}{2}$	χ'''_i $i=0...\frac{q-3}{2}$	$4\xi^{(2i+1)n}$	0	$\xi^{(2i+1)n}$	0	0

B.6 $\mathfrak{A}_4$ et $\mathfrak{S}_4$

Soit $\mathfrak{A}_4$ le groupe des permutations paires d'un ensemble à 4 éléments. On choisit dans $\mathfrak{A}_4$ une double transposition τ' et un 3-cycle σ. Les représentations irréductibles de $\mathfrak{A}_4$ sont les suivantes (on choisit une racine troisième de l'unité j) :

Classes	e	τ'	σ	σ^2
Cardinal de cette classe	1	3	4	4
χ_1	1	1	1	1
χ_j	1	1	j	j^2
χ_{j^2}	1	1	j^2	j
χ_3	3	-1	0	0

.

Les caractères modulaires irréductibles de $\mathfrak{A}_4$ sont :

Classes	e	σ	σ^2
1	1	1	1
j	1	j	j^2
j^2	1	j^2	j

.

Les matrices de décomposition et de Cartan sont :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Soit $\mathfrak{S}_4$ le groupe des permutations d'un ensemble à 4 éléments. On désigne par τ une transposition, τ' une double transposition, σ un cycle de longueur 3 et ρ un cycle de longueur 4. Voici la table des caractères irréductibles de $\mathfrak{S}_4$ (les noms des caractères proviennent de ceux des caractères de H, *cf* tables B.18 et B.19, et propriété 1.4.5) :

Classes	e	τ'	σ	τ	ρ
Cardinal de cette classe	1	3	8	6	6
$\overline{\chi_0}$	1	1	1	1	1
$\overline{\chi_{2u}}$	1	1	1	-1	-1
$\overline{\chi_0''}$	3	-1	0	-1	1
$\overline{\chi_{2u}''}$	3	-1	0	1	-1
$\overline{\chi_0^{(4)}}$	2	2	-1	0	0

.

En calculant les $\frac{\chi(g)|Cl(g)|}{\chi(1)}$ modulo 2, on obtient que $k\mathfrak{S}_4$ n'a qu'un seul bloc. Les caractères modulaires irréductibles sont :

Classes	e	σ
α_0	1	1
α_1	2	-1

. (B.3)

La matrice de décomposition est donc $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, et la matrice de Cartan est $\left(\begin{smallmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{smallmatrix}\right)$.

B.7 Structure des modules sur $k\mathfrak{A}_4$ et $k\mathfrak{S}_4$

On utilise les foncteurs de restriction et d'induction entre $\mathfrak{S}_4$ à $\mathfrak{A}_4$ pour donner la structure de Lœwy des modules projectifs sur $k\mathfrak{A}_4$ et $k\mathfrak{S}_4$. On les note juste Res et Ind. On a

$$\text{Res } \alpha_0 = 1 \quad \text{et} \quad \text{Res } \alpha_1 = j + j^2$$

et par dualité

$$\text{Ind } 1 = 2\alpha_0, \quad \text{Ind } j = \text{Ind } j^2 = \alpha_1.$$

On fait l'amalgame entre les modules simples et leurs caractères. Le module Ind 1 est indécomposable, car

$$\mathrm{Hom}_{k\mathfrak{S}_4}(\alpha_0, \mathrm{Ind}\ 1) = \mathrm{Hom}_{k\mathfrak{A}_4}(1, 1),$$

et ce dernier k-espace vectoriel est de dimension 1. De la même façon on montre que le module Res α_1 est somme directe des modules j et j^2.

Soit P_1, P_j et P_{j^2} les enveloppes projectives respectives des modules simples 1, j et j^2. On a $P_1/\mathrm{rad}(P_1) = 1$ et $\mathrm{soc}(P_1) = 1$, donc en utilisant la matrice de Cartan de $\mathfrak{A}_4$ le caractère modulaire du module $\mathrm{rad}(P_1)/\mathrm{soc}(P_1)$ est $j + j^2$. De plus, le module $\mathrm{rad}(P_1)/\mathrm{rad}^2(P_1)$ est un quotient du module $\mathrm{rad}(P_1)/\mathrm{soc}(P_1)$.

Le module semi-simple $\mathrm{rad}(P_1)/\mathrm{rad}^2(P_1)$ est isomorphe au module

$$\bigoplus_{\sigma} \sigma^{n_\sigma}$$

où σ parcourt l'ensemble des modules simples et $n_\sigma = \dim_k \mathrm{Ext}^1_{k\mathfrak{A}_4}(\sigma, 1)$ (voir par exemple [Be, 2.4.3.]). La connaissance du caractère modulaire de $\mathrm{rad}(P_1)/\mathrm{soc}(P_1)$ montre que $n_1 = 0$, et que n_j et n_{j^2} peuvent valoir 0 ou 1. Ils ne peuvent être nuls tous les deux car $\mathrm{rad}(P_1)/\mathrm{rad}^2(P_1)$ est non vide.

On a par adjonction

$$\mathrm{Ext}^1_{k\mathfrak{A}_4}(1, j) = \mathrm{Ext}^1_{k\mathfrak{S}_4}(\alpha_0, \alpha_1) = \mathrm{Ext}^1_{k\mathfrak{A}_4}(1, j^2),$$

donc $n_j = n_{j^2} = 1$. On en déduit donc la structure de P_1, celles de P_j et P_{j^2} s'obtiennent de la même façon :

$$P_1 = \begin{array}{ccc} & 1 & \\ j & & j^2 \\ & 1 & \end{array} \qquad P_j = \begin{array}{ccc} & j & \\ j^2 & & 1 \\ & j & \end{array} \qquad P_{j^2} = \begin{array}{ccc} & j^2 & \\ 1 & & j \\ & j^2 & \end{array} .$$

Soit Q_0 et Q_1 les enveloppes projectives des modules simples de caractères α_0 et α_1 respectivement. On calcule, toujours en utilisant l'adjonction entre la restriction et l'induction, que

$$\mathrm{Ext}^1_{k\mathfrak{S}_4}(\alpha_0, \alpha_1) \simeq \mathrm{Ext}^1_{k\mathfrak{S}_4}(\alpha_1, \alpha_0) \simeq k$$

puis que

$$\mathrm{Ext}^1_{k\mathfrak{S}_4}(\alpha_1, \alpha_1) \simeq \mathrm{Ext}^1_{k\mathfrak{A}_4}(j, j) \oplus \mathrm{Ext}^1_{k\mathfrak{A}_4}(j^2, j) \simeq k.$$

En utilisant de plus la matrice de Cartan de $k\mathfrak{S}_4$, on obtient la structure de Q_1 :

$$Q_1 = \begin{array}{ccc} & \alpha_1 & \\ \alpha_1 & & \alpha_0 \\ & \alpha_1 & \end{array} .$$

Il existe donc un module indécomposable V de dimension 2 dont la tête est isomorphe à α_0 et le socle est isomorphe à α_1, et un module indécomposable W dont la tête est isomorphe à α_0, le socle est isomorphe à α_1, et tel que $\mathrm{rad}(W)/\mathrm{soc}(W) \simeq \alpha_0$:

$$V = \begin{matrix}\alpha_0\\ \alpha_1\end{matrix} \qquad W = \begin{matrix}\alpha_0\\ \alpha_0\\ \alpha_1\end{matrix}\ .$$

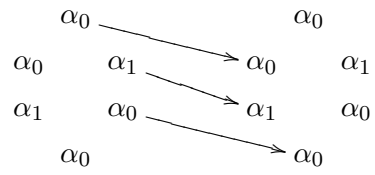
Ces deux modules ont pour enveloppe projective Q_0, donc on en déduit la structure de celui-ci :

$$Q_0 = \begin{matrix} & \alpha_0 & \\ \alpha_0 & & \alpha_1 \\ \alpha_1 & & \alpha_0 \\ & \alpha_0 & \end{matrix}\ .$$

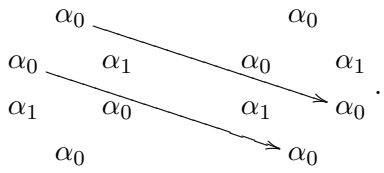
On vérifie les résultats suivants :

L'algèbre $\mathrm{End}_{k\mathfrak{S}_4}(Q_0)$ est isomorphe à $k[C_2 \times C_2]$, où les groupes C_2 sont engendrés par a et b définis par

$1 + a$:



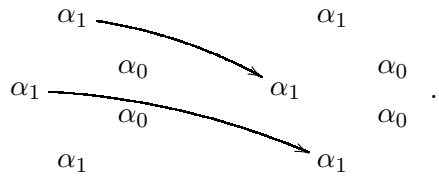
$1 + b$:



.

L'algèbre $\mathrm{End}_{k\mathfrak{S}_4}(Q_1)$ est isomorphe à $kC_4/\langle 1 + c + c^2 + c^3\rangle$, où C_4 est engendré par c défini par

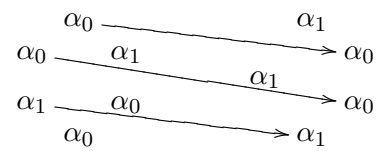
$1 + c$:



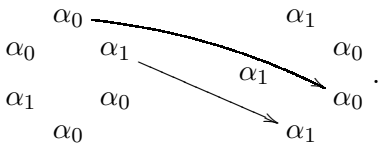
.

Le k-espace vectoriel $\mathrm{Hom}_{k\mathfrak{S}_4}(Q_0, Q_1)$ est de dimension 2, il a pour base les morphismes e et f définis par

e :



f :

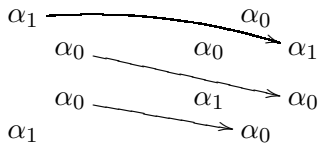


.

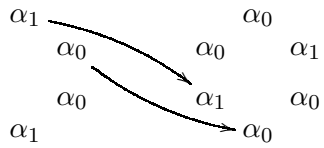
Cet espace vectoriel est un (End(Q_0), End(Q_1))-bimodule, sur lequel b et c agissent trivialement et a agit par $ae = e + f$, $af = f$.

Le k-espace vectoriel $\mathrm{Hom}_{k\mathfrak{S}_4}(Q_1, Q_0)$ est de dimension 2, il a pour base les morphismes e' et f' définis par

e' :



f' :



Cet espace vectoriel est un (End(Q_1), End(Q_0))-bimodule, sur lequel b et c agissent trivialement et a agit par $e'a = e' + f'$, $f'a = f'$.

Bibliographie

[AB] J. L. Alperin et M. Broué. Local methods in block theory. *Ann. of Math. (2)*, 110(1) : 143–157, 1979.

[Al1] J. L. Alperin. Sylow intersections and fusion. *J. Algebra*, 6 : 222–241, 1967.

[Al2] J. L. Alperin. *Local representation theory.* Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

[Bki] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique. Fascicule XXVII. Algèbre commutative. Chapitre 1 : Modules plats. Chapitre 2 : Localisation.* Herman, Paris, 1961. Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1290.

[Be] D. J. Benson. *Representations and cohomology. I.* Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1998. Basic representation theory of finite groups and associative algebras.

[BMM] M. Broué, G. Malle, et J. Michel. Generic blocks of finite reductive groups. *Astérisque*, (212) : 7–92, 1993. Représentations unipotentes génériques et blocs des groupes réductifs finis.

[BMa] M. Broué et G. Malle. Zyklotomische Heckealgebren. *Astérisque*, (212) : 119–189, 1993. Représentations unipotentes génériques et blocs des groupes réductifs finis.

[BMi] M. Broué et J. Michel. Blocs à groupes de défaut abéliens des groupes réductifs finis. *Astérisque*, (212) : 93–117, 1993. Représentations unipotentes génériques et blocs des groupes réductifs finis.

[Bor] A. Borel. *Linear algebraic groups.* Springer-Verlag, New York, second edition, 1991.

[Bou] S. Bouc. Le complexe de chaînes d'un G-complexe simplicial acyclique. *J. Algebra*, 220(2) : 415–436, 1999.

[Br1] M. Broué. On characters of height zero. *Proc. of Symposia in Pure Mathematics*, 37 : 393–396, 1980.

[Br2] M. Broué. On Scott modules and p-permutation modules : an approach through the Brauer morphism. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 93(3) : 401–408, 1985.

[Br3] M. Broué. Isométries parfaites, types de blocs, catégories dérivées. *Astérisque*, (181-182) : 61–92, 1990.

[Br4] M. Broué. On representations of symmetric algebras : An introduction. *ETH Zürick*, 1990.

[Br5] M. Broué. Equivalences of blocks of group algebras. Dans *Finite-dimensional algebras and related topics (Ottawa, ON, 1992)*, pages 1–26. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1994.

[Br6] M. Broué. Rickard equivalences and block theory. Dans *Groups '93 Galway/St. Andrews, Vol. 1 (Galway, 1993)*, pages 58–79. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.

[Bra] R. Brauer. Types of blocks of representations of finite groups. Dans *Representation theory of finite groups and related topics (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXI, Univ. Wisconsin, Madison, Wis., 1970)*, pages 7–11. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1971.

[Bu] R. Burkhardt. Die Zerlegungsmatrizen der Gruppen $\mathrm{psl}(2, p^f)$. *J. Algebra*, 40(1) : 75–96, 1976.

[CG] R. W. Carter et M. Geck. *Representations of Reductive Groups.* Cambridge University Press, 1998.

[De] P. Deligne. *Cohomologie étale.* Springer-Verlag, Berlin, 1977. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie SGA $4\frac{1}{2}$, Avec la collaboration de J. F. Boutot, A. Grothendieck, L. Illusie et J. L. Verdier, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 569.

[DL] P. Deligne et G. Lusztig. Representations of reductive groups over finite fields. *Ann. of Math. (2)*, 103(1) :103–161, 1976.

[DM1] F. Digne et J. Michel. Fonctions L des variétés de Deligne-Lusztig et descente de Shintani. *Mém. Soc. Math. France (N.S.)*, (20) : iv+144, 1985.

[DM2] F. Digne et J. Michel. *Representations of finite groups of Lie type.* Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[Er] K. Erdmann. *Blocks of tame representation type and related algebras.* Springer-Verlag, Berlin/New York. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1428.

[FK] E. Freitag et R. Kiehl. *Étale cohomology and the Weil conjecture.* Springer-Verlag, Berlin, 1988. Avec une introduction historique de J. A. Dieudonné.

[Go] D. Gorenstein. *Finite Groups.* Chelsea Publishing Company, New York, second edition, 1980.

[Gr] P.-P. Grivel. Catégories dérivées et foncteurs dérivés. Dans *Algebraic D-Modules*, pages 1–107. Academic Press, Orlando, 1987.

[Ho1] T. Holm. Derived equivalent tame blocks. *J. Algebra*, 194(1) : 178–200, 1997.

[Ho2] T. Holm. Derived equivalence classification of algebras of dihedral, semidihedral, and quaternion type. *J. Algebra*, 211(1) : 159–205, 1999.

[Ke1] B. Keller. Deriving DG categories. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 27(1) : 63–102, 1994.

[Ke2] B. Keller. Derived categories and their uses. Dans *Handbook of algebra, Vol. 1*, pages 671–701. North-Holland, Amsterdam, 1996.

[Ke3] B. Keller. On the construction of triangle equivalences. Dans *Derived equivalences for group rings*, pages 155–176. Springer, Berlin, 1998.

[Ke4] B. Keller. Introduction to abelian and derived categories. Dans *Representations of reductive groups*, pages 41–61. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.

[Ke5] B. Keller. Bimodule complexes via strong homotopy actions. *Algebr. Represent. Theory*, 3(4) : 357–376, 2000. Publication spéciale dédicacée à Klaus Roggenkamp à l'occasion de son 60ème anniversaire.

[Ke6] B. Keller. Introduction to A-infinity algebras and modules. Dans *Homology, Homotopy and applications, vol. 3, No. 1*, pages 1–35. 2001. Disponible à l'adresse `http ://www.rmi.acnet.ge/hha/`.

[KS] M. Kontsevich et Y. Soibelman. Homological mirror symmetry and torus fibrations. Disponible à l'adresse `http ://xxx.lanl.gov/abs/math.SG/0011041`.

[KZ] S. König et A. Zimmermann. *Derived Equivalences for Group Rings*. Springer-Verlag, 1998. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1685.

[Le] K. Lefèvre. Sur les A_∞-catégories. Thèse de l'université Paris 7. Disponible à l'adresse `http ://www.math.jussieu.fr/~lefevre`.

[Li1] M. Linckelmann. A derived equivalence for blocks with dihedral defect groups *J. Algebra*, 164 : 244–255, 1994.

[Li2] M. Linckelmann. Stable equivalences of Morita type for self-injective algebras and p-groups. *Math. Z.*, 223(1) : 87–100, 1996.

[Li3] M. Linckelmann. On stable equivalences of Morita type. Dans *Derived equivalences for group rings*, pages 221–232. Springer, Berlin, 1998.

[NT] H. Nagao et Y. Tsushima. *Representations of finite groups*. Academic Press Inc., Boston, MA, 1989. Traduit du japonais.

[Ok] T. Okuyama. Derived equivalences in $\mathrm{SL}_2(q)$. Preprint.

[Pu] L. Puig. Algèbres de source de certains blocs des groupes de Chevalley. *Astérisque*, (181-182) : 9, 221–236, 1990.

[Ri1] J. Rickard. Morita theory for derived categories. *J. London Math. Soc. (2)*, 39(3) : 436–456, 1989.

[Ri2] J. Rickard. Derived equivalences as derived functors. *J. London Math. Soc. (2)*, 43(1) : 37–48, 1991.

[Ri3] J. Rickard. Finite group actions and 'etale cohomology. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (80) : 81–94 (1995), 1994.

[Ri4] J. Rickard. Splendid equivalences : derived categories and permutation modules. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 72(2) : 331–358, 1996.

[Ro1] R. Rouquier. Some examples of Rickard complexes. *An. Ştiinţ. Univ. Ovidius Constanţa Ser. Mat.*, 4(2) : 169–173, 1996. Representation theory of groups, algebras, and orders (Constanţa, 1995).

[Ro2] R. Rouquier. The derived category of blocks with cyclic defect groups. Dans *Derived equivalences for group rings*, pages 199–220. Springer, Berlin, 1998.

[Ro3] R. Rouquier. Gluing p-permutation modules. Unpublished, 1998. Disponible à l'adresse `http ://www.math.jussieu.fr/~rouquier/preprints/preprints.html`.

[Ro4] R. Rouquier. Block theory via stable and Rickard equivalences. Dans M. J. Collins, B. J. Parshall, and L. L. Scott, editors, *Modular Representation Theory. Proceedings of a Symposium held at the University of Virginia, Charlottesville, Virginia, May 8–15, 1998*, pages 101–146. Walter de Gruyter, Berlin, New York, 2001.

[Ro5] R. Rouquier. Complexes de chaînes étales et courbes de Deligne-Lusztig. A paraître dans J. Algebra, 2002.

[Se1] J.-P. Serre. *Représentations linéaires des groupes finis.* Hermann, 1967.

[Se2] J.-P. Serre. *Cours d'arithmétique.* Presses Universitaires de France, 1977.

[Sr] B. Srinivasan. *Representations of finite Chevalley groups.* Springer-Verlag, Berlin, 1979. A survey.

[ST] P. Seidel et R. Thomas. Braid group actions on derived categories of coherent sheaves. *Duke Math. J.*, 108(1) : 37–108, 2001.

[Ta] J. T. Tate. Algebraic cycles and poles of zeta functions. Dans *Arithmetical Algebraic Geometry (Proc. Conf. Purdue Univ., 1963)*, pages 93–110. Harper & Row, New York, 1965.

[Th] J. Thévenaz. *G-algebras and modular representation theory.* The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1995. Oxford Science Publications.

[Ve] J.-L. Verdier. Catégories dérivées, état 0. Dans *SGA 4 1/2*, pages 262–311. Springer, 1977.

[We] C. A. Weibel. *An introduction to homological algebra.* Cambridge University Press, Cambridge, 1994.