Université Paris Diderot (Paris 7)

Université Sorbonne Paris Cité

École Doctorale de Sciences Mathématiques de Paris Centre (ED 386)
Institut de Mathématiques de Jussieu - Paris Rive Gauche (UMR 7586)

Thèse de doctorat

Discipline : Mathématiques

Présentée par

Élie Goudout

Étude de la fonction ω : petits intervalles et systèmes translatés

Dirigée par **Régis de la Bretèche**

Soutenue publiquement le 3 avril 2019 devant le jury composé de :

M. Régis de la Bretèche	Université Paris Diderot	Directeur
Mme. Cécile Dartyge	Université de Lorraine	Examinatrice
M. Sary Drappeau	Université d'Aix-Marseille	Examinateur
M. Daniel Fiorilli	CNRS	Examinateur
M. Marc Hindry	Université Paris Diderot	Examinateur
M. Joël Rivat	Université d'Aix-Marseille	Président du jury

Au vu des rapports de :

M. Maksym Radziwiłł	Caltech
M. Kannan Soundararajan	Stanford University

CC BY NC ND

Lien direct vers le manuscrit / Direct link to the manuscript :
https://webusers.imj-prg.fr/~elie.goudout/these.pdf

Institut de Mathématiques de Jussieu-Paris Rive Gauche
(CNRS – UMR 7586)
Université Paris Diderot (Paris 7)
Bâtiment Sophie Germain - Boîte Courrier 7012
8, place Aurélie Nemours
75205 Paris Cedex 13
France

École Doctorale de Sciences Mathématiques de Paris Centre
Boîte Courrier 290
4, place Jussieu
75252 Paris Cedex 05
France

Résumé/Abstract

Résumé

Dans cette thèse, on s'intéresse à l'interaction entre les structures multiplicative et additive des entiers. Pour cela, on étudie notamment la fonction « nombre de facteurs premiers distincts », notée ω, dans de très petits intervalles, mais aussi sur des systèmes translatés. Ce projet est né suite à une importante percée de Matomäki & Radziwiłł dans l'étude des petits intervalles, en 2015.

Dans un premier temps, on démontre que le théorème d'Erdős-Kac est vérifié dans presque tous les petits intervalles, dès lors que leur taille tend vers l'infini.

On s'intéresse ensuite aux lois locales de la fonction ω. On parvient à démontrer, lorsque $x \geqslant 3$ et $5 \leqslant k \ll \log\log x$, que presque tous les intervalles de longueur h contiennent des entiers $n \leqslant x$ vérifiant $\omega(n) = k$, dès que h est suffisamment grand. Lorsque $k \asymp \log\log x$, la condition sur h est optimale. On obtient un résultat analogue, bien que non optimal, sur les entiers $x^{1/u}$-friables pour $u \leqslant (\log x)^{1/6-\varepsilon}$, où $\varepsilon > 0$ peut être fixé arbitrairement petit.

Les méthodes employées dans le deuxième chapitre invitent naturellement à étudier le comportement de certaines fonctions additives sur des systèmes d'entiers translatés. On démontre alors, dans un troisième temps, une version multidimensionnelle d'un théorème de 1975 dû à Halász, relatif à la concentration maximale des valeurs d'une seule fonction additive.

Enfin, dans le quatrième chapitre, on démontre que $\omega(n-1)$ vérifie un théorème d'Erdős-Kac lorsque $\omega(n) = k$ est fixé. Cela généralise un résultat d'Halberstam.

Mots-clefs

Nombre de facteurs premiers, presque tous les petits intervalles, fonctions multiplicatives, fonctions additives, théorème d'Erdős-Kac.

Study of the ω function: short intervals and shifted systems

Abstract

In this thesis, we study the interactions between the multiplicative and additive structures of integers. As such, we particularly investigate the function "number of distinct prime factors", noted ω, on short intervals and shifted systems. This project originates from an important breakthrough of Matomäki & Radziwiłł regarding the study of small intervals, in 2015.

As a first step, we show that the Erdős-Kac theorem is valid in almost all short intervals, as long as their length goes to infinity.

We then consider the local laws of ω. We prove that, for $x \geqslant 3$ and $5 \leqslant k \ll \log\log x$, almost all intervals of length h contain integers $n \leqslant x$ satisfying $\omega(n) = k$, when h is large enough. For $k \asymp \log\log x$, the condition on h is optimal. A similar result, albeit non optimal, is obtained for $x^{1/u}$-friable integers with $u \leqslant (\log x)^{1/6-\varepsilon}$, where $\varepsilon > 0$ is fixed, arbitrarily small.

The techniques used in the second chapter naturally invite us to consider the behavior of a wide class of additive functions on shifted systems. In the third chapter, we prove a multidimensional version of a theorem from Halász in 1975, regarding the maximum concentration of the values of one additive function.

In the last chapter, we show that $\omega(n-1)$ satisfies an Erdős-Kac theorem whenever $\omega(n) = k$ is fixed. This generalizes a theorem of Halberstam.

Keywords

Number of prime factors, almost all short intervals, multiplicative functions, additive functions, Erdős-Kac theorem.

Table des matières

Remerciements **v**

Résumé/Abstract **vii**

Introduction **5**

I.1 Un modèle probabiliste pour les entiers et quelques conjectures 6
I.1.1 Indépendance des nombres premiers 6
I.1.2 Le modèle de Cramér 7
I.1.3 Quelques conjectures 7
I.1.4 Limites du modèle 8
I.2 État de l'art 8
I.2.1 Petits intervalles 8
I.2.2 Systèmes translatés 11
I.3 Résultats et méthodes de la thèse 12
I.3.1 Petits intervalles 12
I.3.2 Systèmes translatés 16
I.4 Plan de la thèse 17

I Nombre de facteurs premiers dans presque tous les petits intervalles 19

1 Théorème d'Erdős-Kac dans presque tous les petits intervalles 21

1.1 Introduction 21
1.1.1 Présentation des résultats 21
1.1.2 Notations 24
1.2 Quelques lemmes classiques 24
1.3 Répartition de ω dans les petits intervalles 25
1.4 Lois locales 28
1.5 Estimation du type Matomäki-Radziwiłł 28
1.5.1 Résultats préliminaires 28
1.5.2 Application de la méthode de Matomäki-Radziwiłł 32

2 Lois locales de la fonction ω dans presque tous les petits intervalles 35
2.1 Introduction . . . 35
2.1.1 Résultats . . . 35
2.1.2 Aperçu de la méthode . . . 38
2.1.3 Notations . . . 39
2.2 Lemmes utiles . . . 39
2.3 Résultat général . . . 41
2.4 Méthode de Matomäki-Radziwiłł adaptée . . . 43
2.4.1 Première simplification . . . 43
2.4.2 Utilisation de la borne de Parseval . . . 44
2.4.3 Factorisation du polynôme de Dirichlet associé à $\mathcal{A} \cap \mathcal{S}$ . . . 45
2.4.4 Majoration de l'intégrale . . . 46
2.5 Application aux entiers ayant $k \asymp \log_2 X$ facteurs premiers . . . 49
2.5.1 Propriétés classiques . . . 49
2.5.2 Crible bi-dimensionnel pour les entiers ayant k facteurs premiers . . . 55
2.5.3 Application du Théorème 2.3.1 . . . 59
2.6 Entiers friables . . . 60
2.7 Entiers avec un petit nombre de facteurs premiers . . . 65
2.7.1 Redéfinition de $\mathcal{S}$ . . . 66
2.7.2 Démonstration du Théorème 2.1.2 . . . 66

II Systèmes translatés 77

3 Concentrations simultanées de fonctions additives 79
3.1 Introduction et énoncé des résultats . . . 79
3.2 Majoration . . . 81
3.3 Minoration . . . 89

4 Théorème d'Erdős-Kac pour les translatés d'entiers ayant k facteurs premiers 93
4.1 Présentation des résultats . . . 93
4.2 Étude de la série génératrice . . . 94
4.2.1 Moyenne d'une fonction multiplicative sur $\mathcal{E}_k(x)$ . . . 94
4.2.2 Calcul de la série génératrice . . . 96
4.3 Lois locales et répartition . . . 98

Appendice

A Highest perfect power of a product of integers less than x 105

Bibliographie 107

Introduction

La théorie des nombres est, avec la géométrie, une des branches fondatrices des mathématiques. On en trouve déjà la trace sur une tablette d'argile (*Plimpton 322*), datée de 1800 avant notre ère. Parmi les problèmes les plus célèbres de ce domaine, on peut citer par exemple le grand théorème de Fermat, la conjecture de Goldbach, le théorème des nombres premiers et l'hypothèse de Riemann, ou encore la conjecture des nombres premiers jumeaux. Pour toutes ces questions, la recherche – parfois fructueuse – de réponse a permis de découvrir de nouvelles techniques et de distinguer plusieurs champs d'étude au sein de ce vaste domaine.

La présente thèse s'inscrit à l'interface entre les versants multiplicatif, analytique, et probabiliste de la théorie des nombres. L'objet central de l'étude est la fonction « nombre de facteurs premiers distincts », notée ω. On sait depuis Euclide qu'il existe une infinité de nombres premiers, et donc que $\{\omega(n) : \quad n \geqslant 1\} = \mathbb{N}$. Il devient alors naturel d'étudier la structure des ensembles $\mathcal{E}_k$, définis pour $k \geqslant 0$ par

$$\mathcal{E}_k := \{n \geqslant 1 : \quad \omega(n) = k\}.$$

Se posent notamment les questions suivantes.

($\mathbf{Q}_1$) Que dire de la répartition de ω ?

($\mathbf{Q}_2$) Les ensembles $\mathcal{E}_k$ admettent-ils une densité naturelle ? Si oui, laquelle ?

($\mathbf{Q}_3$) Que dire de la répartition de $\mathcal{E}_k$ dans les progressions arithmétiques ?

($\mathbf{Q}_4$) Que dire de la répartition de $\mathcal{E}_k$ dans de petits intervalles ?

($\mathbf{Q}_5$) Que reste-t-il de la structure multiplicative de $\mathcal{E}_k$ dans son translaté $\mathcal{E}_k + 1$?

La question ($\mathbf{Q}_1$) fut abordée au début du XXe siècle par Hardy & Ramanujan [HR17], puis leur résultat fut complété lors des décennies suivantes par Turán [Tur34], Erdős & Kac [EK39], Rényi & Turán [RT58] et Delange [Del59]. On retient notamment le théorème suivant, dont on note la nature profondément probabiliste.

Théorème (Erdős & Kac [EK39] ; Rényi & Turán [RT58])**.** *Uniformément pour $x \geqslant 3$ et $y \in \mathbb{R}$, on a*[1]

$$\frac{1}{x}\#\left\{n \leqslant x : \quad \omega(n) \leqslant \log_2 x + y\sqrt{\log_2 x}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y} \mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{d}t + O\left(\frac{1}{\sqrt{\log_2 x}}\right).$$

1. Pour $k \geqslant 1$, on note $\log_k$ la fonction log itérée k fois. Donc $\log_2 = \log\log$ etc...

Parmi les problèmes cités, le cas $k = 1$ de $(\mathbf{Q}_2)$ est celui dont la formalisation est la plus ancienne, puisqu'elle remonte à la fin du XVIIIe siècle, avec Gauss et Legendre. Il est équivalent au fameux « théorème des nombres premiers », démontré en 1896 indépendamment par Hadamard [Had96] et La Vallée Poussin [LVP96]. Depuis, le cas général pour k quelconque a été en grande partie résolu, par de nombreux travaux jusqu'au début des années 2000. On cite notamment Sathe [Sat53], Selberg [Sel54], Hensley [Hen87], Hildebrand & Tenenbaum [HT88] et Kerner [Ker02]. Pour $x \geqslant 1$, on définit

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_k(x) &:= \mathcal{E}_k \cap [1, x],\\ \pi_k(x) &:= \#\mathcal{E}_k(x).\end{aligned}$$

Théorème (Sathe [Sat53] ; Selberg [Sel54])**.** *Soit $R > 0$ fixé. Uniformément pour $x \geqslant 3$ et $1 \leqslant k \leqslant R \log_2 x$, on a*

$$\pi_k(x) = (1 + o(1))\lambda\left(\frac{k-1}{\log_2 x}\right)\frac{x}{\log x}\frac{(\log_2 x)^{k-1}}{(k-1)!},$$

où $\lambda : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^*$ est une fonction explicite vérifiant $\lambda(0) = \lambda(1) = 1$.

La présente thèse porte principalement sur l'étude des problèmes $(\mathbf{Q}_4)$ et $(\mathbf{Q}_5)$. Le point commun de ces questions avec $(\mathbf{Q}_3)$ est qu'elles impliquent toutes fortement la structure additive des entiers.

I.1 Un modèle probabiliste pour les entiers et quelques conjectures

La recherche en théorie des nombres est avant tout guidée par l'intérêt que l'on a pour les entiers et l'intuition que l'on s'en fait. Si la place de l'heuristique n'est plus centrale dans les mathématiques modernes, elle y reste un outil essentiel. En effet, il est en général plus simple d'aborder une question quand on pense en connaître la réponse. Un exemple célèbre de ce fait est la démonstration par Euler, en 1735, de l'identité suivante, devinée 4 ans auparavant :

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

On présente donc succinctement quelques éléments constitutifs de l'intuition en théorie des nombres, qui justifient amplement les énoncés auxquels on s'intéresse.

I.1.1 Indépendance des nombres premiers

Étant donné p et q deux nombres premiers distincts, uniformément pour $x \geqslant 1$, on a

$$\begin{aligned}\#\{n \leqslant x : \quad p|n\} &= \frac{x}{p} + O(1),\\ \#\{n \leqslant x : \quad q|n\} &= \frac{x}{q} + O(1),\\ \#\{n \leqslant x : \quad pq|n\} &= \frac{x}{pq} + O(1).\end{aligned}$$

En ignorant les termes d'erreur, il semble donc qu'en moyenne dans $[1, x]$, les évènements « p divise n » et « q divise n » sont indépendants. C'est une idée fondamentale, qui permet notamment – avec les formules de Mertens – de deviner que la densité des nombres premiers

inférieurs à x est de l'ordre de $1/\log x$. Elle ne prédit cependant pas la bonne formule asymptotique. Un succès notable de cette approximation est la prédiction de l'ordre normal de ω, c'est-à-dire que pour presque tout $n \geqslant 3$, on a

$$\omega(n) = (1 + o(1)) \log_2 n.$$

I.1.2 Le modèle de Cramér

Dans les années 1930, Cramér propose une approche probabiliste plus globale des entiers. Il s'appuie sur le théorème des nombres premiers afin de proposer une analogie entre les entiers que l'on connaît, et un monde où tous les entiers $n \geqslant 3$ seraient premiers « avec probabilité $1/\log n$ », indépendamment les uns des autres. Alors, dès qu'une propriété est vérifiée presque sûrement dans cette copie probabiliste des entiers, on espère qu'elle est vraie dans $\mathbb{N}$. Grossièrement, cela revient à estimer que globalement, les structures multiplicative et additive des entiers coexistent de façons indépendantes.

Bien que cette idée semble simpliste pour des raisons évidentes, elle s'avère redoutablement efficace lorsqu'il s'agit de prévoir le comportement approximatif de certains ensembles. Le modèle prédit notamment que la série des inverses des nombres premiers jumeaux converge, comme l'a démontré Brun [Bru19] en 1919. Il sera amplement utilisé, et amélioré, afin notamment de contourner des obstructions locales – *i.e.* n et $n+1$ ne peuvent pas être simultanément premiers pour $n \geqslant 3$. Plus de détails sont présentés dans [Gra95].

I.1.3 Quelques conjectures

Les modèles décrits ci-dessus permettent de formuler beaucoup d'heuristiques très précises. En accord avec une vaste conjecture d'Hardy & Littlewood [HL23], ils permettent notamment de deviner la *conjecture des nombres premiers jumeaux*.

Conjecture (Hardy & Littlewood [HL23]). *Pour $x \geqslant 2$, on a*[2]

$$\#\{p \leqslant x : \quad p+2 \text{ est premier}\} = 2\prod_{p \geqslant 3}\left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right)\frac{x}{(\log x)^2}(1+o(1)).$$

Cramér a poussé son modèle plus loin avec l'utilisation du lemme de Borel-Cantelli. Il a notamment énoncé les deux conjectures suivantes. On note $(p_n)_{n\geqslant 1}$ la suite croissante de tous les nombres premiers, et pour $x \geqslant 2$ on pose

$$\pi(x) := \#\{p \leqslant x\},$$
$$\mathrm{Li}(x) := \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\log t}.$$

Conjecture (Cramér [Cra36]).

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{p_{n+1} - p_n}{(\log p_n)^2} = 1.$$

Conjecture (Cramér [Cra34]).

$$\limsup_{x\to+\infty} \frac{|\pi(x) - \mathrm{Li}(x)|}{\sqrt{2x}\sqrt{\frac{\log_2 x}{\log x}}} = 1.$$

Comme l'explique l'auteur dans [Cra36], il est encourageant de noter que la dernière conjecture est compatible avec ce que fournirait l'hypothèse de Riemann. Cependant, ces deux conjectures ont été légèrement révisées depuis[3] [Gra95, Mon80].

2. Ici et dans toute la thèse, la lettre p désigne toujours un nombre premier.
3. L'auteur remercie le rapporteur Professeur Soundararajan pour ces références.

I.1.4 Limites du modèle

Il existe plusieurs limites bien connues pour ce modèle. On remarque que les deux aspects présentés aux sections I.1.1 et I.1.2 concernent respectivement l'échelle *locale* puis *globale*. Il se trouve que ces deux parties du modèle sont en défaut lorsque l'on sort de leur champ d'application naturel.

Par exemple, si l'on veut estimer $\pi(x)$ uniquement à partir de considérations locales, on trouve, pour tout $1/2 \leqslant c < 1$ fixé,

$$\pi(x) \approx x \prod_{p \leqslant x^c} \left(1 - \frac{1}{p}\right) + O(x^c) \approx \frac{\mathrm{e}^{-\gamma}}{c} \frac{x}{\log x},$$

où γ désigne la constante d'Euler-Mascheroni et vérifie $\mathrm{e}^{-\gamma} \simeq 0,561459$. Le modèle local est donc mis en défaut, puisqu'il est évident qu'une telle formule ne peut être vérifiée au plus que pour une seule valeur de c. On peut alors être tenté de considérer que le passage au global s'effectue uniquement par la considération de tous les nombres premiers inférieurs à $x^{\mathrm{e}^{-\gamma}}$, mais cela semble très artificiel.

À l'inverse, si l'on essaie de localiser les nombres premiers dans de très petits intervalles avec le modèle de Cramér, on est confronté au théorème suivant.

Théorème (Maier [Mai85]). *Soit $\lambda > 1$ fixé quelconque. Il existe des constantes $c_1(\lambda)$ et $c_2(\lambda)$ vérifiant*

$$c_1(\lambda) < 1 < c_2(\lambda),$$

pour lesquelles la quantité

$$\frac{\pi\big(x + (\log x)^\lambda\big) - \pi(x)}{(\log x)^{\lambda - 1}}$$

*est inférieure à $c_1(\lambda)$ (*resp. *supérieure à $c_2(\lambda)$) pour une infinité de valeurs arbitrairement grandes de x.*

Ainsi, même lorsque $\lambda > 2$ et que le modèle prévoit qu'il y ait toujours des nombres premiers dans $[x, x + (\log x)^\lambda]$ pour x suffisamment grand, ils n'admettent pas $1/\log x$ comme densité « locale ». On note par ailleurs que Pintz [Pin07] a mis en évidence un défaut plus subtil du modèle de Cramér, intimement lié à sa nature.

À l'instar de la physique théorique, la théorie des nombres semble manquer d'une « théorie du tout ».

I.2 État de l'art

Les conjectures de la section I.1.3 sont très profondes et *a priori* loin d'être résolues, même sous l'hypothèse de Riemann. Elles représentent une étape très importante dans l'étude des questions ($\mathbf{Q}_4$) et ($\mathbf{Q}_5$). On présente ici quelques uns des meilleurs résultats en la matière.

I.2.1 Petits intervalles

La notion de « petit intervalle » est assez subjective, et existe relativement à la taille des entiers considérés. En général, si l'on étudie la répartition d'un ensemble sur $[x, x+y]$, on commence à parler de petit intervalle lorsque le résultat désiré ne peut pas simplement s'obtenir par l'étude séparée de $[1, x + y]$ et $[1, x]$. Par exemple, pour le comptage des nombres premiers jusqu'à x, le meilleur terme d'erreur connu à l'heure actuelle est de

l'ordre de $x\mathrm{e}^{-c(\log x)^{3/5}(\log_2 x)^{-1/5}}$ pour une certaine constante $c > 0$ [EMF75]. Ainsi, on considère par exemple que $[x, x + x^{9/10}]$ est un petit intervalle pour ce problème, tandis que $[x, x+x\mathrm{e}^{-\sqrt{\log x}}]$ ne l'est pas. Bien entendu, sous l'hypothèse de Riemann, les intervalles $[x, x + x^c]$ avec $c > 1/2$ ne sont plus considérés petits.

Une région sans zéro de la forme $\Re\mathrm{e}\, s > \sigma_0$ ($\sigma_0 < 1$) pour la fonction ζ de Riemann entraînerait directement un théorème des nombres premiers dans tout intervalle de taille x^σ pour $\sigma_0 < \sigma \leqslant 1$. Bien que l'on ne connaisse pas de tel résultat, il est possible, par la majoration du nombre de zéros de ζ en dehors de la droite critique, d'obtenir un théorème de la même saveur [Hux72]. Le meilleur résultat connu – dont on énonce un cas particulier – est dû à Heath-Brown, et repose sur une identité de crible.

Théorème (Heath-Brown [HB88])**.** *Uniformément pour $x^{7/12} < y \leqslant x$, on a*

$$\pi(x + y) - \pi(x) = (1 + o(1))\frac{y}{\log x}$$

lorsque x tend vers l'infini.

On sait par le théorème de Maier que le résultat ci-dessus n'est pas vérifié si y est de l'ordre d'une puissance de $\log x$. Il n'est pas clair quelle pourrait être la plus petite valeur admissible pour y, mais il est très raisonnable de penser que tout intervalle de taille x^ε avec $\varepsilon > 0$ vérifie le théorème des nombres premiers. Le résultat de Heath-Brown permet notamment de démontrer l'existence d'une constante $\vartheta < 7/12$ pour laquelle tous les intervalles $[x, x + x^\vartheta]$ à partir d'un certain rang contiennent au moins un nombre premier. La même conclusion a été obtenue par Baker, Harman et Pintz [BHP01] pour tous les intervalles de taille $x^{0,525}$.

Le modèle de Cramér est issu de la théorie des probabilités. À ce titre, il est sans doute très efficace sur des énoncés probabilistes. Ainsi, au lieu de considérer les valeurs de y pour lesquelles $[x, x + y]$ vérifie le théorème des nombres premiers, on peut s'intéresser aux intervalles le vérifiant « presque toujours ». De manière générale, prenons le cas d'un ensemble $\mathcal{A}$ à structure multiplicative, dont la densité asymptotique est $\delta = \delta(x)$. La « probabilité » qu'un intervalle $[x, x + h]$ n'intersecte pas $\mathcal{A}$ peut être écrite, pour x et h entiers,

$$\mathbb{P}(\mathcal{A} \cap [x, x + h] = \varnothing) = \mathbb{P}\Big(\bigwedge_{0\leqslant i\leqslant h} x + i \notin \mathcal{A}\Big),$$

où $\bigwedge$ désigne le « ET » logique. En supposant, de manière analogue au modèle de Cramér pour les nombres premiers, que les évènements du membre de droite sont indépendants, on obtient alors

$$\mathbb{P}(\mathcal{A} \cap [x, x + h] = \varnothing) = \prod_{0\leqslant i\leqslant h} \mathbb{P}(x + i \notin \mathcal{A}) \approx (1 - \delta)^{h+1}.$$

Ainsi, dès que $\delta h \to +\infty$, on peut conjecturer que $\mathcal{A}$ intersecte presque tous les intervalles $[x, x + h]$ et y admet presque toujours δ comme densité locale. On en déduit la conjecture suivante, qui est la problématique principale de cette thèse concernant ($\mathbf{Q}_4$). On note δ_k la densité asymptotique de $\mathcal{E}_k$.

Conjecture. *Soit $R > 0$ fixé et $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction tendant vers l'infini en l'infini. Uniformément pour $x \geqslant 3$, $1 \leqslant k \leqslant R\log_2 x$ et $\psi(x) < \delta_k(x)h \leqslant x$, on a*

$$\pi_k(x + h) - \pi_k(x) = (1 + o(1))\delta_k(x)h$$

presque partout lorsque x tend vers l'infini.

On entend par « presque partout » que pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, lorsque $X > X_0(\varepsilon)$ est suffisamment grand, la relation asymptotique ci-dessus est vérifiée en encadrant le $o(1)$ par $-\varepsilon < o(1) < \varepsilon$, pour tout $x \leqslant X$ sauf au plus une proportion εX. Il est probable que cette conjecture soit vérifiée pour de beaucoup plus grandes valeurs de k, mais on ne se risque pas à préciser lesquelles.

Le cas $k = 1$ a beaucoup été étudié. Le meilleur résultat connu est dû à Zaccagnini [Zac98] et utilise la méthode de Heath-Brown pour tous les intervalles.

Théorème (Zaccagnini [Zac98]). *Soit $\varepsilon : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction tendant vers 0 en l'infini. Uniformément pour $x^{1/6-\varepsilon(x)} < h \leqslant x$, on a*

$$\pi(x+h) - \pi(x) = (1+o(1))\frac{h}{\log x}$$

presque partout lorsque x tend vers l'infini.

Comme pour les résultats sur tous les intervalles, il est possible de diminuer la taille de h si l'on se contente de démontrer l'existence de nombres premiers dans presque tous les intervalles $[x, x+h]$. Le meilleur résultat inconditionnel est dû à Jia [Jia96], qui montre qu'il suffit d'avoir $h > x^{1/20+\varepsilon}$ pour $\varepsilon > 0$ arbitraire fixé. Heath-Brown [HB82b] a démontré que $h = x^{\varepsilon}$ est admissible sous l'hypothèse d'Elliot-Halberstam. Sous l'hypothèse de Riemann, Selberg [Sel43] a montré que $h = \psi(x)(\log x)^2$ est admissible lorsque ψ tend vers l'infini avec x, et enfin, si de plus la conjecture de Montgoméry sur les paires de corrélation est vérifiée, il suffit d'avoir $h > \psi(x)\log x$ [HB82a], ce qui semble être optimal d'après le raisonnement exposé ci-dessus.

Le cas $k \geqslant 2$ a connu moins de rebondissements. On sait depuis les travaux de Wolke [Wol79] que $\mathcal{E}_2$ intersecte presque tous les intervalles de longueur $(\log x)^c$ pour $c = 4 \cdot 10^6 + 7$. Jusqu'en 2016, le meilleur résultat était dû à Harman [Har81], qui montre par une modification de la preuve de Wolke que $c = 7 + \varepsilon$ est admissible. L'histoire récente de ce problème commence avec un article de Matomäki & Radziwiłł [MR16], sur la moyenne de fonctions multiplicatives dans les petits intervalles. Ils démontrent entre autres le théorème suivant.

Théorème (Matomäki & Radziwiłł [MR16]). *Soit $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction tendant vers l'infini en l'infini. Uniformément pour $f : \mathbb{N}^* \to [-1, 1]$ une fonction multiplicative et $\psi(x) \leqslant h \leqslant x$, on a*

$$\frac{1}{h}\sum_{x<n\leqslant n+h} f(n) = \frac{1}{x}\sum_{x<n\leqslant 2x} f(n) + o(1) \tag{I.2.1}$$

presque partout lorsque x tend vers l'infini.

Cet article a déjà donné naissance à beaucoup de résultats sur les petits intervalles et la corrélation de fonctions multiplicatives. On mentionne par exemple la démonstration de la conjecture de Chowla logarithmique due à Tao [Tao16]. Par adaptation de leur méthode, Teräväinen [Ter16] démontre le théorème suivant.

Théorème (Teräväinen [Ter16]). *On pose $c_2 = 2,51$ et $c_3 = 6$. Il existe des constantes $c_k > 0$ pour $k \geqslant 4$, vérifiant l'énoncé suivant. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Pour tout $k \geqslant 2$ fixé, $\mathcal{E}_k$ intersecte presque tous les intervalles $[x, x + (\log x)(\log_{k-1} x)^{c_k+\varepsilon}]$ lorsque x tend vers l'infini.*

Il existe aussi des résultats relatifs à la répartition de $\omega(n)$ dans les petits intervalles. Babu [Bab82] a montré que le théorème d'Erdős-Kac est vérifié dans tous les intervalles

$[x, x + x^{\psi(x)/\sqrt{\log_2 x}}]$ dès que $\psi(x)$ tend vers l'infini avec x et Plaksin [Pla91] montre que cela est vrai dans presque tous les intervalles $[x, x + \psi(x)]$.

Les résultats déjà mentionnés dans cette section visent à retrouver la répartition globale de $\mathcal{E}_k$ dans des petits intervalles. À l'inverse, des comportements « exceptionnels » de grande déviation sont susceptibles d'apparaître à cette échelle, dont deux sont conjecturés à la section I.1.3. Il ne sont pas l'objet de cette thèse mais on mentionne quelques théorèmes récents dans un souci de contextualisation. À l'aide de méthodes de crible développées par Goldston, Pintz & Yıldırım [GPY09] dans une série d'articles, et d'une extension de l'inégalité de Bombieri-Vinogradov, Zhang [Zha14] a démontré qu'infiniment souvent, $p_{n+1} - p_n \leqslant 7 \cdot 10^7$. Le crible utilisé a été amélioré par Maynard [May15] et optimisé dans une collaboration d'auteurs [Pol14] dirigée par Tao, avec le résultat suivant.

Théorème (Polymath [Pol14]).

$$\liminf_{n \to +\infty} p_{n+1} - p_n \leqslant 246.$$

Par opposition, il a été mis en évidence qu'infiniment souvent, les nombres premiers consécutifs sont beaucoup plus distants que la moyenne. La meilleure démonstration de ce phénomène a été obtenue en utilisant la méthode d'Erdős-Rankin [Ran36], le crible de Maynard et de la théorie des hypergraphes.

Théorème (Ford, Green, Konyagin, Maynard & Tao [FGK+18]).

$$\limsup_{n \to +\infty} \frac{p_{n+1} - p_n}{(\log p_n)(\log_2 p_n)(\log_3 p_n)^{-1}(\log_4 p_n)} > 0.$$

I.2.2 Systèmes translatés

La question ($\mathbf{Q}_5$) est un cas particulier de l'étude des systèmes translatés en théorie des nombres. Le problème sous-jacent est de savoir dans quelle mesure la structure multiplicative de n donne de l'information sur celle de $n+1$. Il va de soi qu'aucun nombre premier ne peut diviser simultanément n et $n+1$. À l'inverse, si p ne divise pas n, qu'en est-il pour $n+1$? Lorsque p est grand, l'information « p ne divise pas n » ne donne presque pas d'information quant à la divisibilité de $n+1$ par p. La mise en évidence de ce phénomène est d'un grand intérêt en théorie des nombres, et la conjecture des nombres premiers jumeaux en représente un des plus grands enjeux. C'est dans cette optique qu'ont été développées les premières techniques de crible au début du XXe siècle, inspirées du crible d'Ératosthène, fondé sur le principe d'inclusion-exclusion. Historiquement, le premier résultat significatif est dû à Brun [Bru19].

Théorème (Brun [Bru19]).

$$\#\{p \leqslant x : \quad p+2 \text{ est premier}\} \ll \frac{x(\log_2 x)^2}{(\log x)^2}.$$

La borne supérieure n'est pas de l'ordre de grandeur prévu par la conjecture d'Hardy & Littlewood [HL23], au facteur $(\log_2 x)^2$ près. Néanmoins, la portée de la méthode élémentaire employée séduit, et ouvre la voie à de nombreuses recherches. En 1947, Selberg [Sel47] revisite le domaine avec des résultats spectaculaires, manquant la borne supérieure attendue d'un facteur 8. Sa méthode est à l'origine de la première preuve « élémentaire » du théorème des nombres premiers [Erd49, Sel49]. Plusieurs variantes ont été développées dans les décennies suivantes, comme le grand crible ou le crible de Rosser-Iwaniec [Iwa80],

puis plus récemment, le crible de Goldston, Pintz & Yıldırım [GPY09] amélioré par Maynard [May15], que l'on a déjà mentionné. Il est cependant vite apparu que la théorie du crible ne permet pas de distinguer finement la parité du nombre de facteurs premiers des entiers. Le théorème suivant est symptomatique des restrictions imposées par le *problème de parité*.

Théorème (Chen [Che73]). *Il existe une infinité de nombres premiers p tels que $p+2$ soit premier ou le produit de deux nombres premiers.*

L'étude des systèmes translatés ne s'arrête pas aux seuls nombres premiers. On mentionne notamment deux résultats intéressants dans le contexte de cette thèse.

Théorème (Halberstam [Hal56]). *Pour $y \in \mathbb{R}$, on a*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\pi(x)} \#\left\{p \leqslant x : \quad \omega(p-1) \leqslant \log_2 x + y\sqrt{\log_2 x}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} \mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{d}t.$$

Théorème (Nair & Tenenbaum [NT98] ; Henriot [Hen12]). *Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Uniformément pour $x^\varepsilon < x' \leqslant x$, $1 \leqslant b \leqslant x$ et $f, g : \mathbb{N}^* \to [0,1]$ deux fonctions multiplicatives, on a*

$$\sum_{x<n\leqslant x+x'} f(n)g(n+2b) \ll \frac{b^4}{\varphi(b)^4} \frac{x'}{(\log x)^2} \prod_{p\leqslant x} \left(1 + \frac{f(p)+g(p)}{p}\right).$$

I.3 Résultats et méthodes de la thèse

I.3.1 Petits intervalles

Il est possible de démontrer le théorème d'Erdős-Kac par la méthode des fonctions caractéristiques et l'inégalité de Berry-Esseen. Pour cela, il suffit d'estimer

$$\sum_{n\leqslant x} \mathrm{e}^{i\vartheta\omega(n)}$$

pour ϑ dans un certain voisinage de 0, comme il est détaillé dans [Ten15, th. III.4.15]. L'estimation de cette somme restreinte à $[x, x+h]$ suffit à décrire la répartition de la fonction ω dans ce même intervalle. Il n'est pas possible d'appliquer directement le théorème de Matomäki & Radziwill à la fonction multiplicative $n \mapsto \mathrm{e}^{i\vartheta\omega(n)}$ puisqu'elle ne prend pas ses valeurs dans $[-1,1]$. Il est cependant possible d'étendre le résultat aux fonction multiplicatives bornées qui ne sont pas « p^{it}-simulatrices », comme le précisent les auteurs.

La notion de fonction p^{it}-simulatrice (p^{it}*-pretentious* en anglais) a été introduite par Granville et Soundararajan [GS08] après les travaux de nombreux auteurs, dont on cite Halász [Hal71], Hall & Tenenbaum [HT91] et Tenenbaum [Ten15]. Elle est quantifiée de la manière suivante. Soit $x \geqslant 1$. Pour f et g deux fonctions multiplicatives de module inférieur à 1, on introduit la quantité

$$\mathbb{D}(f,g;x)^2 := \sum_{p\leqslant x} \frac{1 - \Re\mathrm{e}\big(f(p)\overline{g(p)}\big)}{p},$$

qui vérifie l'inégalité triangulaire $\mathbb{D}(f,h;x) \leqslant \mathbb{D}(f,g;x) + \mathbb{D}(g,h;x)$. Pour $t \in \mathbb{R}$ et $T \geqslant 1$, on pose alors

$$m := m(f,t,T;x) := \min_{|t'|\leqslant T} \mathbb{D}(f, n^{it+it'}; x)^2.$$

Le théorème suivant met en évidence le comportement oscillatoire de la somme d'une fonction multiplicative non p^{it}-simulatrice.

Théorème (Tenenbaum [Ten15]). *Uniformément pour $x, T \geqslant 1$, $t \in \mathbb{R}$ et $|f| \leqslant 1$ une fonction multiplicative, on a*

$$\sum_{x<n\leqslant 2x} \frac{f(n)}{n^{1+it}} \ll (1+m)\mathrm{e}^{-m} + \frac{1}{T}.$$

Puisque la fonction $n \mapsto \mathrm{e}^{i\vartheta\omega(n)}$ est constante sur les nombres premiers, elle n'est pas p^{it}-simulatrice lorsque t n'est pas proche de 0. On emploie donc la méthode de Matomäki & Radziwiłł afin d'obtenir le résultat suivant, qui recouvre le théorème de Plaksin [Pla91], en augmentant la précision du terme principal et rendant effectif le terme d'erreur. C'est un théorème d'Erdős-Kac dans presque tous les petits intervalles. Pour $X, x, h \geqslant 3$ et $y \in \mathbb{R}$, on pose

$$F_{(x,x+h]}(y) := \frac{1}{h}\#\left\{x < n \leqslant x+h \ : \quad \omega(n) \leqslant \log_2 x + y\sqrt{\log_2 x}\right\},$$
$$\Phi_X(y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y} \mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{d}t + \frac{\mathrm{e}^{-y^2/2}}{\sqrt{\log_2 X}}\left(\frac{2}{3} - c_1 - \frac{y^2}{6} - \left\langle \log_2 X + y\sqrt{\log_2 X}\right\rangle\right),$$

où $\langle t\rangle$ désigne la partie fractionnaire de $t \in \mathbb{R}$ et $c_1 \simeq 0,261497$ est la constante de Mertens.

Théorème I.3.1. *Uniformément pour $20 \leqslant h \leqslant X$ et $\alpha \geqslant 1$, on a*

$$\left\|F_{(x,x+h]} - \Phi_X\right\|_\infty \ll \frac{\log_3 X}{\log_2 X} + \alpha^2\frac{(\log_2 h)^2}{\log h}$$

pour tout $x \in [X, 2X]$ sauf sur un ensemble de mesure

$$\ll X\left(\frac{1}{(\log h)^\alpha} + \frac{1}{(\log X)^{1/150}}\right).$$

Lorsque $|k - \log_2 x| \ll \sqrt{\log_2 x}$ et $h > \mathrm{e}^{(\log_2 x)^{1/2+\varepsilon}}$, ce théorème permet d'obtenir un équivalent asymptotique de $\pi_k(x+h) - \pi_k(x)$ pour presque tout x. Il est à noter que pour de telles valeurs de k, on a $\delta_k(x) \asymp (\log_2 x)^{-1/2}$.

Dans le but d'obtenir de plus petites valeurs pour h dans l'étude des lois locales de ω, on examine la possibilité d'appliquer directement le théorème de Matomäki & Radziwiłł à la fonction indicatrice de $\mathcal{E}_k$. Deux obstacles apparaissent :

(a) La fonction $n \mapsto \mathbb{1}_{\mathcal{E}_k}(n)$ n'est pas multiplicative,

(b) Le terme d'erreur de (I.2.1) vaut essentiellement $(\log_2 h)/\log h$ mais le terme principal est de l'ordre de $\delta_k(x)$, donc la condition $\delta(x)h \to +\infty$ n'est pas suffisante.

On résume les étapes clés de leur démonstration afin de comprendre comment on surmonte ces difficultés. Par une transformation de Fourier adéquate, la relation (I.2.1) découle essentiellement de

$$\int_{T_0}^{X/h}\left|\sum_{X<n\leqslant 2X}\frac{f(n)}{n^{1+it}}\right|^2\mathrm{d}t = o(1), \tag{I.3.2}$$

où T_0 est une petite puissance de $\log X$. La borne « triviale » pour cette quantité est donnée par le lemme suivant sur la valeur moyenne des polynômes de Dirichlet [IK04, th. 9.1].

Lemme. *Uniformément pour $T, N \geqslant 1$ et $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de complexes, on a*

$$\int_0^T\left|\sum_{N<n\leqslant 2N}\frac{a_n}{n^{1+it}}\right|^2\mathrm{d}t \ll \left(\frac{T}{N}+1\right)\frac{1}{N}\sum_{N<n\leqslant 2N}|a_n|^2.$$

Directement appliqué, ce lemme fournit seulement la borne $\ll 1$ pour le membre de gauche de (I.3.2). Au vu de l'énoncé, ce lemme est particulièrement efficace lorsque la *taille* – comprendre la *taille de l'intervalle de sommation* – du polynôme de Dirichlet est la même que celle d'intégration. La première étape pour profiter de cette remarque est d'utiliser la multiplicativité de f afin d'écrire (très approximativement)

$$\sum_{X<n\leqslant 2X} \frac{f(n)}{n^{1+it}} \approx \left(\sum_{h<p\leqslant 2h} \frac{f(p)}{p^{1+it}}\right)\left(\sum_{X/h<m\leqslant 2X/h} \frac{f(m)}{m^{1+it}}\right) + \sum_{\substack{X<n\leqslant 2X \\ p|n\Rightarrow p\notin(h,2h]}} \frac{f(n)}{n^{1+it}}. \tag{I.3.3}$$

On définit naturellement les polynômes de Dirichlet P, M et R de sorte que le membre de droite de (I.3.3) soit égal à $P(t)M(t) + R(t)$. Il est possible, au prix de plusieurs complications techniques, de remplacer l'intervalle $[h, 2h]$ par $[h, h^{\psi(h)}]$ où $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ tend lentement vers l'infini en l'infini. Faisant cela, un argument de crible permet facilement de majorer la contribution de $R(t)$ dans (I.3.2) par $O(1/\psi(h))$, qui correspond à la proportion des entiers $X < n \leqslant 2X$ n'ayant pas de facteur premier dans l'intervalle $[h, h^{\psi(h)}]$. La seconde étape, et non des moindres, est de majorer $P(t) = o(1)$ localement avant d'appliquer le lemme ci-dessus au polynôme M restant. Cependant, la taille des t est potentiellement beaucoup trop grande par rapport à h pour pouvoir contrôler $P(t)$. Matomäki & Radziwiłł parviennent à contourner cette – importante – difficulté en utilisant plusieurs factorisations du type (I.3.3) par rapport à des nombres premiers de taille $P_1 < P_2 < \cdots < P_J < P_\infty$ pour un certain J (l'exemple ci-dessus correspond à $P_1 = h$), dont ils montrent que les polynômes $P(t)$ correspondants ne peuvent pas tous être simultanément grands. Pour fixer les idées, disons que $P_j \approx \log_{J+1-j} X$ et $P_\infty \approx \mathrm{e}^{\sqrt{\log X}}$. La majoration de crible pour $R(t)$ est toujours valide si presque tous les entiers $X < n \leqslant 2X$ admettent un facteur premier proche de chacun des P_j.

Lorsque l'on applique ce raisonnement avec $f(n) = \mathbb{1}_{\mathcal{E}_k}(n)$, quelques données sont à prendre en compte. Concernant le point (a), la forte structure multiplicative de $\mathcal{E}_k$, que l'on schématise, pour $k \geqslant 2$, par « $\mathcal{E}_k \approx p \times \mathcal{E}_{k-1}$ », garantit sans problème une factorisation du type (I.3.3). Cependant, la majoration de crible pour R ne fonctionne que lorsque $k \gg \log_2 X$. On se place dans ce cas pour le moment. On note $\delta_k := \delta_k(X)$. Le point (b) ne pose pas de problème à condition de remplacer le $o(1)$ de (I.3.2) par $o(\delta_k^2)$. Malheureusement, le lemme ci-dessus ne reflète pas le comportement sporadique de $\mathcal{E}_k$, puisque son utilisation dans le contexte n'apporte qu'un facteur δ_k au lieu de δ_k^2. On contourne ce problème par l'emploi d'une variante du lemme, prenant mieux en compte la structure bilinéaire de la quantité à majorer. C'est une conséquence de [IK04, th. 7.1].

Lemme. *Uniformément pour $T, N \geqslant 1$ et $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de complexes, on a*

$$\int_0^T \left|\sum_{N<n\leqslant 2N} \frac{a_n}{n^{1+it}}\right|^2 \mathrm{d}t \ll \frac{T}{N^2}\left(\sum_{N<n\leqslant 2N} |a_n|^2 + \sum_{1\leqslant b\leqslant N/T}\ \sum_{N<n,n+b\leqslant 2N} |a_n a_{n+b}|\right).$$

Ce lemme vient ainsi compléter la méthode – en choisissant cette fois $P_1 = \delta_k h$ – si l'on sait prouver l'inégalité suivante, pour $1 \leqslant X' \leqslant X$:

$$\sum_{1\leqslant b\leqslant X'}\ \sum_{X<n,n+b\leqslant 2X} \mathbb{1}_{\mathcal{E}_k}(n)\mathbb{1}_{\mathcal{E}_k}(n+b) \ll \delta_k^2 X' X. \tag{I.3.4}$$

On parvient à obtenir ce résultat, que l'on présente dans la suite, dans le cas $k \ll \log_2 x$. Cela nous permet, comme on vient de le détailler, d'obtenir le théorème suivant.

Théorème I.3.2. *Soit $0 < r < R$ et $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction tendant vers l'infini en l'infini. Uniformément pour $x \geqslant 3$, $r \log_2 x < k \leqslant R \log_2 x$ et $\psi(x) \leqslant \delta_k(x)h \leqslant x$, on a*

$$\pi_k(x+h) - \pi_k(x) = (1 + o(1))\delta_k(x)h$$

presque partout lorsque x tend vers l'infini.

Ce théorème est heuristiquement optimal en h, et résout en partie la conjecture énoncée à la section I.2.1. Dans le cas $k/\log_2 x \to +\infty$, on ne sait pas démontrer l'inégalité I.3.4. Si l'on y parvenait, le théorème ci-dessus serait susceptible d'y être étendu. Pour les petites valeurs de k en revanche, c'est la majoration du polynôme R qui pose problème. Lorsque $k = o(\log_2 x)$, imposer d'avoir un facteur premier proche des P_j est « contraignant ». Essentiellement, pour chaque facteur premier localisé autour de P_j, on divise la densité des entiers étudiés par $(\log_2 x)/k$, augmentant d'autant la taille minimale pour h. À l'inverse, dans le raisonnement ci-dessus, plus J est grand, plus $\delta_k(x)h$ peut être petit. Finalement, le choix $J = 3$ est optimal lorsque k est très petit, et ce choix permet de démontrer le résultat suivant. On définit

$$F_k(x) := \frac{(\log_2 x)^2}{k^2}\left(1 - \exp\left(-\frac{k \log_3 x}{\log_2 x}\right)\right)^{-1}.$$

Théorème I.3.3. *Soit $\varepsilon > 0$ fixé quelconque. Uniformément pour $x \geqslant 3$, $5 \leqslant k \leqslant \log_2 x$ et $F_k(x)(\log_3 x)^{2+\varepsilon} \leqslant \delta_k(x)h \leqslant x$, on a*

$$\pi_k(x+h) - \pi_k(x) \gg \frac{\delta_k(x)h}{F_k(x)}$$

presque partout lorsque x tend vers l'infini.

Cela améliore le résultat de Teräväinen lorsque $k \geqslant 5$, et permet de traiter les k tendant vers l'infini tels que $k = o(\log_2 x)$. Si k est borné, la taille minimale de h est optimale à un facteur $(\log_2 x)^{3+\varepsilon}$ près. Lorsque k se rapproche de $\log_2 x$, un choix différent de J peut être fait. Par exemple, si $k = (\log_2 x)/\log_{10} x$, le choix $J = 11$ est judicieux, et il entraîne la perte d'un facteur $(\log_{10} x)^{10+\varepsilon}$ sur la taille minimale espérée pour h. Cette extension du théorème n'est pas détaillée dans la thèse.

On note que la méthode employée pour démontrer les théorèmes I.3.2 et I.3.3 est générale, et permet de dépasser le cadre de $(\mathbf{Q}_4)$. On démontre notamment le théorème suivant. Pour $2 \leqslant y \leqslant x$, on pose $\Psi(x, y) := \#\{n \leqslant x : \quad p|n \Rightarrow p \leqslant y\}$ le nombre d'entiers *y-friables* inférieurs à x et on introduit la quantité $u := (\log x)/\log y$. On note ρ la fonction de Dickman, qui vérifie notamment $\Psi(x, y) = (1 + o(1))\rho(u)x$ lorsque x tend vers l'infini, uniformément pour $1 \leqslant u \leqslant (\log x)/(\log_2 x)^{5/3+\varepsilon}$, comme l'a démontré Hildebrand [Hil86].

Théorème I.3.4. *Soit $0 < \varepsilon < 1/6$ fixé et $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction tendant vers l'infini en l'infini. Uniformément pour $1 \leqslant u \leqslant (\log x)^{1/6-\varepsilon}$ et $(1 + \rho(u)^{-1})^{\psi(x)} \leqslant h \leqslant x$, on a*

$$\Psi(x + h, x^{1/u}) - \Psi(x, x^{1/u}) = (1 + o(1))\rho(u)h$$

presque partout lorsque x tend vers l'infini.

Matomäki & Radziwill ont traité le cas u borné. On peut remplacer la condition sur h par $\psi(x) \leqslant \rho(u)h \leqslant$ si l'on sait démontrer une inégalité du type (I.3.4) pour les entiers friables. Malheureusement, le meilleur résultat connu, dû à La Bretèche & Drappeau [BD17], est insuffisant.

I.3.2 Systèmes translatés

Dans la suite, pour $n \geqslant 2$, on note respectivement $P^+(n)$ et $P^-(n)$ le plus grand et le plus petit facteur premier de n. Pour k borné, l'inégalité (I.3.4) est une conséquence directe du crible de Selberg. Avec la méthode par récurrence de Hardy & Ramanujan [HR17], il semble difficile de dépasser $k \ll \sqrt{\log_2 x}$. On parvient à couvrir le cas $k \ll \log_2 x$ et on présente le raisonnement employé pour majorer $\#\{n \leqslant x : \quad \omega(n) = \omega(n+2) = k\}$. On suppose $R \geqslant 2$. Pour $\ell \geqslant 1$ et $k \leqslant R \log_2 x$, la contribution des $n \leqslant x$ tels que la partie $x^{1/\ell}$-friable de $n(n+2)$ soit plus petite que $x^{1/3}$ se majore par

$$\sum_{1 \leqslant k_1, k_2 \leqslant \ell} \sum_{\substack{ab \leqslant x^{1/3} \\ P^+(ab) \leqslant x^{1/\ell} \\ \omega(a) = k - k_1 \\ \omega(b) = k - k_2}} \sum_{\substack{n \leqslant x \\ a \mid n \\ b \mid n+2 \\ P^-(n(n+2)/(ab)) > x^{1/\ell}}} 1 \ll \ell^2 R^{2\ell} \delta_k(x)^2 x,$$

avec le crible de Selberg. Avec l'astuce de Rankin, on montre que la contribution des entiers tels que la partie $x^{1/\ell}$-friable de $n(n+2)$ soit supérieure à $x^{1/3}$ est $\ll x\mathrm{e}^{-C\ell}$, pour $C > 0$ fixé quelconque. Individuellement, ces deux majorations ne permettent pas d'obtenir le résultat désiré, puisqu'il faudrait choisir $\ell \to +\infty$. Cependant, il est possible de les combiner, afin de majorer la contribution des entiers tels que la partie $x^{1/\ell}$-friable soit supérieure à $x^{1/3}$ mais que la partie $x^{1/(\ell+1)}$-friable soit inférieure à $x^{1/3}$. Puisque, pour $C = 3 \log R$ par exemple, on a

$$\sum_{\ell \geqslant 1} (\ell+1)^2 R^{2(\ell+1)} \mathrm{e}^{-C\ell} < +\infty,$$

l'implémentation de ce raisonnement nous permet d'obtenir le théorème suivant, relatif à la question ($\mathbf{Q}_5$).

Théorème I.3.5. *Soit $R > 0$ fixé. Il existe une constante $K = K(R) > 0$ vérifiant l'énoncé suivant. Uniformément pour $x \geqslant x_0(R)$, $1 \leqslant b \leqslant x$ et $1 \leqslant k, k' \leqslant R \log_2 x$, on a*

$$\#\{n \in \mathcal{E}_k(x) : \quad \omega(n+b) = k'\} \ll \frac{b^K}{\varphi(b)^K} \delta_k(x) \delta'_k(x) x$$

Dans une présentation légèrement différente de cette méthode, Tenenbaum [Ten18] a étendu le résultat aux systèmes d'équations $\{\omega(Q_j(n)) = k_j,\ 1 \leqslant j \leqslant r\}$ où r est fixé quelconque et les Q_j sont des polynômes arbitraires satisfaisant à quelques contraintes locales.

Dans l'ébauche de preuve ci-dessus, le point suivant est essentiel. Si ℓ est borné et que l'on note n_ℓ la partie $n^{1/\ell}$-friable de n, il est facile de contrôler $\omega(n_\ell)$ connaissant $\omega(n)$. En effet, on a $\omega(n) - \ell < \omega(n_\ell) \leqslant \omega(n)$. Si l'on remplace ω par une fonction additive f quelconque, ne prenant qu'un nombre fini de valeurs sur les puissances de nombres premiers entre $n^{1/\ell}$ et n, le contrôle de $f(n_\ell)$ est similaire, dans le sens où l'on sait que $f(n) - f(n_\ell)$ ne peut pas prendre trop de valeurs différentes. En reprenant le cadre d'étude de Tenenbaum, on généralise alors un théorème de Halász [Hal75], relatif à la concentration maximale des valeurs d'une fonction additive. Étant donné $r \geqslant 1$ et $Q_1, \ldots, Q_r$ des polynômes, pour $1 \leqslant j \leqslant r$ et $m \geqslant 1$, on note $\rho_j(m)$ le nombre de racines de Q_j dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. Si de plus $f_1, \ldots, f_r$ sont des fonctions additives, pour $x \geqslant 1$ on pose

$$E_j(x) := 1 + \sum_{\substack{p \leqslant x \\ f_j(p) \neq 0}} \frac{\rho_j(p)}{p}. \qquad (1 \leqslant j \leqslant r)$$

Voici une version allégée – non uniforme en $Q_1, \ldots, Q_r$ – du théorème obtenu.

Théorème I.3.6. *Soit $\mathfrak{V}, r \geqslant 1$, $0 < \varepsilon < 1$ et $Q_1, \dots, Q_r \in \mathbb{Z}[X]$ des polynômes irréductibles, deux à deux premiers entre eux et sans diviseur fixe. Uniformément pour $x^\varepsilon < y \leqslant x$ et $f_1, \dots, f_r$ des fonctions additives vérifiant*

$$\#\left\{f_j(n) : \quad n \leqslant t^u,\ P^-(n) > t\right\} \leqslant \mathfrak{V}^u, \qquad (t \geqslant \exp\left((\log x)^{1-\varepsilon}\right),\ u \geqslant 1)$$

on a

$$\sup_{k_1,\dots,k_r \in \mathbb{R}} \sum_{\substack{x<n\leqslant x+y \\ f_j(Q_j(n))=k_j \quad (1\leqslant j\leqslant r)}} 1 \ll \frac{y}{\prod_{1\leqslant j\leqslant r}\sqrt{E_j(x)}}.$$

Le dernier résultat que l'on présente est une généralisation du théorème d'Halberstam [Hal56] présenté à la section I.2.2. Un problème similaire a été abordé par Khan [Kha10, th. 2.1] dans son étude de la répartition des écarts entre les entiers « δ-normaux » consécutifs.

Théorème I.3.7. *Uniformément pour $x \geqslant 3$, $1 \leqslant k \ll \log_2 x$ et $y \in \mathbb{R}$, on a*

$$\frac{1}{\pi_k(x)}\#\left\{n \in \mathcal{E}_k(x) : \quad \omega(n-1) \leqslant \log_2 x + y\sqrt{\log_2 x}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y} \mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{d}t + O\left(\frac{\log_3 x}{\sqrt{\log_2 x}}\right).$$

On obtient ce résultat par la méthode des fonctions caractéristiques et l'inégalité de Berry-Esseen, en s'inspirant d'un article de Fouvry & Tenenbaum [FT96]. Précisément, il s'agit de négliger la contribution des grands facteurs premiers $n-1$. Ainsi, il suffit, pour $w = x^{1/(\log_2 x)^2}$, d'estimer

$$\sum_{n\in\mathcal{E}_k(x)} \mathrm{e}^{i\vartheta\omega(n-1,w)}$$

pour ϑ proche de 0, où $\omega(n-1,w)$ représente le nombre de facteurs premiers de $n-1$ qui sont inférieurs ou égaux à w. En écrivant $\mathrm{e}^{i\vartheta\omega(\cdot,w)} = 1 \star g_\vartheta$, la conclusion désirée provient d'un théorème de type Bombieri-Vinogradov sur $\mathcal{E}_k$, qui se trouve dans [WZ93]. Le Théorème I.3.7 précise

I.4 Plan de la thèse

La thèse est organisée en deux parties, respectivement centrées sur les questions ($\mathbf{Q}_4$) puis ($\mathbf{Q}_5$), chacune composée de deux chapitres, tous indépendants.

Dans le premier chapitre, on reproduit la publication [Gou18b], dans laquelle on démontre le Théorème I.3.1. Le deuxième chapitre est consacré à l'étude des lois locales de la fonction ω dans presque tous les petits intervalles, par une extension d'un résultat de Matomäki & Radziwiłł. On y reproduit la publication [Gou17], où sont entre autres démontrés les théorèmes I.3.2 à I.3.5.

L'étude des systèmes translatés, introduite avec le Théorème I.3.5, est poursuivie dans la seconde partie. Le Théorème I.3.6 est démontré au troisième chapitre, de même qu'un résultat concernant la minoration de la quantité étudiée. C'est une reproduction de [Gou19]. Le quatrième chapitre est une prépublication [Gou18c] consacrée à la démonstration du théorème d'Erdős-Kac pour les entiers dont le successeur a un nombre donné de facteurs premiers, le Théorème I.3.7. On y décrit par ailleurs les lois locales du nombre de petits facteurs premiers de $n-1$ lorsque $n \in \mathcal{E}_k$.

Enfin, on reproduit en appendice la publication [Gou18a], qui améliore un résultat de Skałba [Ska17] sur les produits d'entiers formant une puissance parfaite.

Première partie

Nombre de facteurs premiers dans presque tous les petits intervalles

Table des matières

1 Théorème d'Erdős-Kac dans presque tous les petits intervalles 21
1.1 Introduction . . . 21
1.1.1 Présentation des résultats . . . 21
1.1.2 Notations . . . 24
1.2 Quelques lemmes classiques . . . 24
1.3 Répartition de ω dans les petits intervalles . . . 25
1.4 Lois locales . . . 28
1.5 Estimation du type Matomäki-Radziwiłł . . . 28
1.5.1 Résultats préliminaires . . . 28
1.5.2 Application de la méthode de Matomäki-Radziwiłł . . . 32

2 Lois locales de la fonction ω dans presque tous les petits intervalles 35
2.1 Introduction . . . 35
2.1.1 Résultats . . . 35
2.1.2 Aperçu de la méthode . . . 38
2.1.3 Notations . . . 39
2.2 Lemmes utiles . . . 39
2.3 Résultat général . . . 41
2.4 Méthode de Matomäki-Radziwiłł adaptée . . . 43
2.4.1 Première simplification . . . 43
2.4.2 Utilisation de la borne de Parseval . . . 44
2.4.3 Factorisation du polynôme de Dirichlet associé à $\mathcal{A} \cap \mathcal{S}$ . . . 45
2.4.4 Majoration de l'intégrale . . . 46
2.5 Application aux entiers ayant $k \asymp \log_2 X$ facteurs premiers . . . 49
2.5.1 Propriétés classiques . . . 49
2.5.2 Crible bi-dimensionnel pour les entiers ayant k facteurs premiers . . . 55
2.5.3 Application du Théorème 2.3.1 . . . 59
2.6 Entiers friables . . . 60
2.7 Entiers avec un petit nombre de facteurs premiers . . . 65
2.7.1 Redéfinition de $\mathcal{S}$ . . . 66
2.7.2 Démonstration du Théorème 2.1.2 . . . 66

1

Théorème d'Erdős-Kac dans presque tous les petits intervalles

Abstract. We show that the Erdős-Kac theorem is valid in almost all intervals $[x, x+h]$ as soon as h tends to infinity with x. We also show that for all k near $\log\log x$, almost all interval $[x, x+\exp((\log\log x)^{1/2+\varepsilon})]$ contains the expected number of integers n such that $\omega(n) = k$. These results are a consequence of the methods introduced by Matomäki & Radziwiłł to estimate sums of multiplicative functions over short intervals.

1.1 Introduction . . . 21
1.1.1 Présentation des résultats . . . 21
1.1.2 Notations . . . 24
1.2 Quelques lemmes classiques . . . 24
1.3 Répartition de ω dans les petits intervalles . . . 25
1.4 Lois locales . . . 28
1.5 Estimation du type Matomäki-Radziwiłł . . . 28
1.5.1 Résultats préliminaires . . . 28
1.5.2 Application de la méthode de Matomäki-Radziwiłł . . . 32

1.1 Introduction

1.1.1 Présentation des résultats

Pour $n \geqslant 1$, on note $\omega(n)$ le nombre de facteurs premiers distincts de n. Cette fonction admet la fonction $n \mapsto \log_2 n$ comme ordre normal [1]. En 1939, Erdős et Kac montrent que la répartition de ω suit une loi normale. En 1958, Rényi et Turán améliorent leur résultat de la manière suivante.

Théorème (Erdős & Kac [EK39] ; Rényi & Turán [RT58])**.** *Uniformément pour $X \geqslant 20$ et $y \in \mathbb{R}$, on a*

$$\frac{1}{X}\#\left\{1 \leqslant n \leqslant X \ : \quad \omega(n) \leqslant \log_2 X + y\sqrt{\log_2 X}\right\} = \Phi(y) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\log_2 X}}\right),$$

où

$$\Phi(y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y} \mathrm{e}^{-\tau^2/2}\mathrm{d}\tau. \tag{1.1.1}$$

1. Pour $k \geqslant 1$, on note $\log_k$ la fonction log itérée k fois. Donc $\log_2 = \log\log$ etc...

Comme précisé après le théorème III.4.15 de [Ten15], le terme d'erreur, s'il est indépendant de y, est optimal. En 1981, Babu [Bab82] a montré que le même résultat (sans terme d'erreur) était valable dans tous les intervalles $(x, x+h]$ lorsque $y \in \mathbb{R}$ est fixé dès que $h \geqslant x^{a(x)/\sqrt{\log_2 x}}$ où $a(x) \to +\infty$. Dans [Pla91], Plaksin montre que lorsque h tend vers l'infini arbitrairement lentement avec x, le résultat se vérifie dans presque tous les intervalles $(x, x+h]$. On démontre le même résultat par une méthode différente, en fournissant de plus une majoration explicite du terme d'erreur. Delange [Del59] a montré que le $O\left((\log_2 X)^{-1/2}\right)$ pouvait être remplacé par

$$\frac{\mathrm{e}^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi \log_2 X}}\left(\frac{2}{3} - c_1 - \frac{y^2}{6} - \left\langle \log_2 X + y\sqrt{\log_2 X}\right\rangle\right) + O\left(\frac{1}{\log_2 X}\right),$$

où

$$c_1 := \gamma + \sum_{p \geqslant 2} \log\left(1 - \frac{1}{p}\right) + \frac{1}{p} \simeq 0,261497 \tag{1.1.2}$$

est la constante de Mertens, et $\langle t \rangle$ désigne la partie fractionnaire de $t \in \mathbb{R}$. Ce résultat peut être retrouvé par les méthodes développées par Esseen dans sa thèse [Ess45, p. 53-59], avec un terme d'erreur légèrement plus faible. Pour $20 \leqslant h \leqslant X$, $x \in [X, 2X]$ et $y \in \mathbb{R}$, on définit alors

$$F_{(x,x+h]}(y) := \frac{1}{h}\#\left\{x < n \leqslant x+h : \quad \omega(n) \leqslant \log_2 X + y\sqrt{\log_2 X}\right\}, \tag{1.1.3}$$

$$\Phi_X(y) := \Phi(y) + \frac{\mathrm{e}^{-y^2/2}}{\sqrt{2\pi \log_2 X}}\left(\frac{2}{3} - c_1 - \frac{y^2}{6} - \left\langle \log_2 X + y\sqrt{\log_2 X}\right\rangle\right). \tag{1.1.4}$$

Théorème 1.1.1. *Uniformément pour* $20 \leqslant h \leqslant X$ *et* $\alpha \geqslant 1$, *on a*

$$\left\|F_{(x,x+h]} - \Phi_X\right\|_\infty \ll \frac{\log_3 X}{\log_2 X} + \alpha^2 \frac{(\log_2 h)^2}{\log h}$$

pour tout $x \in [X, 2X]$ *sauf sur un ensemble de mesure au plus*

$$\ll X\left(\frac{1}{(\log h)^\alpha} + \frac{1}{(\log X)^{1/150}}\right).$$

Le paramètre $\alpha \geqslant 1$ pouvant varier uniformément, on peut diminuer la taille de l'ensemble exceptionnel au prix d'une légère perte sur le terme d'erreur, en prenant par exemple $\alpha = \log_2 h$. On note qu'il est possible, avec la méthode d'Esseen, d'augmenter la précision de Φ_X pour remplacer le $O\big((\log_3 X)/\log_2 X\big)$ par $o\left((\log_2 X)^{-n/2}\right)$ pour tout $n \geqslant 1$ fixé. On renvoie le lecteur intéressé à [Ess45, p. 60-61]. Il semble par ailleurs possible d'obtenir, pour presque tout x et y fixé, l'estimation $F_{(x,x+h]}(y) \sim \Phi(y)$ par la méthode des moments qui est plus élémentaire. Comme l'a fait remarquer l'arbitre de l'article [Gou18b] ici reproduit, il existe une infinité d'intervalles $\left[x, x + (\log x)/(\log_2 x)^2\right]$ ne vérifiant pas le théorème d'Erdős-Kac. En effet, soient $x \geqslant 20$, $r := (\log x)/\big(3(\log_2 x)^2\big)$ et $w := \lceil 2\log_2 x \rceil$. Pour $1 \leqslant i \leqslant r$, soit $n_i := \prod_{j=(i-1)w+1}^{iw} p_j$ (ici p_j désigne naturellement le j-ième nombre premier), de sorte que $\omega(n_i) = w$ et tous les n_i sont premiers deux à deux. D'après le théorème des nombres premiers, un simple calcul fournit $n_1 \cdots n_{\lfloor r \rfloor} \leqslant x$ pour x suffisamment grand. Ainsi, d'après le théorème chinois, pour tout x suffisamment grand, il existe un $N \in [x, 2x]$ tel $n_i | N + 4i$ que pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$. On a donc construit un intervalle de taille $4\lfloor r \rfloor \geqslant (\log x)/(\log_2 x)^2$ dont au moins un quart des d'entiers a plus de $2\log_2 x$ facteurs premiers.

Pour $k \geqslant 1$, on note $\pi_k(x) := \#\{n \leqslant x : \quad \omega(n) = k\}$. La bonne qualité du terme d'erreur du Théorème 1.1.1 permet de retrouver $\pi_k(x+h) - \pi_k(x)$ pour des k normaux et h suffisamment grand. Il est cependant possible de faire cela en s'intéressant directement aux lois locales.

Théorème 1.1.2. *Soit $\varepsilon > 0$ fixé et $X \geqslant 20$. Soit $h \leqslant X$ et k un entier tels que*

$$|k - \log_2 X| \ll \sqrt{\log_2 X}, \tag{1.1.5}$$

$$h \geqslant \exp\left((\log_2 X)^{1/2+\varepsilon}\right). \tag{1.1.6}$$

Alors, pour presque tout $x \in [X, 2X]$, on a

$$\pi_k(x+h) - \pi_k(x) \sim \frac{h}{\log X} \frac{(\log_2 X)^{k-1}}{(k-1)!}. \tag{1.1.7}$$

On peut aussi obtenir ce résultat lorsque $k \in [\delta \log_2 X, (\mathrm{e} - \delta)\log_2 X]$ pour $\delta > 0$ fixé, ce que le Théorème 1.1.1 ne nous permet pas de faire, mais la borne inférieure sur h est alors bien moins bonne. On obtient en effet la condition $h \geqslant \exp\left((\log X)^{r \log r - r + 1 + \varepsilon}\right)$ où l'on a posé $r := k/\log_2 X$ et $\varepsilon > 0$ est fixé. La relation $\pi_{\lfloor \log_2 x \rfloor}(x) \asymp x/\sqrt{\log_2 x}$ suggère que la condition (1.1.6) peut être remplacée par $h/\sqrt{\log_2 X} \to +\infty$. On vérifie cela dans l'article [Gou17], qui est reproduit au deuxième chapitre de cette thèse. Pour montrer les deux théorèmes, l'ingrédient principal est la proposition suivante.

Proposition 1.1.3. *Uniformément pour tous $A, B > 1$, pour toute fonction $\vartheta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable, pour tous $3 \leqslant h \leqslant X$ et pour tout $\delta > 0$, si l'on pose $I_{A,B} = \left[-A, -\frac{1}{B}\right] \cup \left[\frac{1}{B}, A\right]$, alors*

$$\int_{I_{A,B}} \left| \frac{1}{h} \sum_{x < n \leqslant x+h} \mathrm{e}^{i\vartheta(\tau)\omega(n)} - \frac{1}{X} \sum_{X < n \leqslant 2X} \mathrm{e}^{i\vartheta(\tau)\omega(n)} \right| \frac{\mathrm{d}\tau}{|\tau|} \ll \big(\log(AB)\big) \left(\delta + \frac{\log_2 h}{\log h}\right), \tag{1.1.8}$$

$$\int_{|z|=1} \left| \frac{1}{h} \sum_{x < n \leqslant x+h} z^{\omega(n)} - \frac{1}{X} \sum_{X < n \leqslant 2X} z^{\omega(n)} \right| |\mathrm{d}z| \ll \delta + \frac{\log_2 h}{\log h}, \tag{1.1.9}$$

pour tout $x \in [X, 2X]$ sauf sur un ensemble de mesure au plus

$$\ll X \left(\frac{(\log h)^{1/3}}{\delta^2 h^{\delta/25}} + \frac{1}{\delta^2 (\log X)^{1/50}} \right).$$

Cette proposition, qui est montrée à la section 1.5, découle d'un résultat récent et révolutionnaire de Matomäki & Radziwiłł [MR16]. L'enjeu est de montrer que presque partout, la moyenne de la fonction arithmétique $n \mapsto \mathrm{e}^{i\vartheta\omega(n)}$ sur $(x, x+h]$ est proche de sa moyenne sur $[X, 2X]$. Dans [MR16], Matomäki & Radziwiłł traitent le cas des fonctions multiplicatives réelles, et précisent que le champ d'application peut-être étendu de diverses manières, notamment au cas des fonctions qui ne sont pas « p^{it}-simulatrices » (p^{it}-*pretentious* en anglais, notion développée depuis quelques années par Granville, Soundararajan, et d'autres auteurs). Ainsi, dans [MRT15], Matomäki, Radziwiłł & Tao ont montré que la moyenne d'une fonction multiplicative complexe de module inférieur à 1 et non « p^{it}-simulatrice » était nulle sur presque tous les petits intervalles. Cependant, dans notre cas, lorsque ϑ tend vers 0 la moyenne n'est plus nulle. On est donc amenés à comparer la moyenne sur les petits intervalles à celle sur un intervalle dyadique $[X, 2X]$. Par ailleurs, les intégrales

nous amènent à passer par une estimation plus forte sur un sous-ensemble $\mathcal{S}$ de $[X, 2X]$, comme dans [MR16].

On termine cette introduction en mentionnant un résultat récent de Teräväinen [Ter16], qui a montré que pour tout $k \geqslant 3$ fixé et $\varepsilon > 0$, presque tout intervalle $\left[x, x + (\log x)^{1+\varepsilon}\right]$ contient un entier n tel que $\omega(n) = k$.

1.1.2 Notations

La lettre p est réservée aux nombres premiers. Par conséquent, on écrit par exemple $\sum_p$ au lieu de $\sum_{p \text{ premier}}$. La lettre ω désigne la fonction additive qui compte le nombre de facteurs premiers distincts : $\omega(n) = \sum_{p|n} 1$. Si E est un ensemble fini, on note $\#E$ son cardinal. On écrit $f \ll g$ ou $O(g)$ (resp. $f \gg g$) pour dire qu'il existe une constante absolue $C > 0$ telle que $|f| \leqslant C\,|g|$ (resp. $|f| \geqslant C\,|g|$). La région de validité de cette inégalité, si elle n'est pas précisée, est claire d'après le contexte. On écrit par exemple $\ll_\varepsilon$ ou O_ε pour signifier que la constante implicite C peut dépendre de ε. La relation $f \asymp g$ signifie que l'on a simultanément $f \ll g$ et $f \gg g$. On utilise la notation (asymétrique) $a \sim b$ pour dire $b < a \leqslant 2b$.

1.2 Quelques lemmes classiques

Pour montrer le Théorème 1.1.1, on reprend essentiellement la preuve du théorème d'Erdős-Kac qui figure dans [Ten15, th. III.4.15]. Celle-ci repose principalement sur l'estimation de la somme des $\mathrm{e}^{i\vartheta\omega(n)}$ et sur l'inégalité de Berry-Esseen, qui permet de relier les fonctions de répartition à leur fonction caractéristique. Cependant, Φ_X n'est pas exactement une fonction de répartition, elle contient même des discontinuités (défaut qui a été introduit afin d'avoir un meilleur terme d'erreur), on utilise alors des travaux de la thèse d'Esseen, qui permettent de contourner le problème.

Lemme 1.2.1. *Soit $m > 0$ un réel fixé. Soit F une fonction de répartition et f sa fonction caractéristique définie par*

$$f(\tau) := \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{i\tau x} \mathrm{d}F(x).$$

Soit G une fonction réelle à variation bornée sur $\mathbb{R}$, de fonction caractéristique g. On suppose les faits suivants vérifiés :

- *$F(-\infty) = G(-\infty)$ et $F(+\infty) = G(+\infty)$,*
- *si G est discontinue en deux points x et y distincts, alors $|x - y| > m$,*
- *G est dérivable en tout point de continuité, de dérivée bornée en valeur absolue par $\|G'\|_\infty$,*
- *F ne peut être discontinue en x que si G l'est aussi.*

Alors pour tout $T \gg \frac{1}{m}$, on a

$$\|F - G\|_\infty \ll \frac{\|G'\|_\infty}{T} + \int_{-T}^{T} \left| \frac{f(\tau) - g(\tau)}{\tau} \right| \mathrm{d}\tau. \tag{1.2.10}$$

Démonstration. Voir [Ess45, th. II.2.b]. □

Avant de procéder à la démonstration du Théorème 1.1.1, on a besoin des deux lemmes suivants.

Lemme 1.2.2. *Pour $X \geqslant 20$, on a*

$$\frac{1}{X}\sum_{n\sim X}|\omega(n)-\log_2 X| \ll \sqrt{\log_2 X}.$$

Démonstration. Cette inégalité, qui est initialement due à Turán, est une application directe de l'inégalité de Turán-Kubilius, dont la démonstration se trouve par exemple dans [Ten15, th. III.3.1]. □

Lemme 1.2.3. *Uniformément pour $X \geqslant 3$ et $t \in \mathbb{R}$,*

$$\frac{1}{X}\sum_{X<n\leqslant 2X} \mathrm{e}^{it\omega(n)} = A\left(\mathrm{e}^{it}\right)(\log X)^{\mathrm{e}^{it}-1} + O\left((\log X)^{\cos t-2}\right),$$

où $A(z) = 1 + c_1(z-1) + O\left((z-1)^2\right)$ dans la région $z-1 = o(1)$, où c_1 est définie par (1.1.2).

Démonstration. Ce lemme se déduit facilement de [Ten15, th. II.6.1]. La constante c_1 apparaît comme la dérivée en 1 de la fonction entière $z \mapsto \Gamma(z)^{-1}\prod_{p\geqslant 2}(1+\frac{z}{p-1})(1-\frac{1}{p})^z$. Pour la calculer, on utilise l'égalité $\Gamma'(1) = -\gamma$, démontrée dans [Ten15, cor. II.0.7]. □

1.3 Répartition de ω dans les petits intervalles

Démonstration du Théorème 1.1.1. Soit $20 \leqslant h \leqslant X$ et $x \sim X$. On majore la quantité $\left\|F_{(x,x+h]} - \Phi_X\right\|_\infty$. On se restreint à $h \in \mathbb{N}$ pour des raisons qui apparaissent plus tard. Cela se fait au prix d'un $O(1/h)$ qui est négligeable. Dans le but d'utiliser l'inégalité d'Esseen, on introduit les fonctions caractéristiques, lorsque $x \sim X$ et $\tau \in \mathbb{R}$,

$$f_{(x,x+h]}(\tau) := \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{i\tau y}\mathrm{d}F_{(x,x+h]}(y) = \frac{1}{h}\sum_{x<n\leqslant x+h} \mathrm{e}^{i\tau(\omega(n)-\log_2 X)/\sqrt{\log_2 X}}, \tag{1.3.11}$$

$$\phi_X(\tau) := \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{i\tau y}\mathrm{d}\Phi_X(y) = \mathrm{e}^{-\tau^2/2}\left(1+\frac{i\tau c_1 - i\frac{\tau^3}{6}}{\sqrt{\log_2 X}}\right) + \Delta_X(\tau), \tag{1.3.12}$$

où

$$\Delta_X(\tau) := \frac{-i\tau}{2\pi\sqrt{\log_2 X}}\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^*}\frac{\mathrm{e}^{2i\pi\nu\log_2 X}}{i\nu}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\tau+2\pi\nu\sqrt{\log_2 X}\right)^2}. \tag{1.3.13}$$

Le calcul pour $\phi_X(\tau)$ est aisé une fois connu le développement en série de Fourier

$$\frac{1}{2} - \langle t\rangle = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^*}\frac{\mathrm{e}^{2i\pi\nu t}}{2i\pi\nu}. \qquad (t \notin \mathbb{N})$$

Pour simplifier, on note désormais $T := \log_2 X$. Soit $1 < A \leqslant T$. Avec le Lemme 1.2.1, on a alors

$$\left\|F_{(x,x+h]} - \Phi_X\right\|_\infty \ll \frac{1}{A} + \int_{-A}^{A}\left|\frac{f_{(x,x+h]}(\tau)-\phi_X(\tau)}{\tau}\right|\mathrm{d}\tau. \tag{1.3.14}$$

L'intégrale est traitée en deux parties. On se donne $B > 1$ et on étudie d'abord la contribution de l'intervalle $\left[-\frac{1}{B},\frac{1}{B}\right]$. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{e}^{iy} = 1 + O(y)$. Alors pour tous $x \sim X$ et $\tau \in \mathbb{R}$, en se rappelant que h est entier, on obtient

$$f_{(x,x+h]}(\tau) = 1 + O\left(\frac{|\tau|}{\sqrt{T}h}\sum_{x<n\leqslant x+h}|\omega(n)-T|\right).$$

Par ailleurs, pour $|\tau| \leqslant 1$ on a $\phi_X(\tau) = 1 + O(\tau)$. Alors

$$I(x) := \int_{-1/B}^{1/B} \left| \frac{f_{(x,x+h]}(\tau) - \phi_X(\tau)}{\tau} \right| \mathrm{d}\tau \ll \frac{1}{B} + \frac{1}{B\sqrt{T}h} \sum_{x<n\leqslant x+h} |\omega(n) - T|,$$

et donc

$$\frac{1}{X} \int_X^{2X} I(x)\mathrm{d}x \ll \frac{1}{B} + \frac{1}{B\sqrt{T}hX} \int_X^{2X} \sum_{x<n\leqslant x+h} |\omega(n) - T| \, \mathrm{d}x.$$

En intégrant par rapport à x, chaque $|\omega(n) - T|$ pour $n \in (X, 2X + h]$ apparaît moins de h fois. Ainsi, avec le Lemme 1.2.2, comme $h \leqslant X$ on obtient

$$\frac{1}{X} \int_X^{2X} I(x)\mathrm{d}x \ll \frac{1}{B}.$$

Ainsi, pour tout $\delta_1 > 0$, on a la majoration

$$I(x) \ll \frac{\delta_1}{B} \tag{1.3.15}$$

pour tout $x \sim X$ sauf sur un ensemble de mesure au plus

$$\ll \frac{X}{\delta_1}. \tag{1.3.16}$$

On majore désormais la contribution des $\tau \in I_{A,B} := \left[-A, -\frac{1}{B}\right] \cup \left[\frac{1}{B}, A\right]$, à l'aide de (1.1.8). Pour cela, on introduit pour $y \in \mathbb{R}$

$$F_X(y) := \frac{1}{X} \# \left\{ n \sim X : \quad \omega(n) \leqslant \log_2 X + y\sqrt{\log_2 X} \right\}, \tag{1.3.17}$$

et sa fonction caractéristique, pour $\tau \in \mathbb{R}$,

$$f_X(\tau) := \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{i\tau y} \mathrm{d}F_X(y) = \frac{1}{X} \sum_{n\sim X} \mathrm{e}^{i\tau(\omega(n) - \log_2 X)/\sqrt{\log_2 X}}. \tag{1.3.18}$$

Alors pour tout $x \sim X$,

$$\int_{I_{A,B}} \left| \frac{f_{(x,x+h]}(\tau) - \phi_X(\tau)}{\tau} \right| \mathrm{d}\tau \ll I_1(x) + I_2 \tag{1.3.19}$$

où

$$I_1(x) := \int_{I_{A,B}} \left| f_{(x,x+h]}(\tau) - f_X(\tau) \right| \frac{\mathrm{d}\tau}{|\tau|},$$
$$I_2 := \int_{I_{T,B}} \left| \frac{f_X(\tau) - \phi_X(\tau)}{\tau} \right| \mathrm{d}\tau.$$

puisque $A \leqslant T$. Avec (1.1.8) de la Proposition 1.1.3, pour tout $\delta_2 > 0$ on a

$$I_1(x) \ll \big(\log(AB)\big) \left(\delta_2 + \frac{\log_2 h}{\log h} \right) \tag{1.3.20}$$

pour tout $x \sim X$ sauf sur un ensemble de mesure au plus

$$\ll X \left(\frac{(\log h)^{1/3}}{\delta_2^2 h^{\delta_2/25}} + \frac{1}{\delta_2^2 (\log X)^{1/50}} \right). \tag{1.3.21}$$

Par ailleurs, uniformément pour $|\tau| \leqslant T^{1/6}$, puisque $|\Delta_X(\tau)| \ll (\log X)^{-2\pi^2+o(1)}$, avec (1.3.12) et le Lemme 1.2.3, un calcul élémentaire fournit

$$|f_X(\tau) - \phi_X(\tau)| \ll \mathrm{e}^{-\tau^2/2}\frac{|\tau|^2 + |\tau|^6}{T} + \frac{1}{\log X}.$$

De plus, pour tout $|t| \leqslant \pi$, on a $\cos t - 1 \leqslant -2t^2/\pi^2$. Donc, toujours avec le Lemme 1.2.3, pour tout $T^{1/6} \leqslant |\tau| \leqslant \pi\sqrt{T}$, on a

$$|f_X(\tau) - \phi_X(\tau)| \ll \mathrm{e}^{-2\tau^2/\pi^2}. \tag{1.3.22}$$

On a alors

$$I_2 \ll \frac{1}{T} + \frac{\log(TB)}{\log X} + \int_{\pi\sqrt{T}}^{T} \left|\frac{f_X(\tau) - \Delta_X(\tau)}{\tau}\right| \mathrm{d}\tau. \tag{1.3.23}$$

Il reste à traiter la dernière intégrale. La fonction Δ_X est concentrée autour des multiples entiers de $2\pi\sqrt{T}$. C'est aussi le cas de la fonction f_X. On découpe alors cette intégrale en fonction de l'entier en question. On majore donc, pour $1 \leqslant k \leqslant \lceil \sqrt{T}/(2\pi) \rceil$,

$$\begin{aligned} J_k &:= \int_{(2k-1)\pi\sqrt{T}}^{(2k+1)\pi\sqrt{T}} \left|\frac{f_X(\tau) - \Delta_X(\tau)}{\tau}\right| \mathrm{d}\tau \\ &= \int_{-\pi\sqrt{T}}^{\pi\sqrt{T}} \left|\frac{f_X(2k\pi\sqrt{T} + u) - \Delta_X(2k\pi\sqrt{T} + u)}{2k\pi\sqrt{T} + u}\right| \mathrm{d}u. \end{aligned}$$

Concernant la somme Δ_X, seul le terme pour $\nu = -k$ contribue de manière non négligeable à J_k. Ce terme vaut, en $\tau = 2k\pi\sqrt{T} + u$,

$$\frac{2k\pi\sqrt{T} + u}{2\pi\sqrt{T}} \frac{\mathrm{e}^{-2ik\pi T}}{k} \mathrm{e}^{-u^2/2} = \mathrm{e}^{-2ik\pi T}\mathrm{e}^{-u^2/2}\left(1 + \frac{u}{2k\pi\sqrt{T}}\right).$$

Puisque $\tau \mapsto \mathrm{e}^{i\tau\sqrt{T}} f_X(\tau)$ est $2\pi\sqrt{T}$-périodique, on a $f_X(2k\pi\sqrt{T} + u) = \mathrm{e}^{-2ik\pi T} f_X(u)$. Ainsi,

$$J_k \ll \frac{1}{k\sqrt{T}} \int_{-\pi\sqrt{T}}^{\pi\sqrt{T}} \left|f_X(u) - \mathrm{e}^{-u^2/2}\right| \mathrm{d}u + \frac{1}{kT} + \mathrm{e}^{-T},$$

où le dernier terme provient de la somme des termes $\nu \neq -k$. L'intégrale ci-dessus se majore de la même manière que précédemment, et on obtient alors $J_k \ll 1/(kT) + 1/\log X$. En sommant cette majoration et en injectant dans (1.3.23), il vient alors

$$I_2 \ll \frac{\log T}{T} + \frac{T\log(TB)}{\log X}. \tag{1.3.24}$$

Finalement, avec (1.3.14)-(1.3.16), (1.3.19)-(1.3.21) et (1.3.24), on a pour tous $\delta_1, \delta_2 > 0$

$$\left\|F_{(x,x+h]} - \Phi_X\right\|_\infty \ll \frac{1}{A} + \frac{\log T}{T} + \frac{\delta_1}{B} + \big(\log(AB)\big)\left(\delta_2 + \frac{\log_2 h}{\log h}\right) + \frac{T\log(TB)}{\log X} \tag{1.3.25}$$

pour tout $x \sim X$ sauf sur un ensemble de mesure au plus

$$\ll X\left(\frac{1}{\delta_1} + \frac{(\log h)^{1/3}}{\delta_2^2 h^{\delta_2/25}} + \frac{1}{\delta_2^2 (\log X)^{1/50}}\right). \tag{1.3.26}$$

Pour finir, il suffit de choisir A, B, δ_1 et δ_2 convenablement. On se donne $\alpha \geqslant 1$. Dans le cas $\alpha > (\log X)^{1-1/75}$, le résultat est trivial puisque $\log h \leqslant \log X$ et $\left\|F_{(x,x+h]} - \Phi_X\right\|_\infty \ll 1$. Si $(\log h)/(\alpha \log_2 h) > (\log X)^{1/150}$, on choisit

$$A = T,\ B = (\log X)^2,\ \delta_1 = \log X,\ \delta_2 = 100\,(\log X)^{-1/150}.$$

Enfin, dans le cas $\alpha \leqslant (\log X)^{1-1/75}$ et $(\log h)/(\alpha \log_2 h) \leqslant (\log X)^{1/150}$, on choisit

$$A = \min(\log h, T),\ B = (\log h)^{10\alpha+1},\ \delta_1 = (\log h)^{10\alpha},\ \delta_2 = 100\alpha \frac{\log_2 h}{\log h}.$$

□

1.4 Lois locales

Démonstration du Théorème 1.1.2. Soit $k \geqslant 1$, $20 \leqslant h \leqslant X$ et $x \sim X$. Avec la formule de Cauchy, on a

$$\begin{aligned}\Big|\pi_k(x+h) - \pi_k(x) - \frac{h}{X}\big(\pi_k(2X) - \pi_k(X)\big)\Big| \\ = \left|\frac{h}{2i\pi}\int_{|z|=1}\left(\frac{1}{h}\sum_{x<n\leqslant x+h} z^{\omega(n)} - \frac{1}{X}\sum_{X<n\leqslant 2X} z^{\omega(n)}\right)\frac{\mathrm{d}z}{z^{k+1}}\right|.\end{aligned}$$

Ainsi, avec la majoration (1.1.9) de la Proposition 1.1.3 lorsque $\delta = 100(\log_2 h)/\log h$, on obtient

$$\Big|\pi_k(x+h) - \pi_k(x) - \frac{h}{X}\big(\pi_k(2X) - \pi_k(X)\big)\Big| \ll h\frac{\log_2 h}{\log h} \tag{1.4.27}$$

pour presque tout $x \sim X$ lorsque h tend vers l'infini. Par ailleurs, un calcul élémentaire à partir de [Ten15, th. II.6.4] montre qu'uniformément pour $k = \log_2 X + O\left(\sqrt{\log_2 X}\right)$, on a

$$\frac{\pi_k(2X) - \pi_k(X)}{X} \asymp \frac{1}{\log X}\frac{(\log_2 X)^{k-1}}{(k-1)!} \asymp \frac{1}{\sqrt{\log_2 X}}. \tag{1.4.28}$$

On en déduit le résultat recherché lorsque $h \geqslant \exp\left((\log_2 X)^{1/2+\varepsilon}\right)$ pour un certain $\varepsilon > 0$ fixé. □

Comme on l'a mentionné, pour $k \in [\delta \log_2 X, (\mathrm{e} - \delta)\log_2 X]$ avec $\delta > 0$ fixé, la preuve fournit un résultat analogue après mise à jour de (1.4.28).

1.5 Estimation du type Matomäki-Radziwiłł

La Proposition 1.1.3 se déduit de la Proposition 1.5.1 ci-dessous, qui est une conséquence directe de [MR16]. On commence par énoncer la Proposition 1.5.1, dont la démonstration est donnée à la section 1.5.2, et on montre comment en déduire la Proposition 1.1.3.

1.5.1 Résultats préliminaires

Soit $X \geqslant 20$. La Proposition 1.1.3 découle d'une meilleure estimation sur un sous-ensemble dense $\mathcal{S}_X \subset [X, 2X]$ défini de la manière suivante. Soit $0 < \eta < 1/6$. On considère la suite d'intervalles $[P_j, Q_j]$ définis comme ceci :

- $1 \leqslant (\log Q_1)^{40/\eta} \leqslant P_1 \leqslant Q_1 \leqslant \mathrm{e}^{\sqrt{\log X}}$,
- pour $1 \leqslant j \leqslant J$, $P_j = \exp\big(j^{4j}(\log Q_1)^{j-1}(\log P_1)\big)$,
- pour $1 \leqslant j \leqslant J$, $Q_j = \exp\big(j^{4j+2}(\log Q_1)^{j}\big)$,

où J est défini comme le plus grand j tel que $Q_j \leqslant \mathrm{e}^{\sqrt{\log X}}$. On a donc $J \ll (\log_2 X)/\log_3 X$. On définit alors $\mathcal{S}_X$ comme l'ensemble des entiers de $[X, 2X]$ qui contiennent au moins un facteur premier dans chacun des $[P_j, Q_j]$ pour $1 \leqslant j \leqslant J$. On remarque que

$$\frac{\log P_j}{\log Q_j} = \frac{1}{j^2}\frac{\log P_1}{\log Q_1}, \qquad (1 \leqslant j \leqslant J)$$

et donc, par le lemme fondamental du crible,

$$\big|[X, 2X] \smallsetminus \mathcal{S}_X\big| \ll X\frac{\log P_1}{\log Q_1}.$$

Proposition 1.5.1. *Soit $0 < \eta < 1/6$ fixé. Pour $X \geqslant 2$ on définit $h_2 := X/(\log X)^{1/5}$. Uniformément pour $\vartheta \in \mathbb{R}$ et $2 \leqslant h \leqslant h_2$, si $\mathcal{S} = \mathcal{S}_X$ est défini comme ci-dessus et que l'on a $[P_1, Q_1] \subset [1, h]$, alors*

$$\frac{1}{X}\int_X^{2X}\Bigg|\frac{1}{h}\sum_{\substack{x<n\leqslant x+h\\ n\in\mathcal{S}}}\mathrm{e}^{i\vartheta\omega(n)} - \frac{1}{h_2}\sum_{\substack{x<n\leqslant x+h_2\\ n\in\mathcal{S}}}\mathrm{e}^{i\vartheta\omega(n)}\Bigg|^2\mathrm{d}x \ll \frac{(\log h)^{1/3}}{P_1^{1/6-\eta}} + \frac{1}{(\log X)^{1/50}}.$$

Cette proposition est l'analogue de ce que l'on obtient en combinant le lemme 14 et la proposition 1 de [MR16]. Elle est démontrée à la section 1.5.2. On énonce maintenant deux lemmes qui nous permettent de vérifier que la Proposition 1.5.1 implique bien la Proposition 1.1.3.

Lemme 1.5.2. *Soit $X \geqslant 3$. Uniformément pour $x \sim X$, $X/(\log X)^{1/5} \leqslant y \leqslant X$ et $\vartheta \in \mathbb{R}$, on a*

$$\frac{1}{y}\sum_{x<n\leqslant x+y}\mathrm{e}^{i\vartheta\omega(n)} = \frac{1}{X}\sum_{n\sim X}\mathrm{e}^{i\vartheta\omega(n)} + O\left((\log X)^{\cos\vartheta - 9/5}\right).$$

Démonstration. Se déduit du Lemme 1.2.3. □

Lemme 1.5.3. *Il existe une constante $c > 0$ telle que pour tous $3 \leqslant h_2 \leqslant X$, $x \sim X$ et $3 \leqslant P \leqslant Q \leqslant \mathrm{e}^{\sqrt{\log X}}$ on ait*

$$\#\Big\{x < n \leqslant x + h_2 : \quad \Big(n, \prod_{P<p\leqslant Q} p\Big) = 1\Big\} = h_2\prod_{P<p\leqslant Q}\left(1 - \frac{1}{p}\right) + O\left(X\mathrm{e}^{-c\sqrt{\log X}}\right).$$

Démonstration. C'est une conséquence de [FI10, th. 6.1] avec $D = \sqrt{X}$ et $z = \mathrm{e}^{\sqrt{\log X}}$. □

On montre désormais la Proposition 1.1.3.

Démontration de la Proposition 1.1.3. On ne détaille ici que l'obtention du premier point (1.1.8), le second se traitant de manière tout à fait analogue. Soit $A, B > 1$, $\delta > 0$ et $\vartheta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable. Soit $3 \leqslant h \leqslant X$. Si $h > h_2 := X/(\log X)^{1/5}$, le résultat est directement obtenu par l'application du Lemme 1.5.2 puisque l'on peut imposer $\delta \gg (\log X)^{-1/99}$. On suppose donc désormais $h \leqslant h_2$. Pour tout $x \sim X$, avec le Lemme 1.5.2 on a

$$\int_{I_{A,B}}\Bigg|\frac{1}{h_2}\sum_{x<n\leqslant x+h_2}\mathrm{e}^{i\vartheta(\tau)\omega(n)} - \frac{1}{X}\sum_{n\sim X}\mathrm{e}^{i\vartheta(\tau)\omega(n)}\Bigg|\frac{\mathrm{d}\tau}{|\tau|} \ll \frac{\log(AB)}{(\log X)^{4/5}}. \tag{1.5.29}$$

On définit $\mathcal{S}$ comme à la Proposition 1.5.1 avec $[P_1, Q_1] \subset [1, h]$. On effectue la manipulation suivante, qui se trouve dans [MR16].

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\sum_{\substack{x<n\leqslant x+h\\ n\notin\mathcal{S}}} 1 &= 1-\frac{1}{h}\sum_{\substack{x<n\leqslant x+h\\ n\in\mathcal{S}}} 1+O\left(\frac{1}{h}\right)\\ &= \frac{1}{h_2}\sum_{\substack{x<n\leqslant x+h_2\\ n\in\mathcal{S}}} 1-\frac{1}{h}\sum_{\substack{x<n\leqslant x+h\\ n\in\mathcal{S}}} 1+\frac{1}{h_2}\sum_{\substack{x<n\leqslant x+h_2\\ n\notin\mathcal{S}}} 1+O\left(\frac{1}{h}\right).\end{aligned}$$

Cela permet d'écrire, uniformément pour $\vartheta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{h}\sum_{x<n\leqslant x+h} \mathrm{e}^{i\vartheta\omega(n)}-\frac{1}{h_2}\sum_{x<n\leqslant x+h_2} \mathrm{e}^{i\vartheta\omega(n)}\right|\\ &\quad\leqslant \left|\frac{1}{h}\sum_{\substack{x<n\leqslant x+h\\ n\in\mathcal{S}}} \mathrm{e}^{i\vartheta\omega(n)}-\frac{1}{h_2}\sum_{\substack{x<n\leqslant x+h_2\\ n\in\mathcal{S}}} \mathrm{e}^{i\vartheta\omega(n)}\right|+\frac{1}{h}\sum_{\substack{x<n\leqslant x+h\\ n\notin\mathcal{S}}} 1+\frac{1}{h_2}\sum_{\substack{x<n\leqslant x+h_2\\ n\notin\mathcal{S}}} 1\\ &\quad\leqslant \left|\frac{1}{h}\sum_{\substack{x<n\leqslant x+h\\ n\in\mathcal{S}}} \mathrm{e}^{i\vartheta\omega(n)}-\frac{1}{h_2}\sum_{\substack{x<n\leqslant x+h_2\\ n\in\mathcal{S}}} \mathrm{e}^{i\vartheta\omega(n)}\right|+\left|\frac{1}{h}\sum_{\substack{x<n\leqslant x+h\\ n\in\mathcal{S}}} 1-\frac{1}{h_2}\sum_{\substack{x<n\leqslant x+h_2\\ n\in\mathcal{S}}} 1\right|\\ &\qquad+\frac{2}{h_2}\sum_{\substack{x<n\leqslant x+h_2\\ n\notin\mathcal{S}}} 1+O\left(\frac{1}{h}\right).\end{aligned}$$

D'après le Lemme 1.5.3, il existe une constante $c' > 0$ telle que

$$\frac{1}{h_2}\sum_{\substack{x<n\leqslant x+h_2\\ n\notin\mathcal{S}}} 1 \ll \sum_{j=1}^{J}\frac{\log P_j}{\log Q_j}+\mathrm{e}^{-c'\sqrt{\log X}} \ll \frac{\log P_1}{\log Q_1}.$$

On a alors

$$\begin{aligned}&\int_{I_{A,B}}\left|\frac{1}{h}\sum_{x<n\leqslant x+h} \mathrm{e}^{i\vartheta(\tau)\omega(n)}-\frac{1}{X}\sum_{n\sim X} \mathrm{e}^{i\vartheta(\tau)\omega(n)}\right|\frac{\mathrm{d}\tau}{|\tau|}\\ &\qquad\ll \big(\log(AB)\big)\left(\frac{\log P_1}{\log Q_1}+\frac{1}{(\log X)^{4/5}}\right)+J_1(x)+J_2(x),\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}J_1(x) &:= \int_{I_{A,B}}\left|\frac{1}{h}\sum_{\substack{x<n\leqslant x+h\\ n\in\mathcal{S}}} \mathrm{e}^{i\vartheta(\tau)\omega(n)}-\frac{1}{h_2}\sum_{\substack{x<n\leqslant x+h_2\\ n\in\mathcal{S}}} \mathrm{e}^{i\vartheta(\tau)\omega(n)}\right|\frac{\mathrm{d}\tau}{|\tau|},\\ J_2(x) &:= \int_{I_{A,B}}\left|\frac{1}{h}\sum_{\substack{x<n\leqslant x+h\\ n\in\mathcal{S}}} 1-\frac{1}{h_2}\sum_{\substack{x<n\leqslant x+h_2\\ n\in\mathcal{S}}} 1\right|\frac{\mathrm{d}\tau}{|\tau|}.\end{aligned}$$

L'intégrale $\frac{1}{X}\int_X^{2X} J_1(x)^2\mathrm{d}x$ se réécrit

$$\int_{I_{A,B}}\int_{I_{A,B}} \frac{1}{|\tau\tau'|\,X}\int_X^{2X}\left|\frac{1}{h}\sum_{\substack{x<n\leqslant x+h\\ n\in\mathcal{S}}} \mathrm{e}^{i\vartheta(\tau)\omega(n)} - \frac{1}{h_2}\sum_{\substack{x<n\leqslant x+h_2\\ n\in\mathcal{S}}} \mathrm{e}^{i\vartheta(\tau)\omega(n)}\right| \times \left|\frac{1}{h}\sum_{\substack{x<n\leqslant x+h\\ n\in\mathcal{S}}} \mathrm{e}^{i\vartheta(\tau')\omega(n)} - \frac{1}{h_2}\sum_{\substack{x<n\leqslant x+h_2\\ n\in\mathcal{S}}} \mathrm{e}^{i\vartheta(\tau')\omega(n)}\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\tau'.$$

En appliquant successivement l'inégalité de Cauchy-Schwarz puis la Proposition 1.5.1 à l'intégrale par rapport à x, on obtient

$$\frac{1}{X}\int_X^{2X} J_1(x)^2\mathrm{d}x \ll \big(\log(AB)\big)^2\left(\frac{(\log h)^{1/3}}{P_1^{1/6-\eta}} + \frac{1}{(\log X)^{1/50}}\right).$$

Ainsi, pour tout $\delta > 0$, on a

$$J_1(x) \leqslant \delta\log(AB)$$

pour tout $x \sim X$ sauf sur un ensemble de mesure au plus

$$\ll X\left(\frac{(\log h)^{1/3}}{\delta^2 P_1^{1/6-\eta}} + \frac{1}{\delta^2\,(\log X)^{1/50}}\right).$$

L'intégrale $J_2(x)$ se traite exactement de la même façon – avec $\vartheta(\tau) = 0$ – et on trouve alors

$$\int_{I_{A,B}}\left|\frac{1}{h}\sum_{x<n\leqslant x+h} \mathrm{e}^{i\vartheta(\tau)\omega(n)} - \frac{1}{X}\sum_{n\sim X} \mathrm{e}^{i\vartheta(\tau)\omega(n)}\right|\frac{\mathrm{d}\tau}{|\tau|} \ll \big(\log(AB)\big)\left(\delta + \frac{\log P_1}{\log Q_1} + \frac{1}{(\log X)^{4/5}}\right)$$

pour tout $x \sim X$ sauf au plus

$$\ll X\left(\frac{(\log h)^{1/3}}{\delta^2 P_1^{1/6-\eta}} + \frac{1}{\delta^2\,(\log X)^{1/50}}\right).$$

On omet le terme $(\log X)^{-4/5}$ puisque l'on peut imposer $\delta \gg (\log X)^{-1/99}$. Pour conclure, on fait le même choix pour η, P_1 et Q_1 que dans la section 9 de [MR16] :

- $\eta = \dfrac{1}{150}$,
- $Q_1 = \min\left(h, \mathrm{e}^{\sqrt{\log X}}\right)$,
- $P_1 = \max\left(h^{\delta/4}, (\log h)^{40/\eta}\right)$ si $h \leqslant \mathrm{e}^{\sqrt{\log X}}$, sinon $P_1 = Q_1^{\delta/4}$.

□

1.5.2 Application de la méthode de Matomäki-Radziwiłł

Il nous reste à montrer la Proposition 1.5.1. Comme indiqué précédemment, cette proposition est une application directe du lemme 14 et de la proposition 1 de [MR16] dans le cas où $f(n) = \mathrm{e}^{i\vartheta\omega(n)}$; cependant, la proposition 1 de [MR16] telle quelle, ne s'applique qu'aux fonctions multiplicatives $f : \mathbb{N} \to [-1, 1]$ réelles. L'unique point de leur preuve ne couvrant pas le cas $f(n) = \mathrm{e}^{i\vartheta\omega(n)}$ se trouve dans la section 8.3 de [MR16], c'est l'estimation

$$\max_{(\log X)^{1/15} \leqslant |u| \leqslant 2T^{1+\varepsilon}} |R_{v,H}(1+iu)| \ll (\log X)^{-1/16+o(1)} \cdot \frac{\log Q}{\log P},$$

où

$$R_{v,H}(s) := \sum_{\substack{X\mathrm{e}^{-v/H} \leqslant n \leqslant 2X\mathrm{e}^{-v/H} \\ n \in \mathcal{S}}} \frac{f(n)}{n^s} \cdot \frac{1}{\#\{p \in [P, Q] : \quad p|n\} + 1}. \qquad (s \in \mathbb{C}) \quad (1.5.30)$$

Leur majoration utilise le fait qu'une fonction réelle n'est pas « p^{it}-simulatrice » [MR16, lem. 2]. Ce type de résultat est dû à des travaux initiés par Halász dans les années 1970, puis amplifiés notamment par Granville et Soundararajan. Les fonctions qui nous intéressent ne sont pas « p^{it}-simulatrices » non plus puisqu'elles sont constantes sur les nombres premiers. Cela nous permet d'adapter la preuve assez simplement. Pour la suite, on se donne l'ensemble $\mathcal{S} = \mathcal{S}_X$ défini précédemment et on pose $P := \exp\left((\log X)^{1-1/48}\right)$, $Q := \mathrm{e}^{(\log X)/\log_2 X}$ et $H := (\log X)^{1/48}$.

Proposition 1.5.4. *Soit $0 < \varepsilon < 1$. On suppose $\mathcal{S}, P, Q$ et H définis comme ci-dessus. Uniformément pour $3 \leqslant T \leqslant X$, $\vartheta \in \mathbb{R}$ et $v \in \left[\lfloor H \log P \rfloor, H \log Q\right]$, lorsque $f(n) = \mathrm{e}^{i\vartheta\omega(n)}$, on a*

$$\max_{(\log X)^{1/15} \leqslant |u| \leqslant 2T^{1+\varepsilon}} |R_{v,H}(1+iu)| \ll (\log X)^{-1/16+o(1)} \cdot \frac{\log Q}{\log P},$$

où $R_{v,H}$ est défini par (1.5.30)*, lorsque X tend vers l'infini.*

La preuve suit le même schéma que [MR16, lem. 3]. Bien que cela ne nous soit pas utile, on note qu'une meilleure majoration est possible en étudiant spécifiquement le cas $f(n) = \mathrm{e}^{i\vartheta\omega(n)}$ par des calculs explicites. Lorsque f et g sont deux fonctions multiplicatives de module inférieur à 1 et $x \geqslant 1$, on note

$$\mathbb{D}(f, g, x)^2 = \sum_{p \leqslant x} \frac{1 - \Re\mathfrak{e}\left(f(p)\overline{g(p)}\right)}{p}.$$

C'est au sens de cette « distance » que l'on montre que nos fonctions ne ressemblent pas à $n \mapsto n^{it}$. En effet, on montre le lemme suivant.

Lemme 1.5.5. *Soit f une fonction multiplicative à valeurs dans le disque unité, et*

$$F(s) = \sum_{n \sim x} \frac{f(n)}{n^s}. \qquad (x \geqslant 1, s \in \mathbb{C})$$

Uniformément pour $T_0 \geqslant 1$, $t \in \mathbb{R}$ et $x \geqslant 1$, on a

$$|F(1+it)| \ll (1+m)\,\mathrm{e}^{-m} + \frac{1}{T_0}$$

où

$$m = m(x, T_0) := \min_{|t_0| \leqslant T_0} \mathbb{D}\left(f, n^{it+it_0}, x\right)^2.$$

Démonstration. Cela se déduit directement de [Ten15, cor. III.4.12] par sommation d'Abel. □

Le lemme suivant permet de contourner la condition non multiplicative $n \in \mathcal{S}$ — on rappelle que l'ensemble $\mathcal{S} = \mathcal{S}_X$ a été défini au début de la section 1.5.

Lemme 1.5.6. *Pour $\mathcal{J} \subset \{1, ..., J\}$, on définit la fonction totalement multiplicative $g_{\mathcal{J}}$ par*

$$g_{\mathcal{J}}(p) := \begin{cases} 1 & \text{si } p \notin \bigcup_{j\in\mathcal{J}} [P_j, Q_j] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors pour toute suite $(a_n)_{n\sim X}$, on a

$$\sum_{\substack{n\sim X \\ n\in\mathcal{S}}} a_n = \sum_{n\sim X} a_n \prod_{j=1}^{J} \left(1 - g_{\{j\}}(n)\right) = \sum_{\mathcal{J}\subset\{1,...,J\}} (-1)^{\#\mathcal{J}} \sum_{n\sim X} a_n g_{\mathcal{J}}(n).$$

Avec ce lemme, on peut se passer de la condition $n \in \mathcal{S}$ au prix d'un facteur multiplicatif $2^J = (\log X)^{o(1)}$.

Lemme 1.5.7. *Soit $A \geqslant 1$ et $0 < \varepsilon < 1/4$ fixés. Pour $X \geqslant 20$, on suppose $\mathcal{S} = \mathcal{S}_X$, P et Q définis comme précédemment. Alors uniformément pour $\mathcal{J} \subset \{1, ..., J\}$, $\vartheta \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant \alpha \leqslant X^A$ et $x \in \left[X^{1/4}, X\right]$, on a*

$$\mathbb{D}\left(h_{\mathcal{J},\vartheta}, n^{i\alpha}, x\right)^2 \geqslant \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{48} - \varepsilon\right) \log_2 x + O\left(1\right),$$

où $h_{\mathcal{J},\vartheta}(n) := g_{\mathcal{J}}(n)\mathrm{e}^{i\vartheta\omega(n)}$ lorsque n n'a aucun facteur premier dans l'intervalle $[P, Q]$ et $h_{\mathcal{J},\vartheta}(n) := 0$ sinon.

Démonstration. Puisque $Q_J \leqslant \mathrm{e}^{\sqrt{\log X}}$ et $P := \exp\left((\log X)^{1-1/48}\right)$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{D}\left(h_{\mathcal{J},\vartheta}, n^{i\alpha}, x\right)^2 &= \sum_{p\leqslant x} \frac{1 - \Re\mathfrak{e}\left(h_{\mathcal{J},\vartheta}(p)p^{-i\alpha}\right)}{p} \\
&\geqslant \sum_{\exp\left((\log x)^{2/3+\varepsilon}\right)<p<P} \frac{1 - \Re\mathfrak{e}\left(\mathrm{e}^{i\vartheta}p^{-i\alpha}\right)}{p} \\
&\geqslant \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{48} - \varepsilon\right) \log_2 x + O\left(1 + \sum_{\exp\left((\log x)^{2/3+\varepsilon}\right)<p\leqslant P} \frac{\Re\mathfrak{e}\left(\mathrm{e}^{i\vartheta}p^{-i\alpha}\right)}{p}\right).
\end{aligned}$$

La dernière somme se majore avec la région sans zéro de Korobov-Vinogradov pour la fonction zêta, comme la ligne (20) de [BT98]. On obtient le résultat attendu. □

Démonstration de la Proposition 1.5.4. Grâce aux trois lemmes précédents, il suffit de reprendre la preuve de [MR16, lem. 3], *mutatis mutandis.* □

Remerciements. Je tiens à remercier chaleureusement mon directeur de thèse, Régis de la Bretèche, pour les nombreuses discussions que nous avons eues, et ses suggestions fort utiles. Je remercie par ailleurs Maksym Radziwiłł pour ses remarques pertinentes.

2

Lois locales de la fonction ω dans presque tous les petits intervalles

Abstract. For $k \geqslant 1$ an integer and $x \geqslant 1$ a real number, let $\pi_k(x)$ be the number of integers smaller than x having exactly k distinct prime divisors. Building on recent work of Matomäki & Radziwiłł, we investigate the asymptotic behavior of $\pi_k(x+h) - \pi_k(x)$ for almost all x, when h is very small. We obtain optimal results for $k \asymp \log_2 x$ and close to optimal results for $5 \leqslant k \leqslant \log_2 x$. Our method also applies to $x^{1/u}$-friable integers in almost all intervals $[x, x+h]$ when $1 \leqslant u \leqslant (\log x)^{1/6-\varepsilon}$.

2.1 Introduction . . . 35
2.1.1 Résultats . . . 35
2.1.2 Aperçu de la méthode . . . 38
2.1.3 Notations . . . 39
2.2 Lemmes utiles . . . 39
2.3 Résultat général . . . 41
2.4 Méthode de Matomäki-Radziwiłł adaptée . . . 43
2.4.1 Première simplification . . . 43
2.4.2 Utilisation de la borne de Parseval . . . 44
2.4.3 Factorisation du polynôme de Dirichlet associé à $\mathcal{A} \cap \mathcal{S}$ . . . 45
2.4.4 Majoration de l'intégrale . . . 46
2.5 Application aux entiers ayant $k \asymp \log_2 X$ facteurs premiers . . . 49
2.5.1 Propriétés classiques . . . 49
2.5.2 Crible bi-dimensionnel pour les entiers ayant k facteurs premiers . . . 55
2.5.3 Application du Théorème 2.3.1 . . . 59
2.6 Entiers friables . . . 60
2.7 Entiers avec un petit nombre de facteurs premiers . . . 65
2.7.1 Redéfinition de $\mathcal{S}$ . . . 66
2.7.2 Démonstration du Théorème 2.1.2 . . . 66

2.1 Introduction

2.1.1 Résultats

Soit $\mathcal{A}$ un ensemble d'entiers. On suppose que $\mathcal{A} \cap [x, 2x]$ contient asymptotiquement $\delta(x)x$ entiers lorsque x tend vers l'infini. Si $\mathcal{A}$ et δ ne sont pas trop erratiques et que la densité δ n'est pas trop petite, on s'attend à ce que pour tout $h \leqslant x$ on ait

$|\mathcal{A} \cap [x, x+h]| \approx \delta(x)h$ pour presque tout x dès que $\delta(x)h \to +\infty$. Récemment, Matomäki & Radziwiłł [MR16] ont développé une méthode qui permet entre autres d'obtenir un tel résultat dès que $\delta \gg 1$ et que $\mathcal{A}$ est représenté par une combinaison linéaire de fonctions multiplicatives, bornées en valeur absolue par 1. Ils démontrent par exemple que l'ensemble des entiers ayant un nombre pair de facteurs premiers a pour densité asymptotique 1/2 dans presque tous les intervalles $[x, x+h]$, lorsque $1 \leqslant h \leqslant x$ tend vers l'infini. Ils montrent en fait que ce résultat est vrai dès que[1] $(\log_2 h)/\log h = o\big(\delta(x)\big)$, alors que l'on espère que la condition $\delta(x)h \to +\infty$ suffise. Avec leur méthode, en utilisant l'approche de Selberg pour étudier les $\mathcal{E}_k := \{n \geqslant 1 : \quad \omega(n) = k\}$, on a ainsi montré [Gou18b] que presque tout intervalle $\big[x, x + \exp\big((\log_2 x)^{1/2+\varepsilon}\big)\big]$ contient des entiers admettant $\lfloor \log_2 x \rfloor$ facteurs premiers. Le présent chapitre a pour but de montrer que si l'on étudie un ensemble qui vérifie certaines propriétés de crible se factorisant « bien » — comme par exemple les ensembles représentés par une fonction multiplicative, ou encore les $\mathcal{E}_k$ —, alors la condition $\delta(x)h \to +\infty$, jugée optimale, suffit. L'application principale est la suivante. On note $\pi_k(x) := |\mathcal{E}_k \cap [1, x]|$ le nombre d'entiers inférieurs ou égaux à x divisibles par exactement k facteurs premiers distincts. Il existe une vaste littérature consacrée à l'étude des fonctions π_k. On a notamment (*cf.* Lemme 2.5.1 pour un résultat plus précis), uniformément pour $x \geqslant 3$ et $1 \leqslant k \ll \log_2 x$,

$$\pi_k(x) = \delta_k(x)x(1 + o(1)),$$

lorsque x tend vers l'infini, où l'on a posé

$$\delta_k(x) := \lambda(\kappa)\,\frac{(\log_2 x)^{k-1}}{(\log x)(k-1)!}, \qquad\qquad \kappa := \frac{k-1}{\log_2 x},$$

et $\lambda(z) := \frac{1}{\Gamma(z+1)} \prod_{p \geqslant 2} \big(1 + \frac{z}{p-1}\big)\big(1 - \frac{1}{p}\big)^z$. Soit $0 < r < R$ fixés. Lorsque $r < \kappa \leqslant R$, on pose $Q(\kappa) := \kappa \log \kappa - \kappa + 1$. La formule de Stirling fournit alors

$$\delta_k(x) \asymp \frac{1}{(\log x)^{Q(\kappa)}\sqrt{\log_2 x}}.$$

On démontre le résultat optimal suivant.

Théorème 2.1.1. *Soit $0 < r < R$ fixés et $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ tendant vers l'infini en l'infini. Uniformément pour $X \geqslant 3$, $r \log_2 X < k \leqslant R \log_2 X$ et $\psi(X) \leqslant \delta_k(X)h \leqslant X$, on a*

$$\pi_k(x+h) - \pi_k(x) = \delta_k(X)h\,(1 + o(1))$$

pour presque tout $x \sim X$ lorsque X tend vers l'infini.

On note que si l'on remplace $= (1 + o(1))$ par $\geqslant 1 - \varepsilon$ et « presque tout x » par « une proportion positive de x », on peut remplacer ψ par une constante A_ε suffisamment grande. La méthode est particulièrement adaptée à l'étude des $\mathcal{E}_k$ lorsque $k \asymp \log_2 X$ puisque dans ce cas, des propriétés de crible linéaire semblables à celles de tous les entiers sont vérifiées. Lorsque k est petit, ce n'est plus le cas, mais on peut tout de même partiellement adapter la méthode, et obtenir le résultat suivant. On définit, pour $k \geqslant 1$ et $x \geqslant 20$,

$$F_k(x) := \frac{(\log_2 x)^2}{k^2}\left(1 - \exp\left(-\frac{k \log_3 x}{\log_2 x}\right)\right)^{-1}. \tag{2.1.1}$$

1. Pour $k \geqslant 1$, on note $\log_k$ la fonction log itérée k fois. Donc $\log_2 = \log\log$ etc...

Théorème 2.1.2. *Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Uniformément pour $X \geqslant 20, 5 \leqslant k \leqslant \log_2 X$ et $F_k(X)(\log_3 X)^{2+\varepsilon} \leqslant \delta_k(X)h \leqslant X$, on a*

$$\pi_k(x+h) - \pi_k(x) \gg \frac{\delta_k(X)h}{F_k(X)}$$

pour presque tout $x \sim X$ lorsque X tend vers l'infini.

Ce théorème n'est utile que pour les petites valeurs de k, le Théorème 2.1.1 fournissant un meilleur résultat lorsque $k \gg \log_2 X$. Pour $k = o\big((\log_2 X)/\log_3 X\big)$, on a $F_k(X) = (\log_2 X)^3/(k^3 \log_3 X)\big(1 + o(1)\big)$. Ainsi, quand k est fixé, on perd essentiellement un facteur $(\log_2 X)^3(\log_3 X)^{1+\varepsilon}$ sur la taille minimale de h et $(\log_2 X)^3(\log_3 X)^{-1}$ sur la densité espérées. Lorsque $k \geqslant 5$, cela précise un résultat récent de Teräväinen [Ter16], qui a montré qu'il y avait une infinité d'entiers avec exactement k facteurs premiers dans presque tous les intervalles de taille $(\log X)(\log_{k-1} X)^{C_k}$ pour $k \geqslant 2$ fixé et certaines constantes $C_k > 0$. Pour les valeurs de k supérieures à $(\log_2 X)/\log_3 X$, il est possible d'adapter la preuve du Théorème 2.1.2 afin d'améliorer légèrement le résultat. On mentionne cette possibilité à la section 2.7 sans toutefois l'approfondir dans cette thèse.

Le deux théorèmes précédents sont en partie une conséquence d'un résultat d'indépendance du nombre de facteurs premiers de $a_1 n + b_1$ et $a_2 n + b_2$. Ce problème possède un intérêt propre. On énonce une version simplifiée du Théorème 2.5.3 *infra*.

Théorème 2.1.3. *Soit $R > 0$ fixé. Pour tout entier $b \geqslant 1$ fixé, uniformément pour $x \geqslant 3$ et $1 \leqslant k_1, k_2 \leqslant R \log_2 x$, on a*

$$\big|\{n \sim x : \quad \omega(n) = k_1,\ \omega(n+b) = k_2\}\big| \ll_b \delta_{k_1}(x)\delta_{k_2}(x)x.$$

Lorsque $k_2 \asymp \log_2 x$ ou bien que b est pair, ce résultat est réputé optimal à un facteur borné près. La preuve exposée pour montrer ce théorème se généralise sans problème au cas de plusieurs translatés $n + b_1, ..., n + b_\ell$ pour $\ell \geqslant 3$ fixé et Tenenbaum [Ten18] l'a étendue au cas d'une famille de polynômes $Q_1, \ldots, Q_\ell$.

Notre méthode permet de s'intéresser aux ensembles représentés par certaines fonctions multiplicatives. On traite l'exemple des entiers $x^{1/u}$-friables[2] dans de petits intervalles lorsque u n'est pas trop grand. Le cas u borné est directement traité par Matomäki & Radziwiłł dans [MR16]. On note $\Psi(x, y) := \big|\{1 \leqslant n \leqslant x : \quad P^+(n) \leqslant y\}\big|$ le nombre d'entiers y-friables inférieurs à x et ρ est la fonction de Dickman, unique fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ définie par $u\rho'(u) + \rho(u-1) = 0$ pour $u > 1$, $\rho(u) = 1$ pour $0 \leqslant u \leqslant 1$ et $\rho(u) = 0$ pour $u < 0$.

Théorème 2.1.4. *Soit $0 < \varepsilon < 1/6$ fixé et $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ tendant vers l'infini en l'infini. Alors uniformément pour $X \geqslant 3, 1 \leqslant u \leqslant (\log X)^{1/6-\varepsilon}$ et $\big(1 + \rho(u)^{-1}\big)^{\psi(X)} \leqslant h \leqslant X$, on a*

$$\Psi\big(x + h, X^{1/u}\big) - \Psi\big(x, X^{1/u}\big) = \rho(u)h\big(1 + o(1)\big)$$

pour presque tout $x \sim X$ lorsque X tend vers l'infini.

De même que pour le Théorème 2.1.1, si l'on remplace $= \big(1 + o(1)\big)$ par $\geqslant 1 - \varepsilon$ et « presque tout x » par « une proportion positive de x », on peut remplacer ψ par une constante A_ε suffisamment grande. Ce théorème est *a priori* « plus faible » – c'est-à-dire plus loin de ce que l'on espère – que le Théorème 2.1.1. Cela tient à la difficulté, à l'heure actuelle, de majorer efficacement un cardinal du type $\big|\{n \sim x : \quad P^+(n(n+1)) \leqslant x^{1/u}\}\big|$.

2. On dit que l'entier n est y-friable si son plus grand facteur premier $P^+(n)$ est inférieur ou égal à y.

Pour les théorèmes 2.1.1, 2.1.2 et 2.1.4, il est possible d'obtenir une borne pour le cardinal de l'ensemble exceptionnel. Cette borne n'est pas très bonne en général et on ne s'y est pas intéressé. Hildebrand et Tenenbaum [HT93, th. 5.7] ont montré que lorsque $h \geqslant x^{1/u} \exp\big((\log X)^{1/6}\big)$, le Théorème 2.1.4 est valable avec un ensemble exceptionnel de mesure $\ll_\varepsilon X \exp\big(-(\log X)^{1/6-\varepsilon}\big)$. Ils obtiennent par ailleurs un terme d'erreur pour l'estimation asymptotique.

Enfin, on obtient le résultat suivant sur tous les intervalles, qui est une extension au cas u non borné d'un théorème de Matomäki & Radziwiłł [MR16], utilisant les mêmes outils.

Théorème 2.1.5. *Soit $0 < \varepsilon < 1/6$ fixé. Il existe une constante $u_0 = u_0(\varepsilon)$ telle que pour $x \geqslant 1$, $u_0 \leqslant u \leqslant (\log x)^{1/6-\varepsilon}$ et $\rho(u)^{-3-\varepsilon} \leqslant h \leqslant \sqrt{x}$ on ait*

$$\Psi\left(x + h\sqrt{x}, x^{1/u}\right) - \Psi\left(x, x^{1/u}\right) \geqslant \rho\left(u\right)^2 \frac{h\sqrt{x}}{(\log x)^3}.$$

Cela implique $\Psi\left(x + h\sqrt{x}, x^{1/u}\right) - \Psi\left(x, x^{1/u}\right) \geqslant \rho\left(u_0\right)^2 h\sqrt{x}/(\log x)^3$ pour $1 \leqslant u \leqslant u_0$ et $\rho(u_0)^{-3-\varepsilon} \leqslant h \leqslant \sqrt{x}$. L'exposant $3+\varepsilon$ peut être remplacé par $(5c+1)/2+\varepsilon$, si $c > 0$ est une constante pour laquelle on sait montrer certaines estimations du type

$$\left|\left\{n \sim x : \quad P^+\big(n(n+1)\big) \leqslant x^{1/u}\right\}\right| \ll \rho(u)^{2-c} x.$$

Très récemment, La Bretèche et Drappeau [BD17, cor. 4.2] ont montré que l'on peut prendre $c = 2/5 + \varepsilon$ dans l'inégalité ci-dessus. L'exposant $3+\varepsilon$ du Théorème 2.1.5 peut donc être remplacé par $3/2+\varepsilon$. On n'en détaille pas la démonstration, qui est très proche de celle du Théorème 2.1.5.

2.1.2 Aperçu de la méthode

On reprend le cadre d'étude introduit par Matomäki & Radziwiłł dans [MR16] pour l'étude des sommes courtes de fonctions multiplicatives réelles, bornées en module par 1. On rappelle brièvement le fonctionnement global de leur preuve, en faisant apparaître les points qui diffèrent dans notre cas. Le but est de comparer une moyenne sur l'intervalle $[x, x+h]$ à une moyenne sur $[X, 2X]$. Plus précisément, il s'agit de montrer que

$$\frac{1}{X}\int_X^{2X} \left|\frac{1}{h}\sum_{x<n\leqslant x+h} f(n) - \frac{1}{X}\sum_{n\sim X} f(n)\right|^2 \mathrm{d}x = o\left(\frac{1}{X}\sum_{n\sim X} f(n)\right) \tag{2.1.2}$$

lorsque X tend vers l'infini. La première étape est de travailler sur un sous-ensemble $\mathcal{S}$ de $[X, 2X]$, où les entiers admettent au moins un facteur premier dans certains intervalles dépendants de X. Cette restriction, dans leur cas très général où aucune hypothèse de crible n'est faite, se fait au prix d'un terme d'erreur $O\big((\log_2 h)/\log h\big)$. Ce terme d'erreur est trop grand lorsque $\sum_{n\sim X} f(n) = o(X)$, par exemple lorsque f est l'indicatrice d'un ensemble de densité δ tendant vers 0. Cependant, si cet ensemble vérifie certaines propriétés de crible linéaire, on peut essentiellement se ramener à un $O\big(\delta(\log_2 h)/\log h\big) = o(\delta)$, lorsque h tend vers l'infini. L'étape suivante consiste à relier la quantité (2.1.2) à une intégrale du polynôme de Dirichlet associé à f sur $\mathcal{S} \cap [X, 2X]$. Cette étape ne pose aucun problème dans notre cas. La majoration de la dernière intégrale repose alors en grande partie sur la décomposition du polynôme en produit de deux autres polynômes, l'un de petite longueur, ayant un support inclus dans l'ensemble des nombres premiers, et le reste, de taille proche de celle du polynôme initial. Cette factorisation est aisée grâce à la structure de $\mathcal{S}$, et la multiplicativité de f. Dans le cas où f est l'indicatrice d'un ensemble, elle

n'est pas toujours multiplicative. On impose alors à l'ensemble de vérifier une propriété de factorisation pour procéder de la même manière. Ainsi, on peut par exemple étudier les ensembles $\mathcal{E}_k$. La dernière étape consiste essentiellement à montrer que le polynôme court prend de petites valeurs — on peut alors le sortir de l'intégrale —, puis à majorer l'intégrale du polynôme restant. Le polynôme court apportant déjà un facteur $o(1)$, il suffit de majorer celle-ci avec la borne « triviale » pour ce problème, qui est fournie par le Lemme 2.2.2. On remarque cependant que ce faisant, on perd un facteur δ^{-1}, ce qui est gênant lorsque $\delta \to 0$. Pour rétablir cette perte, on emploie alors le Lemme 2.2.3, qui est une amélioration du Lemme 2.2.2. On peut alors recouvrir le facteur δ^{-1}, à condition que l'ensemble sur lequel on somme vérifie non seulement des conditions de crible linéaire, mais aussi en dimension 2.

Lorsqu'il s'agit de montrer le Théorème 2.1.2, on est amené à considérer un cadre légèrement différent. En effet, les entiers qui ont peu de facteurs premiers ne vérifient pas les mêmes propriétés de crible que des entiers génériques.

Dans la section 2.2, on énonce plusieurs lemmes utiles. À la section 2.3, on définit le cadre adapté et on énonce le Théorème 2.3.1, avant de le démontrer, dans la section 2.4. Les sections 2.5 et 2.6 sont consacrées respectivement aux théorèmes 2.1.1 et 2.1.3, et aux théorèmes 2.1.4 et 2.1.5. Pour finir, on démontre le Théorème 2.1.2 à la section 2.7.

2.1.3 Notations

Les lettres minuscules p et q sont réservées aux nombres premiers. Par conséquent, on écrit par exemple $\sum_p$ au lieu de $\sum_{p \text{ premier}}$. On désigne par ω la fonction additive qui compte le nombre de facteurs premiers distincts : $\omega(n) = \sum_{p|n} 1$, et μ et φ représentent respectivement les fonctions de Möbius et d'Euler. Étant donnés E un ensemble d'entiers et h une fonction additive, on note $h_E(n) := \sum_{p^\nu \| n,\ p \in E} h(p^\nu)$. Si E est fini, on note $|E|$ son cardinal. On écrit $f \ll g$ ou $f = O(g)$ (resp. $f \gg g$) pour dire qu'il existe une constante absolue $C > 0$ telle que $|f| \leqslant C\,|g|$ (resp. $|f| \geqslant C\,|g|$). La région de validité de cette inégalité, si elle n'est pas précisée, est claire d'après le contexte. On écrit par exemple $\ll_\varepsilon$ ou O_ε pour signifier que la constante implicite C peut dépendre de ε. La relation $f \asymp g$ signifie que l'on a simultanément $f \ll g$ et $f \gg g$. On utilise la notation (asymétrique) $a \sim b$ pour dire $b < a \leqslant 2b$. Pour tout entier $k \geqslant 2$, on désigne par $\log_k$ la k-ième itérée de la fonction log. Enfin, pour $x > 0$, on note $\log^+ x = \max(\log x, 0)$.

2.2 Lemmes utiles

Les lemmes que l'on énonce ici se trouvent de manière quasiment identique dans les références localement citées. Dans cette section, pour $(a_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de nombres complexes, $1 \leqslant X \leqslant X'$ des réels et $s \in \mathbb{C}$, on note

$$A(s) := \sum_{n \sim X} \frac{a_n}{n^s},$$
$$A_{X,X'}(s) := \sum_{X < n \leqslant X'} \frac{a_n}{n^s}.$$

On commence par énoncer le lemme permettant de relier la quantité qui nous intéresse initialement à une estimation sur le polynôme de Dirichlet associé – *cf.* [MR16, lem. 14].

Lemme 2.2.1 (Borne de Parseval)**.** *Pour $X \geqslant 1$ et $T_0 \geqslant 1$, on note $y_0 := X/T_0^3$. Pour $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de complexes de module inférieur ou égal à 1 et $1 \leqslant h \leqslant y_0$, on a*

$$\frac{1}{X}\int_X^{2X}\left|\frac{1}{h}\sum_{x<n\leqslant x+h} a_n - \frac{1}{y_0}\sum_{x<n\leqslant x+y_0} a_n\right|^2 \mathrm{d}x \ll \frac{1}{T_0} + \int_{T_0}^{X/h} |A(1+it)|^2\,\mathrm{d}t + \max_{T\geqslant X/h}\frac{X}{Th}\int_T^{2T}|A(1+it)|^2\,\mathrm{d}t.$$

On énonce maintenant le théorème de la valeur moyenne pour les polynômes de Dirichlet.

Lemme 2.2.2. *Pour $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de nombres complexes, $X \geqslant 1$ et $T > 0$, on a*

$$\int_{-T}^{T}|A(1+it)|^2\,\mathrm{d}t \ll \left(\frac{T}{X}+1\right)\frac{1}{X}\sum_{n\sim X}|a_n|^2.$$

Ce lemme, qui se trouve dans [IK04, chap. 9], perd de son efficacité lorsque la suite $n \mapsto a_n$ est l'indicatrice d'un ensemble. Le résultat suivant, qui se déduit de [IK04, th. 7.1], corrige ce défaut.

Lemme 2.2.3. *Pour $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de nombres complexes, $1 \leqslant X \leqslant X'$ et $T > 0$, on a*

$$\int_{-T}^{T}\left|A_{X,X'}(1+it)\right|^2\mathrm{d}t \ll T\left(\sum_{X<n\leqslant X'}\frac{|a_n|^2}{n^2} + \sum_{1\leqslant b\leqslant X'/T}\ \sum_{X<n,n+b\leqslant X'}\frac{|a_n a_{n+b}|}{n(n+b)}\right). \tag{2.2.3}$$

Dans le cas où $X' = 2X$ et $(a_n)_{n\geqslant 1}$ représente un ensemble de densité δ, on s'attend en général à ce que ce lemme donne une majoration en $\delta T/X + \delta^2$. On note que le lemme précédent fournit une majoration en $\delta T/X + \delta$, moins forte lorsque $T \leqslant X$.

Lemme 2.2.4. *Pour $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite complexe, $X \geqslant 1$ et $T > 2$, si $\mathcal{T} \subset [-T,T]$ est un ensemble 1-espacé, c'est-à-dire tel que $|t-t'| \geqslant 1$ pour tous $t \neq t'$ dans $\mathcal{T}$, alors*

$$\sum_{t\in\mathcal{T}}|A(1+it)|^2 \ll \left(\frac{|\mathcal{T}|\sqrt{T}}{X}+1\right)(\log T)\,\frac{1}{X}\sum_{n\sim X}|a_n|^2.$$

Ce lemme est utile lorsque $|\mathcal{T}| \leqslant T^{1/2-\varepsilon}$ par exemple. Une telle information sera donnée par le lemme suivant sur les grandes valeurs d'un polynôme de Dirichlet – *cf.* [MR16, lem. 8].

Lemme 2.2.5. *Pour $P \geqslant 1$ un réel et $(a_p)_{p\geqslant 2}$ une suite complexe définie sur l'ensemble des nombres premiers, vérifiant $|a_p| \leqslant 1$, on note*

$$P(s) := \sum_{p\sim P}\frac{a_p}{p^s}.$$

Pour $T \geqslant 2$, $\mathcal{T} \subset [-T,T]$ un ensemble 1-espacé et $V > 0$, on désigne par $R = R(\mathcal{T},V)$ le nombre de $t \in \mathcal{T}$ tels que $|P(1+it)| \geqslant V^{-1}$. On a uniformément

$$R \ll V^2 T^{2(\log_2 T + \log V)/\log P}.$$

Enfin, on utilise le lemme suivant, qui se trouve dans [MR15, lem. 2] sous une forme légèrement différente, mais dont la preuve fournit en fait ce résultat.

Lemme 2.2.6. *Soit $\vartheta > 2/3$ et $0 < \varepsilon < \vartheta - 2/3$ fixés. Lorsque les réels P, Q, t et $X \geqslant 1$ vérifient $\exp\left((\log X)^{\vartheta}\right) \leqslant P \leqslant Q \leqslant X$ et $|t| \leqslant X$, on a uniformément*

$$\left|\sum_{P<p\leqslant Q}\frac{1}{p^{1+it}}\right| \ll \frac{\log X}{1+|t|} + P^{-(\log X)^{-2/3-\varepsilon}}.$$

2.3 Résultat général

On introduit des notations afin de définir l'ensemble $\mathcal{S}$ dont nous avons parlé dans l'introduction. Il diffère par plusieurs aspects de celui défini dans [MR16]. On a apporté ces modifications afin d'alléger les hypothèses du Théorème 2.3.1, en assurant une meilleure factorisation du polynôme de Dirichlet. Pour mieux appréhender les notations à venir et le théorème suivant, il est bon d'avoir en tête les faits informels suivants. La fonction δ représente la densité de l'ensemble $\mathcal{A}$ qu'on étudie. On s'attend, de manière générale, à avoir un nombre d'entiers $n \leqslant X$, tels que $n \in \mathcal{A}$ et $n+1 \in \mathcal{A}$, qui soit $\ll \delta^2 X$. La fonction ϑ quantifie alors la perte que l'on a, s'il en est, sur cette dernière estimation. Pour une première approche, on peut considérer $\vartheta(X) = 1$, ce qui revient à ne supposer aucune perte. La variable h représente tout simplement la taille des intervalles dans lesquels on veut avoir des estimations asymptotiques. Pour $1 \leqslant P \leqslant Q \leqslant X$, la proportion des entiers inférieurs à X n'admettant aucun facteur premier dans l'intervalle $]P, Q]$ est $\ll (\log P)/\log Q$. On espère avoir une majoration analogue pour un ensemble d'entiers pas trop erratique. Cependant, pour les entiers inférieurs à X ayant environ $\kappa \log_2 X$ facteurs premiers, la proportion est plutôt $\ll \big((\log P)/\log Q\big)^{\kappa}$. Si on étudie les entier ayant k facteurs premiers avec $k \asymp \log_2 X$, il existe donc un $r > 0$ fixé tel que l'inégalité précédente soit uniformément vérifiée en remplaçant κ par r. Cela garantit que l'ensemble $\mathcal{S}$ construit ci-dessous soit dense dans $\mathcal{A}$.

Soit $0 < r \leqslant 1$ et $0 < \varepsilon < 1/100$ fixés. Soit $X \geqslant 3$ un réel et δ, ϑ des fonctions vérifiant

$$0 < \delta(X) \leqslant 1 \leqslant \vartheta(X) \leqslant \delta(X)^{-1}. \tag{2.3.4}$$

Pour $3 \leqslant h \leqslant X$, on considère $(P_j, Q_j, H_j)_{j \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}}$ et K des réels supérieurs à 20, vérifiant

$$\begin{cases} (\log_2 X)^2 \leqslant K \leqslant \sqrt{\log X}, & \\ Q_1 = \min\big(\delta(X)\vartheta(X)h, \mathrm{e}^K\big), & \\ \log Q_j = j^{(4j+2)/r}(\log_3 Q_1)^{2(j-1)}(\log Q_1), & (j \geqslant 2) \\ Q_1^{1/\log_3 Q_1} \leqslant P_1 \leqslant Q_1, & \\ \log P_j = j^{4j/r}(\log_3 Q_1)^{2(j-1)}(\log P_1), & (j \geqslant 2) \\ H_j = j^2 \min\big(P_1^{1/6-\varepsilon}(\log Q_1)^{-1/3}, \vartheta(X)(\log_2 Q_1)^2\big), & (j \geqslant 1) \\ \exp\big((\log X)^{2/3+\varepsilon}\big) \leqslant P_\infty \leqslant Q_\infty \leqslant \exp\big((\log X)^{1-\varepsilon}\big), & \\ \log P_\infty = o(\log Q_\infty), & \\ H_\infty = (\log_2 X)^2. & \end{cases} \tag{2.3.5}$$

On note que le choix de $\delta, \vartheta, h, K, P_1, P_\infty$ et Q_∞ détermine ce système en fonction de X. On définit $J := \max\big\{j \geqslant 1 : \quad Q_j \leqslant \mathrm{e}^K\big\}$. On a $P_1 < Q_1 < P_2 < \ldots < Q_J < P_\infty < Q_\infty$. On note alors, pour $j \in [1, J] \cup \{\infty\}$,

$$\begin{cases} \mathcal{I}_j := \big[\lfloor H_j \log P_j \rfloor, H_j \log Q_j\big], \\ \mathcal{S}_j := \displaystyle\bigcap_{v \in \mathcal{I}_j} \bigcap_{\substack{\mathrm{e}^{v/H_j} < p,q \leqslant \mathrm{e}^{(v+1)/H_j} \\ P_j < p,q \leqslant Q_j}} \big\{n \geqslant 1 : \quad \mu^2_{]P_j,Q_j]}\omega_{]P_j,Q_j]}(n) \geqslant 1,\ pq \nmid n\big\}. \end{cases} \tag{2.3.6}$$

On note que $\mathcal{S}_j$ est l'ensemble des entiers ayant au moins un facteur premier dans $]P_j, Q_j]$, et au plus un – avec multiplicité – dans chaque intervalle $\big]\mathrm{e}^{v/H_j}, \mathrm{e}^{(v+1)/H_j}\big] \cap]P_j, Q_j]$ pour $v \in \mathcal{I}_j$. Finalement, on note

$$\mathcal{S} := \bigcap_{j=1}^{J} \mathcal{S}_j \cap \mathcal{S}_\infty. \tag{2.3.7}$$

On note que l'on a $J \ll (\log K)/\log_2 K$, et donc $H_J \ll \vartheta(X)(\log K)^4$. Pour résumer, les entiers dans $\mathcal{S}$ ont au moins un facteur premier dans chacun des $]P_j, Q_j]$, mais pas de facteur carré dans ceux-ci. De plus, pour j fixé, ils n'ont pas deux facteurs premiers trop proches dans $]P_j, Q_j]$. De ces trois propriétés, la première est la plus importante, et apparaît déjà dans [MR16]. Les deux autres assurent une factorisation simplifiée du polynôme de Dirichlet – *cf.* Lemme 2.4.3 –, ce qui permet d'alléger les hypothèses du théorème suivant. Enfin, on note que l'on a facilement

$$\big|[X, 2X] \smallsetminus \mathcal{S}\big| \ll X \sum_{j \in [1,J] \cup \{\infty\}} \left(\frac{\log P_j}{\log Q_j} + \frac{1}{P_j} + \frac{\log\left(1 + \frac{\log Q_j}{\log P_j}\right)}{H_j} \right).$$

Théorème 2.3.1. *Soit $X \geqslant 3$ et $\mathcal{A}$ un ensemble pouvant dépendre de X. Soit $0 < r \leqslant 1$ et $0 < \varepsilon \leqslant 1/100$ fixés. Soit δ et ϑ des fonctions vérifiant* (2.3.4)*. Pour $3 \leqslant h \leqslant X$ on utilise les notations* (2.3.5), (2.3.6) *et la définition* (2.3.7) *de $\mathcal{S}$. Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ une fonction positive telle que pour $N \geqslant 1$ on ait $\sum_{1 \leqslant b \leqslant N} f(b) \ll N$. On suppose les huit conditions suivantes vérifiées :*

1. *D'une part, $\delta(X) \gg P_\infty^{-(\log X)^{-2/3-\varepsilon/2}}$. D'autre part, pour $T_0 := T_0(X) > 1$ tel que $1/T_0 + \vartheta(X)^2(\log X)^5/T_0^2 = o\big(\delta(X)^2\big)$, $X/2 < x \leqslant 2X$ et $X/T_0^3 < y \leqslant 2X$, on a*
$$\big|\mathcal{A} \cap [x, x+y]\,\big| = \delta(X) y \big(1 + o(1)\big). \tag{2.3.8}$$
2. (crible linéaire pour $\mathcal{A}$)
$$\big|(\mathcal{A} \smallsetminus \mathcal{S}) \cap [X, 2X]\big| \ll \delta(X) X \left\{ \sum_{j=1}^{J} \left(\left(\frac{\log P_j}{\log Q_j}\right)^r + \frac{1}{P_j} + \frac{\log\left(1 + \frac{\log Q_j}{\log P_j}\right)}{H_j} \right) + o(1) \right\}.$$
3. (crible binaire pour $\mathcal{A}$) *Pour tout $X/2 \leqslant x \leqslant 2X$, tout $1 \leqslant z \leqslant (\log_2 X)^2 (\log K)^4 \vartheta(X)$ et tout $1 \leqslant b \leqslant X^2$, on a*
$$\left| \{n \in \mathcal{A} : \quad n + b \in \mathcal{A}\} \cap \left[x, x + \frac{x}{z}\right] \right| \ll f(b) \delta(X)^2 \frac{x}{z} \vartheta(X). \tag{2.3.9}$$
4. (bonne factorisation) *Pour tout $j \in [1, J] \cup \{\infty\}$ et tous $p, q \in\,]P_j, Q_j]$, pour tout $m \geqslant 1$, on a*
$$qm \in \mathcal{A} \cap \mathcal{S} \text{ et } p \nmid m \Longrightarrow pm \in \mathcal{A}.$$
5. (crible pour $\mathcal{A}'$) *On définit $\mathcal{A}'$ comme l'ensemble de tous les quotients $m = n/p$ pour $n \in \mathcal{A} \cap \mathcal{S} \cap [X, 2X]$ et $p \in \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant J}]P_j, Q_j]$ tels que $p | n$. Alors pour tout $1 \leqslant z \leqslant \mathrm{e}^K$ et tout $1 \leqslant b \leqslant X^2$, on a*
$$\left| \mathcal{A}' \cap \left[\frac{X}{z}, 2\frac{X}{z}\right] \right| \ll \delta(X) \frac{X}{z},$$
$$\left| \left\{n \in \mathcal{A}' : \quad n + b \in \mathcal{A}'\right\} \cap \left[\frac{X}{z}, 2\frac{X}{z}\right] \right| \ll f(b) \delta(X)^2 \frac{X}{z} \vartheta(X). \tag{2.3.10}$$
6. (crible pour $\mathcal{A}'$, suite) *Soit $1 \leqslant j \leqslant J - 1$. Soit $Y_1 \in [P_j, Q_j]$ et $Y_2 \in [P_{j+1}, Q_{j+1}]$. On pose $\ell := \lceil (\log Y_2)/\log Y_1 \rceil$. Alors pour tous $p_1, \ldots, p_\ell \sim Y_1$, et tout $1 \leqslant b \leqslant X^2$, on a*
$$\left| \left\{ m \sim \frac{X}{Y_2} : \quad m \in \mathcal{A}',\ p_1 \cdots p_\ell m + b \in \bigcup_{q_1, \ldots, q_\ell \sim Y_1} q_1 \cdots q_\ell \mathcal{A}' \right\} \right|$$
$$\ll f(b) \delta(X)^2 \frac{X}{Y_2} (\ell!)^{O(1)} \vartheta(X). \tag{2.3.11}$$

7. $\vartheta(X) = o\big(P_1^{1/6-2\varepsilon}\big)$,

8. $\log P_1 = o(\log Q_1)$.

Alors on a

$$\big|\mathcal{A} \cap [x, x+h]\big| = \delta(X)h\,(1 + o(1))\,,$$

pour presque tout $x \sim X$*, dès que* $\delta(X)h$ *tend vers l'infini.*

Remarques :

(i) Lorsque $\vartheta(X) = 1$, la condition 7 est vérifiée automatiquement. C'est ce que l'on espère en général.

(ii) Si $\delta(X) \gg 1$, les points 2, 3, 5 et 6 sont directement vérifiés avec $\vartheta(X) = 1$, et donc aussi le point 7. Il suffit donc essentiellement que $\mathcal{A}$ admette une bonne factorisation.

(iii) En prenant $\vartheta(X) = \delta(X)^{-1}$, les inégalités (2.3.9), (2.3.10) et (2.3.11) sont automatiquement vérifiées avec $f = 1$. Ce cas revient à ignorer toute la partie de crible binaire, et donc finalement à utiliser le Lemme 2.2.2 au lieu du Lemme 2.2.3. On retrouve un résultat qui est à la portée de la méthode initiale de Matomäki & Radziwiłł.

(iv) Dans l'hypothèse 6, on a $\ell \ll J^{6/r}(\log_3 Q_1)^3 \ll (\log K)^{O(1)}$.

(v) Le point 4 revient à dire que dans un intervalle $[P_j, Q_j]$, tous les facteurs premiers « jouent le même rôle ». On peut alors alléger cette hypothèse en triant, dans chaque $[P_j, Q_j]$, les p selon leur rôle. Par exemple, au lieu de s'intéresser aux entiers n tels que $\omega(n) = k$, on peut étudier ceux vérifiant $\tilde{\omega}(n) = 3k/2$, où $\tilde{\omega}$ est la fonction additive valant 1 sur les puissance des nombres premiers congrus à 1 modulo 3, et 2 sur les puissances des autres nombres premiers. Notre méthode permettrait de traiter le cas des entiers représentables en somme de 2 carrés de cette manière.

2.4 Méthode de Matomäki-Radziwiłł adaptée

Dans la section précédente, on a introduit les notations et les modifications nécessaires pour étendre le raisonnement de Matomäki & Radziwiłł [MR16] à notre cadre d'étude. Le théorème ci-dessus est alors une conséquence de leur preuve, une fois adaptée au contexte.

2.4.1 Première simplification

Démonstration du Théorème 2.3.1. Soit $3 \leqslant h \leqslant X$ deux réels et $\mathcal{A}$ un ensemble d'entiers. On suppose qu'il existe des paramètres $r, \varepsilon, \delta, \vartheta, K, P_1, P_\infty$ et Q_∞ vérifiant les hypothèses du Théorème 2.3.1. Pour T_0 comme dans l'hypothèse 1, on pose $y_0 := X/T_0^3$. Avec (2.3.8), il suffit de démontrer que pour presque tout $x \sim X$, on a

$$\left|\frac{1}{h}\sum_{\substack{x<n\leqslant x+h\\ n\in\mathcal{A}}} 1 - \frac{1}{y_0}\sum_{\substack{x<n\leqslant x+y_0\\ n\in\mathcal{A}}} 1\right| = o\big(\delta(X)\big)$$

On remarque que cela est vrai directement lorsque $h > y_0$ d'après l'hypothèse 1. Il suffit donc de traiter le cas $h \leqslant y_0$. Pour cela, on travaille sur un sous-ensemble dense de $\mathcal{A}$, d'entiers qui admettent une certaine factorisation, ce qui nous permet d'utiliser la méthode de Matomäki & Radziwiłł. On parvient alors à démontrer le résultat suivant.

Proposition 2.4.1. *Avec les notations ci-dessus, et sous les hypothèses 1 à 6 du Théorème* 2.3.1*, lorsque $h \leqslant y_0$ et Q_1 est suffisamment grand, on a*

$$\frac{1}{X}\int_X^{2X}\left|\frac{1}{h}\sum_{\substack{x<n\leqslant x+h\\ n\in\mathcal{A}\cap\mathcal{S}}}1-\frac{1}{y_0}\sum_{\substack{x<n\leqslant x+y_0\\ n\in\mathcal{A}\cap\mathcal{S}}}1\right|^2\mathrm{d}x \ll \delta(X)^2\left(\frac{\vartheta(X)}{H_1}+o(1)\right).$$

quand X tend vers l'infini.

On démontre cette proposition à la sous-section 2.4.2. Vérifions dans un premier temps qu'elle implique bien le Théorème 2.3.1. En se rappelant que $h \leqslant y_0$, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{X}\int_X^{2X}&\left|\frac{1}{h}\sum_{\substack{x<n\leqslant x+h\\ n\in\mathcal{A}}}1-\frac{1}{y_0}\sum_{\substack{x<n\leqslant x+y_0\\ n\in\mathcal{A}}}1\right|\mathrm{d}x\\ &\leqslant \frac{1}{X}\int_X^{2X}\left|\frac{1}{h}\sum_{\substack{x<n\leqslant x+h\\ n\in\mathcal{A}\cap\mathcal{S}}}1-\frac{1}{y_0}\sum_{\substack{x<n\leqslant x+y_0\\ n\in\mathcal{A}\cap\mathcal{S}}}1\right|\mathrm{d}x+\frac{2}{X}\sum_{\substack{X<n\leqslant 2X+y_0\\ n\in\mathcal{A}\smallsetminus\mathcal{S}}}1.\end{aligned}$$

Grâce à la Proposition 2.4.1 et à l'hypothèse 7, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient que l'intégrale de droite est un $o\big(\delta(X)\big)$. Par ailleurs, on a

$$\frac{1}{X}\sum_{\substack{X<n\leqslant 2X+y_0\\ n\in\mathcal{A}\smallsetminus\mathcal{S}}}1 \leqslant \frac{1}{X}\sum_{\substack{n\sim X\\ n\in\mathcal{A}\smallsetminus\mathcal{S}}}1+\frac{y_0}{X}\leqslant\frac{1}{X}\big|\,(\mathcal{A}\smallsetminus\mathcal{S})\cap[X,2X]\,\big|+o\big(\delta(X)\big)$$

avec l'hypothèse 1. On déduit des l'hypothèses 2 et 8 que cette dernière quantité est $o\big(\delta(X)\big)$. Ainsi,

$$\frac{1}{X}\int_X^{2X}\left|\frac{1}{h}\sum_{\substack{x<n\leqslant x+h\\ n\in\mathcal{A}}}1-\frac{1}{y_0}\sum_{\substack{x<n\leqslant x+y_0\\ n\in\mathcal{A}}}1\right|\mathrm{d}x=o\big(\delta(X)\big).$$

On en déduit aisément le Théorème 2.3.1. □

Afin de démontrer la Proposition 2.4.1, on utilise la borne de Parseval pour réduire le problème à la majoration d'une intégrale faisant inetervenir le polyôme de Dirichlet associé à l'ensemble $\mathcal{A}\cap\mathcal{S}$.

2.4.2 Utilisation de la borne de Parseval

Grâce au Lemme 2.2.1, la Proposition 2.4.1 se déduit facilement de la proposition suivante. Avec les notations introduites précédemment, on pose

$$B(s):=\sum_{\substack{n\sim X\\ n\in\mathcal{A}\cap\mathcal{S}}}\frac{1}{n^s}. \qquad (s\in\mathbb{C})$$

Proposition 2.4.2. *Sous les hypothèses 1 à 6 du Théorème* 2.3.1*, si $T_0 < T \leqslant X$ et Q_1 est suffisamment grand, on a*

$$\begin{aligned}\int_{T_0}^{T}&|B(1+it)|^2\,\mathrm{d}t\\ &\ll\left(\frac{TQ_1}{\delta(X)X}+\vartheta(X)\right)\frac{\delta(X)^2}{H_1}+H_\infty^2(\log X)^{3-\varepsilon}\left(\frac{(\log X)^2}{T_0^2}+P_\infty^{-(\log X)^{-2/3-\varepsilon/3}}\right)\end{aligned}$$

lorsque X tend vers l'infini.

En effet, la borne fournie par le Lemme 2.2.2 est directement suffisante si $T > X$. Il reste désormais à appliquer la méthode de découpage et de majoration des polynômes de Dirichlet permettant de prouver cette proposition.

2.4.3 Factorisation du polynôme de Dirichlet associé à $\mathcal{A} \cap \mathcal{S}$

La factorisation du polynôme B s'effectue à l'aide du lemme suivant.

Lemme 2.4.3. *Avec les notations précédentes, lorsque $\mathcal{A}$ vérifie l'hypothèse 4 du Théorème* 2.3.1*, et que X est suffisamment grand, on a pour tout $j \in [1, J] \cup \{\infty\}$ et tout $s \in \mathbb{C}$,*

$$B(s) = \sum_{\substack{n \sim X \\ n \in \mathcal{A} \cap \mathcal{S}}} \frac{1}{n^s} = \sum_{v \in \mathcal{I}_j} Q_{v,H_j}(s) R_{v,H_j}(s) + N_{H_j}(s), \tag{2.4.12}$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned}
Q_{v,H_j}(s) &:= \sum_{\substack{\mathrm{e}^{v/H_j} < p \leqslant \mathrm{e}^{(v+1)/H_j} \\ P_j < p \leqslant Q_j}} \frac{1}{p^s}, \\
R_{v,H_j}(s) &:= \sum_{\substack{m \sim X\mathrm{e}^{-v/H_j} \\ m \in \mathcal{A}' \\ (m, \prod_{\mathrm{e}^{v/H_j} < p \leqslant \mathrm{e}^{(v+1)/H_j}} p) = 1}} \frac{1}{m^s} \frac{1}{\omega_{]P_j, Q_j]}(m) + 1}, \\
N_{H_j}(s) &:= \sum_{\substack{2X < n \leqslant 2X\mathrm{e}^{1/H_j} \\ n \in \mathcal{A} \cap \mathcal{S}}} \frac{c_{n,j}}{n^s},
\end{aligned}$$

pour certains complexes $c_{n,j}$ bornés en module par 1.

Démonstration. Dans un premier temps, on montre qu'il existe des complexes $c'_{n,j}$ tels que pour tout $s \in \mathbb{C}$,

$$\sum_{v \in \mathcal{I}_j} Q_{v,H_j}(s) R_{v,H_j}(s) = \sum_{n \in \mathcal{A} \cap \mathcal{S}} \frac{c'_{n,j}}{n^s}. \tag{2.4.13}$$

Soit $v \in \mathcal{I}_j$, puis p et m deux entiers apparaissant respectivement dans les sommes définissant Q_{v,H_j} et R_{v,H_j}. Par définition de $\mathcal{A}'$, il existe $n \in \mathcal{A} \cap \mathcal{S} \cap [X, 2X]$ et $q \in \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant J}]P_i, Q_i]$ tels que $m = n/q$. Alors $q \in \left[\mathrm{e}^{v/H_j}/2, 2\mathrm{e}^{v/H_j}\right]$ et donc, lorsque X est assez grand, on obtient $q \in]P_j, Q_j]$. Par ailleurs, $qm = n \in \mathcal{A} \cap \mathcal{S}$ et $p \nmid m$ par définition de R_{v,H_j}. On a alors $mp \in \mathcal{A}$ avec l'hypothèse 4. De plus, $p \in \mathcal{S}_j$ est premier avec $m \in \cap_{i \in [1,J] \cup \{\infty\},\ i \neq j} \mathcal{S}_i$, donc $pm \in \mathcal{S}$, ce qui fournit (2.4.13). Il est ensuite facile de voir que $X < pm \leqslant 2X\mathrm{e}^{1/H_j}$, et donc $c'_{n,j} = 0$ si $n \notin]X, 2X\mathrm{e}^{1/H_j}]$. On conclut alors en faisant l'observation suivante. Pour tout $X < n \leqslant 2X\mathrm{e}^{1/H_j}$, il y a au plus $\omega_{]P_j,Q_j]}(n)$ décompositions possibles de n sous la forme mp précédente, et il y en a exactement $\omega_{]P_j,Q_j]}(n)$ lorsque $n \sim X$. Donc $|c'_{n,j}| \leqslant 1$ et

$$\sum_{v \in \mathcal{I}_j} Q_{v,H_j}(s) R_{v,H_j}(s) = \sum_{\substack{n \sim X \\ n \in \mathcal{A} \cap \mathcal{S}}} \frac{1}{n^s} + \sum_{\substack{2X < n \leqslant 2X\mathrm{e}^{1/H_j} \\ n \in \mathcal{A} \cap \mathcal{S}}} \frac{c'_{n,j}}{n^s} = B(s) - N_{H_j}(s),$$

avec $c_{n,j} = -c'_{n,j}$ pour $2X < n \leqslant 2X\mathrm{e}^{1/H_j}$. □

2.4.4 Majoration de l'intégrale

Démonstration de la Proposition 2.4.2. Soit $T_0 < T \leqslant X$. On met en place un découpage de l'intervalle $[T_0, T]$. Soit, pour $1 \leqslant j \leqslant J$ (on rappelle que ε intervient dans la définition de $\mathcal{S}$),

$$\alpha_j := \frac{1}{4} - \varepsilon\left(1 + \frac{1}{2j}\right).$$

On a

$$\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\varepsilon = \alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_J \leqslant \frac{1}{4} - \varepsilon.$$

On écrit alors

$$[T_0, T] = \bigsqcup_{j=1}^{J} \mathcal{T}_j \sqcup \mathcal{U}, \tag{2.4.14}$$

où $t \in \mathcal{T}_j$ si j est le plus petit indice tel que pour tout $v \in \mathcal{I}_j$ on ait

$$\left|Q_{v,H_j}(1+it)\right| \leqslant \left(\mathrm{e}^{v/H_j}\right)^{-\alpha_j}, \tag{2.4.15}$$

et $t \in \mathcal{U}$ si t ne vérifie ces conditions pour aucun $1 \leqslant j \leqslant J$. On traite désormais les intégrales sur les $\mathcal{T}_j$ et sur $\mathcal{U}$ de manière assez similaire à [MR16].

Cas $j = 1$ **:** Avec le Lemme 2.4.3 et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\int_{\mathcal{T}_1} |B(1+it)|^2 \,\mathrm{d}t \ll |\mathcal{I}_1| \sum_{v \in \mathcal{I}_1} \int_{\mathcal{T}_1} |Q_{v,H_1}(1+it) R_{v,H_1}(1+it)|^2 \,\mathrm{d}t + \int_{\mathcal{T}_1} |N_{H_1}(1+it)|^2 \,\mathrm{d}t.$$

Avec le Lemme 2.2.3 et les hypothèses 1 et 3, on a

$$\int_{\mathcal{T}_1} |N_{H_1}(1+it)|^2 \,\mathrm{d}t \ll \left(\frac{T}{\delta(X)X} + \vartheta(X)\right) \frac{\delta(X)^2}{H_1}.$$

Par ailleurs, avec la définition de $\mathcal{T}_1$, le Lemme 2.2.3 et l'hypothèse 5, on a

$$\begin{aligned}
|\mathcal{I}_1| \sum_{v \in \mathcal{I}_1} \int_{\mathcal{T}_1} |Q_{v,H_1}(1+it) R_{v,H_1}(1+it)|^2 \,\mathrm{d}t &\ll |\mathcal{I}_1| \sum_{v \in \mathcal{I}_1} \mathrm{e}^{-2v\alpha_1/H_1} \left(\frac{T\mathrm{e}^{v/H_1}}{\delta(X)X} + \vartheta(X)\right) \delta(X)^2 \\
&\ll \left(\frac{TQ_1}{\delta(X)X} + \vartheta(X)\right) \delta(X)^2 H_1^2 (\log Q_1) P_1^{-2\alpha_1} \\
&\ll \left(\frac{TQ_1}{\delta(X)X} + \vartheta(X)\right) \frac{\delta(X)^2}{H_1}.
\end{aligned}$$

Cas $2 \leqslant j \leqslant J$ **:** Pour tout $t \in \mathcal{T}_j$, il existe au moins un $u \in \mathcal{I}_{j-1}$ tel que (2.4.15) ne soit pas vérifiée, et donc $\left|Q_{u,H_{j-1}}(1+it)(\mathrm{e}^{u/H_{j-1}})^{2\alpha_{j-1}}\right| > 1$. On décompose donc $\mathcal{T}_j$ selon ces indices u, de la manière suivante,

$$\mathcal{T}_j = \bigcup_{u \in \mathcal{I}_{j-1}} \mathcal{T}_{j,u}.$$

De la même manière que précédemment, on a

$$\int_{\mathcal{T}_j} |B(1+it)|^2 \,\mathrm{d}t \ll |\mathcal{I}_j| \sum_{v \in \mathcal{I}_j} \int_{\mathcal{T}_j} \left|Q_{v,H_j}(1+it) R_{v,H_j}(1+it)\right|^2 \mathrm{d}t + \int_{\mathcal{T}_j} \left|N_{H_j}(1+it)\right|^2 \mathrm{d}t,$$

où la dernière intégrale se majore

$$\int_{\mathcal{T}_j} \left|N_{H_j}(1+it)\right|^2 \mathrm{d}t \ll \left(\frac{T}{\delta(X)X} + \vartheta(X)\right) \frac{\delta(X)^2}{H_j}.$$

En prenant le terme maximal dans la somme, il existe $u_{j-1} \in \mathcal{I}_{j-1}$ et $v_j \in \mathcal{I}_j$ tels que

$$|\mathcal{I}_j| \sum_{v \in \mathcal{I}_j} \int_{\mathcal{T}_j} \left|Q_{v,H_j}(1+it) R_{v,H_j}(1+it)\right|^2 \mathrm{d}t$$
$$\ll |\mathcal{I}_j|^2 \, |\mathcal{I}_{j-1}| \, \mathrm{e}^{-2v_j\alpha_j/H_j} \int_{\mathcal{T}_{j,u_{j-1}}} \left|R_{v_j,H_j}(1+it)\right|^2 \mathrm{d}t.$$

Si l'on appliquait directement le Lemme 2.2.3 à la dernière intégrale, le polynôme R_{v_j,H_j} étant trop court, on perdrait un facteur potentiellement de la taille de Q_j. Cette perte serait trop importante, à moins que T soit assez petit, ce qui reviendrait à s'intéresser à de plus grands intervalles dans le problème initial. Pour contourner ce problème, Matomäki & Radziwiłł utilisent la définition de $\mathcal{T}_{j,u}$ afin d'agrandir artificiellement la taille du polynôme dans l'intégrale. Plus précisément, pour tout $\ell \geqslant 1$ on a

$$\int_{\mathcal{T}_{j,u_{j-1}}} \left|R_{v_j,H_j}(1+it)\right|^2 \mathrm{d}t$$
$$\leqslant \mathrm{e}^{2\ell u_{j-1}\alpha_{j-1}/H_{j-1}} \int_{\mathcal{T}_{j,u_{j-1}}} \left|Q_{u_{j-1},H_{j-1}}(1+it)^\ell R_{v_j,H_j}(1+it)\right|^2 \mathrm{d}t.$$

On pose $Y_1 := \mathrm{e}^{u_{j-1}/H_{j-1}}$, $Y_2 := \mathrm{e}^{v_j/H_j}$. Avec $\ell := \lceil (\log Y_2)/\log Y_1 \rceil = \lceil v_j H_{j-1}/(u_{j-1}H_j) \rceil$, le polynôme résultant est supporté dans un intervalle de taille assez proche de X. Pour être plus précis, pour tout $s \in \mathbb{C}$, on a

$$Q_{u_{j-1},H_{j-1}}(s)^\ell R_{v_j,H_j}(s) = \sum_{X \leqslant n \leqslant 2^{\ell+1}Y_1X} \frac{a_n}{n^s}$$

pour certains complexes vérifiant $|a_n| \leqslant (\ell+1)!$, puisque tout $m \in \mathcal{A}'$ a au plus un seul facteur premier dans l'intervalle $\left]\mathrm{e}^{u_{j-1}/H_{j-1}}, \mathrm{e}^{(u_{j-1}+1)/H_{j-1}}\right]$. Par ailleurs, pour que a_n soit non nul, il faut au moins que n soit de la forme $p_1 \cdots p_\ell m$ avec $p_i \sim Y_1$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant \ell$, et $m \in \mathcal{A}'$ vérifie $m \sim X/Y_2$. Avec le Lemme 2.2.3, on a donc

$$\int_{\mathcal{T}_{j,u_{j-1}}} \left|Q_{u_{j-1},H_{j-1}}(1+it)^\ell R_{v_j,H_j}(1+it)\right|^2 \mathrm{d}t \ll T\,(\ell+1)!^2 \sum_{p_1,\ldots,p_\ell \sim Y_1} \frac{1}{(p_1\cdots p_\ell)^2}$$
$$\times \left\{ \sum_{\substack{m \sim X/Y_2 \\ m \in \mathcal{A}'}} \frac{1}{m^2} + \sum_{1 \leqslant b \leqslant 2^{\ell+1}Y_1X/T} \sum_{\substack{m \sim X/Y_2 \\ m \in \mathcal{A}' \\ p_1\cdots p_\ell m + b \in \bigcup_{q_1,\ldots,q_\ell \sim Y_1} q_1\cdots q_\ell \mathcal{A}'}} \frac{1}{m^2} \right\}.$$

En utilisant les hypothèses 5 et 6, on obtient alors

$$\int_{\mathcal{T}_{j,u_{j-1}}} \left|Q_{u_{j-1},H_{j-1}}(1+it)^\ell R_{v_j,H_j}(1+it)\right|^2 \mathrm{d}t \ll \left(\frac{T}{\delta(X)X} + \vartheta(X)\right) \delta(X)^2 \, (\ell!)^{O(1)} \, Y_1.$$

On a donc

$$|\mathcal{I}_j| \sum_{v\in\mathcal{I}_j} \int_{\mathcal{T}_j} \left|Q_{v,H_j}(1+it)R_{v,H_j}(1+it)\right|^2 \mathrm{d}t$$
$$\ll \left(\frac{T}{\delta(X)X} + \vartheta(X)\right) \delta(X)^2 \left(\ell!\right)^{O(1)} |\mathcal{I}_j|^2 \, |\mathcal{I}_{j-1}| \, Q_{j-1}^{1+2\alpha_{j-1}} \mathrm{e}^{-2(\alpha_j-\alpha_{j-1})v_j/H_j}. \quad (2.4.16)$$

Par ailleurs, on a

$$\ell \log \ell \leqslant \frac{v_j}{H_j} \frac{\log_2 Q_j}{\log P_{j-1} - 1} + \log_2 Q_j + 1.$$

Ainsi, puisque $\alpha_j - \alpha_{j-1} \geqslant \varepsilon/(2j^2)$, lorsque Q_1 est suffisamment grand, uniformément pour $2 \leqslant j \leqslant J$, le produit des termes après $\delta(X)^2$ dans (2.4.16) est

$$\ll H_j^2 (\log Q_j)^{O(1)} H_{j-1} (\log Q_{j-1}) Q_{j-1}^{1+2\alpha_{j-1}} \exp\left(-\frac{v_j}{H_j}\left(\frac{\varepsilon}{j^2} - O\left(\frac{\log_2 Q_j}{\log P_{j-1} - 1}\right)\right)\right)$$
$$\ll j^6 P_1^{1/2} Q_{j-1}^{O(1)} \exp\left(-\frac{v_j}{H_j}\left(\frac{\varepsilon}{j^2} - O\left(\frac{\log_2 Q_j}{\log P_{j-1} - 1}\right)\right)\right)$$
$$\ll j^6 P_1^{1/2} Q_{j-1}^{O(1)} P_j^{-\varepsilon/(2j^2)} \ll \frac{1}{j^2 P_1} \ll \frac{1}{j^2 H_1}.$$

Finalement, on a

$$\sum_{j=2}^{J} \int_{\mathcal{T}_j} |B(1+it)|^2 \, \mathrm{d}t \ll \left(\frac{T}{\delta(X)X} + \vartheta(X)\right) \frac{\delta(X)^2}{H_1}.$$

Comme pour le cas $j = 1$, l'hypothèse 7 donne alors une bonne majoration.

Cas de $\mathcal{U}$: Cette fois, on écrit

$$\int_{\mathcal{U}} |B(1+it)|^2 \, \mathrm{d}t \ll |\mathcal{I}_\infty| \sum_{v\in\mathcal{I}_\infty} \int_{\mathcal{U}} |Q_{v,H_\infty}(1+it)R_{v,H_\infty}(1+it)|^2 \, \mathrm{d}t + \int_{\mathcal{U}} |N_{H_\infty}(1+it)|^2 \, \mathrm{d}t.$$

De manière analogue aux points précédents,

$$\int_{\mathcal{U}} |N_{H_\infty}(1+it)|^2 \, \mathrm{d}t \ll \left(\frac{T}{\delta(X)X} + \vartheta(X)\right) \frac{\delta(X)^2}{H_\infty}.$$

Soit $u \in \mathcal{I}_\infty$ un indice maximisant l'intégrale dans la somme précédente. Soit $\mathcal{T} \subset \mathcal{U}$ un ensemble 1-espacé tel que l'on ait

$$\int_{\mathcal{U}} |Q_{u,H_\infty}(1+it)R_{u,H_\infty}(1+it)|^2 \, \mathrm{d}t \ll \sum_{t\in\mathcal{T}} |Q_{u,H_\infty}(1+it)R_{u,H_\infty}(1+it)|^2 .$$

Avec le Lemme 2.2.6, pour tout $t \in \mathcal{T}$, on a

$$Q_{u,H_\infty}(1+it) \ll \frac{\log X}{T_0} + P_\infty^{-(\log X)^{-2/3-\varepsilon/3}}.$$

On a alors

$$|\mathcal{I}_\infty| \sum_{v\in\mathcal{I}_\infty} \int_{\mathcal{U}} |Q_{v,H_\infty}(1+it)R_{v,H_\infty}(1+it)|^2 \, \mathrm{d}t$$
$$\ll H_\infty^2 (\log Q_\infty)^2 \left(\frac{(\log X)^2}{T_0^2} + P_\infty^{-(\log X)^{-2/3-\varepsilon/3}}\right) \sum_{t\in\mathcal{T}} |R_{u,H_\infty}(1+it)|^2$$

En majorant trivialement la dernière somme avec le Lemme 2.2.4, on trouve

$$\sum_{t\in\mathcal{T}} |R_{u,H_\infty}(1+it)|^2 \ll \left(\frac{|\mathcal{T}|\sqrt{T}Q_\infty}{X}+1\right)(\log X) \ll \log X,$$

où la dernière inégalité est obtenue grâce au Lemme 2.2.5, en se rappelant la définition de $\mathcal{U}$ et le fait que $T \leqslant X$. On atteint ainsi la conclusion désirée. □

2.5 Application aux entiers ayant $k \asymp \log_2 X$ facteurs premiers

Dans cette section, on démontre le Théorème 2.1.1. Pour cela, on commence par énoncer quelques propriétés classiques des entiers ayant exactement k facteurs premiers. On démontre ensuite un théorème d'indépendance entre $\omega(a_1n+b_1)$ et $\omega(a_2n+b_2)$ à la sous-section 2.5.2. On applique enfin le Théorème 2.3.1.

Pour $x \geqslant 3$ et $k \geqslant 1$, on rappelle les notations

$$\delta_k(x) := \lambda(\kappa)\frac{(\log_2 x)^{k-1}}{(\log x)(k-1)!}, \qquad \kappa := \frac{k-1}{\log_2 x},$$

où

$$\lambda(z) := \frac{1}{\Gamma(z+1)}\prod_{p\geqslant 2}\left(1+\frac{z}{p-1}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)^z. \tag{2.5.17}$$

En particulier, lorsque $0 < r < R$ sont fixés et $r < \kappa \leqslant R$, on a

$$\delta_k(x) \asymp \frac{1}{(\log x)^{Q(\kappa)}\sqrt{\log_2 x}}, \tag{2.5.18}$$

où $Q(\kappa) := \kappa\log\kappa - \kappa + 1$.

2.5.1 Propriétés classiques

Lemme 2.5.1. *Pour tout $R > 0$ fixé, il existe une constante $c = c(R) > 0$ vérifiant l'énoncé suivant. Soit $A, \beta_1 > 0$ et $0 < \beta_2 < 2$ fixés. Soit, pour $x \geqslant 3$, $y = y(x) \geqslant 3$ tel que $\log_2 y \leqslant A\sqrt{\log_2 x}$. Uniformément pour $x \geqslant 3$, $x^{1-c/\log y} < x' \leqslant x$, $1 \leqslant k \leqslant R\log_2 x$, et f une fonction multiplicative telle que*

$$0 \leqslant f(p^\nu) \leqslant \beta_1\beta_2^{\nu-1}, \qquad (p \geqslant 2,\ \nu \geqslant 1)$$

et $f(p^\nu) = 1$ dès que $p > y$, on a

$$\sum_{\substack{x<n\leqslant x+x'\\ n\in\mathcal{E}_k}} f(n) = \delta_k(x)x'\prod_{p\leqslant y}\frac{1+\kappa\sum_{\nu=1}^\infty \frac{f(p^\nu)}{p^\nu}}{1+\frac{\kappa}{p-1}}\left\{1+O\left(\frac{k(\log_2 y)^2}{(\log_2 x)^2}\right)\right\}. \tag{2.5.19}$$

En particulier, uniformément pour $x^{1-c/2} < x' \leqslant x$ et $1 \leqslant k \leqslant R\log_2 x$, on a

$$\pi_k(x+x') - \pi_k(x) = \delta_k(x)x'\left(1+o(1)\right),$$

lorsque x tend vers l'infini.

Dans le cas $x' = x$, ce lemme est énoncé sans démonstration par Tenenbaum [Ten00], comme une conséquence facile de la méthode de Selberg-Delange. On poursuit ici cette idée, en utilisant les travaux de Cui & Wu [CW14], qui ont adapté la méthode de Selberg-Delange aux petits intervalles.

Démonstration. On suppose donnés les paramètres de l'énoncé. Sans perte de généralité, on suppose $R, \beta_2 > 1$. On note que pour tout $\sigma > (\log \beta_2)/\log 2$, on a

$$\sum_{\nu \geqslant 1} \frac{f(p^\nu)}{p^{\sigma\nu}} \leqslant \frac{\beta_1}{p^\sigma - \beta_2} \ll \frac{1}{p^\sigma}.$$

Pour $|z| \leqslant R$ et $0 \leqslant t' \leqslant t$, on pose

$$S(t, t') := \sum_{t < n \leqslant t+t'} f(n) z^{\omega(n)}.$$

Uniformément pour $|z| \leqslant R$, on estime $S(x, x')$ pour ensuite démontrer le lemme via la formule de Cauchy. Pour $z \in \mathbb{C}$, on définit la fonction multiplicative τ_z sur les puissances de nombres premiers par

$$\tau_z(p^\nu) := \binom{z+\nu-1}{\nu},$$

de sorte que pour tout $s \in \mathbb{C}$ de partie réelle $\sigma > 1$ on ait

$$\zeta(s)^z = \prod_{p \geqslant 2} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-z} = \sum_{n \geqslant 1} \frac{\tau_z(n)}{n^s}.$$

On définit alors implicitement la fonction multiplicative g_z par l'égalité de convolution

$$f z^{\omega(\cdot)} = \tau_z * g_z. \tag{2.5.20}$$

Pour $\sigma > \max\big((\log \beta_2)/\log 2, 1/2\big)$, on a donc

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{g_z(n)}{n^s} = \prod_{p \geqslant 2} \left(1 + z \sum_{\nu \geqslant 1} \frac{f(p^\nu)}{p^{s\nu}}\right) \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^z,$$

et

$$g_z = f z^{\omega(\cdot)} * \tau_{-z}.$$

En particulier, $g_z(p) = 0$ lorsque $p > y$. Soit $\alpha := c_1/\log y$ où $c_1 > 0$ est une constante suffisamment petite pour que $2^{1-\alpha} > \beta_2$ pour tout x. On remarque tout de suite que $\log y = o\big((\log x)^{o(1)}\big)$, et que pour tous $p \geqslant 2, \nu \geqslant 1$, on a

$$|g_z(p^\nu)| \ll \beta_2^\nu.$$

Ainsi, uniformément pour tout $t \geqslant 1$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{d > t} \frac{|g_z(d)|}{d} &\ll t^{-\alpha} \prod_{2 \leqslant p \leqslant y} \left(1 + \sum_{\nu \geqslant 1} \frac{|g_z(p^\nu)|}{p^{(1-\alpha)\nu}}\right) \prod_{p > y} \left(1 + \sum_{\nu \geqslant 2} \frac{|g_z(p^\nu)|}{p^{(1-\alpha)\nu}}\right) \\ &\ll \exp\left(-c_1 \frac{\log t}{\log y}\right) (\log x)^{o(1)}. \end{aligned} \tag{2.5.21}$$

Soit $c_2 < 1$ une constante suffisamment petite et $w := x^{c_2}$. En définissant

$$S_1(z) := \sum_{d \leqslant w} g_z(d) \sum_{x/d < m \leqslant (x+x')+d} \tau_z(m),$$
$$S_2(z) := \sum_{w < d \leqslant 2x} g_z(d) \sum_{x/d < m \leqslant (x+x')+d} \tau_z(m),$$

on a

$$S(x, x') = \sum_{d \leqslant 2x} g_z(d) \sum_{x/d < m \leqslant (x+x')+d} \tau_z(m) = S_1(z) + S_2(z).$$

On majore $|S_2(z)|$ avec la méthode de Rankin. On a

$$\begin{aligned} |S_2(z)| &\leqslant \sum_{w < d \leqslant 2x} |g_z(d)| \sum_{x/d < m \leqslant (x+x')+d} |\tau_z(m)| \frac{2x}{dm} \\ &\ll x(\log x)^R \sum_{d > w} \frac{|g_z(d)|}{d} \\ &\ll x(\log x)^{R+o(1)} \exp\left(-c_1 c_2 \frac{\log x}{\log y}\right). \end{aligned} \tag{2.5.22}$$

La dernière inégalité est obtenue en utilisant (2.5.21). Lorsque les constantes c_1, c_2 puis c sont suffisamment petites, avec [CW14, th. 1.1], uniformément pour $|z| \leqslant R$ et $1 \leqslant d \leqslant w$, on a

$$\sum_{x/d < m \leqslant (x+x')+d} \tau_z(m) = \frac{x'}{d} \left(\log \frac{x}{d}\right)^{z-1} \left(\frac{1}{\Gamma(z)} + O\left(\frac{1}{\log x}\right)\right).$$

Il s'ensuit

$$S_1(z) = x'(\log x)^{z-1} \sum_{d \leqslant w} \frac{g_z(d)}{d} \left(1 - \frac{\log d}{\log x}\right)^{z-1} \left(\frac{1}{\Gamma(z)} + O\left(\frac{1}{\log x}\right)\right).$$

Soit $w' := y^{(\log_2 x)/c_1}$. On traite la somme ci-dessus en séparant les $d \leqslant w'$, pour lesquels $\big(1 - (\log d)/\log x\big)^{z-1} = 1 + O\big((\log x)^{-1+o(1)}\big)$, des entiers d tels que $w' < d \leqslant w$. Ce faisant et en utilisant (2.5.21), on obtient

$$S_1(s) = x'(\log x)^{z-1} \left(\frac{1}{\Gamma(z)} \sum_{d \leqslant w'} \frac{g_z(d)}{d} + O\left(\frac{1}{(\log x)^{1-o(1)}}\right)\right).$$

Finalement, en utilisant de nouveau (2.5.21) pour éliminer la condition $d \leqslant w'$, puis (2.5.22) et l'hypothèse sur x', on a

$$S(x, x') = x'(\log x)^{z-1} \left\{\lambda_0(z) + O\left(\frac{1}{(\log x)^{1-o(1)}}\right)\right\}, \tag{2.5.23}$$

où l'on a posé $\lambda_0(z) := z h_0(z)$ et

$$h_0(z) := \frac{1}{\Gamma(z+1)} \prod_{p \geqslant 2} \left(1 + z \sum_{\nu \geqslant 1} \frac{f(p^\nu)}{p^\nu}\right) \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^z.$$

La fonction h_0 est entière. Pour $p \geqslant 2$, on pose

$$s_p := (p-1) \sum_{\nu \geqslant 1} \frac{f(p^\nu)}{p^\nu},$$

de sorte que $0 \leqslant s_p \leqslant \beta_1(p-1)/(p-\beta_2)$ pour $p \geqslant 2$, et $s_p = 1$ pour $p > y$. Un calcul élémentaire fournit d'une part

$$h_0(z) = \frac{1}{\Gamma(z+1)} \prod_{p \geqslant 2} \left(1 + \frac{s_p z}{p-1}\right) \left(1 - \frac{1}{p}\right)^z, \tag{2.5.24}$$

et d'autre part

$$h_0''(z) = h_0(z) \Bigg\{ \left(\frac{-\Gamma'}{\Gamma}\right)'(z+1) - \sum_{p \geqslant 2} \frac{s_p^2}{(p-1+s_p z)^2} + \left(\frac{-\Gamma'}{\Gamma}(z+1) + \sum_{p \geqslant 2} \frac{s_p}{p-1+s_p z} + \log\left(1 - \frac{1}{p}\right)\right)^2 \Bigg\}, \tag{2.5.25}$$

où tous les pôles du terme entre accolades sont compensés par les zéros de h_0. Avec (2.5.24), on voit que h_0 ne s'annule pas dans le demi-plan $\sigma > -(2-\beta_2)/\beta_1$. De (2.5.24) et (2.5.25), on déduit qu'uniformément pour tous $|z|, |z'| \leqslant R$ de partie réelle $\sigma, \sigma' \geqslant 0$, on a

$$\left|\frac{h_0(z)}{h_0(z')}\right| \ll (\log y)^{O(\sigma - \sigma')}, \tag{2.5.26}$$

$$|h_0''(z)| \ll (\log_2 y)^2 |h_0(z)|, \tag{2.5.27}$$

$$|h_0''(-z)| \ll (\log_2 y)^2 (\log y)^{O(\sigma)}. \tag{2.5.28}$$

D'après la formule de Cauchy, le terme de gauche de (2.5.19) vaut, pour tout $r > 0$,

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{|z|=r} \frac{S(x,x')}{z^{k+1}} \mathrm{d}z. \tag{2.5.29}$$

On estime cette intégrale avec l'expression (2.5.23) de $S(x,x')$, qui dépend bien sûr de la variable z. On commence par le terme principal. Dans le cas $k = 1$, l'intégrale du terme principal de $S(x,x')$ vaut $x' h_0(0)/\log x$, comme voulu. Dans le cas $k \geqslant 2$, avec $r := (k-1)/\log_2 x = \kappa$, on a

$$\int_{|z|=\kappa} \frac{(\log x)^z h_0(z)}{z^k} \mathrm{d}z = h_0(\kappa) \int_{|z|=\kappa} \frac{(\log x)^z}{z^k} \mathrm{d}z + \int_{|z|=\kappa} \frac{(\log x)^z (h_0(z) - h_0(r))}{z^k} \mathrm{d}z. \tag{2.5.30}$$

La première intégrale du membre de droite correspond au terme principal de (2.5.19), puisqu'avec (2.5.24), on a

$$h_0(\kappa) = \lambda(\kappa) \prod_{p \leqslant y} \frac{1 + \kappa \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{f(p^\nu)}{p^\nu}}{1 + \frac{\kappa}{p-1}},$$

où la fonction λ est définie par (2.5.17). Comme dans [Ten15, II.6.1], on remarque par un calcul explicite que

$$\int_{|z|=\kappa} (z-\kappa) \frac{(\log x)^z}{z^k} \mathrm{d}z = 0.$$

Ainsi, la dernière intégrale de (2.5.30) vaut

$$\int_{|z|=\kappa} \frac{(\log x)^z}{z^k} \left\{ h_0(z) - h_0(\kappa) - (z-\kappa) h_0'(\kappa) \right\} \mathrm{d}z.$$

Après utilisation de la formule de Taylor avec reste intégral, on majore

$$\int_0^1 (1-t) \int_{|z|=\kappa} \frac{(\log x)^z}{z^k} (z-\kappa)^2 h_0''(\kappa + t(z-\kappa)) \mathrm{d}z \mathrm{d}t.$$

Pour z de partie réelle $\sigma \leqslant 0$, on majore à l'aide de (2.5.26) avec $z' = 0$, (2.5.27) et (2.5.28), obtenant ainsi

$$\begin{aligned}\int_{\substack{|z|=\kappa \\ \sigma \leqslant 0}} \frac{(\log x)^z}{z^k} (z-\kappa)^2 h_0''(\kappa + t(z-\kappa)) \mathrm{d}z &\ll \kappa^{3-k} (\log_2 y)^2 (\log y)^{O(\kappa)} \\ &\ll \frac{(\log_2 x)^{k-1}}{(k-1)!} \frac{\mathrm{e}^{-k} k^{5/2} (\log_2 y)^2 (\log y)^{O(\kappa)}}{(\log_2 x)^2} \\ &\ll \frac{(\log_2 x)^{k-1}}{(k-1)!} h_0(\kappa) \frac{(\log_2 y)^2}{(\log_2 x)^2},\end{aligned}$$

où la dernière inégalité est obtenue en utilisant (2.5.26) avec $z = 0$. Lorsque $\sigma > 0$, on majore grâce à (2.5.27) puis (2.5.26), obtenant ainsi

$$\begin{aligned}&\int_{\substack{|z|=\kappa \\ \sigma > 0}} \frac{(\log x)^z}{z^k} (z-\kappa)^2 h_0''(\kappa + t(z-\kappa)) \mathrm{d}z \\ &\qquad \ll h_0(\kappa) (\log_2 y)^2 \int_{\substack{|z|=\kappa \\ \sigma > 0}} \frac{(\log x)^z}{z^k} (z-\kappa)^2 (\log y)^{O(\Re\mathfrak{e}(\kappa - z))} \mathrm{d}z \\ &\qquad \ll \frac{h_0(\kappa)(\log_2 y)^2}{\kappa^{k-3}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{(k-1)\cos\vartheta} \left|\mathrm{e}^{i\vartheta} - 1\right|^2 \mathrm{e}^{O((1-\cos\vartheta)\kappa \log_2 y)} \mathrm{d}\vartheta.\end{aligned}$$

La dernière intégrale, par changement de variable $\cos\vartheta = u$, est

$$\begin{aligned}&\ll \mathrm{e}^{k-1} \int_0^1 \mathrm{e}^{-(1-u)(k-1)(1+O(\log_2 y/\log_2 x))} \sqrt{1-u} \mathrm{d}u \\ &\ll \mathrm{e}^{k-1} (k-1)^{-3/2},\end{aligned}$$

la dernière inégalité étant obtenue en effectuant un second changement de variable, on posant $(1-u)(k-1) = v$. On obtient alors, uniformément pour $0 \leqslant t \leqslant 1$,

$$\int_{|z|=\kappa} \frac{(\log x)^z}{z^k} (z-\kappa)^2 h_0''(\kappa + t(z-\kappa)) \mathrm{d}z \ll \frac{(\log_2 x)^{k-1}}{(k-1)!} h_0(\kappa) \frac{k(\log_2 y)^2}{(\log_2 x)^2},$$

qui est convenable. En revenant à (2.5.29) puis (2.5.23), il nous reste à majorer

$$\int_{|z|=\kappa} \frac{(\log x)^{\Re\mathfrak{e}\, z}}{|z|^{k+1}} \mathrm{d}z,$$

ce qui correspond à (6.14) de [Ten15, II.6.1]. On a alors

$$\int_{|z|=\kappa} \frac{(\log x)^{\Re\mathfrak{e}\, z}}{|z|^{k+1}} \mathrm{d}z \ll \frac{(\log_2 x)^k}{k!},$$

ce qui nous permet de conclure.

□

Avant de démontrer le prochain lemme, on rappelle un cas particulier d'un théorème dû à Heath-Brown.

Théorème (Heath-Brown [HB88]). *Soit $\varepsilon : [2,+\infty[\to \mathbb{R}_+$. Uniformément pour $x \geqslant 2$ et $x^{7/12-\varepsilon(x)} < x' \leqslant x$, on a*

$$\pi(x+x') - \pi(x) = \frac{x'}{\log x}\left(1 + O\Big(\varepsilon(x)^4 + \frac{1}{\log x}\Big)\right).$$

Lemme 2.5.2. *Soit $R > 0$ fixé quelconque. Uniformément pour $x \geqslant 3$, $1 \leqslant k \leqslant R\log_2 x$, $x^{1-5/(12k)} < x' \leqslant x$ et $2 \leqslant P < Q \leqslant x$, on a*

$$\left|\left\{n \in]x, x+x'] \ : \quad \omega(n) = k,\ \Big(n, \prod_{P<p\leqslant Q} p\Big) = 1\right\}\right| \ll \delta_k(x) x' \left(\frac{\log P}{\log Q}\right)^{\kappa}.$$

De plus, lorsque $k = o\left(\sqrt{\log_2 x}\right)$, la constante implicite peut être remplacée par $1 + o(1)$.

Démonstration. La première partie de l'énoncé est une conséquence directe de [Ten00, lem. 1] dans le cas $x' = x$. Le même schéma de preuve fonctionne lorsque $x^{7/12} < x' \leqslant x$ avec le théorème de Heath-Brown ci-dessus. On traite maintenant le cas où $k = o\left(\sqrt{\log_2 x}\right)$. Le cas $k = 1$ est trivial. Soit désormais $k \geqslant 2$ tel que $k = o\left(\sqrt{\log_2 x}\right)$. Pour tout entier $n \in \mathcal{E}_k \cap]x, x+x']$, il existe $p^\nu \| n$ tel que $p^\nu > x^{1/k}$. Le cardinal qui nous intéresse est alors

$$\leqslant \frac{1}{(k-1)!} \sum_{\substack{p_1^{\nu_1},\dots,p_{k-1}^{\nu_{k-1}} \\ p_1^{\nu_1}\cdots p_{k-1}^{\nu_{k-1}} \leqslant 2x^{1-1/k} \\ p_i \notin]P,Q], \forall i \in [1,k-1]}} \sum_{x/(p_1^{\nu_1}\cdots p_{k-1}^{\nu_{k-1}}) < p_k^{\nu_k} \leqslant (x+x')/(p_1^{\nu_1}\cdots p_{k-1}^{\nu_{k-1}})} 1.$$

Pour tout $1 \leqslant t \leqslant x^{1-1/k}$, on a

$$\frac{1}{\log\left(\frac{x}{t}\right)} \leqslant \frac{1}{\log x}\left(1 + k\frac{\log t}{\log x}\right).$$

Ainsi, avec le théorème de Heath-Brown précédemment cité, lorsque x est suffisamment grand, il existe une constante $C > 0$ telle que l'on ait

$$\sum_{\frac{x}{p_1^{\nu_1}\cdots p_{k-1}^{\nu_{k-1}}} < p_k^{\nu_k} \leqslant \frac{x+x'}{p_1^{\nu_1}\cdots p_{k-1}^{\nu_{k-1}}}} 1 \leqslant \frac{x'}{p_1^{\nu_1}\cdots p_{k-1}^{\nu_{k-1}}}\left(\frac{1}{\log x} + 2k\frac{\log\left(p_1^{\nu_1}\cdots p_{k-1}^{\nu_{k-1}}\right)}{(\log x)^2} + \frac{Ck^2}{(\log x)^2}\right).$$

En posant

$$L_1 := \sum_{\substack{p^\nu \leqslant x \\ p \notin]P,Q]}} \frac{1}{p^\nu}, \qquad L_2 := \sum_{\substack{p^\nu \leqslant x \\ p \notin]P,Q]}} \frac{\log p^\nu}{p^\nu},$$

on obtient, lorsque x est suffisamment grand,

$$\left|\left\{n \in]x, x+x'] \ : \quad \omega(n) = k,\ \Big(n, \prod_{P<p\leqslant Q} p\Big) = 1\right\}\right| \leqslant \frac{x'}{(\log x)(k-1)!}\left(L_1^{k-1} + \frac{2k^2 L_1^{k-2} L_2}{\log x} + \frac{Ck^2 L_1^{k-1}}{\log x}\right).$$

Et on a

$$L_1 = \log_2 x\left(1 - \frac{\log\left(\frac{\log Q}{\log P}\right) + O(1)}{\log_2 x}\right), \qquad L_2 = \log x\left(1 - \frac{\log\left(\frac{Q}{P}\right) + O(1)}{\log x}\right),$$

ce qui permet de conclure par un simple calcul, en observant que pour les k considérés, $\delta_k(x) = (1+o(1))(\log_2 x)^{k-1}/\big((\log x)(k-1)!\big)$. $\square$

2.5.2 Crible bi-dimensionnel pour les entiers ayant k facteurs premiers

Étant donnés $\mathcal{P}$ un ensemble de nombres premier, $n \geqslant 1$ un entier, et $x, y \geqslant 1$ deux réels, on note

$$E(x) := 1 + \sum_{\substack{p \leqslant x \\ p \in \mathcal{P}}} \frac{1}{p}, \qquad n_y := \prod_{\substack{p^\nu \| n \\ p \leqslant y}} p^\nu. \tag{2.5.31}$$

On définit $\mathbb{N}_{\mathcal{P}} := \{n \geqslant 1 : \quad p|n \Rightarrow p \in \mathcal{P}\}$, l'ensemble des entiers ayant tous leurs facteurs premiers dans $\mathcal{P}$. Étant donnés a_1, a_2, b_1, b_2 des entiers, on pose $\Delta_{\mathbf{a},\mathbf{b}} := a_1 b_2 - a_2 b_1$ pour la suite. Dans cette sous-section, on démontre le théorème suivant.

Théorème 2.5.3. *Soit $0 < \varepsilon \leqslant 1/3$ et $A \geqslant 2$ fixés. Il existe $K = K(A, \varepsilon) > 0$ une constante vérifiant l'énoncé suivant. Soit $\mathcal{P}$ un ensemble de nombres premiers. Soit $x \geqslant 2$ un réel et $1 \leqslant k_1, k_2 \leqslant AE(x)$ des entiers. Soit, pour $i \in \{1, 2\}$, $Q_i(X) = a_i X + b_i$ où $1 \leqslant a_i \leqslant x^A$, $0 \leqslant b_i \leqslant x^A$ et $(a_i, b_i) = 1$, tels que $\Delta_{\mathbf{a},\mathbf{b}} \neq 0$. Lorsque $x^\varepsilon < x' \leqslant x$ on a*

1. $\big|\big\{n \in]x, x + x'] : \quad \omega\big(Q_1(n)\big) = k_1,\ Q_1(n) \in \mathbb{N}_{\mathcal{P}}\big\}\big| \leqslant K \dfrac{a_1}{\varphi(a_1)} \dfrac{x'}{\log x} \dfrac{E(x)^{k_1 - 1}}{(k_1 - 1)!}$,
2. $\big|\big\{n \in]x, x + x'] : \quad \forall i \in \{1, 2\},\ \omega\big(Q_i(n)\big) = k_i,\ Q_i(n) \in \mathbb{N}_{\mathcal{P}}\big\}\big|$
$$\leqslant K \frac{|\Delta_{\mathbf{a},\mathbf{b}}|^K a_1 a_2}{\varphi(|\Delta_{\mathbf{a},\mathbf{b}}|)^K \varphi(a_1)\varphi(a_2)} \frac{x'}{(\log x)^2} \frac{E(x)^{k_1 + k_2 - 2}}{(k_1 - 1)!(k_2 - 1)!}.$$

Remarques :

(i) Lorsque $\mathcal{P}$ est l'ensemble de tous les nombres premiers, on a $\mathbb{N}_{\mathcal{P}} = \mathbb{N}$ et donc trivialement $Q_i(n) \in \mathbb{N}_{\mathcal{P}}$; et $E(x) = \log_2 x + O(1)$.

(ii) Pour se passer des conditions $(a_i, b_i) = 1$, il suffit de diviser a_i et b_i par leur pgcd, en remarquant qu'alors $\omega\big(Q_i(n)/(a_i, b_i)\big) \in \big\{k_i, k_i - 1, ..., k_i - \omega\big((a_i, b_i)\big)\big\}$.

(iii) La démonstration se généralise sans peine au cas de ℓ polynômes Q_i de degré 1 lorsque $\ell \geqslant 3$ est fixé.

On démontre d'abord deux lemmes.

Lemme 2.5.4. *Uniformément pour $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $y \geqslant 2$ et $\mathcal{P}$ un ensemble de nombres premiers, on a*

$$\sum_{\substack{p \leqslant y \\ p \in \mathcal{P}}} \frac{1}{p^{1-\alpha}} = E(y) + O\left(\frac{y^\alpha}{1 + \alpha \log y}\right).$$

Démonstration. Ce résultat découle du théorème des nombres premiers par sommation d'Abel, une fois que l'on a remarqué que

$$\left| \sum_{\substack{p \leqslant y \\ p \in \mathcal{P}}} \frac{1}{p^{1-\alpha}} - E(y) \right| \leqslant 1 + \sum_{p \leqslant y} \left(\frac{1}{p^{1-\alpha}} - \frac{1}{p} \right).$$

□

Lemme 2.5.5. *Soit $A, B > 1$ et $0 < \varepsilon < 1$ fixés. Il existe deux constantes $c = c(A, \varepsilon) > 0$ et $K = K(A, B, \varepsilon) > 0$ vérifiant l'énoncé suivant. Soit $x \geqslant 2$ et, pour $i \in \{1, 2\}$, $t_i \geqslant 1$ et $2 \leqslant z_i \leqslant y_i \leqslant x$. Soit de plus $Q_i(X) := a_i X + b_i$, où $1 \leqslant a_i \leqslant x^A$ et $0 \leqslant b_i \leqslant x^A$ sont tels*

que $(a_i, b_i) = 1$ *et* $\Delta_{\mathbf{a},\mathbf{b}} \neq 0$. *Pour* $x^\varepsilon < x' \leqslant x$, *on a*

$$\begin{aligned}\big|\big\{n \in]x, x+x'] : \quad \forall i \in \{1,2\},\ Q_i(n)_{y_i} > t_i,\ P^-\big(Q_i(n)\big) > z_i\big\}\big| \\ \leqslant K \frac{|\Delta_{\mathbf{a},\mathbf{b}}|^K a_1 a_2}{\varphi(|\Delta_{\mathbf{a},\mathbf{b}}|)^K \varphi(a_1)\varphi(a_2)} x' \prod_{i=1}^{2} \frac{1}{\log z_i} \exp\left(-c\xi_i \frac{\log t_i}{\log y_i}\right),\end{aligned}$$

où l'on a posé, pour $i \in \{1,2\}$,

$$\xi_i := \min\left(B, \frac{\log y_i}{4}\right).$$

C'est une conséquence simple d'un résultat d'Henriot [Hen12], qui est lui-même une version uniforme en le discriminant d'un théorème de Nair et Tenenbaum [NT98].

Démonstration. On suppose donnés les paramètres de l'énoncé. On pose

$$\alpha := \frac{\varepsilon\xi_1}{100A\log y_1}, \qquad \beta := \frac{\varepsilon\xi_2}{100A\log y_2},$$

et on définit la fonction à deux variables

$$F(n,m) := \mathbb{1}_{P^-(n)>z_1}\mathbb{1}_{P^-(m)>z_2} n_{y_1}^\alpha m_{y_2}^\beta,$$

qui est complètement multiplicative (*i.e.* $F(n_1n_2, m_1m_2) = F(n_1,m_1)F(n_2,m_2)$ pour tous $n_1, n_2, m_1, m_2 \geqslant 1$). Par la méthode de Rankin, le cardinal qui nous intéresse est alors

$$\leqslant t_1^{-\alpha} t_2^{-\beta} \sum_{x<n\leqslant x+x'} F\big(Q_1(n), Q_2(n)\big).$$

La fonction F vérifie élémentairement

$$F(n,m) \leqslant \min\left(\mathrm{e}^{\frac{\varepsilon B}{100A}\Omega(nm)}, (nm)^{\frac{\varepsilon}{400A}}\right).$$

On suppose pour simplifier qu'on est dans le cas où le polynôme $Q := Q_1Q_2$ n'admet pas 2 comme diviseur fixe. On peut toujours s'y ramener en séparant les cas selon que n est pair ou impair. D'après [Hen12, th. 3], il existe alors une constante $K > 0$ pouvant dépendre de A, B, et ε, telle que

$$\sum_{x<n\leqslant x+x'} F\big(Q_1(n), Q_2(n)\big) \ll \frac{|\Delta_{\mathbf{a},\mathbf{b}}|^K a_1 a_2}{\varphi(|\Delta_{\mathbf{a},\mathbf{b}}|)^K \varphi(a_1)\varphi(a_2)} x' \prod_{p\leqslant x}\left(1 - \frac{2}{p}\right) \sum_{nm\leqslant x} \frac{F(n,m)}{nm}.$$

Par ailleurs, d'après le Lemme 2.5.4, on a

$$\sum_{z_1<p\leqslant y_1} \frac{p^\alpha - 1}{p} \ll 1, \qquad \sum_{z_2<p\leqslant y_2} \frac{p^\beta - 1}{p} \ll 1.$$

On en déduit facilement le résultat désiré. On remarque que la valeur $c = \varepsilon/(100A)$ est admissible, indépendamment de B. □

Démonstration du Théorème 2.5.3. On ne démontre que le point 2, le premier cas en étant la variante unidimensionnelle, plus simple. On suppose donnés les paramètres de l'énoncé. On définit, pour $j \geqslant 1$,

$$y_j := x^{1/(2j)},$$

et on pose $y_0 = +\infty$. On trie les $n \in]x, x+x']$ selon les valeurs, pour $i \in \{1,2\}$, de $j_i \in \mathbb{N}$ vérifiant $Q_i(n)_{y_{j_i}} > x^{\varepsilon/3}$, $Q_i(n)_{y_{j_i+1}} \leqslant x^{\varepsilon/3}$. On obtient alors

$$\big\{n \in]x, x+x'] : \quad \forall i \in \{1,2\},\ \omega\big(Q_i(n)\big) = k_i,\ Q_i(n) \in \mathbb{N}_{\mathcal{P}}\big\} = \bigcup_{j_1, j_2 \geqslant 0} E_{j_1,j_2},$$

où l'on a posé, pour $j_1, j_2 \geqslant 0$,

$$E_{j_1,j_2} := \left\{ n \in]x, x+x'] : \quad \forall i \in \{1,2\},\ \begin{array}{ll} \omega\big(Q_i(n)\big) = k_i, & Q_i(n) \in \mathbb{N}_{\mathcal{P}}, \\ Q_i(n)_{y_{j_i}} > x^{\varepsilon/3}, & Q_i(n)_{y_{j_i+1}} \leqslant x^{\varepsilon/3} \end{array} \right\}.$$

On majore maintenant le cardinal des E_{j_1,j_2}, en commençant par des j_i non nuls, et pas trop grands. Soit $1 \leqslant j_1, j_2 \leqslant \sqrt{\log x}$. Étant donné un entier N quelconque, on a la minoration $\omega(N_{y_{j_i+1}}) \geqslant \omega(N) - (\log N)/\log y_{j_i+1}$. Ainsi, lorsque x est suffisamment grand, on peut écrire

$$|E_{j_1,j_2}| \leqslant \sum_{\substack{k_i - 2(A+1)(j_i+1) \leqslant k_i' < k_i,\ \forall i \in \{1,2\} \\ k_i' \geqslant 0,\ \forall i \in \{1,2\}}} \ \sum_{\substack{d_1, d_2 \leqslant x^{\varepsilon/3} \\ d_1 d_2 \in \mathbb{N}_{\mathcal{P}} \\ P^+(d_i) \leqslant y_{j_i+1},\ \forall i \in \{1,2\} \\ \omega(d_i) = k_i',\ \forall i \in \{1,2\}}} F_{d_1,d_2} \tag{2.5.32}$$

où l'on a défini F_{d_1,d_2}, qui dépend aussi de j_1 et j_2, par

$$F_{d_1,d_2} := \left| \left\{ n \in]x, x+x'] : \quad \forall i \in \{1,2\},\ Q_i(n)_{y_{j_i}} > x^{\varepsilon/3},\ Q_i(n)_{y_{j_i+1}} = d_i \right\} \right|. \tag{2.5.33}$$

On note que l'inégalité stricte $k_i' < k_i$ provient du fait que si $Q_i(n) > x$ et $Q_i(n)_{y_{j_i+1}} \leqslant x^{\varepsilon/3}$ pour un $j_i \geqslant 0$, alors $Q_i(n)$ admet au moins un diviseur premier supérieur à y_{j_i+1}. On remarque, au vu des hypothèses, que si $(d_i, a_i) \neq 1$ pour un $i \in \{1,2\}$, alors $F_{d_1,d_2} = 0$. Il en va de même si (d_1, d_2) ne divise pas $\Delta_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$. Dans le cas contraire, on paramètre n sous la forme $n = d_1 d_2 m/(d_1, d_2) + \alpha$, où $\alpha := \inf\{\beta \geqslant 0 : \quad \forall i \in \{1,2\},\ d_i | a_i \beta + b_i\}$. Pour $i \in \{1,2\}$, on note Q_i' le polynôme tel que $Q_i(n)/d_i = Q_i'(m)$ pour ce paramétrage. On peut alors écrire

$$F_{d_1,d_2} \leqslant F'_{d_1,d_2} := \left| \left\{ \begin{array}{l} m \in \left] \dfrac{(x-\alpha)(d_1,d_2)}{d_1 d_2}, \dfrac{(x+x'-\alpha)(d_1,d_2)}{d_1 d_2} \right] : \\ \forall i \in \{1,2\},\ Q_i'(m)_{y_{j_i}} > \dfrac{x^{\varepsilon/3}}{d_i},\ P^-(Q_i'(m)) > y_{j_i+1} \end{array} \right\} \right|.$$

Soit $B > 1$ une constante, que l'on choisira suffisamment grande par la suite. On pose alors, pour $i \in \{1,2\}$, $\xi_i := \min\big(B, (\log y_{j_i})/4\big)$. D'après le Lemme 2.5.5, il existe une constante $0 < c \leqslant 1$, indépendante de B, et une constante $K_0 > 0$ pouvant en dépendre, telles que l'on ait

$$F'_{d_1,d_2} \ll \frac{|\Delta_{\mathbf{a},\mathbf{b}}|^{K_0} a_1 a_2}{\varphi(|\Delta_{\mathbf{a},\mathbf{b}}|)^{K_0} \varphi(a_1)\varphi(a_2)} \frac{(d_1,d_2) h(d_1) h(d_2)}{d_1 d_2} \frac{x'}{(\log x)^2} \prod_{i=1}^{2} (j_i+1) \left(\frac{d_i}{x^{\varepsilon/3}} \right)^{\alpha_i}, \tag{2.5.34}$$

où l'on a posé $h(d) := \big(d/\varphi(d)\big)^{K_0}$, et pour $i \in \{1,2\}$,

$$\alpha_i := \frac{c\xi_i}{\log y_{j_i}} \leqslant \min\left(\frac{B}{\log y_{j_i}}, \frac{1}{4} \right). \tag{2.5.35}$$

La fonction h est complètement sous-multiplicative et vérifie, pour tous $p \geqslant 2$ et $\nu \geqslant 1$, $h(p^\nu) = 1 + O(1/p)$. En se rappelant qu'on s'est restreint au cas où $\delta := (d_1, d_2)$ divise $\Delta_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$, on est alors amené à majorer

$$\sum_{\substack{d_1,d_2\leqslant x^{\varepsilon/3},\ \forall i\in\{1,2\}\\ d_1d_2\in\mathbb{N}_{\mathcal{P}}\\ P^+(d_i)\leqslant y_{j_i+1},\ \forall i\in\{1,2\}\\ \omega(d_i)=k_i',\ \forall i\in\{1,2\}\\ (d_1,d_2)|\Delta_{\mathbf{a},\mathbf{b}}}} \frac{(d_1,d_2)h(d_1)h(d_2)}{d_1^{1-\alpha_1}d_2^{1-\alpha_2}}$$

$$\leqslant \sum_{\substack{\delta|\Delta_{\mathbf{a},\mathbf{b}}\\ P^+(\delta)\leqslant y_{j_1+1},y_{j_2+1}}} \frac{h(\delta)^2}{\delta^{1-\alpha_1-\alpha_2}} \prod_{i=1}^{2}\left(\sum_{\substack{d_i\in\mathbb{N}_{\mathcal{P}}\\ P^+(d_i)\leqslant y_{j_i+1}\\ \omega(\delta d_i)=k_i'}} \frac{h(d_i)}{d_i^{1-\alpha_i}}\right). \tag{2.5.36}$$

On majore la dernière somme dans le cas où $\omega(\delta) \leqslant k_i'$, puisqu'elle est nulle sinon. Pour $n, m \geqslant 1$ des entiers, on écrit $n|m^\infty$ pour signifier que tous les facteurs premiers de n divisent m. En décomposant d_i sous la forme $d_i = f_i g_i$ où $f_i|\delta^\infty$ et $(g_i, \delta) = 1$, on obtient pour $i \in \{1, 2\}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{d_i\in\mathbb{N}_{\mathcal{P}}\\ P^+(d_i)\leqslant y_{j_i+1}\\ \omega(\delta d_i)=k_i'}} \frac{h(d_i)}{d_i^{1-\alpha_i}} &\leqslant \sum_{\substack{f_i|\delta^\infty\\ P^+(f_i)\leqslant y_{j_i+1}}} \frac{h(f_i)}{f_i^{1-\alpha_i}} \sum_{\substack{g_i\in\mathbb{N}_{\mathcal{P}}\\ P^+(g_i)\leqslant y_{j_i+1}\\ \omega(g_i)=k_i'-\omega(\delta)}} \frac{h(g_i)}{g_i^{1-\alpha_i}}\\
&\leqslant \sum_{\substack{f_i|\delta^\infty\\ P^+(f_i)\leqslant y_{j_i+1}}} \frac{h(f_i)}{f_i^{1-\alpha_i}} \frac{1}{(k_i'-\omega(\delta))!}\left(\sum_{\substack{p^\nu\\ p\in\mathcal{P}\\ p\leqslant y_{j_i+1}}} \frac{1+O\left(\frac{1}{p}\right)}{p^{\nu(1-\alpha_i)}}\right)^{k_i'-\omega(\delta)}\\
&\ll \sum_{\substack{f_i|\delta^\infty\\ P^+(f_i)\leqslant y_{j_i+1}}} \frac{h(f_i)}{f_i^{1-\alpha_i}} \frac{E(x)^{k_i'-\omega(\delta)}}{(k_i'-\omega(\delta))!}\\
&\ll \frac{E(x)^{k_i'}}{k_i'!} A^{\omega(\delta)} \sum_{\substack{f_i|\delta^\infty\\ P^+(f_i)\leqslant y_{j_i+1}}} \frac{h(f_i)}{f_i^{1-\alpha_i}}\\
&\ll \frac{E(x)^{k_i'}}{k_i'!} A^{\omega(\delta)} \left(\frac{\delta}{\varphi(\delta)}\right)^{\mathrm{e}^B}.
\end{aligned}$$

La troisième inégalité est obtenue en utilisant le Lemme 2.5.4 et (2.5.35), puis la croissance de $x \mapsto E(x)$ et le fait que $k_i' \leqslant AE(x)$. La dernière inégalité est obtenue en passant au produit eulérien et en utilisant de nouveau (2.5.35). En reportant dans (2.5.36) et en utilisant encore (2.5.35), on obtient

$$\sum_{\substack{d_1,d_2\leqslant x^{\varepsilon/3},\ \forall i\in\{1,2\}\\ d_1d_2\in\mathbb{N}_{\mathcal{P}}\\ P^+(d_i)\leqslant y_{j_i+1},\ \forall i\in\{1,2\}\\ \omega(d_i)=k_i',\ \forall i\in\{1,2\}\\ (d_1,d_2)|\Delta_{\mathbf{a},\mathbf{b}}}} \frac{(d_1,d_2)h(d_1)h(d_2)}{d_1^{1-\alpha_1}d_2^{1-\alpha_2}} \ll \frac{E(x)^{k_1'+k_2'}}{k_1'!k_2'!}\left(\frac{|\Delta_{\mathbf{a},\mathbf{b}}|}{\varphi(|\Delta_{\mathbf{a},\mathbf{b}}|)}\right)^{A\mathrm{e}^{2B}}$$

Finalement, en reportant (2.5.34) dans (2.5.32), puisque $k_i' \leqslant k_i - 1 \leqslant AE(x)$, on obtient

$$|E_{j_1,j_2}| \ll \frac{|\Delta_{\mathbf{a},\mathbf{b}}|^{K_0+Ae^{2B}} a_1 a_2}{\varphi(|\Delta_{\mathbf{a},\mathbf{b}}|)^{K_0+Ae^{2B}} \varphi(a_1)\varphi(a_2)} \frac{x'}{(\log x)^2} \frac{E(x)^{k_1+k_2-2}}{(k_1-1)!(k_2-1)!} \times \prod_{i=1}^{2} A^{2(A+1)(j_i+1)}(j_i+1)^2 \exp\left(-\frac{c\varepsilon}{12}\min\left(Bj_i, \log x\right)\right). \quad (2.5.37)$$

Lorsque B est suffisamment grand – on rappelle que c est indépendante de B –, on en déduit

$$\sum_{1\leqslant j_1,j_2\leqslant\sqrt{\log x}} |E_{j_1,j_2}| \ll \frac{|\Delta_{\mathbf{a},\mathbf{b}}|^{K_0+Ae^{2B}} a_1 a_2}{\varphi(|\Delta_{\mathbf{a},\mathbf{b}}|)^{K_0+Ae^{2B}} \varphi(a_1)\varphi(a_2)} \frac{x'}{(\log x)^2} \frac{E(x)^{k_1+k_2-2}}{(k_1-1)!(k_2-1)!}.$$

Le cas des E_{j_1,j_2} où l'un des j_i vaut 0 se traite de manière analogue. Il suffit, dans la définition (2.5.33) de F_{d_1,d_2}, d'ignorer la condition $Q_i(n)_{y_0} > x^{\varepsilon/3}$, ce qui revient, dans (2.5.37), à remplacer l'exponentielle par 1. En posant $j := \lfloor\sqrt{\log x}\rfloor$, on remarque enfin que l'on a

$$\bigcup_{j_1 \text{ ou } j_2\geqslant j} E_{j_1,j_2} \subset E^{(1)} \cup E^{(2)},$$

où l'on a posé, pour $i \in \{1,2\}$,

$$E^{(i)} := \left\{n \in]x, x+x'] : \quad Q_i(n)_{y_j} > x^{\varepsilon/3}\right\}.$$

En utilisant la méthode de Rankin comme précédemment et [Hen12, th. 3], on obtient alors la majoration adéquate pour les $|E^{(i)}|$, puisque l'on a par exemple

$$\frac{1}{(\log x)^2} \frac{E(x)^{k_1+k_2-2}}{(k_1-1)!(k_2-1)!} \gg \exp\big(-(\log x)^{1/4}\big).$$

□

2.5.3 Application du Théorème 2.3.1

On vérifie maintenant, à l'aide des résultats précédents, que l'on peut appliquer le Théorème 2.3.1 pour démontrer le Théorème 2.1.1.

Démonstration du Théorème 2.1.1. D'après le Lemme 2.5.1, le résultat est directement vrai lorsque $X < h \leqslant \delta_k(X)^{-1}X$. Soit $R > 1$ fixé. Soit $X \geqslant 3$ et $R^{-1}\log_2 X \leqslant k \leqslant R\log_2 X$. Soit $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ tendant vers l'infini en l'infini et $1 \leqslant \psi(X) \leqslant \delta_k(X)h \leqslant X$. On définit alors les paramètres suivants pour appliquer le Théorème 2.3.1. On fixe $r = 1/(2R)$ et $0 < \varepsilon \leqslant 1/100$ et on prend $K = (\log_2 X)^2$, de sorte que $J \ll \log_3 X$, et P_∞, Q_∞ vérifiant (2.3.5). On pose $\mathcal{A} = \mathcal{E}_k$ et on prend $T_0 = (\log X)^{100+R^2}$ et $f = (\mathrm{Id}/\varphi)^{K_1}$ où K_1 est une constante à choisir suffisamment grande. On prend $\vartheta = 1$ et $\delta = \delta_k$. Enfin, on définit

$$P_1 := \exp\left(\frac{\log Q_1}{1 + \min\left(\sqrt{\log\psi(X)}, \log_3 Q_1 - 1\right)}\right), \quad (2.5.38)$$

qui satisfait à (2.3.5). On vérifie désormais les hypothèses du Théorème 2.3.1. La première est vérifiée d'après le Lemme 2.5.1. Soit désormais $n \in (\mathcal{A} \smallsetminus \mathcal{S}) \cap [X, 2X]$. Au moins une des trois possibilités suivantes est vérifiée pour au moins un indice $j \in [1, J] \cup \{\infty\}$:

— aucun $p \in]P_j, Q_j]$ ne divise n,

— il existe un $p \in]P_j, Q_j]$ tel que $p^2|n$,

— il existe $p, q \in]P_j, Q_j]$ tels que $pq|n$ et $|p-q| \ll p/H_j$.

D'après le Lemme 2.5.2, le nombre d'entiers vérifiant la première possibilité pour au moins un indice j est

$$\ll \delta_k(X)X \sum_{j\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}} \left(\frac{\log P_j}{\log Q_j}\right)^r.$$

Pour la deuxième possibilité, il y a moins de

$$\ll \sum_{j\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}} \sum_{P_j<p\leqslant Q_j} \left|\left\{n \sim \frac{X}{p^2} : \quad \omega(p^2 n) = k\right\}\right| \ll \delta_k(X)X \sum_{j\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}} \frac{1}{P_j}$$

entiers, la deuxième inégalité étant obtenue en observant d'une part que $Q_\infty = X^{o(1)}$, et d'autre part que $\delta_{k-1}(X) \ll \delta_k(X)$, R étant fixé. Enfin, avec les même remarques, le nombre d'entiers de $(\mathcal{A} \smallsetminus \mathcal{S}) \cap [X, 2X]$ vérifiant le dernier point pour au moins un j est

$$\begin{aligned} &\ll \sum_{j\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}} \sum_{P_j<p\leqslant Q_j} \sum_{\substack{P_j<q\leqslant Q_j \\ |p-q|\ll p/H_j}} \left|\left\{n \sim \frac{X}{pq} : \quad \omega(pqn) = k\right\}\right| \\ &\ll \delta_k(X)X \sum_{j\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}} \frac{\log\left(1+\frac{\log Q_j}{\log P_j}\right)}{H_j}. \end{aligned}$$

L'hypothèse 2 est donc vérifiée. La troisième hypothèse est directement vérifiée d'après le Théorème 2.5.3 lorsque K_1 est suffisamment grand. Ensuite, pour tous nombres premiers p, q et tout entier m tels que $q^2 \nmid qm$ et $p \nmid m$, on a $\omega(pm) = \omega(qm)$. L'hypothèse 4 est donc vérifiée. En remarquant que $\mathcal{A}' \subset \mathcal{E}_{k-1}$, l'hypothèse 5 est aussi facilement vérifiée. Il en va de même pour l'hypothèse 6 puisque $\delta_{k+\ell}(X) \ll r^{-\ell}\delta_k(X)$. Enfin, les hypothèses 7 et 8 sont aisément vérifiées. On peut donc appliquer le Théorème 2.3.1 et en tirer la conclusion désirée. □

2.6 Entiers friables

On démontre ici les Théorèmes 2.1.4 et 2.1.5. Il semble très difficile, à l'heure actuelle, de majorer efficacement $\left|\left\{n \sim x : \quad P^+\big(n(n+1)\big) \leqslant y\right\}\right|$ pour un paramètre y donné, même relativement proche de x. C'est une différence fondamentale avec le cas traité précédemment des entiers ayant un nombre donné k de facteurs premiers. On peut quand même tirer une information du Théorème 2.3.1, en prenant la perte ϑ maximale, afin de trivialiser quelques hypothèses. Dans l'optique de vérifier les autres, on énonce trois lemmes.

Lemme 2.6.1 (Hildebrand [Hil86]). *Soit $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction tendant vers l'infini en l'infini. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Pour $x \geqslant 3, 1 \leqslant u \leqslant (\log x/(\log_2 x)^{3/5+\varepsilon}$ et $1 \leqslant z \leqslant x^{5/12u}$, on a*

$$\Psi\left(x + \frac{x}{z}, x^{1/u}\right) - \Psi\left(x, x^{1/u}\right) = \rho(u)\frac{x}{z}\big(1 + o(1)\big)$$

lorsque x tend vers l'infini.

On a l'estimation suivante de la fonction de Dickman [HT93].

Lemme 2.6.2. *La fonction $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de Dickman, définie comme l'unique solution continue sur $\mathbb{R}_+$ du système*

$$\begin{cases} u\rho'(u) = -\rho(u-1) & \text{pour } u > 1, \\ \rho(u) = 1 & \text{pour } 0 \leqslant u \leqslant 1, \\ \rho(u) = 0 & \text{pour } u < 0, \end{cases}$$

vérifie, pour $u \geqslant 1$,

$$\rho(u) = \exp\left(-u\left(\log u + \log_2(u+2) - 1 + O\left(\frac{\log_2(u+2)}{\log(u+2)}\right)\right)\right).$$

Lemme 2.6.3. *Soit $0 < \varepsilon < \frac{1}{6}$ fixé. Uniformément pour $x \geqslant 3$, $1 \leqslant u \leqslant (\log x)^{1/6-\varepsilon}$, $1 \leqslant z \leqslant \exp\left((\log x)^{1/6-\varepsilon/2}\right)$ et $2 \leqslant P \leqslant Q \leqslant \exp\left((\log x)^{5/6+\varepsilon/3}\right)$, on a*

$$\left|\left\{n \in \left]x, x+\frac{x}{z}\right] : \quad P^+(n) \leqslant x^{1/u}, \ \left(n, \prod_{P<p\leqslant Q} p\right) = 1\right\}\right| = \left(1 + O\left(\frac{1}{u}\right)\right) \prod_{P<p\leqslant Q}\left(1 - \frac{1}{p}\right)\rho(u)\frac{x}{z}.$$

Ce lemme est une extension aux petits intervalles d'un résultat beaucoup plus général que La Bretèche & Tenenbaum [BT05] obtiennent dans leur article lorsque $z = 1$.

Démonstration. On suppose donnés les paramètres de l'énoncé. Comme de coutume, pour $k \geqslant 1$, on définit $\rho^{(k)}$ sur $\mathbb{R}$ tout entier par continuité à droite. La démonstration est une conséquence rapide des méthodes développées dans [BT05]. On en reprend les notations. Notamment, pour $x, y > 0$ des réels et m un entier, on définit

$$\Psi_m(x,y) := \sum_{\substack{n\leqslant x \\ P^+(n)\leqslant y \\ (n,m)=1}} 1,$$

$$\Lambda_m(x,y) := \begin{cases} x\displaystyle\int_{0-}^{\infty} \rho(u-v)\mathrm{d}R_m(y^v) & (x \in \mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Z}), \\ \Lambda_m(x+,y) & (x \in \mathbb{Z}), \end{cases}$$

$$R_m(x) := \frac{1}{x}\sum_{\substack{n\leqslant x \\ (n,m)=1}} 1 - \frac{\varphi(m)}{m}.$$

On pose ici $m = \prod_{P<p\leqslant Q} p$. On commence par utiliser $(4\cdot 1)$ de [BT05], afin d'obtenir

$$\Psi_m\left(x+\frac{x}{z}, x^{1/u}\right) - \Psi_m\left(x, x^{1/u}\right) = \Lambda_m\left(x+\frac{x}{z}, x^{1/u}\right) - \Lambda_m\left(x, x^{1/u}\right) + O\left(\rho(u)x\mathrm{e}^{-\sqrt{\log x}}\right).$$

À partir de $(4\cdot 13)$ de [BT05], un calcul élémentaire montre qu'il suffit alors de prouver

$$V_m\left(x+\frac{x}{z}, x^{1/u}\right) - V_m\left(x, x^{1/u}\right) \ll \frac{\rho(u)\varphi(m)}{uzm}, \tag{2.6.39}$$

où l'on a posé

$$V_m(x,y) := R_m(x) + \int_0^{\infty}\left\{\rho'(u-v) - \rho'(u)\mathrm{e}^{r(u)v}\right\}R_m(y^v)\mathrm{d}v,$$

et, pour $u > 0$,

$$r(u) := \frac{-\rho'(u)}{\rho(u)} = \frac{\rho(u-1)}{u\rho(u)}.$$

Puisque $P^+(m) \leqslant \exp\big((\log x)^{5/6+\varepsilon/3}\big)$, l'inégalité $(3 \cdot 41)$ de [BT05, lem. 3.10] fournit

$$\left|R_m\left(x + \frac{x}{z}\right)\right| + |R_m(x)| \ll \frac{\varphi(m)}{m} \exp\left(-(\log x)^{1/6-\varepsilon/3}\right),$$

qui est convenable. On définit u' tel que

$$\left(x + \frac{x}{z}\right)^{1/u'} = x^{1/u},$$

de sorte que $u \leqslant u' \leqslant u + O\big(u/(z \log x)\big)$, et on pose $w(u,v) := \rho'(u-v) - \rho'(u)\mathrm{e}^{r(u)v}$. On écrit alors le membre de gauche de (2.6.39) sous la forme $I_1 + I_2 + I_3 + R$ où l'on a posé

$$\begin{aligned}
I_1 &:= \int_0^{u-2} \big\{w(u',v) - w(u,v)\big\} R_m(x^{v/u}) \mathbb{1}_{v \geqslant 0} \mathrm{d}v, \\
I_2 &:= \int_{u-2}^{u'-1} \big\{\rho'(u'-v) - \rho'(u-v)\big\} R_m(x^{v/u}) \mathbb{1}_{v \geqslant 0} \mathrm{d}v, \\
I_3 &:= \int_{u-2}^{\infty} \left\{\rho'(u')\mathrm{e}^{r(u')v} - \rho'(u)\mathrm{e}^{r(u)v}\right\} R_m(x^{v/u}) \mathbb{1}_{v \geqslant 0} \mathrm{d}v, \\
R &:= R_m\left(x + \frac{x}{z}\right) - R_m(x).
\end{aligned}$$

La majoration de I_2 ne pose aucun problème à partir des lemmes 3.9 et 3.10 de [BT05]. On majore désormais I_1. Montrons, pour $u \geqslant 1$ et $0 \leqslant v \leqslant u-2$, la majoration

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial u}(u,v) &= \rho''(u-v) - \rho''(u)\mathrm{e}^{r(u)v} - v r'(u)\rho'(u)\mathrm{e}^{r(u)v} \\
&\ll \log(u+1)\frac{\rho(u) v \mathrm{e}^{r(u)v}}{u}\big(1 + v\log(u+1)\big).
\end{aligned} \tag{2.6.40}$$

Soit

$$\lambda(u) := \rho''(u) + \frac{\rho'(u)}{u} = -\frac{\rho'(u-1)}{u} = \frac{r(u-1)\rho(u-1)}{u}.$$

Le lemme 6.1 de [FT96] ainsi que sa démonstration fournissent

$$\lambda(u-v) = \lambda(u)\mathrm{e}^{r(u)v}\left\{1 + O\left(\frac{v}{u\log(u+v)} + \frac{v^2}{u}\right)\right\}.$$

Le même lemme, combiné avec [Ten15, cor. III.5.14], nous permet alors d'écrire

$$\rho''(u-v) - \rho''(u)\mathrm{e}^{r(u)v} \ll \log(u+1)\frac{\rho(u) v \mathrm{e}^{r(u)v}}{u}\big(1 + v\log(u+1)\big).$$

L'inégalité (2.6.40) est alors facilement obtenue une fois connue la majoration $r'(u) \ll 1/u$, qui correspond à (6.9) de [FT96, lem. 6.1]. De manière analogue à [BT05, $(4 \cdot 19)$], la majoration adéquate pour I_1 découle alors directement du théorème des accroissements finis, puisque $\log u \leqslant \log(x^{1/u})$.

La majoration de I_3 s'effectue de façon analogue, via les accroissements finis, en utilisant le travail de majoration qui a été effectué dans [BT05] pour obtenir $(4 \cdot 18)$. Ces méthodes n'étant pas au centre du présent chapitre, nous laissons les détails au lecteur intéressé. □

On montre maintenant le Théorème 2.1.4.

Démonstration du Théorème 2.1.4. Soit $0 < \varepsilon < 1/100$ fixé. Soit $X \geqslant 3$ et u tel que $1 \leqslant u \leqslant (\log X)^{1/6-\varepsilon}$. On applique le Théorème 2.3.1 avec les paramètres suivants. On pose $r = 1$, $K = \sqrt{\log X}$, $P_\infty = \exp\big((\log X)^{5/6-\varepsilon/6}\big)$ et $Q_\infty = \exp\big((\log X)^{5/6}\big)$. On choisit pour $\mathcal{A}$ l'ensemble des entiers $X^{1/u}$-friables et $\delta(X) = \rho(u)$. On remarque que l'on a $\delta(X) \gg P_\infty^{-(\log X)^{-2/3-\varepsilon/2}}$ et on pose $T_0 = \exp\big((\log X)^{1/6}\big)$. On pose $\vartheta(X) = \delta(X)^{-1}$ et $f = 1$. Soit $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction tendant vers l'infini en l'infini et h vérifiant $\big(1+\rho(u)^{-1}\big)^{\psi(X)} \leqslant h \leqslant X$. Enfin, on pose

$$P_1 := \exp\left(\frac{\log Q_1}{1+\min\big(\sqrt{\psi(X)}, \log_3 Q_1 - 1\big)}\right),$$

qui satisfait à (2.3.5). On vérifie désormais les hypothèses du Théorème 2.3.1. Le premier point découle aisément du Lemme 2.6.1. Pour vérifier le deuxième point, on procède exactement comme pour le Théorème 2.1.1 en utilisant les Lemmes 2.6.1 et 2.6.3. Puisque $\vartheta = \delta^{-1}$, le troisième point est trivialement vérifié. L'hypothèse 4 est vérifiée puisque $\mathcal{A}$ est représenté par une fonction complètement multiplicative, valant 1 sur tous les premiers $p \leqslant Q_\infty$. Les points 5 et 6 ne posent aucun problème puisque $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$. Enfin, les hypothèses 7 et 8 se vérifient de manière élémentaire. □

Démonstration du Théorème 2.1.5. Soit $0 < \varepsilon < 1/1000$ fixé. Soit $x \geqslant 1$ et u vérifiant $1 \leqslant u \leqslant (\log x)^{1/6-\varepsilon}$. Soit $\rho(u/2)^{-6-100\varepsilon}\sqrt{x} \leqslant h_1 \leqslant x$, puis $T_0 := \rho(u/2)^{-20}(\log x)^{10}$ et $h_2 := x/T_0^3$. Comme dans [MR16], on étudie, pour $k \in \{1,2\}$,

$$\Sigma(h_k) := \frac{1}{h_k} \sum_{\substack{x-h_k < n_1 n_2 \leqslant x+h_k \\ n_1 \sim \sqrt{x} \\ n_1, n_2 \in \mathcal{S} \\ P^+(n_1 n_2) \leqslant x^{1/u}}} 1$$

où $\mathcal{S}$ est un ensemble que l'on définit plus tard. On traite d'abord le cas $h_1 \leqslant h_2$. Pour $k \in \{1,2\}$, on pose $v_k := h_k/x$ et on note η_k la fonction continue valant 1 sur $[1-v_k, 1+v_k]$, 0 en dehors de $[1-2v_k, 1+2v_k]$, et affine sur $[1-2v_k, 1-v_k]$ et sur $[1+v_k, 1+2v_k]$. En procédant de manière analogue à la démonstration de [MR16, th. 4] – pour majorer $|U_1/h_1 - U_2/h_2|$ et $|V_1/h_1 - V_2/h_2|$, avec leur paramètre δ égal à 1 – on obtient

$$\left| \frac{1}{h_1} \sum_{\substack{n_1 \sim \sqrt{x} \\ n_1, n_2 \in \mathcal{S} \\ P^+(n_1 n_2) \leqslant x^{1/u}}} \eta_1\left(\frac{n_1 n_2}{x}\right) - \frac{1}{h_2} \sum_{\substack{n_1 \sim \sqrt{x} \\ n_1, n_2 \in \mathcal{S} \\ P^+(n_1 n_2) \leqslant x^{1/u}}} \eta_2\left(\frac{n_1 n_2}{x}\right) \right| \ll \frac{1}{T_0} + I,$$

où

$$I := \int_{T_0}^{x/h_1} |M_1(1+it)M_2(1+it)|\,\mathrm{d}t + \frac{x}{h_1} \max_{T > x/h_1} \frac{1}{T} \int_T^{2T} |M_1(1+it)M_2(1+it)|\,\mathrm{d}t$$

avec les notations

$$M_1(s) := \sum_{\substack{n \sim \sqrt{x} \\ n \in \mathcal{S} \\ P^+(n) \leqslant x^{1/u}}} \frac{1}{n^s}, \qquad M_2(s) := \sum_{\substack{\sqrt{x}/2 < n \leqslant 2\sqrt{x} \\ n \in \mathcal{S} \\ P^+(n) \leqslant x^{1/u}}} \frac{1}{n^s}. \qquad (s \in \mathbb{C})$$

On a donc

$$2\Sigma(2h_1) \geqslant \Sigma(h_2) + O\left(\frac{1}{T_0} + I\right),$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on est ramené à majorer, pour $k \in \{1,2\}$ et $T \geqslant T_0$,

$$\int_{T_0}^{T} |M_k(1+it)|^2 \,\mathrm{d}t.$$

On pose $X := \sqrt{x}$. On définit maintenant $\mathcal{S}$ comme dans la section 2.3 pour les paramètres $r = 1$, ε donné ci-dessus, $\delta = \rho(u/2)$, $\vartheta = \delta^{-1}$, $h = h_1/\sqrt{x}$, $K = (\log X)^{1/6-2\varepsilon/3}$, $P_1 = Q_1^{1-\varepsilon}$, $P_\infty = \exp\left((\log X)^{5/6-\varepsilon/6}\right)$ et $Q_\infty = \exp\left((\log X)^{5/6}\right)$; à une différence près, en posant, pour $1 \leqslant j \leqslant J$, $H_j := j^2 P_1^{1/6-\varepsilon}(\log Q_1)^{-1/3}$. On remarque alors, comme dans la démonstration du théorème précédent, que les hypothèses 1 à 6 sont toutes vérifiées pour u assez grand, l'hypothèse 3 étant vérifiée pour $1 \leqslant z \ll H_J$ pour ce nouveau choix des H_j. Cela garantit qu'une démonstration identique à celle de la Proposition 2.4.2 fournisse, pour $k \in \{1,2\}$,

$$\int_{T_0}^{T} |M_k(1+it)|^2 \,\mathrm{d}t \ll \left(\frac{TQ_1}{\delta(X)X} + \vartheta(X)\right)\delta(X)^2 P_1^{-1/6+2\varepsilon},$$

pour $T_0 < T \leqslant X$. Ainsi, en utilisant directement le Lemme 2.2.2 lorsque $T > X$, on obtient

$$I \ll \rho\left(\frac{u}{2}\right)^{2+\varepsilon}$$

lorsque u est assez grand. Par ailleurs, avec les Lemmes 2.6.1, 2.6.2 et 2.6.3, on trouve

$$\Sigma(h_2) \gg \rho\left(\frac{u}{2}\right)^2.$$

Finalement, on obtient le résultat désiré lorsque u est assez grand en observant que l'on a

$$\begin{aligned}
\rho\left(\frac{u}{2}\right)^2 h_1 &\ll \sum_{\substack{x-2h_1 < n_1 n_2 \leqslant x+2h_1 \\ n_1 \sim \sqrt{x} \\ P^+(n_1 n_2) \leqslant x^{1/u}}} 1 \\
&\ll \left(\sum_{\substack{|n-x| \leqslant 2h_1 \\ P^+(n) \leqslant x^{1/u}}} 1\right)^{1/2} \left(\sum_{|n-x| \leqslant 2h_1} \left(\sum_{n_1 n_2 = n} 1\right)^2\right)^{1/2} \\
&\ll \left(\sum_{\substack{|n-x| \leqslant 2h_1 \\ P^+(n) \leqslant x^{1/u}}} 1\right)^{1/2} \left(h_1 (\log x)^3\right)^{1/2},
\end{aligned}$$

et $\rho\left(\frac{u}{2}\right)^2 \gg \rho(u) 2^{u+o(u)}$ lorsque u tend vers l'infini. La dernière inégalité ci-dessus est obtenue par application directe de [Hen12, th. 3]. En effet, ce théorème fournit, pour $x^\varepsilon < x' \leqslant x$, l'inégalité

$$\sum_{x < n \leqslant x+x'} \tau(n)^2 \ll x' \prod_{p \leqslant x}\left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{n \leqslant x} \frac{\tau(n)^2}{n}.$$

Le cas où $h_2 \leqslant h_1 \leqslant x$ se traite directement en observant que pour $\mathcal{S} = \mathbb{N}$, le Lemme 2.6.1 fournit directement $\Sigma(h_1) \gg \rho(u/2)^2$.

□

2.7 Entiers avec un petit nombre de facteurs premiers

De manière informelle, un des ingrédients clefs du Théorème 2.3.1 est le suivant. Presque tous les entiers que l'on étudie ont au moins 1 facteur premier dans chacun des J intervalles $]P_j, Q_j]$. Cela met à notre disposition J factorisations possibles pour le polynôme de Dirichlet B, ce qui nous permet de majorer

$$\int_{T_0}^{T} |B(1+it)|^2 \mathrm{d}t.$$

Pour $t \in [T_0, T]$, on se sert de l'indice j fournissant la factorisation la plus avantageuse. C'est la factorisation correspondant à l'indice $j = 1$ qui est la plus difficile à majorer, et qui impose à h d'être suffisamment grand, essentiellement de taille $\delta(X)^{-1}Q_1$. Plus Q_1 est petit, plus h peut être petit. Par ailleurs, pour que la factorisation correspondant à un certain $j \geqslant 2$ soit efficace, il faut que P_{j-1} et Q_{j-1} ne soient pas « trop éloignés » de P_j et Q_j. Ainsi, plus on veut réduire la taille de Q_1, et donc de h, plus J doit être grand. Dans le cadre du Théorème 2.3.1, ce n'est pas contraignant, grâce à l'hypothèse 2. On a déjà vu que lorsque l'on s'intéressait aux entiers ayant $k \asymp \log_2 X$ facteurs premiers, cette hypothèse était vérifiée (*cf.* Lemme 2.5.2). Cela revient à dire, lorsque $\log P = o(\log Q)$, que presque tous les entiers ayant k facteurs premiers en ont au moins 1 dans l'intervalle $]P, Q]$. Ainsi, il est suffisant de s'intéresser à ces entiers seulement, ce qui revient à travailler dans $\mathcal{A} \cap \mathcal{S}$.

Lorsque k est trop petit, par exemple borné, cela n'est évidemment plus vrai. D'une part, on ne peut plus espérer d'un entier avec k facteurs premiers d'en avoir J localisés dans certains intervalles si $J > k$. D'autre part, il n'y a approximativement qu'une proportion $(\log_2 Q - \log_2 P)/\log_2 X$ des entiers avec $2 \leqslant k \ll 1$ facteurs premiers qui en ont un dans l'intervalle $]P, Q]$. La restriction à $\mathcal{S}$ n'est donc plus innocente dans ce cas-là. Il paraît alors difficile, par cette méthode, de comparer $\big(\pi_k(x+h) - \pi_k(x)\big)/h$ à $\big(\pi_k(2X) - \pi_k(X)\big)/X$, pour k petit. On peut cependant minorer la première quantité en comparant

$$\frac{1}{h} \sum_{\substack{x < n \leqslant x+h \\ n \in \mathcal{E}_k \cap \mathcal{S}}} 1 \qquad \text{à} \qquad \frac{1}{X} \sum_{\substack{n \sim X \\ n \in \mathcal{E}_k \cap \mathcal{S}}} 1.$$

Cette idée est déjà présente dans [Ter16]. Par la remarque précédente, $\mathcal{E}_k \cap \mathcal{S}$ est de densité nulle dans $\mathcal{E}_k$. De manière approximative, dès que Q n'est pas proche de X, le fait d'imposer un facteur premier dans $]P, Q]$ fait perdre un facteur $(\log_2 X)/k$ sur la densité. Il faut donc choisir J minimal de sorte que Q_1 soit plus petit que disons $\log_2 X$. On rappelle la décomposition $[T_0, T] = \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant J} \mathcal{T}_j \cup \mathcal{U}$. La majoration de l'intégrale sur $\mathcal{U}$ est aisée dès que l'on a, approximativement, $\log_2 X = o(\log P_J)$, et la majoration sur $\mathcal{T}_j$ pour $j \geqslant 2$ dès que $\log_2 Q_j = o(\log P_{j-1})$. Cela implique approximativement $Q_1 \geqslant (\log_J X)^C$. Par ce raisonnement, on espère minorer $\big(\pi_k(x+h) - \pi_k(x)\big)/h$ dès que $\delta_k(X)h \geqslant \big((\log_2 X)/k\big)^J (\log_J X)^C$. Notre intérêt portant ici sur les petites valeurs de k, on choisit le paramètre J égal à 3. Comme mentionné en introduction, pour des valeurs de k dépassant $(\log_2 X)/\log_3 X$, il est possible d'améliorer légèrement le Théorème 2.1.2, en prenant le paramètre J plus grand.

Comme on vient de le voir, la démonstration ressemble très fortement à celle du Théorème 2.3.1, mais avec un choix légèrement différent pour $\mathcal{S}$. On se permet alors d'omettre certains calculs, qui ressemblent fortement à ceux déjà effectués dans la section 2.4.

2.7.1 Redéfinition de $\mathcal{S}$

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Pour X suffisamment grand, on définit

$$\begin{cases} P_1 := (\log_3 X)^{2+100\varepsilon}, & Q_1 := P_1^{1+\varepsilon}, \\ P_2 := (\log_2 X)^{\varepsilon^{-1}}, & Q_2 := P_2^{1+\varepsilon}, \\ P_3 := (\log X)^{\varepsilon^{-1}}, & Q_3 := \exp\big((\log_2 X)^2\big), \\ P_\infty := \exp\big((\log X)^{2/3+\varepsilon}\big), & Q_\infty := \exp\big((\log X)^{2/3+2\varepsilon}\big), \\ H_i := (\log_2 Q_i)^2 & \qquad\qquad (j \in [1,3] \cup \{\infty\}). \end{cases}$$

On définit alors $\mathcal{S}$ comme dans la section 2.3. Pour $j \in [1,3] \cup \{\infty\}$, on pose

$$\begin{cases} \mathcal{I}_j := \big[\lfloor H_j \log P_j \rfloor, H_j \log Q_j\big], \\ \mathcal{S}_j := \displaystyle\bigcap_{v \in \mathcal{I}_j} \bigcap_{\substack{\mathrm{e}^{v/H_j} < p,q \leqslant \mathrm{e}^{(v+1)/H_j} \\ P_j < p,q \leqslant Q_j}} \big\{n \geqslant 1 : \quad \mu^2_{]P_j,Q_j]}\omega_{]P_j,Q_j]}(n) \geqslant 1,\ pq \nmid n\big\}. \end{cases}$$

On note que $\mathcal{S}_j$ est l'ensemble des entiers ayant au moins un facteur premier dans $]P_j, Q_j]$, et au plus un – avec multiplicité – dans chaque intervalle $\big]\mathrm{e}^{v/H_j}, \mathrm{e}^{(v+1)/H_j}\big] \cap]P_j, Q_j]$ pour $v \in \mathcal{I}_j$. Finalement, on note

$$\mathcal{S} := \bigcap_{j=1}^{3} \mathcal{S}_j \cap \mathcal{S}_\infty.$$

Pour la suite on pose

$$\begin{cases} \alpha_1 := \varepsilon, \\ \alpha_2 := \frac{1}{4} - 4\varepsilon, \\ \alpha_3 := \frac{1}{4} - 2\varepsilon. \end{cases} \tag{2.7.41}$$

Pour $5 \leqslant k \leqslant \log_2 X$, on rappelle la définition (2.1.1) de F_k. On note que si l'on avait choisi Q_3 égal à $P_3^{1+\varepsilon}$, on obtiendrait le Théorème 2.1.2 mais en remplaçant $F_k(X)$ par $(\log_2 X)^3/k^3$. Le choix que l'on fait effectivement permet de gagner un facteur $\log_3 X$ lorsque $k = o\big((\log_2 X)/\log_3 X\big)$.

2.7.2 Démonstration du Théorème 2.1.2

On commence par estimer la densité de $\mathcal{E}_k \cap \mathcal{S}$.

Lemme 2.7.1. *On conserve les notations de la sous-section* 2.7.1 *On pose* $T_0 := (\log X)^{10}$ *et* $y_0 := X/T_0^3$. *On a alors, pour tout* $x \sim X$,

$$\sum_{\substack{x < n \leqslant x+y_0 \\ n \in \mathcal{E}_k \cap \mathcal{S}}} 1 \asymp \frac{\delta_k(X)}{F_k(X)} y_0.$$

Démonstration. Tout entier $n \in \mathcal{E}_k \cap \mathcal{S}$ se décompose de manière unique sous la forme $m_1 m_2 m_3 r$ où, pour $i \in [1,3]$, l'entier m_i correspond au produit des facteurs premiers de n appartenant à $]P_i, Q_i]$. En notant $m := m_1 m_2 m_3$, on a alors

$$\sum_{\substack{x < n \leqslant x+y_0 \\ n \in \mathcal{E}_k \cap \mathcal{S}}} 1 = \sum_{\substack{m_i, \forall i \in [1,3] \\ p \mid m_i \Rightarrow p \in]P_i, Q_i], \forall i \in [1,3] \\ m_i \in \mathcal{S}_i, \forall i \in [1,3] \\ \omega(m_1 m_2 m_3) \leqslant k-2}} \sum_{\substack{x/m < r \leqslant (x+y_0)/m \\ r \in \mathbb{N}_{\mathcal{P}} \cap \mathcal{S}_\infty \\ \omega(r) = k - \omega(m)}} 1,$$

où $\mathcal{P}$ est l'ensemble des tous les nombres premiers sauf ceux appartenant à $\bigcup_{i=1}^{3}]P_i, Q_i]$. On définit $f := \mathbb{1}_{\mathbb{N}_{\mathcal{P}}}$ la fonction multiplicative indicatrice de l'ensemble $\mathbb{N}_{\mathcal{P}}$. On pose $k_m := k - \omega(m)$, que l'on peut supposer supérieur ou égal à 2, puisque l'on a $r \in \mathcal{S}_\infty$ et $mQ_\infty \leqslant Q_\infty \prod_{i=1}^{3} Q_i^{H_i \log Q_i} = X^{o(1)}$. On pose aussi $\kappa_m := (k_m - 1)/\log_2 X$. Ainsi, on a

$$\sum_{\substack{x/m<r\leqslant(x+y_0)/m\\ r\in\mathbb{N}_{\mathcal{P}}\cap\mathcal{S}_\infty\\ \omega(r)=k-\omega(m)}} 1 = \Sigma + O\left(\Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3\right),$$

où l'on a posé

$$\Sigma := \sum_{\substack{x/m<r\leqslant(x+y_0)/m\\ r\in\mathcal{E}_{k_m}}} f(r),$$

et

$$\Sigma_1 := \sum_{\substack{x/m<r\leqslant(x+y_0)/m\\ r\in\mathcal{E}_{k_m}\\ (r,\prod_{P_\infty<p\leqslant Q_\infty} p)=1}} 1, \quad \Sigma_2 := \sum_{\substack{x/m<r\leqslant(x+y_0)/m\\ r\in\mathcal{E}_{k_m}\\ \exists p\in]P_\infty,Q_\infty],\, p^2|r}} f(r), \quad \Sigma_3 := \sum_{\substack{x/m<r\leqslant(x+y_0)/m\\ r\in\mathcal{E}_{k_m}\\ \exists p\in]P_\infty,Q_\infty],\\ \exists |p-q|\leqslant 2p/H_\infty,\, pq|r}} f(r).$$

Avec le Lemme 2.5.1, on a facilement

$$\Sigma = \delta_{k_m}(X)\frac{y_0}{m}\big(1+o(1)\big)\prod_{i=1}^{3}\left(\frac{\log P_i}{\log Q_i}\right)^{\kappa_m},$$

$$\Sigma_2 + \Sigma_3 \ll \left(\frac{1}{P_\infty} + \frac{\log\left(\frac{\log Q_\infty}{\log P_\infty}\right)}{H_\infty}\right)\Sigma = o(\Sigma).$$

Par ailleurs, avec le Lemme 2.5.2, il existe une constante $c = c(\varepsilon) > 0$ fixée telle que $\Sigma_1 \leqslant \big(1 - c + o(1)\big)\Sigma$. On obtient donc

$$\sum_{\substack{x/m<r\leqslant(x+y_0)/m\\ r\in\mathbb{N}_{\mathcal{P}}\cap\mathcal{S}_\infty\\ \omega(r)=k-\omega(m)}} 1 \asymp \delta_{k_m}(X)\frac{y_0}{m}\left(\frac{\log P_3}{\log Q_3}\right)^{\kappa_m}.$$

Par ailleurs, on a

$$\delta_{k_m}(X)\left(\frac{\log P_3}{\log Q_3}\right)^{\kappa_m} \asymp \delta_k(X)\mathrm{e}^{-\frac{k\log_3 X}{\log_2 X}} A^{\omega(m)}\prod_{a=1}^{\omega(m)}\left(1-\frac{a}{k}\right),$$

où l'on a posé $A := (k/\log_2 X)\mathrm{e}^{(\log_3 X)/\log_2 X}$. Pour conclure, il suffit donc de montrer que l'on a

$$\mathcal{D} := \sum_{\substack{m_i,\,\forall i\in[1,3]\\ p|m_i\Rightarrow p\in]P_i,Q_i],\,\forall i\in[1,3]\\ m_i\in\mathcal{S}_i,\,\forall i\in[1,3]\\ \omega(m_1m_2m_3)\leqslant k-2}} \frac{A^{\omega(m)}}{m}\prod_{a=1}^{\omega(m)}\left(1-\frac{a}{k}\right) \asymp \frac{k^2}{(\log_2 X)^2}\left(\mathrm{e}^{\frac{k\log_3 X}{\log_2 X}} - 1\right).$$

On commence par minorer $\mathcal{D}$. En moyenne, un entier ayant k facteurs premiers en a environ $(k\log_3 X)/\log_2 X \leqslant \log_3 X$ dans l'intervalle $]P_3, Q_3]$. On minore alors $\mathcal{D}$ efficacement en écrivant

$$\mathcal{D} \geqslant \sum_{\substack{p_1\in]P_1,Q_1]\\ p_2\in]P_2,Q_2]}} \frac{A^2}{p_1p_2} \sum_{N=1}^{\lceil (2k\log_3 X)/\log_2 X\rceil} \frac{A^N}{N!}\left(1-\frac{N+2}{k}\right)^{N+2} \sum_{q_1,\dots,q_N\in]P_3,Q_3]} \frac{\mathbb{1}_{q_1\cdots q_N\in\mathcal{S}_3}}{q_1\cdots q_N}.$$

Pour les k et N considérés, on a uniformément $\big(1-(N+2)/k\big)^{N+2} \gg 1$. On note que si $q_1\cdots q_N \in \mathcal{S}_3$, alors les $q_1,\dots,q_N$ sont deux à deux distincts. On pose

$$M := \sum_{P_3<p\leqslant Q_3} \frac{1}{p} = \log_3 X\left(1+O\left(\frac{1}{\log_2 X}\right)\right).$$

On a alors, pour $2\leqslant N\leqslant \log_3 X$,

$$\begin{aligned}\sum_{q_1,\dots,q_N\in]P_3,Q_3]} \frac{\mathbb{1}_{q_1\cdots q_N\in\mathcal{S}_3}}{q_1\cdots q_N} &= M^N + O\left(N^2 \sum_{P_3<p\leqslant Q_3} \frac{M^{N-2}}{p^2} + N^2 \sum_{\substack{P_3<p\leqslant Q_3\\ |p-q|\leqslant 2p/H_3}} \frac{M^{N-2}}{pq}\right)\\ &= M^N(1+o(1)).\end{aligned}$$

Ainsi, puisque $AM = (k\log_3 X)/\log_2 X\big(1+o(1)\big)$, on obtient

$$\mathcal{D} \gg A^2 \sum_{N=1}^{\lceil (2k\log_3 X)/\log_2 X\rceil} \frac{(AM)^N}{N!} \gg A^2\left(\mathrm{e}^{AM}-1\right) \gg \frac{k^2}{(\log_2 X)^2}\left(\mathrm{e}^{\frac{k\log_3 X}{\log_2 X}}-1\right).$$

Il nous reste désormais à majorer $\mathcal{D}$. Pour cela, on écrit

$$\mathcal{D} \leqslant \prod_{i=1}^{3}\left\{\prod_{P_i<p_i\leqslant Q_i}\left(1+\frac{A}{p}\right)-1\right\},$$

ce qui fournit aisément le résultat recherché. □

Démonstration du Théorème 2.1.2. On peut déjà supposer $k\leqslant(\log_2 X)/4$ grâce au Théorème 2.1.1. Par ailleurs, le résultat est directement vrai lorsque $X<h\leqslant \delta_k(X)^{-1}X$ d'après le Lemme 2.5.1. On pose désormais $\delta(X) := \delta_k(X)/F_k(X)$. En conservant les notations introduites depuis la sous-section 2.7.1, d'après le lemme précédent, il suffit donc de démontrer que l'on a

$$\frac{1}{X}\int_X^{2X}\left|\frac{1}{h}\sum_{\substack{x<n\leqslant x+h\\ n\in\mathcal{E}_k\cap\mathcal{S}}} 1 - \frac{1}{y_0}\sum_{\substack{x<n\leqslant x+y_0\\ n\in\mathcal{E}_k\cap\mathcal{S}}} 1\right|^2 \mathrm{d}x = o\big(\delta(X)^2\big)$$

dès que $\delta(X)^{-1}Q_1\leqslant h\leqslant X$ et X tend vers l'infini. La preuve suit le même schéma que celle du Théorème 2.3.1. D'après les Lemmes 2.2.1 et 2.2.2, il suffit de montrer que pour $T_0<T\leqslant X$, on a

$$\int_{T_0}^{T} |B(1+it)|^2\,\mathrm{d}t = o\left(\left(\frac{TQ_1}{\delta(X)X}+1\right)\delta(X)^2\right), \tag{2.7.42}$$

lorsque X tend vers l'infini, où l'on a posé

$$B(s) := \sum_{\substack{n\sim X\\ s\in\mathcal{E}_k\cap\mathcal{S}}} \frac{1}{n^s}. \qquad (s\in\mathbb{C})$$

La factorisation (2.4.12) du polynôme de Dirichlet B est toujours valable avec $\mathcal{A}=\mathcal{E}_k$ pour $\mathcal{A}'$ l'ensemble défini de la même manière que dans l'hypothèse 5 du Théorème 2.3.1. On définit alors quatre ensembles $\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2,\mathcal{T}_3,\mathcal{U}$, de la même façon qu'à la section 2.4.4 via (2.4.14) et (2.4.15). On majore alors l'intégrale de (2.7.42) successivement sur $\mathcal{T}_1$, puis $\mathcal{T}_2$ et $\mathcal{T}_3$, et enfin sur $\mathcal{U}$.

Cas de $\mathcal{T}_1$: Avec (2.4.12) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\int_{\mathcal{T}_1} |B(1+it)|^2\,\mathrm{d}t \ll |\mathcal{I}_1| \sum_{v\in\mathcal{I}_1}\int_{\mathcal{T}_1} |Q_{v,H_1}(1+it)R_{v,H_1}(1+it)|^2\,\mathrm{d}t + \int_{\mathcal{T}_1}|N_{H_1}(1+it)|^2\,\mathrm{d}t.$$

On traite d'abord l'intégrale de $|N_{H_1}(1+it)|^2$. Ce polynôme de Dirichlet est supporté sur les entiers $n\in\mathcal{E}_k\cap\mathcal{S}\cap\left]2X,2X\mathrm{e}^{1/H_1}\right]$. On majore son intégrale grâce au Lemme 2.2.3. Le Lemme 2.7.1 permet de traiter la première somme associée à (2.2.3). On majore maintenant la seconde somme. En décomposant tout entier $n\in\mathcal{E}_k\cap\mathcal{S}$ sous l'unique forme $m_1m_2m_3r$ où, pour $i\in\{1,3\}$, m_i contient tous les facteurs premiers de n dans $]P_i,Q_i]$, on obtient, pour $1\leqslant b\leqslant 2X\mathrm{e}^{1/H_1}/T$ et X suffisamment grand,

$$\sum_{\substack{2X<n\leqslant 2X\mathrm{e}^{1/H_1}\\ n,n+b\in\mathcal{E}_k\cap\mathcal{S}}} 1 \leqslant \sum_{\substack{m_i,m_i',\ \forall 1\leqslant i\leqslant 3\\ p|m_im_i'\Rightarrow p\in]P_i,Q_i],\forall 1\leqslant i\leqslant 3\\ m_i,m_i'\in\mathcal{S}_i,\forall 1\leqslant i\leqslant 3\\ \omega(m_1m_2m_3),\omega(m_1'm_2'm_3')\leqslant k-1\\ (m_i,m_i')|b,\forall 1\leqslant i\leqslant 3}} \sum_{\substack{2X<n\leqslant 2X\mathrm{e}^{1/H_1}\\ m_1m_2m_3|n\\ m_1'm_2'm_3'|n+b\\ \omega_{\mathcal{P}}(n)=k-\omega(m_1m_2m_3)\\ \omega_{\mathcal{P}}(n+b)=k-\omega(m_1'm_2'm_3')\\ n/(m_1m_2m_3),(n+b)/(m_1'm_2'm_3')\in\mathbb{N}_{\mathcal{P}}}} 1,$$

où l'on pose encore $\mathcal{P}$ l'ensemble de tous les nombres premiers sauf ceux de $\bigcup_{i=1}^3]P_i,Q_i]$. Pour ce choix de $\mathcal{P}$, avec la notation (2.5.31) et la formule de Mertens, on a

$$E(x)=\log_2 x\left(1-\frac{\log_3 x+O(1)}{\log_2 x}\right).$$

On pose $m:=m_1m_2m_3$ et $m':=m_1'm_2'm_3'$. On remarque, dans la somme ci-dessus, que l'on a $m,m'\leqslant\prod_{i=1}^3 Q_i^{H_i\log Q_i}=X^{o(1)}$. Pour majorer la dernière somme, on peut alors appliquer le point 2 du Théorème 2.5.3 en paramétrant n modulo $mm'/(m,m')$. On obtient alors l'existence d'une constante $K>0$ telle que

$$\sum_{\substack{2X<n\leqslant 2X\mathrm{e}^{1/H_1}\\ m|n,\,m'|n+b\\ \omega_{\mathcal{P}}(n)=k-\omega(m)\\ \omega_{\mathcal{P}}(n+b)=k-\omega(m')\\ n/m,\,(n+b)/m'\in\mathbb{N}_{\mathcal{P}}}} 1 \ll \frac{b^K(m,m')}{\varphi(b)^K\varphi(m)\varphi(m')}\frac{X}{H_1(\log X)^2}\frac{E(X)^{2k-\omega(m)-\omega(m')-2}}{(k-\omega(m)-1)!\,(k-\omega(m')-1)!}.$$

Or, on a supposé $k\leqslant(\log_2 X)/4\leqslant E(X)/2$ lorsque X est suffisamment grand. Donc, par un calcul élémentaire, on obtient

$$\frac{1}{(\log X)^2}\frac{E(X)^{2k-\omega(m)-\omega(m')-2}}{(k-\omega(m)-1)!\,(k-\omega(m')-1)!} \ll \delta_k(X)^2\mathrm{e}^{-\frac{2(k-1)\log_3 X}{\log_2 X}}\left(\frac{k}{E(X)}\right)^{\omega(m)+\omega(m')},$$

et ainsi

$$\sum_{\substack{2X<n\leqslant 2X\mathrm{e}^{1/H_1}\\ n,n+b\in\mathcal{E}_k\cap\mathcal{S}}} 1 \ll \frac{b^K}{\varphi(b)^K}\delta_k(X)^2\frac{X}{H_1}\mathrm{e}^{-\frac{2k\log_3 X}{\log_2 X}}$$
$$\times\prod_{i=1}^{3}\sum_{\substack{m_i,m_i'\\ p|m_im_i'\Rightarrow p\in]P_i,Q_i]\\ m_i,m_i'\in\mathcal{S}_i\\ (m_i,m_i')|b}}\frac{(m_i,m_i')}{\varphi(m_i)\varphi(m_i')}\left(\frac{k}{E(X)}\right)^{\omega(m_i)+\omega(m_i')}.$$

Pour $i\in\{1,2\}$, on majore directement la somme ci-dessus en utilisant essentiellement le fait que $\log Q_i\ll\log P_i$.

$$\sum_{\substack{m_i,m_i'\\ p|m_im_i'\Rightarrow p\in]P_i,Q_i]\\ m_i,m_i'\in\mathcal{S}_i\\ (m_i,m_i')|b}}\frac{(m_i,m_i')}{\varphi(m_i)\varphi(m_i')}\left(\frac{k}{E(X)}\right)^{\omega(m_i)+\omega(m_i')}$$
$$\leqslant\sum_{s,s'\geqslant 1}\left(\frac{k}{E(x)}\right)^{s+s'}\sum_{\substack{m_i,m_i'\\ p|m_im_i'\Rightarrow p\in]P_i,Q_i]\\ m_i,m_i'\in\mathcal{S}_i\\ (m_i,m_i')|b\\ \omega(m_i)=s,\,\omega(m_i')=s'}}\frac{(m_i,m_i')}{\varphi(m_i)\varphi(m_i')},$$

où la dernière somme se majore uniformément de manière grossière par

$$\prod_{P_i<p\leqslant Q_i}\left(1+\frac{2}{\varphi(p)}+\frac{p}{\varphi(p)^2}\right)\ll 1.$$

Il s'ensuit que pour $i\in\{1,2\}$, on a

$$\sum_{\substack{m_i,m_i'\\ p|m_im_i'\Rightarrow p\in]P_i,Q_i]\\ m_i,m_i'\in\mathcal{S}_i\\ (m_i,m_i')|b}}\frac{(m_i,m_i')}{\varphi(m_i)\varphi(m_i')}\left(\frac{k}{E(X)}\right)^{\omega(m_i)+\omega(m_i')}\ll\left(\frac{k}{E(x)}\right)^2\ll\left(\frac{k}{\log_2 X}\right)^2.$$

Pour obtenir une majoration adéquate pour

$$\sum_{1\leqslant b\leqslant 2X\mathrm{e}^{1/H_1}/T}\ \sum_{\substack{2X<n\leqslant 2X\mathrm{e}^{1/H_1}\\ n,\,n+b\in\mathcal{E}_k\cap\mathcal{S}}}1,$$

il suffit alors de montrer que l'on a

$$\mathrm{e}^{-\frac{2k\log_3 X}{\log_2 X}}\sum_{\substack{m_3,m_3'\\ p|m_3m_3'\Rightarrow p\in]P_3,Q_3]\\ m_3,m_3'\in\mathcal{S}_3\\ (m_3,m_3')|b}}\frac{(m_3,m_3')}{\varphi(m_3)\varphi(m_3')}\left(\frac{k}{E(X)}\right)^{\omega(m_3)+\omega(m_3')}\ll\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{k\log_3 X}{\log_2 X}}\right)^2.$$

On pose $A := k/E(X)$, qui est inférieur à $1/2$ lorsque X est suffisamment grand. La somme ci-dessus est alors inférieure à

$$\prod_{P_3<p\leqslant Q_3}\left(1+\frac{2A}{p-1}+\frac{pA^2\mathbb{1}_{p|b}}{(p-1)^2}\right)-2\prod_{P_3<p\leqslant Q_3}\left(1+\frac{A}{p-1}\right)+1.$$

Cela est obtenu par multiplicativité, en ajoutant et retranchant les cas où l'un des m_3, m_3' vaut 1, et en omettant le fait que m_3 et m_3' n'ont pas deux facteurs premiers « trop proches ». Avec des notations évidentes, on note la quantité ci-dessus $\Pi_1 - 2\Pi_2 + 1$. On majore le premier produit en utilisant l'inégalité $1+2u+v \leqslant (1+u)^2\mathrm{e}^v$, pour tous $u, v \geqslant 0$. En posant

$$S := A^2 \sum_{\substack{P_3<p\leqslant Q_3\\ p|b}} \frac{p}{(p-1)^2},$$

on obtient donc

$$\Pi_1 - 2\Pi_2 + 1 \leqslant \Pi_2^2(\mathrm{e}^S - 1) + (\Pi_2 - 1)^2,$$

où

$$\Pi_2 = \mathrm{e}^{A\log_3 X}\left(1+O\left(\frac{A}{\log_2 X}\right)\right),$$
$$S \ll \frac{A^2\log b}{P_3}.$$

Ainsi,

$$\Pi_1 - 2\Pi_2 + 1 \ll \left(\mathrm{e}^{\frac{k\log_3 X}{\log_2 X}} - 1\right)^2,$$

et on a finalement la majoration

$$\sum_{1\leqslant b\leqslant 2X\mathrm{e}^{1/H_1}/T}\ \sum_{\substack{2X<n\leqslant 2X\mathrm{e}^{1/H_1}\\ n,\,n+b\in\mathcal{E}_k\cap\mathcal{S}}} 1 \ll \frac{X^2}{TH_1}\delta(X)^2,$$

qui est convenable. Pour majorer l'intégrale de $|Q_{v,H_1}(1+it)R_{v,H_1}(1+it)|^2$, il suffit d'appliquer la même méthode que dans la démonstration du Théorème 2.3.1 – *cf.* page 46 –, et d'utiliser le Théorème 2.5.3 de la même manière que ci-dessus. Il faut cependant décomposer les entiers $n \in \mathcal{A}'$ sous la forme m_2m_3r seulement. Cela a pour incidence, par rapport au cas de $\int_{\mathcal{T}_1}|N_{H_1}(1+it)|^2\,\mathrm{d}t$ que l'on vient de traiter, de remplacer la quantité $\delta_k(X)/F_k(X)$ par $\delta_{k-1}(X)/G_k(X)$ où

$$G_k(X) := \frac{\log_2 X}{k}\left(1-\exp\left(-\frac{k\log_3 X}{\log_2 X}\right)\right)^{-1}.$$

Mais ces quantités sont en fait égales à un facteur borné près. On n'expose pas les calculs, qui sont plus simples que ceux du cas de $\mathcal{T}_2$, que l'on présente ci-dessous. On obtient alors

$$\int_{\mathcal{T}_1}|B(1+it)|^2\,\mathrm{d}t \ll \left(\frac{TQ_1}{\delta(X)X}+1\right)\delta(X)^2\left(H_1^2(\log Q_1)P_1^{-2\alpha_1}+\frac{1}{H_1}\right).$$

Cas de $\mathcal{T}_2$: On applique la même méthode que dans la démonstration du Théorème 2.3.1, dont on reprend les notations (*cf.* page 46). On majore $\int_{\mathcal{T}_2}|N_{H_2}(1+it)|^2\,\mathrm{d}t$ de

manière analogue à $\int_{\mathcal{T}_1} |N_{H_1}(1+it)|^2 \,\mathrm{d}t$ ci-dessus. Pour le reste, on est amené à majorer, pour $u_1 \in \mathcal{I}_1$ et $v_2 \in \mathcal{I}_2$,

$$\int_{\mathcal{T}_{2,u_1}} \left| Q_{u_1,H_1}(1+it)^\ell R_{v_2,H_2}(1+it) \right|^2 \mathrm{d}t,$$

où $\ell := \lceil (\log Y_2)/\log Y_1 \rceil = \lceil v_2 H_1/(u_1 H_2) \rceil$. On écrit le polynôme de Dirichlet $Q^\ell_{u_1,H_1} R_{v_2,H_2}$ sous la forme

$$Q_{u_1,H_1}(s)^\ell R_{v_2,H_2}(s) = \sum_{X \leqslant n \leqslant 2^{\ell+1} Y_1 X} \frac{a_n}{n^s}, \qquad (s \in \mathbb{C})$$

où les a_n sont uniquement déterminés. Si a_n est non nul, alors n peut s'écrire sous la forme $n = m_1 m_3 \mathfrak{m} r$ où $m_3 \in \mathcal{S}_3$ est le produit des facteurs premiers de n dans $]P_3, Q_3]$, $\mathfrak{m}$ est un produit de ℓ facteurs premiers de $]Y_1, Y_1 \mathrm{e}^{1/H_1}] \cap]P_1, Q_1]$, $m_1 \in \mathcal{S}_1$ est le produit des facteurs premiers de $n/\mathfrak{m}$ dans $]P_1, Q_1]$, $r \in \mathcal{S}_\infty$ n'a aucun facteur premier dans $]P_i, Q_i]$ pour $i \in \{1,3\}$, et $\omega(m_1 m_3 r) = k-1$. Ainsi, on a

$$0 \leqslant a_n \leqslant \sum_{\substack{m_1, m_3 \\ p|m_i \Rightarrow p \in]P_i, Q_i], \forall i \in \{1,3\} \\ m_i \in \mathcal{S}_i, \forall i \in \{1,3\} \\ \omega_{\mathcal{P}}(n) = k-1-\omega(m_1 m_3)}} \sum_{\substack{p_1, \dots, p_\ell \sim Y_1 \\ P_1 < p_1, \dots, p_\ell \leqslant Q_1 \\ m_1 m_3 p_1 \cdots p_\ell | n \\ n/(m_1 m_3 p_1 \cdots p_\ell) \in \mathbb{N}_{\mathcal{P}} \cap \mathcal{S}_\infty}} 1 \leqslant (\ell+1)!, \tag{2.7.43}$$

où $\mathcal{P}$ est cette fois l'ensemble de tous les nombres premiers sauf ceux de $]P_1, Q_1] \cup]P_3, Q_3]$. Comme précédemment, on majore alors l'intégrale de $|Q^\ell_{u_1,H_1} R_{v_2,H_2}|^2$ grâce au Lemme 2.2.3. On commence alors par traiter la somme associée à la première somme de (2.2.3). On a

$$\sum_{X \leqslant n \leqslant 2^{\ell+1} Y_1 X} \left| \frac{a_n}{n} \right|^2 \leqslant \frac{(\ell+1)!}{X^2} \sum_{\substack{m_1, m_3 \\ p|m_i \Rightarrow p \in]P_i, Q_i], \forall i \in \{1,3\} \\ m_i \in \mathcal{S}_i, \forall i \in \{1,3\} \\ \omega(m_1 m_3) \leqslant k-2}} \sum_{p_1, \dots, p_\ell \sim Y_1} \sum_{\substack{X \leqslant m_1 m_3 p_1 \cdots p_\ell r \leqslant 2^{\ell+1} Y_1 X \\ \omega(r) = k-1-\omega(m_1 m_3) \\ r \in \mathbb{N}_{\mathcal{P}}}} 1.$$

On majore la dernière somme avec le point 1 du Théorème 2.5.3. Ainsi, puisque l'on a

$$E(x) = \log_2 X \left(1 - \frac{\log_3 X + O(1)}{\log_2 X} \right)$$

et $m_1 m_3 p_1 \cdots p_\ell = X^{o(1)}$, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{X \leqslant m_1 m_3 p_1 \cdots p_\ell r \leqslant 2^{\ell+1} Y_1 X \\ \omega(r) = k-1-\omega(m_1 m_3) \\ r \in \mathbb{N}_{\mathcal{P}}}} 1 &\ll \frac{2^{\ell+1} Y_1 X}{\log X} \frac{E(X)^{k-2-\omega(m_1 m_3)}}{(k-2-\omega(m_1 m_3))!} \frac{1}{m_1 m_3 p_1 \cdots p_\ell} \\ &\ll \delta_{k-1}(X) 2^\ell Y_1 X \mathrm{e}^{-\frac{k \log_3 X}{\log_2 X}} \left(\frac{k}{E(X)} \right)^{\omega(m_1 m_3)} \frac{1}{m_1 m_3 p_1 \cdots p_\ell}. \end{aligned}$$

En sommant sur les $p_1, \dots, p_\ell$, puis m_1 et m_3, on obtient alors

$$\sum_{X \leqslant n \leqslant 2^{\ell+1} Y_1 X} \left| \frac{a_n}{n} \right|^2 \ll \frac{(\ell+1)! 2^\ell Y_1}{X} \delta(X).$$

Pour obtenir l'inégalité ci-dessus, la somme sur m_3 est la plus délicate à majorer, et se traite de manière analogue à la double somme sur m_3, m_3' vue dans le cas de $\mathcal{T}_1$. On majore désormais la somme associée au second terme de (2.2.3). Pour $1 \leqslant b \leqslant 2^{\ell+1} Y_1 X/T$, en

utilisant (2.7.43) et les décompositions $n = m_1 m_3 \mathfrak{m} r$ et $n+b = m_1' m_3' \mathfrak{m}' r'$ avec $\mathfrak{m} = p_1 \cdots p_\ell$ et $\mathfrak{m}' = q_1 \cdots q_\ell$, on écrit

$$\begin{aligned}\sum_{X \leqslant n \leqslant 2^{\ell+1} Y_1 X} \frac{|a_n a_{n+b}|}{n(n+b)} \\ \ll \sum_{\substack{m_1, m_1', m_3, m_3' \\ p | m_i m_i' \Rightarrow p \in]P_i, Q_i] \\ m_i, m_i' \in \mathcal{S}_i \\ \omega(m_1 m_3), \omega(m_1' m_3') \leqslant k-2 \\ (m_i, m_i') | b, \forall i \in \{1,3\}}} \sum_{\substack{p_1, \ldots, p_\ell \sim Y_1 \\ q_1, \ldots, q_\ell \sim Y_1 \\ (m_1 m_3 \mathfrak{m}, m_1' m_3 \mathfrak{m}') | b}} \sum_{\substack{X \leqslant n \leqslant 2^{\ell+1} Y_1 X \\ m_1 m_3 \mathfrak{m} | n \\ m_1' m_3' \mathfrak{m}' | n+b \\ \omega(n/(m_1 m_3 \mathfrak{m})) = k-1-\omega(m_1 m_3) \\ \omega((n+b)/(m_1' m_3' \mathfrak{m}')) = k-1-\omega(m_1' m_3') \\ n/(m_1 m_3 \mathfrak{m}), (n+b)/(m_1' m_3' \mathfrak{m}') \in \mathbb{N}_{\mathcal{P}}}} \frac{1}{X^2}. \end{aligned} \tag{2.7.44}$$

Grâce au deuxième point du Théorème 2.5.3, il existe une constante $K > 0$ telle que la dernière somme ci-dessus soit

$$\begin{aligned}\ll \frac{b^K}{\varphi(b)^K} 2^\ell Y_1 X \delta_{k-1}(X)^2 \mathrm{e}^{-\frac{2k \log_3 X}{\log_2 X}} \prod_{i \in \{1,3\}} \left(\frac{k}{E(X)}\right)^{\omega(m_i)+\omega(m_i')} \\ \times \frac{(m_1 m_3 p_1 \cdots p_\ell, m_1' m_3' q_1 \cdots q_\ell)}{\varphi(m_1)\varphi(m_3)\varphi(p_1)\cdots\varphi(p_\ell)\varphi(m_1')\varphi(m_3')\varphi(q_1)\cdots\varphi(q_\ell)}. \end{aligned} \tag{2.7.45}$$

Par ailleurs, pour tout entier $g \geqslant 1$, on a

$$\sum_{\substack{1 \leqslant b \leqslant 2^{\ell+1} Y_1 X/T \\ g | b}} \frac{b^K}{\varphi(b)^K} \ll \frac{g^{K-1}}{\varphi(g)^K} \frac{2^\ell Y_1 X}{T}.$$

On majore alors

$$\sum_{1 \leqslant b \leqslant 2^{\ell+1} Y_1 X/T} \sum_{X \leqslant n \leqslant 2^{\ell+1} Y_1 X} \frac{|a_n a_{n+b}|}{n(n+b)}$$

en reportant (2.7.45) dans (2.7.44) et en sommant d'abord par rapport à la variable b. En posant $g := (m_1 m_3 p_1 \cdots p_\ell, m_1' m_3' q_1 \cdots q_\ell)$, on est alors amené à majorer

$$\sum_{\substack{m_1, m_1', m_3, m_3' \\ p | m_i m_i' \Rightarrow p \in]P_i, Q_i], \forall i \in \{1,3\} \\ m_i, m_i' \in \mathcal{S}_i}} \sum_{\substack{p_1, \ldots, p_\ell \sim Y_1 \\ q_1, \ldots, q_\ell \sim Y_1}} \frac{\frac{g^K}{\varphi(g)^K} \prod_{i \in \{1,3\}} \left(\frac{k}{E(X)}\right)^{\omega(m_i)+\omega(m_i')}}{\varphi(m_1)\varphi(m_3)\varphi(p_1)\cdots\varphi(p_\ell)\varphi(m_1')\varphi(m_3')\varphi(q_1)\cdots\varphi(q_\ell)}$$

de façon convenable. Par ailleurs, on a

$$\frac{g^K}{\varphi(g)^K} \leqslant 2^{2K\ell} \frac{(m_1, m_1')^K}{\varphi((m_1, m_1'))^K} \frac{(m_3, m_3')^K}{\varphi((m_3, m_3'))^K}.$$

Ainsi, en suivant les calculs effectués dans le cas de $\mathcal{T}_1$, sachant que $\sum_{p \sim Y_1} 1/\varphi(p) \leqslant 2$, on trouve facilement

$$\sum_{1 \leqslant b \leqslant 2^{\ell+1} Y_1 X/T} \sum_{X \leqslant n \leqslant 2^{\ell+1} Y_1 X} \frac{|a_n a_{n+b}|}{n(n+b)} \ll \frac{2^{(2K+4)\ell} Y_1^2 \delta(X)^2}{T},$$

et donc

$$\int_{\mathcal{T}_{2,u_1}} \left| Q_{u_1,H_1}(1+it)^\ell R_{v_2,H_2}(1+it) \right|^2 \mathrm{d}t \ll \left(\frac{T}{\delta(X)X} + 1\right) \delta(X)^2 Y_1^2 (\ell!)^{1+o(1)}.$$

Finalement, on obtient

$$\int_{\mathcal{T}_2} |B(1+it)|^2 \mathrm{d}t \ll \left(\frac{T}{\delta(X)X}+1\right)\delta(X)^2\left(|\mathcal{I}_2|^2|\mathcal{I}_1|Q_1^{2+2\alpha_1}(\ell!)^{1+o(1)}Y_2^{-2(\alpha_2-\alpha_1)}+\frac{1}{H_2}\right).$$

On a par ailleurs $\ell\log\ell \leqslant (\log Y_2)(\log_2 Q_2)/(\log P_1-1)+\log_2 Q_2+1$. Ainsi, avec (2.7.41), le terme entre parenthèses après $\delta(X)^2$ ci-dessus tend bien vers 0 lorsque X tend vers l'infini.

Cas de $\mathcal{T}_3$: L'intégrale sur $\mathcal{T}_3$ se traite de la même manière que celle sur $\mathcal{T}_2$, *mutatis mutandis.*

Cas de $\mathcal{U}$: Il suffit de suivre le cas de $\mathcal{U}$ dans la preuve du Théorème 2.3.1, *mutatis mutandis.* □

Remerciements. Je tiens à exprimer toute ma gratitude à mon directeur de thèse, Régis de la Bretèche, pour son soutien précieux, ses nombreuses relectures et tous ses conseils, qui ont été essentiels à la rédaction de l'article ici reproduit. Je remercie par ailleurs Maksym Radziwiłł pour les échanges que nous avons eus, ainsi que Gérald Tenenbaum et Michel Balazard pour leurs remarques avisées.

Deuxième partie

Systèmes translatés

Table des matières

3 Concentrations simultanées de fonctions additives **79**
3.1 Introduction et énoncé des résultats 79
3.2 Majoration 81
3.3 Minoration 89

4 Théorème d'Erdős-Kac pour les translatés d'entiers ayant k facteurs premiers **93**
4.1 Présentation des résultats 93
4.2 Étude de la série génératrice 94
4.2.1 Moyenne d'une fonction multiplicative sur $\mathcal{E}_k(x)$ 94
4.2.2 Calcul de la série génératrice 96
4.3 Lois locales et répartition 98

3

Concentrations simultanées de fonctions additives

Abstract. We study the simultaneous concentrations of the values of several additive functions along polynomial shifts. Under a slight restriction, this yields an extension of a result from Halász in 1975.

3.1 Introduction et énoncé des résultats 79
3.2 Majoration 81
3.3 Minoration 89

3.1 Introduction et énoncé des résultats

Étant donné f une fonction additive et $r \geqslant 0$ une fonction multiplicative, pour tout $x \geqslant 2$ on note

$$E_f(x;r) := 1 + \sum_{\substack{p \leqslant x \\ f(p) \neq 0}} \frac{r(p)}{p},$$

et on pose $E_f(x;1) := E_f(x)$. En 1975, Halász [Hal75] montre qu'uniformément pour f additive et $x \geqslant 1$, on a

$$\sup_{k \in \mathbb{R}} \# \{n \leqslant x : \quad f(n) = k\} \ll \frac{x}{\sqrt{E_f(x)}}.$$

Dans le cas où $f = \omega$ est la fonction nombre de facteurs premiers, lorsque x est grand on a[1] $E_f(x) = \log_2 x + O(1)$, et la majoration est optimale à constante près lorsque l'entier k vérifie $k = \log_2 x + O(\sqrt{\log_2 x})$.

On s'intéresse à une généralisation de ce théorème lorsqu'on fixe plusieurs valeurs de fonctions additives. Il s'agit entre autres, étant données f et g deux fonctions additives, de majorer le cardinal

$$\sup_{k,k' \in \mathbb{R}} \# \left\{n \leqslant x : \quad f(n) = k,\ g(n+1) = k'\right\}.$$

Le cas $f = g = \omega$ a été traité dans [Gou17], puis repris avec plus de généralité dans [Ten18]. Il y est notamment montré

$$\sup_{k,k' \in \mathbb{Z}} \# \left\{n \leqslant x : \quad \omega(n) = k,\ \omega(n+1) = k'\right\} \ll \frac{x}{\log_2 x}. \tag{3.1.1}$$

1. Ici et dans la suite, on note $\log_k$ la k-ième itérée de la fonction log. ($k \geqslant 2$)

Dans ces deux articles, la majoration est même explicite en $k, k' \ll \log_2 x$. Ici, on traite le cas de fonctions additives quelconques, mais prenant peu de valeurs distinctes sur les puissances de grands nombres premiers. On note qu'en considérant

$$\mathcal{A} := \left\{ n \leqslant x : \quad \log_2 x - 10\sqrt{\log_2 x} \leqslant \omega(n), \omega(n+1) \leqslant \log_2 x + 10\sqrt{\log_2 x} \right\},$$

qui vérifie $|\mathcal{A}| \geqslant x/2$ lorsque x est assez grand, avec (3.1.1) on obtient

$$\sup_{k,k' \in \mathbb{Z}} \# \left\{ n \leqslant x : \quad \omega(n) = k,\ \omega(n+1) = k' \right\} \asymp \frac{x}{\log_2 x}.$$

On définit maintenant le cadre général d'étude. Étant donné $r \geqslant 1$ un entier fixé, comme dans [Ten18], on considère une famille $\{Q_j\}_{1 \leqslant j \leqslant r}$ de polynômes irréductibles de $\mathbb{Z}[X]$, deux à deux premiers entre eux et sans diviseur fixe. On pose $Q := \prod_{1 \leqslant j \leqslant r} Q_j$. Pour $m \geqslant 1$, on note $\rho_j(m)$ (*resp.* $\rho_0(m)$) le nombre de racines de Q_j (*resp.* de Q) dans $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, et D_j (*resp.* D) le discriminant de Q_j (*resp.* de Q). On note

$$g_j := \deg Q_j, \qquad (0 \leqslant j \leqslant r) \qquad\qquad g := g_0 = \sum_{1 \leqslant j \leqslant r} g_j,$$

$$Q(X) = \sum_{0 \leqslant i \leqslant g} \beta_i X^i, \qquad \beta := \beta_g, \qquad \|Q\| := \max_{0 \leqslant i \leqslant g} |\beta_i|,$$

$$\varphi_j(n) := n \prod_{p \mid n} \left(1 - \frac{\rho_j(p)}{p} \right), \qquad (n \geqslant 1,\ 0 \leqslant j \leqslant r)$$

où ici et dans la suite, p désigne un nombre premier. On rappelle quelques bornes classiques – *cf.* [Nag51, th. 51-52] et [Ste91, (44)]. Pour $0 \leqslant j \leqslant r$ et $\nu \geqslant 1$,

$$\rho_j(p^\nu) \leqslant \min(g_j p^{\nu-1}, g_j p^{\nu - \nu/g_j}, p^{\nu-1}\rho_j(p)), \qquad (p \geqslant 2) \tag{3.1.2}$$

$$\rho_j(p^\nu) = \rho_j(p) \leqslant \min(g_j, p-1). \qquad (p \nmid D_j,\ p \geqslant 2) \tag{3.1.3}$$

D'après [Lan27, *satz* 191] et [Ten90, lem. 3.1], il existe des constantes $M_j, M_j' \geqslant 1$ et une constante $c = c(g)$ telles que pour $1 \leqslant j \leqslant r$ et $x \geqslant 2$,

$$\left| \sum_{p \leqslant x} \frac{\rho_j(p)}{p} - \log_2 x \right| \leqslant M_j \tag{3.1.4}$$

$$\sum_{p \leqslant x} \rho_j(p) = \mathrm{li}(x) + O\big(M_j' + x\mathrm{e}^{-c\sqrt{\log x}}\big). \tag{3.1.5}$$

On pose $M := \sum_{1 \leqslant j \leqslant r} M_j$ et $M' := \sum_{1 \leqslant j \leqslant r} M_j'$. Étant donnée une fonction additive ou multiplicative définie sur $\mathbb{N}$, on l'étend naturellement à $\mathbb{Z}$ par parité et en fixant arbitrairement sa valeur en 0 à 0.

Théorème 3.1.1. *Soit $r, g, \mathfrak{V} \geqslant 1$ des entiers et $0 < \varepsilon, \delta, \lambda < 1$ des réels, tous fixés. Pour $x \geqslant 1$, on pose $z := \mathrm{e}^{(\log x)^{1-\lambda}}$. Il existe des constantes $K, c_0 > 0$ telles qu'uniformément pour $x \geqslant c_0 \|Q\|^\delta$, $x^\varepsilon < y \leqslant x$, et $f_1, \ldots, f_r$ des fonctions additives vérifiant, pour tout $1 \leqslant j \leqslant r$,*

$$\# \left\{ f_j(n) : \quad n \leqslant t^u,\ P^-(n) > t \right\} \leqslant \mathfrak{V}^u, \qquad (t \geqslant z,\ u \geqslant 1) \tag{$*$}$$

on a

$$\sup_{k_1, \ldots, k_r \in \mathbb{R}} \sum_{\substack{x < n \leqslant x+y \\ f_j(Q_j(n)) = k_j \quad (1 \leqslant j \leqslant r)}} 1 \ll \left(\frac{\beta D}{\varphi_0(\beta D)} \right)^K \frac{\mathrm{e}^{3M + M'/z} y}{\prod_{1 \leqslant j \leqslant r} \sqrt{E_{f_j}(x; \rho_j)}}, \tag{3.1.6}$$

La constante implicite, K et c_0 dépendent au plus de $r, g, \mathfrak{V}, \varepsilon, \delta$ et λ.

On note que dans beaucoup de cas d'étude, $M' \ll z$. En particulier, si les polynômes $Q_1, \dots, Q_r$ sont fixés, on obtient

$$\sup_{k_1,\dots,k_r\in\mathbb{R}} \sum_{\substack{x<n\leqslant x+y \\ f_j(Q_j(n))=k_j \quad (1\leqslant j\leqslant r)}} 1 \ll \frac{y}{\prod_{1\leqslant j\leqslant r}\sqrt{E_{f_j}(x;\rho_j)}}.$$

Par ailleurs, l'hypothèse $(*)$ ne fait pas intervenir les $f_j(p^\nu)$ pour $p \leqslant z$, et elle est automatiquement vérifiée si $f_j(p^\nu)$ ne dépend que de ν pour $p > z$. Par exemple, cela est vrai pour la fonction nombre de facteurs premiers, avec ou sans multiplicité. On mentionne aussi que

$$\frac{\beta D}{\varphi_0(\beta D)} \ll \left(\frac{\beta D}{\varphi(\beta D)}\right)^g.$$

Il serait intéressant de pouvoir se passer de l'hypothèse $(*)$, qui semble n'être qu'un artefact de la méthode employée.

Pour compléter le résultat, on s'intéresse à une borne inférieure pour le membre de gauche de (3.1.6).

Théorème 3.1.2. *Soit $r, g, \mathfrak{V} \geqslant 1$ des entiers et $0 < \varepsilon, \delta < 1$ des réels, tous fixés. On pose $\varepsilon_0 := \varepsilon/(50g)$ et on note $(*')$ la condition $(*)$ restreinte aux $t \geqslant x^{\varepsilon_0}$. Il existe une constante $c_0 > 0$ telle qu'uniformément pour $x \geqslant c_0\|Q\|^\delta$, et $f_1, \dots, f_r$ des fonctions additives vérifiant $(*')$, on a*

$$\sup_{k_1,\dots k_r\in\mathbb{R}} \sum_{\substack{x<n\leqslant x+y \\ f_j(Q_j(n))=k_j}} 1 \gg \frac{\mathrm{e}^{-M}y}{(\log x)^r} \sup_{k_1,\dots k_r\in\mathbb{R}} \prod_{1\leqslant j\leqslant r} \sum_{\substack{a_1,\dots,a_r\leqslant x^{\varepsilon_0} \\ f_j(a_j)=k_j \\ (a_i,a_j)=(a_j,\beta D)=1}} \frac{\rho_j(a_j)\varphi(a_j)}{a_j^2}, \tag{3.1.7}$$

et en particulier, en notant ω_y la fonction nombre de facteurs premiers distincts inférieurs ou égaux à y, uniformément pour $y_1, \dots, y_r \geqslant 1$,

$$\sup_{k_1,\dots k_r\in\mathbb{N}} \sum_{\substack{x<n\leqslant x+y \\ \omega_{y_j}(Q_j(n))=k_j}} 1 \gg \left(\frac{\varphi(\beta D)}{\beta D}\right)^g \frac{\mathrm{e}^{-2M}y}{\prod_{1\leqslant j\leqslant r}\sqrt{E_{\omega_{y_j}}(x;\rho_j)}}. \tag{3.1.8}$$

Les constantes implicites et c_0 dépendent au plus de $r, g, \mathfrak{V}, \varepsilon$ et δ

Dans le cas où les polynôme $Q_1, \dots, Q_r$ sont fixés et $f_j = \omega_{y_j}$ pour tout j, les estimations (3.1.6) et (3.1.8) sont du même ordre de grandeur.

3.2 Majoration

Dans cette section, on démontre le Théorème 3.1.1. Pour cela, on commence par démontrer deux lemmes.

Lemme 3.2.1. *Uniformément pour $B_n \geqslant 0$ $(n \in \mathbb{Z}^*)$ des réels, on a*

$$\int_0^1 \Big(1 + \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \sin^2(\pi n t)B_n\Big)\mathrm{e}^{-\sum_{n\in\mathbb{Z}^*}\sin^2(\pi n t)B_n}\mathrm{d}t \ll \frac{1}{\sqrt{1+\sum_{n\in\mathbb{Z}^*}B_n}}.$$

Démonstration. On montre d'abord qu'uniformément pour $B > 0$, on a

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-\sin^2(\pi t)B}\mathrm{d}t \ll \frac{1}{\sqrt{1+B}}.$$

En posant $\sin(\pi t)\sqrt{B} = u$, on obtient

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-\sin^2(\pi t)B}\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_0^{\sqrt{B}} \frac{\mathrm{e}^{-u^2}}{\sqrt{B-u^2}}\mathrm{d}u \ll \frac{1}{\sqrt{1+B}}.$$

Dans le cas général maintenant, quitte à ne sommer que sur les $B_n \neq 0$, on peut supposer que tous les B_n sont non nuls. De même, quitte à ne considérer que les sommes partielles pour $0 < |n| \leqslant N$ puis à faire tendre N vers $+\infty$, on suppose que $\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} B_n < \infty$. On définit alors, pour $n \in \mathbb{Z}^*$, le réel ϑ_n tel que $\vartheta_n B_n = \sum_{i\in\mathbb{Z}_*} B_i =: B$. On vérifie que $\sum_{n\in\mathbb{Z}^*} 1/\vartheta_n = 1$. Il vient

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \Big(1 + \sum_{n\in\mathbb{Z}^*} \sin^2(\pi n t)B_n\Big)\mathrm{e}^{-\sum_{n\in\mathbb{Z}^*}\sin^2(\pi n t)B_n}\mathrm{d}t & \\
&\leqslant 2\int_0^1 \prod_{n\in\mathbb{Z}^*}\Big(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sin^2(\pi n t)B_n}\Big)\mathrm{d}t \\
&\leqslant 2\prod_{n\in\mathbb{Z}^*}\Big(\int_0^1 \mathrm{e}^{-\sin^2(\pi n t)\frac{\vartheta_n}{2}B_n}\mathrm{d}t\Big)^{1/\vartheta_n} \\
&\leqslant 2\prod_{n\in\mathbb{Z}^*}\Big(\int_0^1 \mathrm{e}^{-\sin^2(\pi t)\frac{B}{2}}\mathrm{d}t\Big)^{1/\vartheta_n} \\
&\ll \frac{1}{\sqrt{1+B}},
\end{aligned}$$

où l'on a successivement utilisé $1 + x \leqslant 2\mathrm{e}^{x/2}$ pour $x \geqslant 0$, l'inégalité de Hölder et la 1-périodicité de $t \mapsto \sin^2(\pi t)$. □

On démontre maintenant une généralisation du théorème de Halász pour une seule fonction additive, dans le cas de poids non constants. Dans la suite, pour $1 \leqslant y \leqslant x$, on note

$$\mathcal{S}(x,y) := \big\{n \leqslant x : \quad P^+(n) \leqslant y\big\}, \tag{3.2.9}$$

l'ensemble des entiers y-friables inférieurs ou égaux à x. On utilise aussi la notation classique

$$\mathrm{Li}(t) := \int_2^t \frac{\mathrm{d}t}{\log t}. \qquad (t \geqslant 2)$$

Lemme 3.2.2. *Soient $\varepsilon, b, A > 0$ et $0 < \lambda < 1$ des constantes. Étant donné $y \geqslant 1$, on pose $z := \mathrm{e}^{(\log y)^{1-\lambda}}$. Uniformément pour $C, C' \geqslant 1$, $2 \leqslant y \leqslant x$ tels que $(\log y)^{\varepsilon(1-\lambda)} \geqslant (\log_2 x)^2$, f une fonction additive telle que*

$$\#\{f(p) : \quad t < p \leqslant t^{\mathrm{e}}\} \leqslant A, \qquad (z \leqslant t \leqslant y) \tag{3.2.10}$$

et $r \geqslant 0$ une fonction multiplicative telle que

$$\max_{p\leqslant y} r(p) \leqslant A, \qquad \sum_{\substack{p\leqslant y\\ \nu\geqslant 2}} \frac{r(p^\nu)\log(p^\nu)}{p^\nu} \leqslant A, \tag{3.2.11}$$

$$\Big|\sum_{p\leqslant t}\frac{r(p)}{p} - b\log_2 t\Big| \leqslant C, \qquad (2 \leqslant t \leqslant y) \tag{3.2.12}$$

pour laquelle il existe une fonction multiplicative $\widetilde{r}$ telle que

$$\sum_{p\leqslant y}\frac{|r(p)-\widetilde{r}(p)|}{p}\leqslant A, \tag{3.2.13}$$

$$\left|\sum_{p\leqslant t}\widetilde{r}(p)-b\mathrm{Li}(t)\right|\leqslant A\left(C'+\frac{t}{(\log t)^{1+\varepsilon}}\right),\qquad (2\leqslant t\leqslant y) \tag{3.2.14}$$

on a, en posant $u:=(\log x)/\log y$,

$$\sup_{k\in\mathbb{R}}\sum_{\substack{n\in\mathcal{S}(x,y)\\ f(n)=k}}r(n)\ll\frac{\mathrm{e}^{2C+C'/z}x(\log x)^{b-1}\log(1+u)}{u^b\sqrt{E_f(y;r)}},$$

où la constante implicite dépend au plus de ε, b, A et λ.

On note que la condition (3.2.10) peut être affaiblie en

$$\#\left\{f(p)\ :\quad t<p\leqslant t^{1+c}\right\}\leqslant A\qquad\qquad (z\leqslant t\leqslant y)$$

avec $c:=(\log_2 x)^2/(\log y)^{\varepsilon(1-\lambda)}\leqslant 1$, par adaptation directe de la méthode. Il est par ailleurs possible de démontrer une version uniforme en ε. La démonstration est fortement inspirée de [BT18, th. 1.1].

Démonstration. Comme le fait remarquer Halász au début de la démonstration du théorème de [Hal75], quitte à modifier f d'une manière précise, on peut supposer qu'elle est à valeurs entières. La construction qu'il emploie garantit que le nombre de valeurs prises par $f(p)$ n'augmente pas, et que la somme étudiée ne peut qu'augmenter tandis que $E_f(y;r)$ demeure identique. Ainsi, en posant $R(t):=\sum_{n\in\mathcal{S}(x,y)}r(n)\mathrm{e}^{2i\pi f(n)t}$, pour tout $k\in\mathbb{Z}$ on a

$$\sum_{\substack{n\in\mathcal{S}(x,y)\\ f(n)=k}}r(n)=\int_0^1 R(t)\mathrm{e}^{-2ik\pi t}\mathrm{d}t\leqslant\int_0^1|R(t)|\mathrm{d}t.$$

En utilisant (3.2.11) et (3.2.12), on applique le théorème 1.1 de [Ten17] avec $T:=(\log_2 x)^2$ et on utilise la démonstration du corollaire 2.1 de ce même article, pour obtenir uniformément pour $t\in[0,1]$,

$$|R(t)|\ll\mathrm{e}^C x(\log x)^{b-1}\frac{\log(1+u)}{u^b}\left\{\frac{1+m(t)}{\mathrm{e}^{m(t)}}+\frac{1}{\log_2 x}\right\} \tag{3.2.15}$$

où

$$m(t):=\min_{|\tau|\leqslant(\log_2 x)^2}\sum_{p\leqslant y}\frac{r(p)(1-\cos(2\pi f(p)t-\tau\log p))}{p}.$$

On pose, pour $k\geqslant 0$ et $t\in[0,1]$,

$$\gamma_{k,t}(\vartheta):=1-\max_{\substack{k<\log_2 p\leqslant k+1\\ z<p\leqslant y}}\cos(2\pi f(p)t-\vartheta),\qquad (\vartheta\in\mathbb{R})$$

$$s_t:=\min_{k\geqslant 0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\gamma_{k,t}(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta\geqslant 1-\frac{A}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{A}\right)\gg 1,$$

avec la convention $\max_\emptyset = 0$. Dans la définition de $\gamma_{k,t}$, on rappelle que $f(p)$ prend au plus A valeurs différentes lorsque $k < \log_2 p \leqslant k+1$. Pour tous $z \leqslant y_0 \leqslant y$, on a alors pour un certain $|\tau| \leqslant (\log_2 x)^2$,

$$\begin{aligned} m(t) &\geqslant \sum_{k\geqslant 0} \sum_{\substack{k<\log_2 p\leqslant k+1\\ y_0<p\leqslant y}} \frac{r(p)\gamma_{k,t}(\tau\log p)}{p} \\ &\geqslant \sum_{k\geqslant 0} \sum_{\substack{k<\log_2 p\leqslant k+1\\ y_0<p\leqslant y}} \frac{\widetilde{r}(p)\gamma_{k,t}(\tau\log p)}{p} - A, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé (3.2.13). De manière analogue à [Ten15, lem. III.4.13], on estime la somme ci-dessus avec (3.2.14), par sommation par parties. On obtient ainsi, uniformément pour $z \leqslant y_0 \leqslant y$ et $t \in [0,1]$, lorsque $\tau \neq 0$,

$$\begin{aligned} m(t) &\geqslant s_t b \log\left(\frac{\log y}{\log y_0}\right) + O\left(\sum_{\log_2 y_0 - 1 < k \leqslant \log_2 y} \frac{1}{|\tau|\mathrm{e}^k} + (1+|\tau|)\left(\frac{1}{(\mathrm{e}^k)^\varepsilon} + \frac{C'}{\mathrm{e}^{\mathrm{e}^k}}\right)\right) \\ &\geqslant s_t b \log\left(\frac{\log y}{\log y_0}\right) + O\left(\frac{1}{|\tau|\log y_0} + (1+|\tau|)\left(\frac{1}{(\log y_0)^\varepsilon} + \frac{C'}{y_0^{1/\mathrm{e}}}\right)\right). \end{aligned}$$

Si $1 \leqslant |\tau| \leqslant (\log_2 x)^2$, on pose $y_0 := z^{3\mathrm{e}}$. Puisque $(\log y)^{\varepsilon(1-\lambda)} \geqslant (\log_2 x)^2$, on obtient

$$m(t) \geqslant \lambda s_t b \log_2 y + O\left(1 + \frac{C'}{z^2}\right).$$

On définit ensuite w tel que

$$\log w = 2\mathrm{e}(\log y)\exp\left(-\frac{\lambda}{b}\left\{\sum_{v\in\mathbb{Z}^*} \sin^2(\pi v t) \sum_{\substack{p\leqslant y\\ f(p)=v}} \frac{r(p)}{p} - 2C\right\}\right).$$

D'après (3.2.12), on a $w \geqslant z^{2\mathrm{e}}$. Si $w \geqslant y$, on retient trivialement que $m(t) \geqslant 0$. Dans le cas contraire, si $1/\log w < |\tau| \leqslant 1$, avec $y_0 := w$, on obtient

$$m(t) \geqslant \lambda s_t \left\{\sum_{v\in\mathbb{Z}^*} \sin^2(\pi v t) \sum_{\substack{p\leqslant y\\ f(p)=v}} \frac{r(p)}{p} - 2C\right\} + O\left(1 + \frac{C'}{z^2}\right).$$

Enfin, lorsque $|\tau| \leqslant 1/\log w$, on minore trivialement

$$\begin{aligned} m(t) &\geqslant \sum_{p\leqslant w} \frac{r(p)(1-\cos(2\pi f(p)t))}{p} + O(1) \\ &= 2\sum_{v\in\mathbb{Z}^*} \sin^2(\pi v t) \sum_{\substack{p\leqslant w\\ f(p)=v}} \frac{r(p)}{p} + O(1) \\ &\geqslant 2\sum_{v\in\mathbb{Z}^*} \sin^2(\pi v t) \sum_{\substack{p\leqslant y\\ f(p)=v}} \frac{r(p)}{p} - 2b\log\left(\frac{\log y}{\log w}\right) - 4C + O(1) \\ &\geqslant 2(1-\lambda)\left\{\sum_{v\in\mathbb{Z}^*} \sin^2(\pi v t) \sum_{\substack{p\leqslant y\\ f(p)=v}} \frac{r(p)}{p} - 2C\right\} + O(1). \end{aligned}$$

Ainsi, quelle que soit la valeur de τ, en posant $\eta := \min\big(\lambda s_t b, \lambda s_t, 2(1-\lambda), 1/2\big)$, lorsque x (et donc z) est suffisamment grand, on a

$$m(t) \geqslant \eta \sum_{v\in\mathbb{Z}^*} \sin^2(\pi v t) \sum_{\substack{p\leqslant y\\ f(p)=v}} \frac{r(p)}{p} - \Big(C + \frac{C'}{z} + O(1)\Big)$$

et $m(t) \geqslant 0$. Ainsi, avec (3.2.15), on obtient le résultat désiré en intégrant selon t, par application directe du Lemme 3.2.1. □

On démontre désormais le théorème. Soit $2 \leqslant y \leqslant x$ et $n \in (x, 2x]$. Un élément clé de la preuve de (3.1.1) est que si l'on note n_y la partie y-friable de n, alors $\omega(n) - \omega(n_y)$ ne peut prendre au plus qu'un nombre fini de valeurs lorsque $\log y \asymp \log x$. Cela est toujours vrai lorsqu'on remplace ω par une fonction additive vérifiant $(*)$. C'est la seule hypothèse du théorème sur les fonctions additives, et il serait intéressant de pouvoir s'en passer. La démonstration diffère peu de celle de [Ten18].

Démonstration du Théorème 3.1.1. On suppose donnés les paramètres de l'énoncé. Durant la démonstration, on note K une constante positive qui sera toujours prise suffisamment grande au besoin. Puisque Q n'admet qu'un nombre fini de racines dans $\mathbb{Z}$, on peut, sans perte de généralité, faire tous nos raisonnements en supposant $Q(n) \neq 0$. On se donne $k_1, \dots, k_r \in \mathbb{R}$ fixés. Pour tout entier $n \geqslant 1$ avec $Q(n) \neq 0$, on note ξ_n le plus grand entier tel que la partie ξ_n-friable de $Q(n)$ soit inférieure ou égale à $x^{2\varepsilon/3}$. On obtient ainsi la décomposition canonique $Q(n) = b_n \prod_{1\leqslant j\leqslant r} a_{j,n}$ où b_n est la partie ξ_n-criblée de $Q(n)$, et pour tout $1 \leqslant j \leqslant r$, $a_{j,n} | Q_j(n)$. On note $p_n := P^-(b_n)$ et ν_n tel que $p_n^{\nu_n} \| Q(n)$.

On note $N_1(x)$ le nombre d'entiers n apparaissant dans la somme de (3.1.6) pour lesquels $a_{1,n} \cdots a_{r,n} \leqslant x^{\varepsilon/3}$. On note $N_2(x)$ le nombre des autres entiers n de la somme de (3.1.6). Pour la suite, on pose

$$\gamma := g + 1/\delta + 1,$$

de sorte que $|Q(n)| \leqslant x^\gamma$ pour x suffisamment grand et $x < n \leqslant x + y$; et on note

$$\mathcal{V}_u := \Big\{ f_j(n) : \quad 1 \leqslant j \leqslant r,\ n \leqslant x^\gamma,\ P^-(n) > x^{\gamma/u} \Big\}. \qquad (u \geqslant 1)$$

D'après $(*)$, on a $|\mathcal{V}_u| \leqslant r\mathfrak{V}^u$ dès que $x^{\gamma/u} \geqslant z$.

Considérons n compté dans $N_1(x)$. Alors $p_n^{\nu_n} > x^{\varepsilon/3}$. Par ailleurs, si $p_n > x^{\varepsilon/(6g)}$, en posant $\eta_0 := 6g\gamma/\varepsilon$, on a $f_j\big(Q_j(n)\big) - f_j(a_{j,n}) \in \mathcal{V}_{\eta_0}$ pour tout $1 \leqslant j \leqslant r$ lorsque x est assez grand. Ainsi,

$$N_1(x) \leqslant \sum_{\substack{a_1\cdots a_r \leqslant x^{\varepsilon/3}\\ k_j - f_j(a_j) \in \mathcal{V}_{\eta_0}}} \sum_{\substack{x<n\leqslant x+y\\ a_j | Q_j(n)\\ P^-(Q(n)/(a_1\cdots a_r)) > x^{\varepsilon/(6g)}}} 1 + \sum_{\substack{p\leqslant x^{\varepsilon/(6g)}\\ p^\nu > x^{\varepsilon/3}}} \sum_{\substack{x<n\leqslant x+y\\ p^\nu \| Q(n)}} 1. \qquad (3.2.16)$$

On majore en premier la seconde double somme. Pour les p considérés, quitte à remplacer ν par $\nu' \leqslant \nu$ le plus petit tel que $p^{\nu'} > x^{\varepsilon/3}$ et $p^\nu \| Q(n)$ par $p^{\nu'} | Q(n)$ — auquel cas $p^{\nu'-1} \leqslant x^{\varepsilon/3}$ et donc $p^{\nu'} \leqslant p x^{\varepsilon/3} \leqslant x^{\varepsilon/2} \leqslant y$ —, on peut supposer $p^\nu \leqslant y$. On obtient

$$\sum_{\substack{p\leqslant x^{\varepsilon/(6g)}\\ p^\nu > x^{\varepsilon/3}}} \sum_{\substack{x<n\leqslant x+y\\ p^\nu \| Q(n)}} 1 \leqslant \sum_{\substack{p\leqslant x^{\varepsilon/(6g)}\\ x^{\varepsilon/3} < p^\nu \leqslant y}} \sum_{\substack{x<n\leqslant x+y\\ p^\nu | Q(n)}} 1 \leqslant 2 \sum_{\substack{p\leqslant x^{\varepsilon/(6g)}\\ p^\nu > x^{\varepsilon/3}}} \frac{y\rho_0(p^\nu)}{p^\nu} \ll \frac{y}{x^{\varepsilon/(6g)}},$$

où la dernière inégalité est une conséquence directe de (3.1.2).

On majore maintenant la première double somme de (3.2.16). Comme dans [Ten18], pour tout $1 \leqslant j \leqslant r$, on décompose a_j sous la forme $a_j = t_j d_j$ où $t_j | (\beta D)^\infty$ et $(d_j, \beta D) = 1$, de sorte que $k_j - f_j(t_j) - f_j(d_j) \in \mathcal{V}_{\eta_0}$ et $(d_i, d_j) = 1$ pour tous $i \neq j$. En posant $T := t_1 \cdots t_r$, on a alors

$$\sum_{\substack{a_1\cdots a_r \leqslant x^{\varepsilon/3} \\ k_j - f_j(a_j) \in \mathcal{V}_{\eta_0}}} \sum_{\substack{x < n \leqslant x+y \\ a_j | Q_j(n) \\ P^-(Q(n)/(a_1\cdots a_r)) > x^{\varepsilon/(6g)}}} 1 \ll \sum_{\substack{t_1 d_1 \cdots t_r d_r \leqslant x^{\varepsilon/3} \\ T | (\beta D)^\infty \\ (d_i, d_j) = (d_j, \beta D) = 1 \\ k_j - f_j(t_j) - f_j(d_j) \in \mathcal{V}_{\eta_0}}} \sum_{\substack{x < n \leqslant x+y \\ T | Q(n) \\ d_j | Q_j(n) \\ p | Q(n) \Rightarrow p | T d_1 \cdots d_r \text{ ou } p > x^{\varepsilon/(6g)}}} 1$$

Avec le même raisonnement de crible que [Ten18], on majore la dernière somme, sous les hypothèses $T d_1 \cdots d_r \leqslant x^{\varepsilon/3}$, $T | (\beta D)^\infty$ et $(d_i, d_j) = (d_j, \beta D) = 1$, par

$$\sum_{\substack{x < n \leqslant x+y \\ T | Q(n) \\ d_j | Q_j(n) \\ p | Q(n) \Rightarrow p | T d_1 \cdots d_r \text{ ou } p > x^{\varepsilon/(6g)}}} 1 \ll \frac{\mathrm{e}^M y}{(\log x)^r} \left(\frac{\beta D}{\varphi_0(\beta D)} \right)^r \frac{\rho_0(T)}{T} \prod_{1 \leqslant j \leqslant r} \frac{\rho_j(d_j)}{\varphi_j(d_j)}.$$

En posant

$$H := \mathrm{e}^M \left(\frac{\beta D}{\varphi_0(\beta D)} \right)^r,$$

$$S_j(t_j) := \sum_{\substack{d_j \leqslant x \\ (d_j, \beta D) = 1 \\ k_j - f_j(t_j) - f_j(d_j) \in \mathcal{V}_{\eta_0}}} \frac{\rho_j(d_j)}{\varphi_j(d_j)}, \qquad (1 \leqslant j \leqslant r)$$

on obtient alors

$$N_1(x) \ll \frac{Hy}{(\log x)^r} \sum_{t_1 \cdots t_r | (\beta D)^\infty} \frac{\rho_0(T)}{T} \prod_{1 \leqslant j \leqslant r} S_j(t_j) + \frac{y}{x^{\varepsilon/(6g)}}.$$

Lorsque x est assez grand, on a $|\mathcal{V}_{\eta_0}| \leqslant r \mathfrak{V}^{\eta_0} \ll 1$. Pour $1 \leqslant j \leqslant r$, on définit la fonction multiplicative $\tilde{\rho}_j$ par

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_j(p^\nu) &:= \frac{\rho_j(p^\nu) p^\nu}{\varphi_j(p^\nu)}, && (p \nmid \beta D,\ \nu \geqslant 1) \\ \tilde{\rho}_j(p^\nu) &:= 0, && (p | \beta D,\ \nu \geqslant 2) \\ \tilde{\rho}_j(p) &:= \rho_j(p), && (p | \beta D) \end{aligned}$$

de sorte que

$$S_j(t_j) \ll \sup_{k \in \mathbb{R}} \sum_{\substack{n \leqslant x \\ f_j(n) = k}} \frac{\tilde{\rho}_j(n)}{n}.$$

Puisque $\rho_j(p) \leqslant \min(p-1, g_j)$, on a

$$\sum_{p \leqslant t} \frac{\tilde{\rho}_j(p)}{p} = \sum_{p \leqslant t} \frac{\rho_j(p)}{p} + O(1). \qquad (t \geqslant 2) \tag{3.2.17}$$

On pose

$$x_0 := \mathrm{e}^{(\log x)^{1-\lambda/2}}. \tag{3.2.18}$$

Soit $\lambda' > 0$ tel que $(1-\lambda/2)(1-\lambda') \geqslant 1-\lambda$. Avec (3.1.4), (3.1.5) et (3.2.17), on applique le Lemme 3.2.2 à $\tilde{\rho}_j$. Ainsi, pour tout $x' \in (x_0, x]$, en posant $z' := \mathrm{e}^{(\log x')^{1-\lambda'}}$, on obtient

$$\sup_{k\in\mathbb{R}} \sum_{\substack{n\leqslant x' \\ f_j(n)=k}} \tilde{\rho}_j(n) \ll \frac{\mathrm{e}^{2M_j+M_j'/z'}x'}{\sqrt{E_{f_j}(x';\rho_j)}},$$

puisque $E_{f_j}(x';\tilde{\rho}_j) \asymp E_{f_j}(x';\rho_j)$. Par ailleurs, on a facilement

$$\sum_{n\leqslant x_0} \frac{\tilde{\rho}_j(n)}{n} \ll \mathrm{e}^{M_j}\log x_0 = \mathrm{e}^{M_j}(\log x)^{1-\lambda/2}.$$

Finalement, via une sommation par parties sur $(x_0, x]$, on obtient pour tout $1 \leqslant j \leqslant r$,

$$S_j(t_j) \ll \frac{\mathrm{e}^{2M_j+M_j'/z}\log x}{\sqrt{E_{f_j}(x;\rho_j)}}. \tag{3.2.19}$$

La majoration voulue pour $N_1(x)$ découle alors de l'inégalité

$$\sum_{T|(\beta D)^\infty} \frac{\rho_0(T)\tau_r(T)}{T} \ll \left(\frac{\beta D}{\varphi_0(\beta D)}\right)^K,$$

qui est une conséquence facile de (3.1.2).

On majore désormais $N_2(x)$. Pour cela, on introduit $q_n := P^+(a_{1,n}\cdots a_{r,n})$ et on pose $\eta(q_n) := \gamma(\log x)/\log q_n$, de sorte que $f_j\big(Q_j(n)\big) - f_j(a_{j,n}) \in \mathcal{V}_{\eta(q_n)}$ pour tout $1 \leqslant j \leqslant r$ lorsque x est assez grand. Avec $(*)$, pour $q_n \geqslant z$, on a $|\mathcal{V}_{\eta(q_n)}| \leqslant r\mathfrak{V}^{\eta(q_n)}$. En décomposant les a_j comme dans le cas de $N_1(x)$, on obtient

$$N_2(x) \leqslant \sum_{q\leqslant x^{2\varepsilon/3}} \sum_{\substack{x^{\varepsilon/3}<t_1d_1\cdots t_rd_r\leqslant x^{2\varepsilon/3} \\ P^+(Td_1\cdots d_r)=q \\ T|(\beta D)^\infty \\ (d_i,d_j)=(d_j,\beta D)=1 \\ k_j-f_j(t_j)-f_j(d_j)\in\mathcal{V}_{\eta(q)}}} \sum_{\substack{x<n\leqslant x+y \\ T|Q(n) \\ d_j|Q_j(n) \\ p|Q(n)\Rightarrow p|Td_1\cdots d_r \text{ ou } p>q}} 1. \tag{3.2.20}$$

Comme précédemment, sous les hypothèses $Td_1\cdots d_r \leqslant x^{2\varepsilon/3}$, $(d_i, d_j) = (d_j, \beta D) = 1$ et $T|(\beta D)^\infty$, on majore la dernière somme

$$\sum_{\substack{x<n\leqslant x+y \\ T|Q(n) \\ d_j|Q_j(n) \\ p|Q(n)\Rightarrow p|Td_1\cdots d_r \text{ ou } p>q}} 1 \ll \frac{Hy}{(\log q)^r}\frac{\rho_0(T)}{T}\prod_{1\leqslant j\leqslant r}\frac{\rho_j(d_j)}{\varphi_j(d_j)}.$$

Soit $C > 0$ une constante que l'on fixera plus tard. Pour $q \geqslant 2$, on pose

$$\alpha = \alpha(q) := C/\log q.$$

Dans (3.2.20), on majore trivialement la contribution des $q \leqslant \mathrm{e}^{2gC}$. Pour cela, on remarque qu'avec (3.1.2), lorsque $P^+(m) \leqslant \mathrm{e}^{2gC}$ et $0 \leqslant j \leqslant r$, on a $\varphi_j(m) \gg m$ et $\rho_j(m) \ll m^{1-1/g_j}$.

Pour le reste, on utilise l'astuce de Rankin en introduisant $(Td_1\cdots d_r/x^{\varepsilon/3})^\alpha > 1$. On obtient alors

$$N_2(x) \ll Hy \sum_{\mathrm{e}^{2gC}<q\leqslant x^{2\varepsilon/3}} \frac{1}{(\log q)^r x^{\varepsilon\alpha/3}} \sum_{\substack{t_1d_1\cdots t_rd_r\leqslant x^{2\varepsilon/3}\\ P^+(Td_1\cdots d_r)=q\\ T|(\beta D)^\infty\\ (d_j,\beta D)=1\\ k_j-f_j(t_j)f_j(d_j)\in\mathcal{V}_{\eta(q)}}} \frac{\rho_0(T)}{T^{1-\alpha}} \prod_{1\leqslant j\leqslant r} \frac{\rho_j(d_j)d_j^\alpha}{\varphi_j(d_j)} + \frac{Hy}{x^{\varepsilon/(4g)}}. \tag{3.2.21}$$

Pour $\mathrm{e}^{2gC} < q \leqslant x_0$, on a $\alpha \leqslant 1/(2g)$ et avec (3.2.18), $x^{\varepsilon\alpha/3} \gg \mathrm{e}^{2(\log x)^{\lambda/3}}$. On majore alors la contribution des $q \in (\mathrm{e}^{2gC}, x_0]$ avec (3.1.2) et (3.1.3) en négligeant la condition sur les valeurs de $f_j(d_j)$. Pour cela, on remarque notamment qu'uniformément pour $p \leqslant q$ et $\nu \geqslant 1$,

$$\frac{\rho_0(p^\nu)}{p^{\nu(1-\alpha)}} \ll \min\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{p^{\nu/(2g)}}\right), \tag{3.2.22}$$

$$\frac{\rho_j(p^\nu)p^{\nu\alpha}}{\varphi_j(p^\nu)} \ll \frac{1}{p^{\nu(1-\alpha)}}. \qquad (p\nmid \beta D,\ 1\leqslant j\leqslant r) \tag{3.2.23}$$

On obtient alors

$$\sum_{\mathrm{e}^{2gC}<q\leqslant x_0} \frac{1}{(\log q)^r x^{\varepsilon\alpha/3}} \sum_{\substack{Td_1\cdots d_r\leqslant x^{2\varepsilon/3}\\ P^+(Td_1\cdots d_r)=q\\ T|(\beta D)^\infty\\ (d_j,\beta D)=1}} \frac{\rho_0(T)\tau_r(T)}{T^{1-\alpha}} \prod_{1\leqslant j\leqslant r} \frac{\rho_j(d_j)d_j^\alpha}{\varphi_j(d_j)}$$
$$\ll \left(\frac{\beta D}{\varphi_0(\beta D)}\right)^K \mathrm{e}^{-(\log x)^{\lambda/3}},$$

Par ailleurs, on montre que pour $q \in (x_0, x^{2\varepsilon/3}]$, la somme intérieure de (3.2.21) est

$$\ll \left(\frac{\beta D}{\varphi_0(\beta D)}\right)^K \frac{\mathrm{e}^{2M+M'/z}(\log x)^r \mathfrak{V}^{r\eta(q)}}{q\prod_{1\leqslant j\leqslant r}\sqrt{E_{f_j}(q;\rho_j)}}.$$

Pour cela, on montre que pour $1 \leqslant j \leqslant r$,

$$\sup_{k\in\mathbb{R}} \sum_{\substack{d\in\mathcal{S}(x,q)\\ (d,\beta D)=1\\ f_j(d)=k}} \frac{\rho_j(d)d^\alpha}{\varphi_j(d)} \ll \frac{\mathrm{e}^{2M+M'/z}\log x}{\sqrt{E_{f_j}(q;\rho_j)}},$$

$$\sum_{\nu\geqslant 1}\sup_{k\in\mathbb{R}} \sum_{\substack{d\in\mathcal{S}(x,q-1)\\ (q^\nu d,\beta D)=1\\ f_j(q^\nu d)=k}} \frac{\rho_j(q^\nu d)(q^\nu d)^\alpha}{\varphi_j(q^\nu d)} \ll \frac{\mathrm{e}^{2M+M'/z}\log x}{q\sqrt{E_{f_j}(q;\rho_j)}}.$$

Avec (3.2.23), la première inégalité implique facilement la seconde. De manière analogue à (3.2.19), la première inégalité est conséquence du Lemme 3.2.2. Afin d'en vérifier les hypothèses, on remarque que

$$\sum_{p\leqslant q}\frac{\rho_j(p)}{p^{1-\alpha}} = \sum_{p\leqslant q}\frac{\rho_j(p)}{p} + O(1).$$

Par ailleurs, de manière analogue au cas $\mathrm{e}^{2gC} < q \leqslant x_0$, la somme sur T se majore avec (3.2.22). Pour conclure, il suffit de noter que l'on a

$$\sum_{x_0<q\leqslant x^{2\varepsilon/3}} \frac{(\log x)^r \mathfrak{V}^{r\eta(q)}}{q(\log q)^r x^{\varepsilon\alpha/3} \prod_{1\leqslant j\leqslant r} \sqrt{E_{f_j}(q;\rho_j)}} \ll \frac{1}{\prod_{1\leqslant j\leqslant r} \sqrt{E_{f_j}(x;\rho_j)}}$$

dès que $\varepsilon C > 3r\gamma \log(\mathfrak{V})$. □

3.3 Minoration

Démonstration du Théorème 3.1.2. On suppose donnés les paramètres de l'énoncé. Pour tout $x < n \leqslant x+y$ tel que $Q(n) \neq 0$ et $1 \leqslant j \leqslant r$, on pose $a_{j,n}$ la partie x^{ε_0}-friable de $Q_j(n)$. Pour x suffisamment grand, on a $|Q(n)| \leqslant x^{g+1/\delta+1}$. Ainsi, puisque $f_1, \dots f_r$ vérifient $(*)$ pour $t \geqslant x^{\varepsilon_0}$, $f_j\big(Q_j(n)\big) - f_j(a_{j,n})$ ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs lorsque $x < n \leqslant x+y$. On peut donc, sans perte de généralité, supposer que pour tout $p > x^{\varepsilon_0}$, on a $f_j(p^\nu) = 0$ lorsque $\nu \geqslant 1$ et $1 \leqslant j \leqslant r$. Dans ce cas-là, pour tout $k_1, \dots k_r \in \mathbb{R}$, on a

$$\sum_{\substack{x<n\leqslant x+y\\ f_j(Q_j(n))=k_j}} 1 \geqslant \sum_{\substack{a_1\cdots a_r\in\mathcal{S}(x,x^{\varepsilon_0})\\ f_j(a_j)=k_j}} \sum_{\substack{x<n\leqslant x+y\\ a_j|Q_j(n)\\ P^-(Q(n)/(a_1\cdots a_r))>x^{\varepsilon_0}}} 1,$$

où l'on a utilisé la notation (3.2.9).

On introduit quelques notations utilisées dans [Hen12] et [Hen14]. Pour $n \geqslant 1$, on note $\kappa(n)$ le noyau sans facteurs carrés de n. Si de plus $m \geqslant 1$ est un autre entier, on écrit $n\|m$ pour signifier $n|m$ et $(n, m/n) = 1$. Par ailleurs, pour $a_1, \dots, a_r \geqslant 1$, on pose

$$\check{\rho}(a_1,\dots,a_r) := \#\big\{n \mod [a_1\kappa(a_1)\cdots a_r\kappa(a_r)] : \\ \forall 1\leqslant j\leqslant r,\ a_j\|Q_j(n),\ a_1\cdots a_r\|Q(n)\big\}.$$

D'après la version corrigée dans [Hen14] de [Hen12, lem. 6], on a alors

$$\sum_{\substack{x<n\leqslant x+y\\ f_j(Q_j(n))=k_j}} 1 \gg y \sum_{\substack{a_1\cdots a_r\in\mathcal{S}(x^{3\varepsilon/25},x^{\varepsilon_0})\\ f_j(a_j)=k_j}} \frac{\check{\rho}(a_1,\dots,a_r)}{[a_1\kappa(a_1)\cdots a_r\kappa(a_r)]} \prod_{\substack{g<p\leqslant x^{\varepsilon_0}\\ p\nmid a_1\cdots a_r}} \left(1-\frac{\rho_0(p)}{p}\right).$$

Puisque $\rho_0(p) \leqslant \sum_{1\leqslant j\leqslant r} \rho_j(p)$, avec (3.1.2) et (3.1.4), on a

$$\prod_{\substack{g<p\leqslant x^{\varepsilon_0}\\ p\nmid a_1\cdots a_r}} \left(1-\frac{\rho_0(p)}{p}\right) \gg \frac{\mathrm{e}^{-M}}{(\log x)^r}.$$

Pour obtenir (3.1.7), il suffit de montrer que si l'on impose $(a_i, a_j) = (a_j, \beta D) = 1$ pour tous $1 \leqslant i < j \leqslant r$, alors

$$\frac{\check{\rho}(a_1,\dots,a_r)}{[a_1\kappa(a_1)\cdots a_r\kappa(a_r)]} \geqslant \prod_{1\leqslant j\leqslant r} \frac{\rho_j(a_j)\varphi(a_j)}{a_j^2}. \tag{3.3.24}$$

Pour cela, on commence par noter comme dans la démonstration du Théorème 3.1.1, que lorsque $p \nmid \beta D$, alors pour tous $i \neq j$, on a $p \nmid (Q_i(n), Q_j(n))$. Donc lorsque $p \nmid \beta D$, si $p^\nu\|Q_j(n)$ pour un certain j, alors $p^\nu\|Q(n)$. La minoration (3.3.24) découle alors de la multiplicativité de $\check{\rho}$ et de (3.1.3).

Il reste à démontrer (3.1.8). Pour cela, on utilise entre autres le « W-trick » – technique introduite par Green [Gre05] – afin de gérer les conditions $(a_i, a_j) = 1$. Soit donc $w \geqslant 1$ un entier, que l'on fixera plus tard, et $W := \prod_{p \leqslant w} p$. On se donne par ailleurs $C \geqslant 1$, une autre quantité à fixer plus tard. Soit $y_1, \dots, y_r \geqslant 2$. Pour $1 \leqslant j \leqslant r$, on introduit $y_j^* := \min(y_j, x^{\varepsilon_0/C})$ et on pose

$$L_j(\alpha) := \sum_{\substack{w < p \leqslant y_j^* \\ p \nmid \beta D}} \frac{\rho_j(p)\varphi(p)p^\alpha}{p^2}, \qquad \big(0 \leqslant \alpha \leqslant (\log x)^{-\varepsilon_0/C}\big)$$

$$L_j := \sum_{\substack{w < p \leqslant y_j^* \\ p \nmid \beta D}} \frac{\rho_j(p)}{p}.$$

Puisque $0 \leqslant \rho_j(p) \leqslant g_j$ pour tout $1 \leqslant j \leqslant r$, une sommation par parties fournit

$$L_j(\alpha) = L_j(0) + O(1) = L_j + O(1). \tag{3.3.25}$$

On démontre que la minoration (3.1.8) est valable pour les valeurs particulières

$$k_j := \lfloor L_j \rfloor. \qquad (1 \leqslant j \leqslant r) \tag{3.3.26}$$

Pour cela, on commence par démontrer le lemme suivant.

Lemme 3.3.1. *Avec les notations ci-dessus, lorsque w et C sont suffisamment grands, pour tout $1 \leqslant j \leqslant r$, uniformément pour $0 \leqslant k_j' \leqslant k_j$ on a*

$$\sum_{\substack{n \leqslant x^{\varepsilon_0} \\ \omega_{y_j}(n) = k_j' \\ (n, W\beta D) = 1 \\ \mu(n)^2 = 1}} \frac{\rho_j(n)\varphi(n)}{n^2} \asymp \frac{L_j^{k_j'}}{k_j'!} \exp\left\{ \sum_{\substack{y_j^* < p \leqslant x \\ p \nmid \beta D}} \frac{\rho_j(p)}{p} \right\}.$$

Démonstration. La majoration est aisée en remplaçant la condition $n \leqslant x^{\varepsilon_0}$ par $P^+(n) \leqslant x$. En effet, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \leqslant x^{\varepsilon_0} \\ \omega_{y_j}(n) = k_j' \\ (n, W\beta D) = 1 \\ \mu(n)^2 = 1}} \frac{\rho_j(n)\varphi(n)}{n^2} &\leqslant \frac{L_j(0)^{k_j'}}{k_j'!} \prod_{\substack{y_j^* < p \leqslant x \\ p \nmid \beta D}} \left\{ 1 + \frac{\rho_j(p)}{p} \right\} \\ &\ll \frac{L_j^{k_j'}}{k_j'!} \exp\left\{ \sum_{\substack{y_j^* < p \leqslant x \\ p \nmid \beta D}} \frac{\rho_j(p)}{p} \right\}, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé (3.3.25). On démontre maintenant la borne inférieure. Pour cela, on introduit les notations

$$\Sigma_1 := \sum_{\substack{P^+(n) \leqslant x^{\varepsilon_0/C} \\ \omega_{y_j}(n) = k_j' \\ (n, W\beta D) = 1 \\ \mu(n)^2 = 1}} \frac{\rho_j(n)\varphi(n)}{n^2}, \qquad \Sigma_2 := \sum_{\substack{P^+(n) \leqslant x^{\varepsilon_0/C} \\ n > x^{\varepsilon_0} \\ \omega_{y_j}(n) = k_j' \\ (n, W\beta D) = 1 \\ \mu(n)^2 = 1}} \frac{\rho_j(n)\varphi(n)}{n^2},$$

de sorte que l'on a

$$\sum_{\substack{n\leqslant x^{\varepsilon_0}\\ \omega_{y_j}(n)=k'_j\\ (n,W\beta D)=1\\ \mu(n)^2=1}} \frac{\rho_j(n)\varphi(n)}{n^2} \geqslant \Sigma_1-\Sigma_2.$$

En utilisant l'astuce de Rankin, avec $\alpha := 1/\log\left(x^{\varepsilon_0/C}\right)$, on a

$$\begin{aligned}\Sigma_2 &\leqslant x^{-\alpha\varepsilon_0}\sum_{\substack{P^+(n)\leqslant x^{\varepsilon_0/C}\\ \omega_{y_j}(n)=k'_j\\ (n,W\beta D)=1\\ \mu(n)^2=1}} \frac{\rho_j(n)\varphi(n)n^\alpha}{n^2}\\ &\leqslant \mathrm{e}^{-C}\frac{L_j(\alpha)^{k'_j}}{k'_j!}\prod_{\substack{y_j^*<p\leqslant x^{\varepsilon_0/C}\\ p\nmid W\beta D}}\left(1+\frac{\rho_j(p)(p-1)p^\alpha}{p^2}\right)\\ &\ll \mathrm{e}^{-C}\frac{L_j^{k'_j}}{k'_j!}\exp\left\{\sum_{\substack{y_j^*<p\leqslant x\\ p\nmid W\beta D}}\frac{\rho_j(p)}{p}\right\}.\end{aligned}$$

Par ailleurs, on minore Σ_1 pour $k'_j \geqslant 1$ par

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &\geqslant \left(\frac{L_j(0)^{k'_j}}{k'_j!}+O\Bigg(\sum_{\substack{w<p\leqslant y_j^*\\ p\nmid\beta D}}\frac{1}{p^2}\frac{L_j(0)^{k'_j-1}}{(k'_j-1)!}\Bigg)\right)\prod_{\substack{y^*<p\leqslant x^{\varepsilon_0/C}\\ p\nmid W\beta D}}\left(1+\frac{\rho_j(p)(p-1)}{p^2}\right)\\ &\gg \left(\frac{L_j^{k'_j}}{k'_j!}+O\left(\frac{L_j^{k'_j-1}}{w(k'_j-1)!}\right)\right)\exp\left\{\sum_{\substack{y_j^*<p\leqslant x\\ p\nmid W\beta D}}\frac{\rho_j(p)}{p}\right\}C^{-g_j}.\end{aligned}$$

La même inégalité est valable sans le terme d'erreur dans la parenthèse pour $k'_j = 0$. Finalement, puisque $k'_j \leqslant L_j$, lorsque w et C sont assez grands, on obtient bien le lemme énoncé. □

On peut désormais démontrer (3.1.8) pour le choix (3.3.26). Grâce au « W-trick », les conditions $(a_i, a_j) = 1$ sont négligeables lorsque w est assez grand. On introduit donc

$$\Sigma_3 := \prod_{1\leqslant j\leqslant r}\sum_{\substack{a_j\leqslant x^{\varepsilon_0}\\ \omega_{y_j}(a_j)=k_j\\ (a_j,W\beta D)=1\\ \mu(a_j)^2=1}}\frac{\rho_j(a_j)\varphi(a_j)}{a_j^2}$$

et

$$\Sigma_4 := \sum_{\substack{d_{\mathcal{I}} \leqslant x^{\varepsilon_0} \ (\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}([\![1,r]\!]), |\mathcal{I}| \geqslant 2) \\ \prod_{\mathcal{I}} d_{\mathcal{I}} \neq 1 \\ (d_{\mathcal{I}}, W\beta D)=1 \\ \mu(d_{\mathcal{I}})^2=1}} \left(\prod_{\mathcal{J}} \frac{\prod_{j \in \mathcal{J}} \rho_j(d_{\mathcal{J}})}{d_{\mathcal{J}}^{|\mathcal{J}|}} \right)$$

$$\times \prod_{1 \leqslant j \leqslant r} \sum_{\substack{a_j \leqslant x^{\varepsilon_0} \\ \omega_{y_j}(a_j) = k_j - \sum_{\mathcal{J} \ni j} \omega_{y_j}(d_{\mathcal{J}}) \\ (a_j, W\beta D)=1 \\ \mu(a_j)^2=1}} \frac{\rho_j(a_j)\varphi(a_j)}{a_j^2},$$

de sorte que

$$\sum_{\substack{x < n \leqslant x+y \\ \omega_{y_j}(Q_j(n))=k_j}} 1 \gg \frac{\mathrm{e}^{-M} y}{(\log x)^r} \left(\Sigma_3 - \Sigma_4 \right).$$

Dans la définition de Σ_4, les variables $d_{\mathcal{I}}$ encodent les relations de coprimalité entre les a_i pour $i \in \mathcal{I}$. Dire que les $a_1, \ldots, a_r$ ne sont pas tous premiers entre eux est exactement dire $\prod_{\mathcal{I}} d_{\mathcal{I}} \neq 1$. Avec le Lemme 3.3.1, on a d'une part,

$$\Sigma_3 \gg \prod_{1 \leqslant j \leqslant r} \frac{L_j^{k_j}}{k_j!} \exp\left\{ \sum_{\substack{y_j^* < p \leqslant x \\ p \nmid \beta D}} \frac{\rho_j(p)}{p} \right\},$$

et d'autre part, puisque $\rho_j(p) \leqslant g$ et $k_j \leqslant L_j$ pour tout $1 \leqslant j \leqslant r$,

$$\Sigma_4 \ll \sum_{\substack{d_{\mathcal{I}} \leqslant x^{\varepsilon_0} \ (\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}([\![1,r]\!]), |\mathcal{I}| \geqslant 2) \\ \prod_{\mathcal{I}} d_{\mathcal{I}} \neq 1 \\ (d_{\mathcal{I}}, W\beta D)=1 \\ \mu(d_{\mathcal{I}})^2=1}} \left(\prod_{\mathcal{J}} \frac{g^{r\omega(d_{\mathcal{J}})}}{d_{\mathcal{J}}^{|\mathcal{J}|}} \right) \Sigma_3 \ll \frac{\Sigma_3}{\sqrt{w}}.$$

Ainsi, lorsque w est suffisamment grand, pour ce choix de $k_1, \ldots, k_r$ on obtient avec (3.1.4),

$$\sum_{\substack{x < n \leqslant x+y \\ \omega_{y_j}(Q_j(n))=k_j}} 1 \gg \frac{\mathrm{e}^{-M} y}{(\log x)^r} \prod_{1 \leqslant j \leqslant r} \frac{\varphi_j(\beta D) \mathrm{e}^{-M_j} \log x}{\beta D \sqrt{1 + L_j}},$$

et donc le résultat désiré. □

Remerciements. Je tiens à remercier chaleureusement Régis de la Bretèche pour nos nombreuses discussions, ainsi que ses suggestions toujours éclairées.

4

Théorème d'Erdős-Kac pour les translatés d'entiers ayant k facteurs premiers

Abstract. Let $x \geqslant 3$. For $1 \leqslant n \leqslant x$ an integer, let $\omega(n)$ be its number of distinct prime factors. We show that $\omega(n-1)$ satisfies an Erdős-Kac type theorem whenever $\omega(n) = k$ where $1 \leqslant k \ll \log\log x$, thus extending a result of Halberstam.

4.1 Présentation des résultats 93
4.2 Étude de la série génératrice 94
4.2.1 Moyenne d'une fonction multiplicative sur $\mathcal{E}_k(x)$ 94
4.2.2 Calcul de la série génératrice 96
4.3 Lois locales et répartition 98

4.1 Présentation des résultats

Pour $k, n \geqslant 1$ deux entiers et $x \geqslant 1$ un réel, on note $\omega(n)$ le nombre de facteurs premiers distincts de n,

$$\mathcal{E}_k(x) := \{n \leqslant x : \quad \omega(n) = k\},$$

et $\pi_k(x) := \#\mathcal{E}_k(x)$. On s'intéresse à une variante du théorème suivant. On définit

$$\Phi(y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} \mathrm{e}^{-t^2/2} \mathrm{d}t. \qquad (y \in \mathbb{R})$$

Théorème (Erdős & Kac [EK39] ; Rényi & Turán [RT58])**.** *Uniformément pour $x \geqslant 3$ et $y \in \mathbb{R}$, on a*

$$\#\left\{n \leqslant x : \quad \omega(n) \leqslant \log_2 x + y\sqrt{\log_2 x}\right\} = \Phi(y) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\log_2 x}}\right).$$

Dans [FT96], Fouvry & Tenenbaum étudient la répartition de $\omega(n-1)$ lorsque n vérifie une condition de friabilité. On s'inspire de leur méthode pour étudier la répartition de $\omega(n-1)$ lorsque n a un nombre fixé de facteurs premiers. Le cas particulier où $n = p$ est premier a été traité par Halberstam [Hal56]. Pour $x \geqslant 3$, $y \in \mathbb{R}$ et $k \geqslant 1$ un entier, on définit

$$\pi_k(x, y) := \#\left\{n \in \mathcal{E}_k(x) : \quad \omega(n-1) \leqslant \log_2 x + y\sqrt{\log_2 x}\right\}.$$

Théorème 4.1.1. *Soit $R > 0$ fixé. Uniformément pour $x \geqslant 3$, $1 \leqslant k \leqslant R \log_2 x$ et $y \in \mathbb{R}$, on a*

$$\pi_k(x, y) = \pi_k(x) \left\{ \Phi(y) + O\left(\frac{\log_3 x}{\sqrt{\log_2 x}} \right) \right\}.$$

On démontre ce théorème par la méthode des fonctions caractéristiques et l'inégalité de Berry-Esseen. On obtient le même terme d'erreur que Fouvry & Tenenbaum. Dans les deux cas, on néglige la contribution des grands facteurs premiers de $n-1$ pour des raisons techniques, liées à la répartition de l'ensemble étudié dans les grandes progressions arithmétiques. C'est pour cela qu'on n'obtient pas le terme d'erreur $O((\log_2 x)^{-1/2})$ espéré.

En utilisant l'idée de Selberg pour estimer $\pi_k(x)$, l'étude directe de la série génératrice adéquate nous permet aussi de démontrer le théorème suivant, qui localise le nombre de « petits » facteurs premier de $n-1$, lorsque $n \in \mathcal{E}_k(x)$. Pour $k \geqslant 1$, $\ell \geqslant 0$ et $1 \leqslant w \leqslant x$, on note

$$\omega(n, w) := \sum_{\substack{p \mid n \\ p \leqslant w}} 1, \qquad (n \geqslant 1)$$

$$\pi_{k,\ell}(x, w) := \#\left\{ n \in \mathcal{E}_k(x) : \quad \omega(n-1, w) = \ell \right\}.$$

Théorème 4.1.2. *Il existe une constante absolue $\eta > 0$ vérifiant l'énoncé suivant. Soit $R \geqslant 1$ fixé quelconque. Uniformément pour $3 \leqslant w \leqslant x^{\eta(\log_3 x)/(R^2 \log_2 x)}$, $1 \leqslant k \leqslant R \log_2 x$ et $0 \leqslant \ell \leqslant R \log_2 w$, on a*

$$\pi_{k,\ell}(x, w) = \pi_k(x) \frac{(\log_2 w)^\ell}{\ell! \log w} \left\{ h_k\left(\frac{\ell}{\log_2 w} \right) + O\left(\frac{k}{(\log_2 x)^2} + \frac{\ell+1}{(\log_2 w)^2} \right) \right\}, \tag{4.1.1}$$

où h_k est la fonction entière définie par

$$h_k(z) := \mathrm{e}^{\gamma(z-1)} \prod_{p \geqslant 2} \left(1 + \frac{z-1}{p + (k-1)/\log_2 x - 1} \right) \left(1 - \frac{1}{p} \right)^{z-1}. \qquad (z \in \mathbb{C}) \tag{4.1.2}$$

Ce théorème est non trivial uniquement lorsque w est suffisamment grand. Le cas des petites valeurs de w peut être traité via un léger ajustement de la preuve, par l'utilisation de (4.2.3). On note que lorsque $k = 1$ et $\ell = 0$, le terme principal est nul, ce qui est normal puisque 2 divise tous les $p-1$ pour $p \geqslant 3$. De manière général, lorsque $k/\log_2 x + \ell/\log_2 w$ est petit, le facteur local du système $(n, n-1)$ a un impact important.

4.2 Étude de la série génératrice

On étudie la série génératrice associée au membre de gauche de (4.1.1), dans le but d'utiliser la méthode de Selberg. Cela nous permet, dans la dernière section, de démontrer les théorèmes 4.1.1 et 4.1.2.

4.2.1 Moyenne d'une fonction multiplicative sur $\mathcal{E}_k(x)$

Le premier lemme que l'on démontre se déduit simplement de la méthode de Selberg-Delange, telle qu'exposée dans [Ten15]. Étant donnés $x \geqslant 2$, $N \geqslant 0$ et $c_1, c_2 > 0$, on définit

$$R_N(x) := R_N(x; c_1, c_2) := \mathrm{e}^{-c_1\sqrt{\log x}} + \left(\frac{c_2 N + 1}{\log x} \right)^{N+1}.$$

Lemme 4.2.1. *Soit $0 < \varepsilon < 1$ et $A, R > 0$ fixés. Il existe des constantes $c_1, c_2 > 0$, pouvant dépendre de R, vérifiant l'énoncé suivant. Uniformément pour $N \geqslant 0$, $|\kappa| \leqslant A$, $x \geqslant 3$, $1 \leqslant k \leqslant |\kappa| R \log_2 x$ et f une fonction multiplicative vérifiant*

(i) $\displaystyle\sum_{p\geqslant 2} \frac{|f(p)-\kappa|}{p^{1-\varepsilon}} \leqslant A,$

(ii) $\displaystyle\sum_{p\geqslant 2}\sum_{\nu\geqslant 2} \frac{|f(p^\nu)|}{p^{\nu(1-\varepsilon)}} \leqslant A,$

on a

$$\sum_{n\in\mathcal{E}_k(x)} f(n) = \frac{x}{\log x}\left\{ \sum_{0\leqslant j\leqslant N} \frac{Q_{f,\kappa,j,k}(\kappa\log_2 x)}{(\log x)^j} + O\left(\frac{(|\kappa|\log_2 x)^k}{k!} R_N(x)\right)\right\}, \tag{4.2.3}$$

où les polynômes $Q_{f,\kappa,j,k}$ sont explicites, de degré au plus $k-1$ et ne dépendent que de κ, f, j et k. De plus, en notant $r := (k-1)/(\kappa\log_2 x)$, on a

$$\sum_{n\in\mathcal{E}_k(x)} f(n) = \frac{x}{\log x}\frac{(\kappa\log_2 x)^{k-1}}{(k-1)!}\left\{ \lambda_{f,\kappa}(r) - \frac{r\lambda''_{f,\kappa}(r)}{2\log_2 x} + O\left(\frac{k^2}{(\kappa\log_2 x)^4}\right)\right\}, \tag{4.2.4}$$

où $\lambda_{f,\kappa}$ est la fonction entière définie par

$$\lambda_{f,\kappa}(z) := \frac{\kappa}{\Gamma(\kappa z+1)}\prod_{p\geqslant 2}\left(1 + z\sum_{\nu\geqslant 1}\frac{f(p^\nu)}{p^\nu}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)^{\kappa z}. \qquad (z\in\mathbb{C})$$

Démonstration. On suppose donnés les paramètres de l'énoncé. Pour $z \in \mathbb{C}$, on introduit, lorsque cela a un sens, les séries de Dirichlet

$$F(s) := \sum_{n\geqslant 1}\frac{z^{\omega(n)}f(n)}{n^s},$$

$$G(s;z) := F(s)\zeta(s)^{-\kappa z} = \prod_{p\geqslant 2}\left(1 + z\sum_{\nu\geqslant 1}\frac{f(p^\nu)}{p^{\nu s}}\right)\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{\kappa z}.$$

En notant $b(n)$ les coefficients de la série $G(\cdot;z)$, pour tous $p \geqslant 2$ et $\nu \geqslant 1$, on a

$$b(p^\nu) = \binom{\nu-1-\kappa z}{\nu} + z\sum_{0\leqslant\mu<\nu} f(p^{\nu-\mu})\binom{\mu-1-\kappa z}{\mu}.$$

En particulier, $b(p) = z(f(p)-\kappa)$. Lorsque $|z| \leqslant R$, en utilisant la majoration

$$\binom{\mu-1-\kappa z}{\mu} \ll (1+\mu)^{1+|\kappa z|},$$

avec ε qui vérifie (i) et (ii), on obtient uniformément

$$\sum_{p\geqslant 2}\sum_{\nu\geqslant 1}\frac{|b(p^\nu)|}{p^{\nu(1-\varepsilon/3)}} < +\infty.,$$

L'estimation (4.2.3) se déduit alors des théorèmes II.1.3 et II.5.2 de [Ten15], puis d'une version très légèrement modifiée – afin tenir compte du paramètre κ – de la preuve de [Ten15, th. II.6.3]. On en déduit (4.2.4) avec $N = 0$, en effectuant un développement asymptotique de

$$Q_{f,\kappa,0,k}(X) = \sum_{m+\ell=k-1}\frac{1}{m!\ell!}\lambda^{(m)}_{f,\kappa}(0)X^\ell$$

à deux termes, conformément à la note de fin du chapitre II.6 de [Ten15]. □

4.2.2 Calcul de la série génératrice

Pour $1 \leqslant w \leqslant x$ et $k \geqslant 1$, on définit

$$f_k(z) := \sum_{n \in \mathcal{E}_k(x)} z^{\omega(n-1,w)}. \qquad (z \in \mathbb{C}) \tag{4.2.5}$$

On omet les variables w et x de la notation afin de l'alléger. On rappelle aussi la définition (4.1.2) de h_k.

Lemme 4.2.2. *Il existe une constante $\eta > 0$ absolue vérifiant l'énoncé suivant. Soit $R \geqslant 1$ fixé. Uniformément pour $3 \leqslant w \leqslant x$, $1 \leqslant k \ll R \log_2 x$ et $|z| \leqslant R$, avec $r := (k-1)/\log_2 x$ et $u := (\log x)/\log w$, on a*

$$\begin{aligned} f_k(z) = \pi_k(x)(\log w)^{z-1} \bigg\{ h_k(z) + \frac{r\xi(z)}{\log_2 x} + O\bigg(\frac{k^2}{(\log_2 x)^4} + \frac{1}{\log w} \bigg) \bigg\} \\ + O\big(x u^{-\eta u} (\log x)^{2R} + x^{9/10} \big), \end{aligned} \tag{4.2.6}$$

pour une fonction entière ξ explicite, pouvant dépendre des paramètres w, x et k, admettant 1 pour zéro et uniformément bornée pour $|z| \leqslant R$.

On note qu'il est possible d'obtenir un développement asymptotique beaucoup plus précis de $f_k(z)$, de manière analogue à (4.2.3). La présence du terme d'ordre $r/\log_2 x$ nous est utile dans la démonstration du Théorème 4.1.1.

Démonstration. On suppose donnés les paramètres de l'énoncé et on introduit la fonction multiplicative g_z définie par

$$g_z(n) := \mu(n)^2 (z-1)^{\omega(n)}. \qquad (n \geqslant 1)$$

Puisque l'on a $1 * g_z = z^{\omega(\cdot)}$, on obtient

$$\begin{aligned} f_k(z) &= \sum_{n \in \mathcal{E}_k(x)} \sum_{\substack{q \mid n-1 \\ P^+(q) \leqslant w}} g_z(q) \\ &= \sum_{\substack{q \leqslant x^{1/3} \\ P^+(q) \leqslant w}} g_z(q) \sum_{\substack{n \in \mathcal{E}_k(x) \\ n \equiv 1 [q]}} 1 + R_1, \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$R_1 := \sum_{n \in \mathcal{E}_k(x)} 1 \sum_{\substack{q > x^{1/3} \\ q \mid n-1 \\ P^+(q) \leqslant w}} g_z(q).$$

Pour $n \geqslant 1$, on note

$$n_w := \prod_{\substack{p^\nu \| n \\ p \leqslant w}} p^\nu$$

la partie w-friable de n. Dans R_1, la deuxième somme est non vide seulement lorsque $(n-1)_w > x^{1/3}$, et dans ce cas, on a $(1 * |g_z|)(n-1) \leqslant (R+2)^{\omega(n-1)}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} R_1 &\ll \sum_{\substack{n \leqslant x \\ n_w > x^{1/3}}} (R+2)^{\omega(n)} \ll \sum_{\substack{x^{1/3} < a \leqslant x \\ P^+(a) \leqslant w}} \sum_{\substack{b \leqslant x/a \\ P^-(b) > w}} (R+2)^{\omega(a)+\omega(b)} \\ &\ll \frac{x}{\log x} \left(\frac{\log x}{\log w} \right)^{R+2} \sum_{\substack{n \leqslant x \\ n_w > x^{1/3}}} \frac{(R+2)^{\omega(a)}}{a}. \end{aligned}$$

Or, avec l'astuce de Rankin, pour tout $\alpha \in [0, 1/2]$, on a

$$\sum_{\substack{n \leqslant x \\ n_w > x^{1/3}}} \frac{(R+2)^{\omega(a)}}{a} \ll x^{-\alpha/3} \exp\left((R+2) \sum_{p \leqslant w} \frac{1}{p^{1-\alpha} - 1}\right).$$

Avec [Ten84, lem. 2] et $\alpha = \min\big(\log(2u)/\log w, 1/2\big)$, il vient $R_1 \ll xu^{-\eta u}(\log x)^{2R} + x^{9/10}$ pour une certaine constante absolue $\eta > 0$. En posant

$$R_2 := \sum_{\substack{q \leqslant x^{1/3} \\ P^+(q) \leqslant w}} g_z(q) \Bigg(\sum_{\substack{n \in \mathcal{E}_k(x) \\ n \equiv 1[q]}} 1 - \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{n \in \mathcal{E}_k(x) \\ (n,q)=1}} 1 \Bigg),$$

$$R_3 := \sum_{\substack{q > x^{1/3} \\ P^+(q) \leqslant w}} \frac{g_z(q)}{\varphi(q)} \sum_{\substack{n \in \mathcal{E}_k(x) \\ (n,q)=1}} 1,$$

on obtient

$$f_k(z) = \sum_{n \in \mathcal{E}_k(x)} \prod_{\substack{p \leqslant w \\ p \nmid n}} \left(1 + \frac{z-1}{p-1}\right) + R_1 + R_2 - R_3. \tag{4.2.7}$$

De manière analogue à R_1, avec l'astuce de Rankin on a $R_3 \ll xu^{-\eta u}(\log x)^{2R} + x^{9/10}$. On majore R_2 avec [WZ93, th. 1] (pour un résultat analogue sur Ω, voir [TK94]). On obtient, pour tout $A > 0$,

$$\begin{aligned} R_2 &\ll_A \Bigg(\sum_{q \leqslant x^{1/3}} |g_z(q)|^2 \Bigg| \sum_{\substack{n \in \mathcal{E}_k(x) \\ n \equiv 1[q]}} 1 - \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{n \in \mathcal{E}_k(x) \\ (n,q)=1}} 1 \Bigg| \Bigg)^{1/2} \frac{\pi_k(x)^{1/2}}{(\log x)^A} \\ &\ll_A \frac{x}{(\log x)^A} \Bigg(\sum_{q \leqslant x^{1/3}} \frac{(R+1)^{2\omega(q)}}{\varphi(q)} \Bigg)^{1/2} \\ &\ll_A \frac{x}{(\log x)^{A-R-1}} \\ &\ll \pi_k(x)(\log w)^{\Re\mathrm{e}\, z - 2}. \end{aligned}$$

On suppose dans un premier temps que $|p+z-2| > 1/3$ pour tout $p \geqslant 2$. Afin d'estimer la somme de (4.2.7), on considère la fonction multiplicative f définie par

$$f(n) := \prod_{\substack{p \leqslant w \\ p \nmid n}} \frac{p-1}{p+z-2}. \tag{4.2.8}$$

Puisqu'elle vérifie les hypothèses du Lemme 4.2.1 pour $\kappa = 1$, avec (4.2.4) on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathcal{E}_k(x)} \prod_{\substack{p \leqslant w \\ p \nmid n}} \left(1 + \frac{z-1}{p-1}\right) &= \frac{x}{\log x} \frac{(\log_2 x)^{k-1}}{(k-1)!} \prod_{p \leqslant w} \left(1 + \frac{z-1}{p-1}\right) \\ &\quad \times \left\{ \lambda_z(r) - \frac{r\lambda_z''(r)}{2\log_2 x} + O\left(\frac{k^2}{(\log_2 x)^4}\right) \right\}, \end{aligned}$$

où l'on a posé $r := (k-1)/\log_2 x$ et

$$\lambda_z(r) := \prod_{p\leqslant w}\left(1+\frac{r}{p+z-2}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)^r \prod_{p>w}\left(1+\frac{r}{p-1}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)^r.$$

On pose *a priori*

$$\xi(z) := \frac{h_k(z)\lambda_1''(r)}{2\lambda_1(r)} - \frac{\lambda_z''(r)}{2\lambda_1(r)}(\log w)^{1-z}\prod_{p\leqslant w}\left(1+\frac{z-1}{p-1}\right).$$

Cela définit une fonction entière, admettant 1 pour zéro et bornée uniformément en w, x et k sous les conditions de l'énoncé. En effet, les pôles de $z \mapsto \lambda_z''(r)$ sont compensés par les zéros du produit eulérien et $\lambda_1(r) \asymp 1$ pour $0 \leqslant r \leqslant R$. On en déduit l'estimation désirée pour $f_k(z)$ puisque l'on a d'une part,

$$\pi_k(x) = \frac{x}{\log x}\frac{(\log_2 x)^{k-1}}{(k-1)!}\left\{\lambda_1(r) - \frac{r\lambda_1''(r)}{2\log_2 x} + O\left(\frac{k^2}{(\log_2 x)^4}\right)\right\},$$

et d'autre part,

$$(\mathrm{e}^\gamma \log w)^{z-1}\prod_{p\leqslant w}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{z-1} = 1 + O\left(\frac{1}{\log w}\right),$$

d'après la troisième formule de Mertens, uniformément pour $|z| \leqslant R$.

Pour compléter la preuve, on traite le cas où il existe un p_0 tel que $|p_0+z-2| \leqslant 1/3$. Puisque la définition (4.2.8) n'est plus nécessairement valide, on traite spécifiquement le facteur eulérien de p_0 dans (4.2.7). Pour cela, on écrit

$$\prod_{\substack{p\leqslant w\\ p\nmid n}}\left(1+\frac{z-1}{p-1}\right) = \prod_{\substack{p\leqslant w\\ p\neq p_0}}\left(1+\frac{z-1}{p-1}\right)\left\{\prod_{\substack{p\leqslant w\\ p\mid n\\ p\neq p_0}}\frac{p-1}{p+z-2} + \mathbb{1}_{p_0\nmid n}\frac{z-1}{p_0-1}\prod_{\substack{p\leqslant w\\ p\mid n}}\frac{p-1}{p+z-2}\right\},$$

qui est une combinaison linéaire de deux fonctions multiplicatives vérifiant les hypothèses du Lemme 4.2.1, uniformément en p_0 et $|z| \leqslant R$. La même utilisation du Lemme 4.2.1 que précédemment permet alors de conclure par un calcul analogue. □

4.3 Lois locales et répartition

On démontre le Théorème 4.1.2, puis le Théorème 4.1.1.

Démonstration du Théorème 4.1.2. On suppose donnés les paramètres de l'énoncé. La quantité $\pi_{k,\ell}(x,w)$ correspond au coefficient de x^ℓ dans $f_k(z)$, qui est

$$\pi_{k,\ell}(x,w) = \frac{1}{2i\pi}\oint_{|z|=\rho}\frac{f_k(z)}{z^{\ell+1}}\mathrm{d}z,$$

pour tout $\rho > 0$. Pour la démonstration, on majore

$$\frac{r\xi(z)}{\log_2 x} \ll \frac{k}{(\log_2 x)^2}.$$

En posant

$$Q(X) := \sum_{a+b=\ell}\frac{h_k^{(a)}(0)X^b}{a!b!},$$

le terme principal vaut

$$\frac{\pi_k(x)}{\log w} Q(\log_2 w).$$

Comme il est détaillé dans la preuve de [Ten15, th. II.6.3(6.13)], puisque $|h_k''(z)| \ll 1$ pour $|z| \leqslant R$ uniformément en k, on a

$$Q(\log_2 x) = \frac{(\log_2 w)^\ell}{\ell!} \left\{ h_k\left(\frac{\ell}{\log_2 w}\right) + O\left(\frac{\ell}{(\log_2 w)^2}\right) \right\}.$$

Il suffit donc de traiter le terme d'erreur de (4.2.6). Le cas $\ell = 0$ est trivial. Lorsque $\ell \geqslant 1$, d'après la majoration de [Ten15, II.(6.14)], avec $\rho := \ell/\log_2 w$, on a

$$\oint_{|z|=\rho} (\log w)^{\Re e\, z} |z|^{-\ell-1} |\mathrm{d}z| \ll \frac{(\log_2 w)^\ell}{\ell!}.$$

Pour conclure, puisque $R \geqslant 1$ et $1 \leqslant k \leqslant R \log_2 x$, il suffit de remarquer que

$$\pi_k(x) \frac{(\log_2 w)^\ell}{\ell! \log w} \left(\frac{k}{(\log_2 x)^2} + \frac{\ell+1}{(\log_2 w)^2} \right) \gg \frac{x}{(\log x)^{10R^2}}$$

dès que $\pi_k(x) > 0$. □

Démonstration du théorème 4.1.1. On suppose donnés les paramètres de l'énoncé. On suit essentiellement la démonstration de [FT96, cor. 5], en adaptant le raisonnement à notre problème. Pour toute la démonstration, on choisit

$$w := \exp\left(\frac{\log x}{(\log_2 x)^2}\right), \tag{4.3.9}$$

et on se donne une constante $C > 0$, à fixer plus tard. Pour $x \geqslant 2$ et $y \in \mathbb{R}$, on pose

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}_k(x,y) &:= \#\left\{ n \in \mathcal{E}_k(x) : \quad \omega(n-1,w) \leqslant \log_2 x + y\sqrt{\log_2 x} \right\}, \\ D_k(x) &:= \#\left\{ n \in \mathcal{E}_k(x) : \quad \omega(n-1) - \omega(n-1,w) > C \log_3 x \right\}. \end{aligned}$$

On montre dans un premier temps que $\tilde{\pi}_k(x,y)$ est une bonne approximation de $\pi_k(x,y)$ lorsque C est suffisamment grand. Pour cela, on observe que l'on a,

$$\tilde{\pi}_k\Big(x, y - \frac{C \log_3 x}{\sqrt{\log_2 x}}\Big) - D_k(x) \leqslant \pi_k(x,y) \leqslant \tilde{\pi}_k(x,y), \tag{4.3.10}$$

et on majore D_k. On utilise l'astuce de Rankin, afin de majorer, pour tout $n \leqslant x$,

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{\omega(n-1)-\omega(n-1,w)>C\log_3 x} &\leqslant 2^{\omega(n-1)-\omega(n-1,w)-C\log_3 x} \\ &\leqslant (\log_2 x)^{-C\log 2} \tau_2\Big(\prod_{\substack{p^\nu \| n \\ p>w}} p^\nu\Big). \end{aligned}$$

D'après [Lan89], pour tous $\delta > 0$ et $n \geqslant 1$, on a

$$\tau_2(n) \ll_\delta \sum_{\substack{q|n \\ q \leqslant n^\delta}} \tau_2(q)^{1/\delta}.$$

Avec $\delta = 1/3$, en posant

$$R_4 := (\log_2 x)^{-C\log 2} \sum_{\substack{q\leqslant x^{1/3}\\ P^-(q)>w}} \tau_2(q)^3 \Big(\sum_{\substack{n\in\mathcal{E}_k(x)\\ n\equiv 1[q]}} 1 - \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{n\in\mathcal{E}_k(x)\\ (n,q)=1}} 1 \Big),$$

on obtient alors

$$\begin{aligned} D_k(x) &\ll (\log_2 x)^{-C\log 2} \sum_{\substack{q\leqslant x^{1/3}\\ P^-(q)>w}} \tau_2(q)^3 \sum_{\substack{n\in\mathcal{E}_k(x)\\ n\equiv 1[q]}} 1 \\ &\ll (\log_2 x)^{-C\log 2} \sum_{n\in\mathcal{E}_k(x)} \sum_{\substack{q\leqslant x^{1/3}\\ (q,n)=1\\ P^-(q)>w}} \frac{\tau_2(q)^3}{\varphi(q)} + R_4 \\ &\ll \frac{\pi_k(x)}{(\log_2 x)^{C\log 2}} \left(\frac{\log x}{\log w}\right)^8 + R_4 \\ &\ll \frac{\pi_k(x)}{\log_2 x}, \end{aligned} \tag{4.3.11}$$

lorsque C est suffisamment grand, où l'on a majoré R_4 de manière analogue à R_2 dans la section 4.2.2.

Il suffit donc d'estimer $\tilde{\pi}_k(x,y)$. On utilise pour cela la méthode des fonctions caractéristiques. Pour des raisons techniques, en notant

$$\tilde{\pi}_k^\star(x,y) := \#\left\{ n\in\mathcal{E}_k(x) \ : \quad \omega(n-1,w) \leqslant \log_2 w + y\sqrt{\log_2 w} \right\},$$

on montre en fait

$$\sup_{y\in\mathbb{R}} |\tilde{\pi}_k^\star(x,y) - \pi_k(x)\Phi(y)| \ll \frac{1}{\sqrt{\log_2 x}}.$$

Cela est suffisant puisque $\log_2 w = \log_2 x + O(\log_3 x)$ avec (4.3.9). D'après l'inégalité de Berry-Esseen telle qu'énoncée dans [Ten15], en posant $T := \log_2 w$, avec la notation (4.2.5) on a

$$\sup_{y\in\mathbb{R}} |\tilde{\pi}_k^\star(x,y) - \pi_k(x)\Phi(y)| \ll \frac{\pi_k(x)}{\sqrt{T}} + \int_{-\sqrt{T}}^{\sqrt{T}} \left| \mathrm{e}^{-it\sqrt{T}} f_k\big(\mathrm{e}^{it/\sqrt{T}}\big) - \pi_k(x)\mathrm{e}^{-t^2/2} \right| \frac{\mathrm{d}t}{|t|}. \tag{4.3.12}$$

Pour $\vartheta\in\mathbb{R}$, on a $\mathrm{e}^{i\vartheta} = 1 + O(\vartheta)$. Ainsi, lorsque $|t| \leqslant 1/\log x$,

$$\begin{aligned} \left| \mathrm{e}^{-it\sqrt{T}} f_k\big(\mathrm{e}^{it/\sqrt{T}}\big) - \pi_k(x)\mathrm{e}^{-t^2/2} \right| &\ll \frac{|t|}{\sqrt{T}} \sum_{n\in\mathcal{E}_k(x)} |\omega(n-1,w) - T| + |t|^2\pi_k(x) \\ &\ll |t|\pi_k(x) \left(\frac{\log w}{\sqrt{T}} + \sqrt{T} + |t| \right), \end{aligned}$$

où l'on a majoré trivialement $\omega(n-1,w) \ll \log w$. On a donc

$$\int_{-1/\log x}^{1/\log x} \left| \mathrm{e}^{-it\sqrt{T}} f_k\big(\mathrm{e}^{it/\sqrt{T}}\big) - \pi_k(x)\mathrm{e}^{-t^2/2} \right| \frac{\mathrm{d}t}{|t|} \ll \frac{\pi_k(x)}{\sqrt{T}}. \tag{4.3.13}$$

Pour $1/\log x \leqslant |t| \leqslant T^{1/6}$, avec le Lemme 4.2.2, puisque $h_k(1) = 1$ et $\xi(1) = 0$, on a

$$f_k\big(\mathrm{e}^{it/\sqrt{T}}\big) = \pi_k(x)\mathrm{e}^{it\sqrt{T}}\mathrm{e}^{-t^2/2} \left\{ 1 + O\left(\frac{|t| + |t|^3}{\sqrt{T}} + \frac{1}{(\log_2 x)^2} \right) \right\}.$$

Par ailleurs, en vertu de l'inégalité $\cos(\vartheta)-1 \leqslant -2\vartheta^2/\pi^2$, valable pour $-1 \leqslant \vartheta \leqslant 1$, lorsque $T^{1/6} < |t| \leqslant \sqrt{T}$, le Lemme 4.2.2 fournit la majoration

$$f_k\big(\mathrm{e}^{it/\sqrt{T}}\big) \ll \pi_k(x)\mathrm{e}^{-2t^2/\pi^2}.$$

On obtient donc

$$\int_{1/\log x<|t|\leqslant\sqrt{T}} \Big|\mathrm{e}^{-it\sqrt{T}} f_k\big(\mathrm{e}^{it/\sqrt{T}}\big) - \pi_k(x)\mathrm{e}^{-t^2/2}\Big| \frac{\mathrm{d}t}{|t|} \ll \frac{\pi_k(x)}{\sqrt{T}}. \tag{4.3.14}$$

Le résultat découle finalement des inégalités (4.3.10) à (4.3.14). Il est possible d'obtenir un développement asymptotique plus précis pour $\pi_k^*(x,y)$. Malheureusement, cela ne permet pas d'améliorer le Théorème 4.1.1. □

Remerciements. Je remercie Sary Drappeau et Berke Topacogullari pour m'avoir présenté ce sujet et pour nos discussions. Je remercie également Régis de la Bretèche pour ses précieuses suggestions.

Appendice

A

Highest perfect power of a product of integers less than x

Résumé. Pour $x \geqslant 3$, on note $w(x)$ le plus grand entier w pour lequel il existe des entiers $m \geqslant 1, y \geqslant 2$ et $1 \leqslant n_1 < \cdots < n_m \leqslant x$ tels que $n_1 \cdots n_m = y^w$. On démontre

$$w(x) = x\mathrm{e}^{-\sqrt{2\log x \log\log x}(1+o(1))}.$$

In [Ska17], Skałba defines, for $x \geqslant 3$, $w(x)$ as the highest integer w for which there exist integers $m \geqslant 1, y \geqslant 2$ and $1 \leqslant n_1 < \cdots < n_m \leqslant x$ such that $n_1 \cdots n_m = y^w$, and shows

$$xL(x)^{-\sqrt{2}+o(1)} \leqslant w(x) \leqslant xL(x)^{-1/\sqrt{2}+o(1)},$$

where $L(x) := \mathrm{e}^{\sqrt{\log x \log\log x}}$, as $x \to +\infty$. In this appendix, which reproduces [Gou18a], we improve on the upper bound, making the result optimal up to the $L(x)^{o(1)}$.

Théorème A.0.1. *When $x \to +\infty$,*

$$w(x) = xL(x)^{-\sqrt{2}+o(1)}.$$

Proof. For $3 \leqslant z \leqslant x$, let $\Psi(x,z) := \#\{n \leqslant x : \quad P^+(n) \leqslant z\}$ be the number of z-friable integers less than x. From [Ten15], we have the classical estimate

$$\Psi(x,z) \ll xu^{-u} + \sqrt{x}. \qquad (u = (\log x)/\log z) \tag{A.0.1}$$

From now on, let $x \geqslant 3$, m and $n_1, \ldots, n_m \leqslant x$ denote integers such that $n_1 \cdots n_m$ is of the form $y^{w(x)}$. Let $q := P^+(y^{w(x)})$ denote the highest prime factor of $y^{w(x)}$ and $v_q(y^{w(x)})$ denote its q-valuation. Since the number of q-friable integers $n \leqslant x$ with $q|n$ is less than $\Psi(x/q, q)$, we have

$$w(x) \leqslant v_q(y^{w(w)}) \leqslant \Psi(x/q,q)\frac{\log x}{\log q}.$$

The estimate $(A.0.1)$ yields that the maximum of the right member is attained for

$$q = L(x)^{1/\sqrt{2}+o(1)}.$$

In this case, we get the desired upper bound, which, together with Skałba's lower bound, gives the result. □

Bibliographie

[Bab82] G. J. Babu : Distribution of the values of ω in short intervals. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 40(1-2):135–137, 1982. ↑ 10, 22

[BD17] R. de la Bretèche et S. Drappeau : Majoration du nombre de valeurs friables d'un polynôme. *Prépublication*, 2017. ↑ 15, 38

[BHP01] R. C. Baker, G. Harman et J. Pintz : The difference between consecutive primes. II. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 83(3):532–562, 2001. ↑ 9

[Bru19] V. Brun : La série $\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}+\frac{1}{19}+\frac{1}{29}+\frac{1}{31}+\frac{1}{41}+\frac{1}{43}+\frac{1}{59}+\frac{1}{61}+\cdots$ où les dénominateurs sont « nombres premiers jumeaux » est convergente ou finie. *Bull. Sci. Math. (2)*, 43:100–104 ; 124–128, 1919. ↑ 7, 11

[BT98] M. Balazard et G. Tenenbaum : Sur la répartition des valeurs de la fonction d'Euler. *Compositio Math.*, 110:239–250, 1998. ↑ 33

[BT05] R. de la Bretèche et G. Tenenbaum : Propriétés statistiques des entiers friables. *Ramanujan J.*, 9(1-2):139–202, 2005. ↑ 61, 62

[BT18] R. de la Bretèche et G. Tenenbaum : A remark on Sarnak's conjecture. *Q. J. Math.*, à paraître, 2018. ↑ 83

[Che73] J. R. Chen : On the representation of a larger even integer as the sum of a prime and the product of at most two primes. *Sci. Sinica*, 16(157-176), 1973. ↑ 12

[Cra34] H. Cramér : Prime numbers and probability. *Skand. Mat.-Kongr.*, 8:107–115, 1934. ↑ 7

[Cra36] H. Cramér : On the order of magnitude of the difference between consecutive prime numbers. *Acta Arith.*, 2:23–46, 1936. ↑ 7

[CW14] Z. Cui et J. Wu : The Selberg-Delange method in short intervals with an application. *Acta Arith.*, 163(3):247–260, 2014. ↑ 50, 51

[Del59] H. Delange : Sur des formules dues à Atle Selberg. *Bull. Sci. Math. (2)*, 83:101–111, 1959. ↑ 5, 22

[EK39] P. Erdős et M. Kac : On the Gaussian law of errors in the theory of additive functions. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 25:206–207, 1939. ↑ 5, 21, 93

[EMF75] W. J. Ellison et M. Mandès France : *Les nombres premiers.* Hermann, 1975. ↑ 9

[Erd49] P. ERDŐS : On a new method in elementary number theory which leads to an elementary proof of the prime number theorem. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, 35:374–384, 1949. ↑ 11

[Ess45] C.-G. ESSEEN : Fourier analysis of distribution functions. A mathematical study of the Laplace-Gaussian law. *Acta Math.*, 77:1–125, 1945. ↑ 22, 24

[FGK+18] K. FORD, B. GREEN, S. KONYAGIN, J. MAYNARD et T. TAO : Long gaps between primes. *J. Amer. Math. Soc.*, 31(1):65–105, 2018. ↑ 11

[FI10] J. FRIEDLANDER et H. IWANIEC : *Opera de Cribro*. Colloq. Publ. Amer. Math. Soc., 2010. ↑ 29

[FT96] É. FOUVRY et G. TENENBAUM : Répartition statistique des entiers sans grand facteur premier dans les progressions arithmétiques. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 72(3):481–514, 1996. ↑ 17, 62, 93, 99

[Gou17] É. GOUDOUT : Lois locales de la fonction ω dans presque tous les petits intervalles. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 115(3):599–637, 2017. ↑ 17, 23, 79

[Gou18a] É. GOUDOUT : Highest perfect power of a product of integers less than x. *Int. J. Number Theory*, 14(7):2043–2044, 2018. ↑ 17, 105

[Gou18b] É. GOUDOUT : Théorème d'Erdős-Kac dans presque tous les petits intervalles. *Acta Arith.*, 182(2):101–116, 2018. ↑ 17, 22, 36

[Gou18c] É. GOUDOUT : Théorème d'Erdős-Kac pour les translatés d'entiers ayant k facteurs premiers. *Prépublication*, 2018. ↑ 17

[Gou19] É. GOUDOUT : Concentrations simultanées de fonctions additives. *J. Théor. Nombres Bordeaux*, à paraître, 2019. ↑ 17

[GPY09] D. A. GOLDSTON, J. PINTZ et C. Y. YILDIRIM : Primes in tuples. I. *Ann. of Math. (2)*, 170(2):819–862, septembre 2009. ↑ 11, 12

[Gra95] A. GRANVILLE : Harald Cramér and the distribution of prime numbers. *Scand. Actuar. J.*, 1:12–28, 1995. ↑ 7

[Gre05] B. GREEN : Roth's theorem in the primes. *Ann. of Math. (2)*, 161(3):1609–1636, 2005. ↑ 90

[GS08] A. GRANVILLE et K. SOUNDARARAJAN : Pretentious multiplicative functions and an inequality for the zeta-function. *CRM Proc. Lecture Notes*, Anatomy of Integers, 46:191–197, 2008. ↑ 12

[Had96] J. HADAMARD : Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques. *Bull. Soc. Math. France*, 24(199–220), 1896. ↑ 6

[Hal56] H. HALBERSTAM : On the distribution of additive number-theoretic functions. III. *J. London Math. Soc.*, 31:14–27, 1956. ↑ 12, 17, 93

[Hal71] G. HALÁSZ : On the distribution of additive and the mean values of multiplicative arithmetic functions. *Studia Sci. Math. Hungar.*, 6:211–233, 1971. ↑ 12

[Hal75] G. HALÁSZ : On the distribution of additive arithmetic functions. *Acta Arith.*, 27:143–152, 1975. ↑ 16, 79, 83

[Har81] G. HARMAN : Almost-primes in short intervals. *Math. Ann.*, 258(1):107–112, 1981. ↑ 10

[HB82a] D. R. HEATH-BROWN : Gaps between primes, and the pair correlation of zeros of the zeta function. *Acta Arith.*, 41(1):85–99, 1982. ↑ 10

[HB82b] D. R. Heath-Brown : Primes in 'almost all' short intervals. *J. London Math. Soc. (2)*, 26(3):385–396, 1982. ↑ 10

[HB88] D. R. Heath-Brown : The number of primes in a short interval. *J. Reine Angew. Math.*, 389:22–63, 1988. ↑ 9, 54

[Hen87] D. Hensley : The distribution of round numbers. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 54(3):412–444, 1987. ↑ 6

[Hen12] K. Henriot : Nair-Tenenbaum bounds uniform with respect to the discriminant. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 152(3):405–424, 2012. ↑ 12, 56, 59, 64, 89

[Hen14] K. Henriot : Nair-Tenenbaum uniform with respect to the discriminant–ERRATUM. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 157(2):375–377, 2014. ↑ 89

[Hil86] A. Hildebrand : On the number of positive integers $\leqslant x$ and free of prime factors $> y$. *J. Number Theory*, 22(3):289–307, 1986. ↑ 15, 60

[HL23] G. H. Hardy et J. E. Littlewood : Some problems of 'partitio numerorum'; III: on the expression of a number as a sum of primes. *Acta Math.*, 44(1):1–70, 1923. ↑ 7, 11

[HR17] G. H. Hardy et S. Ramanujan : The normal number of prime factors of a number n. *Quart. J. Math.*, 48:76–92, 1917. ↑ 5, 16

[HT88] A. Hildebrand et G. Tenenbaum : On the number of prime factors of an integer. *Duke Math. J.*, 56(3):471–501, 1988. ↑ 6

[HT91] R. R. Hall et G. Tenenbaum : Effective mean value estimates for complex multiplicative functions. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 110(2):337–351, 1991. ↑ 12

[HT93] A. Hildebrand et G. Tenenbaum : Integers without large prime factors. *J. Théor. Nombres Bordeaux*, 5(2):411–484, 1993. ↑ 38, 60

[Hux72] M. N. Huxley : On the difference between consecutive primes. *Invent. Math.*, 15:164–170, 1972. ↑ 9

[IK04] H. Iwaniec et E. Kowalski : *Analytic number theory*, volume 53 de *Colloq. Publ.* Amer. Math. Soc., 2004. ↑ 13, 14, 40

[Iwa80] H. Iwaniec : Rosser's sieve. *Acta Arith.*, 36(2):171–202, 1980. ↑ 11

[Jia96] C. Jia : Almost all short intervals containing prime numbers. *Acta Arith.*, 76(1):21–84, 1996. ↑ 10

[Ker02] S. Kerner : *Répartition d'entiers avec contraintes sur les diviseurs*. Thèse de doctorat, Univ. Henri-Poincaré Nancy I, 2002. ↑ 6

[Kha10] R. Khan : Spacings between integers having typically many prime factors. *Canad. Math. Bull.*, 53(1):102–117, 2010. ↑ 17

[Lan27] E. Landau : *Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale*. Teubner, Leipzig, 1927. ↑ 80

[Lan89] B. Landreau : A new proof of a theorem of van der Corput. *Bull. London Math. Soc.*, 21(4):366–368, 1989. ↑ 99

[LVP96] C. de La Vallée Poussin : Recherches analytiques sur la théorie des nombres permiers, 1. *Ann. Soc. Scient. Bruxelles*, 20:183–256, 1896. ↑ 6

[Mai85] H. Maier : Primes in short intervals. *Michigan Math. J.*, 32(2):221–225, 1985. ↑ 8

[May15] J. MAYNARD : Small gaps between primes. *Ann. of Math. (2)*, 181(1):383–413, 2015. ↑ 11, 12

[Mon80] H. L. MONTGOMERY : The Zeta function and prime numbers. *Proceedings of the Queen's Number Theory Conference*, 1980. ↑ 7

[MR15] K. MATOMÄKI et M. RADZIWIŁŁ : A note on the Liouville function in short intervals. Notes expositoires, https://arxiv.org/pdf/1502.02374v1.pdf, 2015. ↑ 40

[MR16] K. MATOMÄKI et M. RADZIWIŁŁ : Multiplicative functions in short intervals. *Ann. of Math. (2)*, 183(3):1015–1056, 2016. ↑ 10, 23, 24, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 46, 63

[MRT15] K. MATOMÄKI, M. RADZIWIŁŁ et T. TAO : An averaged form of Chowla's conjecture. *Algebra Number Theory*, 9(9):2167–2196, 2015. ↑ 23

[Nag51] T. NAGELL : *Introduction to number theory.* Wiley, 1951. ↑ 80

[NT98] M. NAIR et G. TENENBAUM : Short sums of certain arithmetic functions. *Acta Math.*, 180(1):119–144, 1998. ↑ 12, 56

[Pin07] J. PINTZ : Cramér vs. Cramér. On Cramér's probabilistic model for primes. *Funct. Approx. Comment. Math.*, 37(2):361–376, 2007. ↑ 8

[Pla91] V. A. PLAKSIN : A statistical property of the sieve of Eratosthenes. *Theory Probab. Appl.*, 36(3):608–614, 1991. ↑ 11, 13, 22

[Pol14] D. H. J. POLYMATH : Variants of the Selberg sieve, and bounded intervals containing many primes. *Res. Math. Sci.*, 1, 2014. ↑ 11

[Ran36] R. A. RANKIN : The difference between consecutive prime numbers. *J. London Math. Soc.*, 11(4):242–245, 1936. ↑ 11

[RT58] A. RÉNYI et P. TURÁN : On a theorem of Erdős-Kac. *Acta Arith.*, 4:71–84, 1958. ↑ 5, 21, 93

[Sat53] L. G. SATHE : On a problem of Hardy on the distribution of integers having a given number of prime factors. *J. Indian Math. Soc. (N.S.)*, 17:63–141, 1953. ↑ 6

[Sel43] A. SELBERG : On the normal density of primes in small intervals, and the difference between consecutive primes. *Arch. Math. Naturvid.*, 47(6):87–105, 1943. ↑ 10

[Sel47] A. SELBERG : On an elementary method in the theory of primes. *Norske Vid. Selsk. Forh.*, Trondheim 19(18):64–67, 1947. ↑ 11

[Sel49] A. SELBERG : An elementary proof of the prime-number theorem. *Ann. of Math. (2)*, 50:305–313, 1949. ↑ 11

[Sel54] A. SELBERG : Note on a paper by L. G. Sathe. *J. Indian Math. Soc. (N.S.)*, 18:83–87, 1954. ↑ 6

[Ska17] M. SKAŁBA : Products of distinct integers being high powers. *Int. J. Number Theory*, 13(8):2093–2096, 2017. ↑ 17, 105

[Ste91] C. L. STEWART : On the number of solutions of polynomial congruences and Thue equations. *J. Amer. Math. Soc.*, 4(4):793–835, 1991. ↑ 80

[Tao16] T. TAO : The logarithmically averaged Chowla and Elliott conjectures for two-point correlations. *Forum Math. Pi*, 4(8), 2016. ↑ 10

[Ten84] G. TENENBAUM : Sur la probabilité qu'un entier possède un diviseur dans un intervalle donné. *Compositio Math.*, 51(2):243–263, 1984. ↑ 97

[Ten90] G. Tenenbaum : Sur une question d'Erdős et Schinzel, in : A. Baker, B. Bollabás, A. Hajnal (eds.) *A Tribute to Paul Erdős. Cambridge University Press*, pages 405–443, 1990. ↑ 80

[Ten00] G. Tenenbaum : A rate estimate in Billingsley's theorem for the size distribution of large prime factors. *Q. J. Math.*, 51(3):385–403, 2000. ↑ 50, 54

[Ten15] G. Tenenbaum : *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres.* Belin, quatrième édition, 2015. ↑ 12, 13, 22, 24, 25, 28, 33, 52, 53, 62, 84, 94, 95, 99, 100, 105

[Ten17] G. Tenenbaum : Moyennes effectives de fonctions multiplicatives complexes. *Ramanujan J.*, 44(3):641–701, 2017. ↑ 83

[Ten18] G. Tenenbaum : Note sur les lois locales conjointes de la fonction nombre de facteurs premiers. *J. Number Theory*, 188:88–95, 2018. ↑ 16, 37, 79, 80, 85, 86

[Ter16] J. Teräväinen : Almost primes in almost all short intervals. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 161(2):247–281, 2016. ↑ 10, 24, 37, 65

[TK94] N. M. Timofeev et M. B. Khripunova : Distribution of numbers with a given number of prime factors in progressions. *Math. Notes*, 55(1-2):204–212, 1994. ↑ 97

[Tur34] P. Turán : On a theorem of Hardy and Ramanujan. *J. London Math. Soc.*, 9(4):274–276, 1934. ↑ 5

[Wol79] D. Wolke : Fast-Primzahlen in kurzen Intervallen. *Math. Ann.*, 244(3):233–242, 1979. ↑ 10

[WZ93] D. Wolke et T. Zhan : On the distribution of integers with a fixed number of prime factors. *Math. Z.*, 213(1):133–144, 1993. ↑ 17, 97

[Zac98] A. Zaccagnini : Primes in almost all short intervals. *Acta Arith.*, 84(3):225–244, 1998. ↑ 10

[Zha14] Y. Zhang : Bounded gaps between primes. *Ann. of Math*, 179(3):1121–1174, mai 2014. ↑ 11