

École Doctorale Paris Centre

THÈSE DE DOCTORAT

Discipline : Mathématiques

présentée par

Ismaël BOUYA

Instabilités en magnétohydrodynamique

dirigée par David GÉRARD-VARET
codirigée par Emmanuel DORMY

Soutenue le 10 juin 2013 devant le jury composé de :

M. Yann BRENIER	École polytechnique	rapporteur
M. Benoît DESJARDINS	ENS	examineur
M. Bruno DESPRÉS	UPMC	examineur
M. Emmanuel DORMY	CNRS/ENS/IPGP	codirecteur
M. David GÉRARD-VARET	Université Paris Diderot	directeur
M. Andrew GILBERT	University of Exeter	rapporteur

Institut de Mathématiques de Jussieu - Paris Rive Gauche
Campus des Grands Moulins, Bâtiment Sophie Germain
5, rue Thomas Mann
75 013 Paris

École doctorale Paris centre Case 188
4 place Jussieu
75 252 Paris cedex 05

À ceux qui ont la chance de savoir lire.

*Les mathématiques consistent à prouver
des choses naturelles par des moyens
complexes. Heureusement, la physique
permet d'expliquer naturellement des
phénomènes complexes.*

Remerciements

Cette thèse est surtout l'achèvement de plusieurs années de travail, qui aurait sans doute été beaucoup plus difficile à vivre sans tous ceux qui m'ont suivi et soutenus au jour le jour pendant tout ce temps, et à qui le reste de cette page est dédiée.

Je tiens tout d'abord à remercier toute ma famille, qui m'a toujours soutenu dans ce que je faisais, même si je ne suis pas très fort généralement pour exprimer ma gratitude.

Un grand merci à mes deux directeurs de thèse, David et Emmanuel, qui m'ont donné un bagage à la fois mathématique et physique, chose qui n'est pas évidente *a priori* au vu de l'image qu'ont habituellement les mathématiciens des physiciens et inversement. Merci donc à David particulièrement pour avoir eu l'esprit assez ouvert pour me permettre de travailler avec Emmanuel et réaliser toute la partie physique de cette thèse.

Merci également à tous ceux qui m'ont permis de me changer lors des idées dans mes activités extra-scolaires variées, je pense à Tiphaine, Simon, Émilie, Camille, Béatrice, David, Manon, Mathias, Nathalie, Florian pour la danse, Guillaume, Victor, Pierre et Manu pour l'improvisation ; et surtout tous les cirqueux passés et présent, Christophe, Marie, Alice, Lucie, Jérôme, Paul, Adeline, Thibaut parti trop tôt, Émilie, Séverine, Florent, Chloé, Hervé, Rémi, Anne-Lise, Claude, et tant d'autres auxquels je ne pense pas sur le coup ou qui ont leur place séparée, que j'ai portés à l'endroit comme à l'envers jusqu'à pas d'heure. Toutes ces personnes que je ne reverrai plus aussi souvent pendant mon voyage en Suède, mais que je retrouverai avec plaisir à mon retour.

À ceux que je croise plus rarement dans la vraie vie, le forum de l'ENS qui m'a aidé quand j'avais des questions compliquées, Olivier, Adrien, Ovi.

Une petite pensée également pour mes collègues et co-bureaux en maths, Christophe, petit frère de thèse qui finalement a terminé avant moi, Robert, Xin, Victoria, Paloma, Fathi, Élodie, Johan, Pierre-Guy et le reste du BDD pour ceux que je voyais le plus souvent avant de passer le plus clair de mon temps chez les physiciens où j'ai rencontré Ludo, Ludivine, François, Martin, Raphaël, Florence. Deux groupes de gens très différents mais qui ne me semblent pas si incompatibles qu'ils semblent le penser.

Une pensée pour mes quelques amis d'enfance qui sont suffisamment rares pour se compter sur les doigts d'une demi-main, Antoine et Thibault, qui ont fait le déplacement pour venir me voir.

Cette page touche à sa fin, et j'espère que ceux que j'aurais oubliés ne m'en voudront pas trop, mais j'ajoute quand même une grosse pensée pour deux personnes en particulier, qui ont dû se reconnaître dans presque toutes les situations citées ci-dessus en se demandant si je les y avais oubliées : Denise sans qui j'aurais sans doute continué à sombrer dans le mauvais côté de la geekitude à mon entrée à l'ENS, et Auréliane qui m'a supporté pendant toute la fin de ma thèse et avec qui je partage maintenant ma vie, avec tout ce que cela implique.

Résumé

La magnétohydrodynamique, ou effet dynamo, consiste en la génération d'énergie électrique à partir d'énergie mécanique. Plus précisément, on étudie l'évolution d'un champ magnétique généré par un fluide conducteur. Ce phénomène se retrouve dans les planètes, les étoiles, ou même les galaxies, où le champ magnétique provient du mouvement interne.

Dans cette thèse, nous nous intéressons plus précisément aux instabilités en magnétohydrodynamique : partant d'un fluide conducteur sans champs magnétique, est-ce qu'une perturbation légère de l'écoulement et du champ magnétique (par exemple, un résidu de champs magnétique arrivant d'un autre système) peut engendrer une amplification de ce champ magnétique, créant ainsi une dynamo ? La deuxième interrogation consiste en le temps nécessaire pour obtenir une telle amplification du champ magnétique.

Cette thèse consiste donc en l'étude de ces deux questions, et donne deux résultats d'ordre théorique et deux résultats d'ordre numérique.

Mots-clefs

Magnétohydrodynamique, effet alpha, dynamo rapide, instabilités.

Instabilities in magnetohydrodynamics

Abstract

The magnetohydrodynamics, or dynamo effect, involves the generation of electrical energy from mechanical energy. More specifically, it consists in studying the evolution of a magnetic field generated by a fluid conductor. This phenomenon is found in planets, stars, or even galaxies, where the magnetic field comes from the inner movement.

In this thesis, we focus on magnetohydrodynamic instabilities: starting from a conductive fluid with no magnetic field, is a slight disturbance of the flow and magnetic fields (for example, a residue of the magnetic field coming from another system) sufficient to give an amplification of the magnetic field, thus creating a dynamo? The second question consists in the time required to achieve such an amplification of the magnetic field.

This thesis is the study of these two questions, and gives two theoretical results and two numerical results.

Keywords

Magnetohydrodynamics, alpha effect, fast dynamo, instabilities.

Table des matières

1	Introduction	13
1.1	Les équations de la magnétohydrodynamique (MHD)	15
1.1.1	L'équation d'induction	15
1.1.2	L'équation de Navier-Stokes	16
1.1.3	Adimensionnement, système complet	16
1.1.4	Conditions aux limites et géométrie	17
1.2	Les théorèmes anti-dynamo	17
1.3	Un mécanisme dynamo : l'effet alpha	19
1.3.1	L'effet alpha	19
1.3.2	Saturation de la dynamo	20
1.4	Les dynamos rapides	20
1.4.1	Explication physique	21
1.4.2	Formulation mathématique	22
1.4.3	Condition nécessaire pour une dynamo rapide	22
1.4.4	Écoulement dynamo rapide non stationnaire	26
1.5	Méthodes numériques	27
1.5.1	Schémas spectraux	28
1.5.2	Schémas spatiaux	30
1.6	Présentation des travaux réalisés pendant la thèse	33
1.6.1	Étude théorique	33
1.6.2	Étude numérique	38
I	Théorie : Instabilités dynamos à différents régimes de Reynolds magnétiques	43
2	Instability of the forced magnetohydrodynamics system at moderate Reynolds number	45
2.1	Introduction	45
2.2	Linear instability	49
2.2.1	Linearized equation	50
2.2.2	Study of the first term in the development	51
2.2.3	Simplification of the equation	53

2.2.4	Case $\varepsilon = 0$	53
2.2.5	Study of the matrix α	54
2.2.6	Conclusion to the linear case	59
2.3	Nonlinear instability	59
2.3.1	Proof of the nonlinear instability	61
2.3.2	Estimation of the growing time	63
3	Instability of the magnetohydrodynamics system at vanishing Reynolds number	65
3.1	The induction equation	65
3.2	Case $\varepsilon = 0$	69
3.2.1	An eigenvalue problem	69
3.3	Existence of growing mode for $\varepsilon > 0$	71
3.4	Implicit function theorem	72
3.5	Nonlinear instability	73
3.5.1	Proof of the nonlinear instability	74
II	Calcul numérique : Étude de dynamo rapide	77
4	Revisiting the ABC flow dynamo	79
4.1	Introduction	79
4.2	Numerical method	80
4.3	Modes crossing	82
4.4	Oscillatory dynamics	86
4.5	Eigenvalues coalescence	87
4.6	Asymptotic behaviour	90
4.7	Conclusion	91
5	Écoulement ABC pulsé	97
5.1	Comparaison entre l'écoulement pulsé et l'écoulement non-pulsé . . .	99
5.2	Poches d'instabilités	101
5.2.1	Équation de Mathieu	101
5.2.2	Équation d'induction	104
5.3	Coupure en epsilon	105
	Perspectives et conclusion	113
	Bibliographie	115

Summary of the introduction

We study in this thesis instabilities in magnetohydrodynamics. The thesis is separated in two main parts: first a theoretical study and then a numerical study.

- In the theoretical study, we give a general instability result in two different Reynolds magnetic regimes, that is “moderate” R_m and “vanishing” R_m . This results relies on a mechanism called *alpha effect*, that corresponds to a transfer of energy from the fluid to the magnetic field thanks to an electromotive force, in order to provide a linear instability of the magnetic field (two different methods are used depending on whether one considers the vanishing case or the moderate case). Then we prove that the reaction of the magnetic field does not prevent this growth from reaching a reasonable value, even when starting from a very small initial perturbation.
- In the numerical study, we want to investigate numerically high Reynolds numbers in order to demonstrate fast dynamo action in the case of the ABC flow. An efficient code was written in order to study very high values of the magnetic Reynolds number.

We also study the effect of a small perturbation of the ABC flow to its dynamo property. The aim is to point out the fact that even a very small perturbation can produce higher growth rate than a non-perturbed system. This potential smallness highly depends on the given R_m .

In the introduction of this thesis, we give some tools used in the sequel.

Equations of magnetohydrodynamics First, we derive the equations of magnetohydrodynamics that will be used all along the thesis (1.6,1.7,1.8,1.10)

$$\partial_t \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{R_m} \Delta \mathbf{B}, \quad (1)$$

$$\partial_t \mathbf{u} = -\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nabla p + \frac{1}{R_e} \Delta \mathbf{u} + (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}, \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (4)$$

Mathematically, we say that we have a dynamo effect when $((\mathbf{u}, \mathbf{B}) = (\mathbf{u}_0, \mathbf{0}))$ is an instable solution of this system, that is, a small perturbation of this solution will result in an exponential growth of the magnetic field.

We will limit our results to the case of a periodic ($\mathbb{T}^3$ or $\mathbb{R}/T_1\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/T_2\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/T_3\mathbb{Z}$) geometry. This configuration is very convenient as it is simpler to study than the full 3D-space. However, results in this kind of geometry are actually often extensible to a spherical geometry.

Anti-dynamo theorems The first theorems concerning dynamo actions were actually negative results. We recall here the two main negative theorems (1.2,1.3). In short, they show that the simplest flow that can be considered (e.g. two-dimensional) cannot act as dynamos.

Alpha effect The main dynamo mechanism is called the *alpha effect*, introduced by Parker in 1955 [Par55]. This effect consists in a growth of the magnetic field on a physical scale much larger than the one of the fluid. This effect is made possible by the non-linear term $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$ in the induction equation.

However, this effect will result in a loss of energy from the fluid: the dynamo cannot grow forever and will eventually saturate to some value (1.24).

Fast dynamos Fast dynamo action is essential to the understanding of the origin of magnetic field in large astrophysical objects such as stars. Physically, this corresponds to a growth of the magnetic field on an advective time rather than on a diffusive time (1.2). Defining the magnetic Reynolds number as (1.26)

$$R_m = \frac{\tau_\nu}{\tau_u}, \quad (5)$$

highlights that slow dynamo action will have a growth rate dropping to 0 as R_m tends to infinity, whereas a fast dynamo will exhibit behaviour that will become independent from R_m as it gets higher.

Mathematically, that means that the highest spectral value of the operator associated to the induction equation will have a positive limit as R_m tends to infinity (1.30).

Vishik [Vis89] gave a very restrictive theorem concerning fast dynamos (1.7): its streamlines have to provide some kind of “lagrangian chaos” to expect fast dynamo. Two nearby streamlines have to separate exponentially fast in time (1.3) somewhere in the flow.

Stretch-Twist-Fold A very simple (but idealised) mechanism has been imagined to provide fast dynamo action. It is called the Stretch-Twist-Fold mechanism (1.4). Many experiments and numerical examples try to copy this kind of mechanism. This is often achieved using pulsed flow that will optimise magnetic field stretching through time dependence.

Numerical methods During this thesis I wrote two numerical codes. One is based on a pre-existing code and relies on spectral methods. The second uses a spatial finite volume grid. The spectral method is used in the case of a kinematic dynamo, i.e. the induction equation only is solved with the ABC flow: the fact that we have an analytical flow with a very simple expression makes it very convenient to write an efficient spectral code (1.48). Three time-stepping schemes were written to compare computing time and ensure the reliability of the results in the asymptotic limit.

A spatial finite volume code was written to solve the complete MHD system. The main point in solving the induction equation is to use the fact that the divergence free condition is conserved. This property is maintained at the discrete level using the “Yee grid” (1.6). Concerning the Navier-Stokes equation, we use a semi-Lagrangian method to solve the system, and an iterative solver to ensure the incompressibility condition at each step.

Presentation of the work

Theoretical study Two theorems were proven during this thesis, giving general instability results at vanishing (1.9, 3.1) and moderate (1.8, 2.1) magnetic Reynolds numbers.

Numerical study We made two numerical studies concerning the ABC dynamo: a general study of the $A:B:C = 1:1:1$ dynamo, and the study of the effect of a small perturbation of an ABC flow to its dynamo property.

Chapitre 1

Introduction

Indépendamment de son utilisation par l'Homme depuis plus de 2000 ans, le champ magnétique terrestre est d'une aide précieuse à plusieurs espèces animales pour se repérer, et la vie sur Terre serait sans doute beaucoup plus difficile sans la présence de ce champ qui la protège des effets néfastes du Soleil. Si on sait (ou soupçonne) depuis déjà longtemps que le champ magnétique est créé par les mouvements internes de la Terre, le phénomène reste difficile à prévoir et expliquer. En effet, les premiers modèles ayant tenté d'expliquer le phénomène, s'ils avaient été réalistes, auraient abouti à la disparition rapide du champ magnétique terrestre, ce qui n'est évidemment pas le cas !

On parle d'effet dynamo lorsqu'un fluide conducteur en mouvement engendre une croissance du champ magnétique malgré les effets résistifs lui faisant perdre de l'énergie. C'est par exemple le cas du fer liquide dans le noyau terrestre. Ce champ modifie en retour le mouvement du fluide (saturation non-linéaire), ce qui crée une interaction entre le *champ de vitesse* du fluide et le *champ magnétique*. Une telle interaction est loin d'être triviale et les mécanismes de génération d'un champ magnétique stable sont encore mal compris.

La Terre, et plus généralement les planètes, ne sont pas les seuls corps célestes concernés par l'existence d'un champ magnétique : on trouve aussi des champs magnétiques émanant des étoiles ou des galaxies. On sait maintenant mettre en équations la génération de ces champs magnétiques. On a également reproduit à l'échelle de laboratoire certains phénomènes que l'on observe dans les corps célestes, par exemple les inversions (irrégulières, en moyenne toutes les centaines de milliers d'années pour la Terre, ou de manière plus régulière tous les onze ans pour le Soleil) du pôle Nord et du pôle Sud magnétiques.

Cependant, simuler numériquement ce qui se passe dans une planète, ou dans une étoile, reste encore hors de portée des ressources informatiques actuelles. En effet, dans les étoiles, le nombre de Reynolds magnétique, paramètre décrivant l'importance du terme advectif (temps caractéristique de déplacement du fluide) par rapport à celui du terme diffusif dans le fluide conducteur au cœur des étoiles, est de l'ordre de 10^{10} , bien au delà de ce qui est atteignable avec des simulations numériques ou

même des expériences, qui dépassent difficilement 10^4 – plus le paramètre est grand, plus la complexité dans le calcul augmente.

Un autre enjeu associé à ces valeurs extrêmes des nombres de Reynolds magnétiques concerne ce qu'on appelle les dynamos “rapides”, c'est-à-dire amplifiant le champ sur le temps advectif. En effet, si l'on est capable actuellement de trouver des exemples numériques et expérimentaux de dynamos, la plupart des croissances observées se font sur le temps caractéristique diffusif du système. Pour les étoiles, ce temps magnétique est de l'ordre de l'âge de l'Univers, ce qui n'est évidemment pas en accord avec les observations.

Une meilleure compréhension de la magnétohydrodynamique répondrait également à un enjeu de vie quotidienne. Le premier est la perspective d'un moteur à propulsion n'utilisant pas de pièces solides, et permettant ainsi d'éviter l'usure des matériaux. L'utilisation comme générateur de courant permettrait aussi de profiter de températures beaucoup plus élevées que celles autorisées par l'utilisation de pièces solides. En médecine, le guidage précis de médicaments dans le corps des patients pourrait aussi faire partie des applications possibles de la magnétohydrodynamique.

Cette thèse traite deux des aspects de la magnétohydrodynamique : l'étude théorique et l'étude numérique.

- Dans l'étude théorique, objet de la première partie, nous donnons un résultat générique d'instabilité dynamo dans deux situations, à savoir des régimes de nombres de Reynolds magnétiques “modérés”, et des régimes de nombres de Reynolds magnétiques “évanescents”. Les résultats utilisent un mécanisme dit d'effet alpha, qui correspond à un transfert d'énergie du fluide vers le champ magnétique grâce à une force électromotrice, pour mettre en évidence une instabilité linéaire du champ magnétique, par deux méthodes différentes. Ensuite, dans les deux cas, on montre que la réaction du champ magnétique sur le fluide n'empêche pas cette instabilité de croître jusqu'à une valeur suffisante même en partant d'une perturbation initiale très faible.
- Dans l'étude numérique, objet de la deuxième partie, le but de notre recherche est d'étudier numériquement des nombres de Reynolds magnétiques “grands” afin de mettre en évidence un effet de dynamo rapide dans un cas particulier, celui de l'écoulement “ABC”, écoulement qui offre depuis longtemps des perspectives intéressantes de ce point de vue, mais très limitées par les ressources informatiques disponibles. Un code efficace a été développé, permettant d'étudier des nombres de Reynolds magnétiques beaucoup plus grands qu'atteints jusqu'alors sur les supports informatiques actuels.

Concernant l'écoulement ABC, nous étudions également numériquement l'effet d'une perturbation de cet écoulement sur l'effet dynamo associé. L'objectif est de mettre en évidence le fait qu'une toute petite perturbation d'un écoulement peut engendrer une meilleure dynamo que pour l'écoulement non perturbé, même avec des perturbations très petites, potentiellement d'autant plus petites que le nombre de Reynolds magnétique est grand.

Dans la suite de cette introduction nous présentons tout d'abord les équations de

la magnétohydrodynamique dites “single fluid”, équations que nous étudions pendant toute cette thèse. Nous présentons également quelques résultats négatifs sur l’effet dynamo (absence d’effet dynamo sous certaines conditions), résultats importants pour comprendre la complexité du phénomène physique sous-jacent. Ensuite, nous expliquons plus en détail l’effet alpha, mécanisme dynamo le plus connu, et ce que représente une dynamo rapide, avec un théorème donnant une condition nécessaire très importante pour avoir une telle dynamo. Enfin nous donnons une présentation des méthodes numériques développées pendant cette thèse, avant de présenter plus en détails les travaux évoqués ci-dessus.

1.1 Les équations de la magnétohydrodynamique (MHD)

Les équations de la MHD reflètent deux phénomènes différents : d’une part l’évolution du champ magnétique, d’autre part l’évolution de l’écoulement du fluide conducteur : le champ magnétique est amplifié par le mouvement du fluide conducteur (induction), et le champ magnétique a en retour un effet sur l’écoulement *via* la force de Laplace. Nous allons ici décrire les équations en jeu dans ce phénomène, équations qui seront utilisées tout au long de cette thèse.

1.1.1 L’équation d’induction

Concernant l’évolution du champ magnétique, on utilise le système bien connu des équations de Maxwell :

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \partial_t \mathbf{E}, \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_c / \varepsilon_0, \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.4)$$

où $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{j}$, ρ_c désignent respectivement le champ électrique, le champ magnétique, la densité de courant et la densité de charge locale, et les constantes μ_0 , ε_0 , c désignent la perméabilité magnétique du vide, la permittivité diélectrique du vide et la célérité de la lumière dans le vide (avec la relation $\mu_0 \varepsilon_0 c^2 = 1$).

On utilise également la loi phénoménologique d’Ohm :

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}), \quad (1.5)$$

où σ est la conductivité électrique du milieu et $\mathbf{u}$ la vitesse de l’écoulement.

En considérant des vitesses caractéristiques bien inférieures à celle de la lumière on obtient, en combinant les équations de Maxwell et la loi d’Ohm, l’équation d’induction :

$$\partial_t \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \nu_m \Delta \mathbf{B}, \quad (1.6)$$

où $\nu_m = \frac{1}{\mu_0 \sigma}$ (diffusivité magnétique), avec la condition de divergence nulle :

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (1.7)$$

Le système constitué de ces deux dernières équations (1.6, 1.7) constitue la partie inductive du système (MHD).

Remarque 1.1

L'absence de monopole magnétique (c'est-à-dire la condition de divergence nulle (1.7)) est conservée par l'équation d'induction (1.6) dès lors qu'elle est valable à l'instant initial. Cette propriété peut être utile à prendre en compte lors des modélisations numériques.

1.1.2 L'équation de Navier-Stokes

L'évolution du fluide conducteur satisfait l'équation de Navier-Stokes, soumis à la force de Laplace $\mathbf{j} \times \mathbf{B} \approx \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}$:

$$\rho \partial_t \mathbf{u} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p - \nu \Delta \mathbf{u} = \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}, \quad (1.8)$$

où ν désigne la viscosité cinématique du fluide et p la pression dans le fluide, avec la condition de conservation de la masse :

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (1.9)$$

où ρ désigne la densité de masse du fluide. Dans la suite, on considérera uniquement un fluide incompressible, auquel cas cette dernière équation s'écrit simplement comme une condition de divergence nulle :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (1.10)$$

1.1.3 Adimensionnement, système complet

On effectue les changements de variables suivant :

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}/L, \quad t \rightarrow t \times U/L, \quad (1.11)$$

$$\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{u}/U, \quad p \rightarrow p/(\rho \times U^2), \quad \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B}/\sqrt{\mu_0 \rho U^2}, \quad (1.12)$$

où L représente la longueur caractéristique de variation de l'écoulement, et U l'amplitude caractéristique du champ de vitesse associé.

On introduit également les deux nombres de Reynolds :

- Magnétique : $R_m = \mu_0 \sigma U L = \frac{UL}{\nu_m}$,
- Hydrodynamique : $R_e = \frac{UL}{\nu}$.

Le système (MHD) complet s'écrit alors sous forme adimensionnée :

$$\partial_t \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{\text{R}_m} \Delta \mathbf{B}, \quad (1.13)$$

$$\partial_t \mathbf{u} = -\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nabla p + \frac{1}{\text{R}_e} \Delta \mathbf{u} + (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}, \quad (1.14)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.15)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (1.16)$$

Mathématiquement, on parle d'effet dynamo lorsque ce système admet une solution de la forme

$$(\mathbf{u}, \mathbf{B}) = (\mathbf{u}_0, \mathbf{0}) \quad (1.17)$$

qui est instable, c'est-à-dire qu'une petite perturbation aboutira à une croissance du champ magnétique.

1.1.4 Conditions aux limites et géométrie

Si l'espace dans lequel nous vivons peut être assimilé à $\mathbb{R}^3$ (au moins dans une bonne approximation), l'étude dans cet espace n'est pas aisée, aussi bien d'un point de vue numérique que mathématique, car non borné. Plusieurs aménagements sont possibles, en utilisant par exemple la géométrie des objets que l'on veut considérer (par exemple en profitant de la géométrie sphérique pour les planètes et étoiles).

Dans cette thèse, on s'intéressera spécifiquement à des domaines périodiques de la forme $\mathbb{T}^3$ ou $\mathbb{R}/T_1\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/T_2\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/T_3\mathbb{Z}$, du point de vue numérique et mathématique. Si cette configuration a l'inconvénient de ne pas avoir d'application directe d'un point de vue physique, elle a cependant deux avantages :

- La configuration périodique a l'avantage d'avoir des conditions aux limites "simples" à exprimer, et de correspondre à un domaine borné, ce qui rend l'étude beaucoup plus abordable d'un point de vue mathématique (et numérique!).
- Les résultats obtenus en configuration périodique sont en pratique assez proches de ceux obtenus en géométrie sphérique : bien souvent des résultats démontrés dans le cas périodique sont adaptables aux cas sphériques.

En revanche, un peu d'attention doit être portée au fait qu'un champ magnétique uniforme est une solution stationnaire dans cette configuration, avec une énergie finie (contrairement au cas $\mathbb{R}^3$ où l'énergie est infinie et cette solution est donc physiquement non valide).

1.2 Les théorèmes anti-dynamo

Les premiers théorèmes relatifs à la stabilité du système (MHD) ont été des théorèmes anti-dynamo, c'est-à-dire des théorèmes donnant des situations où le système ne peut donner lieu à une croissance du champ magnétique.

Les deux exemples les plus frappants sont les théorèmes de Zeldovich et de Cowling :

Théorème 1.2 (Zeldovich 1956)

Un champ de vitesse planaire $\mathbf{u} = (u_x(x, y, z, t), u_y(x, y, z, t), 0)$ dans un espace cartésien périodique $\mathbb{T}^3$ ne peut pas amplifier un champ magnétique.

C'est-à-dire que pour toute solution $(\mathbf{u}, \mathbf{B})$ suffisamment régulière (disons C^∞) du système d'équations avec $u_z = 0$, il existe $\alpha > 0$ et $C > 0$ tels que

$$\|\mathbf{B}(t)\|_{L^2([0, 2\pi]^3)} \leq C e^{-\alpha t}. \quad (1.18)$$

Théorème 1.3 (Cowling 1934)

On se place dans le cas d'un fluide incompressible, et dans un espace cartésien périodique $\mathbb{T}^3$. Alors un champ magnétique $\mathbf{B}(x, y, t)$ indépendant de z ne peut être maintenu par un effet dynamo.

C'est-à-dire que pour toute solution $(\mathbf{u}, \mathbf{B})$ suffisamment régulière (disons C^∞) du système d'équations avec $\partial_z \mathbf{B} = 0$, il existe $\alpha > 0$ et $C > 0$ tels que

$$\|\mathbf{B}(t)\|_{L^2([0, 2\pi]^3)} \leq C e^{-\alpha t}. \quad (1.19)$$

Comme suggéré plus haut, ces deux théorèmes du cas périodique ont une version en géométrie sphérique :

Corollaire 1.4

Un champ de vitesse $\mathbf{u} = \mathbf{u}_T(r, \theta, \phi, t)$ purement toroïdal (c'est l'analogue du champ planaire) ne peut entretenir une dynamo.

Pour le théorème de Cowling en version sphérique, on considère une situation où l'on a une sphère de rayon a contenant du fluide conducteur à l'intérieur et un isolant à l'extérieur.

Corollaire 1.5

Un champ magnétique à symétrie axiale $\mathbf{B}(r, \theta, t)$ ne peut être maintenu par un fluide.

Ainsi, ces deux théorèmes suggèrent que la représentation du champ magnétique telle qu'on l'imagine dans la Terre est doublement fautive :

- Le champ magnétique ne peut pas être à symétrie axiale (cf. Figure 1.1) comme pour un aimant classique.
- Le noyau liquide de la Terre ne peut pas avoir un simple mouvement de rotation autour de l'axe Nord-Sud.

Ainsi, ces deux théorèmes suggèrent que le mouvement du noyau des planètes (ou au centre des étoiles) est beaucoup plus complexe qu'un simple mouvement de rotation, et que le champ magnétique est beaucoup moins régulier qu'on ne le penserait au premier abord. D'un point de vue plus expérimental, on a expliqué par exemple que les taches visibles au télescope à proximité de l'équateur sur Jupiter sont dues à la forte variabilité spatiale du champ magnétique dans cette zone, avec beaucoup plus d'effets sur une planète gazeuse que sur une planète tellurique comme la Terre.

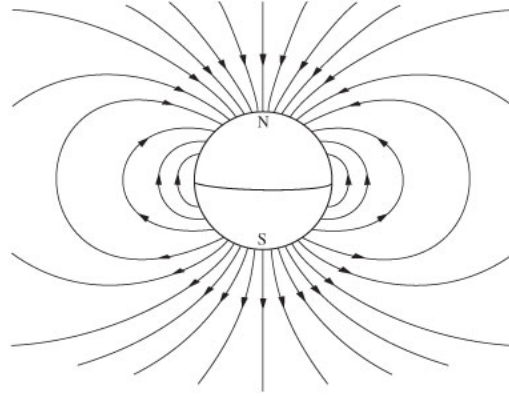


FIGURE 1.1 – Exemple de champ à symétrie axiale.

Tiré de http://cgiss.boisestate.edu/~kasper/geoph297wiki/index.php/Intro_to_magnetics

En d'autres termes, une situation avec trop de symétries est mauvaise pour l'effet dynamo.

Ces deux théorèmes ne sont pas les seuls à limiter les possibilités d'effets dynamo comme on les observe dans les astres célestes, et une autre limitation provient du concept de dynamo rapide, que nous introduirons dans une prochaine section, et qui fera également l'objet de cette thèse.

1.3 Un mécanisme dynamo : l'effet alpha

Pour compenser les résultats négatifs, des mécanismes permettant un effet dynamo ont été cherchés, de façon théorique et expérimentale. Le plus connu de ces mécanismes est l'"effet alpha", qui a été introduit initialement par Parker en 1955 [Par55].

1.3.1 L'effet alpha

L'effet alpha est un effet dynamo basé sur une séparation d'échelles spatiales. Le champ fluctue à l'échelle spatiale du fluide ("échelle courte"). Les fluctuations du champ et du fluide interagissent ensuite à plus grande échelle, créant la croissance.

L'interaction des fluctuations est permise par la présence du terme non linéaire dans l'équation d'induction, $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$ (terme appelé force électromotrice, en référence à la génération de courant dans une boucle conductrice à travers laquelle passe un champ $\mathbf{B}$ variable, et origine du terme en question), qui doit compenser la diffusion du champ magnétique (due au laplacien). Cet effet fera l'objet de façon théorique de la première partie de cette thèse.

Cet effet de champ moyen a été observé expérimentalement en 2001 par Stieglitz [SM01], en utilisant un écoulement de sodium liquide ressemblant à celui de G.O. Roberts [Rob72], et en mesurant la force électromotrice générée. De nombreux

exemples numériques d'écoulements ont également été donnés, mettant en évidence l'effet alpha. L'étude faite dans cette thèse donne un résultat générique d'existence de dynamo grâce à l'effet alpha.

1.3.2 Saturation de la dynamo

En pratique, la croissance du champ magnétique a un effet réciproque sur le champ de vitesse, donné par la force de Lorentz $((\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B})$ dans l'équation de Navier-Stokes). Cet effet réciproque a une conséquence négative sur la force électromotrice, qui devient du coup moins forte à mesure que le champ magnétique augmente, et la dynamo finit par saturer.

Pour quantifier le transfert d'énergie, on se place dans le cas "idéal" aussi bien de la part du fluide que du champ magnétique, c'est-à-dire qu'on prend $R_m = R_e = +\infty$. Les équations s'écrivent alors en dimensionné :

$$\partial_t \mathbf{B} - \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = 0, \quad (1.20)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \nabla p = \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}. \quad (1.21)$$

Les équations décrivant l'évolution de l'énergie sont alors :

$$\frac{1}{2\mu_0} \partial_t \mathbf{B}^2 = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}), \quad (1.22)$$

$$\frac{1}{2} \frac{D\rho \mathbf{u}^2}{Dt} + \mathbf{u} \cdot \nabla p = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{u} \cdot ((\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}), \quad (1.23)$$

soit après intégration :

$$\frac{DE_m}{Dt} = \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{B}), \quad (1.24)$$

$$\frac{DE_c}{Dt} + 0 = \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{\mu_0} \mathbf{u} \cdot ((\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}) = - \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{B}). \quad (1.25)$$

Ainsi, toute l'énergie perdue par le fluide *via* la force de Laplace est gagnée par le champ magnétique *via* le terme d'induction (ce qui est physiquement raisonnable!).

Notons qu'on a supposé ici des conditions spatiales périodiques, ou au moins l'espace complet avec une décroissance suffisante à l'infini. Le fait d'avoir un système borné et "non clos" (ce qui serait physiquement plus raisonnable) peut changer le mode de transfert de l'énergie

1.4 Les dynamos rapides

Nous allons expliquer dans cette section en quoi les dynamos rapides sont importantes pour expliquer les champs magnétiques dans les étoiles, et donner un théorème mathématique qui donne une condition nécessaire forte sur les possibilités d'avoir une dynamo rapide.

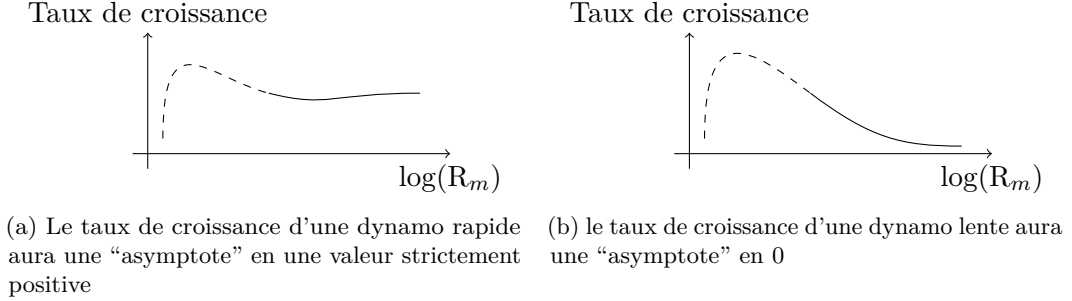


FIGURE 1.2 – Comportement d'une dynamo rapide et d'une dynamo lente à l'infini après une période transitoire à bas R_m (pointillée).

1.4.1 Explication physique

Le nombre de Reynolds magnétique a été défini précédemment :

$$R_m = \frac{UL}{\nu_m} = \frac{\tau_\nu}{\tau_u}, \quad (1.26)$$

où $\tau_u = L/U$, représente le temps caractéristique du transport dans l'écoulement ("temps advectif"), et $\tau_\nu = L^2/\nu_m$ représente le temps caractéristique de diffusion du champ magnétique ("temps diffusif"). Ainsi, le nombre de Reynolds représente le rapport entre le temps diffusif et le temps advectif. Numériquement et expérimentalement, on est capable d'atteindre des R_m de l'ordre de 10^4 . Pour extrapoler à ce qui se passe dans les étoiles, il faut donc monter à 15 ordres de grandeur de plus.

Pour simplifier l'explication, on considère uniquement l'équation d'induction (1.13) (avec la condition de divergence nulle pour $\mathbf{B}$ (1.15)), choisissant un écoulement fixé et indépendant du temps (dans l'échelle de temps advective (1.11)), et on étudie le système à différents R_m . Une dynamo croissant sur un temps caractéristique advectif aura un comportement "à l'infini" en R_m qui ne dépendra plus de R_m , tandis qu'une dynamo croissant sur un temps caractéristique diffusif aura un taux de croissance tendant vers 0 quand $R_m = \frac{\tau_\nu}{\tau_u}$ tend vers $+\infty$ (cf. Figure 1.2). Plus précisément, l'équation d'induction possède deux temps caractéristiques τ_u et τ_ν . En comportement asymptotique, on peut espérer un taux de croissance "à l'infini" de la forme $|\mathbf{B}| = e^{t/\tau}$, où τ est une constante de temps du système, donc de l'ordre soit de τ_u , soit de τ_ν . Si $\tau \propto \tau_u$, c'est-à-dire que le système croît sur un temps advectif, alors comme ce temps est constant, le taux de croissance exponentielle tend vers une limite finie ($1/\tau$) quand R_m devient très grand. À l'inverse, si $\tau \propto \tau_\nu$, c'est-à-dire que le système croît sur un temps caractéristique diffusif, alors ce taux de croissance exponentiel tend vers 0 comme $1/R_m$ quand R_m devient très grand.

Dans ce dernier cas, pour des R_m de l'ordre de 10^{10} tel qu'on en trouve dans les étoiles, cela signifierait que le champ magnétique est amplifié sur un temps caractéristique de l'ordre de 10^{20} s, comparable à l'âge de l'Univers !

L'exemple le plus proche de nous est celui du Soleil, pour lequel le temps résistif est de l'ordre de $\tau_\nu \simeq 2 \times 10^{19}$ secondes alors qu'on observe des inversions de polarité du champ magnétique tous les onze ans environ ! Le temps diffusif ne peut donc pas de façon raisonnable jouer de rôle prépondérant dans ce genre de mécanisme.

L'existence de dynamo rapide est donc une condition nécessaire pour expliquer la présence de champ magnétique dans les étoiles. Cependant, nous allons voir dans la sous-section suivante que l'existence de dynamo rapide demande un écoulement assez chaotique.

1.4.2 Formulation mathématique

À écoulement fixé, l'équation d'induction est linéaire. On considère l'opérateur $\mathcal{L}_{R_m}$ défini par :

$$\mathcal{L}_{R_m} \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{R_m} \Delta \mathbf{B}, \quad (1.27)$$

Vu comme opérateur de

$$D(\mathcal{L}_{R_m}) = \{\mathbf{B} \in L^2(\mathbb{T}^3), \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \text{ et } \mathcal{L}_{R_m}(\mathbf{B}) \in L^2(\mathbb{T}^3)\} \subset L^2(\mathbb{T}^3) \mapsto L^2(\mathbb{T}^3). \quad (1.28)$$

On note alors

$$\sigma(R_m) = \sup\{\operatorname{Re} \sigma, \sigma \in \operatorname{Spectr}(\mathcal{L}_{R_m})\}. \quad (1.29)$$

Notons que l'opérateur $\mathcal{L}_{R_m}$ est à résolvante compacte¹ : son spectre est constitué de valeurs propres, et $\sigma(R_m)$ est sa plus grande valeur propre.

Avec cette définition, on parle de dynamo rapide lorsque

$$\sigma_{\lim} = \limsup_{R_m \rightarrow +\infty} \sigma(R_m) > 0. \quad (1.30)$$

1.4.3 Condition nécessaire pour une dynamo rapide

Un théorème établi par M. Vishik en 1988 [Vis89] donne une condition nécessaire pour l'existence d'une dynamo rapide.

Fluide conducteur idéal

Pour comprendre l'origine de ce théorème, on commence par étudier le cas d'un fluide conducteur idéal, c'est-à-dire pour lequel $R_m = +\infty$. L'équation d'induction peut alors s'écrire sous la forme :

$$\partial_t \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{B}. \quad (1.31)$$

1. $\mathcal{L}_{R_m}$ peut être écrit comme une composée du Laplacien et d'une perturbation compacte de l'identité, $\mathcal{L}_{R_m} = \Delta \circ (\frac{1}{R_m} \operatorname{Id} + \Delta^{-1} \nabla \times (\mathbf{u} \times \cdot))$

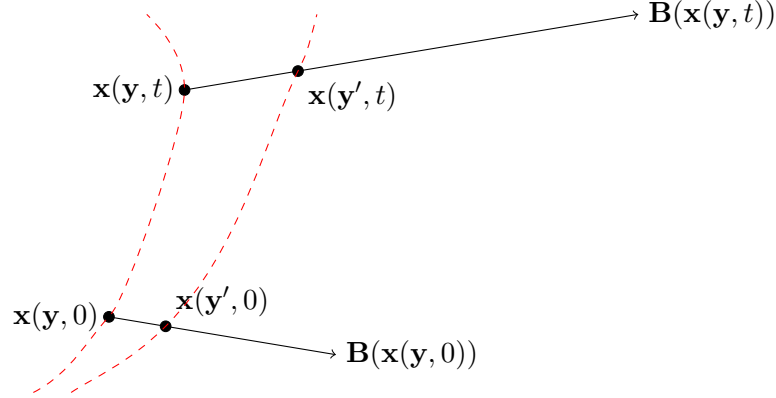


FIGURE 1.3 – Transport du champ magnétique le long des lignes de champ (pointillées) du fluide conducteur.

On introduit les coordonnées lagrangiennes : on note $\mathbf{x}(\mathbf{y}, t)$ la position de la particule qui était en $\mathbf{y}$ à $t = 0$, c'est-à-dire que $\mathbf{x}$ satisfait :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{x} &= \mathbf{u}(\mathbf{x}), \\ \mathbf{x}(\mathbf{y}, 0) &= \mathbf{y}, \end{cases} \quad (1.32)$$

et on introduit le champ magnétique en coordonnées lagrangiennes :

$$\mathbf{B}^L(\mathbf{y}, t) = \mathbf{B}(\mathbf{x}(\mathbf{y}, t), t), \quad (1.33)$$

solution de l'équation :

$$\partial_t \mathbf{B}^L(\mathbf{y}, t) = \mathbf{B}^L(\mathbf{y}, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}(\mathbf{y}, t), t). \quad (1.34)$$

Il s'agit d'une simple équation différentielle, à rapprocher de l'équation

$$\partial_t \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{x}(\mathbf{y}, t) = \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{x}(\mathbf{y}, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{y})) \quad (1.35)$$

quantifiant la divergence des trajectoires (*cf.* Figure 1.3).

Dans le cas où $R_m = +\infty$, la croissance exponentielle du champ magnétique est donc reliée à la divergence exponentielle des trajectoires, c'est-à-dire à du chaos lagrangien, notion que nous allons développer dans la suite de cette sous-section.

Exposant de Lyapunov

Définition 1.6 (Exposant de Lyapunov)

On note $g_*^t(\mathbf{x})$ la matrice définie par

$$(g_*^t(\mathbf{x}))_{i,j} = \left(\frac{\partial \mathbf{z}^i}{\partial \mathbf{x}^j} \right) (\mathbf{x}, t) \quad (1.36)$$

(C'est la différentielle de la matrice g^t telle que $\mathbf{z}(\mathbf{x}, t) = g^t \mathbf{x}$), et

$$\chi(\mathbf{x}, \eta) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log |g_*^t(\mathbf{x})\eta|. \quad (1.37)$$

L'exposant de Lyapunov en $\mathbf{x}$ est

$$\Lambda_{\text{lyap}}(\mathbf{x}) = \sup_{\eta} \chi(\mathbf{x}, \eta). \quad (1.38)$$

Physiquement, χ traduit la séparabilité exponentielle en temps de deux points $\mathbf{x}$ et $\mathbf{x}'$ avec $\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\| \leq \eta$ qui sont initialement infiniment voisins, et Λ_{lyap} la séparabilité maximale pour toutes les directions.

Dans le cas idéal précédent ($R_m = +\infty$), la positivité d'un exposant de Lyapunov ("chaos lagrangien") est nécessaire pour avoir une croissance du champ magnétique (notons que même un champ 2D pourrait être dynamo, donc le terme d'"effet dynamo" dans le cas idéal, tel que défini ici, n'est pas pertinent). Un théorème de Vishik montre que l'effet diffusif du cas non-idéal n'arrange pas les choses :

Théorème 1.7 (Vishik 1988)

On considère un écoulement régulier $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^3)$. Si l'exposant de Lyapunov associé à $\mathbf{u}$ est négatif ou nul en tout point de l'espace, alors une dynamo rapide ne peut exister.

En d'autres termes :

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \Lambda_{\text{lyap}}(\mathbf{x}) = 0 \Rightarrow \sigma_{\text{lim}} = 0. \quad (1.39)$$

Un résultat analogue s'applique à des champs $\mathbf{u}$ sur $\mathbb{R}^3$ avec $\mathbf{u} \rightarrow 0$ à l'infini.

Autrement dit, il est nécessaire que l'écoulement ait une part de "chaos" pour être une dynamo rapide dans un système. On note que le théorème de Vishik ne demande qu'un seul point pour lequel $\Lambda_{\text{lyap}}(\mathbf{x}) > 0$. Le chaos Lagrangien au sens usuel demande une valeur positive en tout point. Le résultat de [KY95] sur l'entropie topologique, dont on parle ci-dessous est beaucoup plus fort.

Taux de croissance limite maximal

L'exposant de Lyapunov donne le taux de croissance maximal d'un vecteur figé dans le fluide, mais ne donne pas pour autant un majorant du taux de croissance magnétique σ_{lim} . Une valeur plus plausible est l'"exposant de line-stretching" :

On considère une courbe $\mathcal{C}$ figée dans l'écoulement. Au bout d'un temps t , la courbe est devenue $M^t \mathcal{C}$. On pose alors :

$$h_{\text{line}} = \sup_{\mathcal{C}} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log |M^t \mathcal{C}|, \quad (1.40)$$

où $|M^t \mathcal{C}|$ désigne la longueur de la courbe $M^t \mathcal{C}$ (au bout d'un temps t). On remarque que $h_{\text{line}} \geq \Lambda_{\text{lyap}}$. Cette valeur comme taux de croissance maximal n'a été établie que

dans le cas d'un fluide conducteur idéal [KY95], bien qu'utilisée comme tel depuis bien avant déjà [FO88a]. Pour un fluide conducteur non-idéal, le fait qu'il majore σ_{lim} est toujours une conjecture.

En revanche, un majorant établi est l'"entropie topologique" de l'écoulement : deux points $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$ de l'écoulement sont dit (t, ε) -séparés s'ils sont distants de plus de ε au bout d'un temps inférieur à t . On définit alors $N_{\text{sep}}(t, \varepsilon)$ le nombre maximum de points pouvant être deux à deux (t, ε) -séparés. L'entropie topologique de l'écoulement est alors (*cf.* [CG95])

$$h_{\text{top}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \log N_{\text{sep}}(t, \varepsilon). \quad (1.41)$$

Dans le cas d'un écoulement 2D (indépendant d'une des variables d'espace), ou pour un écoulement 3D stationnaire, on a $h_{\text{line}} = h_{\text{top}}$, tandis que génériquement $h_{\text{line}} \geq h_{\text{top}}$.

Ainsi, une autre condition nécessaire pour qu'un écoulement soit dynamo rapide est que $h_{\text{top}} > 0$. On sait que pour un écoulement dépendant non-trivialement de deux variables ou moins (qu'elles soient de temps ou d'espace), $h_{\text{top}} = 0$, ce qui écarte donc cette classe d'écoulements des possibilités.

Les seuls écoulements pouvant donner lieu à une dynamo rapide sont donc de la forme

$$\mathbf{u}(x, y, t), \quad \mathbf{u}(x, y, z), \quad \mathbf{u}(x, y, z, t). \quad (1.42)$$

(Par ailleurs, on a déjà vu précédemment qu'un écoulement planaire, c'est-à-dire un écoulement pour lequel l'une des composantes de $\mathbf{u}$ est nulle, ne donnera pas d'effet dynamo – ni lent ni rapide – quel que soit le nombre de variables d'espace et de temps dont il dépend).

Les écoulements intégrables

Un écoulement est dit intégrable s'il est intégrable au sens de Liouville, c'est-à-dire "qu'il possède suffisamment (3) de constantes du mouvement indépendantes". Dans le cas d'un écoulement d'Euler, une des constantes du mouvement d'une particule est son énergie.

En pratique, un écoulement est intégrable dès lors qu'on peut exprimer la trajectoire d'une particule en fonction du temps pour n'importe quelle position initiale, et il est chaotique sinon. Les résultats donnés précédemment impliquent qu'un écoulement intégrable ne donnera pas une dynamo rapide, c'est-à-dire qu'un écoulement pour lequel les trajectoires sont connues ne pourra pas créer un effet dynamo rapide (ce qui ne l'empêche pas d'être tout de même une dynamo).²

2. Notons que l'écoulement $\mathbf{u}$ est lui-même solution d'un système dynamique, à savoir l'équation d'Euler, dont on connaît la trajectoire temporelle – Il est statique donc indépendant du temps –, et est donc intégrable. Ici, on s'intéresse à l'intégrabilité des trajectoires de particules du fluide, advectées par un champ de vitesse stationnaire.

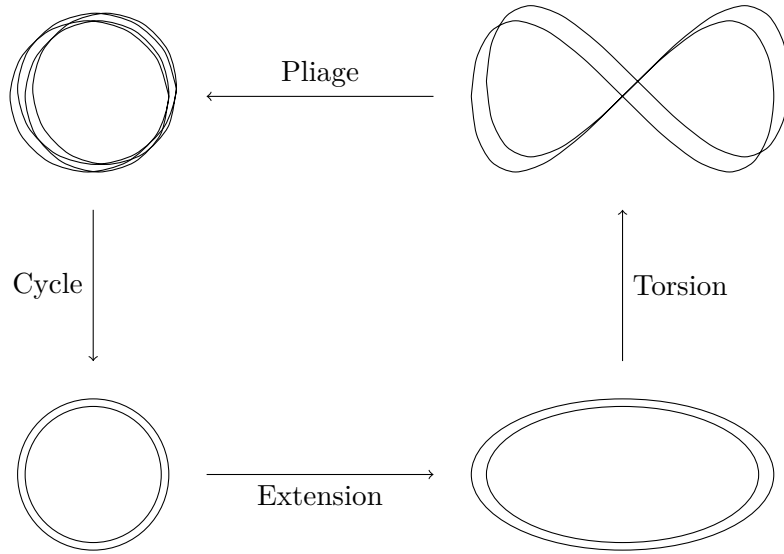


FIGURE 1.4 – Évolution d’une “boucle” de champ magnétique figé dans un fluide : à la fin d’un cycle, le flux à travers le tube est doublé.

1.4.4 Écoulement dynamo rapide non stationnaire

Grâce au résultat de Vishik sur les dynamos rapides, on a pu imaginer des écoulements dépendant du temps qui satisfont la condition de divergence exponentielle des lignes de champ à l’infini, et ainsi trouver des prototypes de dynamo rapide. Ces écoulements, périodiques en temps, utilisent de façon appropriée le mécanisme de chaos lagrangien :

L’idée est que le champ magnétique augmente de façon significative sur une période de l’écoulement et se retrouve ensuite à la position où il était initialement. Plus précisément, on cherche à ce que le flux à travers une surface donnée soit multiplié par un facteur $\lambda > 1$ à la fin de la période. Le problème dans le cas d’une dynamo non-idéale est d’éviter l’amortissement du champ par diffusion magnétique : cette diffusion est en particulier forte lorsque le champ magnétique est cisailé par l’écoulement.

Stretch-Twist-Fold

De façon schématique, le principe des mécanismes dynamo imaginés est de créer dans le fluide un mouvement de Stretch-Twist-Fold (“extension-torsion-plier”, *cf.* Figure 1.4), traduisant exactement la condition nécessaire donnée par Vishik pour avoir une dynamo dans le cas d’un fluide conducteur parfait : une boucle de champ magnétique figée dans le fluide est d’abord étendue, puis tordue et enfin repliée sur elle-même, donnant à la fin du cycle un flux double à travers un disque traversant le tube initial. Ainsi, au cours d’une période, le champ (plus précisément, le flux à travers le tube) a doublé. En ramenant la période de l’écoulement à 1, on a donc un taux de croissance de $\ln 2$.

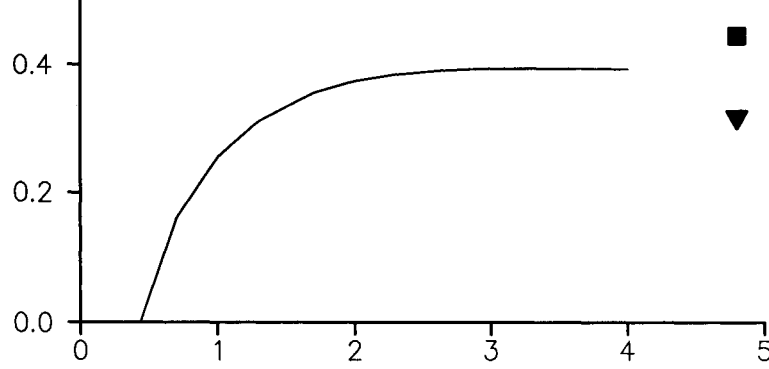


FIGURE 1.5 – Taux de croissance en fonction de $\log(R_m)$ avec $k = 0.8$. Le carré et le triangle désignent respectivement h_{line} et Λ_{lyap} [CG95].

Écoulement pulsé

Après le schéma théorique de Stretch-Twist-Fold, des écoulements “pulsés” ont été imaginés, à la manière d’un forçage sur un pendule. La première étude numérique à avoir été menée avec ce système a été faite par Otani [Ota88, Ota93], avec un écoulement 2D pulsé de la forme

$$\mathbf{u}(x, y, t) = 2 \cos^2 t(0, \sin x, \cos x) + 2 \sin^2 t(\sin y, 0, -\cos y). \quad (1.43)$$

Pour un tel écoulement, indépendant de z , on peut chercher une solution $\mathbf{B}$ sous la forme

$$\mathbf{B}(x, y, z, t) = e^{ikz} \mathbf{b}(x, y, t), \quad (1.44)$$

avec k bien choisi. Les résultats numériques obtenus avec $k = 0.8$ (*cf.* Figure 1.5) donnent un bon espoir d’avoir une dynamo rapide.

Plusieurs autres méthodes ont été imaginées et mises en œuvre, aussi bien expérimentalement que numériquement. Cependant, la plupart de ces méthodes mettent toutes en jeu des écoulements dépendant du temps, et la question de l’existence d’une dynamo rapide stationnaire est toujours ouverte. L’écoulement $A:B:C$, stationnaire, est depuis longtemps un bon candidat pour une telle dynamo, et fera l’objet d’une partie de cette thèse.

1.5 Méthodes numériques

Avant de présenter les résultats de cette thèse, nous allons présenter les méthodes numériques utilisées pour résoudre l’équation d’induction ou le système complet.

Deux méthodes numériques ont été utilisées pendant cette thèse, l’une basée sur la transformée de Fourier, l’autre basée sur un schéma en espace.

Les schémas spectraux servent principalement pour résoudre l'équation d'induction seule, étant donné que l'équation se transforme assez bien en Fourier. Le schéma spatial est utilisé pour résoudre le système complet.

1.5.1 Schémas spectraux

Nous présentons ici des méthodes numériques basées sur une expression en Fourier (transformée spatiale uniquement) de l'équation d'induction.³

En transformée de Fourier, l'équation d'induction s'écrit sous la forme :

$$\partial_t \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{k}, t) = i\mathbf{k} \times (\widetilde{\mathbf{u} \times \mathbf{B}})(\mathbf{k}, t) - \frac{|\mathbf{k}|^2}{R_m} \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{k}, t), \quad (1.45)$$

où

$$(\widetilde{\mathbf{u} \times \mathbf{B}})(\mathbf{k}, t) = \sum_{\mathbf{k}' \in \mathbb{Z}^3} \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}') \times \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{k} - \mathbf{k}', t). \quad (1.46)$$

Dans le cas de l'écoulement $A:B:C$, les seuls $\mathbf{k}'$ pour lesquels $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}') \neq 0$ sont ceux pour lesquels $|\mathbf{k}'| = 1$, donc la somme ci-dessus est réduite à 6 termes (± 1 dans chaque dimension d'espace). Les méthodes spectrales sont faciles à mettre en œuvre dans ce dernier cas puisque seuls les points (dans l'espace de Fourier) directement voisins du point calculé sont nécessaires pour le terme advectif. Le calcul du laplacien étant local en espace de Fourier, il n'ajoute pas de difficulté supplémentaire.

Trois schémas temporels différents ont été comparés pour résoudre l'équation d'induction pour l'écoulement $A:B:C$. Dans les trois schémas qui suivent, on note $\mathcal{NL}$ (Non Locale) la partie advective de l'équation :

$$\begin{aligned} \mathcal{NL}(\mathbf{B})_{i,j,k}^x = & \frac{1}{2} j \left(i \left[C(B_{i,j-1,k}^y + B_{i,j+1,k}^y) + A(B_{i,j,k-1}^y - B_{i,j,k+1}^y) \right] \right. \\ & \left. - A(B_{i,j,k-1}^x + B_{i,j,k+1}^x) + B(B_{i+1,j,k}^x - B_{i-1,j,k}^x) \right) \\ & + k \left(i \left[C(B_{i,j-1,k}^z + B_{i,j+1,k}^z) - B(B_{i-1,j,k}^x + B_{i+1,j,k}^x) \right] \right. \\ & \left. + A(B_{i,j,k-1}^z - B_{i,j,k+1}^z) + C(B_{i,j+1,k}^x - B_{i,j-1,k}^x) \right), \end{aligned} \quad (1.47)$$

avec des expressions similaires pour y, z . Comme noté plus haut, l'expression en Fourier pour l'écoulement $A:B:C$ ne fait intervenir que les modes directement voisins du mode étudié. On limite l'extension des calculs à des $\mathbf{k}$ de coordonnées inférieures à N , où N est la plus petite puissance de 2 qui convient pour le R_m choisi. Numériquement, le seuil en R_m est multiplié par 4 à chaque fois qu'on double N .

Une première optimisation consiste à considérer que le champ résultant est réel. Ainsi, si la discrétisation en espace s'étend par exemple sur $\llbracket -N/2, N/2 \rrbracket \times \llbracket -N/2, N/2 \rrbracket \times \llbracket -N/2, N/2 \rrbracket$, il n'y a que les modes sur $\llbracket 0, N/2 \rrbracket \times \llbracket -N/2, N/2 \rrbracket \times \llbracket -N/2, N/2 \rrbracket$ à calculer, les autres s'obtenant ensuite par conjugaison complexe.

3. La littérature ne manque pas d'études détaillées et plus complètes de schémas spectraux génériques, voir par exemple [CHQZ06] ou [Ise09] pour plus de détails concernant les schémas utilisés ici et leur stabilité.

Leap-Frog/Dufort-Frankel

Le premier schéma est un schéma saute-mouton semi-implicite stabilisé avec la méthode de Dufort-Frankel (tous les vecteurs ici sont dans l'espace de Fourier, donc on omet le tilde sur $\mathbf{B}$) :

$$\mathbf{B}^{n+1}(\mathbf{k}) = \mathbf{B}^{n-1}(\mathbf{k}) + 2\delta t \left(\mathcal{NL}(\mathbf{B}^n)(\mathbf{k}) - \frac{|\mathbf{k}|^2}{R_m}(\mathbf{B}^{n+1}(\mathbf{k}) + \mathbf{B}^{n-1}(\mathbf{k})) \right). \quad (1.48)$$

Le schéma ainsi donné est stable pour des valeurs suffisamment petites de δt . Il a l'avantage d'avancer de deux pas de temps en une "étape", par damier (tridimensionnel), étant donné que les termes non locaux calculés pour une case blanche ne font intervenir que les termes calculés sur une case noire, et inversement. C'est le plus rapide numériquement des trois schémas étudiés ici.

Crank-Nicolson/Adams-Bashforth (CNAB)

$$\mathbf{B}^{n+1} = \mathbf{B}^n + \delta t \left(-\frac{|\mathbf{k}|^2}{R_m}(\mathbf{B}^{n+1} + \mathbf{B}^n) + \frac{3}{2}\mathcal{NL}(\mathbf{B}^n) - \frac{1}{2}\mathcal{NL}(\mathbf{B}^{n-1}) \right). \quad (1.49)$$

2nd order Backward differentiation formula (BDF2)

$$\frac{3}{2}\mathbf{B}^{n+1} = 2\mathbf{B}^n - \frac{1}{2}\mathbf{B}^{n-1} + \delta t \left(-\frac{|\mathbf{k}|^2}{R_m}(\mathbf{B}^{n+1}) + 2\mathcal{NL}(\mathbf{B}^n) - \mathcal{NL}(\mathbf{B}^{n-1}) \right). \quad (1.50)$$

Condition de Courant–Friedrichs–Lewy (CFL)

Ces trois schémas ont des conditions de stabilité différentes. Cependant, une condition supplémentaire pour que le résultat ait un sens physique, appelée condition CFL (pour Courant–Friedrichs–Lewy), est que l'onde "la plus rapide" du système ne doit pas avoir le temps de se propager sur plus d'une case de la discrétisation pendant une étape de temps discret. Ainsi, lorsque la résolution spatiale augmente, le pas de temps doit être réduit pour compenser la taille plus petite des cases. Dans les trois cas, c'est la principale limitation des étapes en temps.

Discussion

Les deux derniers schémas utilisés ont permis de confirmer les résultats donnés par le premier schéma saute-mouton. Cependant, le désavantage du premier schéma par rapport aux deux autres est le décalage d'un pas de temps entre les cases noires et blanches du damier (ce qui est gênant pour la visualisation).

Les deux autres schémas demandent un espace mémoire plus important également, car le calcul de $\mathcal{NL}$ demande de garder en mémoire toutes les valeurs de $\mathbf{B}$ avant de

le mettre à jour, alors que le schéma saute-mouton ne met à jour que la moitié des cases à chaque fois en n'utilisant que la case courante et les cases immédiatement voisines.

Ces trois schémas conservent exactement (numériquement) la divergence nulle ($\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{k}) = 0$ en Fourier), il n'est donc pas nécessaire de la projeter à chaque étape de calcul.

Le passage en Fourier est prescrit dans le cas particulier de la dynamo cinématique pour l'écoulement $A:B:C$: comme l'écoulement ne change pas, l'expression du terme convectif en local est très simple et permet l'utilisation des schémas cités ci-dessus. Dès lors qu'on veut étudier le système complet, ou pour d'autres écoulements, la méthode spatiale est plus efficace.

1.5.2 Schémas spatiaux

Le schéma spectral est très bien adapté au cas linéaire avec un écoulement analytique, où les modes couplés sont voisins (dans le cas $A:B:C$, seuls les plus proches voisins sont couplés). Dans le cas non linéaire, ou pour un écoulement non analytique, il est préférable de passer à un schéma en volumes finis (un schéma spectral demanderait de synchroniser toutes les données de chaque processeur à chaque étape ! À moins d'utiliser une mémoire partagée entre les processeurs, la méthode spectrale n'est donc clairement pas adaptée)

La principale difficulté pour écrire un schéma numérique en espace consiste à écrire un schéma qui conserve la divergence nulle du champ magnétique. En effet, comme l'équation réelle conserve elle-même la divergence, il serait dommage de devoir projeter le champ obtenu si le schéma ne conserve pas la divergence.

En ce qui concerne l'équation de Navier-Stokes, la projection sur les champs à divergence nulle, ou de façon équivalente le calcul du terme de pression, sera de toute façon nécessaire car l'équation réelle ne conserve pas la divergence.

L'intérêt ici n'est plus de rechercher un mode propre de l'équation d'induction (le système est devenu non-linéaire !), mais plutôt de modéliser un système magnétohydrodynamique résistif complet, faisant intervenir la génération du champ magnétique ainsi que sa rétroaction sur le fluide (par exemple pour mettre en évidence la saturation d'une dynamo sur l'effet alpha).

L'équation d'induction

La conservation numérique de la divergence peut être obtenue grâce à la méthode de "grille de Yee" (cf. Figure 1.6, ou [Yee66] pour une dérivation plus détaillée). Selon cette méthode, les différents champs considérés dans le bloc d'indice (i, j, k) ne sont pas placés au même endroit dans le cube :

- Un champ scalaire ($\nabla \cdot \mathbf{B}$) est au centre du cube, soit en $(i\delta x + \delta x/2, j\delta y + \delta y/2, k\delta z + \delta z/2)$.
- Les champs $\mathbf{B}$ et $\mathbf{u}$ sont au centre des faces de chaque composante :

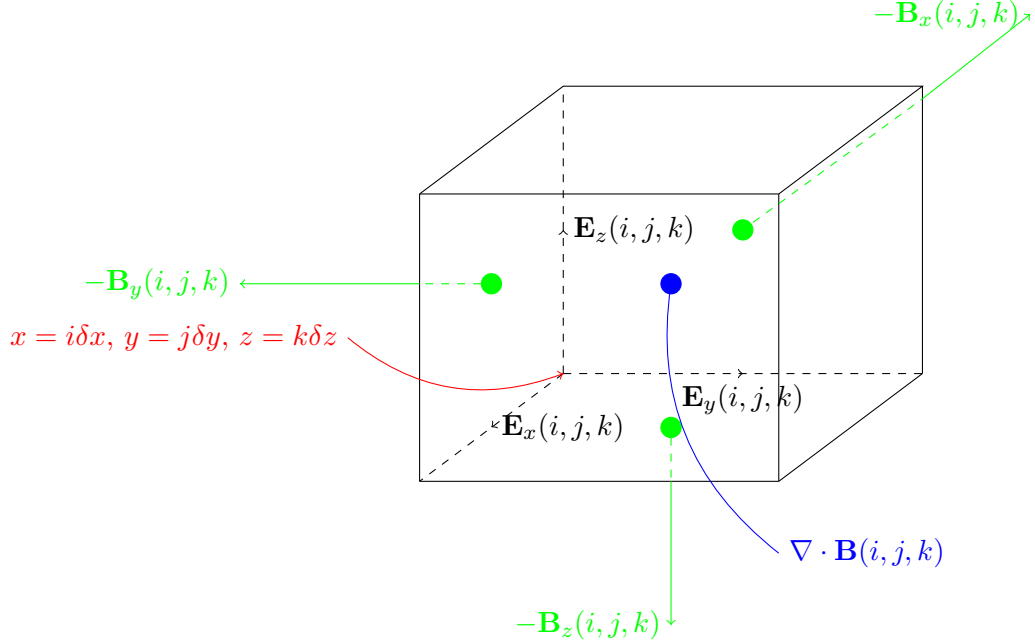


FIGURE 1.6 – Position des différents champs sur la grille de Yee du bloc d'indice (i, j, k) .

$\mathbf{B}_x$ est en $(i\delta x, j\delta y + \delta y/2, k\delta z + \delta z/2)$, et de même pour les autres composantes.

- Le champ $\mathbf{E} = \mathbf{u} \times \mathbf{B}$ est considéré comme étant sur l'arête :

$\mathbf{E}_x$ est en $(i\delta x + \delta x/2, j\delta y, k\delta z)$.

Pour calculer une composante de $\mathbf{E}$, par exemple E_x , on a besoin de u_y , u_z , B_y , B_z au centre de l'arête : on prend la moyenne des deux vecteurs au-dessus et en dessous (pour u_y et B_y), ou à droite et à gauche (pour u_z et B_z).

Avec cette méthode, la circulation de $\mathbf{E}$ sur chacune des faces donnera le terme convectif, et la somme de ces termes, qui sera la divergence (à un facteur près), donnera numériquement 0 car chaque composante $\mathbf{E}$ sera sommée une fois positivement et une fois négativement pour le calcul de la divergence.

Pour le calcul du laplacien, la plupart des schémas existants, dont le schéma explicite, conservent la divergence nulle, et ne posent donc pas de complication supplémentaire.

L'équation de Navier-Stokes

Le développement de cette partie a été réalisée en collaboration avec Alexandre Cameron, étudiant en Master 2 à l'ENS.

Grille de Yee La grille de Yee peut également être utilisée pour l'équation de Navier-Stokes, mais ici les deux termes correspondant à la partie advective et la force de Laplace,

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}, \quad (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \quad (1.51)$$

ne conservent pas la divergence nulle en avançant en temps. Le rôle de la pression est précisément de s'assurer que le fluide reste incompressible. Quelle que soit la méthode utilisée, il sera donc nécessaire de projeter le champ de vitesse sur les champs à divergence nulle. Comme dit plus haut, cela revient à calculer la pression dans le fluide à chaque avancée en temps.

Schéma en temps On utilise un schéma semi-lagrangien pour faire avancer le champ de vitesse d'un pas de temps : l'équation de Navier-Stokes peut aussi s'écrire sous la forme

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \frac{1}{R_e} \Delta \mathbf{u} + (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}, \quad (1.52)$$

où

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \quad (1.53)$$

est la dérivée lagrangienne de $\mathbf{u}$. Le schéma en temps est alors :

$$\frac{1}{\Delta t} (\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n(\chi(t_n))) = \frac{1}{R_e} \Delta \mathbf{u}^n + (\nabla \times \mathbf{B}^n) \times \mathbf{B}^n, \quad (1.54)$$

où χ est solution de

$$\begin{cases} \chi' = \mathbf{u}(\chi) \\ \chi(t_{n+1}) = \mathbf{x}, \end{cases} \quad (1.55)$$

et $\mathbf{x}$ est le point courant où l'on cherche à calculer $\mathbf{u}^{n+1}$. Cela revient à considérer au temps t_n la particule qui sera en $\mathbf{x}$ au temps t_{n+1} (la condition CFL assurera que cette particule arrivera nécessairement d'une case voisine!).

Ce schéma n'est malheureusement pas compatible avec la grille de Yee telle qu'elle a été introduite pour l'équation d'induction. Plus précisément, considérer que les trois composantes de $\mathbf{u}$ dans une case d'indice (i, j, k) ne sont pas positionnées en un seul point va compliquer le calcul du schéma en temps introduit. Le champ $\mathbf{u}$ sera donc considéré comme s'appliquant directement au point $(i\delta x, j\delta y, k\delta z)$ (cf. Figure 1.6), et le calcul de $\mathbf{E}$ se fera en interpolant le $\mathbf{u}$ aux points voulus (ce qui ne change en rien l'avantage de la grille de Yee d'avoir numériquement une divergence nulle).

Calcul de la pression Le calcul de la pression dans le fluide est notoirement non-local : il ne suffit pas d'une case et des cases adjacentes pour faire le calcul de la pression. Pour faire ce calcul numériquement, on utilise une méthode de relaxation en temps. En prenant la divergence de l'équation de Navier-Stokes, on obtient :

$$\nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) = -\Delta p + \nabla \cdot ((\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}), \quad (1.56)$$

où

$$-\Delta p = F, \quad (1.57)$$

avec

$$F = \nabla \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) - \nabla \cdot ((\nabla \times B) \times B). \quad (1.58)$$

Pour résoudre numériquement (1.57), on utilise un solveur itératif.

La méthode de Jacobi consiste simplement à utiliser le schéma numérique

$$p_{i,j,k}^{l+1} = p_{i,j,k}^l + F\Delta\tau + \frac{1}{6} \sum_{|(i'-i, j'-j, k'-k)|=1} p_{i',j',k'}^l \quad (1.59)$$

(ce qui revient à utiliser un schéma explicite pour résoudre l'équation de la chaleur avec un pas de temps le plus grand possible)

Cette partie du calcul numérique est la principale limitation en rapidité de calcul du schéma : on ne peut pas prévoir *a priori* combien d'étapes seront nécessaires pour faire converger la pression, alors que l'avancée d'un pas de temps se fait en un nombre fixé d'étapes dans l'équation d'induction et l'équation de Navier-Stokes. D'autres méthodes plus rapides que la méthode de Jacobi ont été développées pour permettre d'accélérer le calcul de la pression.

Par exemple, la méthode donnée ci-dessus met à jour “simultanément” toutes les valeurs de la pression. Il est possible de modifier la pression “en place”, en utilisant les valeurs mises à jour de la pression sur les cases précédentes (méthode de Gauss-Seidel). Cependant, ce système fonctionne bien sur une architecture de type CPU, qui ne fait qu'un calcul à la fois, mais n'est pas du tout transposable au cas d'une programmation en GPU, pour lequel l'ordre des calculs n'est absolument pas prévisible.

D'autres méthodes (“multigrilles”) ont été développées, permettant à la fois un calcul plus rapide et l'utilisation d'architectures parallèles. Ces méthodes offrent des perspectives d'optimisation futures du code.

1.6 Présentation des travaux réalisés pendant la thèse

Deux études complémentaires ont été réalisées pendant cette thèse :

- D'une part l'étude d'un mécanisme dynamo général, “l'effet alpha”. Nous en avons mené une analyse systématique à différents régimes de Reynolds magnétiques.
- D'autre part, d'un point de vue numérique, une étude d'un écoulement particulier, l'écoulement $A:B:C$, en tant que dynamo rapide, ainsi qu'une perturbation de cet écoulement.

1.6.1 Étude théorique

Nous nous sommes intéressés dans cette thèse à l'effet alpha, qui est un effet dynamo lié à une séparation d'échelles. Formellement, l'idée est de considérer un

champ $\mathbf{B}$ de la forme

$$\mathbf{b}^\varepsilon(t, \theta) \approx \mathbf{B}(t, \theta, \varepsilon\theta) \quad (1.60)$$

pour un profil $\mathbf{B} = \mathbf{B}(t, \theta, \mathbf{x})$ dépendant d'une variable "petite échelle" θ et d'une variable "grande échelle" $\mathbf{x} = \varepsilon\theta$. Le paramètre $\varepsilon \ll 1$ mesure la séparation entre les deux échelles. Typiquement, la petite échelle est l'échelle caractéristique du fluide, supposé osciller rapidement en espace. Pour cette thèse, nous avons considéré des oscillations périodiques : dans le cadre de l'équation d'induction, le champ $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\theta)$ est un champ stationnaire périodique donné. L'idée est alors de créer un effet dynamo par interaction quadratique des fluctuations de $\mathbf{B}$ et de $\mathbf{u}$. Concrètement, la force électromotrice génère un terme moyen

$$\overline{\mathbf{u} \times \mathbf{B}} := \oint \mathbf{u} \times \mathbf{B} d\theta. \quad (1.61)$$

Toujours formellement, ce terme moyen s'exprime linéairement en fonction du champ moyen, menant à une équation de la forme

$$\partial_t \bar{\mathbf{B}} = \alpha \bar{\mathbf{B}} - \Delta \bar{\mathbf{B}}, \quad (1.62)$$

susceptible de générer une croissance exponentielle de $\bar{\mathbf{B}}$ à grande échelle.

Un tel mécanisme dynamo a été proposé dès les années 50 par Parker [Par55]. Dans le cadre périodique qui nous intéresse, des calculs formels montrant l'instabilité ont été menés par G.O. Roberts [Rob70]. Notre travail a consisté à justifier rigoureusement ces calculs, d'abord au niveau de l'équation d'induction, ensuite au niveau du système MHD complet.

La difficulté mathématique de ce travail était double :

- Au niveau linéaire, le problème était de construire de manière exacte un mode instable de l'équation. En effet, les calculs standards ne fournissaient qu'un mode approché, c'est-à-dire avec un terme d'erreur d'ordre ε^N . Nous sommes parvenus par des méthodes analytiques variées (Analyse spectrale, fonctions implicites) à éliminer ce terme d'erreur obtenant une instabilité pour tout ε assez petit.
- Au niveau non-linéaire, le problème était de conserver l'instabilité établie pour l'équation d'induction. Autrement dit, il fallait justifier que l'amplification linéaire dominait la réaction non-linéaire à petite amplitude. Ce type de résultat, du type

Instabilité spectrale $\Rightarrow$ Instabilité faiblement non-linéaire,

bien qu'intuitif, n'est pas élémentaire. Il se démontre facilement dans le cadre des équations différentielles, mais aucun résultat général n'est disponible pour les EDP quasi-linéaires. La raison est que, pour ces équations, le terme non-linéaire (par exemple quadratique Q) contient des dérivées : il est de ce fait impossible de trouver une norme $\|\cdot\|$ pour laquelle la non-linéarité quadratique vérifie $\|Q(\mathcal{U}, \mathcal{U})\| \leq \|\mathcal{U}\|^2$. Une littérature conséquente a été consacrée ces dernières années à cette problématique voir par exemple [FSV97, GS95, VF93].

Nous nous sommes en particulier inspirés des résultats de Friedlander, Strauss et Vishik [FSV97].

Dans le cadre particulier de l'effet alpha, le paramètre ε mesurant la séparation d'échelles doit être comparé au Reynolds magnétique. Trois régimes distincts de Reynolds magnétiques peuvent alors être identifiés :

- Le régime évanescent, pour lequel R_m est comparable à ε (les deux paramètres tendent vers 0).
- Le régime des nombres de Reynolds modérés $R_m \sim 1$.
- Le régime des Reynolds $R_m \gg 1$ correspondant à la recherche de dynamo rapide.

Seuls les deux premiers régimes ont fait l'objet de notre analyse (les deux articles correspondant constituent la première partie de la thèse). Le troisième fait l'objet de perspectives de recherche.

Étude théorique à Reynolds magnétiques modérés

Concernant les nombres de Reynolds magnétiques modérés, un mécanisme générique d'effet alpha a été mis en évidence, montrant un effet dynamo sur une échelle spatiale différente de celle de l'écoulement sous-jacent. Le système MHD considéré est le système MHD complet avec un terme de forçage supplémentaire sur le fluide :

$$\partial_t \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{R_m} \Delta \mathbf{B}, \quad (1.63)$$

$$\partial_t \mathbf{u} = -\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nabla p + \frac{1}{R_e} \Delta \mathbf{u} + (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} + f, \quad (1.64)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.65)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (1.66)$$

On s'intéresse à la stabilité d'écoulements périodiques stationnaires modélisés par $\mathbf{u} = \mathbf{U}_s(\theta) \in \mathcal{H}_0^\infty(\mathbb{T}^3)$. On suppose que $(\mathbf{U}_s, \mathbf{0})$ est solution de l'équation (ce qui est vérifié pour un forçage f bien choisi). En considérant des perturbations $(\mathbf{u}, \mathbf{b})$ de $(\mathbf{U}_s, \mathbf{0})$, on aboutit au système suivant (on enlève les points) :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{U}_s + \mathbf{U}_s \cdot \nabla \mathbf{u} - \frac{1}{R_e} \Delta \mathbf{u} + \nabla p = (\nabla \times \mathbf{b}) \times \mathbf{b} - \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}, \\ \partial_t \mathbf{b} - \nabla \times (\mathbf{U}_s \times \mathbf{b}) - \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{b}) - \frac{1}{R_m} \Delta \mathbf{b} = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{b} = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \end{cases} \quad (1.67)$$

Nous établissons un résultat d'instabilité Sobolev pour ce système, ce pour une classe générique d'écoulements $\mathbf{U}_s$. Plus précisément (*cf.* Théorème 2.1) :

Théorème 1.8

Il existe un ensemble $\mathcal{P} \subset \mathcal{H}_0^\infty(\mathbb{T}^3)$, constitué de fonctions de norme inférieure à 1 et dense dans la boule unité de $\mathcal{H}_0^\infty(\mathbb{T}^3)$, et un $R_{m0} >$ tels qu'un écoulement $U_s \in \mathcal{P}$

est instable dans le sens suivant :

Pour $s > 5/2$, on choisit le terme f de sorte que $(\mathbf{U}_s, \mathbf{0})$ soit solution du système (1.63) dans

$$\mathcal{H}^s = \mathcal{H}^s(\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}). \quad (1.68)$$

Une perturbation $(\mathbf{u}, \mathbf{b})$ de cet écoulement satisfait alors le système perturbé 1.67. Alors la solution $(\mathbf{U}_s, \mathbf{0})$ est instable dans

$$\mathcal{H}_T^s = \mathcal{H}^s(\mathbb{R}/T_1\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/T_2\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/T_3\mathbb{Z}) \quad (1.69)$$

pour $R_m < R_{m0}$ et $T = (T_1, T_2, T_3) \in (\mathbb{N}^*)^3$ bien choisis (dépendant uniquement de $\mathbf{U}_s$ et R_m), c'est-à-dire qu'il existe une donnée initiale

$$\mathcal{U}_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{b}_0 \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_T^s \quad (1.70)$$

et $C_0 > 0$ tels que pour tout $\delta > 0$, toute solution $\mathcal{U}_\delta \in \mathcal{H}_T^s$ du système perturbé (1.67) avec condition initiale $\delta\mathcal{U}_0$ vérifiera

$$\|\mathcal{U}_\delta(t_\delta)\|_{\mathcal{H}_T^s} \geq C_0 \quad (1.71)$$

avec $t_\delta \propto_{\delta \rightarrow 0} -\ln \delta$.

Ce théorème utilise le mécanisme de l'effet alpha. Concrètement, les périodes spatiales T_1, T_2, T_3 sont grandes, ce qui correspond à la séparation d'échelles précédemment évoquée. Comme dit précédemment, le système complet "sature" lorsque ce mécanisme entre en jeu, ce qui est cohérent avec le théorème : on ne peut pas atteindre des valeurs arbitraires de l'énergie magnétique.

Pour démontrer ce théorème, on commence d'abord par montrer qu'on a effectivement un effet alpha cinématique, c'est-à-dire uniquement pour l'équation d'induction, avec un écoulement fixé choisi dans l'ensemble dense $\mathcal{P}$. L'équation étant linéaire, on aura alors une croissance exponentielle du champ magnétique. Ensuite, on montre que le système complet est instable au sens donné précédemment, c'est-à-dire que la "valeur de saturation" de la dynamo ne dépendra pas de la condition initiale.

Cette étude consiste d'abord à étudier l'action de l'opérateur d'induction sur les fonctions de la forme

$$\mathbf{b}^\varepsilon(\theta) = e^{i\xi \cdot \varepsilon \theta} \mathbf{B}^\varepsilon(\theta) = e^{i\xi \cdot \varepsilon \theta} (\mathbf{B}^0(\theta) + \mathbf{B}^1(\theta) + \dots) \quad (1.72)$$

("ondes de Bloch") menant à un opérateur qui s'écrit formellement

$$\mathcal{A}^\varepsilon(\xi, \theta, \nabla_\theta) = \mathcal{A}^0(\xi, \theta, \nabla_\theta) + \varepsilon \mathcal{A}^1(\xi, \theta, \nabla_\theta) + \dots \quad (1.73)$$

On montre que le premier terme $\mathbf{B}^0$ du développement est "polarisé" sur le noyau de $\mathcal{A}^0$, qui est de dimension 3. L'idée est donc de travailler plutôt avec

$$\Pi^\varepsilon \mathcal{A}^\varepsilon \Pi^\varepsilon \quad (1.74)$$

où Π^ε est le projecteur sur le noyau de $\mathcal{A}^\varepsilon$. L'instabilité spectrale est alors gouvernée par l'équation

$$\partial_t \mathbf{B}^0 = \Pi^0 \mathcal{A}^1 \Pi^0 \mathbf{B}^0 \quad (1.75)$$

qui se ramène après calcul à une EDO de la forme

$$\partial_t \bar{\mathbf{B}}^0 = \alpha \bar{\mathbf{B}}^0 \quad (1.76)$$

sur la moyenne en θ de $\mathbf{B}^0$, pour une certaine matrice $\alpha = \alpha(\xi)$. On montre que génériquement cette matrice a trois valeurs propres distinctes, dont une instable. Des résultats classiques de perturbation analytique fournissent alors un mode instable de l'équation d'induction à ε petit. Le passage du linéaire au non-linéaire se fait ensuite *via* une méthode développée dans [FSV97], basée sur la formule de Duhamel, et l'existence d'une valeur propre "dominante".

Étude théorique à Reynolds magnétiques évanescents

L'étude à Reynolds magnétiques évanescents met également en évidence un mécanisme d'effet alpha. On considère ici aussi un écoulement de période 1

$$U \in \mathcal{H}_\theta^\infty(\mathbb{T}^3)^3, \quad \int_{\mathbb{T}^3} U = 0, \quad \nabla_\theta \cdot U = 0. \quad (1.77)$$

L'ensemble de ces écoulements est noté $\mathcal{P}$. On pose ici $R_m = \varepsilon$ qui sera un petit paramètre du système.

Cette étude complète des travaux antérieurs réalisés par D. Gérard-Varet [GV06]. Ramenés à des notations plus proches de celles utilisées en physique (et dans cette thèse), ces travaux montrent qu'une perturbation d'ordre ε^m peut évoluer jusqu'à une amplitude $\eta(m) > 0$ indépendante de ε (mais dépendant de m) sur une boîte périodique dépendant de ε . Cette dépendance en m ne permet pas d'obtenir une instabilité au sens de Lyapunov, à l'inverse de notre résultat.

De façon similaire au cas modéré, l'équation perturbée autour de la solution $(\mathbf{U}, \mathbf{0})$ s'écrit ici, en redimensionnant t en $\varepsilon^3 t$:

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{b} - \varepsilon^{-3} \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{b}) - \varepsilon^{-3} \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{b}) - \varepsilon^{-4} \Delta \mathbf{b} = 0, \\ \varepsilon^3 \partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{U} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p - \Delta \mathbf{u} = (\nabla \times \mathbf{b}) \times \mathbf{b}, \\ \nabla \cdot \mathbf{b} = 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \end{cases} \quad (1.78)$$

On s'intéresse d'abord à la première équation linéarisée

$$\partial_t \mathbf{b} - \varepsilon^{-3} \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{b}) - \varepsilon^{-4} \Delta \mathbf{b} = 0, \quad (1.79)$$

pour laquelle on donne un résultat d'instabilité dans $\mathcal{H}_0^s(\mathbb{T}^3)$ pour tout $s > 0$ et $\mathbf{U}$ dans un ensemble dense de $\mathcal{P}$ (cf. Théorème 3.1) :

Théorème 1.9

Il existe une solution $\mathbf{b}$ de (1.79) de la forme :

$$\mathbf{b}^\varepsilon(\theta, t) = e^{\lambda_{\mathbf{U}}(\varepsilon)t + \varepsilon^2 \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\theta}} (\bar{\mathbf{b}}' + \varepsilon \tilde{\mathbf{b}}'(\theta)), \quad (1.80)$$

où $\bar{\mathbf{b}}' \in \mathbb{R}^3$, $\tilde{\mathbf{b}}' \in \mathcal{H}_0^s(\mathbb{T}^3)$, $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0[$ et $\lambda_{\mathbf{U}} : [0, \varepsilon_0[\rightarrow \mathbb{R}_+^*$.

Dans ce cadre, la valeur propre est encore donnée par un argument perturbatif, mais la diffusion magnétique étant accrue, les opérateurs agissant sur les ondes de Bloch ont une structure différente. “L’ordre 0” donne directement une valeur propre instable, et on peut conclure par un théorème de fonctions implicites.

Ensuite, on montre, de la même façon que pour le cas modéré, que le système (1.78) sature dans $\mathcal{H}_T^s$ à une valeur raisonnable en partant de $(\mathbf{U}, \mathbf{0}) + \delta(\mathbf{u}_0, \mathbf{b}_0)$ pour une suite ε_n tendant vers 0 (cf. Théorème 3.2).

Les études présentées précédemment ont été menées à $R_m \sim 1$ ou $R_m \ll 1$. En lien avec les problèmes de dynamo rapide, il serait ensuite naturel de considérer le cadre $R_m \gg 1$.

Un tel cadre a été considéré par Childress et Soward (cf. [Sow87, Chi79]) dans le cas de l’écoulement périodique

$$u = (\nabla^\perp \psi, K\psi), \quad \text{où } \psi(x, y) = \sin x \sin y. \quad (1.81)$$

Ils ont mis en évidence que dans ce régime des grands Reynolds magnétiques, l’ingrédient responsable de l’effet alpha change radicalement. Il ne s’agit plus d’homogénéisation d’oscillations haute fréquence, mais d’un phénomène de concentration des lignes de champ. Cette concentration intervient dans des couches limites, près des séparatrices de l’écoulement. Une étude de l’instabilité dynamo a été menée par Childress et Soward, qui ont proposé une asymptotique formelle d’un mode instable, de type couche limite. Il serait très intéressant de justifier cette asymptotique, voire de proposer un développement complet multi-échelles du mode magnétique instable.

Cependant, de nombreuses difficultés entravent une justification mathématique, notamment liées aux “coins” (c’est-à-dire aux intersections des séparatrices). On peut noter à ce sujet que le problème simplifié d’advection avec diffusion évanescence a été récemment analysé complètement dans [NPR05]. Néanmoins, le passage de ce modèle à la MHD est encore à creuser.

1.6.2 Étude numérique

L’étude numérique réalisée dans cette thèse consiste en une recherche de dynamo rapide, en utilisant un écoulement stationnaire bien connu, à savoir l’écoulement $A:B:C$. Un écoulement 3D pulsé basé sur l’écoulement $A:B:C$ a également fait partie des travaux de recherche.

Trouver un écoulement suffisamment chaotique mais régulier qui aura une chance d'être une dynamo rapide n'est pas une mince affaire. En effet, les expériences en laboratoire sont généralement limitées à des Reynolds magnétiques de l'ordre de 10^3 , très loin d'une valeur "très grande" comme escomptée. De plus, des écoulements turbulents n'ont généralement pas une expression mathématique simple, ce qui permettrait d'étudier numériquement ou analytiquement des R_m plus grands. Cependant, Arnold [Arn65] et Hénon [Hen66] ont proposé une classe d'écoulements périodiques tridimensionnels avec des lignes de champ chaotiques et ayant une expression mathématique relativement simple :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} A \sin z + C \cos y \\ B \sin x + A \cos z \\ C \sin y + B \cos x \end{pmatrix} \quad (1.82)$$

Ces écoulements sont très attractifs d'un point de vue mathématique et physique, et constituent un sujet de recherche depuis de nombreuses années.

Remarque 1.10

Les lettres A, B, C sont une référence fortuite à Arnold, Beltrami, Childress : Arnold pour l'origine, Beltrami pour le type de l'écoulement, et Childress qui a fait le lien avec l'effet dynamo.

Un écoulement presque parfait

La question de savoir si cet écoulement permet une dynamo rapide est encore ouverte. Cependant, cet écoulement a des particularités assez intéressantes.

Dès lors qu'une des composantes est nulle, l'écoulement devient non-chaotique ("intégrable" au sens de Liouville), donc on ne peut pas espérer une dynamo rapide dans ce cas particulier [DFG⁺86] : la vitesse selon une des coordonnées devient alors une constante du mouvement.

Toujours dans ce cas 2D, Roberts [Rob70] a prouvé qu'on pouvait quand même avoir une dynamo lente, et Soward [Sow87] a montré que le taux de croissance maximal pour une telle dynamo était de la forme $\ln \ln R_m / \ln R_m$, ce qui est certes une dynamo lente, mais très proche d'une dynamo rapide.

Historique de l'écoulement

Les résultats obtenus jusqu'en 2012 concernant la classe d'écoulements $A:B:C$ laissaient espérer que c'était un bon exemple de telle dynamo, et cet écoulement était cité comme l'exemple type de dynamo rapide stationnaire : une étude numérique, ancienne, de l'écoulement par Galloway [GF86] a suggéré que l'écoulement avait atteint une valeur asymptotique raisonnable (cf. Figure 1.7), résultat qui est resté admis dans la communauté pendant plus de 20 ans.

Nous allons montrer dans cette thèse que le comportement espéré était basé sur un résultat incomplet et que la question reste encore ouverte. Nous décrivons également la richesse inattendue des comportements de la dynamo $A:B:C$.

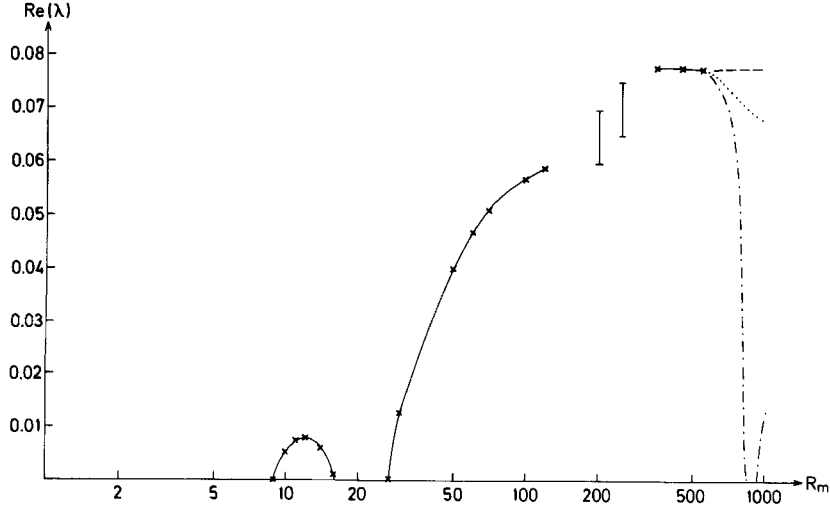


FIGURE 1.7 – Taux de croissance maximal pour une dynamo avec $A = B = C = 1$, en fonction de R_m . Les lignes pleines représentent les résultats numériques, tandis que les lignes pointillées donnent les différents comportements possibles à plus grand R_m .

Galloway et Frisch (1986) [GF86], repris par Galloway (2012) [Gal12].

Propriétés de l'écoulement

L'écoulement $A:B:C$ possède plusieurs propriétés qui rendent son étude mathématique et numérique beaucoup plus aisée qu'un autre écoulement.

Tout d'abord, il a une expression mathématique très simple, malgré ses propriétés chaotiques.

De plus, et c'est la raison pour laquelle il a été introduit initialement, il s'agit d'un écoulement de Beltrami, c'est-à-dire que

$$\nabla \times \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}, \quad (1.83)$$

avec λ constant ($\lambda = 1$ ici). Or, dans les dynamos stellaires, avoir une hélicité ($\mathbf{u} \cdot \nabla \times \mathbf{u}$) non nulle est une propriété importante d'un écoulement car elle garantit un effet alpha.

Enfin, pour le cas particulier $A = B = C = 1$, l'écoulement possède beaucoup de symétries (24 plus précisément), ce qui lui donne de gros avantages concernant l'optimisation des calculs. Cependant, un nombre élevé de symétries peut être vu au contraire comme un défaut, compte tenu des résultats antidynamos obtenus. Une étude d'Alexakis [Ale11] montre qu'effectivement le choix $A = B = C = 1$ n'est pas le meilleur choix pour la dynamo, et que le choix $A = 5$, $B = C = 2$ (redimensionné pour avoir $A^2 + B^2 + C^2 = 3$) serait en fait un meilleur choix dans la gamme de Reynolds magnétiques étudiée ($R_m \in [8.0, 2000]$). Toutefois l'étude des symétries de

l'écoulement $A:B:C$ étant également intéressante, c'est le premier choix qui a été fait.

Points de stagnation

L'écoulement $A:B:C$ possède un certain nombre de points de stagnation selon les valeurs de A , B et C . Plus précisément, on a 8 points de stagnation si A^2 , B^2 , C^2 sont des longueurs possibles pour un triangle, et 0 sinon (*cf.* [DFG⁺86]). Plus précisément, les points de stagnation sont les points vérifiant

$$-C \sin y = B \cos x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(B^2 + C^2 - A^2)} \quad (1.84)$$

$$-A \sin z = C \cos y = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(C^2 + A^2 - B^2)} \quad (1.85)$$

$$-B \sin x = A \cos z = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(A^2 + B^2 - C^2)} \quad (1.86)$$

$$(1.87)$$

L'intérêt de ces points de stagnation est qu'ils permettent de calculer directement l'évolution du champ en ce point sans avoir à calculer la dérivée lagrangienne : dans l'équation d'induction, le terme en $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{B}$ s'annule en ce point.

Dans le cas particulier de la dynamo $A:B:C$, les points de stagnation coïncident avec les extrema locaux du taux de croissance de $\mathbf{B}$, ce qui rend l'observation plus pratique (*cf.* [Dor00]). Plus précisément, on peut séparer les points de stagnation en deux types :

- Type α , avec un plan “convergent” et une direction “divergente”.
- Type β , avec un plan “divergent” et une direction “convergente”.

Un point de stagnation α “divergera” uniquement vers un point de stagnation β , et sera le point de convergence de trois points de stagnation β , et inversement pour β (*cf.* Figure 1.8)

On observe que le champ se concentre à proximité d'une séparatrice entre deux points de stagnation. Le long de cette séparatrice, le cisaillement associé à l'écoulement reste important, ce qui explique cette concentration en cigare à proximité des séparatrices en question.

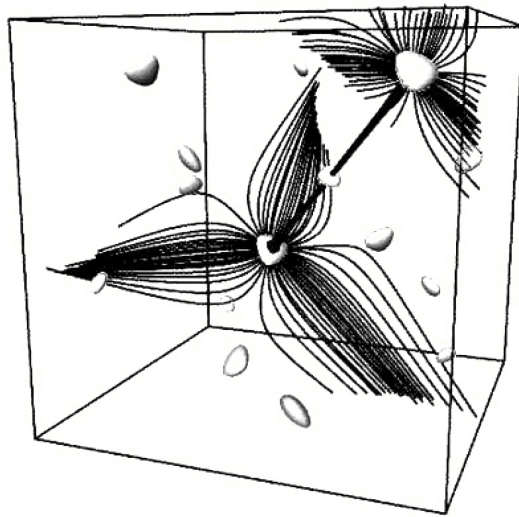


FIGURE 1.8 – Représentation de l'écoulement $A:B:C$: au centre, un point de stagnation de type β , avec des lignes de champ divergentes dans trois direction dans un plan. Dans le coin haut droite, un point de stagnation de type α connecté au point de type β . Le long du segment, le champ de vitesse croît de 0 à un maximum à mi-chemin puis redécroît vers 0. Figure extraite de [Dor00]

Première partie

Théorie :
Instabilités dynamos à différents
régimes de Reynolds
magnétiques

Chapter 2

Instability of the forced magnetohydrodynamics system at moderate Reynolds number

Cet article a été accepté pour publication dans
SIAM J. Math. Anal., 45(1), 307–323.
Version Arxiv : <http://arxiv.org/abs/1111.2288>
DOI : <http://dx.doi.org/10.1137/110854655>

Abstract

The aim of this paper is to give a result concerning the instability properties of the solutions of forced magnetohydrodynamics equations at small but finite Reynolds numbers. These solutions are highly oscillating spatially on the scale of the underlying flow but are growing on a larger scale depending on the magnetic Reynolds number. The existence of such solutions is called the alpha effect in the physical literature. We prove instability results for a dense subset of initial velocity field of the flow at given Reynolds number.

Keywords

magnetohydrodynamics, stability, alpha effect

2.1 Introduction

Dynamo theory first interested physicists almost one century ago, when Sir Joseph Larmor [Lar19] wondered how a magnetic field could be generated by a rotating body like the Sun or the Earth. Since then, many results, both in mathematics and physics, has lead to an understanding of this kind of phenomenon.

The physical model is a coupled system derived from the interaction of a conductive fluid, which follows Navier-Stokes equations, and an electromagnetic field, which follows Maxwell equations and Ohm's law. The interaction of the two physics

quantities comes from the fact that a magnetic field has an effect on a moving conductive fluid, which creates in return a magnetic field. This kind of system is known as magnetohydrodynamics (MHD).

We have mainly two behaviors for the solutions of the MHD system: the magnetic energy can either collapse (exponentially) or stay/grow. In the latter case we say we have a dynamo, and it is the effect we observe in bodies like the Sun. However, the understanding of dynamo mechanisms is not simple. Indeed, the most “intuitive” way we imagine the conductive fluid in rotation and the magnetic field (that is, a two-dimensional rotating fluid in the kernel, and a magnetic field that looks like the one of a static magnet) is actually a well-known antidynamo situation. Antidynamo theorems have been widely studied, and some summary of the knowledge in the domain has been made in [Gil03].

The kind of situation we want to study here is that of the second kind, that is, the dynamo situation (and more precisely growth). Positive results began to emerge only later in the 1950’s, even though it was already well known that it is what occurred in the Sun. In the 1990’s Vishik [Vis89] proved that fast dynamos (i.e. exponential growth) require Lagrangian chaos in the fluid. Those results spread the idea that the velocity field has to be chaotic enough to expect a dynamo effect. Because of this “negative” result, different methods were tried to find instability results, linked to singularities: Ponomarenko [Pon73] studied concentration phenomena to get dynamo result in the case where Laplace force is neglected (i.e. imposed velocity field), and his results were extended by Gilbert [Gil88] and successfully corroborated experimentally [GLP⁺04]. The more realistic case of the Ponomarenko dynamo was studied by Gérard-Varet and Rousset [GVR07]. All of these results were only asymptotic.

In this paper we will focus on another singular dynamo mechanism, called the *alpha effect*, first introduced by Parker [Par55], which is based on scale separation. We formally decompose the magnetic and the velocity fields into two parts: a fluctuating part, evolving on a turbulent scale, and a mean part, evolving on a larger scale. The mean value is broadly the spatial average over a sphere of radius much larger than the typical distance on which the field is turbulent, but much smaller than the distance on which we want to observe the dynamo effect (in what follows, these distances will be 1 and $1/\varepsilon$, so scale separation will take place at small ε , which will be implicitly defined in term of R_m). This gives a decomposition of the velocity and magnetic fields under the form

$$\begin{aligned} u &= \tilde{u}(x, x/\varepsilon, t) + \bar{u}(x, t), \\ b &= \tilde{b}(x, x/\varepsilon, t) + \bar{b}(x, t), \end{aligned} \tag{2.1}$$

where $\tilde{u}$ and $\tilde{b}$ have null mean value on the second variable. The idea behind the *alpha effect* is that the averaged induction term $\nabla \wedge (\bar{\tilde{u}} \wedge \bar{\tilde{b}})$ (we will specify the notation below) that will appear in the MHD equations will give us a destabilizing effect on the magnetic field.

The *alpha effect* was first formally studied by Roberts [Rob72, Rob70], in the framework of periodic flows. His results were discussed by Moffatt [Mof78], Childress

[Chi79], and Soward [Sow87], who considered a larger class of velocity fields and range of parameters. This effect has since been experimentally confirmed by Stieglitz and Müller [SM01].

The aim of the present paper is to provide a rigorous justification of this mechanism, in a nonlinear framework. We will improve substantially former results of Gérard-Varet [GV06, GV07].

Before stating more precisely our results, we will first recall the system we will work with:

The generation of magnetic field B by an electrically conducting fluid of velocity U and magnetic diffusivity ν_m follows the equations

$$\begin{cases} \partial_t B - \nabla \wedge (U \wedge B) - \nu_m \Delta B = 0, \\ \nabla \cdot B = 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

These equations are derived from the Maxwells equation and Ohm's law (see [FP03] section 2 or [Gil03] for more detailed derivations). Since other relevant physics quantities that appear in the Maxwells equations can be obtained from B , it is enough to work with only that.

Furthermore, the incompressible Navier-Stokes equations that drive the evolution of the conducting fluid under the force created by the magnetic field are

$$\begin{cases} \rho \partial_t U + \rho U \cdot \nabla U = -\nabla p + \eta \Delta U + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \wedge B) \wedge B + f, \\ \nabla \cdot U = 0, \end{cases} \quad (2.3)$$

where p is the pressure field, f is an additional forcing term, ρ is the fluid mass density, and η is the fluid shear viscosity (see [FP03] again, keeping in mind the incompressible condition). The additional forcing term will be chosen to generate some steady velocity field (and thus will be independent of time); see below.

We study the oscillating field U of amplitude V , oscillating on a space-scale L , and with magnetic diffusivity ν_m . After proper nondimensionalization of time, space, pressure, and magnetic field, we then have the full incompressible MHD system:

$$\begin{cases} \partial_t B - \nabla \wedge (U \wedge B) - \frac{1}{R_m} \Delta B = 0, \\ \partial_t U + U \cdot \nabla U + \nabla p - \frac{1}{R_e} \Delta U = (\nabla \wedge B) \wedge B + f, \\ \nabla \cdot B = 0, \\ \nabla \cdot U = 0, \end{cases} \quad (2.4)$$

where $R_m = \frac{LV}{\nu_m}$ is the magnetic Reynolds number, and $R_e = \frac{\rho LV}{\eta}$ is the hydrodynamic Reynolds number.

Here we want to find a growing solution on a larger scale L/ε (where $\varepsilon > 0$), using the alpha effect introduced earlier. We will search this solution as a perturbation $\begin{pmatrix} u \\ b \end{pmatrix}$ of a solution $\begin{pmatrix} U_s \\ 0 \end{pmatrix}$ of this system (and the forcing term f is chosen accordingly so that U_s is a solution of the Navier-Stokes equation):

$$\begin{cases} U = u + U_s, \\ B = b + 0. \end{cases} \quad (2.5)$$

The system in terms of b , u , and U_s becomes

$$\begin{cases} \partial_t u + u \cdot \nabla U_s + U_s \cdot \nabla u - \frac{1}{R_e} \Delta u + \nabla p = (\nabla \wedge b) \wedge b - u \cdot \nabla u, \\ \partial_t b - \nabla \wedge (U_s \wedge b) - \nabla \wedge (u \wedge b) - \frac{1}{R_m} \Delta b = 0, \\ \nabla \cdot b = 0, \\ \nabla \cdot u = 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

The space variables for this system is denoted θ and corresponds to the fluctuation scale L , 1 after non-dimensionalization. In particular, we assume that

$$U_s = U_s(\theta) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{T}^3) \quad (2.7)$$

and has zero mean.

Later on, we shall introduce a larger scale variable $x = \varepsilon \theta$ corresponding to the large scale L/ε of the growing field.

Our main result is an instability theorem in the Lyapunov sense for system (2.6). To state our result, we introduce the set $\mathcal{H}_0^\infty(\mathbb{T}^3)$ of spatially 1-periodic functions of class $\mathcal{C}^\infty$ and null mean value with its usual distance:

$$d(U, U') = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\max(1, \|U - U'\|_{\mathcal{H}^k})}{2^k}, \quad (2.8)$$

which makes it a Fréchet space.

For $T = (T_1, T_2, T_3) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$, we denote by

$$\mathcal{H}_T^s = \mathcal{H}^s(\mathbb{R}/T_1\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/T_2\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/T_3\mathbb{Z}) \quad (2.9)$$

the inhomogeneous Sobolev space of order s on the torus

$$\mathbb{R}/T_1\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/T_2\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/T_3\mathbb{Z}. \quad (2.10)$$

We have the following theorem.

Théorème 2.1

Let $s > 5/2$ be a real number. There exists a dense subset $\mathcal{P}$ of the unit ball of $\mathcal{H}_0^\infty(\mathbb{T}^3)$ and $R_m^0 > 0$ such that for all $U_s \in \mathcal{P}$ and $R_m < R_m^0$, for all $R_e > 0$, the solution $\begin{pmatrix} U_s \\ 0 \end{pmatrix}$ of the forced MHD system is nonlinearly unstable in the following sense:

There exists $T = (T_1, T_2, T_3) \in (\mathbb{N}^*)^3$ depending on U_s and R_m and initial values

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ b_0 \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_T^s, \quad (2.11)$$

and $C_0 > 0$ such that for all $\delta > 0$, any solution $\begin{pmatrix} u_\delta \\ b_\delta \end{pmatrix}$ of (2.6) with initial value

$\delta \begin{pmatrix} u_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$ satisfies

$$\left\| \begin{pmatrix} u_\delta \\ b_\delta \end{pmatrix} (t_\delta) \right\|_{\mathcal{H}_T^s} \geq C_0 \quad (2.12)$$

for some time t_δ . Furthermore, we have the estimate on t_δ as $\delta \rightarrow 0$:

$$t_\delta \sim_{\delta \rightarrow 0} -\frac{\ln \delta}{C}, \quad (2.13)$$

where C is a positive constant.

T will be defined in (2.79).

As expected, this theorem expresses the instability of the forced MHD system, up to consider a larger periodic box $[0, T_1] \times [0, T_2] \times [0, T_3]$. Let us point out that $(T_1, T_2, T_3) \in (\mathbb{N}^*)^3$, so that U_s is also periodic on this larger scale. Note also that U_s is not necessarily a solution of the Navier-Stokes equation and that the forcing term f is chosen to compensate for this.

In particular, for any

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ b_0 \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_T^s \quad (2.14)$$

and any $\delta > 0$, system (2.6) has a unique solution

$$\begin{pmatrix} u_\delta \\ b_\delta \end{pmatrix} \in \mathcal{C}^0([0, T^*], H_T^s) \quad (2.15)$$

for some $T^* > 0$ with initial data $\delta (u_0, b_0)$. Moreover, for $\delta > 0$ small enough, it is well known that one can take $T^* = +\infty$.

To the best of our knowledge, our theorem is the first full justification of the alpha effect in the nonlinear context.

In particular, it extends substantially the article [GV06] by Gérard-Varet. Recast in our variables, this article considers the case of large magnetic diffusion, that is, $R_m = \varepsilon \ll 1$. Briefly, it is shown that for all $m \in \mathbb{N}$, there are solutions of (2.6) (on a larger box depending on ε) that go from amplitude ε^m initially to an amplitude $\eta = \eta(m) > 0$ independent of ε (but depending on m).

Note that as η depends on m , this result does not yield Lyapunov instability at fixed small ε . Moreover, the study in [GV06] corresponds to the vanishing magnetic Reynolds number. In our theorem, the threshold R_m^0 is of order 1, which is much more satisfactory from a physical point of view.

The outline of the paper is as follow:

The first and main part of the paper is the construction of an exact unstable eigenmode for the linearization of (2.6). It involves sharp spectral analysis arguments. Then, on the basis of this linear analysis, the proof of nonlinear instability is given in section 3.

2.2 Linear instability

In this section we will establish linear instability for the induction part of the MHD system. In other words, we will exhibit an unstable eigenmode of the linear

operator

$$b \mapsto \nabla \wedge (U \wedge b) - \frac{1}{R_m} \Delta b \quad (2.16)$$

for a large class of U . This will be possible through an accurate mathematical analysis of the alpha effect described in the introduction.

Let us write the induction equation:

$$\begin{aligned} \partial_t b - \nabla \wedge (U \wedge b) - \frac{1}{R_m} \Delta b &= 0, \\ \nabla \cdot b &= 0, \end{aligned} \quad (2.17)$$

where $U \in \mathcal{H}_0^\infty(\mathbb{T}^3)$ is independent of time.

In this section we prove the following linear instability result.

Théorème 2.2

Let $s \geq 0$ be a real number. There exists a dense subset $\mathcal{P}$ of the unit ball of $\mathcal{H}_0^\infty(\mathbb{T}^3)$ and a positive real R_m^0 such that for all positive $R_m < R_m^0$ and all $U \in \mathcal{P}$, there exist $\xi \in (2\pi\mathbb{Q}^)^3$ and a number $\varepsilon_0 > 0$ such that for all $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, there exists a solution B of (2.17) of the form*

$$b(t, \theta) = e^{i\varepsilon\xi \cdot \theta} e^{\lambda^\varepsilon t} b^\varepsilon(\theta), \quad (2.18)$$

where $b^\varepsilon \in \mathcal{H}^s(\mathbb{T}^3)$, with exponential growth when $t \rightarrow +\infty$ (that is, $\operatorname{Re}(\lambda^\varepsilon) > 0$).

2.2.1 Linearized equation

Let $U \in \mathcal{H}_0^\infty(\mathbb{T}^3)$ be a spatially periodic velocity field in $\mathbb{R}^3$ (of period 1).

We expect to record a growth of the magnetic field at large spatial scales $x = \varepsilon\theta$ (where ε will be defined in terms of R_m) and accordingly posit for the solution of (2.17) the ansatz

$$b(\theta, t) = e^{i\varepsilon\xi \cdot \theta + \varepsilon t \lambda^\varepsilon} B_0^\varepsilon(\theta) \quad (2.19)$$

for some $\xi \in \mathbb{R}^3$ and some λ^ε with $\operatorname{Re} \lambda^\varepsilon > 0$, where B_0^ε is 1-periodic in θ and has a power series expansion of the form

$$B_0^\varepsilon(\theta) = \sum_{m \geq 0} \varepsilon^m (\bar{B}_m + \tilde{B}_m(\theta)), \quad \int_{\mathbb{T}^3} \tilde{B}_m(\theta) d\theta = 0. \quad (2.20)$$

We plug this ansatz into (2.17),

$$\left\{ \begin{aligned} &\lambda^\varepsilon B_0^\varepsilon - i\xi \wedge (U \wedge B_0^\varepsilon) - \frac{1}{\varepsilon} \nabla_\theta \wedge (U \wedge B_0^\varepsilon) \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{R_m} \xi^2 B_0^\varepsilon - \frac{1}{\varepsilon R_m} \Delta_\theta B_0^\varepsilon - \frac{2}{R_m} i \sum_{i=1}^d \xi_i \partial_{\theta_i} B_0^\varepsilon = 0, \\ &i\xi \cdot B_0^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \nabla_\theta \cdot B_0^\varepsilon = 0, \end{aligned} \right. \quad (2.21)$$

and we solve according to powers of ε : we denote by $A^\varepsilon = A^0 + \varepsilon A^1 + \varepsilon^2 A^2$ the operator associated to the first equation of (2.21), that is,

$$\begin{aligned} A^0 &= \nabla_\theta \wedge (U \wedge \cdot) + \frac{1}{R_m} \Delta_\theta, \\ A^1 &= \mathbf{i} \xi \wedge (U \wedge \cdot) + \frac{2}{R_m} \mathbf{i} \sum_{i=1}^d \xi_i \partial_{\theta_i}, \\ A^2 &= -\frac{1}{R_m} \xi^2 \text{Id}, \end{aligned} \tag{2.22}$$

where $A^\varepsilon: \mathcal{H}^{s+2}(\mathbb{T}^3) \rightarrow \mathcal{H}^s(\mathbb{T}^3)$, such that the first equation in (2.21) is

$$A^\varepsilon B_0^\varepsilon = \varepsilon \lambda^\varepsilon B_0^\varepsilon, \tag{2.23}$$

which is an eigenvalue problem. We will split this equation into powers of ε to obtain three equations.

2.2.2 Study of the first term in the development

The first equation, corresponding to $\varepsilon = 0$, is

$$A^0 B_0^0 = 0, \tag{2.24}$$

that is, $\frac{1}{R_m} \Delta_\theta B_0^0 + \nabla_\theta \wedge (U \wedge B_0^0) = 0$, which depends only on the independent variable θ .

We split B_0^0 into a mean part and a fluctuating part:

$$\frac{1}{R_m} \Delta_\theta \tilde{B}_0^0 + \nabla_\theta \wedge (U \wedge \tilde{B}_0^0) = -\nabla_\theta \wedge (U \wedge \bar{B}_0^0). \tag{2.25}$$

Since the Laplacian

$$\Delta_\theta: \mathcal{H}_0^{s+2}(\mathbb{T}^3) \subset \mathcal{H}_0^s(\mathbb{T}^3) \rightarrow \mathcal{H}_0^s(\mathbb{T}^3) \tag{2.26}$$

is an unbounded invertible operator, one can introduce

$$\Delta_\theta^{-1} \nabla_\theta \wedge (U \wedge \cdot): \mathcal{H}_0^s(\mathbb{T}^3) \rightarrow \mathcal{H}_0^{s+1}(\mathbb{T}^3) \subset \mathcal{H}_0^s(\mathbb{T}^3), \tag{2.27}$$

which is a compact operator of domain $\mathcal{H}_0^s(\mathbb{T}^3)$.

We introduce the following operator, which is the restriction of A^0 to zero-mean functions:

$$L_{R_m} = \frac{1}{R_m} \Delta_\theta \cdot + \nabla_\theta \wedge (U \wedge \cdot) = \Delta_\theta \left(\frac{1}{R_m} \text{Id} + \Delta_\theta^{-1} \nabla_\theta \wedge (U \wedge \cdot) \right). \tag{2.28}$$

By a classical result on the spectrum of compact operators, L_{R_m} is invertible as an operator from $\mathcal{H}_0^{s+2}(\mathbb{T}^3)$ to $\mathcal{H}_0^s(\mathbb{T}^3)$ but for some countable set C_L of R_m , which can

be written as a sequence of numbers growing to $+\infty$. In particular it is invertible for R_m smaller than a given value R_m^0 .

Since $-\nabla_\theta \wedge (U \wedge \bar{B}_0^0) \in \mathcal{H}_0^s(\mathbb{T}^3)$ for any $\bar{B}_0^0 \in \mathbb{R}^3$, (2.25) admits exactly one solution for every $\bar{B}_0^0 \in \mathbb{R}^3$. Then for any R_m out of C_L , the equation

$$L_{R_m} \tilde{B}_0^0 = -\nabla_\theta \wedge (U \wedge \bar{B}_0^0) \quad (2.29)$$

is equivalent to

$$\tilde{B}_0^0 = \mathcal{L}(\theta) \bar{B}_0^0, \quad (2.30)$$

where $\mathcal{L}(\theta)$ is the operator from $\mathbb{R}^3$ to $\mathcal{H}_0^{s+2}(\mathbb{T}^3)$ defined by

$$\mathcal{L}(\theta) = -L_{R_m}^{-1} \nabla_\theta \wedge (U \wedge \cdot). \quad (2.31)$$

That means that the operator A^0 has a kernel of dimension 3, $A^0: \mathcal{H}^{s+2}(\mathbb{T}^3) \subset \mathcal{H}^s(\mathbb{T}^3) \rightarrow \mathcal{H}^s(\mathbb{T}^3)$, that is, $\ker A^0 = \{\bar{B} + \mathcal{L}(\theta)\bar{B}, \bar{B} \in \mathbb{R}^3\}$.

Using the Lax–Milgram theorem and elliptic regularity, we know that the operator

$$\frac{1}{R_m} \Delta + \nabla_\theta \wedge (U \wedge \cdot) - \lambda \text{Id} = A^0 - \lambda \text{Id} \quad (2.32)$$

is invertible for large enough λ if seen as an operator from $\mathcal{H}_0^{s+2}$ to $\mathcal{H}_0^s$. Thus the resolvent of A^0 is compact in at least one λ , and all spectral projections are of finite dimension, that is, A^0 has eigenvalues of finite dimension, isolated, and they are the only spectral values of A^0 (see [Kat95] p.187).

Let σ be a smooth path surrounding 0 and no other eigenvalue of A^0 . For ε sufficiently small, since A^ε varies continuously on ε , σ doesn't cross the spectrum of A^ε , and the operator

$$P^\varepsilon := \frac{1}{2i\pi} \int_\sigma (A^\varepsilon - \lambda \text{Id})^{-1} d\lambda, \quad (2.33)$$

is the spectral projector associated to the eigenvalues of A^ε which tend to 0 as ε tends to 0. The eigenvalue 0 has multiplicity 3 in the spectrum of A^0 . By continuity, this eigenvalue will vary – and maybe split – around 0 for positive ε without crossing σ if ε is small enough. Note that the path depends on the choice of ξ .

Moreover, still for ε small enough, P^ε also varies analytically on ε .

Furthermore, by definition, P^0 is the spectral projection of A^0 on its eigenvalue 0 and commutes with A^0 ([Kat95] again, thm 6.17 p 178).

On $\text{Im } P^0$, A^0 then has only 0 as an eigenvalue. Since $\text{Im } P^0$ is of finite dimension, A^0 is nilpotent on this same space. Until the end of the subsection, we define $\mathcal{A}^0 = A^0|_{\text{Im } P^0}$.

Let n be the integer such that

$$\ker \mathcal{A}^0 \subset \ker (\mathcal{A}^0)^2 \subset \cdots \subset \ker (\mathcal{A}^0)^n = \text{Im } P^0, \quad (2.34)$$

We will now prove that $n = 1$, that is $\ker \mathcal{A}^0 = \ker (\mathcal{A}^0)^2$:

Let $B \in \ker(\mathcal{A}^0)^2$. Using the tilde and bar notation introduced in section 2.2.1 to decompose a vector field in large and small-scale fields, we have the equivalences

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{A}^0)^2 B = 0 &\iff \mathcal{A}^0(\widetilde{\mathcal{A}^0 B}) + \underbrace{\mathcal{A}^0(\overline{\mathcal{A}^0 B})}_{=0} = 0, \\
 &\iff \widetilde{\mathcal{A}^0 B} = \bar{B}' + \mathcal{L}(\theta)\bar{B}' \text{ and } \overline{\mathcal{A}^0 B} = 0, \\
 &\iff \widetilde{\mathcal{A}^0 B} = 0 \text{ and } \overline{\mathcal{A}^0 B} = 0, \\
 &\iff \mathcal{A}^0 B = 0.
 \end{aligned} \tag{2.35}$$

Thus $\ker \mathcal{A}^0 = \ker(\mathcal{A}^0)^2 = \text{Im } P^0$.

2.2.3 Simplification of the equation

Back to (2.23), we look for solutions of that equation in $\text{Im } P^\varepsilon$, that is, in the sum of the eigenspaces corresponding to the spectral values of A^ε surrounded by σ :

$$P^\varepsilon A^\varepsilon P^\varepsilon B^\varepsilon = \varepsilon \lambda^\varepsilon B^\varepsilon. \tag{2.36}$$

Developing P^ε as the beginning of a series in ε , $P^\varepsilon = P^0 + \varepsilon P^1 + \varepsilon^2 P'^\varepsilon$, we have

$$P^\varepsilon A^\varepsilon P^\varepsilon = P^0 A^0 P^0 + \varepsilon P^1 A^0 P^0 + \varepsilon P^0 A^0 P^1 + \varepsilon P^0 A^1 P^0 + \varepsilon^2 A'^\varepsilon, \tag{2.37}$$

where both P'^ε and A'^ε depend analytically on ε .

Since P^0 and A^0 commute and $A^0 P^0 = 0$ (see the results of previous subsection), the first three terms vanish, thus leaving us with the equation

$$P^0 A^1 P^0 B^\varepsilon + \varepsilon A'^\varepsilon B^\varepsilon = \lambda^\varepsilon B^\varepsilon. \tag{2.38}$$

In the following subsections, we look for a solution of this equation for $\varepsilon = 0$. We shall then conclude using the continuity of eigenvalues as functions of ε .

2.2.4 Case $\varepsilon = 0$

The first order in ε of (2.38) is equivalent to the system

$$\begin{cases} A^1 B = \lambda B, \\ \tilde{B} = \mathcal{L}(\theta)\bar{B}, \end{cases} \tag{2.39}$$

where $A^1 = i\xi \wedge (U \wedge \cdot) - \frac{2i}{R_m} \sum_{i=1}^d \xi_i \partial_{\theta_i}$ and $\mathcal{L}$ was introduced in (2.31). The mean part of the first equation is

$$i\xi \wedge (\overline{U \wedge B}) = \lambda \bar{B}, \tag{2.40}$$

that is,

$$i\xi \wedge (\overline{U \wedge \mathcal{L}(\theta)\bar{B}}) + \underbrace{i\xi \wedge (\overline{U \wedge \bar{B}})}_{=0} = \lambda \bar{B}, \tag{2.41}$$

$$\mathbf{i}\xi \wedge (\alpha \bar{B}) = \lambda \bar{B}, \quad (2.42)$$

where α is a constant matrix (that depends on U and R_m),

$$\alpha b = \int_{\theta \in \mathbb{T}^3} U(\theta) \wedge \mathcal{L}(\theta) b, \quad (2.43)$$

which we will study in the next subsection.

Thus we now have to find the eigenvalues of the operator $\mathbf{i}\xi \wedge (\alpha \cdot)$, that is, the eigenvalues of the matrix $A^\xi \alpha$, where

$$A^\xi = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{i}\xi_3 & \mathbf{i}\xi_2 \\ \mathbf{i}\xi_3 & 0 & -\mathbf{i}\xi_1 \\ -\mathbf{i}\xi_2 & \mathbf{i}\xi_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.44)$$

2.2.5 Study of the matrix α

The α matrix is defined for any $b \in \mathbb{R}^3$ by

$$\alpha b = \int_{\theta \in \mathbb{T}^3} U(\theta) \wedge \mathcal{L}(\theta) b = - \int_{\theta \in \mathbb{T}^3} U(\theta) \wedge \left(L_{R_m}^{-1} \nabla_\theta \wedge (U(\theta) \wedge b) \right). \quad (2.45)$$

We shall write this matrix as the sum of its skew symmetric part α^A and symmetric part α^S (which are both real).

Now we compute the eigenvalues of those matrices: since α^A is antisymmetric, its eigenvalues are $0, \pm \mathbf{i} \|V_U\|$, where V_U is a vector of $\mathbb{R}^3$ such that for all $b \in \mathbb{R}^3$, $\alpha^A b = V_U \wedge b$.

For α^S , we will apply a slight variation of U so that the matrix changes to one of distinct non-zero eigenvalues (this doesn't change what we said about the antisymmetric part).

Symmetry of α

We have in the expression of α

$$-L_{R_m}^{-1} \nabla_\theta \wedge (U \wedge b) = \left(\frac{1}{R_m} \text{Id} - \mathcal{A} \right)^{-1} (-\Delta_\theta^{-1} \nabla_\theta \wedge (U \wedge b)) = \left(\frac{1}{R_m} \text{Id} - \mathcal{A} \right)^{-1} \mathcal{A} b, \quad (2.46)$$

where

$$\mathcal{A} = -\Delta_\theta^{-1} \nabla_\theta \wedge (U \wedge \cdot): \mathcal{H}_0^{s+2} \rightarrow \mathcal{H}_0^{s+3} \subset \mathcal{H}_0^{s+2}. \quad (2.47)$$

For small enough R_m (such that $1/R_m$ is bigger than the highest eigenvalue of the compact operator $\mathcal{A}$, say $R_m < 2R_m^0$, where $R_m^0 > 0$ – we will justify this factor 2 as a precaution at the end of the subsection), we can express the resolvent as a series:

$$-L_{R_m}^{-1} \nabla_\theta \wedge (U \wedge b) = \sum_{n=0}^{+\infty} R_m^{n+1} \mathcal{A}^{n+1} b = \sum_{n=1}^{+\infty} R_m^n \mathcal{A}^n b. \quad (2.48)$$

Furthermore, (2.47) gives in Fourier series, for $k \neq 0$ and $f \in \mathcal{H}^s(\mathbb{T}^3)$,

$$\widehat{\mathcal{A}f}(k) = -\frac{1}{2\pi}|k|^{-2}(-ik) \wedge \left(\sum_{k'} \hat{U}(k') \wedge \hat{f}(k - k') \right). \quad (2.49)$$

Note that, by definition of Δ_θ^{-1} , $\widehat{Af}(0) = 0$.

Thus

$$\alpha b = \int_{\theta \in \mathbb{T}^3} U(\theta) \wedge \sum_{n=1}^{+\infty} (R_m \mathcal{A})^n b = \sum_{n=1}^{+\infty} R_m^n \int_{\theta \in \mathbb{T}^3} U(\theta) \wedge \mathcal{A}^n b, \quad (2.50)$$

and we recognize in the last part of the equation

$$\int_{\theta \in \mathbb{T}^3} U(\theta) \wedge \mathcal{A}^n b = U \wedge \widehat{\mathcal{A}^n b}(0). \quad (2.51)$$

Recursively, we can compute $U \wedge \widehat{\mathcal{A}^n b}(0)$ and

$$\alpha b = \sum_{n=1}^{\infty} R_m^n \sum_{\sum_{j=1}^{n+1} k_j = 0} \hat{U}(k_{n+1}) \wedge \left(\frac{im_n}{2\pi|m_n|^2} \wedge \left(\hat{U}(k_n) \wedge \cdots \left(\frac{im_1}{2\pi|m_1|^2} \wedge \left(\hat{U}(k_1) \wedge b \right) \right) \cdots \right) \right), \quad (2.52)$$

where the second sum is actually restricted to tuples where all partial sums $m_i = \sum_{j=1}^i k_j$ are non-zero (otherwise there is a term of the form $\widehat{\mathcal{A}^k b}(0)$ which is zero by definition of $\mathcal{A}$).

This last equality is

$$\alpha b = \sum_{n=1}^{\infty} R_m^n \alpha^{(n+1)} b, \quad (2.53)$$

where

$$\alpha^{(n)} = \sum_{\sum_{j=1}^n k_j = 0} \hat{U}(k_n) \wedge \left(\frac{im_{n-1}}{2\pi|m_{n-1}|^2} \wedge \left(\hat{U}(k_{n-1}) \wedge \cdots \left(\frac{im_1}{2\pi|m_1|^2} \wedge \left(\hat{U}(k_1) \wedge b \right) \right) \cdots \right) \right), \quad (2.54)$$

and $\alpha^{(n)}$ have the same symmetry as n (by recurrence, or see [Chi67]).

Eigenvalues of α

The first symmetric matrix in power series is $\alpha^{(2)}$.

Let $U \in \mathcal{H}_0^\infty(\mathbb{T}^3)$ and $\eta > 0$. We want $\tilde{U}$ such that $\alpha^{(2)}(\tilde{U})$ is of distinct non-zero eigenvalues and $d(U, \tilde{U}) < \eta$, where d is the usual distance induced by semi norms on $\mathcal{H}_0^\infty(\mathbb{T}^3)$. We now define

$$U^j(\theta) = \sum_{|k| \leq j} \hat{U}(k) e^{2ik \cdot \theta \pi}. \quad (2.55)$$

For large enough j , we have $d(U^j, U) \leq \eta/2$. Then, denote $\tilde{U} = U^j + \sum_{i=1}^3 \delta_i V^i$ where $\delta_i > 0$ is determined later, and

$$\begin{aligned} V^1 &= \begin{pmatrix} \sin(2\pi(j+1)\theta_3) + \cos(2\pi(j+1)\theta_2) \\ \cos(2\pi(j+1)\theta_3) \\ \sin(2\pi(j+1)\theta_2) \end{pmatrix}, \\ V^2 &= \begin{pmatrix} \sin(2\pi(j+2)\theta_3) \\ \sin(2\pi(j+2)\theta_1) + \cos(2\pi(j+2)\theta_3) \\ \cos(2\pi(j+2)\theta_1) \end{pmatrix}, \\ V^3 &= \begin{pmatrix} \cos(2\pi(j+3)\theta_2) \\ \sin(2\pi(j+3)\theta_1) \\ \sin(2\pi(j+3)\theta_2) + \cos(2\pi(j+3)\theta_1) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Then

$$\begin{aligned} \hat{V}^1(k)_y &= \int e^{-2ik \cdot \theta \pi} V_y^1(\theta) d\theta = \begin{cases} 0 & \text{if } k_1 \neq 0 \text{ or } k_2 \neq 0, \\ \int_0^1 e^{-2i\pi k_3 \theta_3} \cos(2\pi(j+1)\theta_3) d\theta_3 & \text{otherwise,} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{if } (k_3 \neq j+1 \text{ and } k_3 \neq -j-1) \text{ or } k_1 \neq 0 \text{ or } k_2 \neq 0, \\ \frac{1}{2} & \text{otherwise.} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.57)$$

Thus

$$\hat{V}^1(k) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \delta_{k_1=0} \delta_{k_3=0} (\delta_{k_2=j+1} + \delta_{k_2=-j-1}) + \frac{i}{2} \delta_{k_1=0} \delta_{k_2=0} (\delta_{k_3=-j-1} - \delta_{k_3=j+1}) \\ \frac{1}{2} \delta_{k_1=0} \delta_{k_2=0} (\delta_{k_3=j+1} + \delta_{k_3=-j-1}) \\ \frac{i}{2} \delta_{k_1=0} \delta_{k_3=0} (\delta_{k_2=-j-1} - \delta_{k_2=j+1}) \end{pmatrix}, \quad (2.58)$$

and similarly for the other ones:

$$\hat{V}^2(k) = \begin{pmatrix} \frac{i}{2} \delta_{k_1=0} \delta_{k_2=0} (\delta_{k_3=-j-2} - \delta_{k_3=j+2}) \\ \frac{1}{2} \delta_{k_1=0} \delta_{k_2=0} (\delta_{k_3=j+2} + \delta_{k_3=-j-2}) + \frac{i}{2} \delta_{k_2=0} \delta_{k_3=0} (\delta_{k_1=-j-2} - \delta_{k_1=j+2}) \\ \frac{1}{2} \delta_{k_2=0} \delta_{k_3=0} (\delta_{k_1=j+2} + \delta_{k_1=-j-2}) \end{pmatrix}, \quad (2.59)$$

$$\hat{V}^3(k) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \delta_{k_1=0} \delta_{k_3=0} (\delta_{k_2=j+3} + \delta_{k_2=-j-3}) \\ \frac{i}{2} \delta_{k_2=0} \delta_{k_3=0} (\delta_{k_1=-j-3} - \delta_{k_1=j+3}) \\ \frac{1}{2} \delta_{k_2=0} \delta_{k_3=0} (\delta_{k_1=j+3} + \delta_{k_1=-j-3}) + \frac{i}{2} \delta_{k_1=0} \delta_{k_3=0} (\delta_{k_2=-j-3} - \delta_{k_2=j+3}) \end{pmatrix}. \quad (2.60)$$

For $V^i(k)$ to be non-zero, we need that $k_i = 0$ and $k_l \in \{0, j+i, -j-i\}$ when $l \neq i$.

Then $\hat{V}^1(-k) \wedge \left(\mathbf{i} \frac{k}{|k|^2} \wedge (\hat{V}^2(k) \wedge B) \right) = 0$ as soon as $k_1 \neq 0$ or $k_2 \neq 0$. If both are null, then $\hat{V}^1(k) = 0$ but if $k_3 \in \{0, j+1, -j-1\}$, and $\hat{V}^2(k) = 0$ but if $k_3 \in \{0, j+2, -j-2\}$. Thus the product is always zero.

Now only the non-crossed terms remain:

$$\hat{V}^1(-k) \wedge \left(\mathbf{i} \frac{k}{|k|^2} \wedge (\hat{V}^1(k) \wedge B) \right) = \hat{V}^1(-k) \wedge \hat{V}^1(k) \cdot \left(\mathbf{i} \frac{k}{|k|^2} \cdot B \right). \quad (2.61)$$

For it to be non-zero, we need that $k_1 = 0$. If furthermore $k_2 \neq 0$ and $k_3 \neq 0$, then $\hat{V}^1(k) = 0$.

$$\begin{array}{l|l} \text{If } k_3 = 0 \text{ and } k_2 \neq 0, & \text{If } k_3 \neq 0 \text{ and } k_2 = 0, \\ \hat{V}^1(k) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\delta_{k_2=j+1} + \delta_{k_2=-j-1}) \\ 0 \\ \frac{i}{2}(\delta_{k_2=-j-1} - \delta_{k_2=j+1}) \end{pmatrix}. & \hat{V}^1(k) = \begin{pmatrix} \frac{i}{2}(\delta_{k_3=-j-1} - \delta_{k_3=j+1}) \\ \frac{1}{2}(\delta_{k_3=j+1} + \delta_{k_3=-j-1}) \\ 0 \end{pmatrix}. \\ \text{Thus for } k_2 = j+1. & \text{Thus for } k_3 = j+1. \\ \hat{V}^1(-k) \wedge \hat{V}^1(k) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{i} \\ 0 \end{pmatrix} & \hat{V}^1(-k) \wedge \hat{V}^1(k) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{i} \end{pmatrix} \end{array}$$

Thus

$$\begin{aligned} & \sum_{k \neq 0} \hat{V}^1(-k) \wedge \hat{V}^1(k) \left(\mathbf{i} \frac{k}{|k|^2} \cdot B \right) \\ &= \sum_{k_3=k_1=0} \hat{V}^1(-k) \wedge \hat{V}^1(k) \left(\mathbf{i} \frac{k}{|k|^2} \cdot B \right) + \sum_{k_2=k_1=0} \hat{V}^1(-k) \wedge \hat{V}^1(k) \left(\mathbf{i} \frac{k}{|k|^2} \cdot B \right) \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{i} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{\mathbf{i}}{|j+1|^2} \begin{pmatrix} 0 \\ j+1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot B \right) + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -\mathbf{i} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{\mathbf{i}}{|j+1|^2} \begin{pmatrix} 0 \\ -j-1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot B \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{i} \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{\mathbf{i}}{|j+1|^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ j+1 \end{pmatrix} \cdot B \right) + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\mathbf{i} \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{\mathbf{i}}{|j+1|^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -j-1 \end{pmatrix} \cdot B \right) \\ &= -\frac{1}{j+1} \begin{pmatrix} 0 \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.62}$$

We do the same for the other ones:

$$\begin{aligned} \sum_{k \neq 0} \hat{V}^2(-k) \wedge \hat{V}^2(k) \left(\mathbf{i} \frac{k}{|k|^2} \cdot B \right) &= \frac{-1}{j+2} \begin{pmatrix} B_x \\ 0 \\ B_z \end{pmatrix}, \sum_{k \neq 0} \hat{V}^3(-k) \wedge \hat{V}^3(k) \left(\mathbf{i} \frac{k}{|k|^2} \cdot B \right) \\ &= \frac{-1}{j+3} \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2.63}$$

Finally, for all $i \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, since the spectrum of U^j and V^i are disjoint,

$$\sum_{k \neq 0} \hat{U}^j(-k) \wedge \hat{V}^i(k) \left(\mathbf{i} \frac{k}{|k|^2} \cdot B \right) = 0, \tag{2.64}$$

and then

$$\alpha^{(2)}(\tilde{U}) = \alpha^{(2)}(U^j) - \frac{\delta_1}{j+1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{\delta_2}{j+2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{\delta_3}{j+3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.65)$$

where the δ_i can be chosen as small as we choose. Thus $\alpha^{(2)}(U)$ is as near as we want to a matrix of distinct non-zero eigenvalues, and it's the same for $\alpha^S(U)$ for $R_m < R_m^0$ (Note: the set in which R_m can be taken will vary continuously with U , thus the precaution we took at the beginning of the subsection to be sufficiently far from the limit.)

End of the proof

In this subsection¹, we now work with $\tilde{U}$ instead of U , dropping the tilde. Thus, α^S has distinct non-zero eigenvalues. In the Fourier transform, we now have to find the eigenvalues of the matrix $A^\xi \alpha^A + A^\xi \alpha^S$, where

$$A^\xi = \mathbf{i} \begin{pmatrix} 0 & -\xi_3 & \xi_2 \\ \xi_3 & 0 & -\xi_1 \\ -\xi_2 & \xi_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.66)$$

Let there be $P \in \mathcal{O}_3(\mathbb{R})$ such that

$${}^t P \alpha^S P = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix} = D, \quad (2.67)$$

and write $\zeta = {}^t P \xi$. The matrix $A^\zeta D$ has $\lambda_0 = 0$ eigenvalue, and two opposite eigenvalues given by

$$\lambda_{\pm} = \pm \sqrt{\zeta_1^2 \alpha_2 \alpha_3 + \zeta_2^2 \alpha_3 \alpha_1 + \zeta_3^2 \alpha_1 \alpha_2}. \quad (2.68)$$

Those eigenvalues are real for any ζ if all eigenvalues of α^S have the same sign. Otherwise, there exists a cone with vertex 0 outside of which they are. Furthermore, for ζ in the complement Ω of this cone, λ_+ stays positive, and λ_- stays negative. Thus, the eigenvectors of $A^\zeta D$ depend regularly on ζ . From now on, we fix some ζ in this good set Ω . We can also assume that $\xi = P\zeta \in (2\pi\mathbb{Q}_+^*)^3$.

Let β be an eigenvector associated to λ_+ . Then $A^\zeta D\beta = \mathbf{i}\zeta \wedge (D\beta) = \lambda_+\beta$, so $\zeta \cdot \beta = 0$. Thus, we have $A^\zeta {}^t P \alpha^A P \beta = \zeta \wedge (\gamma \wedge \beta) = -\mathbf{i}(\zeta \cdot \gamma)\beta$, where γ is a vector such that for all $b \in \mathbb{R}^3$, ${}^t P \alpha^A P b = \gamma \wedge b$. Thus β is also an eigenvector of $A^\zeta {}^t P \alpha^A P$, associated to the eigenvalue $-\mathbf{i}(\zeta \cdot \gamma)$.

1. Some of the calculations involved in this subsection are very common in the literature concerning the alpha effect, see for instance [Mof78] or [Rob70].

Now changing back to $\xi = P\zeta$, we have that

$$A^\zeta = {}^tPA^\xi P, \quad (2.69)$$

so that β is an eigenvector of ${}^tPA^\xi\alpha^AP + {}^tPA^\xi PD$ associated to the eigenvalue $\lambda_+ - \mathbf{i}(\zeta \cdot \gamma) = \lambda_+ - \mathbf{i}(\xi \cdot P\gamma)$. Thus $P\beta$ is an eigenvector of $A^\xi\alpha^A + A^\xi\alpha^S$ associated to an eigenvalue of positive real part, that is, a growing mode solution of the first term of (2.38).

2.2.6 Conclusion to the linear case

We have proven now the existence of an eigenvector b_0^0 of the equation

$$P^0A^1P^0B^\varepsilon + \varepsilon A'^\varepsilon B^\varepsilon = \lambda^\varepsilon B^\varepsilon \quad (2.70)$$

for $\varepsilon = 0$ with positive real part, that is, an exponentially growing mode of the form

$$B^\varepsilon(x, \theta, t) = b_0^0(\theta, \zeta) e^{(\lambda_+ - \mathbf{i}\zeta \cdot \gamma)t + \mathbf{i}\zeta \cdot x} \quad (2.71)$$

of the induction equation for given velocity field U_s and small enough R_m (and $\varepsilon = 0$). Since the operator $\frac{1}{\varepsilon}P^\varepsilon A^\varepsilon P^\varepsilon$ varies analytically on ε for small ε and has distinct eigenvalues for $\varepsilon = 0$, so do eigenvalues and eigenvectors of this operator, and thus the result remains valid when ε is positive sufficiently small (at fixed ξ), and we have now an eigenvector b_0 of the induction equation for small enough ε .

This concludes the proof of theorem 2.2.

Remarque 2.3

Most of what we said stays valid if we take R_m out of a discrete set of values instead of only “small enough”. Only the fact that $\alpha(U)$ is as near as we want to a matrix of distinct non-zero eigenvalues remains a problem in that case.

Using the linear instability result in theorem 2.2, we will prove in the next section the instability of the full nonlinear MHD system (2.4).

2.3 Nonlinear instability

We will now prove nonlinear instability of the system (2.4). For that we will adapt a method developped by Friedlander, Strauss and Vishik in [FSV97] (itself adapted from Guo and Strauss in [GS95]) to prove nonlinear instability given linear instability. The condition $s > 3/2 + 1$ in the main theorem is used only in this section to obtain an inequality on the nonlinear terms similar to those in the article [FSV97]. Actually, using the parabolic feature of the MHD system, it would be possible to lower our regularity requirements (see, for instance, Friedlander, Pavlović and Shvydkoy [FPS06] in the context of the Navier-Stokes equations). We stick here to regular data for simplicity of exposition.

Let $U_s \in \mathcal{P}$ belonging to the dense subset of linearly unstable flows described in the previous section.

We introduce Leray operator $\mathbb{P}$ to get rid of p . We rewrite system (2.6) as

$$\partial_t \mathcal{U} + L_s \mathcal{U} = Q(\mathcal{U}, \mathcal{U}), \quad (2.72)$$

where

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} u \\ b \end{pmatrix}, \quad (2.73)$$

$$L_s \mathcal{U} = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(u \cdot \nabla U_s + U_s \cdot \nabla u) - \frac{1}{R_e} \Delta u \\ -\nabla \wedge (U_s \wedge b) - \frac{1}{R_m} \Delta b \end{pmatrix} \quad (2.74)$$

is the linearized operator around $\begin{pmatrix} U_s \\ 0 \end{pmatrix}$, and

$$Q(\mathcal{U}, \mathcal{U}) = \begin{pmatrix} \mathbb{P}((\nabla \wedge b) \wedge b - u \cdot \nabla u) \\ \nabla \wedge (u \wedge b) \end{pmatrix} \quad (2.75)$$

is the nonlinearity.

We shall consider this system in $\mathcal{H}_T^s$, with T to be specified later. We also denote by L_T^2 the L^2 space on the torus. Since we will work in these spaces until the end of the proof, we will drop the T in the notation. We have the following a priori estimates for the nonlinear term:

Every term of every component of $Q(\mathcal{U}, \mathcal{U})$ can be written as a product of one component of $\mathcal{U}$ and one of $\nabla \mathcal{U}$ (composed by $\mathbb{P}$). Thus, we have the first estimate

$$\|Q(\mathcal{U}, \mathcal{U})\|_{L^2} \leq C \|\mathcal{U} \cdot \nabla \mathcal{U}\|_{L^2} \leq C \|\mathcal{U}\|_{L^2} \|\nabla \mathcal{U}\|_{L^\infty}. \quad (2.76)$$

For $r = \frac{1}{2}(s + n/2 + 1) > n/2 + 1$ (here $n = 3$) and η such that $r = (1 - \eta)s$ (i.e. $\eta = \frac{1}{2} - \frac{n+2}{4s} = \frac{1}{2} - \frac{5}{4s}$), we have that

$$\|\nabla \mathcal{U}\|_{L^\infty} \leq \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}^r} \leq C \|\mathcal{U}\|_{L^2}^\eta \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}^s}^{1-\eta}. \quad (2.77)$$

Thus, we have

$$\|Q(\mathcal{U}, \mathcal{U})\|_{L^2} \leq C \|\mathcal{U}\|_{L^2}^{1+\eta} \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}^s}^{1-\eta} \quad (2.78)$$

We shall prove the following theorem, which is a mere reformulation of the first theorem.

Théorème 2.4

Suppose $s > 3/2 + 1$, R_m small enough and $R_e > 0$. Then there exists a vector $T = (T_1, T_2, T_3)$ with integer coordinates such that the system (2.72) is nonlinearly unstable in $\mathcal{H}_T^s$ in the following sense:

There exists a growing mode $\mathcal{U}_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$ with $\|\mathcal{U}_0\|_{\mathcal{H}_T^s} = 1$ of the linearized system and a constant $C_0 > 0$ depending only on $\mathcal{U}_0, s, n, \rho$ such that for all $\delta > 0$, the perturbation of the linear solution $\delta \mathcal{U}_0$ satisfies $\|\mathcal{U}(t_\delta)\|_{\mathcal{H}_T^s} \geq C_0$ for some time t_δ . Furthermore, $t_\delta \sim_{\delta \rightarrow 0} -\frac{\ln \delta}{\rho}$.

Remarque 2.5

This theorem proves only that the solution reaches high values in finite time however small the initial condition is. In particular it doesn't say whether it explodes in finite time or is defined for all time, since both situations are possible in the result of the theorem. Actually, for small enough initial data (that is, small enough δ), it is classical that the solution of the system doesn't explode in finite time and thus the approximation of t_δ for vanishing δ is valid. For more details see [Tem01] (Theorem 3.8).

Note also that it doesn't say either what happens after having reached t_δ . The magnetic field energy could as well drop again to 0 afterwards or keep growing (up to a certain limit). Physically, the loss of magnetic and mecanic energy would suggest that it would end up in decreasing after a while.

Assume to the contrary that the system is nonlinearly stable while spectrally unstable, that is, that for any growing mode of initial value $\mathcal{U}_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$ with $\|\mathcal{U}_0\|_{\mathcal{H}_T^s} = 1$ in any box T of the system (i.e. an eigenvector of L_s associated to an eigenvalue with positive real part) and for any $\varepsilon > 0$, there exists a $\delta > 0$ such that for all $t > 0$, the solution $\mathcal{U}(t)$ of the system with initial values $\delta\mathcal{U}_0$ satisfies $\|\mathcal{U}(t)\|_{\mathcal{H}_T^s} \leq \varepsilon$.

2.3.1 Proof of the nonlinear instability

Let $b_L(\theta) = e^{i\varepsilon\xi\cdot\theta}b^\varepsilon(\theta)$ be the unstable eigenmode given by Theorem 2. We fix $\varepsilon < \varepsilon_0$ in such a way that

$$T = \left(\frac{2\pi}{\varepsilon|\xi_1|}, \frac{2\pi}{\varepsilon|\xi_2|}, \frac{2\pi}{\varepsilon|\xi_3|} \right) \quad (2.79)$$

belongs to $\mathbb{N}^3$. This is possible as $\xi \in (2\pi\mathbb{Q}_+^*)^3$ (take ε to be the inverse of a large integer). In particular, $\tilde{\mathcal{U}}_L = \begin{pmatrix} 0 \\ b_L \end{pmatrix}$ is an eigenvector of L_s associated to an eigenvalue with positive real part in $\mathcal{H}_T^s$.

Denote by ρ the maximum real part of the spectrum of L_s :

$$\rho = \max \{ \operatorname{Re} \lambda, \lambda \in \operatorname{Spectr}(L_s) \}. \quad (2.80)$$

By the previous remark on $\tilde{\mathcal{U}}_L$, we know that $\rho > 0$. Moreover, since the spectrum of L_s is only made of eigenvalues, there exists an eigenvector $\mathcal{U}_L = \begin{pmatrix} u_L \\ b_L \end{pmatrix}$ with eigenvalue λ satisfying exactly $\operatorname{Re} \lambda = \rho$.

Moreover, by standard properties of the spectral radius of e^{L_s} , we know that

$$e^\rho = \lim_{t \rightarrow +\infty} \|e^{tL_s}\|^{1/t}. \quad (2.81)$$

Thus, for all $\eta > 0$, there exists a C_η such that for all $t \geq 0$,

$$\|e^{tL_s}\| \leq C_\eta e^{\rho(1+\frac{\eta}{2})t}. \quad (2.82)$$

Then the solution $\mathcal{U}$ of (2.72) with initial data δU_0 can be written

$$\mathcal{U} = \hat{\mathcal{U}} + \delta \mathcal{U}_L, \quad (2.83)$$

where $\hat{\mathcal{U}}$ satisfies

$$\begin{cases} \partial_t \hat{\mathcal{U}} = L_s \hat{\mathcal{U}} + Q(\mathcal{U}, \mathcal{U}), \\ \hat{\mathcal{U}}|_{t=0} = 0. \end{cases} \quad (2.84)$$

Using Duhamel's formula, we can write the solution under the form:

$$\hat{\mathcal{U}}(t) = \int_0^t e^{(t-s)L_s} Q(\mathcal{U}, \mathcal{U}) ds. \quad (2.85)$$

Define

$$T_\delta = \sup \left\{ t > 0, \forall s \leq t, \|\hat{\mathcal{U}}(s)\|_{L^2} \leq \frac{1}{2} \delta e^{\rho s} \|\mathcal{U}_L\|_{L^2} \right\}, \quad (2.86)$$

where λ is the coefficient in the growing linear mode. Then, since we supposed that $\mathcal{U} = \mathcal{U}_l + \hat{\mathcal{U}}$ remains bounded, and $\|\mathcal{U}_l\| \sim \delta e^{\rho t} \|\mathcal{U}_L\|$, we have that $T_\delta < \infty$.

For all $t < T_\delta$,

$$\|\mathcal{U}(t)\|_{L^2} \leq \frac{3}{2} \delta e^{\rho t} \|\mathcal{U}_L\|_{L^2}. \quad (2.87)$$

Using a priori estimates stated earlier, we have for $\eta = \frac{1}{2} - \frac{n+2}{4s} = \frac{1}{2} - \frac{5}{4s}$

$$\|\hat{\mathcal{U}}(t)\|_{L^2} \leq C_\eta \int_0^t e^{\rho(1+\frac{\eta}{2})(t-s)} \|\mathcal{U}\|_{L^2}^{1+\eta} \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}^s}^{1-\eta} ds; \quad (2.88)$$

$$\begin{aligned} \|\hat{\mathcal{U}}(t)\|_{L^2} &\leq \delta^{1+\eta} C_\eta \int_0^t e^{(t-s)(1+\frac{\eta}{2})\rho} e^{(1+\eta)\rho s} \varepsilon^{1-\eta} ds \\ &\leq C_\eta \delta^{1+\eta} e^{t(1+\frac{\eta}{2})\rho} \varepsilon^{1-\eta} \frac{2}{\eta\rho} (e^{t\frac{\eta}{2}\rho} - 1) \\ &\leq C' \delta^{1+\eta} e^{t(1+\eta)\rho} \varepsilon^{1-\eta}. \end{aligned} \quad (2.89)$$

Thus, getting back to $\mathcal{U}$,

$$\|\mathcal{U}\|_{L^2} \geq \delta \|\mathcal{U}_L\|_{L^2} e^{\rho t} - C' \delta^{1+\eta} \varepsilon^{1-\eta} e^{t(1+\eta)\rho}. \quad (2.90)$$

By definition of T_δ , we have

$$\|\hat{\mathcal{U}}(T_\delta)\|_{L^2} = \frac{1}{2} \delta e^{\rho T_\delta} \|\mathcal{U}_L\|_{L^2} \leq C' \delta^{1+\eta} \varepsilon^{1-\eta} e^{T_\delta(1+\eta)\rho}, \quad (2.91)$$

that is,

$$\frac{1}{2} \|\mathcal{U}_L\|_{L^2} \leq C' \delta^\eta \varepsilon^{1-\eta} e^{T_\delta \eta \rho}, \quad (2.92)$$

$$T_\delta \geq \ln \left(\frac{\|\mathcal{U}_L\|_{L^2}}{2C'\delta^\eta \varepsilon^{1-\eta}} \right) \frac{1}{\eta\rho}. \quad (2.93)$$

Denote by t_δ the quantity

$$t_\delta = \ln \left(\frac{\|\mathcal{U}_L\|_{L^2}}{2C'\delta^\eta \varepsilon^{1-\eta}(1+\eta)} \right) \frac{1}{\eta\rho}. \quad (2.94)$$

Thus $t_\delta \leq T_\delta$, and at this time t_δ

$$\|\mathcal{U}\|_{L^2} \geq \delta e^{\rho t_\delta} \left(\|\mathcal{U}_L\|_{L^2} - \frac{\|\mathcal{U}_L\|_{L^2}}{1+\eta} \right) = \frac{\eta}{1+\eta} \|\mathcal{U}_L\|_{L^2} \left(\frac{\|\mathcal{U}_L\|_{L^2}}{C'\varepsilon^{1-\eta}(1+\eta)} \right)^{1/\eta}. \quad (2.95)$$

Thus $\|\mathcal{U}\|_{L^2}$ (and $\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}^s}$) can be bounded below by a value independent of δ , which contradicts the assumption and proves the theorem.

2.3.2 Estimation of the growing time

We will now estimate the time in which $\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}^s}$ becomes of order 1. Denote by T_0 this time:

$$T_0 = \sup \{t > 0, \forall s \leq t, \|\mathcal{U}(s)\|_{\mathcal{H}^s} \leq 1\}. \quad (2.96)$$

We use again the definition of T_δ :

$$T_\delta = \sup \{t > 0, \forall s \leq t, \|\hat{\mathcal{U}}(s)\|_{L^2} \leq \frac{1}{2} \delta e^{\rho s} \|\mathcal{U}_L\|_{L^2}\}. \quad (2.97)$$

This time, T_δ might be infinite. For big enough λ as in the former proof, we have again that

$$T_\delta \geq \ln \left(\frac{\|\mathcal{U}_L\|_{L^2}}{2C'\delta^\eta} \right) \frac{1}{\eta\rho}. \quad (2.98)$$

Denote again by t_δ the right-hand side:

$$t_\delta = \ln \left(\frac{\|\mathcal{U}_L\|_{L^2}}{2C'\delta^\eta(1+\eta)} \right) \frac{1}{\eta\rho}. \quad (2.99)$$

Thus in time $t_0 = \inf\{t_\delta, T_0\}$ and with the constant

$$C_0 = \inf \left\{ 1, \frac{\eta}{1+\eta} \|\mathcal{U}_L\|_{L^2} \left(\frac{\|\mathcal{U}_L\|_{L^2}}{C'(1+\eta)} \right)^{1/\eta} \right\}, \quad (2.100)$$

we have

$$\|\mathcal{U}(t_0)\|_{L^2} \geq C_0 \quad (2.101)$$

and

$$t_0 \leq \ln \left(\frac{\|\mathcal{U}_L\|_{L^2}}{2C'(1+\eta)} \right) \frac{1}{\eta\rho} - \frac{\ln \delta}{\rho} \leq \frac{-\ln \delta}{\rho} + C'_0. \quad (2.102)$$

Acknowledgements

The author acknowledges the support of the ANR Grant 08-JCJC-0104, coordinated by David Gérard-Varet, and thanks the latter for suggesting the subject, reading the manuscript, and providing much advice to achieve the result.

Chapter 3

Instability of the magnetohydrodynamics system at vanishing Reynolds number

Cet article a été accepté pour publication dans

Z. Angew. Mat. Phys.

Version Arxiv : <http://arxiv.org/abs/1210.8012>

DOI : <http://dx.doi.org/10.1007/s00033-013-0309-1>

Abstract

The aim of this note is to study the dynamo properties of the magnetohydrodynamics system at vanishing R_m . Improving the analysis in [GV06], we shall establish a generic Lyapunov instability result.

3.1 The induction equation

The incompressible magnetohydrodynamics (MHD) system is a classical model for conducting fluids. It is derived from both Navier–Stokes equation for the fluid movement under the magnetic field and the Maxwell equations with Ohm’s law for the evolution of the magnetic field generated by the fluid movement. It is in dimensionless form:

$$\begin{cases} \partial_t u + u \cdot \nabla u + \nabla p - \frac{1}{R_e} \Delta u = (\nabla \wedge b) \wedge b + f, \\ \partial_t b - \nabla \wedge (u \wedge b) - \frac{1}{R_m} \Delta b = 0, \\ \nabla \cdot u = 0, \\ \nabla \cdot b = 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

where R_e and R_m are the hydrodynamic and magnetic Reynolds numbers. In this system, $u = u(t, \theta)$ and $b = b(t, \theta)$ are, respectively the velocity field of the fluid and the magnetic field, vector-valued functions in $\mathbb{R}^3$, and f is an additional forcing term (anything that is not the electromagnetic force). To lighten notations, we

will assume in this note that $R_e = 1$ and $R_m = \varepsilon$, where ε is a small parameter. Note that the Reynolds magnetic number – that is the one that corresponds to the definition commonly used – is defined by $R_m = \frac{LV}{\nu_m}$, where L and V are, respectively, the typical variation length and amplitude of the velocity field u . This means that for a given time-and-space scale for the velocity field, we consider large magnetic diffusivity (or vanishing conductivity) of the fluid. The reader may refer to [FP03] to have a complete explanation on how the above MHD system is computed. One may say it is the base system for describing MHD in the case of a conducting viscous fluid.

Our aim here, related to dynamo theory, is to deal with the stability of solutions of this last system, and more precisely with the instability of solutions of the form

$$(u, b) = (u(t, x), 0). \quad (3.2)$$

The physical problem behind the study of the stability of such solutions is to understand the generation of magnetic field by the fluid. The fluid “gives” energy to the magnetic field by the term $\nabla \wedge (u \wedge b)$, which should compensate the dissipation term in the equation. We know for long that this kind of phenomena occurs in planets and stars like the Sun or the Earth and make them act like a magnet (see [Lar19] where the problem was first posed).

There have been many results in the past century in dynamo theory. First results where “negative” results in the sense that they gave condition for which fluids cannot generate a dynamo effect, i.e., this corresponds to situations where solutions of the form (3.2) were actually stable. Those results spread the idea that the velocity field has to be chaotic enough to expect a dynamo effect (See Vishik [Vis89]). The knowledge in the domain concerning stability of the MHD system has been summed up in [Gil03].

Then, positive results began to emerge concerning kinetic dynamos, that is a dynamo where we consider only the induction equation in the system: physically, this corresponds to the case where the Laplace force is neglected in the fluid movement, i.e., the magnetic field has no retro-action on the fluid. This case is much simpler since it corresponds to only a linear case. More recent results gave positive result with the full MHD system, which is nonlinear.

In this note, we will focus on a particular mechanism for the generation of magnetic field, that is the “alpha effect”, which was first introduced by Parker [Par55]. This mechanism is based on scale separation: we formally decompose the fields into two parts, a fluctuating one, evolving on small lengths, and a mean one evolving on much bigger ones. The idea is that the small-scale field can have an effect on the big-scale one through the mean part of the crossed term $\nabla \wedge (u \wedge b)$ in the induction equation and may create instability on the large scale. Note that this kind of mechanism has been experimentally confirmed much recently by Stieglitz and Müller [SM01].

Three regimes of R_m can be identified in the MHD system:

The intermediate regime where R_m is of order 1. We considered this regime in a former article [Bou11].

The regime of large R_m . In that case, one can expect a dynamo at the scale of the velocity field, since the diffusive effect is very weak at such scale. A related question is whether the dynamo is “fast” or “slow,” that is whether the best growing mode decreases to 0 as $R_m \rightarrow +\infty$ or not. So far this regime has been mainly studied formally and numerically (up to $R_m \sim 10^5$) in physics [Ota93, Sow87, Sow94, Ale11], in particular in the case of ABC-like flows, and the result seems to be difficult to predict in the considered cases. This regime will be the object of a forthcoming paper.

The regime of small R_m . This regime is relevant to laboratory experiments, and is the focus of the present note. More precisely, we use the α -effect mechanism to obtain a linearized instability result for system (3.1), around steady states $(u, b) = (U(\theta), 0)$. Then, we conclude to a Lyapunov instability result for the full nonlinear system.

The base flows we consider satisfy

$$U \in \mathcal{H}^\infty(\mathbb{T}^3)^3 \quad (3.3)$$

and

$$\int_{\mathbb{T}^3} U = 0, \text{ and } \quad \nabla_\theta \cdot U = 0. \quad (3.4)$$

We denote by $\mathcal{P}$ the set of fields U of this form. $\mathcal{P}$ is a Fréchet space for the associated semi-norms

$$\|U\|_m^2 = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^4} |\xi|^{2m} |\hat{U}(\xi)|^2. \quad (3.5)$$

We have

$$u = U + u', \quad b = 0 + b', \quad (3.6)$$

focusing on the growth of the perturbations u', b' . As we shall see, it is also convenient to do a rescaling in time: $t' = \varepsilon^3 t$. Dropping the primes, we end up with:

$$\begin{cases} \partial_t b - \varepsilon^{-3} \nabla \wedge (U \wedge b) - \varepsilon^{-3} \nabla \wedge (u \wedge b) - \varepsilon^{-4} \Delta b = 0, \\ \varepsilon^3 \partial_t u + u \cdot \nabla U + U \cdot \nabla u + u \cdot \nabla u + \nabla p - \Delta u = (\nabla \wedge b) \wedge b \\ \nabla \cdot b = 0 \\ \nabla \cdot u = 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

As mentioned before, a key point is the understanding of the linearized induction equation,

$$\partial_t b - \varepsilon^{-3} \nabla \wedge (U \wedge b) - \varepsilon^{-4} \Delta b = 0, \quad (3.8)$$

Motivated by the analysis of the α -effect, we will look for an exponentially growing solution of that equation based on scale separation:

$$b^\varepsilon(t, \theta) = e^{\lambda^\varepsilon t} (\bar{b}(\varepsilon^2 \theta) + \varepsilon \tilde{b}(\varepsilon^2 \theta, \theta)), \quad (3.9)$$

where $\bar{b} = \bar{b}(x)$ and $\tilde{b} = \tilde{b}(x, \theta)$ depend on the original small-scale variable θ , but also on a large-scale variable $x = \varepsilon^2 \theta$. In this decomposition, $\tilde{b} \in \mathcal{H}_{\text{loc}}^s(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{T}^3)$ is periodic and average free with respect to the second variable θ , whereas $\bar{b} \in \mathcal{H}_{\text{loc}}^s(\mathbb{R}^3)$.

Using the formal variable separation above, the equation then writes under the form

$$\begin{aligned} \varepsilon \lambda^\varepsilon \tilde{b} + \lambda^\varepsilon \bar{b} - \nabla_x \wedge (U \wedge \tilde{b}) - \frac{1}{\varepsilon} \nabla_x \wedge (U \wedge \bar{b}) - \frac{1}{\varepsilon^2} \nabla_\theta \wedge (U \wedge \tilde{b}) \\ - \frac{1}{\varepsilon^3} \nabla_\theta \wedge (U \wedge \bar{b}) - \frac{1}{\varepsilon^3} \Delta_\theta \tilde{b} - \varepsilon \Delta_x \tilde{b} - \Delta_x \bar{b} - \frac{2}{\varepsilon} \sum_{i=1}^3 \partial_{x_i \theta_i} \tilde{b} = 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

We split this equation between mean part and fluctuating part:

$$\begin{aligned} \Delta_\theta \tilde{b} + \varepsilon \nabla_\theta \wedge (U \wedge \tilde{b}) + \nabla_\theta \wedge (U \wedge \bar{b}) + \varepsilon^2 (\nabla_x \cdot \nabla_\theta + \nabla_\theta \cdot \nabla_x) \tilde{b} + \\ \varepsilon^2 \nabla_x \wedge (U \wedge \bar{b}) + \varepsilon^3 \nabla_x \wedge (\widetilde{U \wedge \tilde{b}}) + \varepsilon^4 \Delta_x \tilde{b} = \varepsilon^4 \lambda^\varepsilon \tilde{b}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\nabla_x \wedge \overline{U \wedge \tilde{b}} + \Delta_x \bar{b} = \lambda^\varepsilon \bar{b}. \quad (3.12)$$

And we rewrite the fluctuating part of the equation to separate terms with $\tilde{b}$ and $\bar{b}$:

$$\begin{aligned} \Delta_\theta \tilde{b} + \varepsilon \nabla_\theta \wedge (U \wedge \tilde{b}) + \varepsilon^2 (\nabla_x \cdot \nabla_\theta + \nabla_\theta \cdot \nabla_x) \tilde{b} + \varepsilon^3 \nabla_x \wedge (\widetilde{U \wedge \tilde{b}}) + \varepsilon^4 \Delta_x \tilde{b} - \varepsilon^4 \lambda^\varepsilon \tilde{b} \\ = -\nabla_\theta \wedge (U \wedge \bar{b}) - \varepsilon^2 \nabla_x \wedge (U \wedge \bar{b}) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Equations (3.11)–(3.13) will be used extensively throughout the note.

We can now give the theorems that we will prove in this note. The first one is related to the induction equation (3.8):

Théorème 3.1

Let $s > 0$ be a real number. There exists a dense subset Ω of $\mathcal{P}$ such that for all $U \in \Omega$, there exists a real $\varepsilon_0 > 0$, a vector $\xi \in \mathbb{R}^3$ and a function $\lambda_U: [0, \varepsilon_0] \mapsto \mathbb{R}_+^*$ analytic such that for all $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, there exists a solution b of (3.8) of the form:

$$b^\varepsilon(\theta, t) = e^{\lambda_U(\varepsilon)t + \varepsilon^2 \xi \cdot \theta} (\bar{b}' + \varepsilon \tilde{b}'(\theta)), \quad (3.14)$$

where $U \in \mathcal{P}$, $\bar{b}' \in \mathbb{R}^3$ and $\tilde{b}' \in \mathcal{H}_0^s(\mathbb{T}^3)$.

Our second theorem concerns the full MHD system (3.7). For this next theorem, we introduce for any vector $T \in (\mathbb{R}_+^*)^3$ the Sobolev space $\mathcal{H}_T^s = \mathcal{H}^s(\mathbb{R}/T_1\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/T_2\mathbb{Z} \times \mathbb{R}/T_3\mathbb{Z})$

Théorème 3.2

Suppose $s > 3/2 + 1$. Then there exists a dense subset Ω of $\mathcal{P}$ such that for all $U \in \Omega$, there exists a vector $T = (T_1, T_2, T_3)$ with integer coordinates and a sequence $(\varepsilon_n)_{n \geq 0}$ decreasing to 0 such that the solution $\begin{pmatrix} U \\ 0 \end{pmatrix}$ of the (MHD) system (3.1) is nonlinearly unstable in $\mathcal{H}_T^s$ in the following sense:

There exists initial values

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ b_0 \end{pmatrix} \in \mathcal{H}_T^s, \quad (3.15)$$

and $C_0 > 0$ such that for all $\delta > 0$, the solution $\begin{pmatrix} u_\delta \\ b_\delta \end{pmatrix}$ of (3.7) with initial value $\delta \begin{pmatrix} u_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$ satisfies

$$\left\| \begin{pmatrix} u_\delta \\ b_\delta \end{pmatrix} (t_\delta) \right\|_{\mathcal{H}_T^s} \geq C_0 \quad (3.16)$$

for some time t_δ .

This result extends substantially the article [GV06] by D. Gérard-Varet. Recast in our variables, this article considers the case of large magnetic diffusion, that is $R_m = \varepsilon \ll 1$. Let us point out that D. Gérard-Varet didn't use the physicists scaling for the velocity field, thus making possible confusion to the fact that he chose " $R_m = 1$ " and that it actually corresponds to the case where R_m is vanishing with ε . To get the usual Reynolds number you have to do a time-space transformation $t \mapsto t/\varepsilon^3$, $x \mapsto x/\varepsilon^2$ (and multiply the amplitude V by $1/\varepsilon$), thus making the Reynolds number ε instead of 1.

Briefly, it is shown in [GV06] that for all $m \in \mathbb{N}$, there are solutions of (3.8) (on a larger box depending on ε) that go from amplitude ε^m initially to an amplitude $\eta = \eta(m) > 0$ independent of ε (but depending on m). Note that, as η depends on m , the result in [GV06] does not yield Lyapunov instability at fixed small ε , contrary to ours.

The main idea to prove our two theorems is to construct an exact solution $(\bar{b}, \tilde{b})$ of equations (3.11) to (3.13). We shall obtain it through a perturbative argument, starting from the case $\varepsilon = 0$.

3.2 Case $\varepsilon = 0$

3.2.1 An eigenvalue problem

The fluctuating part in the case $\varepsilon = 0$ is

$$\Delta_\theta \tilde{b} = -\nabla_\theta \wedge (U \wedge \bar{b}). \quad (3.17)$$

Since the Laplacian is invertible as a function from $\mathcal{H}_0^{s+2}$ to $\mathcal{H}_0^s$, we can write

$$\tilde{b} = -\Delta_\theta^{-1} \nabla_\theta \wedge (U \wedge \bar{b}) = \mathcal{L}(\theta) \bar{b}, \quad (3.18)$$

where $\mathcal{L}(\theta): \mathcal{H}_0^s \rightarrow \mathcal{H}_0^{s+1}$ (x can be taken as a parameter since it is not involved in $\mathcal{L}$).

Now we can replace $\tilde{b}$ by $\mathcal{L}(\theta)\bar{b}$ in the mean part of the equation (3.12) to have an equation involving only $\bar{b}$:

$$\nabla_x \wedge \overline{U \wedge \mathcal{L}(\theta)\bar{b}} + \Delta_x \bar{b} = \lambda^0 \bar{b}. \quad (3.19)$$

We introduce the matrix α defined by

$$\alpha(U)\bar{b} = \overline{U \wedge \mathcal{L}(\theta)\bar{b}} = - \int_{[0,1]^3} U \wedge \Delta_\theta^{-1} \nabla_\theta \wedge (U \wedge \bar{b}) \, d\theta. \quad (3.20)$$

(The name of the matrix is the one related to the so called alpha effect mentionned in the introduction)

Now the equation is

$$\nabla_x \wedge (\alpha(U)\bar{b}) + \Delta_x \bar{b} = \lambda^0 \bar{b}. \quad (3.21)$$

We will find a solution of this last equation under the form $\bar{b}(x) = e^{i\xi \cdot x} \bar{b}'$. Using this stanza, the equation then has the form (dropping the prime to lighten notations in the end of the subsection):

$$i\xi \wedge (\alpha(U)\bar{b}) - |\xi|^2 \bar{b} = \lambda^0 \bar{b}. \quad (3.22)$$

Thus we have come now to an eigenvalue problem with the matrix $\xi \wedge \alpha(U)$. The properties of the matrix α are the source of the alpha-effect mechanism; they have been already studied in [GV06] and in [Bou11] with a more general case. We give here a proposition which is only the particular case of the similar study done in those papers:

Proposition 3.3

The matrix $\alpha(U)$ defined above is real and symmetric. Furthermore, there exists a dense subset Ω of $\mathcal{P}$ such that for all profile $U \in \Omega$, there exists some $\xi \in \mathbb{R}^3$ such that the matrix defined by the left hand side of (3.22) admits an eigenvalue of positive real part.

The reader should refer to those paper for a proof of this proposition.

From now on, we will assume that our base flow belongs to this subset Ω . This gives the existence of a vector $\xi \in \mathbb{R}^3$ and an eigenvector b_0 associated to an eigenvalue λ^0 with positive real part such that

$$\bar{b}(x) = e^{i\xi \cdot x} b_0 \quad (3.23)$$

is a growing mode of (3.21)

3.3 Existence of growing mode for $\varepsilon > 0$

In this section we will search for a solution of the induction equation for $\varepsilon > 0$, and we will search a solution under the form

$$b^\varepsilon(\theta, t) = e^{\lambda^\varepsilon t + \varepsilon^2 \mathbf{i}\xi \cdot \theta} (\bar{b} + \varepsilon \tilde{b}(\theta)), \quad (3.24)$$

based on the result of last section, where ξ is the one chosen for $\varepsilon = 0$. Thus the equations become:

$$\begin{aligned} \Delta_\theta \tilde{b} + \varepsilon \nabla_\theta \wedge (u \wedge \tilde{b}) + \mathbf{i}\varepsilon^2 (\xi \cdot \nabla_\theta + \nabla_\theta \cdot \xi) \tilde{b} + \varepsilon^3 \mathbf{i}\xi \wedge \widetilde{(u \wedge \tilde{b})} - \varepsilon^4 |\xi|^2 \tilde{b} - \varepsilon^4 \lambda^\varepsilon \tilde{b} \\ = -\nabla_\theta \wedge (u \wedge \bar{b}) - \varepsilon^2 \mathbf{i}\xi \wedge (u \wedge \bar{b}), \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\mathbf{i}\xi \wedge \overline{u \wedge \bar{b}} - |\xi|^2 \bar{b} = \lambda^\varepsilon \bar{b}. \quad (3.26)$$

The left part of (3.25) may be seen as an operator from $\mathcal{H}_0^{s+2}$ to $\mathcal{H}_0^s$, and for small enough ε and λ^ε close enough to λ^0 it is a perturbation of the Laplacian. Thus this operator is invertible and we can write again

$$\tilde{b} = \mathcal{L}_{\xi, \varepsilon, \lambda^\varepsilon}(\theta) \bar{b}, \quad (3.27)$$

where $\mathcal{L}_{\xi, \varepsilon, \lambda^\varepsilon}(\theta) = -L_{\xi, \varepsilon, \lambda^\varepsilon}^{-1} \circ (\nabla_\theta \wedge u \wedge \cdot + \varepsilon^2 \mathbf{i}\xi \wedge (u \wedge \cdot))$ is the operator from $\mathcal{H}_0^s$ to $\mathcal{H}_0^{s+1}$ where

$$L_{\xi, \varepsilon, \lambda^\varepsilon} = \Delta_\theta + \varepsilon \nabla_\theta \wedge (u \wedge \cdot) + \mathbf{i}\varepsilon^2 (\xi \cdot \nabla_\theta + \nabla_\theta \cdot \xi) + \varepsilon^3 \mathbf{i}\xi \wedge \widetilde{(u \wedge \cdot)} - \varepsilon^4 |\xi|^2 - \varepsilon^4 \lambda^\varepsilon \quad (3.28)$$

and the mean-part equation is

$$\mathbf{i}\xi \wedge (\alpha_{\xi, \varepsilon, \lambda^\varepsilon}(u) \bar{b}) - |\xi|^2 \bar{b} = \lambda^\varepsilon \bar{b}, \quad (3.29)$$

where the matrix α depends here on some parameters:

$$\begin{aligned} \alpha_{\xi, \varepsilon, \lambda^\varepsilon}(u) \bar{b} &= \overline{u \wedge \mathcal{L}_{\xi, \varepsilon, \lambda^\varepsilon}(\theta) \bar{b}} \\ &= \int_{[0,1]^3} u \wedge L_{\xi, \varepsilon, \lambda^\varepsilon}^{-1} (\nabla_\theta \wedge u \wedge \bar{b} + \varepsilon^2 \mathbf{i}\xi \wedge (u \wedge \bar{b})) \end{aligned} \quad (3.30)$$

This equation admits non-zero solution $\bar{b}$ if and only if

$$\det(\mathbf{i}\xi \wedge \alpha_{\xi, \varepsilon, \lambda^\varepsilon}(u) - |\xi|^2 \text{Id} - \lambda^\varepsilon \text{Id}) = 0, \quad (3.31)$$

where

$$\mathbf{i}\xi \wedge \alpha_{\xi, \varepsilon, \lambda^\varepsilon}(u) = \mathbf{i} \begin{pmatrix} 0 & -\xi_3 & \xi_2 \\ \xi_3 & 0 & -\xi_1 \\ -\xi_2 & \xi_1 & 0 \end{pmatrix} \alpha_{\xi, \varepsilon, \lambda^\varepsilon}(u) = A^\xi \alpha_{\xi, \varepsilon, \lambda^\varepsilon}(u). \quad (3.32)$$

ξ being fixed by the former section, we define the following function

$$f(\varepsilon, \mu) = \det(\mathbf{i}\xi \wedge \alpha_{\xi, \varepsilon, \mu}(u) - |\xi|^2 \text{Id} - \mu \text{Id}), \quad (3.33)$$

defined in a neighborhood V of $(0, \lambda^0)$ in $\mathbb{R}^2$.

3.4 Implicit function theorem

We know from former section that $f(0, \lambda^0) = 0$. Now we want to prove that for $\varepsilon > 0$ small enough, there exists λ^ε such that $f(\varepsilon, \lambda^\varepsilon) = 0$. Furthermore, f is analytic in (ε, μ) in V .

We prove in this section that $\frac{\partial f}{\partial \mu} \Big|_{\varepsilon=0, \mu=\lambda^0} \neq 0$, so that we can apply the analytic implicit functions theorem and conclude that there exists a neighborhood W of 0 and a function $\varphi: W \rightarrow \mathbb{R}$ such that $\varphi(0) = \lambda^0$ and $\forall \varepsilon \in W, f(\varepsilon, \varphi(\varepsilon)) = 0$ (we can then restrict this neighborhood to positive values of ε).

We compute now $\frac{\partial f}{\partial \mu} \Big|_{\varepsilon=0, \mu=\lambda^0}$: using usual computation rules on composition of functions, we have that

$$\frac{\partial f}{\partial \mu} \Big|_{\varepsilon=0, \mu=\lambda^0} = d \det|_{\mathbf{i}\xi \wedge \alpha_{\xi,0,\lambda^0}(u) - |\xi|^2 \text{Id} - \lambda^0 \text{Id}} \circ d(\mathbf{i}\xi \wedge \alpha_{\xi,\varepsilon,\mu}(u) - |\xi|^2 \text{Id} - \mu \text{Id}) \Big|_{\varepsilon=0, \mu=\lambda^0} (0, 1). \quad (3.34)$$

The computation of the second differential is straightforward and gives

$$\begin{aligned} d(\mathbf{i}\xi \wedge \alpha_{\xi,\varepsilon,\mu}(u) - |\xi|^2 \text{Id} - \mu \text{Id}) \Big|_{\varepsilon=0, \mu=\lambda^0} (0, 1) &= \frac{\partial(\mathbf{i}\xi \wedge \alpha_{\xi,\varepsilon,\mu}(u) - |\xi|^2 \text{Id} - \mu \text{Id})}{\partial \mu} \Big|_{\varepsilon=0, \mu=\lambda^0} \\ &= -\text{Id}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

And the computation of the first one gives

$$d \det|_{\mathbf{i}\xi \wedge \alpha_{\xi,0,\lambda^0}(u) - |\xi|^2 \text{Id} - \lambda^0 \text{Id}} (-\text{Id}) = -\text{Tr}(\text{com}(\mathbf{i}\xi \wedge \alpha_{\xi,0,\lambda^0}(u) - |\xi|^2 \text{Id} - \lambda^0 \text{Id})). \quad (3.36)$$

We know from the second section the matrix $A = \mathbf{i}\xi \wedge \alpha_{\xi,0,\lambda^0}(u) - |\xi|^2 \text{Id} - \lambda^0 \text{Id}$ is diagonalizable and that his eigenvalues are $0, -\lambda^0, -2\lambda^0$. Thus, $\text{com}(A)$ is similar to the matrix

$$\text{com} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda^0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\lambda^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(\lambda^0)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.37)$$

which is of trace $2(\lambda^0)^2 \neq 0$.

Thus

$$\frac{\partial f}{\partial \mu} \Big|_{\varepsilon=0, \mu=\lambda^0} = 2(\lambda^0)^2 \neq 0. \quad (3.38)$$

Since φ is continuous on 0, and $\varphi(0) = \lambda^0$ has positive real value, this remains true for $\varepsilon > 0$ sufficiently small, which concludes the proof of the existence of a growing mode for a small $\varepsilon > 0$.

3.5 Nonlinear instability

We will now prove nonlinear instability of the system (3.8). For that we will adapt a method developed by S. Friedlander, W. Strauss and M. Vishik in [FSV97] (itself adapted from Y. Guo and W. Strauss in [GS95]) to prove nonlinear instability given linear instability. The condition $s > 3/2 + 1$ in the main theorem is used only in this section to obtain an inequality on the nonlinear terms similar to that in the article [FSV97]. Actually, using the parabolic feature of the MHD system, it would be possible to lower our regularity requirements (see for instance Friedlander et al [FPS06] in the context of the Navier-Stokes equations). We stick here to regular data for simplicity of exposure.

Let $U \in \mathcal{P}$ belonging to the dense subset of linearly unstable flows described in the previous section.

We introduce Leray operator $\mathbb{P}$ to get rid of p . We rewrite system (3.7) as

$$\partial_t \mathcal{U} + L_s \mathcal{U} = Q(\mathcal{U}, \mathcal{U}), \quad (3.39)$$

where

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} u' \\ b \end{pmatrix}, \quad (3.40)$$

$$L_s \mathcal{U} = \varepsilon^{-3} \begin{pmatrix} \mathbb{P}(u \cdot \nabla u' + u' \cdot \nabla u) - \Delta u' \\ -\nabla \wedge (u \wedge b) - \Delta b \end{pmatrix} \quad (3.41)$$

is the linearized operator around $\begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}$, and

$$Q(\mathcal{U}, \mathcal{U}) = \varepsilon^{-3} \begin{pmatrix} \mathbb{P}((\nabla \wedge b) \wedge b - u' \cdot \nabla u') \\ \nabla \wedge (u' \wedge b) \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

is the nonlinearity.

We shall consider this system in $\mathcal{H}_T^s$, T to be specified later. We also denote $L_T^2 = \mathcal{H}_T^0$ the L^2 space on the torus. Since we will work in these spaces until the end of the proof, we will drop the T in the notation. We have the following a priori estimates for the nonlinear term:

Every term of every component of $Q(\mathcal{U}, \mathcal{U})$ can be written as a product of one component of $\mathcal{U}$ and one of $\nabla \mathcal{U}$ (composed by $\mathbb{P}$). Thus, we have the first estimate

$$\|Q(\mathcal{U}, \mathcal{U})\|_{L^2} \leq C\varepsilon^{-3} \|\mathcal{U}\| \|\nabla \mathcal{U}\|_{L^2} \leq C\varepsilon^{-3} \|\mathcal{U}\|_{L^2} \|\nabla \mathcal{U}\|_{L^\infty}. \quad (3.43)$$

For $r = \frac{1}{2}(s + n/2 + 1) > n/2 + 1$ (here $n = 3$), we have that

$$\|\nabla \mathcal{U}\|_{L^\infty} \leq \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}^r}, \quad (3.44)$$

and

$$\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}^r} \leq C \|\mathcal{U}\|_{L^2}^\eta \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}^s}^{1-\eta} \quad (3.45)$$

for η such that $r = (1 - \eta)s$ (i.e. $\eta = \frac{1}{2} - \frac{n+2}{4s} = \frac{1}{2} - \frac{5}{4s}$).

Thus, we have:

$$\|Q(\mathcal{U}, \mathcal{U})\|_{L^2} \leq C\varepsilon^{-3} \|\mathcal{U}\|_{L^2}^{1+\eta} \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}^s}^{1-\eta} \quad (3.46)$$

We shall prove the following theorem, which is a mere reformulation of the second theorem:

Théorème 3.4

Suppose $s > 3/2 + 1$. Then there exists a vector $T = (T_1, T_2, T_3)$ with integer coordinates and a sequence $(\varepsilon_n)_{n \geq 0}$ decreasing to 0 such that the system (3.39) is nonlinearly unstable in $\mathcal{H}_T^s$ in the following sense:

There exists a growing mode $\mathcal{U}_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$ with $\|\mathcal{U}_0\|_{\mathcal{H}_T^s} = 1$ of the linearized system and a constant $C_0 > 0$ depending only on $\mathcal{U}_0, s, n, \rho$ such that for all $\delta > 0$, the solution of the full magnetohydrodynamics system with initial value $\delta\mathcal{U}_0$ satisfies $\|\mathcal{U}(t_\delta)\|_{\mathcal{H}_T^s} \geq C_0$ for some time t_δ .

Remarque 3.5

This theorem only proves that the solution reaches high values in finite time no matter how small the initial condition is. In particular it doesn't say whether it explodes in finite time or is defined for all time, since both situations are possible in the result of the theorem. Actually, for small enough initial data (that is small enough δ), it is classical that the solution of the system doesn't explode in finite time. More details in [Tem01] (Theorem 3.8)

Assume in contrary that the system is nonlinearly stable while spectrally unstable, that is that for any growing mode of initial value $\mathcal{U}_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$ with $\|\mathcal{U}_0\|_{\mathcal{H}_T^s} = 1$ in any box T of the system (i.e. an eigenvector of L_s associated to an eigenvalue with positive real part) and for any $\varepsilon > 0$, there exists a $\delta > 0$ such that for all $t > 0$, the solution $\mathcal{U}(t)$ of the system with initial values $\delta\mathcal{U}_0$ satisfies $\|\mathcal{U}(t)\|_{\mathcal{H}_T^s} \leq \varepsilon$.

3.5.1 Proof of the nonlinear instability

Let $b_L(\theta) = e^{i\varepsilon^2\xi\cdot\theta}b^\varepsilon(\theta)$ be the unstable eigenmode given by Theorem 2. We fix $\varepsilon < \varepsilon_0$ in such a way that

$$T = \left(\frac{2\pi}{\varepsilon^2|\xi_1|}, \frac{2\pi}{\varepsilon^2|\xi_2|}, \frac{2\pi}{\varepsilon^2|\xi_3|} \right) \quad (3.47)$$

belongs to $\mathbb{N}^3$. This is possible, as it is clear from the proof of Theorem 3.2 that ξ can be chosen in $(2\pi\mathbb{Q}_+^*)^3$ (take ε to be the inverse of a large integer, which can be chosen as big as we want). In particular, $\tilde{\mathcal{U}}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ b_L \end{pmatrix}$ is an eigenvector of L_s associated to an eigenvalue with positive real part in $\mathcal{H}_T^s$.

Denote by ρ the maximum real part of the spectrum of L_s :

$$\rho = \max \{ \operatorname{Re} \lambda, \lambda \in \operatorname{Spectr}(L_s) \}. \quad (3.48)$$

By the previous remark on $\tilde{\mathcal{U}}_0$, we know that $\rho > 0$. Moreover, since the spectrum of L_s is only made of eigenvalues, there exists an eigenvector $\mathcal{U}_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$ with eigenvalue λ satisfying exactly $\operatorname{Re} \lambda = \rho$.

Moreover, by standard properties of the spectral radius of e^{L_s} , we know that

$$e^\rho = \lim_{t \rightarrow +\infty} \|e^{tL_s}\|^{1/t}. \quad (3.49)$$

Thus, for all $\eta > 0$, there exists a C_η such that for all $t \geq 0$,

$$\|e^{tL_s}\| \leq C_\eta e^{\rho(1+\frac{\eta}{2})t} \quad (3.50)$$

Then, the solution $\mathcal{U}$ of (3.39) with initial data $\delta\mathcal{U}_0$ can be written

$$\mathcal{U} = \dot{\mathcal{U}} + \delta e^{\lambda t} \mathcal{U}_0, \quad (3.51)$$

where $\dot{\mathcal{U}}$ satisfies

$$\begin{cases} \partial_t \dot{\mathcal{U}} = L_s \dot{\mathcal{U}} + Q(\mathcal{U}, \mathcal{U}) \\ \dot{\mathcal{U}}|_{t=0} = 0 \end{cases} \quad (3.52)$$

Using Duhamel's formula, we can write the solution under the form:

$$\dot{\mathcal{U}}(t) = \int_0^t e^{(t-s)L_s} Q(\mathcal{U}, \mathcal{U}) \, ds. \quad (3.53)$$

Define

$$T_\delta = \sup \left\{ t > 0, \forall s \leq t, \|\dot{\mathcal{U}}(s)\|_{L^2} \leq \frac{1}{2} \delta e^{\rho s} \|\mathcal{U}_0\|_{L^2} \right\}, \quad (3.54)$$

where λ is the coefficient in the growing linear mode. Then, since we supposed that $\mathcal{U} = \mathcal{U}_l + \dot{\mathcal{U}}$ remains bounded, and $\|\mathcal{U}_l\| \sim \delta e^{\rho t} \|\mathcal{U}_0\|$, we have that $T_\delta < \infty$, and for all $t < T_\delta$,

$$\|\mathcal{U}(t)\|_{L^2} \leq \frac{3}{2} \delta e^{\rho t} \|\mathcal{U}_0\|_{L^2}. \quad (3.55)$$

Using a priori estimates stated earlier, we have for $\eta = \frac{1}{2} - \frac{n+2}{4s} = \frac{1}{2} - \frac{5}{4s}$:

$$\|\dot{\mathcal{U}}(t)\|_{L^2} \leq C_\eta \varepsilon^{-3} \int_0^t e^{\rho(1+\frac{\eta}{2})(t-s)} \|\mathcal{U}\|_{L^2}^{1+\eta} \|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}^s}^{1-\eta} \, ds. \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned} \|\dot{\mathcal{U}}(t)\|_{L^2} &\leq \delta^{1+\eta} C_\eta \varepsilon^{-3} \int_0^t e^{(t-s)(1+\frac{\eta}{2})\rho} e^{(1+\eta)\rho s} \varepsilon^{1-\eta} \, ds \\ &\leq C_\eta \delta^{1+\eta} e^{t(1+\frac{\eta}{2})\rho} \varepsilon^{-2-\eta} \frac{2}{\eta\rho} (e^{t\frac{\eta}{2}\rho} - 1) \\ &\leq C' \delta^{1+\eta} e^{t(1+\eta)\rho} \varepsilon^{-2-\eta} \end{aligned} \quad (3.57)$$

Thus, getting back to $\mathcal{U}$:

$$\|\mathcal{U}\|_{L^2} \geq \delta \|\mathcal{U}_0\|_{L^2} e^{\rho t} - C' \delta^{1+\eta} \varepsilon^{-2-\eta} e^{t(1+\eta)\rho}. \quad (3.58)$$

By definition of T_δ , we have:

$$\|\mathcal{U}(T_\delta)\|_{L^2} = \frac{1}{2} \delta e^{\rho T_\delta} \|\mathcal{U}_0\|_{L^2} \leq C' \delta^{1+\eta} \varepsilon^{-2-\eta} e^{T_\delta(1+\eta)\rho}, \quad (3.59)$$

that is

$$\frac{1}{2} \|\mathcal{U}_0\|_{L^2} \leq C' \delta^\eta \varepsilon^{-2-\eta} e^{T_\delta \eta \rho}, \quad (3.60)$$

$$T_\delta \geq \ln \left(\frac{\|\mathcal{U}_0\|_{L^2}}{2C' \delta^\eta \varepsilon^{-2-\eta}} \right) \frac{1}{\eta \rho}. \quad (3.61)$$

Denote by t_δ the quantity

$$t_\delta = \ln \left(\frac{\|\mathcal{U}_0\|_{L^2}}{2C' \delta^\eta \varepsilon^{-2-\eta} (1+\eta)} \right) \frac{1}{\eta \rho}. \quad (3.62)$$

Thus $t_\delta \leq T_\delta$, and at this time t_δ

$$\|\mathcal{U}\|_{L^2} \geq \delta e^{\rho t_\delta} \left(\|\mathcal{U}_0\|_{L^2} - \frac{\|\mathcal{U}_0\|_{L^2}}{1+\eta} \right) = \frac{\eta}{1+\eta} \|\mathcal{U}_0\|_{L^2} \left(\frac{\|\mathcal{U}_0\|_{L^2} \varepsilon^{2+\eta}}{C'(1+\eta)} \right)^{1/\eta}. \quad (3.63)$$

Thus $\|\mathcal{U}\|_{L^2}$ (and $\|\mathcal{U}\|_{\mathcal{H}^s}$) can be bounded below by a value independent of δ , which contradicts the assumption, and proves the theorem.

Deuxième partie

Calcul numérique :
Étude de dynamo rapide

Chapter 4

Revisiting the ABC flow dynamo

Cet article a été écrit avec Emmanuel Dormy¹ et accepté pour publication dans
Physics of Fluids.

Version Arxiv : <http://arxiv.org/abs/1210.8012>

DOI : <http://dx.doi.org/10.1063/1.4795546>

Abstract

The ABC flow is a prototype for fast dynamo action, essential to the origin of magnetic field in large astrophysical objects. Probably the most studied configuration is the classical 1:1:1 flow. We investigate its dynamo properties varying the magnetic Reynolds number R_m . We identify two kinks in the growth rate, which correspond respectively to an eigenvalue crossing and to an eigenvalue coalescence. The dominant eigenvalue becomes purely real for a finite value of the control parameter. Finally we show that even for $R_m = 25000$, the dominant eigenvalue has not yet reached an asymptotic behaviour. It still varies very significantly with the controlling parameter. Even at these very large values of R_m the fast dynamo property of this flow cannot yet be established.

4.1 Introduction

We investigate the kinematic dynamo action associated with the well known ABC-flow (Arnol'd, Beltrami, Childress [DFG⁺86]). We focus on the highly symmetric, and most classical setup: $A:B:C = 1:1:1$. Its dynamo properties have been assessed in 1981 by Arnol'd et al. [AZRS81] and it represents since then the prototype flow for fast dynamo action. A “fast dynamo” [CG95] is a flow which achieves exponential

¹. dormy@phys.ens.fr

MAG (ENS/IPGP), LRA, Département de Physique, École Normale Supérieure, 24, rue Lhomond, 75231 Paris Cedex 05, France.

magnetic field amplification over a typical time related to the advective timescale and not the ohmic diffusive timescale (in which case it is referred to as a “slow dynamo”). It is known [Vis89] that exponential stretching of fluid elements is necessary for fast dynamo action. The existence of fast dynamos is essential to account for the presence of magnetic field in astrophysical bodies, for which the ohmic diffusive time is often larger than the age of their formation. If self-excited dynamo action is to generate their magnetic fields, it is therefore essential that it be achieved over an advective timescale. The most classical flow to exemplify such “fast dynamo” action is indeed the ABC-flow. Arnold and Korkina [AK83] first investigated the dynamo property of the ABC-flow, originally introduced to investigate Lagrangian chaos. Many developments followed, which will be discussed in the course of this article [GF84, GF86, GF87].

Most of the recent developments in this field involve non-linear studies with forcing belonging to the class of ABC flows [CGP05, ADN07], with a few noticeable exceptions [Ale11, Gal12]. The asymptotic behaviour of one of the most classical example of fast dynamo is however still not understood. This motivates the following high-resolution linear study.

4.2 Numerical method

We are concerned with the kinematic dynamo problem, for which a solenoidal magnetic field evolution is governed under a prescribed flow by the induction equation

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B} - \mathbf{R}_m^{-1} \nabla \times \mathbf{B}) . \quad (4.1)$$

We consider here the ABC-flow ([Arn65, Hen66]), which takes the form

$$\mathbf{u} = (\mathbf{A} \sin \mathbf{z} + \mathbf{C} \cos \mathbf{y}) \mathbf{e}_x + (\mathbf{B} \sin \mathbf{x} + \mathbf{A} \cos \mathbf{z}) \mathbf{e}_y + (\mathbf{C} \sin \mathbf{y} + \mathbf{B} \cos \mathbf{x}) \mathbf{e}_z , \quad (4.2)$$

and restrict our attention to the case where the magnetic field has the same periodicity as the flow (i.e. 2π -periodic in all directions of space, see [ADN03] for extensions) and the weight of the three symmetric Beltrami components are of equal strength ($A = B = C \equiv 1$).

Let us stress again that we also restrict our attention to the kinematic dynamo problem, in which the flow is analytically prescribed and unaltered by the magnetic field (see [GF87] for an investigation of the stability of this flow).

The choice $A:B:C = 1:1:1$ belongs to the largest symmetry class for this kind of flows, and has for this reason been the most intensively studied. However, it yields very small chaotic regions and is thus possibly non optimal for dynamo action (see [Ale11] for a detailed study of this point). This parameter choice is however essential as it is, partly for historical reasons, the most classical example of steady analytical fast dynamo.

The simulations presented in this article were performed using a modified version of a code originally developed by Galloway and Frisch [GF84] and which uses a fully spectral method with explicit mode coupling.

The original time-stepping used by Galloway and Frisch [GF84] relies on a Leapfrog scheme stabilised by a Dufort-Frankel discretization of the diffusive term. Introducing $\mathcal{L}$ to denote the discretized diffusion operator, which is local in Fourier space, and $\mathcal{NL}$ to denote the discretized inductive term, non-local as it couples neighbouring modes, this scheme can be expressed as

$$\mathbf{B}^{n+1} = \mathbf{B}^{n-1} + 2\text{dt} \left(\mathcal{NL}(\mathbf{B}^n) + \frac{1}{2}\mathcal{L}(\mathbf{B}^{n+1} + \mathbf{B}^{n-1}) \right), \quad (4.3)$$

using a red-black (or Chloride-Sodium) staggering in time and space, see [GF86].

We have implemented two alternative time stepping schemes, in order to assess the stability of the temporal evolution at large values of R_m . We used a Crank-Nicolson Adams-Bashforth scheme

$$\mathbf{B}^{n+1} = \mathbf{B}^n + \text{dt} \left(\frac{1}{2}\mathcal{L}(\mathbf{B}^{n+1} + \mathbf{B}^n) + \frac{3}{2}\mathcal{NL}(\mathbf{B}^n) - \frac{1}{2}\mathcal{NL}(\mathbf{B}^{n-1}) \right), \quad (4.4)$$

as well as a second order BDF discretization

$$\frac{3}{2}\mathbf{B}^{n+1} = 2\mathbf{B}^n - \frac{1}{2}\mathbf{B}^{n-1} + \text{dt} \left(\mathcal{L}(\mathbf{B}^{n+1}) + 2\mathcal{NL}(\mathbf{B}^n) - \mathcal{NL}(\mathbf{B}^{n-1}) \right). \quad (4.5)$$

These two schemes are unstaggered and involve larger memory requirements, still offering the same complexity. All schemes are semi-implicit, but retain an explicit marching for the non-local term in order to prevent the resolution of a linear system at each time-step. We verified that the results presented in this article are independent of the above choices.

In the limit of large magnetic Reynolds numbers, the problem (4.1) becomes stiff. We therefore ensured that the temporal discretization did not introduce spurious effects by reproducing a few simulations, spanning over the whole range of R_m investigated, using the three schemes presented above.

We always obtained the same dominant mode and temporal behaviour with all three methods. Although we do not present here a detailed investigation of the numerical properties of these schemes, we should report that the original Galloway and Frisch [GF84] scheme involves a smaller amount of memory requirement and a larger CFL condition.

For all the above schemes, the computing time obviously varies with the control parameter R_m . If all spatial modes are computed up to a truncation N , the computational complexity scales like $\mathcal{O}(N^4)$. Assuming the asymptotic scaling of the magnetic field length scale, we get $N \sim R_m^{1/2}$ and thus expect a complexity growing as $\mathcal{O}(R_m^2)$. We have therefore derived a parallel version of the code using the MPI library and a spectral domain decomposition strategy to tackle larger values of R_m . This yields shorter computing time at large resolution.

The results presented in this article were obtained with numerical resolutions ranging from $N = 64$ for the smallest values of R_m to $N = 1024$ for $R_m = 25000$. In all cases we verified that the results reported here were unaltered by doubling the resolution. The simulations presented here were performed on up to 512 cores.

It is worth stressing that the quantity $\nabla \cdot \mathbf{B}$ is obviously preserved by (4.1), and that this essential property is retained by the discrete numerical schemes, and thus the magnetic field remains solenoidal throughout the simulations.

We investigate a linear problem and therefore expect that, independently of the initial conditions, the long time integration will simply reflect the eigenmode with largest growth rate. In practice, we used two different sets of initial conditions, either

$$\mathbf{B}(\mathbf{t} = 0) \propto (\sin \mathbf{z} - \cos \mathbf{y}) \mathbf{e}_x + (\sin \mathbf{x} - \cos \mathbf{z}) \mathbf{e}_y + (\sin \mathbf{y} - \cos \mathbf{x}) \mathbf{e}_z, \quad (4.6)$$

or a random initial condition with a spectrum converging as $\mathbf{k}^{-2}$ for regularity and projected numerically to get a non-divergent field.

The former is useful for comparison with earlier studies (e.g. [GF84]) for moderate values of R_m , while the later ensures a projection of the initial perturbation on the fastest growing mode.

4.3 Modes crossing

This study is focused on the 1 : 1 : 1 ABC-flow, which has a large number of symmetries. These have been well documented [Arn87, Pod99]. The symmetry group is generated by two independent rotations: the cloverleaf rotation $T : x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$ and a rotation of angle $\pi/2$ followed by a translation around one of the three coordinate axes. For example $Rt_y : x \rightarrow \pi/2 + z, y \rightarrow y - \pi/2, z \rightarrow \pi/2 - x$. All the other symmetries are obtained by combinations of these two rotations. The resulting group of symmetries of the ABC-flow contains 24 elements (including identity).

We present below these symmetries, for each of these (except the first two) two additional transformations can be obtained by applying cyclic permutations of x, y, z (i.e. applying T and T^2)

$$\begin{aligned} - T : & \quad x \rightarrow y, \quad y \rightarrow z, \quad z \rightarrow x \\ - T^2 : & \quad x \rightarrow z, \quad y \rightarrow x, \quad z \rightarrow y \\ - Rt_y : & \quad x \rightarrow \pi/2 + z, \quad y \rightarrow y - \pi/2, \quad z \rightarrow \pi/2 - x \\ - Rt_y^2 : & \quad x \rightarrow \pi - x, \quad y \rightarrow y + \pi, \quad z \rightarrow -z \\ - Rt_y^3 : & \quad x \rightarrow \pi/2 - z, \quad y \rightarrow y + \pi/2, \quad z \rightarrow x - \pi/2 \\ - Rt_y \circ Rt_x : & \quad x \rightarrow \pi + y, \quad y \rightarrow -y, \quad z \rightarrow \pi - x \\ & \quad (\text{note that } Rt_x \circ Rt_y = T^2) \\ - Rt_z \circ Rt_y \circ Rt_x : & \quad x \rightarrow \pi/2 + z, \quad y \rightarrow -\pi/2 + y, \quad z \rightarrow \pi/2 - x \\ - Rt_y^2 \circ Rt_x : & \quad x \rightarrow -\pi/2 - x, \quad y \rightarrow -\pi/2 - z, \quad z \rightarrow -\pi/2 - y \\ - Rt_x \circ Rt_y^2 : & \quad x \rightarrow -\pi/2 + z, \quad y \rightarrow \pi/2 - y, \quad z \rightarrow \pi/2 + x \end{aligned}$$

(note that the group of symmetries of the ABC-flow is also generated by two distinct Rt 's instead of T, Rt_y). For each direct numerical simulation, we tested which of these symmetries (or anti-symmetries) were satisfied by the realised solution.

Figure 4.1 presents the evolution of the maximum growth rate of the magnetic field as a function of R_m . Each point on the figure corresponds to a three-dimensional simulation. We confirm growth rates obtained by earlier studies (see [Gal12] for a recent review), and we extend the range of investigation from $R_m < 1600$ to

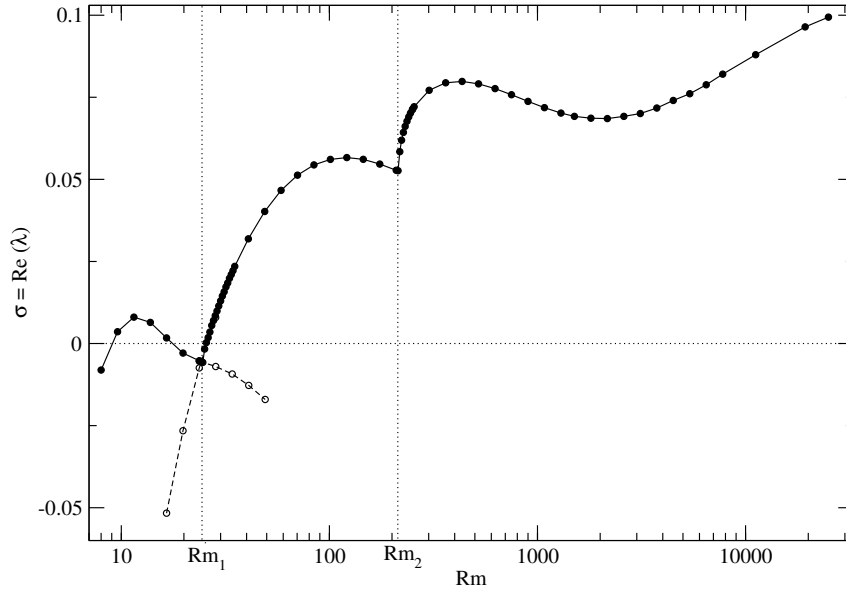


Figure 4.1: Plot of the real part of the eigenvalue for the fastest growing magnetic field mode as a function of the magnetic Reynolds number R_m (using logarithmic scale in the x -axis).

$R_m < 25000$. The curve has been validated against published growth rates using spectral methods [GF86, LF93] as well as a finite volume method [TFD06] for which simulations have been performed up to $R_m = 2000$ (Teyssier & Dormy private comm.).

In addition to the wider extend of R_m variation, our curve also offers a finer resolution than previously obtained graphs. This highlights the presence for two kinks in the curve, labelled R_{m1} and R_{m2} on the figure. The first of these occurs in the stable window reported by Galloway and Frisch [GF86] near $R_m = 20$ and corresponds to $R_{m1} \in [24.05, 24.10]$. A mode crossing was previously suggested owing to the changes in the eigenfunction symmetry [Gal12]. Here we demonstrate this eigenvalue crossing by following both eigenvalues on each side of the crossing. (see Figure 4.3) In fact whereas time stepping algorithms usually only provide information on the dominant eigenvalue, i.e. the eigenmode with largest growth rate, we use it here to get more information. Indeed, transient behaviour starting with well selected initial conditions provide information on the behaviour of a given mode, even if it is not the dominant eigenmode (see Figure 4.2). The temporal behaviour of this mode can be followed via direct integration for a certain length of time until it is overcome by the fastest growing mode. This approach allowed us to continue the branches corresponding to each eigenvalue outside of the region in which they are dominant eigenvalues (see dotted lines and open symbols on Figure 4.1).

In the first window $R_m < R_{m1}$ as argued by Arnol'd [Arn87], we observe that the dominant eigenmode has all “even” symmetries of the ABC-flow, i.e. it has

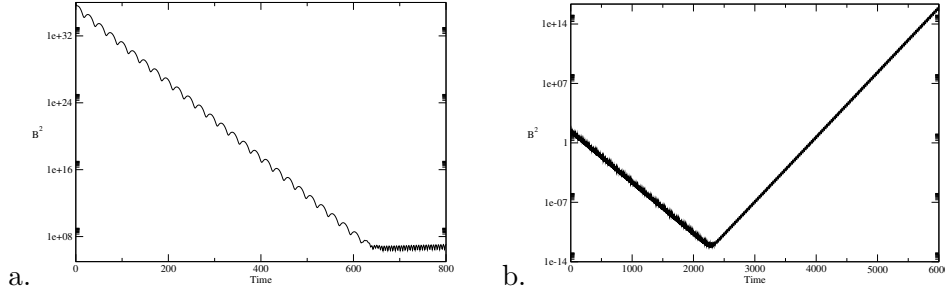


Figure 4.2: Time evolution of the magnetic energy, which highlights the information provided by transient behaviours. Left (a) a simulation for $R_m = 16.5 (< R_{m1})$ using as initial condition the final solution obtained at $R_m > R_{m1}$, right (b) simulation for $R_m = 28.4 (> R_{m1})$.

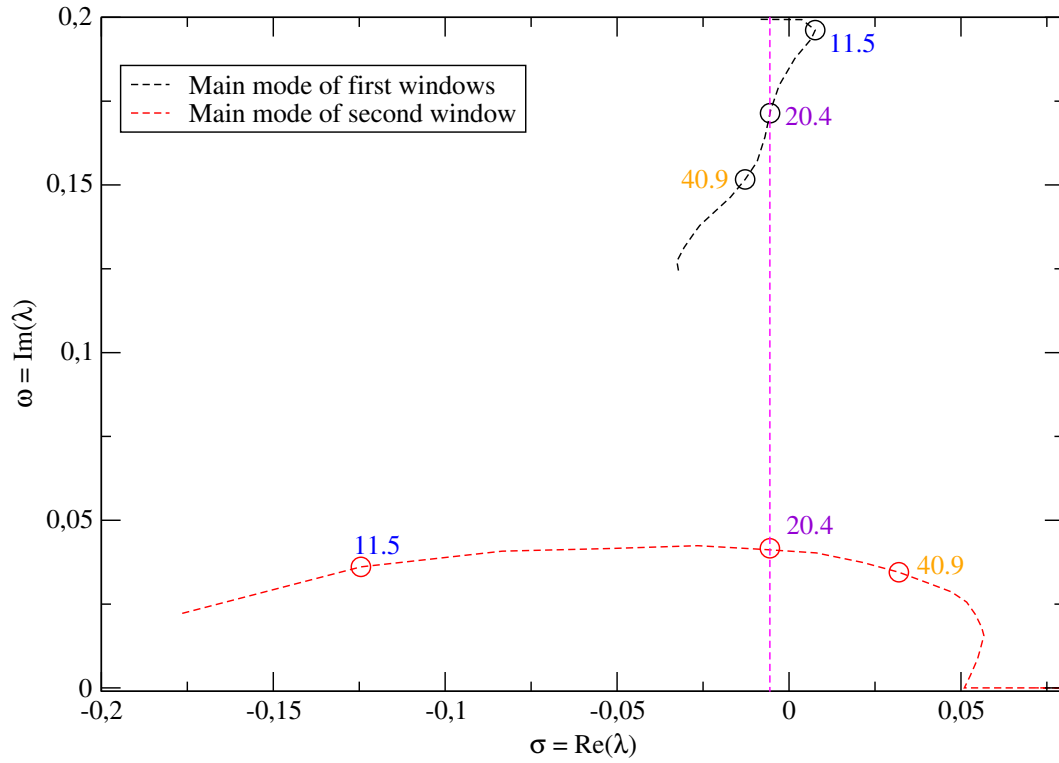


Figure 4.3: Phase diagram $(\text{Re}(\lambda), \text{Im}(\lambda))$ of two modes. The vertical line show the point at which the two modes cross.

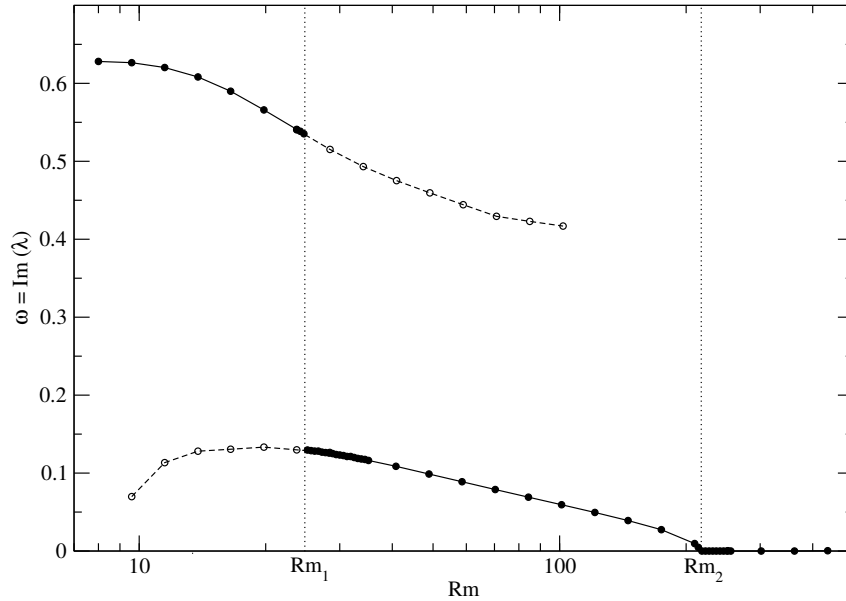


Figure 4.4: Plot of the imaginary part of the eigenvalue as a function of R_m (using logarithmic scale in the x -axis).

every combination of an even number of Rt as a symmetry, and is antisymmetric otherwise (the solution changes sign by the corresponding transformation). In the second window $R_m > R_{m1}$, we observe numerically that all the above symmetries and anti-symmetries disappear, as pointed by Galloway and Frisch [GF86]. However, S. Jones and A. Gilbert (private comm.) are currently using a decomposition of this mode in three components each satisfying different symmetries.

As noted by earlier authors, the dominant eigenvalues are complex, leading to oscillations of the energy, visible on Figure 4.2 (particularly on the first part of Figure 4.2a, as the period of oscillations is elsewhere very short compared to the time extend of the plot). The imaginary part of the dominant eigenvalue $\omega = \text{Im}(\lambda)$ can thus be directly determined from these time series. The graph $\omega(R_m)$ is displayed on Figure 4.4. As explained above, not only do we display the dominant eigenvalue (solid line and symbols) but we are also able to follow each mode past their region of selection (dotted lines and open symbols). One can note that, as R_m increases past R_{m1} , the imaginary part of the dominant eigenvalue jumps discontinuously from $\omega \simeq 0.53$, corresponding to the first window identified by Arnold and Korkina [AK83], to $\omega \simeq 0.13$ corresponding to the second window of Galloway and Frisch [GF86]. This discontinuous jump in the pulsation highlights the eigenvalue crossing occurring at R_{m1} . There again, transient behaviours were used to obtain the open symbols.

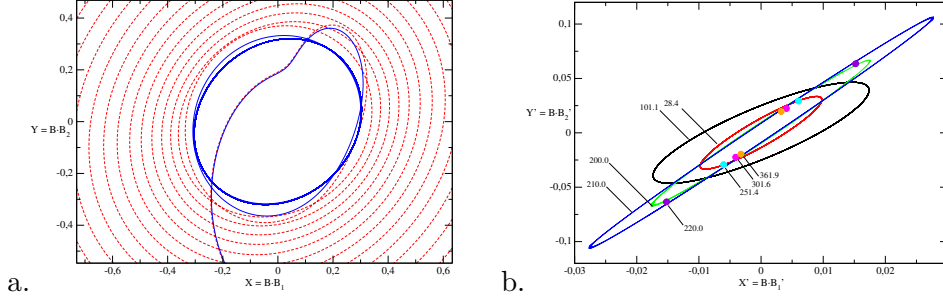


Figure 4.5: Phase space diagrams for $R_m < R_{m1}$ (a) and $R_m > R_{m1}$ (b).

4.4 Oscillatory dynamics

In order to obtain a deeper understanding of the oscillatory mechanism in both dynamo windows and of how a steadily growing mode can be observed at larger R_m (see Figure 4.4), we introduce a phase space for this linear system. We rely for $R_m < R_{m1}$ on two vectors, corresponding respectively to the dominant $|\mathbf{k}| = 1$ contribution [Arn87]

$$\mathbf{b}_1 = (\sin(z) - \cos(y)) \mathbf{e}_x + (\sin(x) - \cos(z)) \mathbf{e}_y + (\sin(y) - \cos(x)) \mathbf{e}_z, \quad (4.7)$$

and to $|\mathbf{k}| = 2$

$$\mathbf{b}_2 = (\sin(y) \cos(z)) \mathbf{e}_x + (\sin(z) \cos(x)) \mathbf{e}_y + (\sin(x) \cos(y)) \mathbf{e}_z. \quad (4.8)$$

These vector fields respectively correspond to the first and the second harmonics of the true eigenvector. These two vector fields necessarily satisfy all symmetries of the realised eigenmode for this parameter regime ($R_m < R_{m1}$).

Simulations in this regime rapidly reach an asymptotic behaviour starting with $\mathbf{b}_1$ as an initial condition.

We construct the phases by introducing

$$X = \langle \mathbf{B} \cdot \mathbf{b}_1 \rangle e^{-\sigma t}, \quad \text{and} \quad Y = \langle \mathbf{B} \cdot \mathbf{b}_2 \rangle e^{-\sigma t}, \quad (4.9)$$

where the growth rate σ is a function of R_m (see figure 4.1). As the governing equations are linear, the exponential damping is here essential in order to introduce a limit behaviour. The quantities X and Y are presented on figure 4.5a for $R_m = 11.5$. The undamped trajectory of the system is also represented using dashed lines, and directly illustrates the exponential growth of the dominant mode. The damped trajectory evolves toward the equivalent of a stable limit cycle.

The exponential damping on X and Y provides us with the equivalent of a non-linear dynamical system. This explains why we report below phenomena that are usually associated to non-linear dynamics.

In the second window, $R_m > R_{m1}$, the two modes we selected (corresponding to the lowest $\vec{k}$ component of the realised mode) are

$$\mathbf{b}'_1 = (-\sin(y) - \cos(z)) \mathbf{e}_x + (\sin(\mathbf{z}) + \cos(\mathbf{x})) \mathbf{e}_y + (-\sin(\mathbf{x}) + \cos(\mathbf{y})) \mathbf{e}_z, \quad (4.10)$$

$$\mathbf{b}'_2 = (\sin(y) - \cos(z)) \mathbf{e}_x + (\sin(\mathbf{z}) - \cos(\mathbf{x})) \mathbf{e}_y + (\sin(\mathbf{x}) - \cos(\mathbf{y})) \mathbf{e}_z. \quad (4.11)$$

These correspond to two components of the general family reported earlier for this mode [GF86]. Note that these two vectors do not provide a complete decomposition of the first harmonic. They involve symmetries (though none in common), but these are not relevant here since they are not verified by the full eigenmode nor the first harmonic.

The resulting orbits of $X' = \langle \mathbf{B} \cdot \mathbf{b}'_1 \rangle e^{-\sigma t}$ and $Y' = \langle \mathbf{B} \cdot \mathbf{b}'_2 \rangle e^{-\sigma t}$ are represented on figure 4.5b for various values of the controlling parameter $R_m > R_{m1}$. The represented quantities are not arbitrarily rescaled. Only the exponential damping has been applied, and all cases have been started with the same initial condition (involving random, but divergence free, fluctuations). The oscillating nature of the dynamo for $R_m < R_{m2}$ is clearly illustrated by the limit cycle. For $R_m > R_{m2}$ the oscillations disappear and the dynamo mode therefore becomes a fixed point in the $[X', Y']$ plan. For clarity, we suppressed the trajectories that lead to the limit cycles or the steady solutions on figure 4.5b.

4.5 Eigenvalues coalescence

As the magnetic Reynolds number is further increased, a second kink in the growth rate is observed on Figure 4.1 for $R_{m2} \in [215.0, 215.4]$. This second kink, however, does not correspond to a change of dominant eigenvalue, but instead to an eigenvalues coalescence. The strategy highlighted above to follow secondary modes does not yield any secondary branch here, indicating that there is no significant change in the dominant eigenmode.

Figure 4.4 reveals that the behaviour of the imaginary part of the eigenvalue is very different near the second kink. Instead of the abrupt jump reported at R_{m1} , the pulsation continuously (but not smoothly) tends to zero as R_m approaches R_{m2} and vanishes for $R_m > R_{m2}$.

The lack of oscillations at large R_m is a well known characteristic, it was already noticed by Galloway and Frisch [GF84] for ($R_m > 400$), although they could not assess whether the period of oscillations was simply increasing with R_m or the eigenvalue had become purely real. Lau and Finn [LF93] suggested that this could be associated with a mode crossing, a new mode with purely real eigenvalue taking over above R_{m2} .

We show here that the imaginary part of the eigenvalue indeed vanishes for $R_m > R_{m2}$, and that this corresponds to the coalescence of two complex conjugate eigenvalues on the real axis. The coalescence yields the kink in the evolution of the real part of the eigenvalue.

The simplest mathematical model for a complex conjugate eigenvalue coalescence on the real axis corresponds to a situation of the form

$$\lambda_{\pm} = \alpha(R_m) \pm \sqrt{\beta(R_m)}, \quad (4.12)$$

where α and β are differentiable real functions of R_m . A negative β (for $R_m < R_{m2}$) yields two complex conjugate modes, and thus oscillations of the magnetic energy. As β becomes positive (for $R_m > R_{m2}$), the eigenvalues are purely real and the β term now contributes to the real part of the eigenvalue λ_+ offering the largest growth rate.

Figure 4.6a presents a detailed view on the variation of $\sigma = \text{Re}(\lambda)$ and $\omega = \text{Im}(\lambda)$ close to R_{m2} . Defining $\sigma_2 = \sigma(R_{m2})$ we plot $\sigma(R_m) - \sigma_2$ and $-\omega(R_m)$. It is clear that the kink in σ is concomitant of the vanishing of ω .

Let us now form on Figure 4.6b the quantity $F = \sigma(R_m) - \sigma_2 - \omega(R_m)$. The square-root behaviour of F near R_{m2} is obvious. Assuming that the above model (4.12) is correct, F corresponds to $\alpha - \alpha_0 + \text{sign}(\beta)\sqrt{|\beta|}$, where $\alpha_0 = \alpha(R_{m2})$. We can note on Figure 4.6a for $R_m < R_{m2}$ that $\alpha - \alpha_0$ remains small compared to variations in β . The quantity $\text{sign}(R_m - R_{m2}) F^2$ therefore offers a good approximation to β and should be differentiable at R_{m2} .

More formally, assuming that α and β are regular functions of R_m , we can write a finite expansion of the form

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1(R_m - R_{m2}) + \alpha_2(R_m - R_{m2})^2 + \dots, \quad (4.13)$$

$$\beta = \beta_1(R_m - R_{m2}) + \beta_2(R_m - R_{m2})^2 + \dots, \quad (4.14)$$

with $\beta_1 > 0$. The quantity $\text{sign}(R_m - R_{m2}) F^2$ can be written at the lowest orders in $R_m - R_{m2}$

$$\begin{aligned} \text{sign}(R_m - R_{m2}) F^2 &= \text{sign}(R_m - R_{m2}) \alpha_1^2 (R_m - R_{m2})^2 \\ &\quad + \text{sign}(R_m - R_{m2}) \alpha_1 \sqrt{\beta_1} (|R_m - R_{m2}|)^{3/2} \\ &\quad + \beta_1 (R_m - R_{m2}). \end{aligned} \quad (4.15)$$

This development implies that $\text{sign}(R_m - R_{m2}) F^2$ is differentiable at R_{m2} . Figure 4.6b clearly illustrate this property on the direct numerical simulation.

Another insight on the nature of this transition can be gained from the “phase space” introduced in figure 4.5b. As noted above a remarkable feature is that the steady solutions obtained after the coalescence lies on the ellipse described by the limit cycle shortly below the coalescence (on the figure $R_m = 220$). This behaviour which is similar to that of an excitable system (such as a pendulum subject to a constant torque), has recently been observed in experimental dynamos measurements [RBM⁺08]. The phase space was then constructed using two components of the magnetic field at a given location (a probe).

Such behaviour is reminiscent of a saddle-node bifurcation. In these systems, the dynamics becomes increasingly slow on the cycle as the system approaches the state

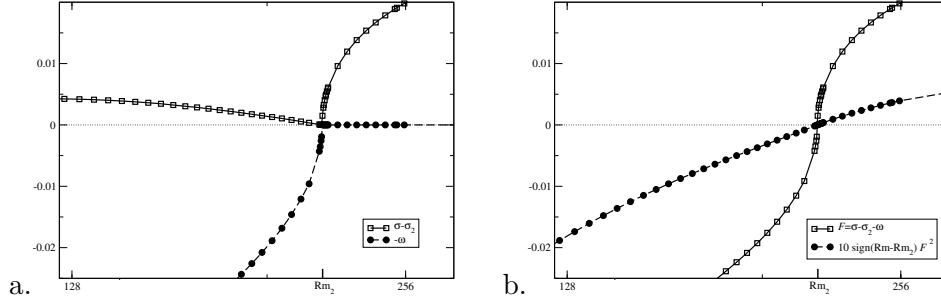


Figure 4.6: Eigenvalues coalescence for R_m close to $R_{m2} \simeq 215$. Both the real part (written as $\sigma(R_m) - \sigma_2$) and the opposite of the imaginary part (i.e. $-\omega(R_m)$) are represented (a). The sum F of both (b), and $\text{sign}(R_m - R_{m2})F^2$ illustrate the continuity and regularity in the functional form of the eigenvalue (see text).

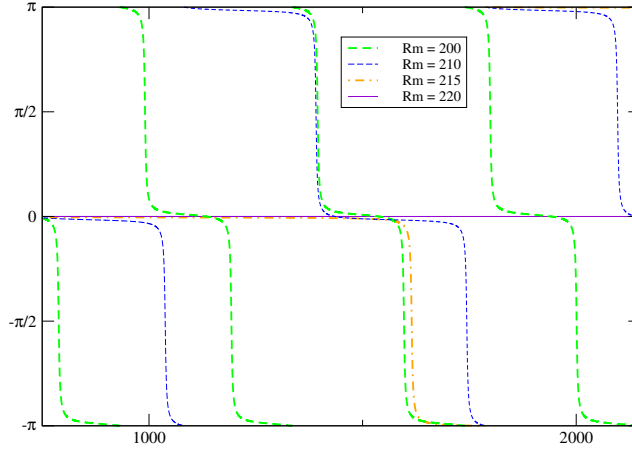


Figure 4.7: Evolution in time of the projection of the dominant mode on the two large scale components, represented via the angle θ , such that $(\cos(\theta), \sin(\theta)) = (X', Y')/\sqrt{X'^2 + Y'^2}$.

at which the saddle and the node will collapse. In order to assess this property in our system, albeit linear, we introduce the angle θ of the system over a unit circle described through the orbit, so that $(\cos(\theta), \sin(\theta)) = (X', Y')/\sqrt{X'^2 + Y'^2}$. The time evolution of θ with increasing values of R_m is presented in figure 4.7. The system clearly spends an increasing amount of time as R_m approaches R_{m2} near the angle at which the stable solution will occur for $R_m = R_{m2}$. Such behaviour could be described by a simple phase dynamics, e.g. [PFDV09, GH97].

It is interesting that these approaches of non-linear dynamics can cast some light on the behaviour of kinematic dynamos. A similar occurrence of a saddle-node transition for a kinematic dynamo numerical model of the above mentioned VKS experiment has indeed been reported in [Gis09], with an expression of the form (4.12).

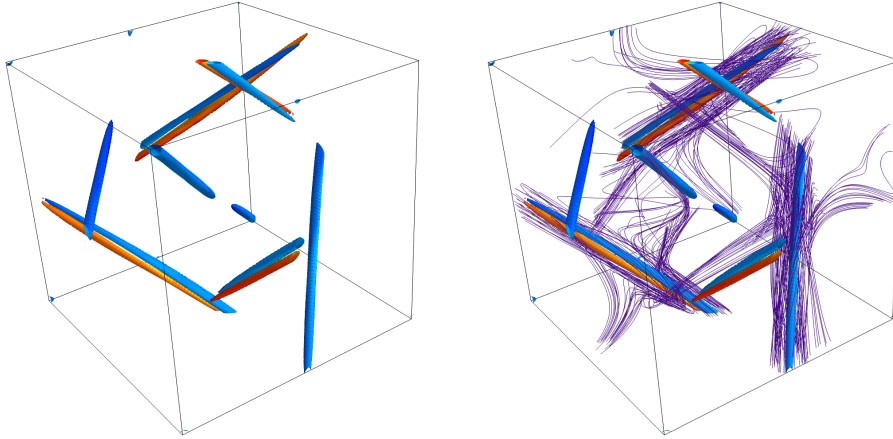


Figure 4.8: Eigenmode obtained for $R_m = 434.2 (> R_{m2})$. An isosurface of the magnetic energy is represented. To highlight the symmetry, it is coloured according to the value of B_x , from negative (dark gray - blue online) to positive (lighter gray - red online). The corresponding eigenvalue is purely real, yet the double cigars structure of the field remains clearly visible. Magnetic field lines are also depicted on the right plot.

The fact that the fixed points in the (X', Y') plan describe the previously existing limit cycle is a strong indication that there is at first no significant change occurring in the structure of the dominant eigenmode after the eigenvalues coalescence. Indeed the “double cigars” structure (see [Dor00]), associated to the oscillations for $R_m \in [R_{m1}, R_{m2}]$ is preserved once the growth rate has become steady, $R_m > R_{m2}$ (see Figure 4.8).

4.6 Asymptotic behaviour

We have finally increased the control parameter in the range 215–25000. Despite the fact that the largest magnetic Reynolds number tackled in this study is roughly 15 times larger than earlier results, the growth rate has not reached an asymptotic value yet. The growth rate obtained for our largest R_m is very close to 0.1 and appears to be still significantly increasing with R_m .

The 1:1:1 ABC-flow has also been considered by Gilbert [Gil92] using maps in a limit in which the diffusivity is formally set to zero. This approach has yield growth rate of 0.04 – 0.05, so much smaller than the value achieved by our direct numerical simulations at $R_m = 25000$. It is therefore not unplausible to anticipate that the behaviour of $\sigma(R_m)$ above 25000 will not be monotonic and σ will probably decrease again.

Another indication is provided by the largest Lyapunov exponent of the flow, which is approximately 0.055 (see [GSP92]). Owing to the lack of regularity of the field in the limit of large R_m numbers, the largest Lyapunov exponent however does

not provide an upper bound on the asymptotic growth rate [CG95]. An upper bound can be sought by considering the topological entropy h_{top} (see [FO88a, FO88b]). For steady three-dimensional flows the topological entropy is equal to the line stretching exponent h_{line} (see [CG95]), which can be estimated for the 1:1:1 ABC-flow to be $h_{\text{line}} \simeq 0.09$. This provides yet another indication that the curve $\sigma(R_m)$ must decrease for larger values of R_m .

A plausible scenario, suggested by the behaviour of submodes as investigated by S. Jones and A. Gilbert, is that two complex conjugate eigenvalues may emerge again at larger R_m . This is often observed in saddle-node bifurcations (e.g. [RBM⁺08]). It would result in the reappearance of the oscillations, and an abrupt decrease of the growth rate (the counterpart of the increase observed at R_{m2}). This would deserve further study.

The asymptotic behaviour of the 1:1:1 ABC-flow is thus not yet established. It is at the moment, despite the high resolution simulations presented here, impossible to assess its asymptotic growth rate. It is not even possible to rule out the possibility of an eventual decay of the growth rate to zero at very large R_m .

4.7 Conclusion

We have investigated using high resolution direct numerical simulations the behaviour of the 1:1:1 ABC-dynamo. We have shown that the two dynamo windows identified for this dynamo are associated with a change of dominant eigenvalue. We have identified a second kink in the growth rate as a function of R_m and shown that it corresponds to an eigenvalue coalescence and the end of the oscillatory nature of the solutions. Finally, even at very large values of R_m , we show that the growth rate is still strongly varying and not monotonic yet.

Relaxing the requirement of a fully three-dimensional flow and allowing for time dependence, other models for fast dynamo actions have been obtained by Galloway and Proctor [GP92], with a velocity depending only on two coordinates. The time dependence ensures exponential stretching at least in this plane. The induction equation is then separable in the z direction, allowing faster numerical integrations. The asymptotic limit of large R_m appears easier to reach for such flows. Other studies involved time dependence of the flow [Ota93] and some hint at a possible resonance phenomenon [DGV08].

Finding a good example of fully three-dimensional flow that acts as a fast dynamo remains a challenging problem. The most classically given example remains the 1:1:1 ABC-flow. This unexpectedly rich behaviour of the 1:1:1 ABC-dynamo at very large R_m , highlighted in our study, deserves further investigations. It is most likely associated with the fact this flow yields very small chaotic regions [Gal12].

Acknowledgements

The authors are very grateful to Dave Galloway for sharing his original dynamo code, which served as the starting point for the parallel version written for this study. We are also very grateful to Christophe Gissinger for useful discussions in the course of this work.

Computations were performed on the MesoPSL cluster as well as on the Cines computing centre (Genci project LRA0633).

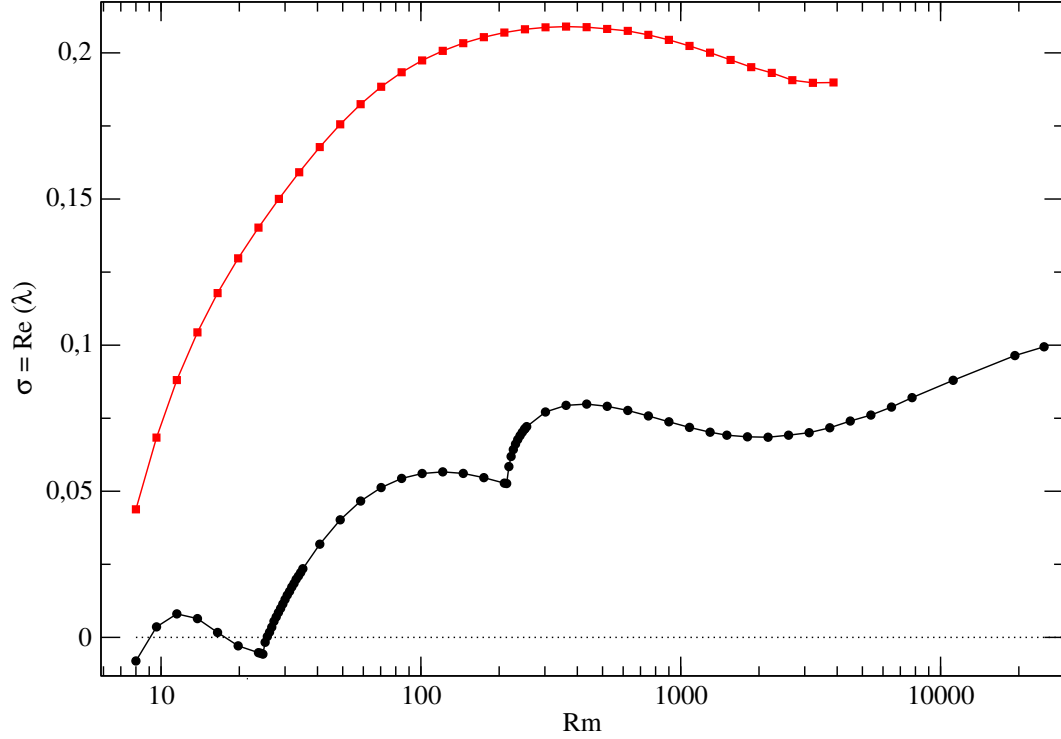


FIGURE 4.9 – Taux de croissance réel en fonction de R_m en échelle logarithmique. La courbe rouge (carrés) pour $A:B:C = 5:2:2$, la courbe noire (ronds) pour $A:B:C = 1:1:1$.

Perspectives

L'étude de l'écoulement $A:B:C$, bien que ne donnant pas un résultat définitif, est tout de même très prometteuse. Plusieurs pistes peuvent être étudiées pour améliorer le résultat obtenu.

Une première possibilité serait de partir directement de l'écoulement "optimal", à savoir $A:B:C = 5:2:2$, pour chercher l'existence ou non de dynamo rapide. Les premières tentatives de ce côté montrent un comportement très similaire à celui de l' $A:B:C$ étudiée dans ce chapitre, avec des valeurs du taux de croissance réel plus élevées, mais à des R_m beaucoup plus élevés, ce qui pose des problèmes vis-à-vis du temps de calcul numérique (*cf.* Figure 4.9).

La deuxième possibilité serait d'envisager la génération du champ magnétique sur une taille plus grande que juste la boîte périodique $[0, 2\pi]^3$ de l'écoulement, à la manière de l'effet alpha, ou plus simplement, de remplacer $\mathbf{x}$ par $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}$ où $\mathbf{k} \in (\mathbb{N}^*)^3$ dans l'expression de l'écoulement $A:B:C$. Ce genre d'étude a déjà été mené [GSP92] sur une gamme modérée de Reynolds magnétiques.

Une troisième possibilité, la plus évidente au premier abord, serait d'aller plus loin en R_m . En l'état actuel de la recherche, quelques points ont été ajoutés pour

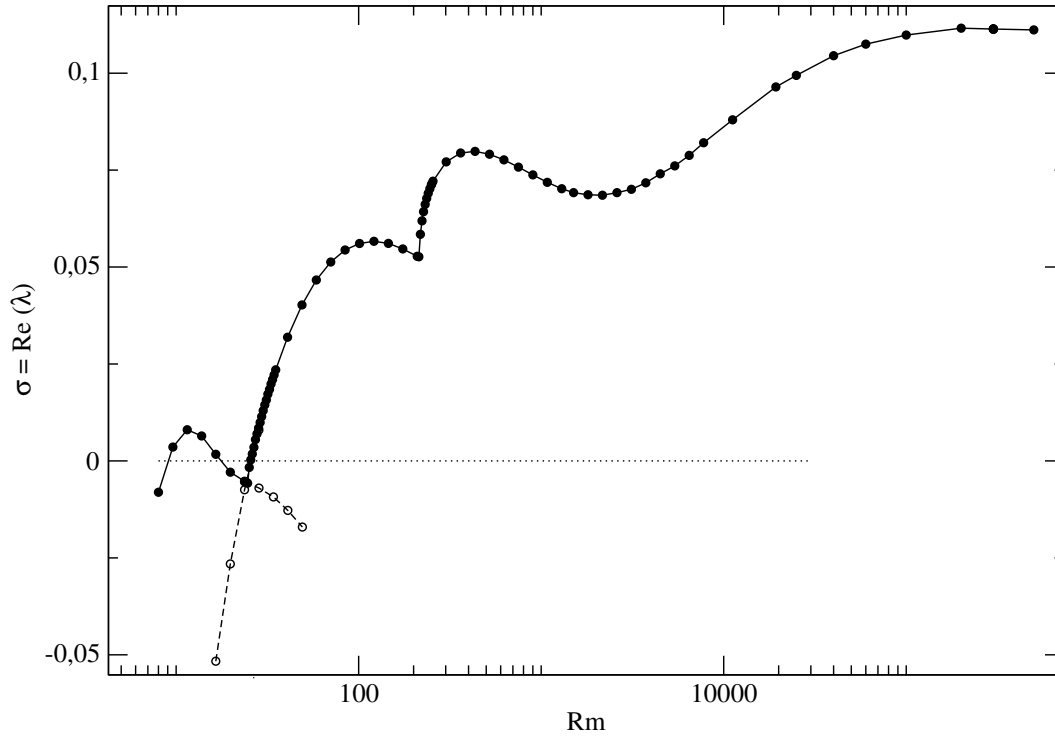


FIGURE 4.10 – Courbe complétée du taux de croissance. Les encadrements d’erreurs sont suffisamment précis pour ne pas être visibles à cette échelle.

étendre l’étude de l’écoulement $A:B:C$ à des R_m plus grands. La difficulté essentielle de cette démarche est de trouver la résolution optimale permettant d’avoir un résultat numériquement correct en temps raisonnable. Pour cela, la seule méthode fiable est de vérifier après le calcul qu’augmenter la résolution ne change pas le taux de croissance final du mode propre, ce qui demande beaucoup plus de ressources processeur (avec le code utilisé pour tracer ces courbes, on multiplie par 16 le nombre de calculs nécessaires – deux par dimension d’espace et de temps –, et on ne gagne qu’un facteur au plus deux en doublant le nombre de cœurs jusqu’à une limite fixée par la résolution spatiale).

Les calculs ont été prolongés jusqu’à un R_m de 5×10^5 , ce qui représente une avancée notable mais peu visible sur la courbe du taux de croissance (*cf.* Figure 4.10). À cette valeur de R_m , la résolution utilisée pour résoudre l’équation d’induction atteint 4096^3 et un encadrement “partiel” demande un calcul de quelques semaines sur une machine de 1024 cœurs.

Quelques observations ont été faites à ces R_m grands :

- Tout d’abord, on observe un retour d’oscillations amorties du taux de croissance, qui peuvent indiquer un nouveau croisement de mode oscillant ayant une valeur propre de partie réelle assez proche de celle obtenue ici, mais de partie imaginaire non-nulle.

- Ensuite, on sait que la valeur atteinte ici est “trop grande” par rapport au maximum théorique h_{line} , même en admettant des erreurs numériques dans le calcul de cette dernière valeur h_{line} . On sait donc que ce taux va finir par décroître et donc qu’on ne connaît toujours pas parfaitement la dynamique de l’écoulement $A:B:C$, malgré la grande valeur ($R_m \simeq 5 \times 10^5$!) atteinte. Cependant, en comparaison avec le taux de croissance indiqué par Soward [Sow87] dans le cas $C = 0$, on avait un taux de croissance asymptotique de la forme $\frac{\ln \ln R_m}{\ln R_m}$. Dans ce cas particulier, on a donc une variation très lente du taux de croissance en R_m , variation qui ne serait pas visible sur la gamme de Reynolds magnétiques étudiée jusque là :

$$\frac{\ln(\ln(100))}{\ln(100)} \simeq 0.3316 \quad \frac{\ln(\ln(5 \times 10^5))}{\ln(5 \times 10^5)} \simeq 0.2902 \quad (4.16)$$

Enfin une dernière possibilité, pour comprendre l’apparition et la disparition des modes oscillant, serait d’étudier le comportement de la dynamo à $R_m < 8$. En effet, la courbe d’évolution de la partie imaginaire 4.4 semble indiquer que celle-ci est devenue positive peu avant $R_m = 8$. La principale difficulté du calcul consiste à ne pas être “pollué” par le mode dominant qui lui pulse à une valeur beaucoup plus grande, ce qui empêche de suivre l’évolution du champ magnétique aussi loin que désiré.

Le comportement obtenu dans cette fenêtre de R_m est différent de ce qu’on observe dans le cas des R_m plus grands. En effet, dans ce cas, on a un effet combiné de diminution de l’amplitude des oscillations et de l’augmentation de la période d’oscillation, effet qui n’avait pas été remarqué dans l’étude précédente.

Chapitre 5

Écoulement $A:B:C$ pulsé

On s'intéresse dans ce chapitre à une modification dépendante du temps de l'écoulement $A:B:C$, on parle d'écoulement pulsé :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} A \sin z + C \cos y \\ B \sin x + A \cos z \\ C \sin y + B \cos x \end{pmatrix} + \varepsilon \cos(\omega t) \begin{pmatrix} A' \sin z + C' \cos y \\ B' \sin x + A' \cos z \\ C' \sin y + B' \cos x \end{pmatrix}, \quad (5.1)$$

c'est-à-dire à une perturbation d'un écoulement $A:B:C$ par un autre écoulement de la même forme (mais avec des coefficients différents et plus petits).

Plus précisément, on cherche à mesurer l'effet de la perturbation sur le mécanisme dynamo de l'écoulement $A:B:C$. D. Gérard-Varet et E. Dormy [DGV08] ont montré sur un cas simplifié que ce type de perturbations pouvait transformer un écoulement “non-dynamo” en écoulement “dynamo”. Idéalement, il faudrait considérer un écoulement pour lequel chaque instantané soit un écoulement non-dynamo. En pratique, on peut difficilement imposer une telle condition sans avoir un écoulement “trivial” qui ne serait de toute façon pas dynamo.

On a choisi ici $A:B:C = 1:0:0$ dont on sait qu'il est non-dynamo (car planaire), et une perturbation de la forme

$$\varepsilon \cos(\omega t) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos x \end{pmatrix}, \quad (5.2)$$

ce qui donne un écoulement total de la forme

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \sin z \\ \cos z \\ \varepsilon \cos(\omega t) \cos x \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

Le choix particulier de cet écoulement permet de découpler les différents modes en y (pas de dépendance en y dans l'écoulement), ce qui permet d'accélérer grandement les temps de calcul. C'est un aspect essentiel dans ce cas précis où on a deux variables ε et ω à faire varier.

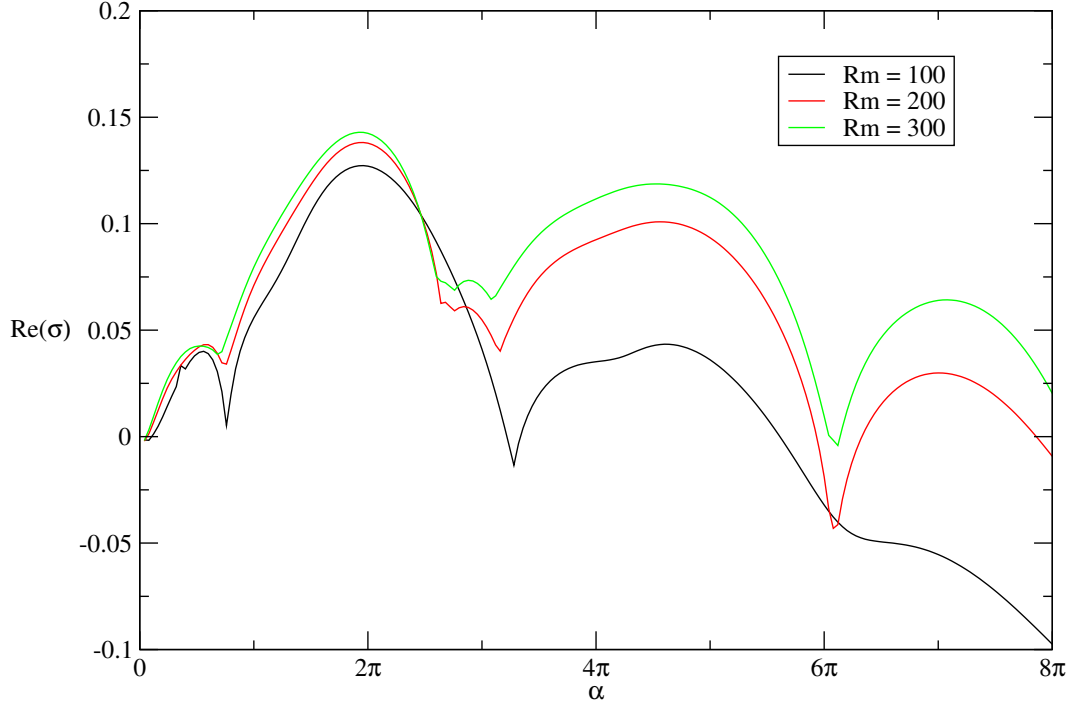


FIGURE 5.1 – Courbe du taux de croissance de $\|\mathbf{b}\|^2$ pour un champ $\mathbf{B}$ de la forme $\mathbf{B} = \mathbf{b}(x, z, t)e^{iky}$ à $R_m = 100, 200$ et 300 pour $\omega = 0.3$ et $\varepsilon = 0.7$ en fonction de la taille de la boîte selon y .

La taille de 2π selon la direction y n'est plus justifiée par l'écoulement et une taille différente pourrait donner de meilleurs résultats sur l'effet dynamo associé à cet écoulement. Nous garderons ici une taille de 2π pour simplifier l'étude (*cf.* Figure 5.1 pour une comparaison rapide concernant ce point)

L'équation d'induction se ramène alors au système d'équations :

$$\frac{DB_x}{Dt} - \frac{1}{R_m} \Delta B_x = B_z \cos z \quad (5.4)$$

$$\frac{DB_y}{Dt} - \frac{1}{R_m} \Delta B_y = -B_z \sin z \quad (5.5)$$

$$\frac{DB_z}{Dt} - \frac{1}{R_m} \Delta B_z = -B_x \varepsilon \cos(\omega t) \sin x, \quad (5.6)$$

qui peut être découplé en la résolution de (5.4,5.6) et ensuite la résolution de l'équation de B_y (5.5).

Cette étude a pour but de compléter une étude réalisée précédemment par D. Gérard-Varet et E. Dormy [DGV08]. Suivant l'approche introduite dans cet article, nous allons comparer ici la dynamo générée par cet écoulement à l'équation de Mathieu

$$\ddot{\theta} + (\tilde{\alpha} + \gamma \cos t)\theta = 0. \quad (5.7)$$

Cette équation traduit (entre autres) la stabilité d'un pendule pesant excité verticalement avec une amplitude γ (θ désigne ici l'écart à une solution périodique de l'équation "classique" du pendule pesant), d'un type assez différent de celui d'un forçage classique, dans la mesure où il se traduit ici par un paramètre de l'équation, dépendant du temps.

L'intérêt de cette équation est qu'elle se ramène à un système à coefficients périodiques de la forme

$$\dot{X} = A(t)X, \quad (5.8)$$

avec

$$X = \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -(\tilde{\alpha} + \gamma \cos t) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.9)$$

qui peut être résolu aisément par une méthode numérique en tirant profit de la théorie de Floquet. Cette équation ressemble à celle étudiée dans [DGV08] pour l'équation d'induction associée à un écoulement cisailant, écoulement qui pourrait correspondre formellement à celui à proximité des points de stagnation de l'écoulement $A:B:C$ dans la limite des grands R_m .

On cherche ici à mettre en évidence un effet dynamo lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ pour certaines valeurs de ω , c'est-à-dire d'avoir un effet dynamo malgré l'amplitude très petite de la perturbation de l'écoulement initial (qui lui n'est pas dynamo). Dans [DGV08], D. Gérard-Varet et E. Dormy ont mis en évidence analytiquement dans un cas simple le fait qu'une perturbation d'amplitude R_m^{-1} était suffisante pour rendre dynamo un écoulement qui ne le serait pas sans perturbation.

5.1 Comparaison entre l'écoulement pulsé et l'écoulement non-pulsé

On a comparé à R_m fixé ($R_m = 100$) des instantanés de l'écoulement entre $t = 0$ et $t = \pi/(2\omega)$. Ceci revient en pratique à prendre l'écoulement $A:B:C$ pour différentes valeurs de B entre 0 et 0.3. On remarque que la valeur la plus grande de σ est atteinte pour $\varepsilon \simeq 0.3$ (cf. Figure 5.2). Pour simplifier l'étude, on a considéré dans la suite que c'était également le cas, c'est-à-dire que la plus grande valeur de B atteinte par un instantané de l'écoulement donnera la plus grande croissance de la dynamo associée. Une telle hypothèse n'est pas toujours vérifiée, mais est raisonnable dans la gamme de R_m étudiée ici.

On se place ici dans le cas particulier $\varepsilon = 0.3$, $\omega = 0.3$, et on compare à différents R_m les instantanés de l'écoulement (on prend $t = 0$ et $t = \pi/\omega$). La Figure 5.3 montre le résultat de cette comparaison. On remarque sur cette figure que l'écoulement pulsé dépasse largement ce qu'on peut obtenir avec des instantanés du même écoulement à différents instants. Ainsi, la pulsation a un effet positif sur l'effet dynamo de l'écoulement. On vérifie par la même occasion qu'un écoulement planaire – la courbe noire, cercles pleins – ne peut engendrer de dynamo (par ailleurs, la courbe rouge,

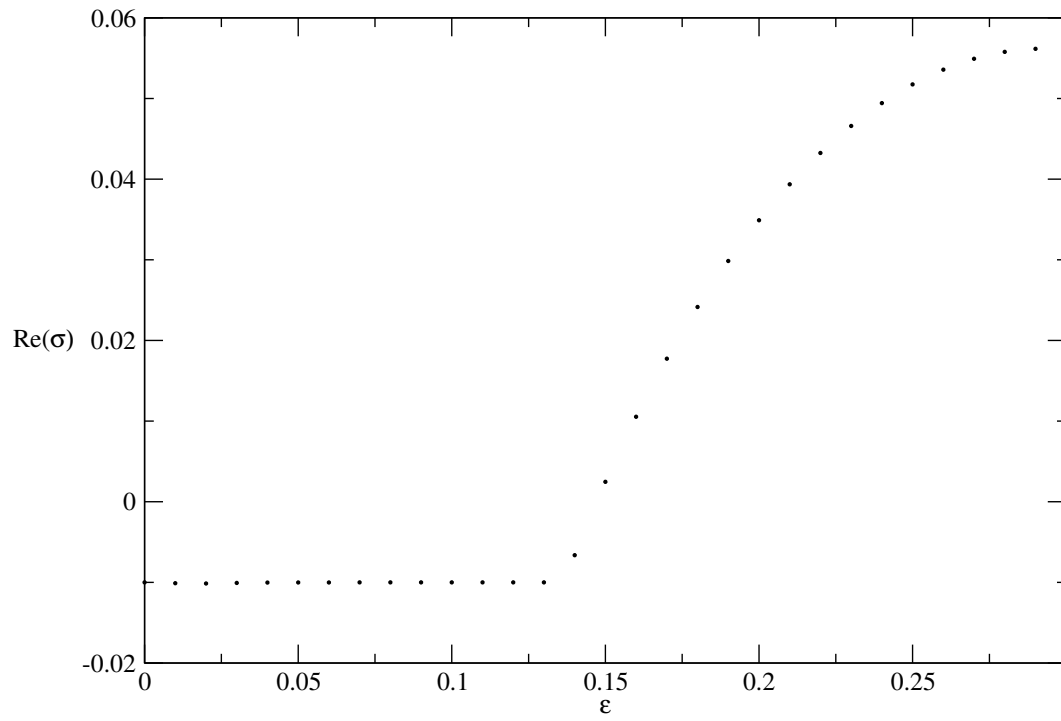


FIGURE 5.2 – Courbe du taux de croissance maximal de la dynamo en fonction de ε pour un écoulement de la forme $\mathbf{u} = (\sin z, \cos z, \varepsilon \cos x)$

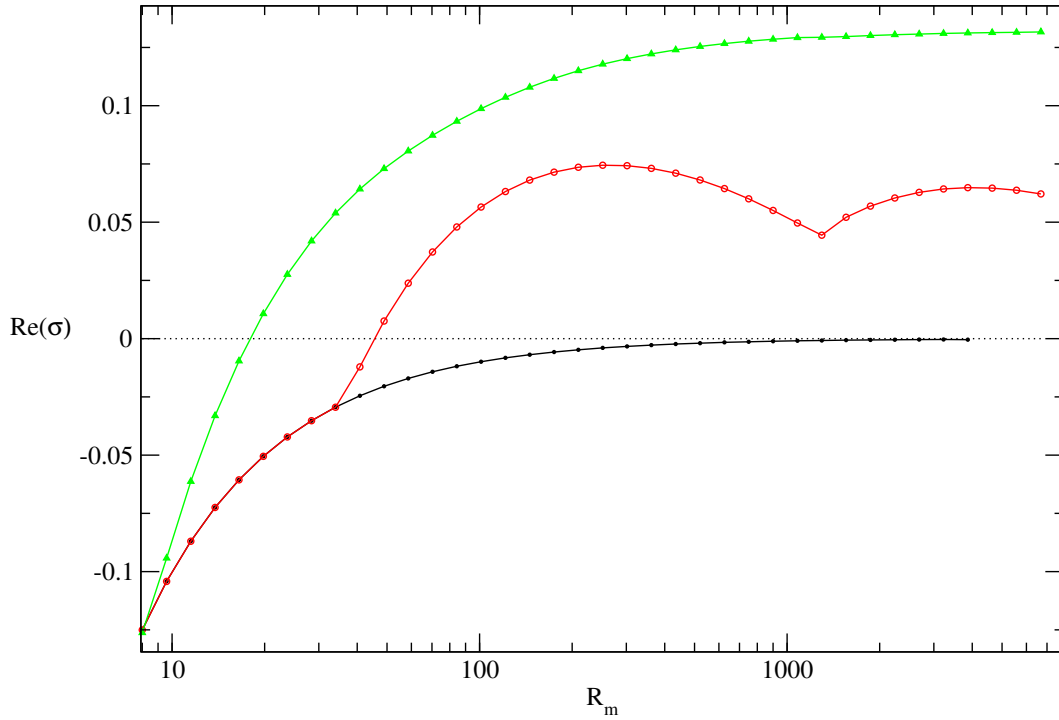


FIGURE 5.3 – Courbe du taux de croissance maximal de la dynamo en fonction de R_m pour un écoulement de la forme $\mathbf{u} = (\sin z, \cos z, f(t) \cos x)$, avec $f(t) = 0$ (courbe noire, cercles pleins), $f(t) = 0.3$ (courbe rouge, cercles vides) et $f(t) = 0.3 \cos(0.3t)$ (courbe verte, triangles pleins)

cercles vides sera nécessairement une dynamo lente d'après un résultat évoqué en introduction).

5.2 Poches d'instabilités

5.2.1 Équation de Mathieu

Dans le cas de l'équation de Mathieu, on observe des poches instables (*cf.* Figure 5.4). Ces zones instables sont séparées par des zones de stabilité. De façon générale, ces zones instables traduisent une pulsation de θ à une harmonique différente de la pulsation du forçage. Sur la Figure 5.5, on voit l'évolution de θ sur deux périodes en fonction du paramètre γ pour $\tilde{\alpha} = 0$.

Ce diagramme met en évidence le fait que les zones de stabilité ($\gamma \simeq \pm 11$ et $\gamma \simeq \pm 4$) correspondent en fait à une transition entre deux réponses de périodes différentes de θ : la zone intermédiaire pulse à la même période que le forçage, tandis que les deux autres zones pulsent à une période double.

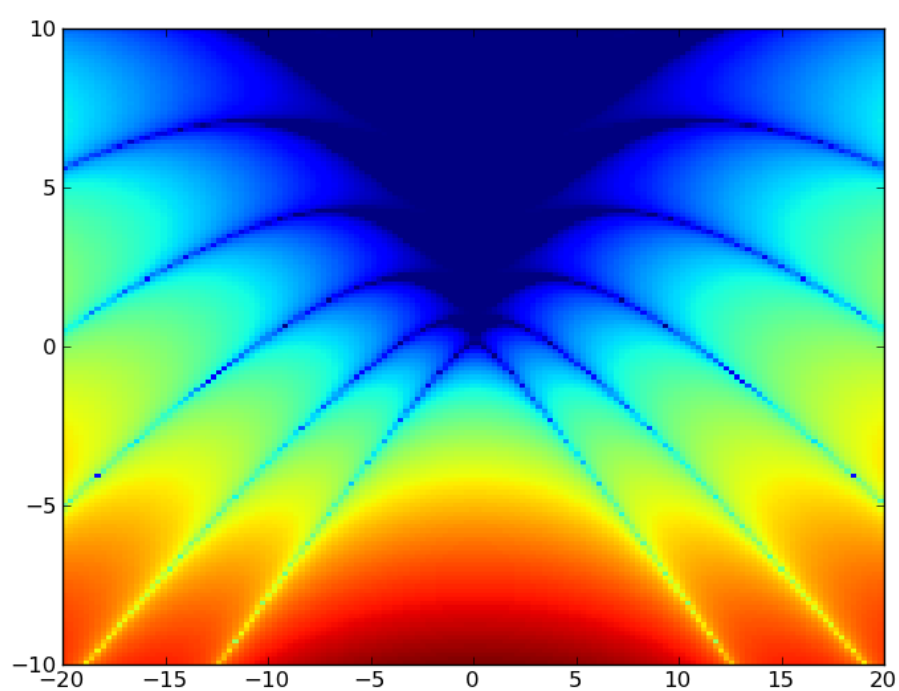


FIGURE 5.4 – Diagramme de stabilité de l'équation de Mathieu. Abscisse : γ . Ordonnées : $\tilde{\alpha}$. Code de couleur : taux de croissance réel sur une période, minimisé à 0.

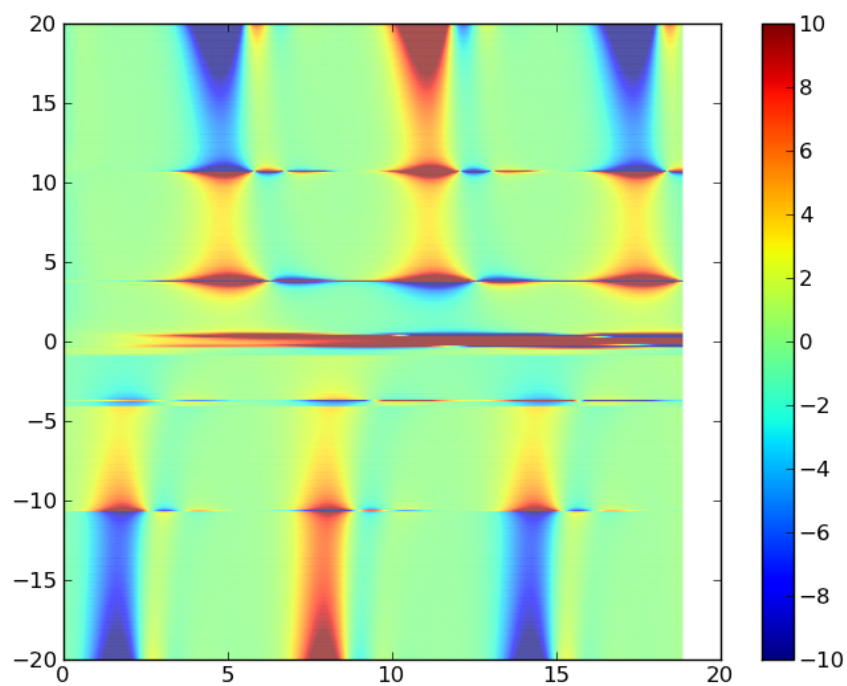


FIGURE 5.5 – Diagramme (t, γ) de l'équation de Mathieu pour $\tilde{\alpha} = 0$. En abscisse, le temps sur deux périodes du forçage (de période 2π). En ordonnées, γ . Code de couleur : valeur de θ solution de l'équation de Mathieu à l'instant t , ramené à une croissance nulle sur une période.

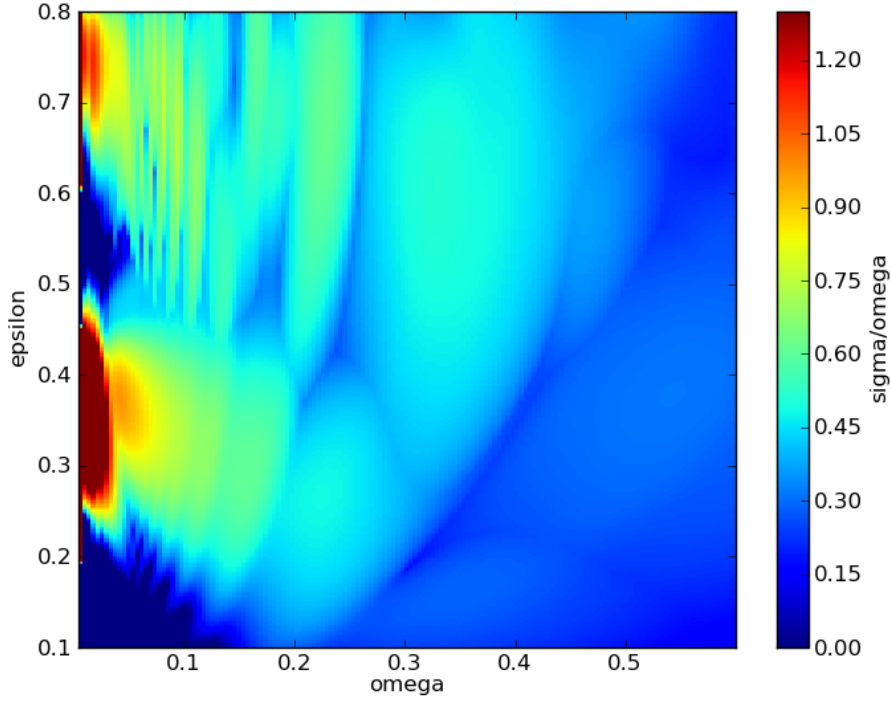


FIGURE 5.6 – Diagramme de stabilité de $|\mathbf{B}|^2$ pour $R_m = 300$. Abscisses : ω . Ordonnées : ε . Code de couleur : taux de croissance réel de $|\mathbf{B}|^2$ ramené à une période 2π du forçage.

Remarque 5.1

Le déphasage de π entre les γ négatifs et positifs était prévisible au vu de l'équation, bien qu'ils donnent le même taux de croissance sur le diagramme de stabilité !

Ce comportement est à rapprocher de ce qu'on observe habituellement dans un système forcé avec un forçage périodique : pour un pendule pesant par exemple, selon l'amplitude et la période avec laquelle on l'excite on aura une oscillation du pendule sur un nombre entier de fois la période de l'excitation.

5.2.2 Équation d'induction

Dans le cas de l'équation d'induction, le résultat obtenu est assez similaire : on observe également des zones instables de l'énergie magnétique, réparties différemment sur le diagramme (*cf.* Figure 5.6). Le comportement en temps de la solution (*cf.* Figures 5.7 et 5.8) est différent de celui de l'équation de Mathieu. On remarque tout d'abord que le déphasage observé sur la position du maximum d'une composante de $\hat{\mathbf{B}}$ varie en fonction de ω alors que celui de $\|\mathbf{B}\|^2$ ne change pas (pour l'équation

de Mathieu, on n'avait pas de déphasage en faisant varier le paramètre γ). De plus, la période de la réponse en temps ne change pas brusquement au passage d'une transition entre deux zones instables, mais se fait "transitoirement" sur un intervalle de valeurs de ω :

Une période est entière, donc ne peut pas varier continûment ! En pratique, un deuxième extremum local apparaît de manière progressive pour mener finalement à un doublement de période. Ainsi, une perturbation apparaît sur la variation temporelle de $\|\mathbf{B}\|^2$ (ou $\hat{B}_x$) à certaines valeur de ω et finit par avoir la même amplitude que la variation initiale pour une valeur plus grande de ω , non nécessairement liée au fait de passer par une zone stable et donnant à partir de cette valeur un doublement de la période (cf. Figures 5.9 et 5.10). Ce comportement est très différent de celui observé pour l'équation de Mathieu, où on n'observe pas de période transitoire avec une perturbation qui prendrait de l'ampleur en faisant varier γ , mais au contraire un saut brusque au doublement de la période, passant par une forte réduction de l'amplitude des oscillations.

Remarque 5.2

Ceci pourrait être dû à la différence fondamentale entre l'équation de Mathieu et l'équation d'induction, qui est que la première est une simple équation différentielle ordinaire (en dimension 1) tandis que la deuxième est une équation aux dérivées partielles (en dimension 3), et à rapprocher de la différence analogue entre $\mathbb{R}$ et n'importe quel autre $\mathbb{R}^n, n \geq 2$ (On ne peut pas "contourner" un obstacle dans $\mathbb{R}$).

Il serait intéressant de savoir si une équation différentielle ordinaire peut avoir le même comportement que celui observé ici sur l'équation d'induction.

5.3 Coupure en ε

Dans les travaux de Gérard-Varet et Dormy, il a été évoqué la présence d'une "coupure" en ε , décroissant en $\frac{1}{R_m}$, c'est-à-dire que l'amplitude de la perturbation doit être au moins de l'ordre de $\frac{1}{R_m}$ pour obtenir un effet déstabilisant. Ici, on observe effectivement que pour des ε trop petits (à pulsation fixée), on tombe dans un régime stable. Les figures 5.12 et 5.11 confirment la dépendance décroissante en R_m de la valeur de coupure (sans pour autant avoir une nette décroissance en $1/R_m$).

À titre de comparaison sur le diagramme complet, la figure 5.13 donne le même diagramme que 5.6 pour $R_m = 200$, où on observe effectivement que la coupure de zone stable est plus haute que celle pour $R_m = 300$.

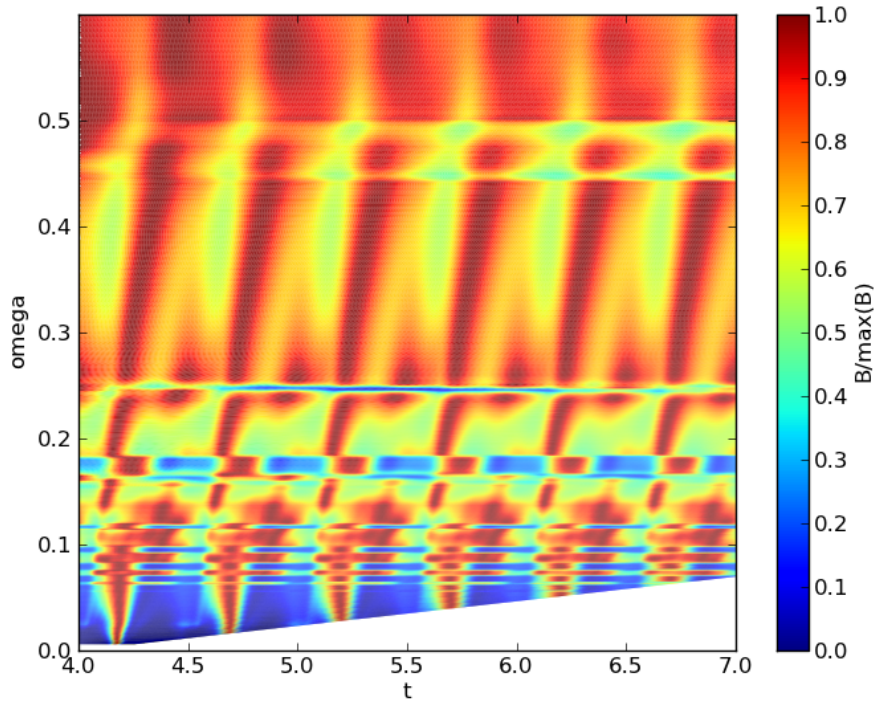
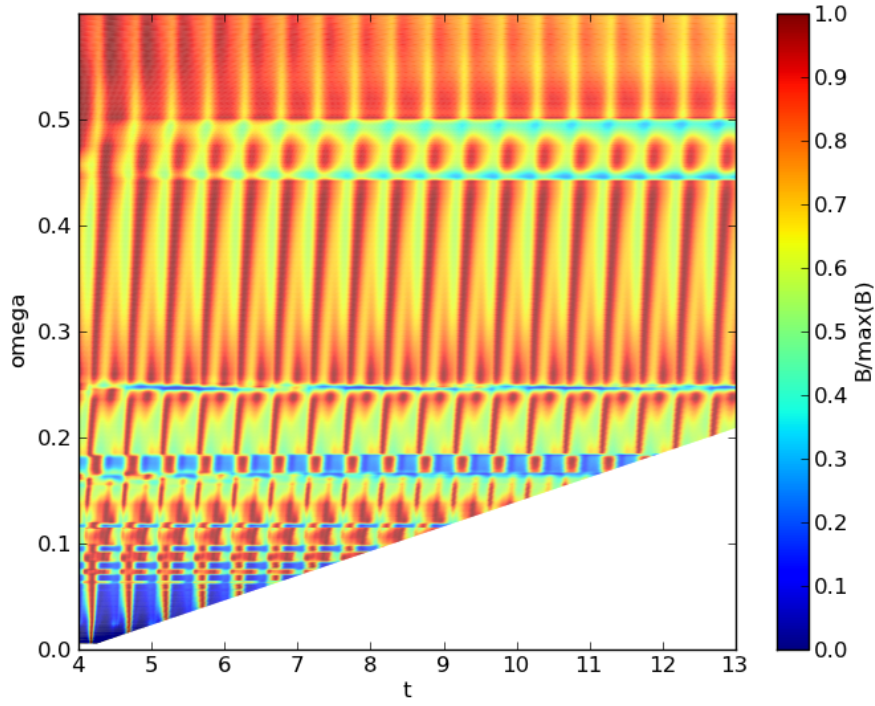


FIGURE 5.7 – Diagramme (t, ω) de l'équation d'induction pour $\varepsilon = 0.5$. En abscisse, le temps sur plusieurs périodes du forçage (de période 1). En ordonnées, ω . Code de couleur : valeur de $\|\mathbf{B}\|^2$ à l'instant t , ramené à une croissance nulle sur une période.

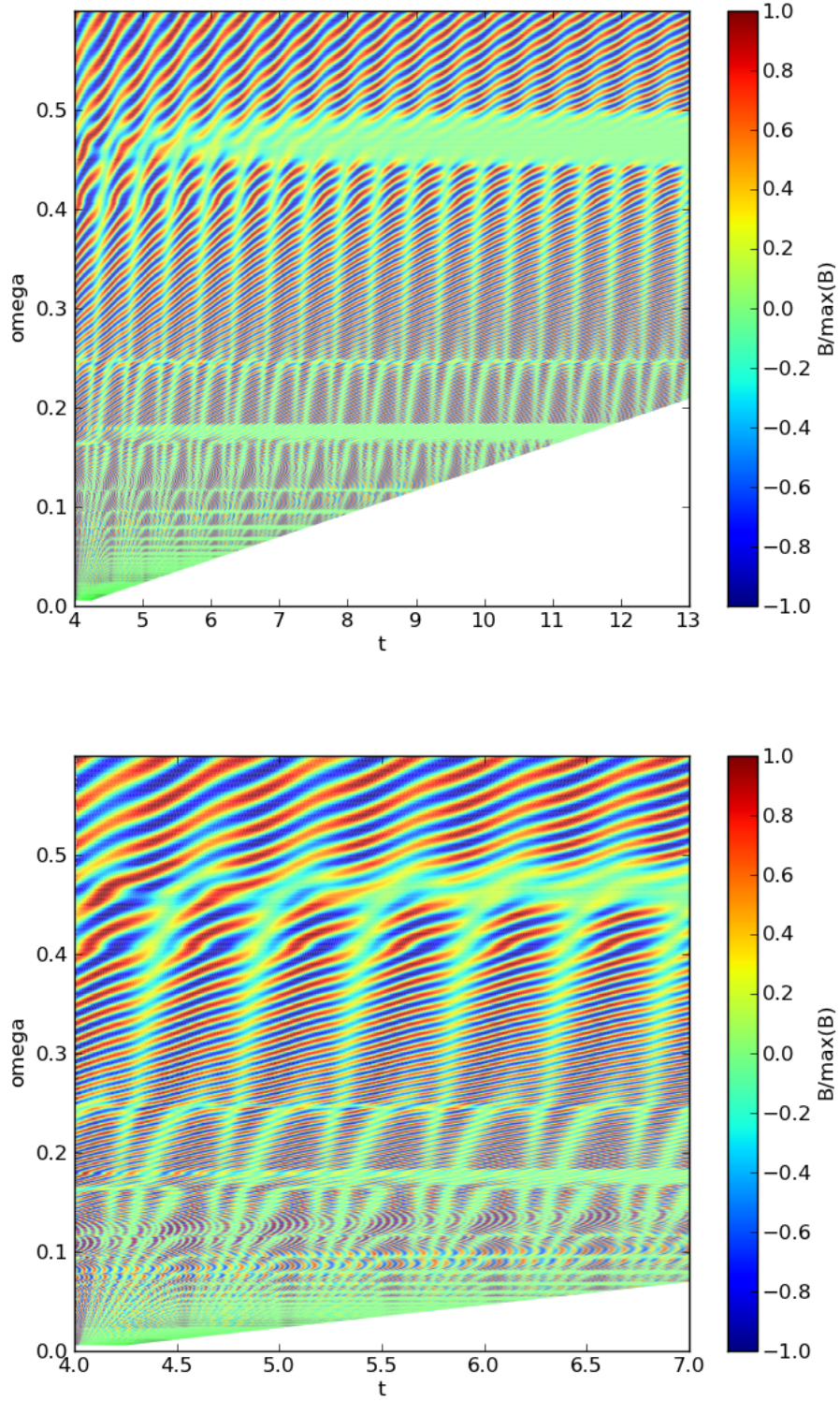


FIGURE 5.8 – Diagramme (t, ω) de l'équation d'induction pour $\varepsilon = 0.5$. En abscisse, le temps sur plusieurs périodes du forçage (de période 1). En ordonnées, ω . Code de couleur : valeur de $\hat{B}_x(0, 1, 0)$ à l'instant t , ramené à une croissance nulle sur une période.

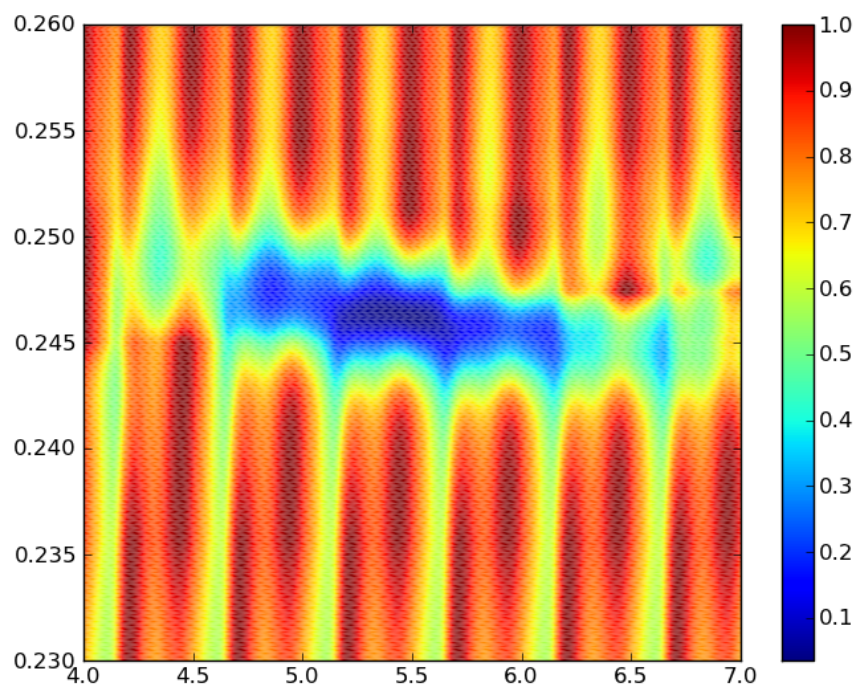


FIGURE 5.9 – Zoom sur la figure 5.7 à proximité d'une zone stable

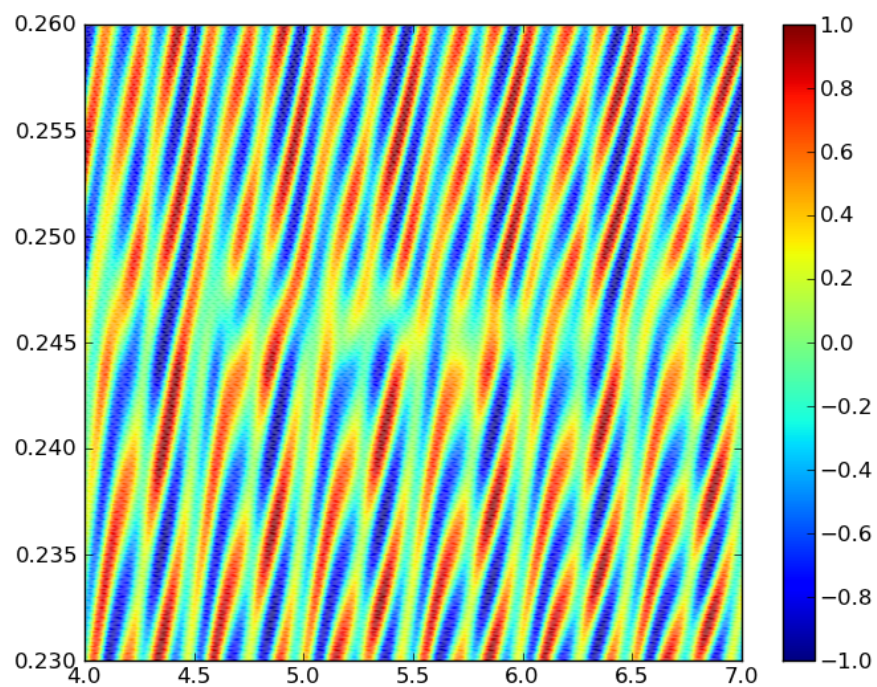
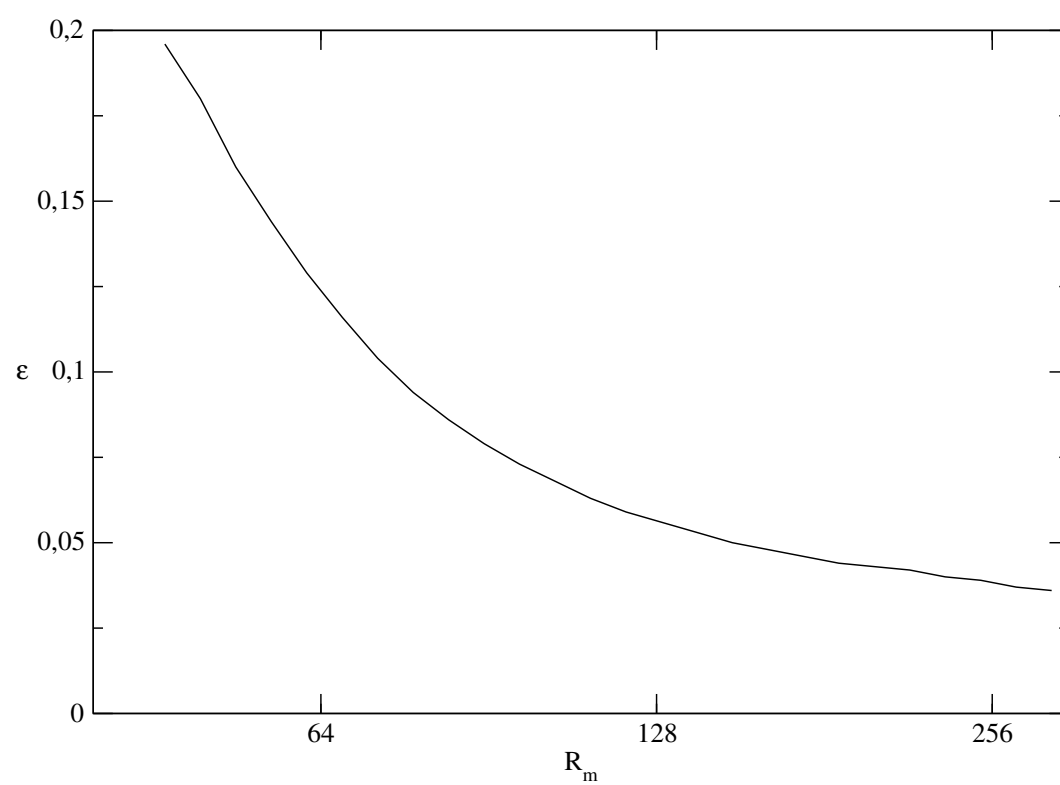


FIGURE 5.10 – Zoom sur la figure 5.8 à proximité d’une zone stable

FIGURE 5.11 – Amplitude de coupure en ε en fonction de R_m

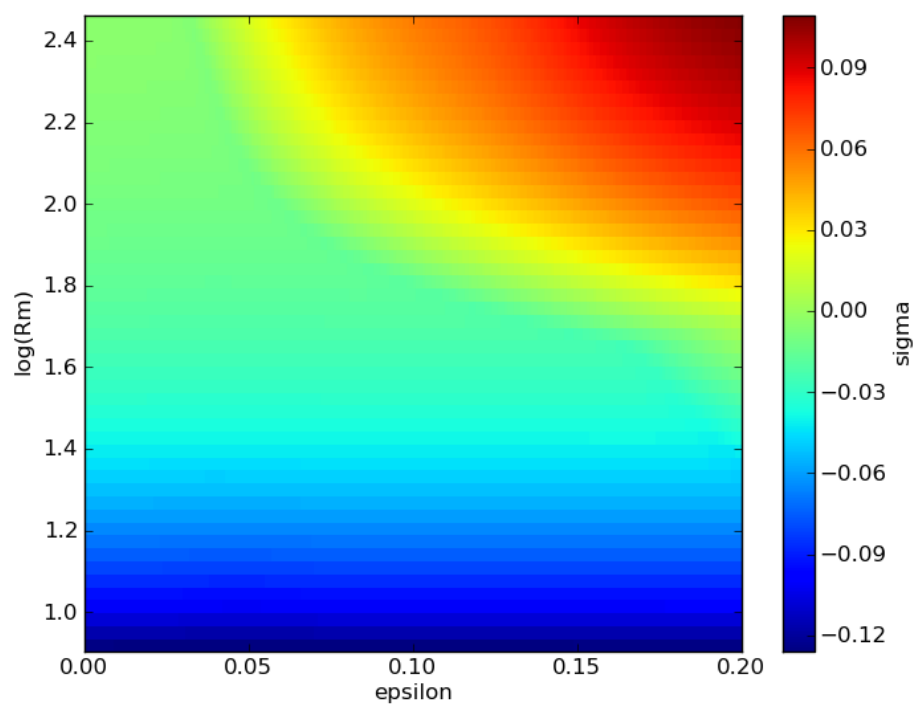


FIGURE 5.12 – Taux de croissance maximal (code de couleur) en fonction de R_m (en ordonnées) et ϵ (en abscisses) pour $\omega = 0.25$

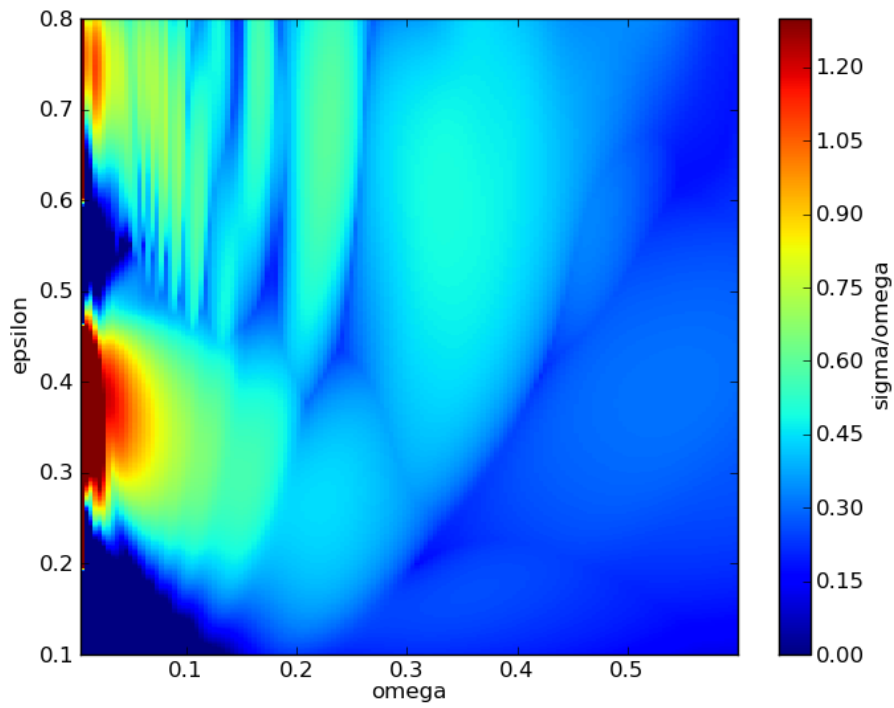


FIGURE 5.13 – Diagramme de stabilité de $|\mathbf{B}|^2$ pour $R_m = 200$. Abscisses : ω . Ordonnées : ε . Code de couleur : taux de croissance réel de $|\mathbf{B}|^2$ ramené à une période 2π du forçage.

Perspectives et conclusion

Au moment de la rédaction de cette thèse, plusieurs travaux de recherche sont encore en cours.

Le premier concerne la résolution numérique du système magnétohydrodynamique complet incluant également l'évolution de la température, en utilisant une architecture GPU. Ce travail est réalisé en collaboration avec Alexandre Cameron (en stage de Master 2) et Emmanuel Dormy. L'avantage de l'utilisation d'une architecture GPU est que celle-ci est prévue pour du calcul massivement parallèle : bien qu'une carte GPU ne contienne généralement qu'une trentaine de threads, on peut espérer obtenir un facteur bien supérieur à 30 sur la vitesse des calculs dès lors qu'on optimise ces derniers ainsi que les accès en mémoire. Par exemple, des accès simultanés contigus en mémoire sont largement préférables à des accès décalés, et si tous les threads réalisent simultanément le même calcul (avec des données différentes) les performances sont encore améliorées.

Ce genre de considérations n'existe pas pour un CPU, qui ne partage ni sa mémoire cache ni le code exécuté. La principale limitation des cartes GPU réside dans la transmission de données entre les cartes GPU, qui doit nécessairement passer par le CPU auquel elles sont rattachées (transmissions qui sont nécessaires dès lors qu'on a plus d'une carte et qu'on veut communiquer les valeurs frontières pour une approche en décomposition de domaine). Heureusement, ces transmissions de données sont indépendantes des calculs et peuvent être faites en parallèle, ce qui ajoute une possibilité supplémentaire d'optimisation.

D'un point de vue théorique, il n'existe pas encore de résultat mathématique pour le régime des grands nombres de Reynolds magnétiques qui soit aussi général que les cas de Reynolds modérés et évanescents démontrés dans cette thèse. Plusieurs tentatives ont été menées plus ou moins formellement par Soward et Gilbert. Ce régime de R_m fait actuellement l'objet d'une étude avec David Gérard-Varet.

L'étude d'un système plus complet, comme les équations des plasmas (multi-fluides) ou la prise en compte de la température (qui intervient *via* la densité de masse) permettent de produire des résultats numériques en accord avec les observations expérimentales, mais manquent encore cruellement de support mathématique.

L'écoulement $A:B:C$ pour $R_m < 8$ est également un point intéressant à étudier, et ce pour deux raisons. D'une part, il est bien plus aisé de descendre dans les

petites valeurs de R_m (à la nuance près qu'ici on est limité par le fait qu'on souhaite suivre un sous-mode). D'autre part le comportement des oscillations est différent de celui observé jusqu'à présent : sur l'étude préliminaire, on obtient une variation de l'amplitude des oscillations en R_m , effet qui n'avait pas été observé sur la gamme de Reynolds magnétiques étudiée.

Une autre étude possible à mener avec le code $A:B:C$ concerne l'hélicité magnétique $\iiint \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ (où $\mathbf{A}$ est le potentiel vecteur, $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$) qui est une quantité conservée au cours du temps lorsque R_m est infini. L'étude des hélicités des modes propres (variation en R_m) peut donner des informations : en l'absence d'effets positifs, la seule façon pour qu'un mode instable conserve son hélicité est que celle-ci soit nulle (car elle croît en $\|\mathbf{B}\|^2$ au cours du temps).

Conclusion

Cette thèse apporte de nouveaux résultats concernant la magnétohydrodynamique "single fluid". Ce système est l'un des systèmes MHD les plus simples parmi ceux utilisés actuellement, mais pose encore de nombreux problèmes et questions.

De nombreux autres exemples et extensions de ce système font, de façon plus ou moins complète, l'objet d'études de nos jours, et posent de nombreuses questions, aussi bien au niveau théorique que numérique et expérimental. L'effet dynamo reste encore loin d'être bien compris de nos jours.

Parmi les aspects théoriques qui ont été laissés sous silence ici, on trouve, entre autres : la prise en compte du terme de Coriolis dans l'équation de Navier-Stokes, la température, le modèle bi-fluide (pour les plasmas). Très peu de résultats théoriques (voire aucun pour certains modèles) ont été obtenus sur ces systèmes plus complexes ; bien souvent, des calculs numériques n'ont aucun support théorique et sont utilisés uniquement pour la concordance de leurs résultats avec les observations.

Bibliographie

- [ADN03] V. ARCHONTIS, SBF DORCH et Åke NORDLUND : Numerical simulations of kinematic dynamo action. *Astronomy and Astrophysics*, 397(2):393–399, 2003.
- [ADN07] V. ARCHONTIS, SBF DORCH et Å. NORDLUND : Nonlinear mhd dynamo operating at equipartition. *Astronomy and Astrophysics*, 472(3):715–726, 2007.
- [AK83] VI ARNOLD et EI KORKINA : The growth of a magnetic field in the three-dimensional steady flow of an incompressible fluid. *Moskovskii Universitet Vestnik Serii Matematika Mekhanika*, 1:43–46, 1983.
- [Ale11] A. ALEXAKIS : Searching for the fastest dynamo : Laminar ABC flows. *Physical Review E*, 84(2):026321, 2011.
- [Arn65] VI ARNOLD : Sur la topologie des écoulements stationnaires des fluides parfaits. *CR Acad. Sci. Paris*, 261:17–20, 1965.
- [Arn87] V.I. ARNOL'D : On the evolution of a magnetic field under the action of transport and diffusion. *Amer. Math. Soc. Transl.*, 137(2):119–129, 1987.
- [AZRS81] VI ARNOL'D, Y.B. ZEL'DOVICH, AA RUZMAIKIN et DD SOKOLOV : Magnetic field in a stationary flow with stretching in riemannian space. *Sov. Phys.-JETP (Engl. Transl.) ; (United States)*, 54(6), 1981.
- [Bou11] Ismaël BOUYA : Instability of the magnetohydrodynamics system at small but finite reynolds number. 2011.
- [CG95] S. CHILDRESS et A.D. GILBERT : *Stretch, twist, fold : the fast dynamo*. Springer-Verlag Berlin and Heidelberg, 1995.
- [CGP05] A. COURVOISIER, A.D. GILBERT et Y. PONTY : Dynamo action in flows with cat's eyes. *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, 99(5):413–429, 2005.
- [Chi67] Stephen CHILDRESS : Construction of steady-state hydromagnetic dynamos. i spatially periodic fields. *Report MF-53, Courant Institute of Mathematical Sciences*, 1967.
- [Chi79] Stephen CHILDRESS : Alpha-effect in flux ropes and sheets. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 20:172–180, 1979.

- [CHQZ06] Claudio CANUTO, M Youssuff HUSSAINI, Alfio QUARTERONI et Thomas A ZANG : *Spectral methods*. Springer, 2006.
- [DFG⁺86] T. DOMBRE, U. FRISCH, JM GREENE, M. HENON, A. MEHR et AM SOWARD : Chaotic streamlines in the ABC flows. *J. Fluid Mech*, 167:353–391, 1986.
- [DGV08] Emmanuel DORMY et David GERARD-VARET : Time scales separation for dynamo action. *EPL (Europhysics Letters)*, 81:64002, 2008.
- [Dor00] SBF DORCH : On the structure of the magnetic field in a kinematic ABC flow dynamo. *Physica Scripta*, 61:717, 2000.
- [FO88a] J.M. FINN et E. OTT : Chaotic flows and fast magnetic dynamos. *Physics of Fluids*, 31:2992, 1988.
- [FO88b] J.M. FINN et E. OTT : Chaotic flows and magnetic dynamos. *Physical review letters*, 60(9):760–763, 1988.
- [FP03] Stephan FAUVE et François PETRELIS : The dynamo effect. *Peyresq lectures on Nonlinear phenomena*, 2:1–64, 2003.
- [FPS06] Susan FRIEDLANDER, Nataša PAVLOVIĆ et Roman SHVYDKOY : Non-linear instability for the navier-stokes equations. *Communications in mathematical physics*, 264(2):335–347, 2006.
- [FSV97] Susan FRIEDLANDER, W. STRAUSS et Misha Mikhail VISHIK : Nonlinear instability in an ideal fluid. In *Annales de l’Institut Henri Poincaré/Analyse non lineaire*, volume 14, pages 187–209. Elsevier, 1997.
- [Gal12] D. GALLOWAY : Abc flows then and now. *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics*, 106(4-5):450–467, 2012.
- [GF84] D. GALLOWAY et U. FRISCH : A numerical investigation of magnetic field generation in a flow with chaotic streamlines. *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics*, 29(1):13–18, 1984.
- [GF86] D. GALLOWAY et U. FRISCH : Dynamo action in a family of flows with chaotic streamlines. *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics*, 36(1):53–83, 1986.
- [GF87] D. GALLOWAY et U. FRISCH : A note on the stability of a family of space-periodic beltrami flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 180(1):557–564, 1987.
- [GH97] J. GUCKENHEIMER et P. HOLMES : *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*, volume 42. Springer-Verlag New-York, 1997.
- [Gil88] A.D. GILBERT : Fast dynamo action in the ponomarenko dynamo. *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics*, 44:241–258, 1988.
- [Gil92] A.D. GILBERT : Magnetic field evolution in steady chaotic flows. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A : Physical and Engineering Sciences*, 339(1655):627–656, 1992.

- [Gil03] Andrew D. GILBERT : Dynamo theory. *Handbook of mathematical fluid dynamics*, 2(1):355–441, 2003.
- [Gis09] C.J.P. GISSINGER : A numerical model of the vks experiment. *EPL (Europhysics Letters)*, 87(3):39002, 2009.
- [GLP⁺04] Agris GAILITIS, Olgerts LIELAUSIS, Ernests PLATACIS, Gunter GERBETH et Frank STEFANI : Riga dynamo experiment and its theoretical background. *Physics of Plasmas*, 11:2838, 2004.
- [GP92] DJ GALLOWAY et MRE PROCTOR : Numerical calculations of fast dynamos in smooth velocity fields with realistic diffusion. *Nature*, 356:691–693, 1992.
- [GS95] Y. GUO et W.A. STRAUSS : Nonlinear instability of double-humped equilibria. In *Annales de l'Institut Henri Poincaré. Analyse non linéaire*, volume 12, pages 339–352. Elsevier, 1995.
- [GSP92] B. GALANTI, PL SULEM et A. POUQUET : Linear and non-linear dynamos associated with ABC flows. *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics*, 66(1-4):183–208, 1992.
- [GV06] David GÉRARD-VARET : Oscillating solutions of incompressible magnetohydrodynamics and dynamo effect. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 37(3):815–840, 2006.
- [GV07] David GÉRARD-VARET : Weakly nonlinear analysis of the alpha effect. *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics*, 101(3-4):171–184, 2007.
- [GVR07] David GÉRARD-VARET et Frédéric ROUSSET : Shear layer solutions of incompressible MHD and dynamo effect. In *Annales de l'Institut Henri Poincaré/Analyse non linéaire*, volume 24, pages 677–710. Elsevier, 2007.
- [Hen66] M. HENON : Sur la topologie des lignes de courant dans un cas particulier. *CR Acad. Sci. Paris*, 262:312–314, 1966.
- [Ise09] Arieh ISERLES : *A first course in the numerical analysis of differential equations*, volume 44. Cambridge University Press, 2009.
- [Kat95] Tosio KATŌ : *Perturbation theory for linear operators*. Springer Verlag, 1995.
- [KY95] I KLAPPER et LS YOUNG : Rigorous bounds on the fast dynamo growth rate involving topological entropy. *Communications in mathematical physics*, 173(3):623–646, 1995.
- [Lar19] Joseph LARMOR : How could a rotating body such as the sun become a magnet. *Rep. Brit. Assoc. Adv. Sci*, 159, 1919.
- [LF93] Y.T. LAU et J.M. FINN : Fast dynamos with finite resistivity in steady flows with stagnation points. *Physics of Fluids B : Plasma Physics*, 5:365, 1993.
- [Mof78] Henry K. MOFFATT : *Field Generation in Electrically Conducting Fluids*. Cambridge University Press, Cambridge, London, New York, Melbourne, 1978.

- [NPR05] A. NOVIKOV, G. PAPANICOLAOU et L. RYZHIK : Boundary layers for cellular flows at high Péclet numbers. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 58(7):867–922, 2005.
- [Ota88] NIELS F OTANI : Computer simulation of fast kinematic dynamos. *EOS Transactions, American Geophysical Union*, 64(44):1366, 1988.
- [Ota93] N.F. OTANI : A fast kinematic dynamo in two-dimensional time-dependent flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 253:327–340, 1993.
- [Par55] Eugene Newman PARKER : Hydromagnetic dynamo models. *The Astrophysical Journal*, 122:293–314, 1955.
- [PFDV09] F. PÉTRÉLIS, S. FAUVE, E. DORMY et J.P. VALET : Simple mechanism for reversals of earth’s magnetic field. *Physical review letters*, 102(14):144503, 2009.
- [Pod99] O.M. PODVIGINA : Spatially-periodic steady solutions to the three-dimensional navier-stokes equation with the abc-force. *Physica-Section D*, 128(2):250–272, 1999.
- [Pon73] Y.B. PONOMARENKO : On the theory of hydromagnetic dynamos. *Zh. Prikl. Mech. Tech. Fiz. (USSR)*, 6:47–51, 1973.
- [RBM⁺08] Florent RAVELET, Michaël BERHANU, Romain MONCHAUX, Sébastien AUMAÎTRE, Arnaud CHIFFAUDEL, François DAVIAUD, Bérengère DUBRULLE, Mickaël BOURGOIN, Philippe ODIER, Jean-François PINTON, Nicolas PLIHON, Romain VOLK, Stéphan FAUVE, Nicolas MORDANT et François PÉTRÉLIS : Chaotic dynamos generated by a turbulent flow of liquid sodium. *Physical review letters*, 101(7):74502, 2008.
- [Rob70] G.O. ROBERTS : Spatially periodic dynamos. *Philosophical Transactions for the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, pages 535–558, 1970.
- [Rob72] G.O. ROBERTS : Dynamo action of fluid motions with two-dimensional periodicity. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 271(1216):411–454, 1972.
- [SM01] Robert STIEGLITZ et Ulrich MÜLLER : Experimental demonstration of a homogeneous two-scale dynamo. *Physics of Fluids*, 13:561, 2001.
- [Sow87] Andrew M. SOWARD : Fast dynamo action in a steady flow. *J. Fluid Mech*, 180:267–295, 1987.
- [Sow94] A.M. SOWARD : On the role of stagnation points and periodic particle paths in a two-dimensional pulsed flow fast dynamo model. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 76(1-3):181–201, 1994.
- [Tem01] Roger TEMAM : *Navier-Stokes equations : theory and numerical analysis*. Amer Mathematical Society, 2001.
- [TFD06] R. TEYSSIER, S. FROMANG et E. DORMY : Kinematic dynamos using constrained transport with high order godunov schemes and adaptive mesh refinement. *Journal of Computational Physics*, 218(1):44–67, 2006.

-
- [VF93] Misha Mikhail VISHIK et Susan FRIEDLANDER : Dynamo theory methods for hydrodynamic stability. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 72(2):145–180, 1993.
- [Vis89] Misha Mikhail VISHIK : Magnetic field generation by the motion of a highly conducting fluid. *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics*, 48(1):151–167, 1989.
- [Yee66] Kane YEE : Numerical solution of initial boundary value problems involving maxwell's equations in isotropic media. *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, 14(3):302–307, 1966.

