UNIVERSITE PARIS 7 - DENIS DIDEROT
UFR DE MATHEMATIQUES

Année : 2001 N° |_|_|_|_|_|_|_|_|_|_|

THÈSE DE DOCTORAT

Spécialité : Mathématiques

présentée par

François MARTIN

pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS 7

Périodes de formes modulaires de poids 1

Soutenue le 20 décembre 2001 devant le jury composé de :

Kevin BUZZARD	(rapporteur)
Michael HARRIS	
Guy HENNIART	
Loïc MEREL	(directeur)
Joseph OESTERLE	
Don ZAGIER	(rapporteur)

Remerciements

Je tiens à exprimer en premier lieu toute ma reconnaissance à Loïc Merel. En acceptant d'encadrer mon stage de DEA, puis ma thèse, il m'a fait confiance et m'a proposé un sujet de recherche très intéressant qui s'inscrivait naturellement dans le prolongement des cours de DEA et des stages que j'avais suivis. Il a su, tout au long de cette thèse, m'encourager, orienter mes recherches et me faire partager avec patience et clarté ses idées et son savoir mathématique.

Je tiens ensuite à exprimer ma gratitude à Kevin Buzzard et Don Zagier, qui m'ont fait l'honneur de rapporter cette thèse et m'ont fait profiter de leurs remarques. Je suis très flatté que Kevin Buzzard ait accepté de se déplacer pour la soutenance, et je l'en remercie sincèrement.

Ce travail doit beaucoup à Don Zagier : il m'a envoyé un article alors non publié écrit avec John Lewis, qui a été une source d'inspiration essentielle pour une large partie de cette thèse. Je lui manifeste ici toute ma reconnaissance.

J'exprime également toute ma gratitude à Michael Harris, Guy Henniart et Joseph Oesterlé, qui se sont intéressés à mes travaux et ont accepté de faire partie du jury.

Je souhaite aussi remercier Jean-Benoît Bost, qui m'a fait découvrir le monde des formes modulaires lors d'un stage à l'Ecole Polytechnique, et m'a encouragé à poursuivre dans cette voie. Cette initiation à la recherche fut une aventure partagée avec Emmanuel Royer, et nous avons ensuite continué à cheminer ensemble, partageant nos recherches et nos interrogations : nos discussions fructueuses (mathématiques ou non), son enthousiasme et son amitié ont été et restent essentiels.

Durant ces années de doctorat, à Jussieu puis à Chevaleret, j'ai eu la chance de pouvoir discuter avec les membres du laboratoire de théorie des nombres, que je remercie pour leur accueil. Lors de séminaires ou de colloques, j'ai par ailleurs pu tirer profit d'exposés et d'échanges intéressants et amicaux avec plusieurs théoriciens des nombres, que je tiens à remercier, en particulier Etienne Fouvry, Philippe Michel, Hedi Daboussi, ainsi que tous les thésards que j'ai pu croiser à ces occasions.

Ces années de thèse m'ont également offert, par le biais du monitorat, une occasion passionnante de m'initier à l'enseignement. J'ai eu la chance d'être encadré par des personnes qui m'ont témoigné leur confiance, et ont su me faire partager leur expérience pédagogique et leur goût pour l'enseignement. Je tiens à remercier tout particulièrement, pour leur amitié et nos discussions, Georges Skandalis, Dominique Martinais, François Liret et Emmanuel Germain.

La bonne ambiance du plateau des doctorants, et spécifiquement du bureau 7C10, a été primordiale pendant ces années de thèse. Je tiens donc à exprimer toute mon amitié à

tous ceux que j'ai pu rencontrer, et en particulier à Charles, Emmanuel, François, Frédéric, Gentiana, Georg, Marie-Noëlle, Martine, Marusia, Sibylle, Vincent B., Vincent S. et tous les doctorants (notamment ceux du tout nouveau "séminaire des jeunes" de théorie des nombres). Je remercie tout spécialement Bertrand, complice de bureau tout au long de la thèse, et Roland ; j'ai partagé avec eux une très riche expérience d'enseignement. Enfin, j'envoie un clin d'oeil tout particulier à Stéphane, camarade et confident depuis plus de cinq ans, son sens de l'accueil (et de la bonne cuisine), sa bonne humeur et son humour sont inégalables.

Enfin, j'adresse un grand merci à tous ceux qui m'ont accompagné en dehors des mathématiques. Je ne peux les citer toutes et tous, mais j'ai une pensée particulière pour mes parents, mes frères Samuel et Jérôme, ma filleule Amandine, les amis d'enfance toujours fidèles, David, Denis, Guillaume et Raphaël, tous ceux avec qui j'ai pu partager mes passions, Denis, Jean-Christophe et Julien (pour les jeux mathématiques), Luc, Nicolas et tous les membres de Coup de Pouce, ainsi que Houssine et Rater.

Table des matières

Introduction **7**

1 Rappels **17**
1.1 Sous-groupes de congruence . . . 17
1.1.1 Le demi-plan de Poincaré et $SL(2,\mathbb{Z})$ . . . 17
1.1.2 Sous-groupes de congruence et domaine fondamental . . . 18
1.1.3 Géométrie des quotients $\Gamma \setminus \overline{\mathcal{H}}$ et pointes . . . 19
1.1.4 Quelques résultats sur les sous-groupes $\Gamma(N)$, $\Gamma_0(N)$ et $\Gamma_1(N)$ . . . 21
1.2 Formes modulaires . . . 22
1.2.1 Les espaces $\mathcal{M}_k(\Gamma)$ et $\mathcal{S}_k(\Gamma)$ . . . 22
1.2.2 Produit scalaire de Petersson et séries d'Eisenstein . . . 23
1.2.3 Formes modulaires sur $\mathcal{H}^-$ . . . 25
1.3 Opérateurs sur les formes modulaires . . . 26
1.3.1 Caractères de Dirichlet . . . 26
1.3.2 Opérateurs diamants . . . 28
1.3.3 Opérateurs de Hecke . . . 28
1.3.4 Opérateurs d'Atkin-Lehner . . . 29
1.4 Fonctions L . . . 30
1.5 Formes modulaires de poids 1 : quelques résultats . . . 31
1.5.1 Dimension . . . 31
1.5.2 Théorème de Deligne-Serre . . . 32
1.5.3 Valeurs aux pointes des séries d'Eisenstein de poids 1 . . . 33

2 Périodes - Théorie de Lewis-Zagier **35**
2.1 Théorie classique des périodes . . . 35
2.1.1 Périodes de formes modulaires non paraboliques . . . 36
2.2 Cohomologie parabolique . . . 38
2.3 Théorie de Lewis-Zagier . . . 40
2.3.1 Formes de Maass . . . 40
2.3.2 Périodes de formes de Maass . . . 41

3 Périodes de formes modulaires de poids 1 **43**
3.1 Préliminaires . . . 43
3.1.1 Notations . . . 43
3.1.2 Chemins dans $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}^-$ . . . 43
3.1.3 Formes modulaires sur $\mathcal{H}^-$ . . . 44
3.2 Définition des périodes . . . 45
3.3 Démonstration du théorème 0.3 . . . 48
3.3.1 Prolongement analytique des fonctions de $\mathcal{L}_\Gamma$ . . . 48

3.3.2 Définition des formes modulaires associées à Ψ^+ 51
3.3.3 Les formes modulaires f et f' sont paraboliques 53
3.3.4 Conclusion 54
3.4 Isomorphisme entre $\mathcal{S}_1(\Gamma)$ et $\mathcal{L}_\Gamma^+$ si $\Gamma = V\Gamma V$ 56

4 Transport des structures modulaires sur $\mathcal{L}_\Gamma$ 59
4.1 Produit scalaire de Petersson 59
4.2 Périodes de formes non paraboliques 65
4.3 Lien avec la cohomologie de $SL(2,\mathbb{Z})$ 72

5 Examen des groupes arithmétiques 77
5.1 Action des opérateurs de Hecke 77
5.2 Fonctions L 81
5.2.1 Démonstration de la proposition 0.10 82
5.2.2 Fonctions L tordues 83
5.2.3 Démonstration du théorème 0.11 85

6 Appendice : quelques propriétés de $\mathbb{Z}[SL(2,\mathbb{Z})]$ 93

Bibliographie 99

Introduction

Le but de ce travail est de construire une théorie des périodes de formes modulaires de poids 1. Commençons par rappeler quelques travaux antérieurs sur les périodes d'autres formes modulaires.

Notations : On note $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \,\big|\, Im(z) > 0\}$ le demi-plan de Poincaré et $\mathcal{H}^- = \{z \in \mathbb{C} \,\big|\, Im(z) < 0\}$. On pose dans $SL(2,\mathbb{Z})$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad T' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit Γ un sous-groupe d'indice fini de $SL(2,\mathbb{Z})$. On note $\mathcal{M}_k(\Gamma)$ (resp. $\mathcal{S}_k(\Gamma)$) l'espace des formes modulaires (resp. paraboliques) de poids k pour Γ. On note $\overline{\mathcal{M}_k(\Gamma)}$ (resp. $\overline{\mathcal{S}_k(\Gamma)}$) l'espace des formes modulaires anti-holomorphes de poids k pour Γ. On pose, pour $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2,\mathbb{Z})$ tel que $\det g > 0$

$$f_{|_k g}(z) = (\det g)^{\frac{k}{2}}(cz+d)^{-k} f(gz) \qquad f_{|_k \overline{g}}(z) = (\det g)^{\frac{k}{2}}(c\overline{z}+d)^{-k} f(gz).$$

On prend comme convention que lorsque k n'est pas précisé, il est égal à 1 : $f_{|g} := f_{|_1 g}$.

1 - Les périodes de formes modulaires de poids ≥ 2

Considérons l'espace $\mathcal{S}_k(SL(2,\mathbb{Z}))$ pour $k \geq 2$ un entier pair. La *période* (ou polynôme de période) de $f \in \mathcal{S}_k(SL(2,\mathbb{Z}))$ est l'élément de $\mathbb{C}[X]$, de degré $\leq k-2$, défini par

$$r_f(X) = \int_0^{i\infty} f(\tau)(X-\tau)^{k-2} d\tau.$$

Il est commode de poser pour $(f, f') \in \mathcal{S}_k(SL(2,\mathbb{Z}))^2$:

$$r_{f,f'}(X) = \int_0^{i\infty} f(\tau)(X-\tau)^{k-2} d\tau + \int_{-i\infty}^{0} f'(-\tau)(X-\tau)^{k-2} d\tau.$$

On a $r_{f,f'}(X) = r_f(X) + r_{f'}(-X)$. Soit $V_k = \{P \in \mathbb{C}[X],\ \mathrm{d}^\circ P \leq k-2\}$. Posons pour $P \in V_k$ et $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})$

$$(\gamma.P)(X) = (-cX+a)^{k-2} P\left(\frac{dX-b}{-cX+a}\right).$$

On remarque que, k étant pair, $-I$ agit comme l'identité. On a

$$\gamma.r_{f,f'}(X) = \int_{\gamma 0}^{\gamma\infty} f(\tau)(X-\tau)^{k-2} d\tau + \int_{\gamma\infty}^{\gamma 0} f'(-\tau)(X-\tau)^{k-2} d\tau$$

(le chemin d'intégration étant dans $\mathcal{H}$ pour la première intégrale et dans $\mathcal{H}^-$ pour la deuxième). Cette expression montre que $r_{f,f'}$ vérifie les équations

$$(I+S).r_{f,f'} = (I+U+U^2).r_{f,f'} = 0 \tag{1}$$

(où l'action de $SL(2,\mathbb{Z})$ est étendue par $\mathbb{C}$-linéarité). Ces équations sont les *relations de Manin* (voir l'appendice page 93), mises en évidence par Manin (voir [Man72] et [Man73]). Posons

$$W_k = \{P \in V_k \,\big|\, (I+S).P = (I+U+U^2).P = 0\}.$$

En fait on a $W_k = \{P \in V_k \,\big|\, (I+S).P = (I-T^{-1}-T'^{-1}).P = 0\}$. Eichler et Shimura ont montré le théorème suivant (voir par exemple [Lan76] page 81) :

Théorème 0.1 (Eichler-Shimura). *Pour un entier pair $k > 2$, l'application r donnée par $r(f,f') = r_{f,f'}$ est un isomorphisme de $\mathcal{S}_k(SL(2,\mathbb{Z}))^2$ dans un espace de codimension 1 de W_k.*

Remarques. —

1. Eichler et Shimura ont donné une version en terme de cohomologie des groupes du théorème 2.1.
2. Zagier a étendu la notion de période aux formes non paraboliques (voir [Zag91]) de poids $k \geq 2$ pour $SL(2,\mathbb{Z})$.
3. On peut généraliser la notion de période aux sous-groupes d'indice fini de $SL(2,\mathbb{Z})$: on définit pour $(f,f_1) \in \mathcal{S}_k(\Gamma) \times \overline{\mathcal{S}_k(\Gamma)}$

$$r_{f,f_1}(X,\Gamma g) = \int_0^{i\infty} f_{|_k g}(z)(X-z)^{k-2}dz + \int_0^{i\infty} f_{1|_k\overline{g}}(z)(X-\overline{z})^{k-2}\overline{dz}$$

ce qui plonge $\mathcal{S}_k(\Gamma) \times \overline{\mathcal{S}_k(\Gamma)}$ dans l'espace des fonctions $\mathbb{R} \times \Gamma \backslash SL(2,\mathbb{Z})$ polynomiales en la première variable satisfaisant les relations de Manin (voir par exemple [Sho81]), où on pose $(\gamma.P)(X,\Gamma g) = (-cX+a)^{-1}P(\gamma^{-1}X,\Gamma g\gamma)$ pour $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

2 - Théorie de Lewis pour les formes de Maass

On évoque maintenant les résultats obtenus par Lewis et Zagier (voir [Lew97] et [L-Z01]). On définit sur $\mathcal{H}$ le laplacien hyperbolique $\Delta = -y^2\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\cdot$ On note $\mathfrak{S}(SL(2,\mathbb{Z}),\lambda)$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions $u : \mathcal{H} \longmapsto \mathbb{C}$ analytiques réelles, vérifiant les conditions :

- pour tout $\gamma \in SL(2,\mathbb{Z})$ et $z \in \mathcal{H}$, $u(\gamma z) = u(z)$;
- $\Delta u = \lambda u$;
- $u \in L^2(SL(2,\mathbb{Z}) \setminus \mathcal{H})$.

Les espaces $\mathfrak{S}(SL(2,\mathbb{Z}),\lambda)$ sont de dimension finie. Pour $s \in \mathbb{C}$, $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})$ avec $a,d \geq 0$ et $b,c \leq 0$, et Ψ une fonction analytique réelle sur $]-\infty,0[$, on pose

$$(\gamma.\Psi)(z) = (-cz+a)^{-2s}\Psi\left(\frac{dz-b}{-cz+a}\right)\cdot$$

Théorème 0.2 (Lewis-Zagier). *Il existe une correspondance linéaire bijective entre l'espace $\mathfrak{S}(SL(2,\mathbb{Z}),s(1-s))$ et l'ensemble des fonctions analytiques réelles $\Psi :]0,+\infty[\to \mathbb{C}$ vérifiant*

- *l'équation fonctionnelle $\Psi - T^{-1}.\Psi - T'^{-1}.\Psi = 0$ (l'action de $SL(2,\mathbb{Z})$ dépend de s) ;*

– *les conditions aux limites :*

$$\Psi(x) =_{x\to 0} o(\frac{1}{x}) \qquad\qquad \Psi(x) =_{x\to+\infty} o(1).$$

Lorsque u est paire ($u(-\overline{z}) = u(z)$ pour tout $z \in \mathcal{H}$), cette bijection est donnée par exemple par

$$\Psi(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} 2^{-s}\Gamma(s+1)x \int_0^\infty \frac{y^s}{(x^2+y^2)^{s+1}} u(iy)dy.$$

Remarques. —

1. L'élément $(I - T^{-1} - T'^{-1})$ a été mis en évidence par Lewis (voir le chapitre 6 pour les propriétés qui le caractérisent).
2. Lewis et Zagier justifient, dans le chapitre 4-2 de [L-Z01], la terminologie de périodes de formes de Maass donnée à ces fonctions.

On présente maintenant les résultats originaux obtenus.

3 - L'espace des périodes et ses variantes

Soient U une partie de $\mathbb{C}$, ϕ une fonction définie sur $U \times \Gamma \setminus SL(2,\mathbb{Z})$ et $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ un élément de $SL(2,\mathbb{Z})$. Pour $(z, \Gamma g) \in \gamma U \times \Gamma\backslash SL(2,\mathbb{Z})$, on pose

$$(\gamma.\phi)(z,\Gamma g) = (-cz+a)^{-1}\phi\left(\frac{dz-b}{-cz+a}, \Gamma g\gamma\right).$$

On note

– $\mathcal{L}_\Gamma$ l'espace vectoriel complexe des fonctions continues $\psi^+ : [0,+\infty[\times\Gamma\backslash SL(2,\mathbb{Z}) \to \mathbb{C}$, analytiques[1] en la première variable sur $]0,+\infty[$, et vérifiant :

  1. $(I - T^{-1} - T'^{-1}).\psi^+ = 0$;
  2. $(I - (-I)).\psi^+ = 0$;
  3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \psi^+(x,\Gamma g) = 0$ pour tout $\Gamma g \in \Gamma\backslash SL(2,\mathbb{Z})$.

– $\mathcal{L}_\Gamma^{\mathbb{C}\backslash]-\infty,0[}$ l'espace des fonctions continues $\Psi : \mathbb{C}\backslash]-\infty,0[\times\Gamma\backslash SL(2,\mathbb{Z}) \to \mathbb{C}$, holomorphes en la première variable sur $\mathbb{C}\backslash]-\infty,0]$, vérifiant :

  1. $(I - T^{-1} - T'^{-1}).\Psi = (I - (-I)).\Psi = 0$;
  2. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \Psi(x,\Gamma g) = 0$ pour tout $\Gamma g \in \Gamma\backslash SL(2,\mathbb{Z})$.

– $\mathcal{L}_\Gamma^{\mathbb{R}}$ l'espace des fonctions $\psi : \mathbb{R}\times\Gamma\backslash SL(2,\mathbb{Z}) \to \mathbb{C}$, analytiques en la première variable sur $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$ et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, vérifiant les propriétés

  1. $(I - T^{-1} - T'^{-1}).\psi = (I+S).\psi = 0$ (les relations de Manin) ;
  2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \psi(x,\Gamma g) = 0$ pour tout $\Gamma g \in \Gamma\backslash SL(2,\mathbb{Z})$.

– $\widehat{\mathcal{L}_\Gamma}$ l'espace des fonctions $\widehat{\Psi} :]-\infty,0[\cup]0,+\infty[\times\Gamma\backslash SL(2,\mathbb{Z}) \to \mathbb{C}$, analytiques en la première variable, satisfaisant les propriétés suivantes :

  1. la fonction $\widehat{\Psi}$ vérifie les équations fonctionnelles $(I+S).\widehat{\Psi} = (I-T-T').\widehat{\Psi} = 0$;

[1] Une fonction $E \to \mathbb{C}$, où E est un sous-ensemble de $\mathbb{C}$, est analytique si elle est développable en série entière sur un voisinage de tout point de E.

2. pour tout $\Gamma g \in \Gamma\backslash SL(2,\mathbb{Z})$, il existe $(a_{\Gamma g}, a'_{\Gamma g}) \in \mathbb{C}^2$ tels que

$$\widehat{\Psi}(x,\Gamma g) = a_{\Gamma g}\ln x - a'_{\Gamma g}\ln(-x) + O(\frac{1}{x}) \tag{2}$$

au voisinage du point $\infty \in \mathbb{P}_1(\mathbb{R})$.

Les espaces $\mathcal{L}_\Gamma$, $\mathcal{L}_\Gamma^{\mathbb{C}\backslash]-\infty,0[}$ et $\mathcal{L}_\Gamma^{\mathbb{R}}$ sont canoniquement isomorphes. On prolonge toute fonction ψ^+ de $\mathcal{L}_\Gamma$ en une fonction de $\mathcal{L}_\Gamma^{\mathbb{R}}$ en posant $\psi = -S.\psi^+$ sur $]-\infty,0[$. Le fait que l'application canonique : $\mathcal{L}_\Gamma^{\mathbb{C}\backslash]-\infty,0[} \to \mathcal{L}_\Gamma$ est bijective est expliqué dans la section 3.3.1. On a en fait l'inclusion $\mathcal{L}_\Gamma^{\mathbb{R}} \subset \widehat{\mathcal{L}_\Gamma}$ (voir section 4.2).

Remarques. —

1. Il n'est pas clair a priori que ces espaces sont de dimension finie.
2. Rappelons que la conjecture de réciprocité de Langlands prédit que toute représentation $\rho : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to GL(2,\mathbb{C})$ irréductible continue de conducteur N et de déterminant ϵ (identifié à un caractère de Dirichlet modulo N par la théorie du corps de classes) provient via les fonctions L :
   – si ρ est impaire, d'une forme parabolique $f \in \mathcal{S}_1(\Gamma_0(N),\epsilon)$;
   – si ρ est paire, d'une forme de Maass parabolique de poids 0 de niveau N et de caractère ϵ, de valeur propre $\frac{1}{4}$ pour le laplacien.

   Une généralisation des résultats de Lewis et Zagier pour les formes de Maass sur des sous-groupes d'indice fini de $SL(2,\mathbb{Z})$ est attendue. Considérons l'espace $\overline{\mathcal{L}_\Gamma}$ des fonctions $\Psi :]0,+\infty[\times\Gamma\backslash SL(2,\mathbb{Z}) \to \mathbb{C}$ analytiques en la première variable et vérifiant l'équation fonctionnelle $(I - T^{-1} - T'^{-1}).\Psi = 0$. L'espace des formes modulaires de poids 1 s'identifie à une partie de $\{\Psi \in \overline{\mathcal{L}_\Gamma} \,\big|\, (-I).\Psi = \Psi\}$ (d'après le théorème 0.3 ci-dessous). L'espace des formes de Maass pour Γ de valeur propre $\frac{1}{4}$ pour le laplacien s'identifie-t'il à une partie de $\{\Psi \in \overline{\mathcal{L}_\Gamma} \,\big|\, (-I).\Psi = -\Psi\}$? Cela semble suggéré par le théorème de Lewis.

4 - L'isomorphisme principal et le plan de la démonstration

Le chapitre 3 est principalement consacré à la démonstration du théorème suivant :

Théorème 0.3. *L'application*

$$\begin{array}{rcl} r : \mathcal{S}_1(\Gamma) \times \overline{\mathcal{S}_1(\Gamma)} & \longrightarrow & \mathcal{L}_\Gamma \\ (f, f_1) & \longmapsto & \psi^+_{f,f_1} \end{array}$$

où

$$\psi^+_{f,f_1}(x,\Gamma g) = \frac{1}{2i\pi}\int_0^{i\infty} f_{|g}(\tau)\frac{d\tau}{x-\tau} + \frac{1}{2i\pi}\int_0^{i\infty} f_{1|\bar{g}}(\tau)\frac{\overline{d\tau}}{x-\bar{\tau}}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels complexes.

Remarque. — On peut remplacer dans le théorème 0.3 l'espace $\overline{\mathcal{S}_1(\Gamma)}$ par les espaces $\mathcal{S}_1^-(\Gamma)$ ou $\mathcal{S}_1(V\Gamma V)$ (où $\mathcal{S}_1^-(\Gamma)$ désigne l'espace des formes modulaires sur $\mathcal{H}^-$ de poids 1 pour Γ et $V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$) grâce aux isomorphismes $s_1 : \mathcal{S}_1^-(\Gamma) \to \mathcal{S}_1(V\Gamma V)$ et $s_2 : \mathcal{S}_1^-(\Gamma) \to \overline{\mathcal{S}_1(\Gamma)}$ définis pour tout $z \in \mathcal{H}$ par $s_1(f^-)(z) = f^-(-z)$ et $s_2(f^-)(z) = f^-(\overline{z})$.

La démonstration du théorème 0.3 se fait en plusieurs étapes : on montre dans la section 3.2 que r est bien définie et se factorise par $\mathcal{L}_\Gamma^{\mathbb{C}\backslash]-\infty,0[}$. Dans le paragraphe 3.3.1, on montre que

l'application canonique $\mathcal{L}_\Gamma^{\mathbb{C}\setminus]-\infty,0[} \to \mathcal{L}_\Gamma$ est bijective. Dans les paragraphes 3.3.2 et 3.3.3, on construit une application $\mathcal{L}_\Gamma \to \mathcal{S}_1(\Gamma)\times\overline{\mathcal{S}_1(\Gamma)}$, dont on montre dans le paragraphe 3.3.4 qu'elle est réciproque de r.

Définition 0.4. *On définit la* période *de $f \in \mathcal{S}_1(\Gamma)$ comme étant la fonction $\psi_f \in \mathcal{L}_\Gamma^{\mathbb{R}}$ définie par :*

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}\times\Gamma\backslash SL(2,\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x,\Gamma g) & \longmapsto & \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{f_{|g}(it)}{x-it}dt, \end{array}$$

le chemin d'intégration étant contenu dans $\mathcal{H}$.

Avec les notations précédentes, on a :

$$\begin{cases} \psi_f(x,\Gamma g) = \psi_{f,0}^+(x,\Gamma g) \text{ si } x \geq 0 \\ \psi_f(x,\Gamma g) = \dfrac{1}{x}\psi_{f,0}^+(-\dfrac{1}{x},\Gamma g\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}) \text{ si } x < 0. \end{cases}$$

5 - Structure réelle

On se place dans le cas où $V\Gamma V = \Gamma$. Cela entraîne que la courbe $X_\Gamma = \Gamma\setminus\mathcal{H}\cup\mathbb{P}_1(\mathbb{Q})$, a priori définie sur $\mathbb{C}$, est en fait définie sur $\mathbb{R}$. C'est le cas lorsque Γ est l'un des groupes $\Gamma(N)$ et $\Gamma_1(N)$[2].

L'application $\psi \mapsto \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.\psi$ est une involution de $\mathcal{L}_\Gamma$, où on pose

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.\psi(x,\Gamma g) = \frac{1}{x}\psi\left(\frac{1}{x},\Gamma VgVS\right).$$

Pour $(f,f')\in\mathcal{S}_1(\Gamma)^2$, on a[3] $\psi_{f,f'}^+ = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.\psi_{f',f}^+$. Posons $\mathcal{L}_\Gamma^+$ (resp. $\mathcal{L}_\Gamma^-$) le sous-espace de $\mathcal{L}_\Gamma$ constitué des éléments invariants (resp. anti-invariants) de $\mathcal{L}_\Gamma$ par cette involution.

Corollaire 0.5. *Supposons que $V\Gamma V = \Gamma$. L'application $f \mapsto \psi_{f,f}^+$ (resp. $\psi_{f,-f}^+$) définit une bijection entre $\mathcal{S}_1(\Gamma)$ et $\mathcal{L}_\Gamma^+$ (resp. $\mathcal{L}_\Gamma^-$).*

6 - Structure hermitienne

Le produit scalaire de Petersson de deux formes paraboliques $(f_1,f_2)\in\mathcal{S}_1(\Gamma)^2$ est donnée par la formule

$$\langle f_1,f_2\rangle = \frac{1}{\nu(\Gamma)}\iint_{\mathcal{F}(\Gamma)} f_1(z)\overline{f_2(z)}\frac{dxdy}{y}$$

où $\mathcal{F}(\Gamma)$ désigne un domaine fondamental pour Γ, et où $\nu(\Gamma) = [SL(2,\mathbb{Z}):\Gamma]$.

Théorème 0.6. *Pour f_1 et f_2 éléments de $\mathcal{S}_1(\Gamma)$, on a la formule*

$$\langle f_1,f_2\rangle = \frac{i\pi}{3\nu(\Gamma)}\sum_{\Gamma g\in\Gamma\backslash SL(2,\mathbb{Z})}\int_{\mathbb{R}}\left(U.\psi_{f_1}(x,\Gamma g)\,\overline{\psi_{f_2}(x,\Gamma g)} - \psi_{f_1}(x,\Gamma g)\,\overline{U.\psi_{f_2}(x,\Gamma g)}\right)dx.$$

Cela munit directement $\mathcal{L}_\Gamma$ d'une structure hermitienne. Cette formule est l'analogue des résultats de Haberland et Kohnen-Zagier pour les formes de poids $k\geq 2$ (voir [Hab83] et [K-Z84]).

---

[2] On a $\Gamma(N) = \left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in SL(2,\mathbb{Z})\,\middle|\, c\equiv 0 \bmod N\right\}$ et $\Gamma_1(N) = \left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma(N)\,\middle|\, a\equiv d\equiv 1 \bmod N\right\}$.

[3] On identifie ici l'espace $\overline{\mathcal{S}_1(\Gamma)}$ à $\mathcal{S}_1(V\Gamma V) = \mathcal{S}_1(\Gamma)$ par l'isomorphisme $s_1\circ s_2^{-1}$.

7 - Extension aux formes non paraboliques

Pour $(f_1, f_2) \in \mathcal{M}_1(\Gamma) \times \mathcal{M}_1(V\Gamma V)$, on définit sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[\times\Gamma\backslash SL(2,\mathbb{Z})$ la fonction r_{f_1,f_2} par

$$r_{f_1,f_2}(x,\Gamma g) = \int_\alpha^{i\infty} \frac{f_{1|g}(\tau) - a_0(f_{1|g})}{x-\tau} d\tau + \int_0^\alpha \frac{f_{1|g}(\tau) + \frac{a_0(f_{1|gS})}{\tau}}{x-\tau} d\tau + a_0(f_{1|g}) \ln(x-\alpha)$$
$$+ \frac{a_0(f_{1|gS})}{x} \ln(-\frac{1}{x} + \frac{1}{\alpha}) + \int_{-i\infty}^{-\alpha} \frac{f_{2|VgV}(-\tau) - a_0(f_{2|VgV})}{x-\tau} d\tau$$
$$+ \int_{-\alpha}^0 \frac{f_{2|VgV}(-\tau) - \frac{a_0(f_{2|VgVS})}{\tau}}{x-\tau} d\tau - a_0(f_{2|VgV}) \ln(-x-\alpha) + \frac{a_0(f_{2|VgVS})}{x} \ln(\frac{1}{x} + \frac{1}{\alpha}),$$

où $\alpha \in \mathcal{H}$. La fonction r_{f_1,f_2} ne dépend pas de α et appartient à $\widehat{\mathcal{L}_\Gamma}$. On obtient une généralisation du théorème 0.3 :

Théorème 0.7. *L'application r qui à (f_1, f_2) associe r_{f_1,f_2} est un isomorphisme d'espaces vectoriels complexes entre $\mathcal{M}_1(\Gamma) \times \mathcal{M}_1(V\Gamma V)$ et $\widehat{\mathcal{L}_\Gamma}$.*

8 - Interprétation cohomologique

On définit l'espace M_Γ comme l'espace vectoriel des fonctions $\psi : \mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \times \Gamma\backslash SL(2,\mathbb{Z}) \to \mathbb{C}$, continues et vérifiant les propriétés suivantes :

1. il existe un ensemble fini $F_\psi \subset \mathbb{Q}$ tel que, pour tout $\Gamma g \in \Gamma\backslash SL(2,\mathbb{Z})$, la fonction $x \mapsto \psi(x, \Gamma g)$ soit analytique sur $\mathbb{R} \setminus F_\psi$;
2. pour tout $\Gamma g \in \Gamma\backslash SL(2,\mathbb{Z})$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\psi(x, -\Gamma g) = -\psi(x, \Gamma g)$;
3. pour tout $\Gamma g \in \Gamma\backslash SL(2,\mathbb{Z})$, la fonction $x \mapsto x\psi(x, \Gamma g)$ admet une limite réelle $a_{\Gamma g}$ quand $x \to \infty$ dans $\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$.

Pour $h = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})$, $\psi \in M_\Gamma$, $x \in \mathbb{R}$ et $\Gamma g \in \Gamma\backslash SL(2,\mathbb{Z})$, on pose

$$(h.\psi)(x, \Gamma g) = (-cx + a)^{-1} \psi(h^{-1}x, \Gamma g h).$$

Cela munit M_Γ d'une structure de $SL(2,\mathbb{Z})$-module.
On note $H^1_{par}(SL(2,\mathbb{Z}), M_\Gamma)$ le 1er groupe de cohomologie parabolique de $SL(2,\mathbb{Z})$ dans M_Γ, défini comme le noyau de l'application $H^1(SL(2,\mathbb{Z}), M_\Gamma) \to H^1(< T >, M_\Gamma)$, où $< T >$ est le sous-groupe de $SL(2,\mathbb{Z})$ engendré par T. On définit l'application

$$r_c : \begin{array}{ccc} \mathcal{S}_1(\Gamma) \times \overline{\mathcal{S}_1(\Gamma)} & \longrightarrow & H^1_{par}(SL(2,\mathbb{Z}), M_\Gamma) \\ (f_1, f_2) & \longmapsto & [\varphi_{f_1,f_2}] \end{array},$$

où $[\varphi_{f_1,f_2}]$ désigne la classe de cohomologie du cocycle parabolique φ_{f_1,f_2} défini par

$$\varphi_{f_1,f_2}(\sigma)(x, \Gamma g) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{\sigma 0} f_{1|g}(\tau) \frac{d\tau}{x-\tau} + \frac{1}{2i\pi} \int_0^{\sigma 0} f_{2|\overline{g}}(\tau) \frac{\overline{d\tau}}{x-\overline{\tau}},$$

l'intégration se faisant par exemple le long de la géodésique dans $\mathcal{H}$ reliant 0 à $\sigma 0$. On montre le résultat suivant :

Théorème 0.8. *L'application r_c est un isomorphisme d'espaces vectoriels complexes.*

9 - Le cas des groupes arithmétiques

On suppose $\Gamma = \Gamma_1(N)$. On a une bijection π_N entre $\Gamma_1(N)\backslash SL(2,\mathbb{Z})$ et l'ensemble E_N des éléments (u,v) de $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2$ d'ordre N, qui à $\Gamma_1(N)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ associe (c,d) mod N.
On pose alors pour $(z,(c,d)) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2$

$$\widetilde{\psi_f}(x,(c,d)) = \begin{cases} \psi_f(x, \Gamma_1(N)\pi_N^{-1}(c,d)) & \text{si } (c,d) \in E_N \\ 0 & \text{si } (c,d) \notin E_N. \end{cases}$$

Si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2,\mathbb{Z})$ avec $\det M > 0$, on note

$$M.\widetilde{\psi_f}\,(x,(u,v)) = (\det M)^{1/2}(-cx+a)^{-1}\widetilde{\psi_f}\left(\frac{dx-b}{-cx+a}, (au+cv, bu+dv)\right).$$

Soit n un entier ≥ 1, et soit $M(2,\mathbb{Z})_n$ l'ensemble des matrices de $M(2,\mathbb{Z})$ de déterminant n. On dira qu'un élément $\sum_M u_M M \in \mathbb{C}[M(2,\mathbb{Z})_n]$ satisfait la condition (C_n) si pour tout $K \in M(2,\mathbb{Z})_n/SL(2,\mathbb{Z})$ on a dans $\mathbb{C}[\mathbb{P}_1(\mathbb{Q})]$ la relation

$$\sum_{M\in K} u_M([M\infty] - [M0]) = [\infty] - [0].$$

Notons T_n le n-ième opérateur de Hecke sur $\mathcal{S}_1(\Gamma_1(N))$. On pose $T_n\widetilde{\psi_f} = \widetilde{\psi_{T_n f}}$.

Théorème 0.9. *Soit $\sum_M u_M M$ un élément de $\mathbb{C}[M(2,\mathbb{Z})_n]$ vérifiant la condition (C_n). On a la formule*

$$T_n\widetilde{\psi_f}(z,(u,v)) = \sum_M u_M M.\widetilde{\psi_f}(z,(u,v)).$$

On sait construire explicitement plusieurs familles d'éléments satisfaisant la condition (C_n) (voir par exemple [Mer94] et [C-Z93]). Ainsi on obtient par exemple la formule :

$$T_2\psi_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\psi_f + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.\psi_f + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.\psi_f + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.\psi_f. \tag{3}$$

Remarque. — Il est naturel de définir $\widetilde{\psi_f}^{(2)} : \mathbb{R}^2 \times (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2$ par $\widetilde{\psi_f}^{(2)}(x_1,x_2,u,v) = \widetilde{\psi_f}\left(\frac{x_1}{x_2}, u, v\right)$. Cela permet de voir les deux variables des éléments de $\mathcal{L}_\Gamma$ comme ayant trait aux places infinie et finies respectivement de $\mathbb{Q}$.

10 - Valeurs de fonctions L

Soient $f \in \mathcal{S}_1(\Gamma_1(N))$, $g \in \Gamma_1(N)\backslash SL(2,\mathbb{Z})$ et $s \in \mathbb{C}$. On pose

$$\Lambda_N(f_{|g}, s) = N^{s/2}\int_0^{+\infty} f_{|g}(it)t^{s-1}dt.$$

Pour $(u,v) \in E_N$, on note $\Lambda_N(f_{|(u,v)}, s) = \Lambda_N(f_{|\pi_N{}^{-1}(u,v)}, s)$. On déduit du théorème 0.3 la proposition suivante

Proposition 0.10. *Les applications linéaires $f \longmapsto \Lambda_N(f_{|(u,v)}, n)$, avec $(u,v) \in E_N$ et n entier négatif ou nul, engendrent le dual de $\mathcal{S}_1(\Gamma_1(N))$.*

Soit f une forme primitive de $\mathcal{S}_1(\Gamma_0(N),\psi)$ (où $\mathcal{S}_1(\Gamma_0(N),\psi)$ désigne l'ensemble des formes paraboliques f sur $\Gamma_1(N)$ vérifiant $f_{|\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right)} = \chi(d)f$ pour tout $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(N)$). Notons $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)e^{2i\pi nz}$ son développement de Fourier à l'infini. Soit $(u,v) \in E_N$. Pour $w \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$, on note $\mathrm{pgcd}(w,N)$ le pgcd d'un représentant de w et de N. On pose

- M le plus grand diviseur de N tel que tout diviseur de M divise $\mathrm{pgcd}(u,N)$;
- $N' = \dfrac{N}{\mathrm{pgcd}(uv,N)}$, $\qquad M' = \mathrm{pgcd}(M,N')$;
- $k' = \dfrac{kN'}{N}$, où $0 \leq k < N$ est défini par $k \equiv uv \bmod \dfrac{N}{M}$ et $k \equiv -uv \bmod M$;

Pour un diviseur d de N' et un diviseur δ de d, on pose

- $\delta = \delta_1\delta_2$, où δ_1 est le plus grand diviseur de δ tel que tout diviseur premier de δ_1 divise M ;
- $M_1 = \dfrac{MM'}{\delta_1}$;
- si χ_0 est un caractère de conducteur $N_0|N$, on pose $\psi = \psi_{M_1}\psi_0'$ et $\chi_0 = \chi_{M_1}\chi_0'$, où ψ_M et χ_M sont des caractères modulo M, et ψ_0' et χ_0' sont des caractères modulo $\dfrac{N}{M}$;
- N_0' désigne le conducteur de χ_0'.

Si f' est une forme primitive de $\mathcal{S}_1(\Gamma_1(L))$ de niveau $N_{f'}$, et si Q est un diviseur de L tel que $(Q, \dfrac{L}{Q}) = 1$, on note $Q_{f'}$ le plus grand diviseur de $N_{f'}$ à support dans Q (on appelle $Q_{f'}$ la Q-partie de $N_{f'}$). On note $\varepsilon_Q(f')$ la constante de l'équation fonctionnelle vérifiée par $W_{Q_{f'}}(f')$: il existe une forme primitive f'_Q telle que $W_{Q_{f'}}f' = \varepsilon_{Q_{f'}}(f')f'_Q$, et donc $W_Q(f') = [\varepsilon_{Q_{f'}}(f')f'_Q]_{|\left(\begin{smallmatrix} Q/Q_{f'} & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)}$.

Si χ est un caractère de Dirichlet, on note $f' \otimes \chi$ la forme primitive associée à la forme f'_χ (c'est l'unique forme primitive ayant le même système de valeurs propres que f'_χ pour presque tous les opérateurs de Hecke), définie par $f'_\chi(z) = \sum_n a_n(f')\chi(n)e^{2i\pi nz}$. On note $\overline{f} = f \otimes \overline{\psi}$. On note $N_{f\otimes\chi}$ le niveau de $f \otimes \chi$, et $M_{f\otimes\chi}$ la M_1-partie de $N_{f\otimes\chi}$.

Enfin, la fonction $L^{(H)}(f',s)$ désigne la fonction L de f' privée de ses facteurs d'Euler associés aux nombres premiers divisant H.

Théorème 0.11. *Soit $f \in \mathcal{S}_1(\Gamma_0(N),\psi)$ une forme primitive de niveau minimal parmi toutes ses tordues par des caractères de Dirichlet. Pour tout $s \in \mathbb{C}$, on a*

$$L(f_{|(u,v)},s) = \left(\frac{NM'}{M}\right)^{s-1/2} \varepsilon_N(f) \sum_{d|N'} \sum_{\chi_0} \frac{\chi_0(k')\tau(\overline{\chi_0})}{\phi(N')} \sum_{\delta|d} \sqrt{\delta}\,\mu\left(\frac{d}{\delta}\right) \overline{\chi_0\left(\frac{d}{\delta}\right)} \overline{a_\delta(f)}$$

$$\delta_2^{s-1/2}(\overline{\chi_M}^2\psi_M)(v\delta_2)(\chi_M^2\overline{\psi_M})(\frac{N}{M})(\overline{\chi_0'}^2\psi_0')(u\delta_1)(\chi_0'^2\overline{\psi_0'})(M')\left(\frac{M_1}{M_{\overline{f}\otimes\chi}}\right)^{s-1/2} \varepsilon_{M_1}(\overline{f}\otimes\chi_M)$$

$$\overline{\chi_0'}(M_1)L^{(N_0')}(\overline{f}\otimes\overline{\chi_M}\chi_0'\psi_M,s).$$

où la somme se fait sur tous les χ_0 primitifs modulo $\dfrac{N'}{d}$, et où μ désigne la fonction de Möbius, ϕ la fonction indicatrice d'Euler et $\tau(\chi)$ la somme de Gauss de χ.

On en déduit le résultat suivant

Corollaire 0.12. *Soit N un entier. Soient f_1 et f_2 deux formes primitives de poids 1 de niveau N ayant même caractère et telles que pour tout χ caractère de Dirichlet de conducteur divisant N*

- $\Lambda(f_1 \otimes \chi, n) = \Lambda(f_2 \otimes \chi, n)$ *pour tout* $n \leq 0$ *(où on pose* $\Lambda(f_1 \otimes \chi, n) = \Lambda_{N_{f_1 \otimes \chi}}(f_1 \otimes \chi, n)$*) ;*
- *les constantes des équations fonctionnelles soient égales ;*
- *les facteurs d'Euler associés aux nombres premiers p divisant N soient égaux ;*
- *les niveaux des formes primitives $f_1 \otimes \chi$ et $f_2 \otimes \chi$ soient égaux.*

Alors $f_1 = f_2$.

Remarque. — La proposition 0.10 et le corollaire 0.12 peuvent se montrer, par des arguments analytiques, sans utiliser le théorème 0.3. La démonstration précédente permet cependant de reconstruire explicitement, à partir des valeurs de fonctions L, la fonction de période $x \mapsto \psi_f(x, \Gamma_1(N)g)$: pour tout $x \in]0, 2[$, on a

$$\psi_f(x, \Gamma_1(N)g) = \sum_{k \geq 0} \frac{\psi_f^{(k)}(1, \Gamma_1(N)g))}{k!}(x-1)^k,$$

la relation de Lewis permet de définir ψ_f sur $]0, +\infty[\times \Gamma_1(N) \backslash SL(2, \mathbb{Z})$, et la construction de la section 3.3 permet de retrouver f à partir de ψ_f.

Chapitre 1

Périodes de formes modulaires de poids 1

1.1 Préliminaires

1.1.1 Notations

On note $j(\gamma, z) = cz + d$ pour $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, ainsi $f_{|g}(z) = (\det g)^{-1/2} j(g, z)^{-1} f(gz)$ pour $g \in GL(2, \mathbb{Q})^+$. On suppose que $-I \notin \Gamma$.

Soit U une partie de $\mathbb{C}$, et soit Ψ une fonction définie sur $U \times \Gamma \setminus SL(2, \mathbb{Z})$. Soit γ un élément de $SL(2, \mathbb{Z})$. On notera dans la suite $\gamma.\Psi$ la fonction définie sur $\gamma.U \times \Gamma \setminus SL(2, \mathbb{Z})$ par la formule :

$$(\gamma.\Psi)(z, \Gamma g) = j(\gamma^{-1}, z)^{-1} \Psi(\gamma^{-1} z, \Gamma g \gamma).$$

On pose

$$SL(2, \mathbb{Z})^+ = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}) \,\middle|\, a, b, c, d \geq 0 \right\}$$

et

$$SL(2, \mathbb{Z})^- = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}) \,\middle|\, a, d \geq 0 \text{ et } b, c \leq 0 \right\}.$$

On remarque que $SL(2, \mathbb{Z})^+$ préserve $[0, +\infty[$ et $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0[$, et de même $SL(2, \mathbb{Z})^-$ préserve $]-\infty, 0]$ et $\mathbb{C} \setminus]0, +\infty[$. Aussi, pour toute fonction Ψ définie sur $[0, +\infty[\times \Gamma \setminus SL(2, \mathbb{Z})$ (resp. $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0[\times \Gamma \setminus SL(2, \mathbb{Z})$) et pour tout $\gamma \in SL(2, \mathbb{Z})^-$, la fonction $\gamma.\Psi$ est définie sur $[0, +\infty[\times \Gamma \setminus SL(2, \mathbb{Z})$ (resp. $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0[\times \Gamma \setminus SL(2, \mathbb{Z})$).
De même, pour tout $\gamma \in SL(2, \mathbb{Z})^+$, et pour toute fonction Ψ définie sur $]-\infty, 0] \times \Gamma \setminus SL(2, \mathbb{Z})$ (resp. $\mathbb{C} \setminus]0, +\infty[\times \Gamma \setminus SL(2, \mathbb{Z})$), la fonction $\gamma.\Psi$ est définie sur $]-\infty, 0] \times \Gamma \setminus SL(2, \mathbb{Z})$ (resp. $\mathbb{C} \setminus]0, +\infty[\times \Gamma \setminus SL(2, \mathbb{Z})$).

1.1.2 Chemins dans $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}^-$

Considérons $\mathcal{H} \cup \mathbb{P}_1(\mathbb{Q})$, muni de la topologie hyperbolique. On note θ la transformée de Cayley définie par :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H} \cup \mathbb{P}_1(\mathbb{Q}) & \longrightarrow & D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \leq 1\} \\ z & \longmapsto & \dfrac{z - i}{z + i} \end{array}$$

qui envoie bijectivement $\mathcal{H}$ dans $D^\circ(0,1) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\}$ et envoie $\mathbb{P}_1(\mathbb{Q})$ dans $C(0,1) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$.

Soient α et β deux éléments distincts de $\mathbb{P}_1(\mathbb{Q})$, soit $z \in \mathcal{H}$, et soit γ un chemin de $\mathcal{H} \setminus \{z\} \cup \mathbb{P}_1(\mathbb{Q})$, d'origine α et d'extrémité β, dont le support de l'intérieur est dans $\mathcal{H}$ (on appellera un tel chemin γ un chemin dans $\mathcal{H} \setminus \{z\}$ reliant α à β). On associe à γ et z un entier $\varepsilon(\gamma, z)$ défini de la façon suivante : soit $\delta_{\beta,\alpha}$ le chemin à support dans $C(0,1)$ reliant $\theta(\beta)$ à $\theta(\alpha)$ dans le sens trigonométrique. Le chemin $\overline{\theta}(\gamma)$ composé de $\theta(\gamma)$ et $\delta_{\beta,\alpha}$ est fermé. On note $\varepsilon(\gamma, z)$ l'indice de $\overline{\theta}(\gamma)$ par rapport à $\theta(z)$.

Définition 1.1. *On dit qu'un chemin γ dans $\mathcal{H}$ reliant α à β passe à gauche (resp. à droite) de z si $\varepsilon(\gamma, z) = 0$ (resp. $\varepsilon(\gamma, z) = 1$).*

Remarque. —
- l'homographie $\tau \mapsto h\tau$, pour $h \in SL(2, \mathbb{Z})$, transforme un chemin reliant α à β passant à gauche (resp. à droite) de z en un chemin reliant $h\alpha$ à $h\beta$ passant à gauche (resp. à droite) de hz ;
- on définit de la même façon un chemin dans $\mathcal{H}^-$ reliant deux éléments distincts α' et β' de $\mathbb{P}_1(\mathbb{Q})$ passant à gauche (resp. à droite) d'un point $z' \in \mathcal{H}^-$: soit θ^- l'application :
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^- \cup \mathbb{P}_1(\mathbb{Q}) & \longrightarrow & D(0,1) \\ z & \longmapsto & \dfrac{z+i}{z-i}, \end{array}$$
et soit γ' un chemin reliant dans $\mathcal{H}^-$ reliant α' à β'. Soit $\delta'_{\beta',\alpha'}$ le chemin à support dans $C(0,1)$ reliant $\theta^-(\beta')$ à $\theta^-(\alpha')$ dans le sens trigonométrique. On note $\varepsilon(\gamma', z')$ l'indice du chemin fermé composé de $\theta^-(\gamma')$ et de $\delta'_{\beta',\alpha'}$. On dit qu'un chemin γ' dans $\mathcal{H}^-$ reliant α' à β' passe à gauche (resp. à droite) de z' si $\varepsilon(\gamma', z') = 0$ (resp. $\varepsilon(\gamma', z') = 1$).

Si $z \in \mathcal{H}^- \cup \mathbb{R}$, un chemin dans $\mathcal{H}$ reliant α à β passant à gauche ou à droite de z désignera simplement un chemin dans $\mathcal{H}$ reliant α à β, et de même si $z \in \mathcal{H} \cup \mathbb{R}$, un chemin dans $\mathcal{H}^-$ reliant α' à β' passant à gauche ou à droite de z désignera simplement un chemin dans $\mathcal{H}^-$ reliant α' à β'.

On choisit $\mathfrak{g}^+(\alpha, \beta; z)$ (resp. $\mathfrak{d}^+(\alpha, \beta; z)$) un chemin dans $\mathcal{H}$ reliant α à β et passant à gauche (resp. à droite) de z, et de même on choisit $\mathfrak{g}^-(\alpha', \beta'; z)$ (resp. $\mathfrak{d}^-(\alpha', \beta'; z)$) un chemin dans $\mathcal{H}^-$ reliant α' à β' et passant à gauche (resp. à droite) de z.

1.1.3 Formes modulaires sur $\mathcal{H}^-$

On note $\mathcal{M}_k^-(\Gamma)$ (resp. $\mathcal{S}_k^-(\Gamma)$) l'espace des formes modulaires (resp. paraboliques) sur $\mathcal{H}^-$ de poids k pour Γ.
On note V la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
Soit k un entier fixé, on a le résultat suivant

Lemme 1.2. *Les applications $s_1 : \mathcal{M}_k^-(\Gamma) \longrightarrow \mathcal{M}_k(V\Gamma V)$ et $s_2 : \mathcal{M}_k^-(\Gamma) \longrightarrow \overline{\mathcal{M}_k(\Gamma)}$ définies pour tout $z \in \mathcal{H}$ par*

$$s_1(f^-)(z) = f^-(-z) \qquad \text{et} \qquad s_2(f^-)(z) = f^-(\overline{z})$$

sont des isomorphismes.

On a de même des isomorphismes induits par s_1 et s_2 entre $\mathcal{S}_k^-(\Gamma)$, $\mathcal{S}_k(V\Gamma V)$ et $\overline{\mathcal{S}_k(\Gamma)}$.
On note $\mathcal{S}_1^{\pm}(\Gamma)$ l'ensemble des formes paraboliques de poids 1 sur $\mathcal{H} \cup \mathcal{H}^-$, cet espace est canoniquement isomorphe à $\mathcal{S}_1(\Gamma) \times \mathcal{S}_1^-(\Gamma)$: un couple $(f, f^-) \in \mathcal{S}_1(\Gamma) \times \mathcal{S}_1^-(\Gamma)$ définit une forme parabolique F sur $\mathcal{H} \cup \mathcal{H}^-$, en posant $F = f$ sur $\mathcal{H}$ et $F = f^-$ sur $\mathcal{H}^-$. Ainsi, grâce

au lemme 3.2, on identifiera dans la suite une forme modulaire $F \in \mathcal{S}_1^{\pm}(\Gamma)$ aux couples $(f, f^-) \in \mathcal{S}_1(\Gamma) \times \mathcal{S}_1^-(\Gamma)$, $(f, f') \in \mathcal{S}_1(\Gamma) \times \mathcal{S}_1(V\Gamma V)$ et $(f, f_1) \in \mathcal{S}_1(\Gamma) \times \overline{\mathcal{S}_1(\Gamma)}$ qui lui correspondent (où $f' = s_1(f^-)$ et $f_1 = s_2(f^-)$).

1.2 Définition des périodes

Soit $F \in \mathcal{S}_1^{\pm}(\Gamma)$. On définit la fonction Ψ_F^+ sur $\mathbb{C}\backslash]-\infty, 0[\times\Gamma\backslash SL(2,\mathbb{Z})$ par

$$\Psi_F^+(z, \Gamma g) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathfrak{g}^+(0,i\infty;z)} \frac{F_{|g}(\tau)}{z-\tau}d\tau + \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathfrak{g}^-(-i\infty,0;z)} \frac{F_{|g}(\tau)}{z-\tau}d\tau.$$

La forme modulaire F étant parabolique, la fonction $F_{|g}$ est exponentiellement décroissante au voisinage de 0, donc la fonction Ψ_F^+ est définie en 0. Pour $g \in SL(2,\mathbb{Z})$, la fonction $z \mapsto \Psi_F^+(z, \Gamma g)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash]-\infty, 0]$.

On définit de manière analogue Ψ_F^- sur $\mathbb{C}\backslash]0, +\infty[\times\Gamma\backslash SL(2,\mathbb{Z})$ par

$$\Psi_F^-(z, \Gamma g) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathfrak{d}^+(0,i\infty;z)} \frac{F_{|g}(\tau)}{z-\tau}d\tau + \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathfrak{d}^-(-i\infty,0;z)} \frac{F_{|g}(\tau)}{z-\tau}d\tau.$$

Pour $g \in SL(2,\mathbb{Z})$, la fonction $z \to \Psi_F^-(z, \Gamma g)$ est bien définie sur $\mathbb{C}\backslash]0, +\infty[$, et est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty[$.

Remarque. — Une application directe du théorème des résidus montre que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, on a

$$\Psi_F^+(z, \Gamma g) - \Psi_F^-(z, \Gamma g) = F_{|g}(z).$$

Cette remarque est fondamentale dans la suite de la démonstration.

On a la relation $F_{|g}(z) = f'_{|VgV}(-z)$ pour tout $z \in \mathcal{H}^-$, où on identifie F à $(f, f') \in \mathcal{S}_1(\Gamma) \times \mathcal{S}_1(V\Gamma V)$. On notera dans ce cas $\Psi_{f,f'}^+ = \Psi_F^+$ et $\Psi_{f,f'}^- = \Psi_F^-$.
Par linéarité, on a $\Psi_{f,f'}^+ = \Psi_{f,0}^+ + \Psi_{0,f'}^+$ et $\Psi_{f,f'}^- = \Psi_{f,0}^- + \Psi_{0,f'}^-$.

Les quatre ensembles suivants forment une partition de $M(2,\mathbb{Z})^+ = \{g \in M(2,\mathbb{Z}), \det g > 0\}$:

$$K_1 = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2,\mathbb{Z})^+ \mid cd > 0\right\} \qquad K_2 = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2,\mathbb{Z})^+ \mid cd < 0\right\}$$

$$K_3 = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2,\mathbb{Z})^+ \mid c = 0\right\} \qquad K_4 = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2,\mathbb{Z})^+ \mid d = 0\right\}.$$

Proposition 1.3. *Soit* $\sum_M u_M M$ *un élément de* $\mathbb{Z}[SL(2,\mathbb{Z})]$ *vérifiant dans* $\mathbb{Z}[\mathbb{P}_1(\mathbb{Q})]$ *la relation* $\sum_M u_M([M\infty] - [M0]) = 0$. *Alors les fonctions* Ψ_F^+ *et* Ψ_F^- *satisfont les équations suivantes :*

$$\sum_{M \in K_1 \cup K_4} u_M(M.\Psi_F^-) + \sum_{M \in K_2 \cup K_3} u_M(M.\Psi_F^+) = 0, \tag{1.1}$$

et

$$\sum_{M \in K_1 \cup K_3} u_M(M.\Psi_F^-) + \sum_{M \in K_2 \cup K_4} u_M(M.\Psi_F^+) = 0, \tag{1.2}$$

où, dans chacune des égalités, on se place sur un domaine de définition approprié (l'intersection des domaines de définition des fonctions $M.\Psi_F^+$ *et* $M.\Psi_F^-$ *considérées).*

Démonstration : On va prouver que $\Psi^+_{f,0}$ et $\Psi^-_{f,0}$ vérifient les équations fonctionnelles demandées. On montre de façon identique que $\Psi^+_{0,f'}$ et $\Psi^-_{0,f'}$ les vérifient également, et par linéarité cela montre la proposition.

Soit $h = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $SL(2,\mathbb{Z})$. On a :

$$\begin{aligned}
h.\Psi^+_{f,0}(z,\Gamma g) &= (-cz+a)^{-1}\Psi^+_{f,0}\left(\frac{dz-b}{-cz+a}, \Gamma g\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) \\
&= \frac{1}{2i\pi}(-cz+a)^{-1}\int_{\mathfrak{g}^+(0,i\infty;\frac{dz-b}{-cz+a})} f\Big|_{g\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}(\tau)\frac{d\tau}{\frac{dz-b}{-cz+a}-\tau} \\
&= \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathfrak{g}^+(0,i\infty;\frac{dz-b}{-cz+a})} (c\tau+d)^{-1} f_{|g}\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)\frac{d\tau}{dz-b+c\tau z-a\tau} \\
&= \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathfrak{g}^+(0,i\infty;\frac{dz-b}{-cz+a})} \frac{1}{z-\frac{a\tau+b}{c\tau+d}} f_{|g}\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)\frac{d\tau}{(c\tau+d)^2}.
\end{aligned}$$

On effectue le changement de variable $u = h\tau$ dans cette intégrale, et on obtient

$$h.\Psi^+_{f,0}(z,\Gamma g) = \frac{1}{2i\pi}\int_{h.\mathfrak{g}^+(0,i\infty;\frac{dz-b}{-cz+a})} f_{|g}(u)\frac{du}{z-u}.$$

D'après les remarques de la section 3.1.2, on a, pour tout $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})$, $h.\mathfrak{g}^+(\alpha,\beta;z) = \mathfrak{g}^+(h\alpha,h\beta;hz)$ et de même on a $h.\mathfrak{d}^+(\alpha,\beta;z) = \mathfrak{d}^+(h\alpha,h\beta;hz)$ (cette égalité est en fait vérifiée pour toute matrice de $M(2,\mathbb{Z})^+$). On en déduit que

$$h.\Psi^+_{f,0}(z,\Gamma g) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathfrak{g}^+(h0,h\infty;z)} f_{|g}(u)\frac{du}{z-u}$$

et de même

$$h.\Psi^-_{f,0}(z,\Gamma g) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathfrak{d}^+(h0,h\infty;z)} f_{|g}(u)\frac{du}{z-u}.$$

Pour $h \in K_1$ (resp. K_2), on a $h\infty > h0$ (resp. $h0 > h\infty$) donc z appartient à la partie compacte de $\mathbb{C}$ dont les bords sont le segment $[h0,h\infty]$ (resp. $[h\infty,h0]$) et le chemin $\mathfrak{g}^+(h0,h\infty;z)$ (resp. $\mathfrak{d}^+(h0,h\infty;z)$).
L'intégrale $\displaystyle\sum_{M\in K_1\cup K_4} u_M\int_{\mathfrak{d}^+(M0,M\infty;z)}\frac{f_{|g}(\tau)}{z-\tau}d\tau + \sum_{M\in K_2\cup K_3} u_M\int_{\mathfrak{g}^+(M0,M\infty;z)}\frac{f_{|g}(\tau)}{z-\tau}d\tau$ est ainsi une intégration sur un cycle fermé, car $\displaystyle\sum_M u_M([M\infty]-[M0]) = 0$. L'intérieur ne contient aucun pôle de la fonction $\dfrac{f_{|g}(\tau)}{z-\tau}$ (en l'occurence ne contient pas le point z), ce qui montre d'après le théorème des résidus que cette intégrale est nulle.
Il en va de même pour l'intégrale

$$\sum_{M\in K_1\cup K_3} u_M\int_{\mathfrak{d}^+(M0,M\infty;z)}\frac{f_{|g}(\tau)}{z-\tau}d\tau + \sum_{M\in K_2\cup K_4} u_M\int_{\mathfrak{g}^+(M0,M\infty;z)}\frac{f_{|g}(\tau)}{z-\tau}d\tau.$$

Cela démontre la proposition. $\diamondsuit$

Les éléments $I+S$, $I-T-T'$ et $I-T^{-1}-T'^{-1}$ vérifient les hypothèses de la proposition 3.3 : en effet, on a $(I+S)([\infty]-[0]) = ([\infty]-[0]+[0]-[\infty])$,

$$(I-T-T')([\infty]-[0]) = ([\infty]-[0]-[\infty]+[1]-[1]+[0])$$

$$\text{et } (I-T^{-1}-T'^{-1})([\infty]-[0]) = ([\infty]-[0]-[\infty]+[-1]-[-1]+[0]).$$

La relation $I-T^{-1}-T'^{-1}$ a été mise en évidence par Lewis (voir [Lew97]) dans sa définition des périodes de formes de Maass. On en déduit le

Corollaire 1.4. *Les fonctions Ψ_F^+ et Ψ_F^- vérifient les équations suivantes :*

$$\Psi_F^+ + S.\Psi_F^- = 0, \tag{1.3}$$

$$\Psi_F^- + S.\Psi_F^+ = 0, \tag{1.4}$$

$$\Psi_F^+ - T^{-1}.\Psi_F^+ - T'^{-1}.\Psi_F^+ = 0 \ \textit{et} \tag{1.5}$$

$$\Psi_F^- - T.\Psi_F^- - T'.\Psi_F^- = 0. \tag{1.6}$$

Remarque. — D'après la proposition 6.3, le corollaire 3.4 est équivalent à la proposition 3.3.

On remarque que les équations (3.3) et (3.5) (resp. (3.4) et (3.6)) sont valables sur $\mathbb{C}\backslash]-\infty,0[\times\Gamma\backslash SL(2,\mathbb{Z})$ (resp. $\mathbb{C}\backslash]0,+\infty[\times\Gamma\backslash SL(2,\mathbb{Z})$).

On note $\psi_F^+ : [0,+\infty[\times\Gamma\backslash SL(2,\mathbb{Z}) \to \mathbb{C}$ la fonction définie par la formule :

$$\psi_F^+(x,\Gamma g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\frac{F_{|g}(it)}{x-it}dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^0\frac{F_{|g}(it)}{x-it}dt,$$

et de même on note $\psi_F^- :]-\infty,0]\times\Gamma\backslash SL(2,\mathbb{Z}) \to \mathbb{C}$ la fonction définie par :

$$\psi_F^-(x,\Gamma g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\frac{F_{|g}(it)}{x-it}dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^0\frac{F_{|g}(it)}{x-it}dt.$$

La fonction ψ_F^+ (resp. ψ_F^-) est la restriction à $[0,+\infty[\times\Gamma\backslash SL(2,\mathbb{Z})$ (resp. à $]-\infty,0]\times\Gamma\backslash SL(2,\mathbb{Z})$) de la fonction Ψ_F^+ (resp. de la fonction Ψ_F^-).

Proposition 1.5. *Soit $F\in\mathcal{S}_1^{\pm}(\Gamma)$. La fonction ψ_F^+ est un élément de $\mathcal{L}_\Gamma$.*

Démonstration : L'équation (3.5) montre que sur $[0,+\infty[\times\Gamma\backslash SL(2,\mathbb{Z})$, on a

$$\psi_F^+ = T^{-1}.\psi_F^+ + T'^{-1}.\psi_F^+.$$

Identifions F à $(f,f')\in\mathcal{S}_1(\Gamma)\times\mathcal{S}_1(V\Gamma V)$. On a, pour tout $t\in[0,+\infty[$ et $x>0$:

$$\left|\frac{f_{|g}(it)}{x-it}\right| \le \left|\frac{f_{|g}(it)}{it}\right|$$

et on sait que

$$\int_0^{+\infty}\left|\frac{f_{|g}(it)}{it}\right|dt$$

converge car f étant parabolique il existe $a>0$ tel que

$$|f_{|g}(it)| = O(e^{-at})(t\to+\infty) \quad \text{et} \quad |f_{|g}(it)| = O(e^{-a/t})(t\to 0).$$

Cela montre, par le théorème de la convergence dominée, que

$$\lim_{x\to+\infty} \psi^+_{f,0}(x,\Gamma g) = 0$$

pour tout $\Gamma g \in \Gamma\backslash SL(2,\mathbb{Z})$.
De façon analogue, on démontre la même chose pour $\psi^+_{0,f'}$, et finalement on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \psi^+_{f,f'}(x,\Gamma g) = 0.$$

Enfin, la fonction $x \mapsto \psi^+_F(x,\Gamma g)$ est analytique sur $]0,+\infty[$, comme restriction d'une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash]-\infty,0]$. $\diamondsuit$

Dans la suite, on définira la *période* de $F \in \mathcal{S}_1^{\pm}(\Gamma)$ comme étant la fonction ψ_F définie sur $\mathbb{R}\times\Gamma\backslash SL(2,\mathbb{Z})$ par

$$\psi_F(x,\Gamma g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} \frac{F_{|g}(it)}{x-it}dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^0 \frac{F_{|g}(it)}{x-it}dt. \tag{1.7}$$

Avec les notations précédentes, on a, d'après l'équation (3.4)

$$\begin{cases} \psi_F(x,\Gamma g) = \psi^+_F(x,\Gamma g) \text{ si } x \geq 0\,; \\ \psi_F(x,\Gamma g) = \psi^-_F(x,\Gamma g) = \dfrac{1}{x}\psi^+_F(-\dfrac{1}{x},\Gamma g S) \text{ si } x < 0. \end{cases}$$

Pour tout $\Gamma g \in \Gamma\backslash SL(2,\mathbb{Z})$, la fonction $x \mapsto \psi_F(x,\Gamma g)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$: il suffit de le vérifier en 0, la décroissance parabolique de F aux pointes montre par récurrence que pour tout $n \geq 0$ la fonction $x \mapsto \psi_F(x,\Gamma g)$ est de classe C^n en 0 puisqu'elle est définie par l'équation (3.7) dans un voisinage réel de 0.
La fonction ψ_F est analytique sur $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$.

Remarque. — Si $f' = 0$, la fonction $\psi_{f,0}$ se prolonge analytiquement le long de tout chemin d'origine dans $]0,+\infty[$ de la forme $t \mapsto \rho(t)e^{i\theta(t)}$, avec $\rho(t)$ réel strictement positif et $\theta(t) \in]0,3\pi[$.

1.3 Démonstration du théorème 0.3

Dans ce paragraphe, on va démontrer le théorème suivant, équivalent au théorème 0.3 :

Théorème 0.3'. *L'application*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}_1^{\pm}(\Gamma) & \longrightarrow & \mathcal{L}_\Gamma \\ F & \longmapsto & \psi^+_F \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels complexes.

1.3.1 Prolongement analytique des fonctions de $\mathcal{L}_\Gamma$

On s'inspire du procédé de "bootstrapping" introduit par Lewis et Zagier dans [L-Z01], pour démontrer que toute fonction $\psi_+ \in \mathcal{L}_\Gamma$ se prolonge de façon analytique sur $\mathbb{C}\backslash]-\infty,0[\times\Gamma\backslash SL(2,\mathbb{Z})$.

Proposition 1.6. *La fonction ψ^+ se prolonge holomorphiquement en une fonction Ψ^+ définie sur $\mathbb{C}\backslash]-\infty,0[\times\Gamma\backslash SL(2,\mathbb{Z})$, et y vérifie les équations fonctionnelles*

$$\Psi^+ - T^{-1}.\Psi^+ - T'^{-1}.\Psi^+ = 0 \qquad et \qquad (-I).\Psi^+ = \Psi^+. \tag{1.8}$$

Démonstration : Appliquons l'équation fonctionnelle à ψ^+. On a, pour $X \in [0,+\infty[$:

$$\psi^+(X,\Gamma g) = \psi^+(X+1,\Gamma g T^{-1}) + \frac{1}{X+1}\psi^+(1-\frac{1}{X+1},\Gamma g T'^{-1}).$$

En particulier, on a :

$$\begin{aligned}
&\psi^+(X,\Gamma g) - \psi^+(X+N+1,\Gamma g T^{-N-1}) = \\
&\quad = \sum_{n=0}^{N}\left(\psi^+(X+n,\Gamma g T^{-n}) - \psi^+(X+n+1,\Gamma g T^{-n-1})\right) \\
&\quad = \sum_{n=0}^{N}\frac{1}{X+n+1}\psi^+(1-\frac{1}{X+n+1},\Gamma g T^{-n}T'^{-1}) \\
&\quad = \sum_{n=1}^{N+1}\frac{1}{X+n}\psi^+(1-\frac{1}{X+n},\Gamma g T^{1-n}T'^{-1}).
\end{aligned} \tag{1.9}$$

La condition aux limites nous montre que

$$\lim_{N\to+\infty}\psi^+(X+N+1,\Gamma g T^{-N-1}) = 0$$

donc on en déduit que la série définissant le membre de droite de l'équation (3.9) est convergente et que pour tout $X \in [0,+\infty[$, on a :

$$\psi^+(X,\Gamma g) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{X+n}\psi^+(1-\frac{1}{X+n},\Gamma g T^{1-n}T'^{-1}). \tag{1.10}$$

A Γg fixé, la fonction $\psi^+(\cdot,\Gamma g)$ est analytique sur $]0,+\infty[$, elle est donc prolongeable de façon holomorphe au voisinage de tout point de $]0,+\infty[$ et en particulier dans un petit disque $\{|z-1|<\epsilon_g\}$. Soit $\epsilon = \min_{\Gamma g\in\Gamma\backslash SL(2,\mathbb{Z})}(\epsilon_g)$. La formule (3.10) prolonge $\psi^+(.\,,\Gamma g)$ comme fonction holomorphe sur $\{z \,\big|\, \Re(z)\geq 0 \text{ et } |z|>1/\epsilon\}$.

On applique ensuite l'équation fonctionnelle (3.8) de ψ^+ au point $\dfrac{1}{X}$:

$$\psi^+(\frac{1}{X},\Gamma g) = \psi^+(\frac{1}{X}+1,\Gamma g T^{-1}) + \frac{X}{X+1}\psi^+(\frac{1}{X+1},\Gamma g T'^{-1}).$$

On multiplie cette égalité par $\dfrac{1}{X}$, et on trouve que

$$\frac{1}{X}\psi^+(\frac{1}{X},\Gamma g) - \frac{1}{X+1}\psi^+(\frac{1}{X+1},\Gamma g T'^{-1}) = \frac{1}{X}\psi^+(\frac{1}{X}+1,\Gamma g T^{-1}).$$

En particulier, on a

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{X}\psi^+(\frac{1}{X},\Gamma g) - \frac{1}{X+N+1}\psi^+(\frac{1}{X+N+1},\Gamma g T'^{-N-1}) = \\
&\quad = \sum_{n=0}^{N}\left(\frac{1}{X+n}\psi^+(\frac{1}{X+n},\Gamma g T'^{-n}) - \frac{1}{X+n+1}\psi^+(\frac{1}{X+n+1},\Gamma g T'^{-n-1})\right) \\
&\quad = \sum_{n=0}^{N}\frac{1}{X+n}\psi^+(1+\frac{1}{X+n},\Gamma g T'^{-n}T^{-1}).
\end{aligned}$$

Comme, pour tout $\Gamma g \in \Gamma\backslash SL(2,\mathbb{Z})$, la fonction $x \mapsto \psi^+(x,\Gamma g)$ est bornée sur le segment $[0,x_0]$ pour tout $x_0>0$, on a

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{X+N+1}\psi^+(\frac{1}{X+N+1},\Gamma g T'^{-N-1}) = 0.$$

On en déduit l'équation

$$\frac{1}{X}\psi^+(\frac{1}{X},\Gamma g) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{X+n}\psi^+(1+\frac{1}{X+n},\Gamma g T'^{-n}T^{-1}). \tag{1.11}$$

En appliquant le même raisonnement que précédemment, on définit à partir de la formule (3.11) un prolongement de la fonction $\psi^+(.\,,\Gamma g)$ sur l'ouvert $\{z \,\big|\, \Re(z)>0 \text{ et } |z|<\epsilon\}$.

L'intervalle $[\epsilon, 1/\epsilon]$ étant compact, la fonction $\psi^+(.\,,\Gamma g)$ se prolonge holomorphiquement sur l'ouvert $W_\delta = \{z \,\big|\, |\arg(z)|<\delta\}$ pour un certain $\delta>0$ en une fonction, encore notée ψ^+. Cette fonction satisfait d'après le principe du prolongement analytique les équations fonctionnelles (3.8).

On s'inspire de la technique de "bootstrapping" de Lewis et Zagier, et on utilise l'équation fonctionnelle pour prolonger la fonction $x \mapsto \psi^+(x,\Gamma g)$ sur $\mathbb{C}\backslash]-\infty,0[$.
D'après le lemme 6.6, le sous-monoïde $SL(2,\mathbb{Z})^+$ de $SL(2,\mathbb{Z})$ est engendré librement par les deux matrices T et T'. Pour tout $n\geq 0$, on note Q_n le sous-ensemble de $SL(2,\mathbb{Z})^+$ des matrices qui s'écrivent comme un mot de n lettres exactement en T et T'.

Lemme 1.7. (Lewis-Zagier) *Soit $z\in\mathbb{C}\backslash]-\infty,0]$. Il n'existe qu'un nombre fini d'éléments γ de $SL(2,\mathbb{Z})^+$ pour lesquels γz n'appartient pas à W_δ.*

La démonstration de ce lemme se trouve dans [L-Z01], page 240, dans la démonstration du lemme 2.

Soit $z\in\mathbb{C}\backslash]-\infty,0]$. On choisit n un entier suffisamment grand pour lequel $\gamma z\in W_\delta$ pour tout $\gamma\in Q_n$, et on définit :

$$\Psi_n^+(z,\Gamma g) = \sum_{\gamma\in Q_n} (\gamma^{-1}.\psi^+)(z,\Gamma g).$$

La fonction $z\mapsto \Psi_n^+(z,\Gamma g)$ est définie sur l'ensemble des $z\in\mathbb{C}$ tels que $\gamma z\in W_\delta$ pour tout $\gamma\in Q_n$. Comme $TW_\delta\subset W_\delta$ et $T'W_\delta\subset W_\delta$, on voit que l'ensemble $\mathcal{D}_{n+1}$ de définition de Ψ_{n+1}^+ contient $\mathcal{D}_n$, et donc que pour tout $m\geq n$, $\mathcal{D}_n\subset\mathcal{D}_m$.

Lemme 1.8. *La fonction Ψ_n^+ est indépendante de n (c'est-à-dire que si $m\geq n$, on a $\Psi_n^+(z,\Gamma g)=\Psi_m^+(z,\Gamma g)$ pour tout $z\in\mathcal{D}_n$). Elle vérifie les équations fonctionnelles (3.8) et coïncide avec ψ^+ sur W_δ.*

Démonstration : En utilisant le fait que $Q_{n+1} = Q_nT\bigsqcup Q_nT' = TQ_n\bigsqcup T'Q_n$, on a :

$$\begin{aligned}
\Psi_{n+1}^+ &= \sum_{\gamma\in Q_n}(T^{-1}\gamma^{-1}).\psi^+ + \sum_{\gamma\in Q_n}(T'^{-1}\gamma^{-1}).\psi^+ \\
&= \sum_{\gamma\in Q_n} T^{-1}.(\gamma^{-1}.\psi^+) + \sum_{\gamma\in Q_n} T'^{-1}.(\gamma^{-1}.\psi^+) \\
&= \left(T^{-1}.\Psi_n^+ + T'^{-1}.\Psi_n^+\right)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\Psi^+_{n+1}(z,\Gamma g) &= \sum_{\gamma\in Q_n}(\gamma^{-1}T^{-1}).\psi^+(z,\Gamma g)+\sum_{\gamma\in Q_n}(\gamma^{-1}T'^{-1}).\psi^+(z,\Gamma g)\\
&= \sum_{\gamma\in Q_n}\gamma^{-1}.(T^{-1}.\psi^+)(z,\Gamma g)+\sum_{\gamma\in Q_n}\gamma^{-1}.(T'^{-1}.\psi^+)(z,\Gamma g)\\
&= \sum_{\gamma\in Q_n} j(\gamma,z)^{-1}\left[(T^{-1}.\psi^+)(\gamma z,\Gamma g\gamma^{-1})+(T'^{-1}.\psi^+)(\gamma z,\Gamma g\gamma^{-1})\right]\\
&= \sum_{\gamma\in Q_n} j(\gamma,z)^{-1}\psi^+(\gamma z,\Gamma g\gamma^{-1})\\
&\quad \text{par l'équation fonctionnelle, car pour tout } \gamma\in Q_n, \gamma z\in W_\delta\,;\\
&= \sum_{\gamma\in Q_n}\gamma^{-1}.\psi^+(z,\Gamma g)=\Psi^+_n(z,\Gamma g).
\end{aligned}$$

En outre, on a

$$(-I).\Psi^+_n(z,\Gamma g)=\sum_{\gamma\in Q_n}\gamma^{-1}.((-I).\psi^+)(z,\Gamma g)=\Psi^+_n(z,\Gamma g)$$

puisque pour tout $\gamma\in Q_n$, $\gamma z\in W_\delta$.
Enfin, W_δ appartient au domaine de définition de Ψ^+_n, pour tout $n\geq 0$, et $\Psi^+_0=\psi^+$.
$\diamondsuit\ \diamondsuit$

Ainsi, on définit la fonction Ψ^+ sur $\mathbb{C}\backslash]-\infty,0[$ par $\Psi^+(z,\Gamma g)=\Psi^+_n(z,\Gamma g)$ où n est pris suffisamment grand pour que z appartienne au domaine de définition de Ψ^+_n. La fonction $x\mapsto\Psi^+(x,\Gamma g)$ est bien une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash]-\infty,0]$ pour tout $\Gamma g\in\Gamma\backslash SL(2,\mathbb{Z})$ d'après cette caractérisation. Le lemme 3.8 montre ainsi la proposition 3.6. $\diamondsuit$

1.3.2 Définition des formes modulaires associées à Ψ^+

On reprend les notations de la section précédente, et on considère la fonction Ψ^+ définie à partir de $\psi^+\in\mathcal{L}_\Gamma$. Définissons, sur $\mathbb{C}\backslash]0,+\infty[\times\Gamma\backslash SL(2,\mathbb{Z})$, la fonction Ψ^- par :

$$\Psi^-(z,\Gamma g)=-S.\Psi^+(z,\Gamma g)=\frac{1}{z}\Psi^+(-\frac{1}{z},\Gamma gS).$$

Lemme 1.9. *La fonction Ψ^- vérifie l'équation fonctionnelle*

$$\Psi^-=T'.\Psi^-+T.\Psi^-.$$

Démonstration : D'après la proposition 3.6, on sait que :

$$(I-T^{-1}-T'^{-1}).\Psi^+=0.$$

Par définition, $\Psi^-=-S.\Psi^+$, donc

$$\begin{aligned}
(I-T-T').\Psi^- &= (-S+(TS)+(T'S)).\Psi^+\\
&= -(S-(ST'^{-1})-(ST^{-1})).\Psi^+\\
&= -S.(I-T^{-1}-T'^{-1})\Psi^+=0.
\end{aligned}$$

car on a dans $SL(2,\mathbb{Z})$ les égalités $TS = ST'^{-1}$ et $T'S = ST^{-1}$. $\diamondsuit$

Posons

$$h(z,\Gamma g) = \Psi^+(z,\Gamma g) - \Psi^-(z,\Gamma g) = \Psi^+(z,\Gamma g) + S.\Psi^+(z,\Gamma g),$$

et

$$F(z) = h(z,\Gamma).$$

Lemme 1.10. *La fonction h est invariante par l'action de $SL(2,\mathbb{Z})$.*

Démonstration : Comme $SL(2,\mathbb{Z})$ est engendré par S et T', il suffit de démontrer qu'on a, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et pour tout $g \in SL(2,\mathbb{Z})$:

$$T'.h(z,\Gamma g) = S.h(z,\Gamma g) = h(z,\Gamma g).$$

On a :

$$S.h(z,\Gamma g) = S.(\Psi^+ + S.\Psi^+)(z,\Gamma g) = (S.\Psi^+ + S^2.\Psi^+)(z,\Gamma g) = h(z,\Gamma g)$$

car $S^2 = -I$.
Montrons maintenant que $T'.h = h$. D'après l'équation fonctionnelle (3.8), on a :

$$T'.(\Psi^+ - T^{-1}.\Psi^+ - T'^{-1}.\Psi^+) = 0$$

donc, d'après l'égalité $T'T^{-1} = TS$, on a

$$T'.\Psi^+ - (TS).\Psi^+ - \Psi^+ = 0. \tag{1.12}$$

De plus, d'après le lemme 3.9, on a

$$S.\Psi^+ - T'.(S.\Psi^+) - T.(S.\Psi^+) = 0. \tag{1.13}$$

En soustrayant les deux équations (3.12) et (3.13), on en déduit

$$\Psi^+ + S.\Psi^+ = T'.\Psi^+ + T'.(S.\Psi^+)$$

et finalement $T'.h = h$ ce qui démontre le lemme. $\diamondsuit$

Soit $g \in SL(2,\mathbb{Z})$. L'invariance de h par l'action de $SL(2,\mathbb{Z})$ montre que :

$$h(z,\Gamma g) = (g^{-1}.h)(z,\Gamma g) = j(g,z)^{-1}h(gz,\Gamma) = j(g,z)^{-1}F(gz) = F_{|g}(z).$$

En particulier, pour $\gamma \in \Gamma$, on a :

$$F_{|\gamma}(z) = h(z,\Gamma\gamma) = h(z,\Gamma) = F(z)$$

ce qui nous montre que F est modulaire de poids 1 pour Γ.
La fonction F est holomorphe sur $\mathcal{H}$ et sur $\mathcal{H}^-$. Ainsi, la restriction f (resp. f^-) de F à $\mathcal{H}$ (resp. à $\mathcal{H}^-$) est un élément de $\mathcal{M}_1(\Gamma)$ (resp. de $\mathcal{M}_1^-(\Gamma)$). On identifie ce couple (f,f^-) au couple $(f,f') \in \mathcal{M}_1(\Gamma) \times \mathcal{M}_1(V\Gamma V)$.

1.3.3 Les formes modulaires f et f' sont paraboliques

On va montrer dans cette section que $f \in \mathcal{S}_1(\Gamma)$ et $f' \in \mathcal{S}_1(V\Gamma V)$, c'est-à-dire que $F \in \mathcal{S}_1^{\pm}(\Gamma)$.

Lemme 1.11. *Les formes modulaires f et f' sont paraboliques.*

Démonstration : On va démontrer que f est parabolique. Pour cela, on va utiliser l'égalité $F_{|g}(it) = \Psi^+(it, \Gamma g) + \frac{i}{t}\Psi^+(\frac{i}{t}, \Gamma g S)$.
Montrons que $\lim\limits_{|t|\to+\infty} F_{|g}(it) = 0$. D'après l'équation (3.10) (vraie d'après le théorème du prolongement analytique pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash]-\infty, 0[$), on a pour tout $t > 0$:

$$\Psi^+(it, \Gamma g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{it+n}\Psi^+(1 - \frac{1}{it+n}, \Gamma g T^{1-n} T'^{-1}).$$

A t fixé, la série définie par le terme de droite est donc simplement convergente, mais elle n'est pas a priori absolument convergente. Posons $\gamma_n = T^{1-n}T'^{-1}$.

Comme $\Psi^+(., \Gamma g)$ est holomorphe au voisinage de 1, on en déduit que, à t fixé

$$\lim_{n\to+\infty}(n+it)\left[\Psi^+(1, \Gamma g) - \Psi^+(1 - \frac{1}{n+it}, \Gamma g)\right] = (\Psi^+)'(1, \Gamma g).$$

La série de terme général $\frac{1}{n+it}\left[\Psi^+(1 - \frac{1}{n+it}, \Gamma g\gamma_n) - \Psi^+(1, \Gamma g\gamma_n)\right]$ est donc absolument convergente, car son terme général est majoré en module à partir d'un certain rang par $\frac{A}{|n+it|^2}$ où A est une constante fixée (par exemple $A = \max\{|(\Psi^+)'(1, \Gamma g)| + 1 \mid g \in \Gamma\backslash SL(2, \mathbb{Z})\}$). Elle est aussi uniformément convergente par rapport à t sur les intervalles $[M, +\infty[$ et sur $]-\infty, -M]$, pour M un réel suffisamment grand, donc

$$\lim_{|t|\to+\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+it}\left[\Psi^+(1 - \frac{1}{n+it}, \Gamma g\gamma_n) - \Psi^+(1, \Gamma g\gamma_n)\right] = 0.$$

La série de terme général $\frac{1}{n+it}\Psi^+(1, \Gamma g\gamma_n)$ est donc convergente comme différence d'une série convergente et d'une série absolument convergente. Posons $u_n = \Psi^+(1, \Gamma g\gamma_n)$. La suite u_n est périodique (car on a $u_{n+l_g} = u_n$, où l_g désigne la largeur de la pointe $\Gamma g\infty$), soit l sa période.
Posons $U_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$. On a

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{u_k}{k+it} = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{U_k}{(k+it)(k+1+it)} + \frac{U_n}{n+it}. \tag{1.14}$$

Comme la série de terme général $\frac{u_k}{k+it}$ est convergente et comme la suite u_n est périodique de période l, on en déduit que $\sum\limits_{k=1}^{l} u_k = 0$ (car sinon on aurait $U_n \sim_{n\to+\infty} \frac{n}{l}\sum\limits_{k=1}^{l} u_k$, ce qui est impossible car le membre de droite de l'équation (3.14) ne serait pas une série convergente).

La suite U_n est donc bornée, d'où $\lim_{n\to+\infty} \frac{U_n}{n+it} = 0$, et on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{n+it} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{U_n}{(n+it)(n+1+it)}.$$

Or pour tout $|t| > M$ on a : $|(n+it)(n+1+it)| \geq |(n+iM)(n+1+iM)|$, la série de droite est donc uniformément convergente en t sur $[M, +\infty[$ et sur $]-\infty, -M]$, ce qui montre que $\lim_{|t|\to+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n+it} = 0$, et finalement que $\lim_{|t|\to+\infty} \Psi^+(it, \Gamma g) = 0$.

On démontre de la même façon, en utilisant l'équation (3.11), que $\lim_{|t|\to+\infty} \frac{i}{t}\Psi^+(\frac{i}{t}, \Gamma g) = 0$, ce qui montre que f est une forme parabolique.

Un raisonnement analogue montre que f^- est également parabolique. Ainsi $(f, f^-) \in \mathcal{S}_1(\Gamma) \times \mathcal{S}_1^-(\Gamma)$, donc $F \in \mathcal{S}_1^{\pm}(\Gamma)$. $\diamondsuit$

1.3.4 Conclusion

On vient de montrer la relation

$$(\Psi^+ - \Psi^-)(z, \Gamma g) = (\Psi_F^+ - \Psi_F^-)(z, \Gamma g) = F_{|g}(z) \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}).$$

Par passage à la limite de chaque côté de l'égalité, on voit que cette égalité est vraie pour $z = 0$. On a donc :

$$\Psi^+ - \Psi_F^+ = \Psi^- - \Psi_F^-.$$

Le membre de gauche de cette équation est défini sur $\mathbb{C}\backslash]-\infty, 0[$, et le membre de droite sur $\mathbb{C}\backslash]0, +\infty[$. Ces termes coïncident sur $\mathbb{C}\backslash]0, +\infty[\cap\mathbb{C}\backslash]-\infty, 0[= \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \cup \{0\}$. Posons

$$h(z, \Gamma g) = \begin{cases} (\Psi^+ - \Psi_F^+)(z, \Gamma g) & \text{si } z \in \mathbb{C}\backslash]-\infty, 0[\\ (\Psi^- - \Psi_F^-)(z, \Gamma g) & \text{si } z \in \mathbb{C}\backslash]0, +\infty[\end{cases}.$$

La fonction $z \longmapsto h(z, \Gamma g)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$. On va montrer qu'elle se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$. Pour cela, on utilise le lemme suivant :

Lemme 1.12. *Soit $\Gamma g \in \Gamma\backslash SL(2, \mathbb{Z})$. La fonction $z \to \Psi^+(z, \Gamma g)$ (resp. $z \mapsto \Psi^-(z, \Gamma g)$) est bornée sur $Z_\varepsilon^+ = \{z \mid \Re(z) \geq 0$ et $|z| \leq \varepsilon\}$ (resp. $Z_\varepsilon^- = \{z \mid \Re(z) \leq 0$ et $|z| \leq \varepsilon\}$), pour un certain $\varepsilon > 0$.*

Démonstration : Soit $M > 0$. Posons $W_M = \{z \mid \Re(z) \geq 0 \text{ et } |z| > M\}$. D'après l'équation (3.11) (vraie par prolongement analytique sur $\mathbb{C}\backslash]-\infty, 0]$), on a :

$$\Psi^+(\frac{1}{z}, \Gamma g) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z}{z+n} \Psi^+(1 + \frac{1}{z+n}, \Gamma g_n)$$

où $g_n = gT'^{-n}T^{-1}$. La suite Γg_n est périodique (car $\Gamma g_{n+l_{gS}} = \Gamma g_n$), soit l' sa période. Comme la fonction $z \mapsto \Psi^+(z, \Gamma g)$ est holomorphe au voisinage de 1, on sait qu'on a pour tout $z \in W_M$ la majoration :

$$\left| \frac{z}{z+n} \left[\Psi^+(1 + \frac{1}{z+n}, \Gamma g) - \Psi^+(1, \Gamma g) - \frac{1}{z+n}(\Psi^+)'(1, \Gamma g) \right] \right| \leq \frac{A|z|}{|z+n|^3}$$

où A est une constante indépendante de z, de n et de Γg. La série de terme général $\dfrac{|z|}{|z+n|^3}$ étant normalement convergente sur W_M, on en déduit que

$$\lim_{|z|\to+\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z}{z+n}\left[\Psi^+(1+\frac{1}{z+n},\Gamma g_n)-\Psi^+(1,\Gamma g_n)-\frac{1}{z+n}(\Psi^+)'(1,\Gamma g_n)\right]=0.$$

Montrons maintenant que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z}{z+n}\left[\Psi^+(1,\Gamma g_n)+\frac{1}{z+n}(\Psi^+)'(1,\Gamma g_n)\right]$ (qui est une série convergente sur W_M comme différence de séries convergentes) est bornée sur W_M. Posons $v_n=\Psi^+(1,\Gamma g_n)$ et $w_n=(\Psi^+)'(1,\Gamma g_n)$. Ces deux suites sont périodiques de période l', et on montre, comme dans la démonstration du lemme 3.11, l'égalité $\displaystyle\sum_{k=1}^{l'}v_k=0$. La suite $V_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}v_k$ est donc bornée. Par transformation d'Abel on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z}{z+n}\left[\Psi^+(1,\Gamma g_n)+\frac{1}{z+n}(\Psi^+)'(1,\Gamma g_n)\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z}{z+n}\left(\frac{V_n}{(z+n+1)}+\frac{w_n}{z+n}\right)\cdot$$

Les suites V_n et w_n sont bornées, donc on en déduit que $\left|\dfrac{V_n}{(z+n+1)}+\dfrac{w_n}{z+n}\right|\leq\dfrac{B}{|z+n|}$, où B est une constante indépendante de n et de $z\in W_M$. Or la fonction $S(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|z|}{|z+n|^2}$ est bornée sur W_M : en effet, on a $S(z)=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=\lfloor k|z|\rfloor}^{\lfloor(k+1)|z|\rfloor-1}\frac{|z|}{|z+n|^2}$, et pour $z\in W_M$ et $n\in[k|z|,(k+1)|z|[$ on a $|z+n|^2\geq|z|^2+n^2\geq(k^2+1)|z|^2$, donc $|S(z)|\leq\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2}{k^2+1}\cdot$ En regroupant, cela montre que sur W_M, la fonction $z\mapsto\Psi^+(\frac{1}{z},\Gamma g)$ est bornée.

On procède de même pour montrer que la fonction $\Psi^-(\cdot,\Gamma g)$ est bornée sur un ensemble Z_ε^-, en partant de l'équation (3.10). $\diamondsuit$

D'après ce lemme, la fonction $z\mapsto h(z,\Gamma g)$ est bornée dans un voisinage épointé de 0 (puisque la fonction $z\mapsto(\Psi^+-\Psi_F^+)(z,\Gamma g)$ est bornée sur un Z_ε^+ et $z\mapsto(\Psi^--\Psi_F^-)(z,\Gamma g)$ est bornée sur un Z_ε^-, donc $h(\cdot,\Gamma g)$ est bornée sur $Z_\varepsilon^+\cup Z_\varepsilon^-$). On en déduit que h se prolonge en une fonction entière. De plus, h vérifie les équations fonctionnelles (qui sont linéaires) satisfaites par Ψ^+, Ψ^-, Ψ_F^+ et Ψ_F^-, et donc en particulier $h+h_{|S}=0$, c'est-à-dire

$$h(z,\Gamma g)=\frac{1}{z}h(-\frac{1}{z},\Gamma gS).$$

Cela montre que la fonction $z\mapsto h(z,\Gamma g)$ est bornée sur tout $\mathbb{C}$.
La fonction $z\mapsto h(z,\Gamma g)$ est donc entière et bornée, on en déduit par le théorème de Liouville qu'elle est constante. Comme

$$\lim_{x\to+\infty}h(x,\Gamma g)=0$$

cela nous montre que $h(.\,,\Gamma g)$ est la fonction nulle pour tout $g \in SL(2,\mathbb{Z})$, et donc que

$$\Psi^+ = \Psi_F^+$$

sur $\mathbb{C}\backslash]-\infty,0[\times\Gamma\backslash SL(2,\mathbb{Z})$, et que

$$\Psi^- = \Psi_F^-$$

sur $\mathbb{C}\backslash]0,+\infty[\times\Gamma\backslash SL(2,\mathbb{Z})$, ce qui démontre le théorème 0.3.

1.4 Isomorphisme entre $\mathcal{S}_1(\Gamma)$ et $\mathcal{L}_\Gamma^+$ si $\Gamma = V\Gamma V$

On suppose dans cette section que $V\Gamma V = \Gamma$ (V désigne la matrice $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$).

Lemme 1.13. *L'application* $\iota : h \longmapsto \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.h$, *où la fonction* $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.h$ *est définie par*

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.h(x,\Gamma g) = \frac{1}{x}h(\frac{1}{x},\Gamma VgVS)$$

est une involution de $\mathcal{L}_\Gamma$.

Remarque. — L'isomorphisme du théorème 0.3 montre qu'il existe $(f,f') \in \mathcal{S}_1(\Gamma)^2$ avec $h = \psi_{f,f'}^+$ (puisque $V\Gamma V = \Gamma$). La fonction $\psi_{f,f'} \in \mathcal{L}_\Gamma^{\mathbb{R}}$ correspondante vérifie l'équation fonctionnelle $(I+S).\psi_{f,f'} = 0$. Cela montre en particulier que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}h(\frac{1}{x},\Gamma g) = h(0,\Gamma gS)$$

ce qui montre que la fonction $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.h$ est bien définie en 0.

Démonstration : Comme $V^2 = (VS)^2 = I$, ι est d'ordre 2, il suffit de vérifier que $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.h$ est un élément de $\mathcal{L}_\Gamma$. On remarque que l'application $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ préserve $]0,+\infty[$. D'après l'équation fonctionnelle de h appliquée en $\dfrac{1}{x}$, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x}h(\frac{1}{x},\Gamma VgVS) &= \frac{1}{x}h(1+\frac{1}{x},\Gamma VgVST^{-1}) + \frac{1}{x+1}h(\frac{1}{x+1},\Gamma VgVST'^{-1})\\
&= \frac{1}{x}h(1+\frac{1}{x},\Gamma VgT'^{-1}VS) + \frac{1}{x+1}h(\frac{1}{x+1},\Gamma VgT^{-1}VS)\\
&= \frac{1}{x+1}\iota(h)(\frac{x}{x+1},\Gamma gT'^{-1}) + \iota(h)(x+1,\Gamma gT^{-1})\\
&= T'^{-1}.\iota(h)(x,\Gamma g) + T^{-1}.\iota(h)(x,\Gamma g)
\end{aligned}$$

car $T^{-1}VS = VST'^{-1}$ et $T'^{-1}VS = VST^{-1}$. On a $(-I).\iota(h) = \iota(h)$. Enfin, la fonction $x \mapsto h(x,\Gamma g)$ est continue à droite en 0, donc est bornée sur un voisinage de 0 dans $]0,+\infty[$. On a ainsi $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}h(\dfrac{1}{x},\Gamma VgVS) = 0$ pour tout $\Gamma g \in \Gamma\backslash SL(2,\mathbb{Z})$, donc $\iota(h)$ vérifie bien la condition aux limites de $\mathcal{L}_\Gamma$. $\diamondsuit$

Comme on a $\Gamma = V\Gamma V$, le théorème 0.3 définit un isomorphisme entre $\mathcal{S}_1^2(\Gamma)$ et $\mathcal{L}_\Gamma$. Notons, pour $(f, f') \in \mathcal{S}_1^2(\Gamma)$, $\psi^+_{f,f'}$ (resp. $\Psi^+_{f,f'}$) l'élément de $\mathcal{L}_\Gamma$ (resp. de $\mathcal{L}_\Gamma^{\mathbb{C}\setminus]-\infty,0[}$) associé. On a :

$$\Psi^+_{f,f'}(x, \Gamma g) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathfrak{g}^+(0,i\infty;z)} \frac{f_{|g}(\tau)}{x-\tau}d\tau + \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathfrak{g}^-(-i\infty,0;z)} \frac{f'_{|VgV}(-\tau)}{z-\tau}d\tau.$$

On pose $\Psi^-_{f,f'} = -S.\Psi^+_{f,f'}$. Comme $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ préserve $\mathbb{C}\setminus]-\infty, 0]$ et $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty[$, on peut appliquer l'application ι à $\Psi^+_{f,f'}$ et $\Psi^-_{f,f'}$.

Lemme 1.14. *On a la relation*

$$\iota(\Psi^+_{f,f'}) = \Psi^+_{f',f}. \tag{1.15}$$

De façon équivalente, on a $\Psi^+_{f,f'} = \Psi^+_{f,0} + \iota(\Psi^+_{f',0})$.

Démonstration : Soit $(f, f') \in \mathcal{S}_1(\Gamma)^2$. Pour tout $z \in \mathbb{C}\setminus]-\infty, 0]$, on obtient (en posant $u = -\tau$ dans la deuxième intégrale) :

$$\Psi^+_{f,f'}(z, \Gamma g) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathfrak{g}^+(0,i\infty;z)} \frac{f_{|g}(\tau)}{z-\tau}d\tau - \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathfrak{d}^-(0,i\infty;-z)} \frac{f'_{|VgV}(u)}{-z-u}du$$

car si un chemin γ_1 passe dans $\mathcal{H}^-$ à gauche de z, le chemin $-\gamma_1$ passe dans $\mathcal{H}$ à droite de $-z$.
Ainsi, pour tous $(f, f') \in \mathcal{S}_1(\Gamma)^2$

$$\Psi^+_{f,f'}(z, \Gamma g) = \Psi^+_{f,0}(z, \Gamma g) - \Psi^-_{f',0}(-z, \Gamma VgV).$$

Comme $\Psi^-_{f',0} = -S.\Psi^+_{f',0}$, on en déduit que

$$\begin{aligned}
\Psi^+_{f,f'}(z, \Gamma g) &= \Psi^+_{f,0}(z, \Gamma g) + (S.\Psi^+_{f',0})(-z, \Gamma VgV) \\
&= \Psi^+_{f,0}(z, \Gamma g) + \frac{1}{z}\Psi^+_{f',0}(\frac{1}{z}, \Gamma VgVS) \\
&= \Psi^+_{f,0}(z, \Gamma g) + \iota\left(\Psi^+_{f',0}\right)(z, \Gamma g).
\end{aligned}$$

Cela montre qu'on a la formule

$$\iota\left(\Psi^+_{f,f'}\right) = \iota\left(\Psi^+_{f,0}\right) + \Psi^+_{f',0} = \Psi^+_{f',f}.$$

$\diamondsuit$

On définit alors le sous-espace $\mathcal{L}_\Gamma^+$ (resp. $\mathcal{L}_\Gamma^-$) de $\mathcal{L}_\Gamma$ constitué des éléments invariants (resp. anti-invariants) de $\mathcal{L}_\Gamma$ par l'involution ι :

$$\mathcal{L}_\Gamma^\pm = \left\{\psi \in \mathcal{L}_\Gamma \,\middle|\, \iota(\psi) = \pm\psi\right\}.$$

L'équation (3.15) nous montre que pour $f \in \mathcal{S}_1(\Gamma)$, on a

$$\iota(\psi^+_{f,f}) = \psi^+_{f,f} \qquad \text{et} \qquad \iota(\psi^+_{f,-f}) = -\psi^+_{f,-f}.$$

L'application $r^+ : f \mapsto \psi^+_{f,f}$ (resp. $r^- : f \mapsto \psi^+_{f,-f}$) envoie ainsi $\mathcal{S}_1(\Gamma)$ dans $\mathcal{L}_\Gamma^+$ (resp. $\mathcal{L}_\Gamma^-$).

Cette application est injective d'après le théorème 0.3. Si f et f' sont des éléments de $\mathcal{S}_1(\Gamma)$ vérifiant $\iota(\psi^+_{f,f'}) = \psi^+_{f,f'}$ (resp. $\iota(\psi^+_{f,f'}) = -\psi^+_{f,f'}$), on a d'après l'équation (3.15) et par $\mathbb{C}$-linéarité

$$\psi^+_{f,f'} - \iota(\psi^+_{f,f'}) = \psi^+_{f,f'} - \psi^+_{f',f} = \psi^+_{f-f',f'-f} = 0$$

$$(\text{resp.} \quad \psi^+_{f,f'} + \iota(\psi^+_{f,f'}) = \psi^+_{f,f'} + \psi^+_{f',f} = \psi^+_{f+f',f+f'} = 0).$$

D'après l'isomorphisme du théorème 0.3, on en déduit que $f - f' = 0$ (resp. $f + f' = 0$), et donc $\psi_{f,f'} = r^+(f)$ (resp. $\psi_{f,f'} = r^-(f)$).

Les applications r^+ et r^- sont ainsi surjectives, donc bijectives, ce qui prouve le

Corollaire 0.5. *Soit Γ un sous-groupe de congruence vérifiant $V\Gamma V = \Gamma$. On a une correspondance linéaire bijective entre l'espace $\mathcal{S}_1(\Gamma)$ et l'espace $\mathcal{L}^+_\Gamma$, et une correspondance linéaire bijective entre $\mathcal{S}_1(\Gamma)$ et $\mathcal{L}^-_\Gamma$, données par les applications*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{S}_1(\Gamma) & \xrightarrow{r^\pm} & \mathcal{L}^+_\Gamma \ (\textit{resp. } \mathcal{L}^-_\Gamma) \\ f & \mapsto & \psi^+_{f,f} \ (\textit{resp. } \psi^+_{f,-f}). \end{array}$$

L'application r^+ (resp. r^-) est la composée de l'isomorphisme du théorème 0.3 et du plongement diagonal (resp. anti-diagonal) de $\mathcal{S}_1(\Gamma)$ dans $\mathcal{S}_1(\Gamma)^2 \sim \mathcal{S}_1^\pm(\Gamma)$.

Chapitre 2

Transport des structures modulaires sur $\mathcal{L}_\Gamma$

2.1 Produit scalaire de Petersson

Le produit scalaire de Petersson de deux éléments f_1 et f_2 de $\mathcal{S}_1(\Gamma)$ est défini par la formule

$$\langle f_1, f_2\rangle = \frac{1}{\nu(\Gamma)} \iint_{\mathcal{F}(\Gamma)} f_1(z)\overline{f_2(z)}\frac{dxdy}{y}$$

où $\mathcal{F}(\Gamma)$ désigne un domaine fondamental pour Γ, où $\nu(\Gamma)$ désigne le cardinal de $\Gamma \setminus SL(2,\mathbb{Z})$. Cette intégrale est indépendante du choix du domaine fondamental, et du groupe Γ pour lequel f_1 et f_2 sont modulaires. L'espace vectoriel $\mathcal{S}_1(\Gamma)$ muni de ce produit hermitien est un espace de Hilbert. On note $\mathcal{R}(\Gamma)$ un système de représentants de $\Gamma\backslash SL(2,\mathbb{Z})$.

Théorème 0.6. *Pour f_1 et f_2 éléments de $\mathcal{S}_1(\Gamma)$, on a la formule*

$$\langle f_1, f_2\rangle = \frac{i\pi}{3\nu(\Gamma)} \sum_{g\in\mathcal{R}(\Gamma)} \int_{\mathbb{R}} \left(U.\psi_{f_1}(x,\Gamma g)\,\overline{\psi_{f_2}(x,\Gamma g)} - \psi_{f_1}(x,\Gamma g)\,\overline{U.\psi_{f_2}(x,\Gamma g)}\right) dx$$

$$= -\frac{i\pi}{3\nu(\Gamma)} \sum_{g\in\mathcal{R}(\Gamma)} \int_{\mathbb{R}} \left(\psi_{f_1}\left(\frac{x-1}{x}, \Gamma g\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\right) \overline{\psi_{f_2}(x,\Gamma g)}\right.$$
$$\left. -\psi_{f_1}(x,\Gamma g)\,\overline{\psi_{f_2}\left(\frac{x-1}{x}, \Gamma g\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\right)}\right) \frac{dx}{x},$$

(*U désigne la matrice* $\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$).

Démonstration : Soit D_0 un domaine fondamental pour $SL(2,\mathbb{Z})$.

Lemme 2.1. *On a la formule :*

$$\langle f_1, f_2\rangle = -\frac{1}{\nu(\Gamma)} \sum_{g\in\mathcal{R}(\Gamma)} \iint_{D_0} f_{1|g}(u)\overline{f_{2|g}(u)}\frac{du\,\overline{du}}{u-\overline{u}}.$$

Démonstration : On a

$$\begin{aligned}\langle f_1, f_2\rangle &= \frac{1}{\nu(\Gamma)}\iint_{\mathcal{F}(\Gamma)} f_1(z)\overline{f_2(z)}\frac{dxdy}{y}\\ &= -\frac{1}{\nu(\Gamma)}\iint_{\mathcal{F}(\Gamma)} f_1(z)\overline{f_2(z)}\frac{dz\,\overline{dz}}{z-\overline{z}}\,.\end{aligned}$$

On peut choisir $\bigcup_{g\in\mathcal{R}(\Gamma)} gD_0$ comme domaine fondamental pour Γ. On a ainsi

$$\begin{aligned}\langle f_1, f_2\rangle &= -\frac{1}{\nu(\Gamma)}\sum_{g\in\mathcal{R}(\Gamma)}\iint_{gD_0} f_1(z)\overline{f_2(z)}\frac{dz\,\overline{dz}}{z-\overline{z}}\\ &= -\frac{1}{\nu(\Gamma)}\sum_{g\in\mathcal{R}(\Gamma)}\iint_{D_0}\frac{f_1(gu)\overline{f_2(gu)}}{gu-\overline{gu}}\frac{du}{j(g,u)^2}\frac{\overline{du}}{j(g,\overline{u})^2}\\ &= -\frac{1}{\nu(\Gamma)}\sum_{g\in\mathcal{R}(\Gamma)}\iint_{D_0}\frac{j(g,u)^{-1}f_1(gu)\overline{j(g,u)^{-1}f_2(gu)}}{u-\overline{u}}du\,\overline{du}\\ &= -\frac{1}{\nu(\Gamma)}\sum_{g\in\mathcal{R}(\Gamma)}\iint_{D_0}\frac{f_{1|g}(u)\overline{f_{2|g}(u)}}{u-\overline{u}}du\,\overline{du}.\end{aligned}$$

$\diamondsuit\ \diamondsuit$

On va maintenant montrer le résultat suivant :

Lemme 2.2. *On a la formule*

$$\langle f_1, f_2\rangle = \frac{1}{4i\pi\nu(\Gamma)}\sum_{g\in\mathcal{R}(\Gamma)}\int_{\mathbb{R}}\int_0^{i\infty}\frac{f_{1|g}(u)}{x-u}du\int_B\frac{\overline{f_{2|g}(v)}}{x-\overline{v}}\overline{dv}dx.$$

Démonstration : Posons $F_1(z,\Gamma g) = \int_z^{i\infty}\frac{f_{1|g}(u)}{u-\overline{z}}du$, pour $z\in\mathcal{H}\cup\mathbb{P}_1(\mathbb{Q})$ et $g\in\mathcal{R}(\Gamma)$.
On a ainsi

$$\frac{\partial F_1}{\partial z}(z,\Gamma g) = -\frac{f_{1|g}(z)}{z-\overline{z}}.$$

On en déduit que

$$\langle f_1, f_2\rangle = \frac{1}{\nu(\Gamma)}\sum_{g\in\mathcal{R}(\Gamma)}\iint_{D_0} d\left[F_1(z,\Gamma g)\overline{f_{2|g}(z)dz}\right].$$

En appliquant la formule de Stokes, on obtient

$$\langle f_1, f_2\rangle = \frac{1}{\nu(\Gamma)}\sum_{g\in\mathcal{R}(\Gamma)}\int_{\partial D_0} F_1(z,\Gamma g)\overline{f_{2|g}(z)dz}$$

où ∂D_0 désigne le bord de D_0.

Prenons pour D_0 le domaine fondamental standard pour $SL(2,\mathbb{Z})$,

$$D_0 = \left\{z\in\mathcal{H}\,\middle|\, -\frac{1}{2}\le Re(z) < \frac{1}{2} \text{ et } |z|>1\right\}\bigcup\left\{z\in\mathcal{H}\,\middle|\, |z|=1 \text{ et } -\frac{1}{2}\le Re(z)\le 0\right\}.$$

On a $\partial D_0 = A + B - TA$, où A désigne le chemin reliant $i\infty$ à $\rho = e^{2i\pi/3}$ et B désigne l'arc de cercle reliant ρ à $-\overline{\rho}$.
On a donc

$$\langle f_1, f_2\rangle = \frac{1}{\nu(\Gamma)} \sum_{g\in\mathcal{R}(\Gamma)} \left(\int_{A-TA} F_1(z,\Gamma g)\overline{f_{2|g}(z)dz} + \int_B F_1(z,\Gamma g)\overline{f_{2|g}(z)dz} \right).$$

En effectuant le changement de variable $z \mapsto z+1$, on obtient

$$\int_{A-TA} F_1(z,\Gamma g)\overline{f_{2|g}(z)dz} = \int_A \left(F_1(z,\Gamma g)\overline{f_{2|g}(z)} - F_1(z+1,\Gamma g)\overline{f_{2|g}(z+1)} \right) \overline{dz}.$$

On a

$$F_1(z+1,\Gamma g) = \int_{z+1}^{i\infty} \frac{f_{1|g}(u)}{u-1-\overline{z}} du = \int_z^{i\infty} \frac{f_{1|g}(v+1)}{v-\overline{z}} dv = \int_z^{i\infty} \frac{f_{1|gT}(v)}{v-\overline{z}} dv = F_1(z,\Gamma gT)$$

et $\overline{f_{2|g}(z+1)} = \overline{f_{2|gT}(z)}$, on en déduit ainsi que

$$\begin{aligned} &\sum_{g\in\mathcal{R}(\Gamma)} \int_{A-TA} F_1(z,\Gamma g)\overline{f_{2|g}(z)dz} \\ &\qquad = \sum_{g\in\mathcal{R}(\Gamma)} \left(\int_A F_1(z,\Gamma g)\overline{f_{2|g}(z)dz} - \int_A F_1(z,\Gamma gT)\overline{f_{2|gT}(z)dz} \right) = 0. \end{aligned}$$

Cela nous montre que

$$\langle f_1, f_2\rangle = \frac{1}{\nu(\Gamma)} \sum_{g\in\mathcal{R}(\Gamma)} \int_B F_1(z,\Gamma g)\overline{f_{2|g}(z)dz}.$$

La matrice S (d'ordre 4 dans $SL(2,\mathbb{Z})$) envoie l'arc de cercle B sur lui-même en renversant l'orientation, donc on a

$$\begin{aligned} \langle f_1, f_2\rangle &= \frac{1}{2\nu(\Gamma)} \sum_{g\in\mathcal{R}(\Gamma)} \int_{B-SB} F_1(z,\Gamma g)\overline{f_{2|g}(z)dz} \\ &= \frac{1}{2\nu(\Gamma)} \left(\sum_{g\in\mathcal{R}(\Gamma)} \int_B F_1(z,\Gamma g)\overline{f_{2|g}(z)dz} - \sum_{g\in\mathcal{R}(\Gamma)} \int_{SB} F_1(z,\Gamma gS^3)\overline{f_{2|gS^3}(z)dz} \right) \\ &= \frac{1}{2\nu(\Gamma)} \left(\sum_{g\in\mathcal{R}(\Gamma)} \int_B F_1(z,\Gamma g)\overline{f_{2|g}(z)dz} - \sum_{g\in\mathcal{R}(\Gamma)} \int_B F_1(Su,\Gamma gS^3)\frac{\overline{f_{2|gS^3}(Su)du}}{\overline{u}^2} \right). \end{aligned}$$

Par définition, on a $f_{2|gS^3}(Su) = uf_{2|g}(u)$, donc on en déduit que

$$\langle f_1, f_2\rangle = \frac{1}{2\nu(\Gamma)} \sum_{g\in\mathcal{R}(\Gamma)} \int_B \left[F_1(z,\Gamma g) - \overline{z}^{-1} F_1(-\frac{1}{z},\Gamma gS^3) \right] \overline{f_{2|g}(z)dz}.$$

Or on a

$$\begin{aligned}
\overline{z}^{-1}F_1(-\frac{1}{z},\Gamma g S^3) &= \int_{-1/z}^{i\infty}\frac{f_{1|gS^3}(u)}{\overline{z}(u+1/\overline{z})}du \\
&= -\int_{-1/z}^{i\infty}\frac{f_{1|gS^3}(u)}{-1/u-\overline{z}}\frac{du}{u} \\
&= -\int_{z}^{0}\frac{f_{1|gS^3}(Sv)}{v-\overline{z}}\frac{dv}{v} \\
&= \int_{0}^{z}\frac{f_{1|g}(v)}{v-\overline{z}}dv,
\end{aligned}$$

donc on obtient

$$\langle f_1,f_2\rangle = \frac{1}{2\nu(\Gamma)}\sum_{g\in\mathcal{R}(\Gamma)}\int_B\int_0^{i\infty}\frac{f_{1|g}(u)\overline{f_{2|g}(v)}}{u-\overline{v}}du\overline{dv}.$$

On utilise ensuite la formule, vraie pour tout $(u,v)\in\mathcal{H}^2$:

$$\frac{1}{u-\overline{v}} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathbb{R}}\frac{dx}{(x-u)(x-\overline{v})}.$$

On en déduit que :

$$\langle f_1,f_2\rangle = \frac{1}{4i\pi}\sum_{g\in\mathcal{R}(\Gamma)}\int_B\int_0^{i\infty}\int_{\mathbb{R}}\frac{f_{1|g}(u)\overline{f_{2|g}(v)}}{(x-u)(x-\overline{v})}dxdu\overline{dv}.$$

Les formes modulaires f_1 et f_2 étant paraboliques, ces intégrales sont absolument convergentes et donc on a

$$\langle f_1,f_2\rangle = \frac{1}{4i\pi\nu(\Gamma)}\sum_{g\in\mathcal{R}(\Gamma)}\int_{\mathbb{R}}\int_0^{i\infty}\frac{f_{1|g}(u)}{x-u}du\int_B\frac{\overline{f_{2|g}(v)}}{x-\overline{v}}\overline{dv}dx.$$

$\diamondsuit\ \diamondsuit$

Posons, pour $x\in\mathbb{R}$, $z\in\mathcal{H}$ et $g\in\mathcal{R}(\Gamma)$, $F_z(x,\Gamma g) = \displaystyle\int_z^{i\infty}\frac{f_{2|g}(v)}{x-v}dv$.
On définit, pour $\gamma\in SL(2,\mathbb{Z})$, la fonction $\gamma.F_z$ par

$$\gamma.F_z(x,\Gamma g) = j(\gamma^{-1},x)^{-1}F_z(\gamma^{-1}x,\Gamma g\gamma).$$

On a

$$\begin{aligned}
\gamma.F_z(x,\Gamma g) &= j(\gamma^{-1},x)^{-1}\int_z^{i\infty}\frac{f_{2|g\gamma}(u)}{\gamma^{-1}x-u}du \\
&= \int_z^{i\infty}\frac{f_{2|g\gamma}(u)}{(x-\gamma u)j(\gamma,u)}du \\
&= \int_z^{i\infty}\frac{f_{2|g}(\gamma u)}{x-\gamma u}\frac{du}{j(\gamma,u)^2} \\
&= \int_{\gamma z}^{\gamma i\infty}\frac{f_{2|g}(v)}{x-v}dv.
\end{aligned}$$

Avec cette notation, on a

$$\int_B \frac{f_{2|g}(v)}{x-v}dv = F_\rho(x,\Gamma g) - F_{-\overline{\rho}}(x,\Gamma g)$$

et donc

$$\langle f_1, f_2\rangle = \frac{1}{2\nu(\Gamma)} \sum_{g\in\mathcal{R}(\Gamma)} \int_{\mathbb{R}} \psi_{f_1}(x,\Gamma g)(\overline{F_\rho(x,\Gamma g)} - \overline{F_{-\overline{\rho}}(x,\Gamma g)})dx.$$

Pour $\sum_M u_M M \in \mathbb{Z}[SL(2,\mathbb{Z})]$, on pose $\left(\sum_M u_M M\right).F_z = \sum_M u_M M.F_z$. Ainsi,

$$(I-U).F_{-\overline{\rho}}(x,\Gamma g) = \left(\int_{-\overline{\rho}}^{i\infty} - \int_{-\frac{1}{-\overline{\rho}-1}}^{0}\right) \frac{f_{2|g}(v)}{x-v}dv = \int_0^{i\infty} \frac{f_{2|g}(v)}{x-v}dv = (2i\pi)\psi_{f_2}(x,\Gamma g) \tag{2.1}$$

car $-\overline{\rho}$ est un point fixe de U.

Soit $\mathcal{L}'_\Gamma$ l'ensemble des fonctions à valeurs complexes ψ définies sur $\mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \times \Gamma\backslash SL(2,\mathbb{Z})$, telles que pour tout $\Gamma g \in \Gamma\backslash SL(2,\mathbb{Z})$, la fonction $x \longmapsto \psi(x,\Gamma g)$ soit de classe C^∞ et $\mathcal{L}^2$ sur $\mathbb{R}$. On a $\mathcal{L}_\Gamma \subset \mathcal{L}'_\Gamma$. Le groupe $SL(2,\mathbb{Z})$ agit sur $\mathcal{L}'_\Gamma$ par la formule

$$h.\psi(x,\Gamma g) = j(h^{-1},x)^{-1}\psi(h^{-1}x,\Gamma gh).$$

Munissons $\mathcal{L}'_\Gamma$ de la norme hermitienne définie par

$$||\psi_1||^2 = \sum_{g\in\mathcal{R}(\Gamma)} \int_{\mathbb{R}} ||\psi_1(x,\Gamma g)||^2 dx.$$

Lemme 2.3. *Le produit scalaire sur $\mathcal{L}'_\Gamma$ est $SL(2,\mathbb{Z})$-équivariant.*

Démonstration : Notons $(\ |\ )$ le produit scalaire issu de la norme définie précédemment. Soient ψ_1 et ψ_2 des éléments de $\mathcal{L}'_\Gamma$, et soit $h \in SL(2,\mathbb{Z})$. On a

$$\begin{aligned}
(h.\psi_1|h.\psi_2) &= \sum_{g\in\mathcal{R}(\Gamma)} \int_{\mathbb{R}} h.\psi_1(x,\Gamma g)\,\overline{h.\psi_2(x,\Gamma g)}dx \\
&= \sum_{g\in\mathcal{R}(\Gamma)} \int_{\mathbb{R}} \psi_1(h^{-1}x,\Gamma gh)\overline{\psi_2(h^{-1}x,\Gamma gh)}\frac{dx}{j(h^{-1},x)^2} \\
&= \sum_{g\in\mathcal{R}(\Gamma)} \int_{h^{-1}(\mathbb{R})} \psi_1(u,\Gamma gh)\overline{\psi_2(u,\Gamma gh)}du \\
&= (\psi_1|\psi_2)
\end{aligned}$$

car $SL(2,\mathbb{Z})$ laisse $\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$ invariant. $\diamondsuit\ \diamondsuit$

Définissons la fonction Θ_{f_2} sur $\mathbb{R} \times \Gamma\backslash SL(2,\mathbb{Z})$ par

$$\Theta_{f_2}(x,\Gamma g) = F_\rho(x,\Gamma g) - F_{-\overline{\rho}}(x,\Gamma g) = \int_\rho^{-\overline{\rho}} \frac{f_{2|g}(v)}{x-v}dv.$$

Les fonctions ψ_{f_1} et Θ_{f_2} sont des éléments de $\mathcal{L}'_\Gamma$, et on a

$$\langle f_1, f_2\rangle = \frac{1}{2\nu(\Gamma)}(\psi_{f_1}|\Theta_{f_2}).$$

Comme $\rho = -\overline{\rho} - 1$, on a

$$T^{-1}.F_{-\overline{\rho}}(x, \Gamma g) = \int_{\rho}^{i\infty} \frac{f_{2|g}(v)}{x - v} dv = F_{\rho}(x, \Gamma g)$$

ce qui montre que $\Theta_{f_2} = (T^{-1} - I).F_{-\overline{\rho}}$. On en déduit, à l'aide du lemme 4.3, que :

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \frac{1}{2\nu(\Gamma)}[(\psi_{f_1}|T^{-1}.F_{-\overline{\rho}}) - (\psi_{f_1}|F_{-\overline{\rho}})] = \frac{1}{2\nu(\Gamma)}((T - I).\psi_{f_1}|F_{-\overline{\rho}}).$$

Lemme 2.4. *On a la formule*

$$(T - I).\psi_{f_1} = \frac{1}{3}(I - U^2).\left[(I - U).\left((T - I).\psi_{f_1}\right)\right].$$

Démonstration : La fonction ψ_{f_1} appartient à $\mathcal{L}_\Gamma$, donc, d'après la proposition 6.3, pour $\sum u_M M \in \mathbb{Z}[SL(2, \mathbb{Z})]$, la fonction $\sum u_M M.\psi_{f_1}$ ne dépend que de $\sum u_M([M\infty] - [M0])$ dans $\mathbb{P}_1(\mathbb{Q})$. On a

$$\begin{aligned}[(I-U^2)(I-U)(T-I)]([\infty]-[0]) &= [(I-U^2)(I-U)]([0]-[1]) = (I-U^2)([0]-2[1]+[\infty]) \\ &= 3([0] - [1]) = 3(T - I)([\infty] - [0])\end{aligned}$$

ce qui montre le lemme. $\diamondsuit\ \diamondsuit$

En utilisant les lemmes 4.3 et 4.4, on obtient

$$\begin{aligned}\langle f_1, f_2 \rangle &= \frac{1}{6\nu(\Gamma)}\left([(I - U^2)(I - U)(T - I)].\psi_{f_1}\middle|F_{-\overline{\rho}}\right) \\ &= \frac{1}{6\nu(\Gamma)}\left([(I - U)(T - I)].\psi_{f_1}\middle|F_{-\overline{\rho}}\right) - \frac{1}{6\nu(\Gamma)}\left([U^2(I - U)(T - I)].\psi_{f_1}\middle|F_{-\overline{\rho}}\right) \\ &= \frac{1}{6\nu(\Gamma)}\left([(I - U)(T - I)].\psi_{f_1}\middle|(I - U).F_{-\overline{\rho}}\right).\end{aligned}$$

Or d'après la formule (4.1), on a $(2i\pi)\psi_{f_2} = (I - U).F_{-\overline{\rho}}$ donc on obtient

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \frac{i\pi}{3\nu(\Gamma)}\left([(I - U)(T - I)].\psi_{f_1}\middle|\psi_{f_2}\right).$$

Or ψ_{f_1} et ψ_{f_2} sont des éléments de $\mathcal{L}_\Gamma$, donc ils sont annulés par les relations de Manin. Comme $U = ST^{-1}$, on voit alors que $[(I - U)(T - I)].\psi_{f_1} = (T + U).\psi_{f_1}$.
De la même façon, on a $(T + U^{-1}).\psi_{f_1} = [T(I + S^3)].\psi_{f_1} = 0$, donc cela montre que

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \frac{i\pi}{3\nu(\Gamma)}\left((U - U^{-1}).\psi_{f_1}\middle|\psi_{f_2}\right)$$

donc on a

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \frac{i\pi}{3\nu(\Gamma)}\left[(U.\psi_{f_1}|\psi_{f_2}) - (\psi_{f_1}|U.\psi_{f_2})\right]$$

ce qui démontre le théorème 0.6. $\diamondsuit$

2.2 Périodes de formes non paraboliques

Soit $f \in \mathcal{M}_1(\Gamma)$. Pour tout $\Gamma g \in \Gamma\backslash SL(2,\mathbb{Z})$, on note $a_0(f_{|g})$ le terme constant du développement de Fourier en l'infini de la forme modulaire $f_{|g}$. On sait qu'au voisinage du point $i\infty$, il existe $a > 0$ tel que

$$f_{|g}(z) - a_0(f_{|g}) = O(e^{2i\pi az}),$$

et qu'au voisinage de 0, il existe $b > 0$ tel que

$$f_{|g}(z) + \frac{a_0(f_{|gS})}{z} = O(e^{-2i\pi b/z}).$$

Dans la suite, on notera ln la fonction définie sur $\mathbb{C}\backslash i\mathbb{R}_+$ prolongeant la fonction logarithme sur $\mathbb{R}_+^*$: elle est définie par $\ln(re^{i\theta}) = \ln r + i\theta$, avec $\theta \in]-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
Soit $\widehat{\Psi} \in \widehat{\mathcal{L}_\Gamma}$. Par définition, pour tout $\Gamma g \in \Gamma\backslash SL(2,\mathbb{Z})$, il existe $(a_{\Gamma g}, a'_{\Gamma g}) \in \mathbb{C}^2$ tels que

$$\widehat{\Psi}(x,\Gamma g) = a_{\Gamma g}\ln x - a'_{\Gamma g}\ln(-x) + O(\frac{1}{x})$$

au voisinage du point $\infty \in \mathbb{P}_1(\mathbb{R})$.

Remarque. — La condition aux limites (2) peut s'écrire sous la forme :
- au voisinage de $+\infty$, $\widehat{\Psi}(x,\Gamma g) = [a_{\Gamma g} - a'_{\Gamma g}]\ln x + i\pi a'_{\Gamma g} + O(\frac{1}{x})$;
- au voisinage de $-\infty$, $\widehat{\Psi}(x,\Gamma g) = [a_{\Gamma g} - a'_{\Gamma g}]\ln|x| - i\pi a_{\Gamma g} + O(\frac{1}{x})$.

Soit $\alpha \in \mathcal{H}$. On définit la fonction r_f sur $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[\times\Gamma\backslash SL(2,\mathbb{Z})$ par

$$r_f^\alpha(x,\Gamma g) = \int_\alpha^{i\infty} \frac{f_{|g}(\tau) - a_0(f_{|g})}{x-\tau}d\tau + \int_0^\alpha \frac{f_{|g}(\tau) + a_0(f_{|gS})/\tau}{x-\tau}d\tau$$
$$+ a_0(f_{|g})\ln(x-\alpha) + \frac{a_0(f_{|gS})}{x}\ln(-\frac{1}{x}+\frac{1}{\alpha})\cdot \quad (2.2)$$

Remarque. — On s'inspire ici de la définition du polynôme de période pour une forme non parabolique $f \in \mathcal{M}_k(SL(2,\mathbb{Z}))$, donnée par Zagier dans [Zag91].

Cette fonction est bien définie d'après les remarques précédentes, et pour $f \in \mathcal{S}_1(\Gamma)$, on a $r_f^\alpha = \psi_f$, quel que soit $\alpha \in \mathcal{H}$. Comme pour les formes paraboliques, on peut en fait définir une fonction $r_{f,f'}^\alpha(x,\Gamma g)$, pour $(f,f') \in \mathcal{M}_1(\Gamma)\times\mathcal{M}_1(V\Gamma V)$ par la formule

$$r_{f,f'}^\alpha(x,\Gamma g) = \int_\alpha^{i\infty} \frac{f_{|g}(\tau) - a_0(f_{|g})}{x-\tau}d\tau + \int_0^\alpha \frac{f_{|g}(\tau) + a_0(f_{|gS})/\tau}{x-\tau}d\tau + a_0(f_{|g})\ln(x-\alpha)$$
$$+ \frac{a_0(f_{|gS})}{x}\ln(-\frac{1}{x}+\frac{1}{\alpha}) + \int_{-i\infty}^{-\alpha} \frac{f'_{|VgV}(-\tau) - a_0(f'_{|VgV})}{x-\tau}d\tau$$
$$+ \int_{-\alpha}^0 \frac{f'_{|VgV}(-\tau) - a_0(f'_{|VgVS})/\tau}{x-\tau}d\tau - a_0(f'_{|VgV})\ln(-x-\alpha) + \frac{a_0(f'_{|VgVS})}{x}\ln(\frac{1}{x}+\frac{1}{\alpha})\cdot \quad (2.3)$$

Proposition 2.5. *La fonction $r_{f,f'}^\alpha$ vérifie les propriétés suivantes :*

1. *elle ne dépend pas du $\alpha \in \mathcal{H}$ choisi. Par la suite, on pose $r_{f,f'} = r^{\alpha}_{f,f'}$, pour tout $\alpha \in \mathcal{H}$;*
2. *on a $r_{f,f'} \in \widehat{\mathcal{L}_\Gamma}$.*

Démonstration :

– On montre le point 1 pour la fonction r^{α}_f. Un raisonnement analogue le montre pour $r^{\alpha}_{f,f'}$. On différencie la fonction R_f définie par $R_f(\alpha, x, \Gamma g) = r^{\alpha}_f(x, \Gamma g)$ par rapport à la variable α, on a

$$\frac{\partial R_f}{\partial \alpha}(\alpha, x, \Gamma g) = \frac{-f_{|g}(\alpha) + a_0(f_{|g})}{x-\alpha} + \frac{f_{|g}(\alpha) + a_0(f_{|gS})/\alpha}{x-\alpha} - \frac{a_0(f_{|g})}{x-\alpha} - \frac{a_0(f_{|gS})}{\alpha(x-\alpha)} = 0,$$

ce qui montre le point 1.

– Montrons que $(I+S).r_f = 0$. Un raisonnement identique montre que $(I+S).r_{f,f'} = 0$. On a

$$\begin{aligned}
S.r^{\alpha}_f(x, \Gamma g) &= -\frac{1}{x} r^{\alpha}_f(-\frac{1}{x}, \Gamma g S) \\
&= \int_{\alpha}^{i\infty} \frac{\tau^{-1} f_{|g}(-1/\tau) - a_0(f_{|gS})}{1+x\tau} d\tau + \int_0^{\alpha} \frac{\tau^{-1} f_{|g}(-1/\tau) - a_0(f_{|g})/\tau}{1+x\tau} d\tau \\
&\quad -\frac{a_0(f_{|gS})}{x} \ln(-\frac{1}{x} - \alpha) - a_0(f_{|g}) \ln(x + \frac{1}{\alpha}) \\
&= \int_{-1/\alpha}^{0} \frac{f_{|g}(u) + a_0(f_{|gS})/u}{x-u} du + \int_{i\infty}^{-1/\alpha} \frac{f_{|g}(u) - a_0(f_{|g})}{x-u} du \\
&\quad -a_0(f_{|g}) \ln(x + \frac{1}{\alpha}) - \frac{a_0(f_{|gS})}{x} \ln(-\frac{1}{x} - \alpha) \\
&= -r_f^{-1/\alpha}(x, \Gamma g)
\end{aligned}$$

grâce à l'égalité $a_0(f_{|-g}) = -a_0(f_{|g})$, et où on a effectué le changement de variable $u = -1/\tau$. D'après le point 1, comme $-1/\alpha \in \mathcal{H}$, on a $r_f^{-1/\alpha} = r_f$.

– De même, montrons que $(I - T - T').r_f = 0$. Un raisonnement identique montre que $(I - T - T').r_{f,f'} = 0$. On a

$$\begin{aligned}
T.r_f(x, \Gamma g) = \int_{\alpha+1}^{i\infty} \frac{f_{|g}(u) - a_0(f_{|gT})}{x-u} du + \int_1^{\alpha+1} \frac{f_{|g}(u) + a_0(f_{|gTS})/(u-1)}{x-u} du \\
+ a_0(f_{|gT}) \ln(x - 1 - \alpha) + \frac{a_0(f_{|gTS})}{x-1} \ln(-\frac{1}{x-1} + \frac{1}{\alpha})
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
T'.r_f(x, \Gamma g) = \int_{\frac{\alpha}{\alpha+1}}^{1} \frac{f_{|g}(u) + a_0(f_{|gT'})/(u-1)}{x-u} du + \int_0^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \frac{f_{|g}(u) + a_0(f_{|gT'S})/u}{x-u} du \\
+ \frac{a_0(f_{|gT'})}{1-x} \ln(\frac{x}{1-x} - \alpha) + \frac{a_0(f_{|gT'S})}{x} \ln(-\frac{1}{x} + 1 + \frac{1}{\alpha}).
\end{aligned}$$

Or pour tout $\Gamma g \in \Gamma \backslash SL(2, \mathbb{Z})$, on a $a_0(f_{|g}) = a_0(f_{|gT})$. Les égalités $TS = T'T^{-1}$ et $T'S = ST^{-1}$ montrent que $a_0(f_{|gTS}) = a_0(f_{|gT'})$ et que $a_0(f_{|gT'S}) = a_0(f_{|gS})$. On

trouve ainsi que :

$$(I-T-T').r_f(x,\Gamma g) = a_0(f_{|g})\left[\int_{\alpha+1}^{\alpha}\frac{1}{x-\tau}d\tau + \ln(x-\alpha) - \ln(x-\alpha-1)\right]$$
$$+\, a_0(f_{|gS})\left[\int_{\frac{\alpha}{\alpha+1}}^{\alpha}\frac{1}{\tau(x-\tau)}d\tau + \frac{1}{x}\left(\ln(-\frac{1}{x}+\frac{1}{\alpha}) - \ln(-\frac{1}{x}+1+\frac{1}{\alpha})\right)\right]$$
$$+a_0(f_{|gT'})\left[\int_{\alpha+1}^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}\frac{1}{(\tau-1)(x-\tau)}d\tau + \frac{1}{1-x}\left(\ln(-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{\alpha}) - \ln(\frac{x}{1-x}-\alpha)\right)\right].$$

Chacune des expressions entre crochets est nulle, ce qui montre que $(I-T-T').r_f = 0$.

- Les conditions aux limites (2) sont bien respectées pour $r_{f,f'}$, en posant $a_{\Gamma g} = a_0(f_{|g})$ et $a'_{\Gamma g} = a_0(f'_{|VgV})$.

$\diamondsuit$

Remarque. — La condition $(I+S).\widehat{\Psi} = 0$, et la proposition 6.3 montrent que l'espace $\widehat{\mathcal{L}_\Gamma}$ est en bijection avec l'espace $\widehat{\mathcal{L}_\Gamma^+}$ des fonctions $\widehat{\psi^+} :]0,+\infty[\times\Gamma\backslash SL(2,\mathbb{Z}) \to \mathbb{C}$, analytiques en la première variable et satisfaisant les propriétés :

- $(I-T^{-1}-T'^{-1}).\widehat{\psi^+} = 0$ et $(I-(-I)).\widehat{\psi^+} = 0$;
- pour tout $\Gamma g \in \Gamma\backslash SL(2,\mathbb{Z})$, il existe $(a_{\Gamma g}, a'_{\Gamma g}) \in \mathbb{C}^2$ tels que

$$\widehat{\psi^+}(x,\Gamma g) = [a_{\Gamma g} - a'_{\Gamma g}]\ln(x) + i\pi a'_{\Gamma g} + O(\frac{1}{x})$$

au voisinage de $+\infty$ et

$$\widehat{\psi^+}(x,\Gamma g) = [a'_{\Gamma gS} - a_{\Gamma gS}]\frac{\ln x}{x} - \frac{i\pi a_{\Gamma gS}}{x} + O(1)$$

au voisinage de 0^+.

On notera $r^+_{f,f'}$ la restriction de $r_{f,f'}$ à $]0,+\infty[\times\Gamma\backslash SL(2,\mathbb{Z})$, c'est un élément de $\widehat{\mathcal{L}_\Gamma^+}$.

Théorème 0.7'. *L'application r qui à (f,f') associe $r^+_{f,f'}$ est un isomorphisme entre $\mathcal{M}_1(\Gamma)\times\mathcal{M}_1(V\Gamma V)$ et $\widehat{\mathcal{L}_\Gamma^+}$.*

Démonstration : Ce théorème est équivalent au théorème 0.7. On a vu que $r^+_{f,f'}$ est un élément de $\widehat{\mathcal{L}_\Gamma^+}$. D'après le théorème 0.3, l'application r définit un isomorphisme de $\mathcal{S}_1(\Gamma)\times\mathcal{S}_1(V\Gamma V)$ dans $\mathcal{L}_\Gamma$. On va prouver que r est surjectif. Soit $\widehat{\psi}$ un élément de $\widehat{\mathcal{L}_\Gamma^+}$. Par hypothèse, il existe $(a_{\Gamma g}, a'_{\Gamma g}) \in \mathbb{C}^2\times\Gamma\backslash SL(2,\mathbb{Z})$ tels que

$$\widehat{\psi^+}(x,\Gamma g) = [a_{\Gamma g} - a'_{\Gamma g}]\ln(x) + i\pi a'_{\Gamma g} + O(\frac{1}{x})$$

au voisinage de $+\infty$.

On va montrer qu'il existe $(f,f') \in \mathcal{M}_1(\Gamma)\times\mathcal{M}_1(V\Gamma V)$ tels que

$$a_0(f_{|g}) - a_0(f'_{|VgV}) = a_{\Gamma g} - a'_{\Gamma g}$$

pour tout $\Gamma g \in \Gamma\backslash SL(2,\mathbb{Z})$.

Notons $\mathcal{E}_1(\Gamma)$ l'espace des séries d'Eisenstein de poids 1 pour Γ. La dimension de cet espace est égale à la moitié du nombre de pointes régulières de Γ (voir par exemple [Miy89] page 61)(on rappelle qu'une pointe Γx est dite *régulière* si $\sigma\Gamma_x\sigma^{-1}$ est engendré par une matrice $\begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, avec $h > 0$, où σ est un élément de $SL(2,\mathbb{Z})$ vérifiant $\sigma x = \infty$, et Γ_x est le sous-groupe de $SL(2,\mathbb{Z})$ formé des éléments de Γ laissant x invariant. Si $\sigma\Gamma_x\sigma^{-1}$ est engendré par une matrice $\begin{pmatrix} -1 & h \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $h > 0$, la pointe Γx est dite irrégulière. Si la pointe $\Gamma g\infty$ est irrégulière, on a $a_0(f_{|g}) = 0$ pour tout $f \in \mathcal{M}_1(\Gamma)$).
Schoeneberg montre (voir [Sch74] page 175) que, dans le cas où $\Gamma = \Gamma(N), N \geq 1$, on a le résultat suivant :

Proposition 2.6. *Pour toute pointe P régulière de Γ, il existe une série d'Eisenstein dont la valeur en une pointe P' est de partie réelle non nulle si et seulement si $P = P'$.*

On note $\mathcal{P}_\Gamma^{reg}$ l'ensemble des pointes régulières de Γ, on note u_Γ son cardinal, et on définit l'application θ_Γ :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_1(\Gamma) & \longrightarrow & \mathbb{C}[\mathcal{P}_\Gamma^{reg}] \\ f & \longmapsto & \displaystyle\sum_{P=\Gamma g\infty\in\mathcal{P}_\Gamma^{reg}} a_0(f_{|g})[P]. \end{array}$$

On définit de la même façon θ_Γ sur $\overline{\mathcal{E}_1(\Gamma)}$, l'espace des séries d'Eisenstein anti-holomorphes de poids 1 pour Γ. On a $\theta_\Gamma(\overline{\mathcal{E}_1(\Gamma)}) = \overline{\theta_\Gamma(\mathcal{E}_1(\Gamma))}$.

Remarque. —Schoeneberg détermine l'image de θ_Γ pour $\Gamma = \Gamma(N)$, en construisant explicitement des séries d'Eisenstein $G_{N,\mathbf{a}}$ de poids 1 pour $\Gamma(N)$, pour tout $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ tel que $(a_1, a_2) \in E_N$.
Si $N \geq 3$, toutes les pointes de $\Gamma(N)$ sont régulières, et un ensemble de représentants des pointes est donné par

$$\left\{\frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \cup \infty, (m,n) = 1, (m \bmod N, n \bmod N) \in E_N/\{\pm 1\}\right\}.$$

Soit $\overline{B_1}$ le premier polynôme de Bernoulli étendu à $\mathbb{R}$ par 1-périodicité,

$$\overline{B_1}(x) = x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}$$

(où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x). L'image de θ_Γ est engendrée par les éléments $\displaystyle\sum_{P=\Gamma g\infty\in\mathcal{P}_\Gamma^{reg}} a_P(a_1,a_2)[P]$, où, pour $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $P = \Gamma g\infty$, le terme constant $a_P(a_1,a_2)$ de $G_{N,\mathbf{a}}$, est donné par

$$a_P(a_1,a_2) = \delta\left(\frac{aa_1 + ba_2}{N} \in \mathbb{Z}\right) \operatorname{cotan}\left(\frac{\pi(ca_1 + da_2)}{N}\right) + 2i\overline{B_1}\left(\frac{aa_1 + ba_2}{N}\right)$$

(où $\delta(A) = 1$ si A est vraie, et vaut 0 sinon). On remarque que cette valeur est soit imaginaire pure, soit réelle, et qu'elle ne dépend ni du choix de a_1 et a_2 modulo N, ni du choix de g.

Si Γ est un sous-groupe de congruence contenant $\Gamma(N)$, posons $\Gamma = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{\mu} \Gamma(N)A_i$, avec

$\mu = [\Gamma : \Gamma_1(N)]$. Pour $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ tel que $(a_1, a_2) \in E_N$, la fonction définie par

$$G_{\Gamma,\mathbf{a}} = \sum_{i=1}^{\nu} (G_{N,\mathbf{a}})_{|A_i} = \sum_{i=1}^{\nu} G_{N,{}^tA_i\mathbf{a}}$$

est une série d'Eisenstein pour Γ, et est une famille génératrice de $\mathcal{E}_1(\Gamma)$. Cela permet de déterminer l'image de θ_Γ pour tout sous-groupe de congruence Γ ne contenant pas $-I$.

On note $\mathcal{M}_1^{\pm}(\Gamma)$ l'espace des couples de formes modulaires $(f, f') \in \mathcal{M}_1(\Gamma) \times \mathcal{M}_1^{-}(\Gamma)$ continues aux pointes, c'est-à-dire vérifiant, pour tout $\Gamma g \in \Gamma \setminus SL(2,\mathbb{Z})$, $a_0(f_{|g}) = a_0(f'_{|g})$.

Lemme 2.7. – *On a l'égalité* $\mathcal{M}_1^{\pm}(\Gamma) = \mathcal{S}_1^{\pm}(\Gamma)$ *;*
– *pour tout* $\sum_{P \in \mathcal{P}_\Gamma^{reg}} a_P[P] \in \mathbb{C}[\mathcal{P}_\Gamma^{reg}]$, *il existe* $(f, f_1) \in \mathcal{M}_1(\Gamma) \times \overline{\mathcal{M}_1(\Gamma)}$ *tel que* $\theta_\Gamma(f) + \theta_\Gamma(f_1) = \sum_{P \in \mathcal{P}_\Gamma^{reg}} a_P[P]$.

Démonstration : Supposons qu'il existe $F \in \mathcal{M}_1^{\pm}(\Gamma)$ tel que $\theta_\Gamma(F) \neq 0$.
D'après les isomorphismes $\mathcal{M}_1^{-}(\Gamma) \sim \overline{\mathcal{M}_1(\Gamma)} \sim \mathcal{M}_1(\Gamma)$, il existe $f' \in \mathcal{M}_1(\Gamma)$ tel que $F(z) = \overline{f'(\overline{z})}$ sur $\mathcal{H}^-$. On en déduit que pour tout $g \in SL(2,\mathbb{Z})$ et $z \in \mathcal{H}$, $F_{|g}(z) = \overline{f'_{|g}(\overline{z})}$, et donc que $a_0(f'_{|g}) = \overline{a_0(F_{|g})}$.
Or, pour tous $(f, f') \in \mathcal{M}_1(\Gamma)^2$, on a l'égalité

$$\sum_{\Gamma g \in \Gamma \setminus SL(2,\mathbb{Z})} a_0(f_{|g}) a_0(f'_{|g}) = \sum_{\Gamma g \infty \in \mathcal{P}^{reg}(\Gamma)} l_g a_0(f_{|g}) a_0(f'_{|g}) = 0$$

(où l_g est la largeur de la pointe $\Gamma g \infty$), car la fonction

$$h = \sum_{\Gamma g \in \mathcal{R}(\Gamma)} f_{|g} f'_{|g}$$

est une forme modulaire de poids 2 pour $SL(2,\mathbb{Z})$, donc est la fonction nulle. Cela montre que $\theta_\Gamma(\mathcal{M}_1(\Gamma)) \cap \theta_\Gamma(\overline{\mathcal{M}_1(\Gamma)}) = \{0\}$: en effet, s'il existe $(f, f') \in \mathcal{M}_1(\Gamma)^2$ tel que pour tout $g \in SL(2,\mathbb{Z})$, $a_0(f_{|g}) = \overline{a_0(f'_{|g})}$, alors on doit avoir

$$\sum_{\Gamma g \infty \in \mathcal{P}^{reg}(\Gamma)} l_g a_0(f_{|g}) a_0(f'_{|g}) = \sum_{\Gamma g \infty \in \mathcal{P}^{reg}(\Gamma)} l_g |a_0(f_{|g})|^2 = 0$$

ce qui montre que $f \in \mathcal{S}_1(\Gamma)$, et donc $\mathcal{M}_1^{\pm}(\Gamma) = \mathcal{S}_1^{\pm}(\Gamma)$.
Comme $\dim \theta_\Gamma(\mathcal{M}_1(\Gamma)) = \dfrac{u_\Gamma}{2}$ et $\theta_\Gamma(\mathcal{M}_1(\Gamma)) \cap \theta_\Gamma(\overline{\mathcal{M}_1(\Gamma)}) = \{0\}$, on a $\theta_\Gamma(\mathcal{M}_1(\Gamma)) \oplus \theta_\Gamma(\overline{\mathcal{M}_1(\Gamma)}) = \mathbb{C}[\mathcal{P}^{reg}(\Gamma)]$ (et par identification $\theta_\Gamma(\mathcal{M}_1(\Gamma)) \oplus \theta_\Gamma(\mathcal{M}_1(V\Gamma V)) = \mathbb{C}[\mathcal{P}^{reg}(\Gamma)]$).
$\diamondsuit\ \diamondsuit$

Si $f' \in \mathcal{M}_1(V\Gamma V)$ correspond à $f_1 \in \overline{\mathcal{M}_1(\Gamma)}$, on a $f'_{|VgV}(\tau) = f_{1|\overline{g}}(-\overline{\tau})$, donc $a_0(f_{|VgV}) = a_0(f_{1|\overline{g}})$. On déduit ainsi du lemme 4.7 qu'il existe $(f, f') \in \mathcal{M}_1(\Gamma) \times \mathcal{M}_1(V\Gamma V)$ tels que pour tout $\Gamma g \in \Gamma \setminus SL(2,\mathbb{Z})$, on ait

$$a_0(f_{|g}) - a_0(f'_{|VgV}) = a_{\Gamma g} - a'_{\Gamma g}.$$

On considère alors la fonction $\theta = \widehat{\psi^+} - r^+_{f,f'}$. La fonction θ vérifie alors les conditions aux limites

$$\theta(x,\Gamma g) = b_{\Gamma g} + O(\frac{1}{x}) \ \ (x \to +\infty) \qquad \text{et} \qquad \theta(x,\Gamma g) = -\frac{b_{\Gamma g S}}{x} + O(1) \ \ (x \to 0),$$

avec $b_{\Gamma g} = i\pi(a_{\Gamma g} - a_0(f_{|g})) = i\pi(a'_{\Gamma g} - a_0(f'_{|VgV}))$. L'équation fonctionnelle vérifiée par θ

$$\theta(x,\Gamma g) - \theta(x+1,\Gamma g T^{-1}) = \frac{1}{x+1}\theta\left(1 - \frac{1}{x+1}, \Gamma g T'^{-1}\right)$$

montre que $b_{\Gamma g} = b_{\Gamma g T}$ (en faisant tendre x vers $+\infty$), et l'équation $\theta(x,-\Gamma g) = -\theta(x,\Gamma g)$ montre que $b_{\Gamma g} = -b_{-\Gamma g}$.
On va montrer le résultat suivant

Proposition 2.8. *La fonction θ est un élément de $\mathcal{L}_\Gamma$.*

Démonstration : Pour montrer la proposition, il est nécessaire et suffisant de montrer que $b_{\Gamma g} = 0$ pour tout $\Gamma g \in \Gamma\backslash SL(2,\mathbb{Z})$.
On applique une démarche analogue à celle de la section 3.3.1.

Lemme 2.9. *La fonction θ se prolonge holomorphiquement en une fonction Θ^+ définie sur $\mathbb{C}\backslash]-\infty,0] \times \Gamma\backslash SL(2,\mathbb{Z})$, et y vérifie les équations fonctionnelles*

$$\Theta^+ - T^{-1}.\Theta^+ - T'^{-1}.\Theta^+ = 0 \qquad \textit{et} \qquad (-I).\Theta^+ = \Theta^+. \tag{2.4}$$

Démonstration : La démonstration est analogue à celle de la proposition 3.6 : grâce à l'équation fonctionnelle et aux conditions aux limites vérifiées par θ, on en déduit les équations, pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$\theta(x,\Gamma g) - b_{\Gamma g} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x+n}\theta(1 - \frac{1}{x+n}, \Gamma g T^{1-n} T'^{-1}),$$

et

$$\frac{1}{x}\theta(\frac{1}{x},\Gamma g) + b_{\Gamma g S} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{x+n}\theta(1 + \frac{1}{x+n}, \Gamma g T'^{-n} T^{-1}).$$

Cela permet de prolonger $\theta(\cdot,\Gamma g)$ sur un ouvert W_δ, et en reprenant la démonstration de la proposition 3.6, on prolonge $\theta(\cdot,\Gamma g)$ sur $\mathbb{C}\backslash]-\infty,0]$, puisque le procédé utilisé n'utilise que les équations fonctionnelles vérifiées par θ. $\diamondsuit\ \diamondsuit$

On introduit la fonction Θ^- sur $\mathbb{C} \setminus [0,+\infty[$, définie par

$$\Theta^-(z,\Gamma g) = -S.\Theta^+(z,\Gamma g) = \frac{1}{z}\Theta\left(-\frac{1}{z}, \Gamma g S\right).$$

D'après la démonstration du lemme 3.9, qui n'utilise que des propriétés matricielles, on montre que la fonction Θ^- vérifie sur $\mathbb{C} \setminus [0,+\infty[$ l'équation fonctionnelle

$$(I - T - T').\Theta^- = 0.$$

On introduit la fonction h sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \times \Gamma\backslash SL(2,\mathbb{Z})$, définie par

$$h = \Theta^+ - \Theta^-.$$

Cette fonction est invariante par l'action de $SL(2,\mathbb{Z})$ (on utilise pour le montrer une démonstration identique à celle du lemme 3.10).
Ainsi, la fonction F définie par $F(z) = h(z,\Gamma)$ définie sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ est modulaire de poids 1 pour Γ.
On utilise la démonstration du lemme 3.11 pour montrer que

$$\lim_{|t|\mapsto+\infty} \Theta^+(it,\Gamma g) - b_{\Gamma g} = 0$$

et

$$\lim_{|t|\mapsto+\infty} \frac{i}{t}\Theta^+\left(\frac{i}{t},\Gamma g\right) + b_{\Gamma gS} = 0.$$

Comme $F_{|g}(it) = \Theta^+(it,\Gamma g) + \frac{i}{t}\Theta^+(\frac{i}{t},\Gamma g)$, on en déduit que

$$\lim_{|t|\mapsto+\infty} F_{|g}(it) = b_{\Gamma g} - b_{\Gamma gS}.$$

Ainsi, la forme modulaire F est un élément de $\mathcal{M}_1^{\pm}(\Gamma)$, puisque la condition précédente montre que $a_0(f_{1|g}) = a_0(f'_{1|g})$ pour tout $\Gamma g \in \Gamma\backslash SL(2,\mathbb{Z})$, où f_1 (resp. f'_1) $\in \mathcal{M}_1(\Gamma)$ (resp. $\mathcal{M}_1^-(\Gamma)$) est la restriction de F à $\mathcal{H}$ (resp. à $\mathcal{H}^-$).
D'après le lemme 4.7, on en déduit que $F \in \mathcal{S}_1^{\pm}(\Gamma)$, et donc que pour tout $\Gamma g \in \Gamma\backslash SL(2,\mathbb{Z})$ on a $b_{\Gamma g} - b_{\Gamma gS} = 0$. Or on a $b_{\Gamma gS^2} = -b_{\Gamma g}$, ce qui montre que

$$b_{\Gamma g} = 0 \quad \text{pour tout } \Gamma g \in \Gamma\backslash SL(2,\mathbb{Z}),$$

et donc que θ est un élément de $\mathcal{L}_\Gamma$. $\diamondsuit\ \diamondsuit$

On a ainsi montré que l'application r est surjective de $\mathcal{M}_1(\Gamma)\times\mathcal{M}_1(V\Gamma V)$ dans $\widehat{\mathcal{L}_\Gamma^+}$. Elle est également injective : si $r_{f,f'} = 0$, les conditions aux limites montrent que f et f' sont paraboliques, et donc d'après l'isomorphisme du théorème 0.3 que $f = f' = 0$. $\diamondsuit$

Enfin, on montre que la formule donnant le produit scalaire de Petersson de deux formes paraboliques en fonction de leurs périodes, donnée par le théorème 0.6, se prolonge au produit scalaire de Petersson d'une forme parabolique et d'une forme modulaire.

Proposition 2.10. *Pour tous* $(f_1,f_2) \in \mathcal{S}_1(\Gamma)\times\mathcal{M}_1(\Gamma)$, *on a la formule*

$$\langle f_1,f_2\rangle = \frac{i\pi}{3\nu(\Gamma)}\sum_{g\in\mathcal{R}(\Gamma)}\int_{\mathbb{R}}\left(U.\psi_{f_1}(x,\Gamma g)\overline{r_{f_2}(x,\Gamma g)} - \psi_{f_1}(x,\Gamma g)\overline{U.r_{f_2}(x,\Gamma g)}\right)dx,$$

où $\mathcal{R}(\Gamma)$ *désigne un système de représentants de* $\Gamma\backslash SL(2,\mathbb{Z})$.

Démonstration : On a d'après le lemme 4.2 la formule

$$\langle f_1,f_2\rangle = \frac{1}{4i\pi\nu(\Gamma)}\sum_{g\in\mathcal{R}(\Gamma)}\int_{\mathbb{R}}\int_0^{i\infty}\frac{f_{1|g}(u)}{x-u}du\int_\rho^{-\overline{\rho}}\frac{\overline{f_{2|g}(v)}}{x-\overline{v}}\overline{dv}dx. \tag{2.5}$$

Posons $F_\alpha(x,\Gamma g) = \displaystyle\int_\alpha^{i\infty}\frac{f_{2|g}(v)-a_0(f_{2|g})}{x-v}dv + a_0(f_{2|g})\ln(x-\alpha)$, et on définit, pour $\gamma \in SL(2,\mathbb{Z})$,

$$\gamma.F_\alpha(x,\Gamma g) = j(\gamma^{-1},x)^{-1}F_\alpha(\gamma^{-1}x,\Gamma g\gamma).$$

On a alors

$$\gamma.F_\alpha(x,\Gamma g) = \int_{\gamma\alpha}^{\gamma i\infty} \frac{f_{2|g}(\tau) - a_0(f_{2|g\gamma})/j(\gamma^{-1},\tau)}{x-\tau} d\tau + j(\gamma^{-1},x)^{-1} a_0(f_{2|g\gamma}) \ln(\gamma^{-1}x - \alpha).$$

Ainsi, on a $(I-S).F_i(x,\Gamma g) = r_{f_2}(x,\Gamma g)$, et de la même façon, comme $U = ST^{-1}$, $a_0(f_{2|gU}) = a_0(f_{2|gS})$ et $U(-\overline{\rho}) = -\overline{\rho}$, on a $(I-U).F_{-\overline{\rho}} = r_{f_2}(x,\Gamma g)$.
On a également la formule :

$$F_\rho(x,\Gamma g) - F_{-\overline{\rho}}(x,\Gamma g) = \int_\rho^{-\overline{\rho}} \frac{f_{2|g}(v)}{x-v} dv.$$

Posons (sous réserve de convergence)

$$\left(\Psi_1 \middle| \Psi_2\right) = \sum_{g\in\mathcal{R}(\Gamma)} \int_{\mathbb{R}} \Psi_1(x,\Gamma g)\overline{\Psi_2(x,\Gamma g)} dx.$$

On a, pour tout $h \in SL(2,\mathbb{Z})$, la propriété

$$\left(h.\Psi_1 \middle| h.\Psi_2\right) = \left(\Psi_1 \middle| \Psi_2\right).$$

D'après l'équation (4.5),

$$\langle f_1, f_2\rangle = \frac{1}{2\nu(\Gamma)} \left(\psi_{f_1} \middle| F_\rho - F_{-\overline{\rho}}\right).$$

Comme $T^{-1}.F_{-\overline{\rho}}(x,\Gamma g) = F_{-\overline{\rho}}(x+1,\Gamma g T^{-1}) = F_\rho(x,\Gamma g)$, on en déduit que

$$\langle f_1, f_2\rangle = \frac{1}{2\nu(\Gamma)} \left[\left(\psi_{f_1} \middle| T^{-1}.F_{-\overline{\rho}}\right) - \left(\psi_{f_1} \middle| F_{-\overline{\rho}}\right)\right] = \frac{1}{2\nu(\Gamma)} \left((T-I).\psi_{f_1} \middle| F_{-\overline{\rho}}\right).$$

D'après le lemme 4.4, on a

$$(T-I).\psi_{f_1} = \frac{1}{3}[(I-U^2)(I-U)(T-I)].\psi_{f_1},$$

ce qui montre la formule

$$\langle f_1, f_2\rangle = \frac{i\pi}{3\nu(\Gamma)} \left[\left(U.\psi_{f_1} \middle| r_{f_2}\right) - \left(\psi_{f_1} \middle| U.r_{f_2}\right)\right]$$

puisque les fonctions ψ_{f_1} et r_{f_2} sont annulées par les relations de Manin. $\diamondsuit$

2.3 Lien avec la cohomologie de $SL(2,\mathbb{Z})$

Soit Γ un sous-groupe d'indice fini de $SL(2,\mathbb{Z})$. Fixons $\mathcal{R}(\Gamma)$ un ensemble de représentants de $\Gamma\backslash SL(2,\mathbb{Z})$. On considère l'espace M_Γ défini dans l'introduction.

Remarque. — On a l'inclusion $\mathcal{L}_\Gamma^{\mathbb{R}} \subset M_\Gamma$: en effet, il suffit de vérifier que la condition aux limites est satisfaite par les fonctions de $\mathcal{L}_\Gamma^{\mathbb{R}}$: d'après le théorème 0.3, tout élément ψ de $\mathcal{L}_\Gamma$ est en fait égal à $\psi_{f,f'}^+$ avec $(f,f') \in \mathcal{S}_1(\Gamma)\times\mathcal{S}_1(V\Gamma V)$. La fonction $x \mapsto \psi_{f,f'}(x,\Gamma g)$

est définie sur $\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$, est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $\psi_{f,f'}$ vérifie l'équation $(I+S).\psi_{f,f'}=0$. Cela montre en particulier l'égalité sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$x\psi_{f,f'}(x,\Gamma g)=\psi_{f,f'}(-\frac{1}{x},\Gamma gS)$$

et donc, la fonction ψ étant égale à $\psi_{f,f'}$ sur $\mathbb{P}_1(\mathbb{R})\times\Gamma\backslash SL(2,\mathbb{Z})$, on a :

$$\lim_{x\to\infty} x\psi(x,\Gamma g)=\psi(0,\Gamma gS).$$

Ainsi toute fonction de $\mathcal{L}_\Gamma^{\mathbb{R}}$ vérifie la condition aux limites demandée dans la définition de M_Γ.

Lemme 2.11. *L'application $h\mapsto(\psi\mapsto h.\psi)$ munit l'espace vectoriel M_Γ d'une structure de $SL(2,\mathbb{Z})$-module.*

Démonstration : Pour montrer le lemme, il suffit de vérifier que M_Γ est stable par $SL(2,\mathbb{Z})$. Soient $\psi\in M_\Gamma$ et $h\in SL(2,\mathbb{Z})$.

- La condition aux limites vérifiée par ψ montre la continuité de la fonction $x\mapsto h.\psi(x,\Gamma g)$ au point $h\infty$, et donc sur $\mathbb{R}$;
- la condition d'analyticité locale est vérifiée en posant $F_{h.\psi}=\big\{\{h\alpha\}_{\alpha\in F_\psi}\cup h\infty\big\}$;
- posons $h=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$.
  - si $c\neq 0$, on a $x(h.\psi)(x,\Gamma g)=\dfrac{x}{-cx+a}\psi\left(\dfrac{dx-b}{-cx+a},\Gamma gh\right)$, et donc on a

$$\lim_{x\to\pm\infty} x(h.\psi)(x,\Gamma g)=-\frac{1}{c}\psi(-\frac{d}{c},\Gamma gh);$$

  - si $c=0$, on a $h=\pm\begin{pmatrix} 1 & k\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ pour un certain $k\in\mathbb{Z}$, et donc

$$\begin{aligned} x(h.\psi)(x,\Gamma g)=\pm x\psi(x+k,\Gamma gh)=\pm[(x+k)\psi(x+k,\Gamma gh)\\ -k\psi(x+k,\Gamma gh)]\longrightarrow_{x\to\pm\infty} a_{\Gamma g}\end{aligned}$$

  car $\lim_{y\to\pm\infty}\psi(y,\Gamma gh)=0$.

  Cela montre que la condition aux limites est vérifiée pour $h.\psi$, et finalement que $h.\psi$ appartient à M_Γ. $\diamondsuit$

Remarque. — La matrice $-I$ agissant trivialement sur M_Γ, cet espace est en fait muni d'une structure de $PSL(2,\mathbb{Z})$-module.

On rappelle que si G est un groupe et V un $\mathbb{C}[G]$-module à gauche,

- Les *1-cocycles* de G à valeurs dans V sont les applications ϕ de G dans V vérifiant $\phi(gg')=g.\phi(g')+\phi(g)$. L'ensemble des 1-cocycles de G à valeurs dans V forme un groupe noté $Z^1(G,V)$;
- les *1-cobords* de G à valeurs dans V sont les applications ϕ de G dans V vérifiant : il existe $m\in V$ tel que pour tout $g\in G$, $\phi(g)=m-g.m$. L'ensemble des 1-cobords de G à valeurs dans V forme un sous-groupe de $Z^1(G,V)$, noté $B^1(G,V)$;
- le *premier groupe de cohomologie* de G à valeurs dans V est défini par

$$H^1(G,V)=Z^1(G,V)/B^1(G,V)\,;$$

– si V est un $\mathbb{C}[SL(2,\mathbb{Z})]$-module à gauche, sur lequel $-I$ agit comme l'identité, un 1-cocycle ϕ de $SL(2,\mathbb{Z})$ dans V est dit *parabolique* s'il vérifie

$$\text{pour tout } \gamma \in SL(2,\mathbb{Z})_\infty, \text{ il existe } v_\gamma \in V_k \text{ tel que } \phi(\gamma) = v_\gamma - \gamma.v_\gamma$$

(où $SL(2,\mathbb{Z})_\infty$ désigne l'ensemble des matrices laissant stable le point à l'infini, soit le sous-groupe de $SL(2,\mathbb{Z})$ engendré par la matrice T).

De façon équivalente, un 1-cocycle ϕ est parabolique s'il existe $v \in V$ vérifiant $\phi(T) = v - T.v$. On note $Z^1_{par}(SL(2,\mathbb{Z}),V)$ l'ensemble des 1-cocycles paraboliques de $SL(2,\mathbb{Z})$ dans V. C'est un sous-groupe de $Z^1(SL(2,\mathbb{Z}),V)$, qui contient $B^1(SL(2,\mathbb{Z}),V)$, on peut donc définir le *premier groupe de cohomologie parabolique* de G dans V par

$$H^1_{par}(G,V) = Z^1_{par}(G,V)/B^1(G,V).$$

On note $Z^1_{par}(SL(2,\mathbb{Z}),V,T)$ l'ensemble des 1-cocycles paraboliques ϕ vérifiant $\phi(T) = 0$, et $B^1_{par}(SL(2,\mathbb{Z}),V,T) = Z^1_{par}(SL(2,\mathbb{Z}),V,T) \cap B^1(SL(2,\mathbb{Z}),V)$. Le groupe $SL(2,\mathbb{Z})$ étant engendré par S et T, un élément $\phi \in Z^1_{par}(SL(2,\mathbb{Z}),V,T)$ est uniquement déterminé par $\phi(S)$.

On considère $r_c : \begin{array}{ccc} \mathcal{S}_1(\Gamma) \times \overline{\mathcal{S}_1(\Gamma)} & \longrightarrow & H^1_{par}(SL(2,\mathbb{Z}),M_\Gamma) \\ (f_1,f_2) & \longmapsto & [\varphi_{f_1,f_2}] \end{array}$, où $[\varphi_{f_1,f_2}]$ désigne la classe de cohomologie du cocycle parabolique φ_{f_1,f_2} défini par

$$\varphi_{f_1,f_2}(\sigma)(x,\Gamma g) = \frac{1}{2i\pi}\int_0^{\sigma 0} f_{1|g}(\tau)\frac{d\tau}{x-\tau} + \frac{1}{2i\pi}\int_0^{\sigma 0} f_{2|\overline{g}}(\tau)\frac{d\overline{\tau}}{x-\overline{\tau}},$$

l'intégration se faisant par exemple le long de la géodésique dans $\mathcal{H}$ reliant 0 à $\sigma 0$.

Remarque. — La classe de cohomologie du cocycle φ_{f_1,f_2} ne dépend pas du point-base dans $\mathbb{P}_1(\mathbb{Q})$ choisi : soit $q \in \mathbb{P}_1(\mathbb{Q})$, et soit

$$\varphi^q_{f_1,f_2}(\sigma)(x,\Gamma g) = \frac{1}{2i\pi}\int_q^{\sigma q} f_{1|g}(\tau)\frac{d\tau}{x-\tau} + \frac{1}{2i\pi}\int_q^{\sigma q} f_{2|\overline{g}}(\tau)\frac{d\overline{\tau}}{x-\overline{\tau}}.$$

On a alors

$$\left(\varphi_{f_1,f_2} - \varphi^q_{f_1,f_2}\right)(\sigma) = \frac{1}{2i\pi}(I-\sigma)\cdot\left[\int_0^q \left(f_{1|g}(\tau)\frac{d\tau}{x-\tau} + f_{2|\overline{g}}(\tau)\frac{d\overline{\tau}}{x-\overline{\tau}}\right)\right],$$

ce qui montre que $\varphi_{f_1,f_2} - \varphi^q_{f_1,f_2} \in B^1(SL(2,\mathbb{Z}),M_\Gamma)$.

On montre maintenant le théorème 0.8 :

Théorème 0.8. *L'application r_c est un isomorphisme d'espaces vectoriels complexes.*

Démonstration : Le schéma de la démonstration peut se résumer par le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}_1(\Gamma) \times \overline{\mathcal{S}_1(\Gamma)} & & \\ \text{thm } 0.3 \Big\downarrow \wr & & \\ \mathcal{L}_\Gamma & & H^1_{par}(SL(2,\mathbb{Z}),M_\Gamma) \\ \Big\downarrow \wr & & \text{lemme } 4.12 \Big\downarrow \wr \\ \mathcal{L}^{\mathbb{R}}_\Gamma & \xleftarrow[\phi(S)]{\sim} & Z^1_{par}(SL(2,\mathbb{Z}),M_\Gamma,T) \end{array}$$

Montrons d'abord que φ_{f_1,f_2} appartient à $Z^1_{par}(SL(2,\mathbb{Z}),M_\Gamma)$:

- les formes f_1 et f_2 étant paraboliques, elles décroissent exponentiellement au voisinage des pointes, les fonctions $x \mapsto \varphi_{f_1,f_2}(x, \Gamma g)$ sont donc continues sur $\mathbb{R}$, et elles sont analytiques sur $\mathbb{R} \setminus \{0, \sigma 0\}$. La condition aux limites est vérifiée, car on a

$$x\varphi_{f_1,f_2}(\sigma)(x, \Gamma g) \longrightarrow_{x \mapsto \pm\infty} \int_0^{\sigma 0} f_{1|g}(\tau)d\tau + \int_0^{\sigma 0} f_{2|\overline{g}}(\tau)d\overline{\tau},$$

  cette limite étant bien définie car les formes sont paraboliques. Enfin, pour $f \in \mathcal{S}_1(\Gamma)$, $f_{|-g}(\tau) = -f_{|g}(\tau)$, on a bien $\varphi_{f_1,f_2}(\sigma)(x, -\Gamma g) = -\varphi_{f_1,f_2}(\sigma)(x, \Gamma g)$, et donc $\varphi_{f_1,f_2} \in M_\Gamma$;
- grâce à la modularité de f, pour $h \in SL(2, \mathbb{Z})$, on a l'égalité

$$(h.\varphi_{f_1,f_2}(\sigma))(x, \Gamma g) = \frac{1}{2i\pi} \int_{h0}^{h\sigma 0} f_{1|g}(\tau) \frac{d\tau}{x - \tau} + \frac{1}{2i\pi} \int_{h0}^{h\sigma 0} f_{2|\overline{g}}(\tau) \frac{d\overline{\tau}}{x - \overline{\tau}}$$

  ce qui montre que pour tous $h, \sigma \in SL(2, \mathbb{Z})$, on a

$$\varphi_{f_1,f_2}(h\sigma) = \varphi_{f_1,f_2}(h) + h.\varphi_{f_1,f_2}(\sigma),$$

  ce qui montre que $\varphi_{f_1,f_2} \in Z^1(SL(2, \mathbb{Z}), M_\Gamma)$;
- de plus, pour $k \in \mathbb{Z}$, on a $\varphi_{f_1,f_2}(T^k) = (I - T^k).\varphi_{f_1,f_2}(S)$, car $\displaystyle\int_0^k = \int_0^{i\infty} - \int_{T^k(0)}^{T^k(i\infty)}$, ce qui montre que le cocycle φ_{f_1,f_2} est parabolique.

Soit ϕ_{f_1,f_2} le cocycle parabolique défini par $\phi_{f_1,f_2}(\sigma) = \varphi_{f_1,f_2}(\sigma) - (I - \sigma).\varphi_{f_1,f_2}(S)$. Les deux cocycles ϕ_{f_1,f_2} et φ_{f_1,f_2} diffèrent par un cobord, ils définissent donc la même classe de cohomologie parabolique. D'après les remarques précédentes, on a $\phi_{f_1,f_2}(T) = 0$, et

$$\phi_{f_1,f_2}(S) = S.\varphi_{f_1,f_2}(S) = -\psi_{f_1,f_2} = \psi_{-f_1,-f_2}$$

où ψ_{f_1,f_2} est la période associée au couple (f_1, f_2).

Lemme 2.12. *L'application naturelle $Z^1_{par}(SL(2, \mathbb{Z}), M_\Gamma, T) \to H^1_{par}(SL(2, \mathbb{Z}), M_\Gamma)$ est un isomorphisme.*

Démonstration : Elle est surjective : soit $\widetilde{\eta} \in H^1_{par}(SL(2, \mathbb{Z}), M_\Gamma)$, et η un cocycle parabolique appartenant à la classe de cohomologie $\widetilde{\eta}$. Par définition, il existe v_T tel que $\eta(T) = (I - T).v_T$, donc le cocycle μ défini par $\mu(\sigma) = \eta(\sigma) - (I - \sigma).v_T$ appartient à $Z^1_{par}(SL(2, \mathbb{Z}), M_\Gamma, T)$, et appartient à la classe $\widetilde{\eta}$ puisqu'il diffère de η par un cobord.

Montrons l'injectivité : soit ϕ un cobord parabolique vérifiant $\phi(T) = 0$. Il existe $v \in M_\Gamma$ tel que pour tout $\sigma \in SL(2, \mathbb{Z})$, $\phi(\sigma) = (I - \sigma).v$, avec $v = T.v$. Cela entraîne que pour tout $(x, \Gamma g)$, $v(x, \Gamma g) = v(x - 1, \Gamma g T)$. Soit l_g la largeur de la pointe $\Gamma g \infty$. On a $\Gamma g T^{l_g} = \Gamma g$, donc la fonction $x \mapsto v(x, \Gamma g)$ est périodique de période l_g sur $\mathbb{R}$, continue, et de limite nulle en l'infini. C'est donc la fonction nulle, donc $v = 0$ et donc $\phi = 0$. $\diamondsuit$

Soit $\phi \in Z^1_{par}(SL(2, \mathbb{Z}), M_\Gamma, T)$. L'élément $\phi(S)$ vérifie les équations

$$(I + S).\phi(S) = (I - T - T').\phi(S) = 0.$$

En effet,

- la matrice $-I = S^2$ agissant trivialement sur M_Γ, on a $\phi(S) + S.\phi(S) = 0$, ce qui montre la première égalité ;

- on a $\phi(T)=0$, donc $\phi(T^{-1})=\phi(I)-T^{-1}.\phi(T)=0$. On en déduit que $\phi(ST^{-1})=\phi(S)$.
  Or, dans $SL(2,\mathbb{Z})$, on a $ST^{-1}=T'S$, donc $\phi(S)=\phi(T'S)=\phi(T')+T'.\phi(S)$. On en déduit que $\phi(S)-T.\phi(S)-T'.\phi(S)=\phi(T')-T.\phi(S)$. Or $T'=TST$, donc $\phi(T')=T.\phi(ST)=T.\phi(S)$, ce qui montre la deuxième égalité.

Comme montré dans l'appendice (voir la proposition 6.3), il est équivalent de dire que

$$\text{pour tout } W=\sum_M u_M[M]\in\mathbb{Z}[SL(2,\mathbb{Z})] \text{ vérifiant } \sum_M u_M([M\infty]-[M0])=0$$

dans $\mathbb{Z}[\mathbb{P}_1(\mathbb{Q})]$, on a $\sum_M u_M M.\phi(S)=0$. En particulier, $(I-T^{-1}-T'^{-1}).\phi(S)=0$.

Lemme 2.13. *Soit $v\in M_\Gamma$ tel que $(I+S).v=(I-T-T').v=0$. Alors v est un élément de $\mathcal{L}_\Gamma^{\mathbb{R}}$.*

Démonstration : Pour montrer le lemme, il est nécessaire et suffisant d'établir que la restriction de v à $[0,+\infty[\times\Gamma\backslash SL(2,\mathbb{Z})$ est un élément de $\mathcal{L}_\Gamma$. Il suffit pour cela de montrer que pour tout $\Gamma g\in\Gamma\backslash SL(2,\mathbb{Z})$, $x\mapsto v(x,\Gamma g)$ est analytique sur $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$. Par l'absurde, supposons que $x\mapsto v(x,\Gamma g)$ ne soit pas analytique en un rationnel q non nul. D'après l'égalité $(I+S).v=0$, la fonction $x\mapsto v(x,\Gamma g)$ n'est pas non plus analytique en $-\dfrac{1}{q}$, donc on peut supposer $q>0$.
L'égalité $(I-T^{-1}-T'^{-1}).v=0$ montre alors que pour tout point x où la fonction $x\mapsto v(x,\Gamma g)$ n'est pas analytique, elle ne l'est pas non en l'un des deux points Tx et $T'x$. Or, T et T' engendrent librement le monoïde $SL(2,\mathbb{Z})^+$. Comme l'ensemble des points en lesquels $x\mapsto v(x,\Gamma g)$ n'est pas analytique est fini, on en déduit que q doit être un point fixe d'une matrice h de $SL(2,\mathbb{Z})^+$. Or les seules matrices de $SL(2,\mathbb{Z})^+$ admettant des points fixes dans $\mathbb{P}_1(\mathbb{Q})$ sont les matrices de trace 2, donc du type $\begin{pmatrix}1 & *\\ * & 1\end{pmatrix}$ (différentes de I). Le déterminant étant 1, les seuls points fixes possibles sont ∞ et 0, ce qui contredit l'hypothèse. $\diamondsuit$

On en déduit que l'application $\phi\mapsto\phi(S)$ de $Z^1_{par}(SL(2,\mathbb{Z}),M_\Gamma,T)$ dans $\mathcal{L}_\Gamma^{\mathbb{R}}$ est un isomorphisme : en effet, $\phi(S)\in\mathcal{L}_\Gamma^{\mathbb{R}}$ d'après les deux lemmes 4.12 et 4.13, l'application est injective car comme S et T engendrent $SL(2,\mathbb{Z})$, la donnée de $\phi(S)$ détermine $\phi\in Z^1_{par}(SL(2,\mathbb{Z}),M_\Gamma,T)$, et elle est surjective car pour $\psi\in\mathcal{L}_\Gamma^{\mathbb{R}}$, on définit un cocycle $\phi\in Z^1_{par}(SL(2,\mathbb{Z}),M_\Gamma,T)$ par $\phi(S)=\psi$ et $\phi(T)=0$.
D'après l'isomorphisme entre $\mathcal{L}_\Gamma$ et $\mathcal{S}_1^{\pm}(\Gamma)$, et d'après le lemme 4.12, on en déduit que l'application

$$(f_1,f_2)\longmapsto[\varphi_{f_1,f_2}]$$

est un isomorphisme de $\mathcal{S}_1(\Gamma)\times\overline{\mathcal{S}_1(\Gamma)}$ dans $H^1_{par}(SL(2,\mathbb{Z}),M_\Gamma)$, ce qui démontre le théorème 0.8. $\diamondsuit$

Chapitre 3

Examen des groupes arithmétiques

3.1 Action des opérateurs de Hecke

On suppose ici que $\Gamma = \Gamma_1(N)$, pour N un entier ≥ 1.
Soit n un entier ≥ 1. On pose

$$M_{n,N} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2,\mathbb{Z})_n, N|c \text{ et } N|(a-1) \right\}.$$

On a $\Gamma_1(N)M_{n,N} = M_{n,N}\Gamma_1(N) = M_{n,N}$. L'ensemble $\Gamma_1(N)\backslash M_{n,N}$ est fini, et le n-ième opérateur de Hecke T_n sur $\mathcal{S}_1(\Gamma_1(N))$ est défini par

$$T_n f = \sum_{\delta \in \Gamma_1(N)\backslash M_{n,N}} f_{|\delta}.$$

Pour $\delta = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2,\mathbb{Z})^+$, on définit $\widetilde{\delta} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = (\det \delta)\delta^{-1}$. On nommera $\widetilde{M_{n,N}}$ l'ensemble des $\widetilde{\delta}$ pour $\delta \in M_{n,N}$.
Soit E_N l'ensemble des éléments de $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2$ d'ordre N, c'est-à-dire l'ensemble des éléments $(u,v) \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2$ vérifiant $(u,v,N) = 1$. L'application π :

$$\begin{array}{ccc} M(2,\mathbb{Z}) & \longrightarrow & (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2 \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & (c,d) \end{array}$$

définit une bijection π_N entre $\Gamma_1(N) \setminus SL(2,\mathbb{Z})$ et E_N. Par la suite, on identifiera un élément $\Gamma_1(N)g$ de $\Gamma_1(N) \setminus SL(2,\mathbb{Z})$ à son image $\pi_N(\Gamma_1(N)g) \in E_N$.
L'ensemble $\pi^{-1}(E_N) \cap M(2,\mathbb{Z})_n$ (c'est-à-dire l'ensemble des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $M(2,\mathbb{Z})^+$ de déterminant n vérifiant $(c,d,N) = 1$) est égal à $\widetilde{M_{n,N}}SL(2,\mathbb{Z})$.

On va utiliser le lemme suivant :

Lemme 3.1. *Soit ϕ_n une application de $\widetilde{M_{n,N}}SL(2,\mathbb{Z})$ dans $SL(2,\mathbb{Z})$, telle que pour toute matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \widetilde{M_{n,N}}SL(2,\mathbb{Z})$,*

$$\pi_N\left(\phi_n\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)\right) = (c,d) \in E_N.$$

On a les propriétés suivantes :

1. *pour $\gamma \in \widetilde{M_{n,N}}SL(2,\mathbb{Z})$ et pour $g \in SL(2,\mathbb{Z})$, on a $\Gamma_1(N)\phi_n(\gamma g) = \Gamma_1(N)\phi_n(\gamma)g$;*

2. *pour tout* $\gamma \in \widetilde{M_{n,N}}SL(2,\mathbb{Z})$, $\phi_n(\gamma)\widetilde{\gamma} \in M_{n,N}$ *;*
3. *l'application* $\eta_{n,N}$ *:*

$$\begin{array}{rcl} \Gamma_1(N)\backslash M_{n,N} & \longrightarrow & \widetilde{M_{n,N}}SL(2,\mathbb{Z})/SL(2,\mathbb{Z}) \\ \Gamma_1(N)\delta & \longmapsto & \widetilde{\delta}SL(2,\mathbb{Z}) \end{array}$$

est bijective.

Démonstration :

1. Pour $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \widetilde{M_{n,N}}$ et $g \in SL(2,\mathbb{Z})$, on a

$$\pi_N\left(\phi_n\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)g\right)\right) = (c,d)g = \pi_N\left(\phi_n\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\right)\right)g$$

ce qui montre que $\Gamma_1(N)\phi_n(\gamma g) = \Gamma_1(N)\phi_n(\gamma)g$;

2. un élément $h = \left(\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right) \in \widetilde{M_{n,N}}SL(2,\mathbb{Z})$ appartient à $\widetilde{M_{n,N}}$ si et seulement si $N|c$ et $a \equiv 1[N]$ par définition de $M_{n,N}$, donc si et seulement si $(0,1)g = (0,1)$ dans E_N. Pour tout $g \in \widetilde{M_{n,N}}SL(2,\mathbb{Z})$, on a dans E_N $(0,1)g = (0,1)\phi_n(g)$, donc $g\phi_n(g)^{-1} \in \widetilde{M_{n,N}}$, donc $\phi_n(g)\widetilde{g} \in M_{n,N}$;
3. l'application $\eta_{n,N}$ est clairement surjective, montrons l'injectivité : soit $\delta = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ et $\delta' = \left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right)$ deux éléments de $M_{n,N}$ vérifiant $\widetilde{\delta}SL(2,\mathbb{Z}) = \widetilde{\delta'}SL(2,\mathbb{Z})$, c'est-à-dire tels que

$$\delta'\delta^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} \frac{da'-b'c}{n} & \frac{-ba'+ab'}{n} \\ \frac{dc'-d'c}{n} & \frac{-bc'+ad'}{n} \end{smallmatrix}\right) \in SL(2,\mathbb{Z}).$$

Or on a par définition de $M_{n,N}$, $d \equiv d' \equiv n[N]$, donc N divise $\dfrac{(d-d')c + d(c'-c)}{n} = \dfrac{dc'-d'c}{n}$. De plus, N divise $\dfrac{a'(d-d') - b'(c-c')}{n} = \dfrac{a'd-b'c}{n} - 1$, ce qui montre que la matrice $\delta'\delta^{-1}$ est un élément de $\Gamma_1(N)$. $\diamondsuit$

Soit $f \in \mathcal{S}_1(\Gamma_1(N))$. On peut définir, en utilisant le lemme 5.1, la fonction $M.\psi_f$ pour $M \in M(2,\mathbb{Z})_n$ par :

$$\begin{cases} M.\psi_f(z,\Gamma g) = \dfrac{(\det M)^{1/2}}{j(\widetilde{M},z)}\psi_f(\widetilde{M}z, \Gamma_1(N)\phi_n(gM)) & \text{si } gM \in \widetilde{M_{n,N}}SL(2,\mathbb{Z})\,; \\ M.\psi_f(z,\Gamma g) = 0 & \text{si } gM \notin \widetilde{M_{n,N}}SL(2,\mathbb{Z}). \end{cases}$$

Cette expression traduit sur ψ_f la définition de $M.\widetilde{\psi_f}$, donnée dans l'introduction.

Montrons maintenant le théorème 0.9.

Théorème 0.9. *Soit* $\sum_M u_M M$ *un élément de* $\mathbb{C}[M(2,\mathbb{Z})_n]$ *vérifiant la condition* (C_n)*. On a la formule*

$$T_n\widetilde{\psi_f} = \sum_M u_M M.\widetilde{\psi_f}.$$

Démonstration : Partons de l'expression de droite, qui est égale à

$$\mathcal{A}(z,\Gamma_1(N)g) = \sum_M u_M M.\psi_f(z,\Gamma_1(N)g)$$

pour g vérifiant $\pi_N(g) = (u, v)$, la somme étant restreinte aux matrices M telles que $gM \in \widetilde{M_{n,N}}SL(2,\mathbb{Z})$.
Soit $\mathcal{R}$ un ensemble de représentants de $g^{-1}\widetilde{M_{n,N}}SL(2,\mathbb{Z})/SL(2,\mathbb{Z})$. Soit $r \in \mathcal{R}$, et $M \in rSL(2,\mathbb{Z})$. On a

$$(2i\pi)M.\psi_f(z,\Gamma_1(N)g) = \frac{\sqrt{n}}{j(\widetilde{M},z)}\int_0^{i\infty}\frac{f_{|\phi_n(gM)}(\tau)}{\widetilde{M}z-\tau}d\tau.$$

Puisque $M \in M(2,\mathbb{Z})_n$, $j(\widetilde{M},z) = nj(M^{-1},z)$ et $j(M,M^{-1}z)j(M^{-1},z) = 1$, on a

$$(2i\pi)M.\psi_f(z,\Gamma_1(N)g) = \frac{1}{\sqrt{n}}j(M,M^{-1}z)\int_0^{i\infty}\frac{f_{|\phi_n(grr^{-1}M)}(\tau)}{\widetilde{M}z-\tau}d\tau.$$

D'après le lemme 5.1, on a $\phi_n(grr^{-1}M) = \phi_n(gr)r^{-1}M = \phi_n(gr)\dfrac{\widetilde{r}M}{n}\cdot$ De plus, la matrice $\dfrac{1}{n}I$ agit trivialement, donc on obtient

$$\begin{aligned}(2i\pi)M.\psi_f(z,\Gamma_1(N)g) &= \frac{1}{\sqrt{n}}j(M,M^{-1}z)\int_0^{i\infty}\frac{f_{|\phi_n(gr)\widetilde{r}M}(\tau)}{\widetilde{M}z-\tau}d\tau\\ &= j(M,M^{-1}z)\int_0^{i\infty}\frac{j(M,\tau)^{-1}f_{|\phi_n(gr)\widetilde{r}}(M\tau)}{\widetilde{M}z-\tau}d\tau.\end{aligned}$$

Effectuons le changement de variable dans l'intégrale $u = M\tau$. On trouve :

$$(2i\pi)M.\psi_f(z,\Gamma_1(N)g) = \\ j(M,M^{-1}z)\int_{M0}^{M\infty}\frac{f_{|\phi_n(gr)\widetilde{r}}(u)}{M^{-1}z-M^{-1}u}j(M,M^{-1}u)^{-1}\frac{du}{nj(M^{-1},u)^2}.$$

Or $(z-u)j(M,M^{-1}z) = n(M^{-1}z-M^{-1}u)j(M^{-1},u)$. Donc on a

$$(2i\pi)M.\psi_f(z,\Gamma_1(N)g) = \int_{M0}^{M\infty}\frac{f_{|\phi_n(gr)\widetilde{r}}(u)}{z-u}du.$$

On en déduit :

$$(2i\pi)\mathcal{A}(z,\Gamma_1(N)g) = \sum_{r\in\mathcal{R}}\sum_{M\in rSL(2,\mathbb{Z})}u_M\int_{M0}^{M\infty}\frac{f_{|\phi_n(gr)\widetilde{r}}(\tau)}{z-\tau}d\tau.$$

Comme $\sum_M u_M[M]$ vérifie la condition (C_n), on a

$$(2i\pi)\mathcal{A}(z,\Gamma_1(N)g) = \sum_{r\in\mathcal{R}}\int_0^{i\infty}\frac{f_{|\phi_n(gr)\widetilde{r}}(\tau)}{z-\tau}d\tau.$$

Lemme 3.2. *Si $\{r\}_{r\in\mathcal{R}}$ est un système de représentants de $g^{-1}\widetilde{M_{n,N}}SL(2,\mathbb{Z})/SL(2,\mathbb{Z})$, alors l'ensemble $\{\phi_n(gr)\widetilde{r}\widetilde{g}\}_{r\in\mathcal{R}}$ est un ensemble de représentants de $\Gamma_1(N)\backslash M_{n,N}$.*

Démonstration : D'après la propriété 2 du lemme 5.1, $\phi_n(gr)\widetilde{r}\widetilde{g} \in M_{n,N}$, puisque $gr \in \widetilde{M_{n,N}}SL(2,\mathbb{Z})$.

Soit $r \neq r'$ dans $\mathcal{R}$, c'est-à-dire $grSL(2,\mathbb{Z}) \neq gr'SL(2,\mathbb{Z})$. Posons $\delta = \phi_n(gr)\widetilde{rg}$ et $\delta' = \phi_n(gr')\widetilde{r'}\widetilde{g}$. Comme $\widetilde{\phi_n(gr)} \in SL(2,\mathbb{Z})$, on a

$$\widetilde{\delta}SL(2,\mathbb{Z}) = grSL(2,\mathbb{Z}) \neq \widetilde{\delta'}SL(2,\mathbb{Z}) = gr'SL(2,\mathbb{Z}).$$

D'après la propriété 3 du lemme 5.1, on en déduit que $\Gamma_1(N)\delta \neq \Gamma_1(N)\delta'$, donc que l'ensemble $\{\phi_n(gr)\widetilde{rg}\}_{r\in\mathcal{R}}$ forme un ensemble d'éléments distincts, donc un ensemble de représentants, de $\Gamma_1(N)\backslash M_{n,N}$. $\diamondsuit\ \diamondsuit$

En utilisant ce lemme, on trouve que

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(z,\Gamma_1(N)g) &= \frac{1}{2i\pi}\sum_{r\in\mathcal{R}}\int_0^{i\infty}\frac{f_{|\phi_n(gr)\widetilde{rg}g}(\tau)}{z-\tau}d\tau \\
&= \frac{1}{2i\pi}\sum_{\delta\in\Gamma_1(N)\backslash M_{n,N}}\int_0^{i\infty}\frac{f_{|\delta g}(\tau)}{z-\tau}d\tau \\
&= \frac{1}{2i\pi}\int_0^{i\infty}\left(\sum_{\delta\in\Gamma_1(N)\backslash M_{n,N}} f_{|\delta}\right)_{|g}(\tau)\,\frac{d\tau}{z-\tau} \\
&= \psi_{T_nf}(z,\Gamma_1(N)g) = T_n\psi_f(z,\Gamma_1(N)g),
\end{aligned}$$

ce qui démontre le théorème. $\diamondsuit$

Remarques. —

- La somme $\mathcal{X}_n$ des matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} \in M(2,\mathbb{Z})_n$ vérifiant $a > b \geq 0$ et $d > c \geq 0$ satisfait à la condition (C_n) (voir proposition 20 p.87 de [Mer94]). On en déduit en particulier que pour tout $n \geq 0$ on a :
$$T_n\psi_f = \sum_{M\in\mathcal{X}_n} M.\psi_f.$$
- Il est probable que le théorème 0.9 se généralise aux périodes $\widehat{\psi_f}$ de formes modulaires $f \in \mathcal{M}_1(\Gamma)$.

On peut aussi étudier l'action des opérateurs de Hecke sur les deux fonctions Ψ_f^+ et Ψ_f^-, définies au chapitre 3.2 sur $\mathbb{C}\backslash]-\infty,0[\times\Gamma\backslash SL(2,\mathbb{Z})$ et $\mathbb{C}\backslash]0,+\infty[\times\Gamma\backslash SL(2,\mathbb{Z})$.
Pour cela, définissons les fonctions ε_1 (resp. ε_2) : $M(2,\mathbb{Z})^+ \to \{+,-\}$ définies par :

$$\begin{cases} \varepsilon_1(M) = + \ \text{(resp. } \varepsilon_2(M) = +) \text{ si } M \in K_2 \cup K_3 \ \text{(resp. si } M \in K_2 \cup K_4) \\ \varepsilon_1(M) = - \ \text{(resp. } \varepsilon_2(M) = -) \text{ si } M \in K_1 \cup K_4 \ \text{(resp. si } M \in K_1 \cup K_3) \end{cases}$$

où K_1, K_2, K_3 et K_4 sont les ensembles définis dans la démonstration de la proposition 3.2 page 45 :

$$K_1 = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} \in M(2,\mathbb{Z})^+ \,\middle|\, cd > 0\right\} \qquad K_2 = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} \in M(2,\mathbb{Z})^+ \,\middle|\, cd < 0\right\}$$

$$K_3 = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} \in M(2,\mathbb{Z})^+ \,\middle|\, c = 0\right\} \qquad K_4 = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} \in M(2,\mathbb{Z})^+ \,\middle|\, d = 0\right\}.$$

On a alors le théorème suivant :

Théorème 3.3. *Soit* $\sum_M u_M M \in \mathbb{C}[M(2,\mathbb{Z})_n]$ *vérifiant la condition* (C_n). *On a les formules*

$$T_n \widetilde{\Psi_f^+} = \sum_M u_M M.\widetilde{\Psi_f^{\varepsilon_1(M)}}$$

et

$$T_n \widetilde{\Psi_f^-} = \sum_M u_M M.\widetilde{\Psi_f^{\varepsilon_2(M)}}.$$

Démonstration : Pour la démonstration, on utilise le même raisonnement que dans la démonstration du théorème 0.9. L'introduction des fonctions ε_1 et ε_2 provient du fait que les intégrales $\int_0^{i\infty} \frac{f_{|g}(\tau)}{Mz-\tau} d\tau$ dépendent du chemin d'intégration si $Mz \in \mathcal{H}$. Ces intégrales peuvent prendre des valeurs différentes, selon la classe d'homotopie du chemin de 0 à $i\infty$ choisi.
Plus précisément, en reprenant les notations de la démonstration précédente, l'hypothèse

$$\sum_{M \in rSL(2,\mathbb{Z})} u_M([M\infty]-[M0]) - [\infty] + [0] = 0$$

nous montre que le cycle d'intégration dans $\mathcal{H}$

$$\Lambda = \sum_{\substack{M \in rSL(2,\mathbb{Z}) \\ M \in K_1 \cup K_4}} u_M \mathfrak{d}^+(M0, M\infty; z) + \sum_{\substack{M \in rSL(2,\mathbb{Z}) \\ M \in K_2 \cup K_3}} u_M \mathfrak{g}^+(M0, M\infty; z) - \mathfrak{g}^+(0, i\infty; z)$$

est fermé, et vérifie

$$\int_\Lambda \frac{f_{|\phi_n(gr)\widetilde{r}}(\tau)}{z-\tau} d\tau = 0$$

car la fonction intégrée est indépendante de M et que son seul pôle, z, est à l'extérieur de ce cycle fermé. De même, le cycle d'intégration

$$\Lambda = \sum_{\substack{M \in rSL(2,\mathbb{Z}) \\ M \in K_1 \cup K_3}} u_M \mathfrak{d}^+(M0, M\infty; z) + \sum_{\substack{M \in rSL(2,\mathbb{Z}) \\ M \in K_2 \cup K_4}} u_M \mathfrak{g}^+(M0, M\infty; z) - \mathfrak{d}^+(0, i\infty; z)$$

est fermé et vérifie

$$\int_\Lambda \frac{f_{|\phi_n(gr)\widetilde{r}}(\tau)}{z-\tau} d\tau = 0.$$

$\diamondsuit$

3.2 Fonctions L

On suppose dans ce chapitre qu'on a $\Gamma = \Gamma_1(N)$. On pose, pour $f \in \mathcal{S}_1(\Gamma_1(N))$ et $\Gamma_1(N)g \in \Gamma_1(N)\backslash SL(2,\mathbb{Z})$

$$\Lambda_N(f_{|g}, s) = N^{s/2} \int_0^{+\infty} f_{|g}(it) t^{s-1} dt.$$

On a

$$\Lambda_N(f,s) = N^{s/2}(2\pi)^{-s}\Gamma(s)L(f,s),$$

où $L(f,s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ si $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{2i\pi nz}$. La fonction $\Lambda_N f$ se prolonge holomorphiquement sur le plan complexe.

3.2.1 Démonstration de la proposition 0.10

On va montrer, grâce au théorème 0.3, le résultat suivant :

Proposition 0.10. *Soit $f \in \mathcal{S}_1(\Gamma_1(N))$. La forme parabolique f est déterminée par les $\Lambda(f_{|g}, n)$ pour tout $\Gamma_1(N)g \in \Gamma_1(N)\backslash SL(2,\mathbb{Z})$ et tout n entier négatif ou nul.*

Démonstration : : Supposons que $\Lambda(f_{|g}, -n) = 0$ pour tout $n \geq 0$ et pour tout $\Gamma_1(N)g \in \Gamma_1(N)\backslash SL(2,\mathbb{Z})$, et montrons que $f = 0$. Pour cela, il suffit d'après le théorème 0.3 de montrer que $\psi_f = 0$.
On sait que pour tout $l > 0$ on a

$$\lim_{x\to 0} \frac{f_{|g}(\tau)}{(x-\tau)^l} = \lim_{x\to i\infty} \frac{f_{|g}(\tau)}{(x-\tau)^l} = 0$$

puisque la forme parabolique $f_{|g}$ est exponentiellement décroissante aux pointes. Pour $\Gamma_1(N)g \in \Gamma_1(N)\backslash SL(2,\mathbb{Z})$, la fonction $x \longmapsto \psi_f(x, \Gamma_1(N)g)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. En la dérivant, on obtient :

$$(\psi_f)^{(k)}(x, \Gamma_1(N)g) = \frac{(-1)^k k!}{2i\pi} \int_0^{i\infty} \frac{f_{|g}(\tau)}{(x-\tau)^{k+1}} d\tau.$$

En particulier, on en déduit que

$$(\psi_f)^{(k)}(0, \Gamma_1(N)g) = -\frac{k!}{2i\pi} \int_0^{i\infty} f_{|g}(\tau)\tau^{-k-1} d\tau,$$

c'est-à-dire

$$(\psi_f)^{(k)}(0, \Gamma_1(N)g) = -\frac{k!}{2i\pi} \left(\frac{i}{\sqrt{N}}\right)^{-k} \Lambda(f_{|g}, -k). \tag{3.1}$$

Or la fonction ψ_f satisfait l'équation fonctionnelle (3.8) :

$$\psi_f(x, \Gamma_1(N)g) = \psi_f(x+1, \Gamma_1(N)gT^{-1}) + \frac{1}{x+1}\psi_f(1 - \frac{1}{x+1}, \Gamma_1(N)gT'^{-1}). \tag{3.2}$$

Lemme 3.4. *Soit $n \geq 0$, et $\Gamma_1(N)g \in \Gamma_1(N)\backslash SL(2,\mathbb{Z})$. On a la formule :*

$$\begin{aligned}(\psi_f)^{(n)}(x, \Gamma_1(N)g) &= (\psi_f)^{(n)}(x+1, \Gamma_1(N)gT^{-1}) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{n} (-1)^{(n-k)} \frac{n!^2}{k!^2(n-k)!} \frac{(\psi_f)^{(k)}(1 - \frac{1}{x+1}, \Gamma_1(N)g\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix})}{(x+1)^{(n+k+1)}}\end{aligned} \tag{3.3}$$

Démonstration : Soit $h = gT'^{-1}$. Posons $l(x) = \dfrac{1}{x+1}\psi_f(1 - \dfrac{1}{x+1}, \Gamma_1(N)h)$. En dérivant n fois la formule (5.2), on obtient :

$$(\psi_f)^{(n)}(x, \Gamma_1(N)g) = (\psi_f)^{(n)}(x+1, \Gamma_1(N)gT'^{-1}) + l^{(n)}(x).$$

Calculons $l^{(n)}(x)$ par récurrence : supposons que $l^{(n)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_{k,n} \frac{\psi_f^{(k)}(1 - \frac{1}{x+1}, \Gamma_1(N)h)}{(x+1)^{n+k+1}}$.
C'est vrai au rang 0 et on a $\alpha_{0,0} = 1$. En dérivant cette égalité, on obtient

$$\begin{aligned} l^{(n+1)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \alpha_{k,n} \left[\frac{\psi_f^{(k+1)}(1 - \frac{1}{x+1}, \Gamma_1(N)h)}{(x+1)^{n+k+3}} - (n+1+k) \frac{\psi_f^{(k)}(1 - \frac{1}{x+1}, \Gamma_1(N)h)}{(x+1)^{n+k+2}} \right] \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \alpha_{k,n+1} \frac{\psi_f^{(k)}(1 - \frac{1}{x+1}, \Gamma_1(N)h)}{(x+1)^{n+k+2}} \end{aligned}$$

avec les $\alpha_{k,n}$ vérifiant

$$\begin{cases} \alpha_{0,n+1} & = & -(n+1)\alpha_{0,n} \\ \alpha_{n+1,n+1} & = & \alpha_{n,n} \\ \alpha_{k,n+1} & = & \alpha_{k-1,n} - (n+1+k)\alpha_{k,n} \qquad \text{si } \ 1 \leq k \leq n. \end{cases}$$

Posons $\beta_{k,n} = (-1)^{n-k}\dfrac{n!^2}{k!^2(n-k)!}\cdot$ On voit que $\beta_{0,0} = \alpha_{0,0}$, et que $\beta_{k,n}$ vérifie le même système d'équations que $\alpha_{k,n}$, ce qui prouve que pour tout n et pour tout $k \leq n$ on a $\alpha_{k,n} = (-1)^{n-k}\dfrac{n!^2}{k!^2(n-k)!}\cdot$ $\qquad \diamondsuit\ \diamondsuit$

En utilisant ce lemme et en passant à la limite quand $x \to 0$, on obtient

$$(\psi_f)^{(n)}(1, \Gamma_1(N)gT^{-1}) = (\psi_f)^{(n)}(0, \Gamma_1(N)g) \\ - \sum_{k=0}^{n}(-1)^{(n-k)}\frac{n!^2}{k!^2(n-k)!}(\psi_f)^{(k)}(0, \Gamma_1(N)gT'^{-1}).$$

Cette formule se généralise à la fonction $\Psi_f^+ \in \mathcal{L}_\Gamma^{\mathbb{C}\setminus]-\infty,0[}$, définie dans la section 3.2.
Par hypothèse, $\Lambda(f_{|g}, -n) = 0$ pour tout $n \geq 0$ et pour tout $\Gamma_1(N)g \in \Gamma_1(N)\backslash SL(2,\mathbb{Z})$, ce qui implique d'après l'équation (5.1)

$$(\psi_f)^{(n)}(0, \Gamma_1(N)g) = 0$$

pour tout $n \geq 0$ et pour tout $\Gamma_1(N)g \in \Gamma_1(N)\backslash SL(2,\mathbb{Z})$. L'équation ci-dessus montre que

$$(\psi_f)^{(n)}(1, \Gamma_1(N)g) = 0$$

pour tout $\Gamma_1(N)g \in \Gamma_1(N)\backslash SL(2,\mathbb{Z})$. Or pour tout $\Gamma_1(N)g \in \Gamma_1(N)\backslash SL(2,\mathbb{Z})$ la fonction $z \longmapsto \Psi_f^+(z, \Gamma_1(N)g)$ est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash]-\infty, 0]$. Toutes ses dérivées s'annulant au point 1, on en déduit que $\Psi_f^+ = 0$.
La correspondance $f \mapsto \Psi_f^+$ étant injective d'après le théorème 0.3, cela entraîne $f = 0$, ce qui démontre la proposition 0.10. $\qquad \diamondsuit$

3.2.2 Fonctions L tordues

Notons $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(f)e^{2i\pi nz}$ le développement de Fourier de f. Dans la suite, on notera a_n la forme linéaire qui à f associe le coefficient $a_n(f)$. Pour χ un caractère de Dirichlet modulo m, on note f_χ la forme modulaire définie par $f_\chi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)\chi(n)e^{2i\pi nz}$. On suppose dans la suite que f est une forme primitive. La forme modulaire f_χ est vecteur propre de presque tous les opérateurs de Hecke, il existe donc une unique forme primitive associée à f_χ (l'unique forme primitive ayant le même système de valeurs propres que f_χ pour presque tous les opérateurs de Hecke), on la note $f \otimes \chi$. On a

$$L(f_\chi, s) = L^{(N_\chi)}(f \otimes \chi, s)$$

où N_χ est le conducteur de χ, et où $L^{(N_\chi)}(f\otimes\chi,\cdot)$ désigne la fonction L de $f\otimes\chi$ privée de ses facteurs d'Euler associés aux nombres premiers divisant N_χ.
On pose

$$S_\chi f=\sum_{a \text{ modulo } m}\overline{\chi(a)}f\Big|_{\left(\begin{smallmatrix}1 & a/m\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)}.$$

Si χ est primitif, on a $S_\chi f=\tau(\overline{\chi})f_\chi$, où $\tau(\overline{\chi})$ désigne la somme de Gauss de $\overline{\chi}$ définie par $\tau(\overline{\chi_1})=\sum_{h=1}^{m}\overline{\chi_1}(h)e^{2i\pi h/m}$.
Soit f une forme primitive de niveau N, et soit N' un diviseur de N. On suppose que χ est un caractère de Dirichlet de niveau N', et on note N_0 le conducteur de χ. On a $\chi=\chi_0\chi^t_{N'}$, où χ_0 est un caractère primitif modulo N_0 et $\chi^t_{N'}$ est le caractère trivial modulo N', c'est-à-dire la fonction caractéristique des entiers inversibles modulo N'. La forme modulaire f étant primitive de niveau N, on a pour tout $p|N$ et pour tout n l'égalité $a_{np}(f)=a_n(f)a_p(f)$.

Lemme 3.5. *Soit p un nombre premier divisant $\dfrac{N'}{N_0}\cdot$ On pose $N''=\dfrac{N'}{p}$, et on note χ'' le caractère de Dirichlet modulo N'' induit par χ (on a $\chi''=\chi_0\chi^t_{N''}$). On a l'égalité*

$$S_\chi f=\sqrt{p}a_p(f)\left(S_{\chi''}f\right)\Big|_{\left(\begin{smallmatrix}p & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)}-\overline{\chi''(p)}\left(S_{\chi''}f\right)=\left(S_{\chi''}f\right)\Big|_{\sqrt{p}a_p(f)\left(\begin{smallmatrix}p & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)-\overline{\chi''(p)}Id}.$$

Démonstration : On a

$$\begin{aligned}(S_\chi f)(z) &= \sum_{n=0}^{\infty}a_n(f)e^{2i\pi nz}\sum_{a \bmod pN''}\overline{\chi(a)}e^{\frac{2i\pi na}{pN''}}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}a_n(f)e^{2i\pi nz}\left[\sum_{a \bmod pN''}\overline{\chi''(a)}e^{\frac{2i\pi na}{pN''}}+\sum_{a \bmod pN''}\overline{\chi''(a)}(\chi^t_p(a)-1)e^{\frac{2i\pi na}{pN''}}\right].\end{aligned}$$

Or $\overline{\chi''(a)}(\chi^t_p(a)-1)\neq 0$ entraîne $p|a$, on a donc

$$\sum_{a \bmod pN''}\overline{\chi''(a)}(\chi^t_p(a)-1)e^{\frac{2i\pi na}{pN''}}=-\sum_{l \bmod N''}\overline{\chi''(lp)}e^{\frac{2i\pi nl}{N''}}.$$

De même, le caractère χ'' étant de niveau N'', on a

$$\begin{aligned}\sum_{a \bmod pN''}\overline{\chi''(a)}e^{\frac{2i\pi na}{pN''}} &= \sum_{\alpha \bmod N''}\overline{\chi''(\alpha)}\sum_{r \bmod p}e^{\frac{2i\pi n\alpha}{pN''}}e^{\frac{2i\pi nr}{p}}\\ &= p\chi^t_p(n)\sum_{\alpha \bmod N''}\overline{\chi''(\alpha)}e^{\frac{2i\pi n\alpha}{pN''}}.\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}(S_\chi f)(z) &= p\sum_{m=0}^{\infty}a_{mp}(f)e^{2i\pi mpz}\sum_{\alpha \bmod N''}\overline{\chi''(\alpha)}e^{\frac{2i\pi m\alpha}{N''}}-\sum_{n=0}^{\infty}a_n(f)e^{2i\pi nz}\sum_{l=1}^{N''}\overline{\chi''(lp)}e^{\frac{2i\pi nl}{N''}}\\ &= pa_p(f)\sum_{\alpha \bmod N''}\overline{\chi''(\alpha)}\sum_{m=0}^{\infty}a_m(f)e^{2i\pi m\left(pz+\frac{\alpha}{N''}\right)}-\sum_{l=1}^{N''}\overline{\chi''(l)\chi''(p)}\sum_{n=0}^{\infty}a_n(f)e^{2i\pi n\left(z+\frac{l}{N''}\right)}\\ &= pa_p(f)\left(S_{\chi''}f\right)(pz)-\overline{\chi''(p)}\left(S_{\chi''}f\right)(z)\end{aligned}$$

ce qui montre le lemme, car $(S_{\chi''}f)\Big|_{\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)}(z) = \sqrt{p}(S_{\chi''}f)(pz)$. $\diamondsuit$

On dit qu'un diviseur M de N est un diviseur exact de N si on a $(M, \dfrac{N}{M}) = 1$.

3.2.3 Démonstration du théorème 0.11

On sait que la surjection π :

$$\begin{array}{ccc} M_2(\mathbb{Z}) & \longrightarrow & (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2 \\ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) & \longmapsto & (c,d) \end{array}$$

définit une bijection π_N entre $\Gamma_1(N)\backslash SL(2,\mathbb{Z})$ et E_N. Dans la suite, pour $(u,v) \in E_N$, on définit $f_{|(u,v)}$ comme étant la fonction $f_{|g}$, avec $\pi_N(\Gamma_1(N)g) = (u,v)$.
On suppose ici que f est une forme primitive de l'espace $\mathcal{S}_1(\Gamma_0(N),\psi)$, où ψ est un caractère de Dirichlet modulo N vérifiant $\psi(-1) = -1$. On note m_ψ le conducteur de ψ, c'est un diviseur de N.
Soit $(u,v) \in E_N$. Soit M le plus grand diviseur de N tel que tout diviseur premier de M divise $\mathrm{pgcd}(u,N)$.
On pose $N' = \dfrac{N}{\mathrm{pgcd}(uv,N)}$ et $M' = \mathrm{pgcd}(M,N')$.
On considère une matrice $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$ vérifiant les propriétés suivantes :

$$MM'|A, \quad MM'|D, \quad NN'|C, \quad \frac{N}{M}\frac{N'}{M'}|B \quad \text{et} \quad AD - BC = MM'. \qquad (*)_M.$$

Lemme 3.6. *La fonction* $f\Big|_{\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right)}$ *ne dépend que de* A *modulo* $\dfrac{N}{M}$ *et de* B *modulo* M.

Démonstration : Soit $\begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$ une autre matrice vérifiant les conditions $(*)_M$, avec $A \equiv A'$ modulo $\dfrac{N}{M}$ et $B \equiv B'$ modulo M (ce qui entraîne $A \equiv A'$ et $B \equiv B'$ modulo N). On a alors

$$H = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{AD'-BC'}{MM'} & \frac{A'B-AB'}{MM'} \\ \frac{CD'-DC'}{MM'} & \frac{A'D-B'C}{MM'} \end{pmatrix}.$$

Par hypothèse, cette matrice appartient à $SL(2,\mathbb{Z})$. De plus, comme $NN'|C$ et $NN'|C'$, $H \in \Gamma_0(NN')$. Enfin, on a $\dfrac{A'D-B'C}{MM'} = \dfrac{D(A'-A)-C(B'-B)}{MM'} + 1$, et comme $\dfrac{D}{MM'}$ et $\dfrac{C}{MM'}$ sont entiers, cela prouve que $\dfrac{A'D-B'C}{MM'} \equiv 1$ modulo N par hypothèse. On prouve de la même façon que $\dfrac{AD'-BC'}{MM'} \equiv 1$ modulo N, ce qui montre que $H \in \Gamma_0(NN') \cap \Gamma_1(N)$, et donc que $f_{|\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right)} = f_{|\left(\begin{smallmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{smallmatrix}\right)}$. $\diamondsuit$

Soit $(u,v) \in E_N$. On définit l'opérateur $W_{(u,v)}$ sur $\mathcal{S}_1(\Gamma_0(NN') \cap \Gamma_1(N))$ par $W_{(u,v)} = \Big|_{\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right)}$, où la matrice $\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right)$ vérifie les conditions $(*_M)$, et où $A \equiv uM$ modulo $\dfrac{N}{M}$ et

$B \equiv v\left(\frac{N}{M}\right)^{-1}$ modulo M. Soit $0 \leq k < N$ l'entier défini par $k \equiv uv$ modulo $\frac{N}{M}$ et $k \equiv -uv$ modulo M. On a $\mathrm{pgcd}(uv, N)|k$. On suppose $0 \leq k < N$, et on note $k' = \frac{kN'}{N}$. La fraction $\frac{k'}{N'}$ est irréductible.

Lemme 3.7. *Soit $g \in SL(2,\mathbb{Z})$ telle que $(u,v) = \pi_N(g)$. Soit $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ une matrice telle que $W_{(u,v)} = \left|\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right.$. On a l'égalité matricielle suivante :*

$$\Gamma_1(N) g \begin{pmatrix} NM' & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} = \Gamma_1(N) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ N & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & k/N \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Démonstration : On a

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ N & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & k/N \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{C}{NM'} & -\frac{D}{M} \\ \frac{A}{M'} + \frac{kC}{NM'} & \frac{BN}{M} + \frac{kD}{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} NM' & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}.$$

Il nous suffit donc de montrer que

$$\Gamma_1(N) g = \Gamma_1(N) \begin{pmatrix} -\frac{C}{NM'} & -\frac{D}{M} \\ \frac{A}{M'} + \frac{kC}{NM'} & \frac{BN}{M} + \frac{kD}{M} \end{pmatrix}.$$

Cette matrice, par hypothèse sur A, B, C et D, est à coefficients entiers, et de déterminant 1, donc d'après la bijection π_N, il nous suffit de montrer que

$$\frac{A}{M'} + \frac{kC}{NM'} \equiv u \text{ modulo } N \qquad \text{et} \qquad \frac{BN}{M} + \frac{kD}{M} \equiv v \text{ modulo } N.$$

Or, modulo $\frac{N}{M}$, on a l'équivalence $\begin{pmatrix} \frac{A}{M'} & B \\ \frac{C}{MM'} & \frac{D}{M} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix}$, et modulo M on a l'équivalence $\begin{pmatrix} \frac{A}{M'} & B \\ \frac{C}{MM'} & \frac{D}{M} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & v(\frac{N}{M})^{-1} \\ -v^{-1}\frac{N}{M} & * \end{pmatrix}$. Ainsi, modulo M, en utilisant la congruence $k \equiv -uv$, on a

$$\frac{A}{M'} + \frac{kC}{NM'} \equiv u[M] \qquad \text{et} \qquad B\frac{N}{M} + \frac{kD}{M} \equiv v[M]$$

la dernière égalité vient du fait que $M' = \left(M, \frac{N}{\mathrm{pgcd}(uv,N)}\right)$, donc comme $M'|\frac{D}{M}$ et $\mathrm{pgcd}(uv,N)|k$ par hypothèse, on a bien $M|\frac{kD}{M}$ car $M|N$.

De même, modulo $\frac{N}{M}$, on trouve

$$\frac{A}{M'} + \frac{kC}{NM'} \equiv u[\frac{N}{M}] \qquad \text{et} \qquad B\frac{N}{M} + \frac{kD}{M} \equiv v[\frac{N}{M}],$$

ce qui termine la démonstration. $\diamondsuit$

On a l'égalité

$$L(f_{|(u,v)}, s) = \frac{(2\pi)^s}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} f_{|(u,v)}(iy) y^{s-1} dy.$$

L'égalité matricielle du lemme 5.7 montre que

$$\begin{aligned} f_{|(u,v)} &= f_{\left|\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ N & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & k/N \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (NM')^{-1} & 0 \\ 0 & M^{-1} \end{pmatrix}\right.} \\ &= \left(W_{u,v}\left[(W_N f)_{\left|\begin{pmatrix} 1 & k/N \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right.}\right]\right)_{\left|\begin{pmatrix} (NM')^{-1} & 0 \\ 0 & M^{-1} \end{pmatrix}\right.}. \end{aligned}$$

En effectuant le changement de variables $w = \dfrac{My}{NM'}$, on en déduit que

$$L(f_{|(u,v)}, s) = \frac{(2\pi)^s}{\Gamma(s)}\left(\frac{NM'}{M}\right)^{s-1/2}\int_0^{+\infty}\left(W_{u,v}\left[(W_N f)_{\left|\begin{pmatrix} 1 & k/N \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right.}\right]\right)(iw)w^s\frac{dw}{w}. \quad (3.4)$$

La forme f est par hypothèse primitive, elle vérifie donc l'équation fonctionnelle $W_N f = \varepsilon_N(f)\overline{f}$. On a ainsi

$$L(f_{|(u,v)}, s) = \frac{(2\pi)^s}{\Gamma(s)}\left(\frac{NM'}{M}\right)^{s-1/2}\varepsilon_N(f)\int_0^{+\infty}\left(W_{u,v}\left[\overline{f}_{\left|\begin{pmatrix} 1 & k/N \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right.}\right]\right)(iw)w^s\frac{dw}{w}. \quad (3.5)$$

On va maintenant exprimer $\overline{f}_{\left|\begin{pmatrix} 1 & k/N \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right.}$ en fonction de fonctions $\overline{f}_\chi$.

D'après la relation d'orthogonalité des caractères, et comme $\mathrm{pgcd}(k', N') = 1$, on a

$$\begin{aligned} \overline{f}_{\left|\begin{pmatrix} 1 & k'/N' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right.}(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\overline{f})e^{2i\pi nz}e^{2i\pi nk'/N'} \\ &= \frac{1}{\phi(N')}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\overline{f})e^{2i\pi nz}\sum_{a \bmod N'} e^{2i\pi na/N'}\sum_{\chi \text{ car. mod. } N'}\chi(k')\overline{\chi(a)} \\ &= \sum_{\chi \text{ car. mod. } N'}\frac{\chi(k')}{\phi(N')}\sum_{a \bmod N'}\overline{\chi(a)}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\overline{f})e^{2i\pi n\left(z+\frac{a}{N'}\right)} \\ &= \sum_{\chi \text{ car. mod. } N'}\frac{\chi(k')}{\phi(N')}S_\chi\overline{f}(z). \end{aligned}$$

Soit à présent χ un caractère de Dirichlet de niveau N'. On note N_0 le conducteur de χ, et χ_0 le caractère primitif modulo N_0 associé à χ. Exprimons $S_\chi\overline{f}$ en fonction de $S_{\chi_0}\overline{f}$. On pose, pour tout n, $a'_n = \sqrt{n}a_n(\overline{f})$. La forme modulaire $\overline{f}$ étant primitive de niveau N, on a pour tout $p|N$ et pour tout n l'égalité $a_{np}(\overline{f}) = a_n(\overline{f})a_p(\overline{f})$, et de même $a'_{np} = a'_n a'_p$. On note $v_p(\dfrac{N'}{N_0})$ la valuation p-adique de $\dfrac{N'}{N_0}$, et on étend par $\mathbb{C}$-linéarité l'action de $GL(2,\mathbb{Q})$ sur les formes modulaires. On trouve, par application répétée du lemme 5.5

$$S_\chi\overline{f} = S_{\chi_0}\overline{f}\left|\prod_{p|\frac{N'}{N_0}}\left[a'_p\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^{v_p(\frac{N'}{N_0})-1}\left[a'_p\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \overline{\chi_0(p)}I\right],\right.$$

où le produit porte sur les nombres premiers p divisant $\dfrac{N'}{N_0}$. Par multiplicativité, on peut écrire le produit précédent sous la forme

$$\prod_{p|\frac{N'}{N_0}}\left[a'_p\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^{v_p(\frac{N'}{N_0})-1}\left[a'_p\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \overline{\chi_0(p)}I\right] = a'_{\frac{N'}{N_0}}\begin{pmatrix} \frac{N'}{N_0} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\prod_{p|\frac{N'}{N_0}}\left[1 - \frac{\overline{\chi_0(p)}}{a'_p}\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\right]$$

(par multiplicativité, s'il existe p tel que $a'_p = 0$ on a $a'_{\frac{N'}{N_0}} = 0$, et dans ce cas $S_\chi \overline{f} = 0$).
On peut développer, grâce à la fonction de Möbius, le produit précédent pour obtenir

$$a'_{\frac{N'}{N_0}} \begin{pmatrix} \frac{N'}{N_0} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \prod_{p \mid \frac{N'}{N_0}} \left[1 - \frac{\overline{\chi_0(p)}}{a'_p} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \right] = \sum_{r \mid \frac{N'}{N_0}} \mu\left(\frac{N'}{rN_0}\right) \overline{\chi_0\left(\frac{N'}{rN_0}\right)} a'_r \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

la somme se faisant ici sur tous les diviseurs strictement positifs de $\dfrac{N'}{N_0}$.
On en déduit finalement la formule

$$\overline{f}\Big|_{\begin{pmatrix} 1 & k'/N' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = \sum_{d \mid N'} \sum_{\chi_0} \frac{\chi_0(k')\tau(\overline{\chi_0})}{\phi(N')} a'_d \overline{f}_{\chi_0}\Big|_{\begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \prod_{p \mid d} \left[1 - \frac{\overline{\chi_0(p)}}{a'_p} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \right]$$

où la somme porte sur tous les caractères χ_0 primitifs modulo $\dfrac{N'}{d}$. On peut la récrire sous la forme

$$\overline{f}\Big|_{\begin{pmatrix} 1 & k'/N' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = \sum_{d \mid N'} \sum_{\chi_0} \frac{\chi_0(k')\tau(\overline{\chi_0})}{\phi(N')} \sum_{\delta \mid d} c_\delta \overline{f}_{\chi_0}\Big|_{\begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} \tag{3.6}$$

où $c_\delta = \mu\left(\dfrac{d}{\delta}\right) \overline{\chi_0\left(\dfrac{d}{\delta}\right)} a'_\delta$.

Soit d un diviseur de N', et δ un diviseur de d. On cherche maintenant à déterminer $\displaystyle\int_0^\infty W_{u,v}\left[\overline{f}_{\chi_0}\Big|_{\begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}\right](iw) w^s \frac{dw}{w}$, où χ_0 est un caractère primitif modulo $N_0 = \dfrac{N'}{d}$.
On sait ([Miy89] lemme 4.3.10) que $\overline{f}_{\chi_0} \in \mathcal{S}_1(\Gamma_0(C), \chi_0^2\overline{\psi})$, où C est le p.p.c.m. de N, N_0^2 et $m_{\overline{\psi}} N_0$. On a $m_{\overline{\psi}} = m_\psi$, et $m_\psi | N$, aussi $C | NN_0$. On en déduit que $\overline{f}_{\chi_0} \in \mathcal{S}_1(\Gamma_0(\dfrac{NN'}{d}), \chi_0^2\overline{\psi})$.
L'entier δ s'écrit sous la forme $\delta = \delta_1\delta_2$, où le support de δ_1 est inclus dans le support de M', et le support de δ_2 est inclus dans le support de $\dfrac{N'}{M'}$ (cette décomposition est unique car $\mathrm{pgcd}(M', \dfrac{N'}{M'}) = 1$).
On a l'égalité matricielle

$$\begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & \delta_2 B \\ \frac{C}{\delta} & \frac{D}{\delta_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \delta_1 \end{pmatrix}.$$

En effectuant le changement de variable $u = \delta_2 w$ dans l'intégrale, on trouve que

$$\int_0^\infty W_{u,v}\left[\overline{f}_{\chi_0}\Big|_{\begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}\right](iw) w^s \frac{dw}{w} = \delta_2^{s-1/2} \int_0^\infty \overline{f}_{\chi_0}\Big|_{\begin{pmatrix} A & \delta_2 B \\ C/\delta & D/\delta_1 \end{pmatrix}} (iu) u^s \frac{du}{u}.$$

La matrice $\begin{pmatrix} A & \delta_2 B \\ C/\delta & D/\delta_1 \end{pmatrix}$ est à coefficients entiers, et son déterminant est $\dfrac{MM'}{\delta_1}$.
Par définition de δ_1 et δ_2, les nombres $\dfrac{MM'}{\delta_1}$ et $\dfrac{NN'}{MM'\delta_2}$ sont entiers, et sont de plus premiers entre eux. On a $\dfrac{MM'}{\delta_1} | A$, $\dfrac{MM'}{\delta_1} | D$ et $\dfrac{NN'}{\delta} | C$. Les caractères χ_0 et ψ s'écrivent

sous la forme $\chi_0 = \chi_M \chi_0'$ et $\psi = \psi_M \psi_0'$, où χ_M et ψ_M sont des caractères modulo M et χ_0' et ψ_0' sont des caractères modulo $\frac{N}{M}$. Les nombres premiers divisant M (resp. $\frac{N}{M}$) sont exactement les nombres premiers divisant $\frac{MM'}{\delta_1}$ (resp. $\frac{NN'}{MM'\delta_2}$), donc on a (proposition 1.1 de [A-L78])

$$\overline{f}_{\chi_0}\Big|_{\left(\begin{smallmatrix} A & \delta_2 B \\ \frac{C}{\delta} & \frac{D}{\delta_1}\end{smallmatrix}\right)} = (\overline{\chi_M}^2\psi_M)(\delta_2 B)(\overline{\chi_0'}^2\psi_0')\left(\frac{A\delta_1}{MM'}\right) W_{\frac{MM'}{\delta_1}} \overline{f}_{\chi_0}$$

où $W_{\frac{MM'}{\delta_1}}$ opère sur $\mathcal{S}_1(\Gamma_1(\frac{NN'}{\delta}))$ (on rappelle que pour un entier N_1 et un diviseur exact M_1 de N_1 on définit l'opérateur W_{M_1} sur $\mathcal{S}_1(\Gamma_1(N_1))$ comme l'action d'une matrice $\left(\begin{smallmatrix} M_1 a & b \\ N_1 c & M_1 d\end{smallmatrix}\right)$, avec a, b, c, d entiers vérifiant $b \equiv 1 \bmod M_1$, $a \equiv 1 \bmod \frac{N_1}{M_1}$ et $\det\left(\begin{smallmatrix} M_1 a & b \\ N_1 c & M_1 d\end{smallmatrix}\right) = M_1$). Les congruences vérifiées par A et B montrent qu'on a

$$(\overline{\chi_M}^2\psi_M)(\delta_2 B) = (\overline{\chi_M}^2\psi_M)(v\delta_2)(\chi_M^2\overline{\psi_M})(\frac{N}{M})$$

et

$$(\overline{\chi_0'}^2\psi_0')\left(\frac{A\delta_1}{MM'}\right) = (\overline{\chi_0'}^2\psi_0')(u\delta_1)(\chi_0'^2\overline{\psi_0'})(M').$$

On considère la forme primitive $\overline{f}\otimes\chi_0$ associée à $\overline{f}_{\chi_0}$. Posons $M_1 = \frac{MM'}{\delta_1}$. On note $N_{\overline{f}\otimes\chi_0}$ le niveau de la forme primitive $\overline{f}\otimes\chi_0$. On a $N_{\overline{f}\otimes\chi_0} | \frac{NN'}{d}$. On note $M_{\overline{f}\otimes\chi_0}$ la M_1-partie de $N_{\overline{f}\otimes\chi_0}$. On a

$$W_{M_1}(\overline{f}\otimes\chi_0) = [\varepsilon_{M_1}(\overline{f}\otimes\chi_0)G]_{|\left(\begin{smallmatrix} M_1/M_{\overline{f}\otimes\chi_0} & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)}$$

où G est une forme primitive de même niveau que $\overline{f}\otimes\chi_0$, de caractère $\overline{\chi_M}^2\psi_M\chi_0'^2\overline{\psi_0'}$, où on note la constante de l'équation fonctionnelle $\varepsilon_{M_1}(\overline{f}\otimes\chi_0)$. On a $G = \overline{f}\otimes\chi_0\overline{\chi_M}^2\psi_M = \overline{f}\otimes\chi_0'\overline{\chi_M}\psi_M$.

On dit qu'une forme modulaire f' de niveau N_1 est p-nouvelle pour un nombre premier p divisant N_1 si elle appartient à l'intersection des noyaux des deux morphismes naturels allant de $\mathcal{S}_1(\Gamma_1(N_1))$ dans $\mathcal{S}_1(\Gamma_1(\frac{N_1}{p}))$. Soit M_1 un diviseur de N_1, on dit que f' est M_1-nouvelle si f' est p-nouvelle pour tout nombre premier p divisant M_1.

Lemme 3.8. *La forme $\overline{f}_{\chi_0}$ est M_1-nouvelle.*

Démonstration : On va utiliser le résultat suivant

Lemme 3.9. *Soit p un nombre premier divisant $N_{f\otimes\chi_0}$ et N. Si on a $a_p(f\otimes\chi_0) = a_p(f_{\chi_0})$ alors f_{χ_0} est p-nouvelle.*

Démonstration : Soient N_1 le niveau de f_{χ_0} et N_0' le niveau de $f\otimes\chi_0$. On a la décomposition $f = \sum_d \alpha_d (f\otimes\chi_0)_{|\left(\begin{smallmatrix} d & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)}$, où d décrit les diviseurs de $\frac{N_1}{N_0'}$. On a ainsi

$$\sum_n a_n(f_{\chi_0})e^{2i\pi nz} = \sum_{d,n} \alpha_d a_n(f\otimes\chi_0)e^{2i\pi ndz} \tag{3.7}$$

La forme f_{χ_0} est p-nouvelle si $\alpha_d = 0$ pour tout d multiple de p. On va montrer cette propriété par récurrence : soit d un diviseur de $\dfrac{N_1}{N_0'}$, tel que $p|d$. On note $r_d = \sum_q v_q(d)$, la somme se faisant sur tous les diviseurs premiers q de d. On fait l'hypothèse de récurrence que pour tout d_1 diviseur de d tel que $r_{d_1} < r_d$ et $v_p(d_1) \geq 1$, on a $\alpha_{d_1} = 0$. On va montrer que cela entraîne $\alpha_d = 0$.

1. On initie la récurrence en montrant que $\alpha_p = 0$: l'équation (5.7) montre que $a_p(f_{\chi_0}) = a_p(f \otimes \chi_0) + \alpha_p$ (car $\alpha_1 = 1$ de par l'égalité $a_1(f_{\chi_0}) = a_1(f \otimes \chi_0) = 1$). Par hypothèse, cela entraîne $\alpha_p = 0$.
2. Soit d un diviseur de $\dfrac{N_1}{N_0'}$ tel que p divise d. On pose $d = p^{v_p(d)}d'$. L'équation (5.7) montre que
$$a_d(f_{\chi_0}) = \sum_{\delta|d} \alpha_\delta a_{d/\delta}(f \otimes \chi_0). \tag{3.8}$$
Comme f est primitive, on a $a_d(f_{\chi_0}) = a_{d'}(f_{\chi_0})a_{p^{v_p(d)}}(f_{\chi_0}) = a_{d'}(f_{\chi_0})[a_p(f_{\chi_0})]^{v_p(d)}$ car p divise le niveau de f. Comme p divise N_0', on a $a_{p^{v_p(d)}}(f \otimes \chi_0) = [a_p(f \otimes \chi_0)]^{v_p(d)}$. Ainsi, on a
$$a_d(f_{\chi_0}) = a_{d'}(f_{\chi_0})[a_p(f \otimes \chi_0)]^{v_p(d)}.$$
L'équation (5.7) montre que $a_{d'}(f_{\chi_0}) = \sum_{\delta'|d'} \alpha_{\delta'} a_{d'/\delta'}(f \otimes \chi_0)$, ce qui montre l'égalité $a_d(f_{\chi_0}) = \sum_{\delta'|d'} \alpha_{\delta'} a_{d/\delta'}(f \otimes \chi_0)$. D'après l'équation (5.8), on en déduit
$$\sum_{\delta|d,\, p|\delta} \alpha_\delta a_{d/\delta}(f \otimes \chi_0) = 0.$$
Par hypothèse de récurrence, on a $\alpha_\delta = 0$ si $p|\delta$ et $\delta \neq d$, donc on obtient $\alpha_d = 0$. $\diamondsuit\ \diamondsuit$

Soit p un diviseur de M_1. On va montrer que $\overline{f}_{\chi_0}$ est p-nouvelle. Pour cela, on utilise l'hypothèse de minimalité : on suppose que $\overline{f}$ est de conducteur minimal parmi toutes ses tordues par des caractères de Dirichlet modulo N : cela entraîne que $N|N_{\overline{f}\otimes\chi}$, pour tout χ caractère de Dirichlet modulo N. Il suffit alors de montrer, d'après le lemme 5.9, que $a_p(\overline{f} \otimes \chi_0) = a_p(\overline{f}_{\chi_0})$.

On sait que N_0 divise $N' = \dfrac{N}{\mathrm{pgcd}(uv, N)}$. Or $p|M_1$, ce qui entraîne $p|\mathrm{pgcd}(u, N)$ par construction de M_1. Ainsi, on a $v_p(N_0) < v_p(N)$. La forme primitive $\overline{f}$ est un élément de $\mathcal{S}_1(\Gamma_0(N), \overline{\psi})$, donc on a $v_p(m_{\overline{\psi}}) \leq v_p(N)$ (puisque $\overline{\psi}$ est un caractère modulo N).

1. Supposons que $v_p(m_{\overline{\psi}}) = v_p(N)$. Alors $\overline{f}_{\chi_0}$ est p-nouvelle ([A-L78] théorème 4.2).
2. Supposons que $v_p(m_{\overline{\psi}}) < v_p(N)$. Alors $a_p(\overline{f}) = 0$ sauf si $v_p(m_{\overline{\psi}}) = 1$, et $v_p(N) = p$ ([Miy89] théorème 4.6.17).
   (a) Si $v_p(m_{\overline{\psi}}) = 1$, et $v_p(N) = p$, alors $\overline{f}_{\chi_0}$ est p-nouvelle ([A-L78] corollaire 4.1).
   (b) Sinon, on a $a_p(\overline{f}) = 0$, donc $a_p(\overline{f}_{\chi_0}) = 0$. La forme modulaire $\overline{f}_{\chi_0}$ est de caractère $\chi_0^2\overline{\psi}$. On a $v_p(m_{\chi_0^2\overline{\psi}}) \leq \max(v_p(m_{\overline{\psi}}), v_p(N_0)) < v_p(N)$ par hypothèse. La forme primitive $\overline{f}$ étant de conducteur minimal parmi ses tordues, on a

$v_p(N_{\overline{f}\otimes\chi_0}) > v_p(m_{\chi_0^2\overline{\psi}})$. Ainsi, on a $a_p(\overline{f}\otimes\chi_0) = 0$ sauf si $v_p(m_{\chi_0^2\overline{\psi}}) = 1$ et $v_p(N) = p$ ([Miy89] théorème 4.6.17). Mais dans ce cas, $v_p(N_0) = 1$ puisque $v_p(N_0) < v_p(N) = p$, donc $\overline{f}_{\chi_0}$ est p-nouvelle. L'égalité $a_p(\overline{f}\otimes\chi_0) = a_p(\overline{f}_{\chi_0}) = 0$ montre ainsi que $\overline{f}_{\chi_0}$ est p-nouvelle. $\diamondsuit$

Lemme 3.10. *On a l'égalité*

$$W_{M_1}(\overline{f}_{\chi_0}) = \varepsilon_{M_1}(\overline{f}\otimes\chi_M)\overline{\chi_0'}(M_1)([\overline{f}\otimes\overline{\chi_M}\psi_M]_{\chi_0'})_{|\begin{pmatrix} M_1/M_{\overline{f}\otimes\chi_M} & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}}.$$

Démonstration : La forme modulaire $\overline{f}_{\chi_0}$ est M_1-nouvelle, donc on a $\overline{f}_{\chi_0} = (\overline{f}\otimes\chi_M)_{\chi_0'}$. Le caractère χ_0 étant primitif, le caractère χ_0' est également primitif.
On a alors ([A-L78] proposition 3.4)

$$W_{M_1}[(\overline{f}\otimes\chi_M)_{\chi_0'}] = \overline{\chi_0'}(M_1)[W_{M_1}(\overline{f}\otimes\chi_M)]_{\chi_0'}.$$

On en déduit

$$W_{M_1}(\overline{f}_{\chi_0}) = W_{M_1}[(\overline{f}\otimes\chi_M)_{\chi_0'}] = \varepsilon_{M_1}(\overline{f}\otimes\chi_M)\overline{\chi_0'}(M_1)([\overline{f}\otimes\overline{\chi_M}\psi_M]_{\chi_0'})_{|\begin{pmatrix} M_1/M_{\overline{f}\otimes\chi_M} & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}}.$$

Cela entraîne l'égalité

$$L(W_{M_1}(\overline{f}_{\chi_0}), s) = \varepsilon_{M_1}(\overline{f}\otimes\chi_M)\left(\frac{M_1}{M_{\overline{f}\otimes\chi_0}}\right)^{s-1/2}\overline{\chi_0'}(M_1)L^{(N_0')}(\overline{f}\otimes\overline{\chi_M}\chi_0'\psi_M, s)$$

où $N_0' = \dfrac{N_0}{(N_0, M_1)}$.
On obtient ainsi

$$L(W_{u,v}[\overline{f}_{\chi_0}|_{\begin{pmatrix}\delta & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}}], s) = (\delta_2)^{s-1/2}(\overline{\chi_M}^2\psi_M)(v\delta_2)(\chi_M^2\overline{\psi_M})(\frac{N}{M})(\overline{\chi_0'}^2\psi_0')(u\delta_1)(\chi_0'^2\overline{\psi_0'})(M')$$
$$\varepsilon_{M_1}(\overline{f}\otimes\chi_M)\left(\frac{M_1}{M_{\overline{f}\otimes\chi_0}}\right)^{s-1/2}\overline{\chi_0'}(M_1)L^{(N_0')}(\overline{f}\otimes\overline{\chi_M}\chi_0'\psi_M, s).$$

et donc

$$L(f_{|(u,v)}, s) = \left(\frac{NM'}{M}\right)^{s-1/2}\varepsilon_N(f)\sum_{d|N'}\sum_{\chi_0}\frac{\chi_0(k')\tau(\overline{\chi_0})}{\phi(N')}\sum_{\delta|d}\mu\left(\frac{d}{\delta}\right)\overline{\chi_0\left(\frac{d}{\delta}\right)}a_\delta'$$
$$\delta_2^{s-1/2}(\overline{\chi_M}^2\psi_M)(v\delta_2)(\chi_M^2\overline{\psi_M})(\frac{N}{M})(\overline{\chi_0'}^2\psi_0')(u\delta_1)(\chi_0'^2\overline{\psi_0'})(M')\left(\frac{M_1}{M_{f\otimes\chi_M}}\right)^{s-1/2}\varepsilon_{M_1}(\overline{f}\otimes\chi_M)$$
$$\overline{\chi_0'}(M_1)L^{(N_0')}(\overline{f}\otimes\overline{\chi_M}\chi_0'\psi_M, s)$$

où la somme se fait sur tous les χ_0 primitifs modulo $\dfrac{N'}{d}$, ce qui démontre le théorème 0.11.

On démontre alors le corollaire 0.12 : soient f_1 et f_2 deux formes primitives modulo N vérifiant les hypothèses du corollaire. Il existe χ_1 modulo N tel que $f_1\otimes\chi_1$ soit de niveau

minimal parmi les tordues de f_1. Comme les niveaux de $f_1 \otimes \chi_1$ et de $f_2 \otimes \chi_1$ coïncident, on en déduit que $f_2 \otimes \chi_1$ est de niveau minimal également parmi les tordues de f_2. D'après le théorème 0.11, pour tout $(u, v) \in E_N$ et pour tout $n \leq 0$, on a $L((f_1 \otimes \chi_1)_{|(u,v)}, n) = L((f_2 \otimes \chi_1)_{|(u,v)}, n)$. D'après la proposition 0.10, on en déduit que $f_1 \otimes \chi_1 = f_2 \otimes \chi_1$, et donc $f_1 = f_2$, car f_1 et f_2 sont primitives.

Chapitre 4

Appendice : quelques propriétés de $\mathbb{Z}[SL(2,\mathbb{Z})]$

Soit Φ le morphisme de $\mathbb{Z}[SL(2,\mathbb{Z})]$-modules à gauche défini par :

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathbb{Z}[SL(2,\mathbb{Z})] & \longrightarrow & \mathbb{Z}[\mathbb{P}_1(\mathbb{Q})] \\ & \displaystyle\sum_M u_M[M] & \longmapsto & \displaystyle\sum_M u_M([M\infty]-[M0]). \end{array}$$

Notons Φ^+ la restriction de Φ à $\mathbb{Z}[SL(2,\mathbb{Z})^+]$ (où on note $SL(2,\mathbb{Z})^+$ le monoïde défini par $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z}) \,\middle|\, a,b,c,d \geq 0\right\}$).

Proposition 4.1. *Le noyau de Φ^+ est un idéal à gauche principal de $\mathbb{Z}[SL(2,\mathbb{Z})^+]$ dont l'unique générateur (au signe près) est $([I]-[T]-[T'])$.*

Démonstration : Le noyau de Φ^+ est un idéal à gauche de $\mathbb{Z}[SL(2,\mathbb{Z})^+]$, et on a :

$$\Phi^+([I]-[T]-[T']) = [\infty]-[0]-[\infty]+[1]-[1]+[0] = 0.$$

Ainsi $([I]-[T]-[T'])$ est bien un élément de $\ker \Phi^+$, donc

$$\mathbb{Z}[SL(2,\mathbb{Z})^+]\left([I]-[T]-[T']\right) \subset \ker \Phi^+.$$

On va maintenant montrer l'inclusion inverse.
Soit $W = \displaystyle\sum_M u_M M$ un élément non nul de $\ker \Phi^+$. Notons $\mathcal{J}$ l'idéal

$$\mathcal{J} = \mathbb{Z}[SL(2,\mathbb{Z})^+]\left([I]-[T]-[T']\right).$$

On va montrer que $W \in \mathcal{J}$.
Soit $\mathcal{L}(W)$ l'union des supports de $\displaystyle\sum_M u_M[M\infty]$ et de $\displaystyle\sum_M u_M[M0]$.
Posons $L(W) = \displaystyle\max_{\frac{\alpha}{\beta}\in\mathcal{L}(W)}(\alpha+\beta)$, et $m(W) = \left|\{\frac{\alpha}{\beta} \in \mathcal{L}(W) \,|\, \alpha+\beta = L(W)\}\right|$ (où on suppose $(\alpha,\beta)=1$).
On va procéder à une double récurrence sur $L(W)$ et $m(W)$.
Soit $\dfrac{\alpha}{\beta}$ un élément de $\mathcal{L}(W)$ tel que $\alpha+\beta = L(W)$. On suppose que $L(W) \geq 2$ (c'est-à-dire $\alpha \geq 1$ et $\beta \geq 1$). Soient γ et δ deux entiers vérifiant $\alpha\gamma - \beta\delta = 1$, tels que $0 \leq \gamma \leq \beta$ et $0 \leq \delta \leq \alpha$. Alors on sait que les matrices de $SL(2,\mathbb{Z})$ vérifiant $M\infty = \dfrac{\alpha}{\beta}$ sont de

la forme $\pm\begin{pmatrix} \alpha & \delta+k\alpha \\ \beta & \gamma+k\beta \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{Z}$, donc celles qui appartiennent à $SL(2,\mathbb{Z})^+$ sont de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & \delta+k\alpha \\ \beta & \gamma+k\beta \end{pmatrix}$, $k \geq 0$ (car les égalités $\begin{cases} \gamma=\beta \\ \delta=\alpha \end{cases}$ ou $\begin{cases} \gamma=0 \\ \delta=0 \end{cases}$ ne peuvent être simultanément satisfaites).
On en déduit donc que pour tout $k>0$, on a $\gamma+\delta+k(\alpha+\beta) > \alpha+\beta$. Comme par hypothèse, $\alpha+\beta = L(W)$, la seule matrice M vérifiant $u_M \neq 0$ et $M\infty = \dfrac{\alpha}{\beta}$ est $M_1 = \begin{pmatrix} \alpha & \delta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$.
Le même raisonnement montre que toutes les matrices de $SL(2,\mathbb{Z})$ vérifiant $M0 = \dfrac{\alpha}{\beta}$ sont de la forme $\pm\begin{pmatrix} k\alpha-\delta & \alpha \\ k\beta-\gamma & \beta \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{Z}$, et donc comme $\alpha+\beta = L(W)$ la seule matrice M de $SL(2,\mathbb{Z})^+$ vérifiant $u_M \neq 0$ et $M0 = \dfrac{\alpha}{\beta}$ est $M_2 = \begin{pmatrix} \alpha-\delta & \alpha \\ \beta-\gamma & \beta \end{pmatrix}$.
On en déduit que $u_{M_1} = u_{M_2}$, car $W \in \ker \Phi^+$ (le coefficient de $\dfrac{\alpha}{\beta}$ pour $\Phi^+(W)$ dans $\mathbb{Z}[\mathbb{P}_1(\mathbb{Q})]$ étant $u_{M_1} - u_{M_2} = 0$).
Or dans $SL(2,\mathbb{Z})$ on a

$$M_1 = \begin{pmatrix} \alpha-\delta & \delta \\ \beta-\gamma & \gamma \end{pmatrix} T' \quad \text{et} \quad M_2 = \begin{pmatrix} \alpha-\delta & \delta \\ \beta-\gamma & \gamma \end{pmatrix} T.$$

Soit $M = \begin{pmatrix} \alpha-\delta & \delta \\ \beta-\gamma & \gamma \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})^+$. Alors on a

$$u_{M_1}[M_1] + u_{M_2}[M_2] = u_{M_1}\big([MT'] + [MT]\big) \equiv u_{M_1}[M] \ \text{ modulo } \mathcal{J}$$

car $u_{M_1}[M]\,([I]-[T]-[T']) \in \mathcal{J}$.
Ainsi, si on définit $W' = W - u_{M_1}([M_1]+[M_2]) + u_{M_1}[M]$, on a $W' \equiv W[\mathcal{J}]$ et $L(W') \leq L(W)$, et si $L(W') = L(W)$ alors on a $m(W') < m(W)$, car $0 < (\alpha-\delta)+(\beta-\gamma) < \alpha+\beta$ et $0 < \gamma+\delta < \alpha+\beta$.
Cela montre, par une double récurrence suivant $L(W)$ et $m(W)$ que $W \equiv W'$ modulo $\mathcal{J}$, où $L(W') \leq 1$.
Dans ce cas, la seule matrice M de $SL(2,\mathbb{Z})^+$ pour laquelle on peut avoir $u_M \neq 0$ est I. La condition $W \in \ker \Phi^+$ (donc $W' \in \ker \Phi^+$) impose alors $u_I = 0$ (par exemple pour le coefficient de 0 dans $\Phi^+(W')$), ce qui montre que $W \equiv 0[\mathcal{J}]$, donc $W \in \mathcal{J}$.
Pour montrer que $([I]-[T]-[T'])$ est l'unique générateur de $\ker \Phi^+$, on remarque que si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ sont deux matrices de $SL(2,\mathbb{Z})^+$, on a

$$L([A]) = \max(a+c,\, b+d) \leq L([AB]) = \max(\alpha(a+c)+\gamma(b+d),\, \beta(a+c)+\delta(b+d)),$$

avec égalité si et seulement $B = I$. Comme I est la seule matrice M de $SL(2,\mathbb{Z})^+$ vérifiant $L([M]) = 1$ et que T et T' sont les seules matrices de $SL(2,\mathbb{Z})^+$ vérifiant $L([M]) = 2$, on en déduit que les générateurs de $\ker \Phi^+$ ne doivent être composées que des matrices I, T et T' (pour que l'élément $([I]-[T]-[T'])$ soit atteint). Comme ils appartiennent à $\ker(\Phi^+)$, il faut que $u_T = u_{T'} = -u_I$ et pour être générateur il faut que u_I soit inversible dans $\mathbb{Z}$, donc $u_I = \pm 1$, ce qui montre la proposition. $\diamondsuit$

Remarque. — Un des arguments principaux de la démonstration est le fait que $\mathbb{Z}$ est un anneau euclidien.

On note Φ^- la restriction de Φ à $\mathbb{Z}[SL(2,\mathbb{Z})^-]$.

Corollaire 4.2. *Le noyau de Φ^- est un idéal à gauche principal de $\mathbb{Z}[SL(2,\mathbb{Z})^-]$ dont l'unique générateur (au signe près) est $\big([I]-[T^{-1}]-[T'^{-1}]\big)$.*

Démonstration : Soit η l'involution de $\mathbb{Z}[SL(2,\mathbb{Z})]$ définie par $\eta(W) = VWV$, où V désigne la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. On a $VSL(2,\mathbb{Z})^+V = SL(2,\mathbb{Z})^-$, car $V\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}V = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$. On en déduit que $\eta(\mathbb{Z}[SL(2,\mathbb{Z})^+]) = \mathbb{Z}[SL(2,\mathbb{Z})^-]$.
De plus, on a $\Phi(VWV) = (-I)\Phi(W)$, pour tout $W \in \mathbb{Z}[SL(2,\mathbb{Z})]$. Cela montre que $\ker(\Phi^-) = V\ker(\Phi^+)V$. Donc on a

$$\begin{aligned}\ker(\Phi^-) &= V\mathbb{Z}[SL(2,\mathbb{Z})^+]\big([I]-[T]-[T']\big)V \\ &= V\mathbb{Z}[SL(2,\mathbb{Z})^+]VV\big([I]-[T]-[T']\big)V = \mathbb{Z}[SL(2,\mathbb{Z})^-]\big([I]-[T^{-1}]-[T'^{-1}]\big)\end{aligned}$$

car $\eta(T) = T^{-1}$ et $\eta(T') = T'^{-1}$. $\diamondsuit$

Proposition 4.3. *On a*

$$\ker\Phi = \mathbb{Z}[SL(2,\mathbb{Z})]\big([I]-[T]-[T']\big) + \mathbb{Z}[SL(2,\mathbb{Z})]\left([I]+[S]\right).$$

Démonstration : On a vu dans la démonstration de la proposition 6.1 que $([I]-[T]-[T']) \in \ker\Phi$. De plus, $\Phi([I]+[S]) = [\infty]-[0]+[0]-[\infty] = 0$, donc $([I]+[S]) \in \ker\Phi$. Le noyau de Φ étant un idéal à gauche de $\mathbb{Z}[SL(2,\mathbb{Z})]$, cela montre que $\mathbb{Z}[SL(2,\mathbb{Z})]\left([I]-[T]-[T']\right) + \mathbb{Z}[SL(2,\mathbb{Z})]\left([I]+[S]\right) \subset \ker\Phi$. On va maintenant montrer l'inclusion inverse.
Notons $\mathcal{J}$ l'idéal

$$\mathbb{Z}[SL(2,\mathbb{Z})]\big([I]-[T]-[T']\big) + \mathbb{Z}[SL(2,\mathbb{Z})]\left([I]+[S]\right).$$

Soit $W = \sum_M u_M M$ un élément non nul de $\ker\Phi$. On va utiliser le lemme suivant :

Lemme 4.4. *Soit M une matrice de $SL(2,\mathbb{Z})$. L'une des quatre matrices M, $-M$, MS et $-MS$ appartient soit à $SL(2,\mathbb{Z})^+$, soit à $SL(2,\mathbb{Z})^-$.*

Démonstration :
Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Quitte à remplacer M par $-M$, on peut supposer que $a \geq 0$. Comme $ad - bc = 1$, M vérifie l'une des hypothèses suivantes :

1. soit $ad > 0$, . Dans ce cas, $bc \geq 0$, donc soit $M \in SL(2,\mathbb{Z})^+$, soit $M \in SL(2,\mathbb{Z})^-$;
2. soit $ad \leq 0$. Dans ce cas, $bc < 0$, donc $-bc > 0$. On a $MS = \begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix}$. Quitte à multiplier par $-I$, on peut supposer que b et $-c$ sont strictement positifs, et alors MS (ou $-MS$) appartient soit à $SL(2,\mathbb{Z})^+$, soit à $SL(2,\mathbb{Z})^-$. $\diamondsuit\ \diamondsuit$

Soit M un élément du support de W. Modulo $\mathcal{J}$, on a $[M] \equiv -[MS]$ (car $[M]+[MS] \in \mathcal{J}$), $M \equiv [-M]$ (car $[M]-[-M] = [M]([I]-[S])([I]+[S]) \in \mathcal{J}$), et donc $[M] \equiv -[-MS]$. Le lemme précédent nous montre alors que pour tout $M \in SL(2,\mathbb{Z})$, on a $u_M[M] \equiv \pm u_M[M']$ modulo $\mathcal{J}$, où M' appartient soit à $SL(2,\mathbb{Z})^+$, soit à $SL(2,\mathbb{Z})^-$.
Ainsi, quitte à rajouter un élément de $\mathcal{J}$, on peut supposer que le support de W est contenu dans $SL(2,\mathbb{Z})^+ \cup SL(2,\mathbb{Z})^-$.

Décomposons alors W : $W = W^+ + W^-$, où $W^\pm \in \mathbb{Z}[SL(2,\mathbb{Z})^\pm]$. Les éléments de $\mathbb{P}_1(\mathbb{Q})$ pouvant appartenir à la fois au support de $\Phi(W^+)$ et de $\Phi(W^-)$ sont $[0]$ et $[\infty]$ (puisque le support de $\Phi(W^+)$ est contenu dans l'ensemble des éléments positifs de $\mathbb{P}_1(\mathbb{Q})$, tandis que celui de $\Phi(W^-)$ est contenu dans l'ensemble des éléments négatifs de $\mathbb{P}_1(\mathbb{Q})$). Comme $\Phi(W) = 0$, cela montre que $\Phi(W^+) = a[\infty]+b[0]$, et $\Phi(W^-) = -a[\infty]-b[0]$, où $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$. Or $\Phi(W^+)$ est de degré 0, donc $b = -a$.
On a alors $W = (W^+ - a[I]) + (W^- + a[I])$, où $W^+ - a[I] \in \mathbb{Z}[SL(2,\mathbb{Z})^+]$ est un élément de $\ker(\Phi^+)$, et $W^- + a[I] \in \mathbb{Z}[SL(2,\mathbb{Z})^-]$ est un élément de $\ker(\Phi^-)$.
Ainsi, en utilisant la proposition 6.1 et son corollaire, on obtient que W appartient à

$$\mathbb{Z}[SL(2,\mathbb{Z})^+]\left([I]-[T]-[T']\right) + \mathbb{Z}[SL(2,\mathbb{Z})^-]\left([I]-[T^{-1}]-[T'^{-1}]\right).$$

Or on a$\left([I]-[T^{-1}]-[T'^{-1}]\right) = -[-S]([I]-[T]-[T'])+[-S]([I]-[T]-[T'])([I]+[S]) \in \mathcal{J}$. On en déduit ainsi que $\mathbb{Z}[SL(2,\mathbb{Z})^-]\left([I]-[T^{-1}]-[T'^{-1}]\right) \subset \mathcal{J}$, donc que W est congru modulo $\mathcal{J}$ à un élément de $\mathcal{J}$. Donc $W \in \mathcal{J}$. $\diamondsuit$

Désignons par $\widetilde{\mathbb{P}_1(\mathbb{Q})}$ l'espace $(\mathbb{Q}_+^* \setminus \mathbb{Q}^2) - \{(0,0)\}$, qui est un revêtement de degré 2 de $\mathbb{P}_1(\mathbb{Q})$. On peut considérer l'application $\widetilde{\Phi}$ définie par

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{\Phi}: & \mathbb{Z}[SL(2,\mathbb{Z})] & \longrightarrow & \mathbb{Z}[\widetilde{\mathbb{P}_1(\mathbb{Q})}] \\ & \displaystyle\sum_M u_M[M] & \longmapsto & \displaystyle\sum_M u_M\left(\left[M\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right]-\left[M\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right]\right). \end{array}$$

Notons $\widetilde{\Phi^+}$ et $\widetilde{\Phi^-}$ les restrictions de $\widetilde{\Phi}$ à $\mathbb{Z}[SL(2,\mathbb{Z})^+]$ et à $\mathbb{Z}[SL(2,\mathbb{Z})^-]$.

Proposition 4.5. *On a les résultats suivants :*

$$\begin{array}{rcl} \ker\widetilde{\Phi}^+ & = & \ker\Phi^+ = \mathbb{Z}[SL(2,\mathbb{Z})^+]([I]-[T]-[T']) \\ \ker\widetilde{\Phi}^- & = & \{0\} \\ \ker\widetilde{\Phi} & = & \mathbb{Z}[SL(2,\mathbb{Z})]([I]-[T]-[T'])+\mathbb{Z}[SL(2,\mathbb{Z})]([I]+[S]+[S^2]+[S^3]) \\ & = & \mathbb{Z}[SL(2,\mathbb{Z})]([I]-[T]-[T'])+\mathbb{Z}[SL(2,\mathbb{Z})]([I]+[U]+[U^2]). \end{array}$$

Démonstration : On a $\ker\widetilde{\Phi} \subset \ker\Phi$.
Comme $[I]-[T]-[T']$ appartient à $\ker\widetilde{\Phi}^+$, cela nous montre que $\mathbb{Z}[SL(2,\mathbb{Z})^+]([I]-[T]-[T'])$ est inclus dans $\ker\widetilde{\Phi}^+$, qui lui-même est inclus dans $\ker\Phi^+$. D'après la proposition 6.1, cela montre que $\ker\widetilde{\Phi}^+ = \ker\Phi^+ = \mathbb{Z}[SL(2,\mathbb{Z})^+]([I]-[T]-[T'])$.

Pour M et M' appartenant à $SL(2,\mathbb{Z})^-$, on a $M\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_M\\c_M\end{pmatrix} \neq M'\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b'_M\\d'_M\end{pmatrix}$ dans $\widetilde{\mathbb{P}_1(\mathbb{Q})}$, car les signes de a_M et b'_M, et de c_M et d'_M sont opposés. Soit $W = \sum_M u_M[M] \in \ker\widetilde{\Phi}^-$, alors nécessairement on a

$$\sum_M u_M\left[M\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right] = \sum_M u_M\left[M\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right] = 0$$

dans $\mathbb{Z}[\widetilde{\mathbb{P}_1(\mathbb{Q})}]$. Pour $M = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})^-$, posons $L(M) = \max\{a-c,\ d-b\} > 0$.
Soit $N = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}$ un élément du support de W tel que $L(N) = L(W)$, où $L(W)$ est le maximum des $L(M)$ pour M dans le support de W.

Si $L(N) = a - c$, on sait que toutes les matrices de $SL(2,\mathbb{Z})$ vérifiant $M\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ dans $\widetilde{\mathbb{P}_1(\mathbb{Q})}$ sont $\begin{pmatrix} a & b+ka \\ c & d+kc \end{pmatrix}$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Or $b \leq 0$ et $d \geq 0$, donc il existe un seul couple $(b,d) \in \mathbb{Z}^- \times \mathbb{Z}^+$ tel que $d - b \leq a - c$. La seule matrice pouvant appartenir à W, par définition de $L(W)$, est donc N, mais alors il faut $u_N = 0$, ce qui contredit le fait que N appartient au support de W. Le même raisonnement s'applique au cas où $L(N) = d - b$. Donc nécessairement ce support est vide, et $W = 0$ dans $\mathbb{Z}[SL(2,\mathbb{Z})^-]$.

Etudions maintenant $\ker \widetilde{\Phi}$. On sait que $\ker \widetilde{\Phi} \subset \ker \Phi$. On note $\mathcal{J}$ l'idéal

$$\mathcal{J} = \mathbb{Z}[SL(2,\mathbb{Z})]([I] - [T] - [T']) + \mathbb{Z}[SL(2,\mathbb{Z})]([I] + [S] + [S^2] + [S^3]).$$

On a dans $\mathbb{Z}[SL(2,\mathbb{Z})]$ la relation

$$[I] + [S] + [S^2] + [S^3] = ([I] + [U] + [U^2]) + ([-I] - [U] - [U^2])([I] - [T] - [T'])$$

ce qui prouve que $\mathcal{J} = \mathbb{Z}[SL(2,\mathbb{Z})]([I] - [T] - [T']) + \mathbb{Z}[SL(2,\mathbb{Z})]([I] + [U] + [U^2])$.
Soit W un élément de $\ker \Phi$. D'après la proposition 6.3 on a $W = W_1([I] - [T] - [T']) + W_2([I] + [S])$, avec W_1 et W_2 appartenant à $\mathbb{Z}[SL(2,\mathbb{Z})]$. Comme $[I] - [T] - [T'] \in \ker \widetilde{\Phi}$, on voit que $W \in \ker \widetilde{\Phi}$ si et seulement si $W_2([I] + [S]) \in \ker \widetilde{\Phi}$. Soit $W_2 = \sum_M u_M \begin{pmatrix} a_M & b_M \\ c_M & d_M \end{pmatrix}$, alors on a

$$\widetilde{\Phi}(W_2([I] + [S])) = \sum_M u_M \left(\begin{pmatrix} a_M \\ c_M \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -a_M \\ -c_M \end{pmatrix} \right).$$

Par définition de $\widetilde{\Phi}$, on voit donc que $W \in \ker \widetilde{\Phi}$ si et seulement si W_2 vérifie

$$\sum_M u_M \left[M \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \sum_M u_M \left[M \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]. \tag{4.1}$$

Soit $W = W_1([I] - [T] - [T']) + W_2([I] + [S])$ un élément de $\ker \widetilde{\Phi}$. W_2 satisfait donc la relation 6.1. On va montrer que $W_2([I] + [S]) \in \mathcal{J}$. On peut écrire

$$W_2 = \sum_{\substack{\alpha = \frac{a}{c} \\ \left(\begin{smallmatrix} a \\ c \end{smallmatrix}\right) \in Supp(\widetilde{\Phi}(W_2))}} \left(\sum_{M_\alpha^+} u_{M^+} M^+ + \sum_{M_\alpha^-} u_{M^-} M^- \right)$$

où M_α^+ (resp. M_α^-) décrit l'ensemble des matrices M vérifiant $M\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ (resp. $M\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ -c \end{pmatrix}$). La relation 6.1 nous montre que $\sum_{M_\alpha^+} u_{M^+} = \sum_{M_\alpha^-} u_{M^-}$.
Posons $W_2(\alpha) = \sum_{M_\alpha^+} u_{M^+} M^+ + \sum_{M_\alpha^-} u_{M^-} M^-$. On a

$$\sum_{M_\alpha^-} u_{M^-} M^-([I] + [S] + [S^2] + [S^3]) \in \mathcal{J},$$

donc modulo $\mathcal{J}$ on a

$$\begin{aligned} W_2(\alpha)([I]+[S]) &\equiv W_2(\alpha)([I]+[S]) - \sum_{M_\alpha^-} u_{M^-} M^-([I]+[S]+[S^2]+[S^3]) \\ &\equiv \sum_{M_\alpha^+} u_M M([I]+[S]), \end{aligned}$$

car si $M^- \in M_\alpha^-$, $M^- S^2 \in M_\alpha^+$. La relation (6.1) nous dit alors que

$$\sum_{M_\alpha^+} u_M = \sum_{M_\alpha^+} u_{M^+} - \sum_{M_\alpha^-} u_{M^-} = 0.$$

Soit $M_0 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $SL(2,\mathbb{Z})$. Les matrices de M_α^+ sont les matrices de la forme $M_0 T^k$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Ainsi on a $W_2(\alpha)([I]+[S]) \equiv \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k M_0 T^k([I]+[S])$ modulo $\mathcal{J}$, où les u_k sont presque tous nuls et vérifient $\sum_k u_k = 0$.
Or pour tout $M \in SL(2,\mathbb{Z})$ on a la relation dans $\mathbb{Z}[SL(2,\mathbb{Z})]$:

$$[M]([I]+[S]) = [MT]([I]+[S]) + ([M]-[MTS])([I]-[T]-[T']).$$

Cela nous montre par récurrence (montante ou descendante suivant le signe de k) que pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on a

$$M_0 T^k([I]+[S]) \equiv M_0([I]+[S]) \text{ modulo } \mathcal{J}.$$

Ainsi

$$W_2(\alpha)([I]+[S]) \equiv \left(\sum_k u_k\right) M_0([I]+[S]) = 0 \text{ modulo } \mathcal{J}.$$

On en déduit que $W_2([I]+[S]) \in \mathcal{J}$, donc $W \in \mathcal{J}$, ce qui montre la proposition. $\diamondsuit$

La proposition suivante est bien connue, et est utilisée par Lewis et Zagier dans [L-Z01].

Proposition 4.6. *Le monoïde $SL(2,\mathbb{Z})^+$ est engendré librement par T et T'.*

Démonstration : Montrons d'abord que T et T' engendrent $SL(2,\mathbb{Z})^+$. Soit $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ une matrice de $SL(2,\mathbb{Z})^+$. On note $s(M) = a+b+c+d$.
On suppose que $c \neq 0$ car sinon on a nécessairement $M = T^b$.

- Supposons que $a > c$. On distingue deux sous-cas :
  - Si $c > 1$, on effectue la division euclidienne de a par c : $a = mc+t$, avec $0 \leq t < c$. Alors on a $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = T^m \left(\begin{smallmatrix} t & b-md \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$. Comme $(b-md)c = td-1$, on en déduit que $(b-md)c \geq -1$. Par hypothèse $c > 1$ donc $b - md \geq 0$, ce qui prouve que $T^{-m}M \in SL(2,\mathbb{Z})^+$ et on a $s(T^{-m}M) = s(M) - (c+d)m < s(M)$ car $c+d > 0$ et $m \geq 1$.
  - Si $c = 1$ on a $T^{-(a-1)}M = \left(\begin{smallmatrix} 1 & b-(a-1)d \\ 1 & d \end{smallmatrix}\right)$ et $b-(a-1)d = d-1 \geq 0$, donc $T^{-(a-1)}M \in SL(2,\mathbb{Z})^+$ et $s(T^{-(a-1)}M) = s(M) - (a-1)(1+d) < s(M)$ car par hypothèse $a > c$ donc $a-1 > 0$.
- Supposons que $c \geq a$. On effectue la division euclidienne de c par a : $c = ka+l$, avec $0 \leq l < a$. Alors $T'^{-k}M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ l & d-kb \end{smallmatrix}\right)$. Comme $l \geq 0$, $a(d-kb) = lb+1 > 0$, ainsi $d - kb > 0$. Donc $T'^{-k}M \in SL(2,\mathbb{Z})^+$, et $s(T'^{-k}M) = s(M) - k(a+b) < s(M)$.

On réitère ce processus jusqu'à ce que $c = 0$. La matrice obtenue est alors T^h avec $h \geq 0$. Cela montre que $M = \prod_{i=1}^{n} T'^{a_i} T^{b_i}$, avec $a_i \geq 0$ et $b_i \geq 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

Montrons maintenant que ce monoïde est engendré librement. Pour cela, on va procéder par l'absurde : supposons que $M \in SL(2, \mathbb{Z})$ ait deux écritures différentes. On simplifie à droite jusqu'à ce que soit l'une des écritures se réduise à l'identité, soit on obtienne une égalité du type $M_1 T = M_2 T'$, où M_1 et M_2 appartiennent à $SL(2, \mathbb{Z})^+$.

- Supposons que $M_1 T = M_2 T' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Posons $M_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$. Comme les coefficients de ces matrices sont ≥ 0, on a $a = a_1 \leq b = a_1 + b_1$, et $c = c_1 \leq d = c_1 + d_1$. Or $b = b_2 \leq a = a_2 + b_2$, et $d = d_2 \leq c = c_2 + d_2$. On doit donc avoir $a = b$ et $c = d$, donc $b_1 = d_1 = 0$, ce qui est impossible puisque $M_1 \in SL(2, \mathbb{Z})$.
- Supposons que $I = TM$ ou que $I = T'M$, avec $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})^+$. On a $s(TM) = s(M) + c + d > s(M)$ et $s(T'M) = s(M) + a + b > s(M)$. Comme pour tout $M_1 \in SL(2, \mathbb{Z})^+$, on a $s(M_1) \geq 2$, on a $s(TM) \geq 3$ et $s(T'M) \geq 3$. Or $s(I) = 2$, on aboutit donc à une contradiction.

Cela prouve que ce monoïde est engendré librement. $\diamondsuit$

Bibliographie

[A-L78] A. Atkin et W. Li. Twists of newforms and pseudo-eigenvalues of W-operators. *Invent. Math.*, 48(3) :221–243, 1978.

[B-R89] D. Blasius et D. Ramakrishnan. Maass forms and Galois representations. In *Galois groups over* $\mathbf{Q}$ *(Berkeley, CA, 1987)*, pages 33–77. Springer, New York, 1989.

[Bum97] D. Bump. *Automorphic forms and representations.* Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[C-O77] H. Cohen et J. Oesterlé. Dimensions des espaces de formes modulaires. In *Modular functions of one variable, VI (Proc. Second Internat. Conf., Univ. Bonn, Bonn, 1976)*, pages 69–78. Lecture Notes in Math., Vol. 627. Springer, Berlin, 1977.

[C-Z93] Y. Choie et D. Zagier. Rational period functions for $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{Z})$. In *A tribute to Emil Grosswald : number theory and related analysis*, pages 89–108. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.

[D-I95] F. Diamond et J. Im. Modular forms and modular curves. In *Seminar on Fermat's Last Theorem (Toronto, 1993–1994)*, pages 39–133. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.

[D-S74] P. Deligne et J.-P. Serre. Formes modulaires de poids 1. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 7 :507–530 (1975), 1974.

[Duk95] W. Duke. The dimension of the space of cusp forms of weight one. *Internat. Math. Res. Notices*, (2) :99–109, 1995.

[Duk98] W. Duke. Bounds for arithmetic multiplicities. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Berlin, 1998)*, pages 163–172, 1998.

[F-M97] E. Fouvry et P. Michel. Théorie analytique des nombres et formes modulaires, 1997. Cours de D.E.A. de l'université Paris XI.

[Gel84] S. Gelbart. An elementary introduction to the Langlands program. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 10(2) :177–219, 1984.

[Hab83] K. Haberland. Perioden von Modulformen einer Variabler and Gruppencohomologie. I. *Math. Nachr.*, 112 :245–282, 1983.

[Hen89] G. Henniart. Formes de Maass et représentations galoisiennes (d'après Blasius, Clozel, Harris, Ramakrishnan et Taylor). (177-178) :277–302, 1989. Séminaire Bourbaki, Vol. 1988/89.

[Iwa97] H. Iwaniec. *Topics in classical automorphic forms.* American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.

[K-Z84] W. Kohnen et D. Zagier. Modular forms with rational periods. In *Modular forms (Durham, 1983)*, pages 197–249. Horwood, Chichester, 1984.

[Kob93] N. Koblitz. *Introduction to elliptic curves and modular forms.* Springer-Verlag, New York, second edition, 1993.

[L-Z01] J. B. Lewis et D. Zagier. Period functions for Maass wave forms. I. *Ann. of Math. (2)*, 153(1) :191–258, 2001.

[Lan76] S. Lang. *Introduction to modular forms.* Springer-Verlag, Berlin, 1976. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, No. 222.

[Lew97] J. B. Lewis. Spaces of holomorphic functions equivalent to the even Maass cusp forms. *Invent. Math.*, 127(2) :271–306, 1997.

[Man72] J. Manin. Parabolic points and zeta functions of modular curves. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 36 :19–66, 1972.

[Man73] J. Manin. Periods of cusp forms, and p-adic Hecke series. *Mat. Sb. (N.S.)*, 92(134) :378–401, 503, 1973.

[Mer94] L. Merel. Universal Fourier expansions of modular forms. In *On Artin's conjecture for odd* 2*-dimensional representations*, pages 59–94. Springer, Berlin, 1994.

[Miy89] T. Miyake. *Modular forms.* Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[Roy01] E. Royer. *Sur les fonctions L de formes modulaires*, 2001. Thèse, Université Paris XI.

[Sch74] B. Schoeneberg. *Elliptic modular functions : an introduction.* Springer-Verlag, New York, 1974.

[Ser70] J.-P. Serre. *Cours d'arithmétique.* Presses Universitaires de France, Paris, 1970.

[Ser77] J.-P. Serre. Modular forms of weight one and Galois representations. In *Algebraic number fields : L-functions and Galois properties (Proc. Sympos., Univ. Durham, Durham, 1975)*, pages 193–268. Academic Press, London, 1977.

[Shi59] G. Shimura. Sur les intégrales attachées aux formes automorphes. *J. Math. Soc. Japan*, 11 :291–311, 1959.

[Sho81] V. V. Shokurov. Shimura integrals of cusp forms. *Math. USSR Isvestija*, 16 :603–646, 1981.

[Won99] S. Wong. Automorphic forms on GL(2) and the rank of class groups. *J. Reine Angew. Math.*, 515 :125–153, 1999.

[Zag85] D. Zagier. Modular parametrizations of elliptic curves. *Canad. Math. Bull.*, 28(3) :372–384, 1985.

[Zag91] D. Zagier. Periods of modular forms and Jacobi theta functions. *Invent. Math.*, 104(3) :449–465, 1991.

Périodes de formes modulaires de poids 1

François Martin

Résumé. Le but principal de cette thèse est d'étendre au cas des formes modulaires de poids 1 la théorie classique des périodes de formes modulaires de poids supérieur ou égal à 2. Dans un premier temps, on associe une fonction période à une forme parabolique sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ de poids 1 pour Γ ; elle appartient à l'espace $\mathcal{L}_\Gamma$ des fonctions analytiques vectorielles ψ de $\mathbb{R}_+ \times \Gamma \backslash SL(2,\mathbb{Z})$ dans $\mathbb{C}$, qui vérifient les relations de Manin caractéristiques des périodes et tendent vers 0 en l'infini. On montre que cette correspondance est un isomorphisme d'espaces vectoriels complexes. On définit ensuite une involution sur $\mathcal{L}_\Gamma$ qui identifie $\mathcal{S}_1(\Gamma)$ à la partie de $\mathcal{L}_\Gamma$ invariante par cette involution. On décrit ensuite en terme de périodes le produit scalaire de Petersson, et on étend la construction précédente au cas des formes non paraboliques, la formule asymptotique étant remplacée par $\psi(x, \Gamma g) = A \log x + B + o(1)$. On donne une interprétation cohomologique en identifiant l'espace des périodes avec la cohomologie parabolique de $SL(2,\mathbb{Z})$ dans un module qui dépend de Γ. Enfin, on se place dans le cas où Γ est le groupe arithmétique $\Gamma_1(N)$, et on décrit l'action des opérateurs de Hecke sur l'espace des périodes $\mathcal{L}_\Gamma$. On montre ensuite que les coefficients de Taylor des composantes de la fonction période en $x = 0$ sont combinaisons linéaires des valeurs aux entiers négatifs des séries L de la forme modulaire tordues par les caractères de Dirichlet modulo N, ce qui permet de reconstruire la forme modulaire à partir de ces valeurs. On donne en appendice quelques propriétés des anneaux du groupe $SL(2,\mathbb{Z})$ et du semi-groupe $SL(2,\mathbb{Z})^+$.

Discipline : mathématiques

Mots-clés : formes modulaires de poids 1, périodes, fonctions L, relations de Manin

---

Adresse de l'U.F.R. :
U.F.R. de Mathématiques
Case 7012
Université Paris 7 - Denis Diderot
2, place Jussieu
75251 Paris Cedex 05
France

Adresse électronique : `francois.martin@polytechnique.org`