UNIVERSITÉ PARIS 7 - DENIS DIDEROT

THÈSE DE DOCTORAT

SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES

Pour obtenir le grade de Docteur de l'Université de Paris 7

Présentée par **Laurent Fargues**

Sujet

Correspondances de Langlands locales dans la cohomologie des espaces de Rapoport-Zink

Soutenue le 19 décembre 2001 devant le jury composé de :

H.Carayol (Université Louis Pasteur, Strasbourg)	rapporteur et président du jury
M.Harris (Paris 7)	directeur de thèse
G.Laumon (CNRS, Paris Sud)	
M.Raynaud (Paris Sud)	
U.Stuhler (Université Göttingen)	rapporteur
J.L. Waldspurger (CNRS, Paris 7)	

Résumé :

M.Harris et R.Taylor ont démontré la correspondance de Langlands locale pour les groupes linéaires sur des corps p-adiques. Leur méthode consiste à construire cette correspondance (ainsi que la correspondance de Jacquet-Langlands) dans la cohomologie d'espaces de modules de groupes p-divisibles appelés espaces de Lubin-Tate. Dans cette thèse nous généralisons ces travaux en décomposant la partie supercuspidale de la cohomologie d'espaces de modules de groupes p-divisibles plus généraux (des espaces Rapoport-Zink non-ramifiés basiques) en termes de correspondances de Langlands locales. Ces espaces de cohomologie sont munis d'une action d'un produit de trois groupes, $J_b \times G(\mathbb{Q}) \times W_E$ où G est un groupe réductif sur $\mathbb{Q}_p$, J_b les points à valeurs dans $\mathbb{Q}_p$ d'une forme intérieure de G et W_E le groupe de Weil d'une extension de degré finie de $\mathbb{Q}_p$. Nous considérons les cas où G est la restriction des scalaires d'une extension de degré fini non-ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ d'un groupe linéaire, mais également le cas où G est un groupe de similitudes unitaires non-ramifié en trois variables.

Mots clés : Correspondances de Langlands, Groupes p-divisibles, Cohomologie étale des variétés rigides, Variétés de Shimura, Représentations automorphes

Abstract :

M.Harris and R.Taylor have proved the local Langlands correspondence for linear groups over p-adic fields. They construct this correspondence (and the Jacquet-Langlands correspondence) in the cohomology of moduli spaces of p-divisible groups, the Lubin-Tate spaces. In this thesis we generalize this work. We decompose the supercuspidal part of the cohomology of more general moduli spaces (basic unramified Rapoport-Zink spaces) in terms of local Langlands correspondences. These cohomology spaces have an action of a product of three groups, $J_b \times G(\mathbb{Q}) \times W_E$ where G is reductive over $\mathbb{Q}_p$, J_b is the $\mathbb{Q}_p$-points of an inner form of G and W_E the Weil group of a finite extension of $\mathbb{Q}_p$. We consider the case when G is the scalar restriction from a finite unramified extension of $\mathbb{Q}_p$ of a linear group, but also the case when G is an unramified similitude unitary group in three variables.

Keywords : Langlands Correspondences, p-divisible groups, Etale cohomology of rigid spaces, Shimura varieties, Automorphic representations

Remerciements

Je souhaite en premier lieu exprimer ma reconnaissance à Henri Carayol et Ulrich Stuhler qui ont accepté d'être les rapporteurs de ma thèse, ainsi qu'à Gérard Laumon, Michel Raynaud et Jean-Loup Waldspurger qui ont accepté de faire partie du jury de celle-ci.

Je suis reconnaissant à Jacques Tilouine qui m'a fait connaître Michael Harris. Sans lui cette thèse n'existerait pas.

Durant ces années de thèse j'ai pu profiter du niveau exceptionnel des personnes travaillant dans le domaine automorphe, en particulier grâce au séminaire automorphe du jeudi. Je remercie chaleureusement tous ses participants et plus particulièrement Pascal Boyer, Jean-François Dat et Vuong N'Guyen Chu.

Je remercie toute ma famille ainsi que mes camarades de Lyon, plus particulièrement Jean et Pierre-Alexandre pour leur amitié et leur soutient durant l'élaboration de ce travaille.

Je suis également reconnaissant envers tous ceux qui ont partagé un jour ou l'autre avec moi le bureau 7C4 à Chevaleret. Ils ont créé un climat propice à la réflexion mathématique.

Michael Harris m'a généreusement fait profiter de son immense savoir ainsi que de ses ingénieuses idées. Il m'a constamment soutenu en réussissant à me transmettre son enthousiasme de tous les jours, même dans les moments les plus durs. Je l'en remercie vivement.

TABLE DES MATIÈRES

Introduction vii

Partie I. Variétés de Shimura de type P.E.L. et espaces de Rapoport-Zink 1

1. Variétés de Shimura de type P.E.L. non ramifiées 3
1.1. Donnée de Shimura de type P.E.L. 3
1.2. Variétés de Shimura sur E 5
1.3. Systèmes locaux 7
1.4. Modèles entiers 7
1.5. Structure de $G(\mathbb{Q}_p)$ 8

2. Espaces de Rapoport-Zink 11
2.1. Isocristaux munis de structures additionnelles : le cas de GL_n 11
2.2. Généralités sur les espaces de Rapoport-Zink 14
2.3. Continuité de l'action de J_b 20
2.4. Un théorème de finitude pour l'action de J_b 21
2.5. Espaces de Rapoport-Zink rigides 31
2.6. Cohomologie de $\breve{\mathcal{M}}_K$ 36

3. Uniformisation des variétés de Shimura de type P.E.L. 43
3.1. Stratification par la classe d'isogénie du groupe p-divisible 43
3.2. Uniformisation de Rapoport-Zink 44
3.3. Uniformisation rigide 48

Partie II. Une suite spectrale d'Hochschild-Serre pour l'uniformisation de Rapoport-Zink 51

4. Suite spectrale de Hochschild-Serre 53
4.1. Suite spectrale de Cohomologie de Čech équivariante 53
4.2. Suite spectrale pour l'action d'un groupe discret 56
4.3. Une suite spectrale de Hochschild-Serre pour l'uniformisation de Rapoport-Zink 61

5. Application à la strate basique : "une formule de Matsushima p-adique" 75

Partie III. Contribution de la cohomologie de la strate basique 79

6. Formule de Lefschetz sur la fibre spéciale 81
6.1. Rappels sur les correspondances cohomologiques 82
6.2. Le théorème de Fujiwara 88
6.3. Spécialisation des correspondances cohomologiques algébriques 88
6.4. Cycles évanescents analytiques rigides 93
6.5. Correspondances cohomologiques analytiques rigides 99
6.6. Spécialisation des correspondances cohomologiques analytiques rigides 101
6.7. Compatibilité entre les spécialisations algébriques et analytiques rigides 102
6.8. Résumé des différentes fonctorialités 103
6.9. Des coefficients de torsion aux coefficients ℓ-adique 106
6.10. Formule des traces générale 110
6.11. Modèles des variétés de Shimura et des espaces de Rapoport-Zink en niveau parahorique 114
6.12. La formule des traces pour la cohomologie des strates d'une variété de Shimura de type P.E.L. 117

7. Formule de Lefschetz sur la fibre générique 123
7.1. Généralités sur les points fixes sur la fibre générique 123
7.2. Points fixes isolés 128
7.3. Le cas des variétés de Shimura de type P.E.L. 129
7.4. Formule de Lefschetz 132

8. Caractérisation des éléments de Groth$(G(\mathbf{A}_f)) \times W_{E_\nu}$ par leurs traces .. 133
8.1. Un lemme d'algèbre linéaire 133
8.2. Séparation des représentations sphériques par les traces de fonctions à support dans les éléments réguliers 134
8.3. Le théorème 135

9. Le théorème 139

Partie IV. Application à la cohomologie des espaces de Rapoport-Zink de type E.L. et P.E.L. 145

10. 147
10.1. Espaces de type E.L. non ramifiés 147
10.2. espaces de type P.E.L. 153

A. Résultats concernant les représentations automorphes des groupes unitaires, leur cohomologie et les représentations galoisiennes associées 157
A.1. Hypothèses générales 157
A.2. Résultats de Clozel, Harris et Labesse sur la pureté de la cohomologie des représentations automorphes 158
A.3. Résultats de Clozel, Harris et Labesse sur le changement de base quadratique stable 158
A.4. Résultats de Harris et Labesse sur la comparaison entre la formule des traces pour deux groupes unitaires formes intérieures 160

A.5. Résultats de Clozel, Harris, Kottwitz et Taylor sur les représentations galoisiennes . . . 160
A.6. Résultat de Kottwitz sur les représentations galoisiennes obtenues dans la cohomologie des variétés de Shimura en une place de bonne réduction 161
A.7. Application aux représentations galoisiennes obtenues dans la cohomologie des variétés de Shimura de type P.E.L. de signature quelconque 161

B. Résultats concernant les types associés aux représentations des groupes p-adiques . . . 171
B.1. Quelques propriétés générales des types associés aux représentations supercuspidales des groupes p-adiques ([**9**]) . . . 171
B.2. Types pour GL_n . . . 172
B.3. Types pour les groupes unitaires non ramifiés . . . 172

C. Résultats de Rogawski sur $U(3)$ . . . 175
C.1. . . . 175

D. Isocristaux munis de structures additionnelles : le cas des groupes unitaires . . . 179
D.1. Groupes unitaires en un nombre pair de variables . . . 179
D.2. Groupes unitaires en un nombre impair de variables . . . 183

E. Espaces adiques et espaces analytiques . . . 187
E.1. Différents espaces . . . 187
E.2. Différents morphismes étales . . . 189

F. Cohomologie ℓ-adique des espaces analytiques . . . 191
F.1. Propriétés générales . . . 191
F.2. Cohomologie ℓ-adique des espaces analytiques quasi-algébriques 195

Bibliographie . . . 199

INTRODUCTION

Motivation générale

Dans l'article [**45**] Langlands a prédit l'existence d'un lien entre les motifs de Grothendieck définis sur des corps de nombres et certaines représentations automorphes des groupes linéaires. Pour certaines formes modulaires un cas particulier bien connu de cette correspondance est réalisé dans la cohomologie des courbes modulaires. Plus généralement, soit G un groupe réductif défini sur $\mathbb{Q}$ possédant une donnée de Shimura (G, X). Langlands a donné une description conjecturale du motif découpé par une représentation automorphe Π de G dans la variété de Shimura $\mathrm{Sh}(G, X)$ en fonction du L-paramètre (conjectural) de Π ([**45**]).

Dans cette thèse, nous démontrons des analogues locaux de cette conjecture en des places non-archimédiennes. Qu'entendons nous par analogue local ? En la place archimédienne de $\mathbb{Q}$ l'objet local équivalent naturel de la variété de Shimura $\mathrm{Sh}(G, X)$ est l'espace symétrique hermitien X uniformisant la variété analytique $\mathrm{Sh}(G, X)(\mathbb{C})$, tandis que les objets associés aux représentations automorphes de G sont les représentations irréductibles du groupe de Lie $G(\mathbb{R})$ au sens d'Harisch-Chandra. Les travaux de Schmid étudient ainsi la contribution des séries discrète de $G(\mathbb{R})$ dans la cohomologie L^2 de X (l'analogue local de l'identification de l'action du groupe de Galois motivique consisterait dans ce cas à déterminer une structure de Hodge sur ces espaces de cohomologie). Les analogues non-archimédiens en un premier p de $\mathbb{Q}$ de l'espace symétrique X sont les espaces rigides p-adiques de Rapoport-Zink ([**51**]) uniformisant certains ouverts rigides des variétés de Shimura $\mathrm{Sh}(G, X)$ (ils ne sont pas définis pour tous les couples (G, X)).

Espaces de Rapoport-Zink

Pour comprendre la définition des espaces de Rapoport-Zink rappelons que la plupart des variétés de Shimura devraient se décrire comme des espaces de modules de motifs. L'espace X s'interprète ainsi comme la contrepartie locale archimédienne de ce point de vue puisque c'est un espace de modules de structures de Hodge. Supposons que les variétés $\mathrm{Sh}(G, X)$ s'interprètent comme espaces de modules de variétés abéliennes. Les espaces de Rapoport-Zink sont alors la contrepartie p-adique de ce point de vue : ce sont des espaces de modules de groupes p-divisibles munis de structures de niveaux.

Contrairement à X les espaces de Rapoport-Zink ne sont pas simplement connexes ; il s'agit d'une tour d'espaces rigides $(\breve{\mathcal{M}}_K)_K$ indexée par les sous groupes compacts ouverts de $G(\mathbb{Q}_p)$ telle que si K' est un sous groupe compact ouvert de K, le morphisme

de transition $\breve{\mathcal{M}}_{K'} \to \breve{\mathcal{M}}_K$ est un revêtement étale. Cette tour est munie d'une action de $G(\mathbb{Q}_p)$. Un deuxième groupe algébrique p-adique entre en jeux, une forme intérieure d'un sous groupe de Levi de la forme intérieure quasi-déployée de $G_{\mathbb{Q}_p}$. On le note J_b. Celui-ci agit sur chaque espace $\breve{\mathcal{M}}_K$ de manière compatible aux morphismes de transition. Le troisième groupe entrant en jeu est le groupe de Weil W_E d'une extension de degré fini de $\mathbb{Q}_p$.

Esquisse des résultats

Considérons la cohomologie étale ℓ-adique à support compact au sens de Berkovich des $\breve{\mathcal{M}}_K$ pour un $\ell \neq p$,

$$H_c^\bullet(\breve{\mathcal{M}}_K, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$$

Lorsque K varie celle ci est munie d'une action lisse de $G(\mathbb{Q}_p) \times J_b \times W_E$.

Les résultats principaux de cette thèse concernent des espaces de Rapoport-Zink pour lesquels le groupe J_b est une forme intérieure de $G_{\mathbb{Q}_p}$. Ce sont ceux qui uniformisent les strates supersingulières des variétés de Shimura de type P.E.L. non ramifiées définies dans [**36**]. Le premier résultat concerne le cas où $G(\mathbb{Q}_p) = \mathbf{GL}_n(F)$ pour une extension $F|\mathbb{Q}_p$ non ramifiée, et $J_b = D^\times$ où D est une algèbre à division sur F. Soit JL la correspondance de Jacquet-Langlands qui associe à une représentation irréductible de $D^\times$ une représentation de la série discrète de $\mathbf{GL}_n(F)$. Soit ρ une représentation de J_b telle que $\mathrm{JL}(\rho)$ soit supercuspidale. Soit π une représentation supercuspidale de $G(\mathbb{Q}_p)$. D'après la correspondance de Langlands locale ([**26**]), à π est associé un certain L-paramètre ψ. Nous démontrons que $\rho \otimes \pi$ intervient virtuellement dans la somme alternée de la cohomologie des espaces de Rapoport-Zink ssi $\check{\pi} = \mathrm{JL}(\rho)$. Nous démontrons qu'alors la représentation galoisienne découpée par $\rho \otimes \pi$ s'exprime simplement en fonction du L-paramètre ψ.

Nous démontrons le même type de résultat lorsque $G(\mathbb{Q}_p) = J_b = \mathbf{GL}_n(F)$, la correspondance de Jacquet-Langlands étant alors l'identité.

Nous démontrons également le premier cas de loi de réciprocité non abélienne locale construite géométriquement et associée à des groupes autres que des formes intérieures des groupes linéaires. Plus précisément, il s'agit du cas où $J_b = G(\mathbb{Q}_p) = GU(3)$ est le groupe de similitudes unitaires non ramifié en trois variables. Contrairement au cas précédents, les L-paquets de représentations de $GU(3)$ ne sont pas tous de cardinal 1. Le résultat est alors du même type que précédemment après sommation sur un tel L-paquet.

Conjectures de Kottwitz

Se basant sur la description conjecturale de Langlands du motif, et en particulier de la représentation galoisienne dans la cohomologie ℓ-adique, associé à une représentation automorphe de G dans la variété de Shimura $\mathrm{Sh}(G, X)$, ainsi que sur la formule conjecturale d'Arthur pour la multiplicité d'une représentation automorphe dans un A-paquet discret de G, Kottwitz a formulé une conjecture concernant la contribution d'une représentation "discrète" de $G(\mathbb{Q}_p) \times J_b$ dans les espaces de cohomologie $H_c^\bullet(\breve{\mathcal{M}}_K, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$ ainsi que de la représentation galoisienne associée ([**50**] et [**25**]). Les résultats de cette thèse sont des cas particuliers de ces conjectures.

Énoncés précis

Les résultats principaux de cette thèse sont les suivants :

***Théorème* (théorèmes III.10.1.4 et III.10.1.5).** — *Soit (V, F, b, μ) une donnée locale de Rapoport-Zink de type E.L. non ramifiée simple basique (I.2.2.1.1). Soit $E \subset \overline{\mathbb{Q}_p}$ le corps réflex associé. Soient $\breve{\mathcal{M}}_K = \breve{\mathcal{M}}_K(b, \mu)$ les espaces de Rapoport-Zink associés (I.2.2.2.1).*

1. *Supposons le groupe réductif J_b anisotrope modulo son centre, c'est à dire $J_b = D^\times$ pour une algèbre à division D sur F d'invariant calculé en fonction de μ. Notons JL la correspondance de Jacquet-Langlands. Soit π une représentation irréductible de J_b telle que $JL(\pi)$ soit supercuspidale. L'égalité suivante est vérifiée dans le groupe de Grothendieck $Groth(G(\mathbb{Q}_p) \times W_E)$*

$$\sum_i (-1)^i [\varinjlim_K Hom_{J_b}(H^i_c(\breve{\mathcal{M}}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p, \overline{\mathbb{Q}_\ell}), \pi)]_{cusp} = [JL(\pi)] \otimes [r_\mu \circ \tilde{\sigma}_\ell(JL(\pi))_{|E}] \, |.|^{\frac{-\sum_\tau p_\tau q_\tau}{2}}$$

où $\tilde{\sigma}_\ell$ la correspondance de Langlands locale "absolue" ℓ-adique pour le groupe linéaire (A.7.1) et r_μ la représentation du L-groupe associé (A.7.2) sur E.

2. *Supposons le groupe réductif J_b égal à $G = \mathbf{GL}_n$. Soit π une représentation irréductible supercuspidale de J_b. Il y a une égalité dans $Groth(G(\mathbb{Q}_p) \times W_E)$*

$$\sum_i (-1)^i [\varinjlim_K Hom_{J_b}(H^i_c(\breve{\mathcal{M}}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p, \overline{\mathbb{Q}_\ell}), \pi)]_{cusp} = [\pi] \otimes [r_\mu \circ \tilde{\sigma}_\ell(\pi)_{|E}] \, |.|^{-\sum_\tau \frac{p_\tau q_\tau}{2}}$$

Dans cet énoncé, la donnée de Rapoport-Zink locale est l'analogue non-archimédien local d'une donnée de Shimura.

***Théorème* (théorème III.10.2.2).** — *Soit $(F, *, V, <.,.>, b, \mu)$ une donnée locale de type P.E.L. non ramifiée simple basique (I.2.2.1.2). Supposons $p \neq 2$, $[F : \mathbb{Q}_p]/2$ impair et $\dim_F(V) = 3$. Soit $E \subset \overline{\mathbb{Q}_p}$ le corps réflex associé. Soient $\breve{\mathcal{M}}_K = \breve{\mathcal{M}}_k(b, \mu)$ les espaces de Rapoport-Zink associés (I.2.2.2.2).*

1. *Soit $\psi : W_{\mathbb{Q}_p} \longrightarrow {}^L G$ une classe de conjugaison de L-paramètres vérifiant : $im(\psi)$ n'est pas contenue dans ${}^L B$ pour un sous groupe de Borel B de G. Soit $\Pi(\psi)$ le L-paquet supercuspidal de représentations de $G(\mathbb{Q}_p)$ associé (C.1.4.2). Rappelons que $J_b = G(\mathbb{Q}_p) = GU(3)$. L'égalité suivante est vérifiée dans $Groth(G(\mathbb{Q}_p) \times W_E)$:*

$$\sum_{\pi \in \Pi(\psi)} \left[\varinjlim_K Hom_{J_b}\left(H^\bullet_c(\breve{\mathcal{M}}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p, \overline{\mathbb{Q}_\ell}), \pi\right)\right]_{cusp} = \sum_{\pi \in \Pi(\psi)} [\pi] \otimes [r_\mu \circ \psi_{|W_E}] \, |.|^{-\frac{\sum_\tau p_\tau q_\tau}{4}}$$

*En particulier, si $\Pi(\psi)$ est stable la conjecture de Kottwitz ([**50**],[**25**]) est vérifiée.*

2. *Soit ξ un caractère du groupe endoscopique H de $U(3)$ (appendice C) et $St_H(\xi)$ la représentation de Steinberg associée. Soit $\Pi(St_H(\xi)) = \{\pi^2(\xi), \pi^s(\xi)\}$ le L-paquet transfert endoscopique à $U(3)$ (C.1.6). Soit $\Pi = \{\pi^2, \pi^s\}$ un L-paquet de représentations de $G(\mathbb{Q}_p)$ tel que $\pi^2_{|U(3)} = \pi^2(\xi), \pi^s_{|U(3)} = \pi^s(\xi)$. A Π est associé un L-paramètre $\psi : W_{\mathbb{Q}_p} \times SL_2(\mathbb{C}) \longrightarrow {}^L G$. L'égalité suivante est vérifiée dans*

Groth$(G(\mathbb{Q}_p) \times W_E)$:

$$\left[\varinjlim_{K} \; Hom_{J_b}\left(H_c^\bullet(\breve{\mathcal{M}}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p, \overline{\mathbb{Q}_\ell}), \pi^s\right)\right]_{cusp} + \left[\varinjlim_{K} \; Ext^\bullet_{J_b-lisse}(H_c^\bullet(\breve{\mathcal{M}}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p, \overline{\mathbb{Q}_\ell}), \pi^2)\right]_{cusp}$$

$$= \; [\pi^s] \otimes [r_\mu \circ \psi_{|W_E}] \; |.|^{-\frac{\sum_\tau p_\tau q_\tau}{4}}$$

3. *Soit χ un caractère de $G(\mathbb{Q}_p)$ et $St_G(\chi)$ la représentation de Steinberg associée. L'égalité suivante est vérifiée dans Groth$(G(\mathbb{Q}) \times W_E)$:*

$$\left[Ext^\bullet_{J_b-lisse}\left(H_c^\bullet(\breve{\mathcal{M}}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p, \overline{\mathbb{Q}_\ell}), St_G(\chi)\right)\right]_{cusp} = 0$$

Quelques rappels sur la méthode de Harris,Taylor et Boyer

Rapide historique. — Lubin et Tate avaient déjà considéré (mais formulé différemment bien sûr) le cas particulier $G = \mathbf{GL}_1$ pour lequel les espaces $\breve{\mathcal{M}}$ sont de dimension 0, et donné ainsi une construction géométrique de la loi de réciprocité locale d'Artin. Carayol a ensuite formulé dans [**10**] des conjectures concernant les espaces de déformation de Lubin-Tate de dimension supérieure. Ces conjectures ont été démontrées dans le cas des corps locaux de caractéristique p par Boyer ([**7**]). Harris et Taylor on alors démontré la conjecture de Langlands locale pour les groupes linéaires sur des extensions de degré fini de $\mathbb{Q}_p$ en utilisant cette approche ([**26**]), puisque dans leur cas la représentation r_μ est la représentation standard du groupe linéaire.

Quelques points de [26]. — Pour comprendre la tactique utilisée pour démontrer nos théorèmes il nous faut rappeler brièvement certains points de ([**26**]). Harris et Taylor considèrent des espaces de déformation de $\mathcal{O}_F$-modules divisibles de dimension 1 et de hauteur g, munis d'une structure de Drinfeld de niveau m, et notés $\boldsymbol{Spf}(R_{F,g,m})$ (ce sont des schémas formels). Avec les notations du théorème III.10.1.4 énoncé précédemment, cela correspond à un choix particulier du cocaractère μ. Les espaces $\breve{\mathcal{M}}_K$ associés sont alors une union disjointe infinie des fibres génériques au sens des espaces analytiques des $\boldsymbol{Spf}(R_{F,g,m})$. Leur résultat est énoncé en termes de cycles évanescents ℓ-adiques au sens de Berkovich, cependant les résultats de la section 6.9 de cette thèse permettent de faire le lien avec la cohomologie à support compact des espaces analytiques $\breve{\mathcal{M}}_K$. Avec nos notations, ils démontrent que si ρ est une représentation de J_b telle que $\mathrm{JL}(\rho)$ est supercuspidale alors,

$$[\mathrm{Hom}_{J_b}(H_c^\bullet(\breve{\mathcal{M}}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p, \overline{\mathbb{Q}_\ell}), \rho)] = [\mathrm{JL}(\rho)] \otimes [r_\ell(\mathrm{JL}(\rho))]$$

où $r_\ell(\mathrm{JL}(\rho))$ est une représentation ℓ-adique de W_F. Ils montrent alors que la correspondance définie sur les représentations supercuspidales

$$\pi \longmapsto r_\ell(\pi)$$

est une correspondance de Langlands locale tordue par un caractère non ramifié. Leur démonstration utilise certaines variétés de Shimura, dites "simples", possédant de bon modèles entiers en tout niveau. Elles paramètrent des variétés abéliennes A munies de structures additionnelles (polarisation, action d'une algèbre) et de structures de niveau définies en p en utilisant la théorie des structures de niveau de Drinfeld.

L'un des points clef est que celles-ci sont stratifiées par la classe d'isogénie du groupe p-divisible universel $A[p^\infty]$. La strate minimale, ou strate supersingulière, est de dimension 0, et le complété formel de la variété de Shimura le long de cette strate est uniformisé par une union disjointe de $\boldsymbol{Spf}(R_{F,g,m})$. Un point clef de [**26**] remarqué par Boyer dans [**7**] dans le cadre des $\mathcal{D}$-modules elliptiques et transposé par Harris et Taylor dans le cadre des groupes p-divisibles, est que la cohomologie des autres strates est induite parabolique en p, c'est à dire comme représentation de $G(\mathbb{Q}_p)$. Cela est une conséquence du fait qu'en restriction aux autres strates le groupe p-divisible universel (pas $A[p^\infty]$, mais un déduit de celui-ci) est une extension d'un groupe étale par un groupe du même type que celui associé à la strate supersingulière. Utilisant que les déformations de tels groupes p-divisibles s'expriment simplement en termes des déformations de leur partie connexe, l'astuce de Boyer s'en déduit facilement. Une fois l'astuce de Boyer démontrée on peut facilement relier la partie supercuspidale en p de la cohomologie de la variété de Shimura à celle des espaces $\boldsymbol{Spf}(R_{F,g,m})^{an}$, ce qui est la première étape de la récurrence de [**26**].

L'approche utilisée

Dans [**25**] M. Harris esquisse un programme visant à généraliser l'approche de [**26**]. Certains points de cette thèse sont inspirés de ce programme. Nous utilisons une approche similaire à celle de [**26**] basée sur les travaux de Kottwitz sur les variétés de Shimura de type P.E.L. ([**41**]) et ceux de Rapport et Zink sur l'uniformisation p-adique de ces variétés ([**51**]). Les principaux points de [**26**] ne se transposant pas dans ce cadre général et les solutions que nous y avons apportées sont les suivants :

- Contrairement aux variétés "simples" de [**26**], on ne sait construire en général de bon modèles entiers des variétés de Shimura de type P.E.L. non ramifiées de [**41**] qu'en niveau maximal (compact hyperspécial, ou parahorique) en p. Cela est lié au fait qu'on ne sait pas définir de notion de structure de niveau de Drinfeld sur les groupes p-divisbles de dimension plus grande que un. L'alternative consiste à travailler au niveau des espaces rigides dès que l'on n'est plus en niveau maximal, et par exemple à définir le tube au dessus d'une strate comme étant l'image réciproque par l'application de changement de niveau vers un niveau maximal du tube rigide au dessus de la strate considérée.
- Du point de vue des cycles évanescents, le lien entre la cohomologie des espaces de Rapoport-Zink et celle de la strate supersingulière via l'uniformisation p-adique est quasi-immédiat dans [**26**]. En effet, la fibre spéciale des espaces $\breve{\mathcal{M}}_K$ de [**26**] est de dimension 0. Le lien entre les deux est donc un "problème de combinatoire". Le problème dans notre cadre est que non seulement nous travaillons d'un point de vue rigide, mais en général l'uniformisation de [**51**] n'est pas une simple réécriture du théorème de Serre-Tate ; il y a des familles de déformations par quasi-isogénie "continues horizontales" (c'est à dire non discrètes sur un espace de paramètres de dimension 0) des groupes p-divisibles que nous considérons. Pour y remédier, nous démontrons dans la partie II une suite spectrale de Hochschild-Serre liée à l'uniformisation p-adique rigide qui relie la cohomologie des $\breve{\mathcal{M}}_K$ à celle de la strate supersingulière.
- L'astuce de Boyer n'admet pas de généralisation immédiate. Soit par exemple X un groupe p-divisible sur la clôture algébrique d'un corps fini possédant deux pentes

λ_1, λ_2 avec $0 < \lambda_2 < \lambda_2 < 1$, et une filtration

$$0 \longrightarrow X_{\lambda_2} \longrightarrow X \longrightarrow X_{\lambda_1} \longrightarrow 0$$

où X_{λ_1}, resp. X_{λ_2}, est isoclin de pente λ_1, resp. λ_2. Les déformations de X ne se décrivent pas simplement à partir de celles de X_{λ_2} et de X_{λ_1} comme c'était le cas lorsque X_{λ_1} était étale.

La résolution de ce problème est à l'origine de la partie la plus originale de cette thèse, la partie III. Dans [**25**] M.Harris propose de démontrer que la cohomologie des strates non basiques est induite parabolique en p en utilisant une formule des traces de Lefschetz en géométrie rigide. Malheureusement, à part en dimension 1 ([**27**],[**57**]) une telle formule des traces est loin d'exister (il faudrait comprendre les termes associés aux points fixes dans le bord des compactifications de Huber au sens des espaces adiques). La solution que nous apportons à ce problème est la suivante : utilisant les travaux de Fujiwara ([**20**]) nous démontrons une formule des traces de Lefschetz pour la cohomologie des tubes rigides au dessus des strates des variétés de Shimura que nous considérons. La méthode consiste alors à comparer cette formule des traces "p-adique" à la formule des traces de Lefschetz archimédienne topologique associée à l'uniformisation complexe des variétés de Shimura. Utilisant la conjugaison stable en une place auxiliaire différente de p pour séparer les classes de conjugaison elliptiques régulières des non-elliptiques en p, on montre le résultat. Les techniques utilisées au passage sont très diverses : théorie des types, cycles évanescents rigides...

– Reste la partie purement automorphe du programme : comparaison de la formule des traces d'Arthur pour les groupes unitaires de signature quelconque à l'infini. Nous utilisons pour cela des résultats non publiés de Harris et Labesse généralisant ceux de Clozel en signature $(1, n-1)$ ([**12**]). Ces résultats sont assujettis à certaines conditions sur les groupes unitaires. Ce sont ces conditions qui imposent les restrictions sur J_b dans le théorèmes 10.1.4 et 10.1.5. Pour les résultats concernant $U(3)$ nous utilisons les résultats de Rogawski ([**53**]).

  Une meilleur connaissance des la stabilisation de la formule des traces pour les groupes unitaires permettrait sûrement d'obtenir des résultats complets sur $U(n)$ pour n quelconque.

– La partie représentations galoisienne, c'est à dire la détermination du fameux $r_\mu \circ \psi$ est achevée en déterminant la restriction à un groupe de décomposition des représentations galoisiennes globales découpées par certaines représentations automorphes dans les variétés de Shimura associées aux groupes unitaires. Nous utilisons pour cela l'existence (résultats non publiés de Harris et Labesse, résultats de Rogawski sur $U(3)$) d'un changement de base quadratique stable pour de telles représentations automorphes, la détermination par Kottwitz de cette représentation en presque toutes les places non ramifiées ainsi que l'un des résultats principaux de [**26**] généralisant le théorème principal de Clozel dans [**12**].

  Bien qu'en annexe, ce résultat peut être considéré en soi même comme un résultat indépendant de cette thèse.

Description des différentes parties

Partie I. —

– Dans le premier chapitre nous rappelons et explicitons les définitions de base concernant les variétés de Shimura de type P.E.L. non ramifiées de [**41**].
– La section 2.2 du chapitre 2 contient les définitions et propriétés de base concernant les espaces de Rapoport-Zink non ramifiés sans structure de niveau (en tant que schémas formels).

  La section 2.4 contient le premier résultat de cette thèse, le théorème 2.4.5. Il s'agit d'une amélioration du théorème de finitude de 2.18 de [**51**] basée sur des résultats récents de Zink ([**61**]). Nous montrons que " $J_b\backslash\breve{\mathcal{M}}(b,\mu)$" est quasi-compact (pour tout (b,μ)) , ou encore que sous l'action de J_b il n'y a qu'un nombre fini d'orbites de composantes irréductibles dans la fibre spéciale de $\breve{\mathcal{M}}(b,\mu)$. Le demi-plan supérieur de Drinfeld possède une décomposition cellulaire indexée par l'immeuble de Bruhat-Tits de PGL_n. Comme dans [**47**] nous donnons une description des points sur $\bar{\mathbb{F}}_p$ de $\breve{\mathcal{M}}(b,\mu)$ comme un sous ensemble de l'immeuble de G sur $\widehat{\mathbb{Q}_p^{nr}}$ (section 2.4.1 et 2.4.2). Le théorème 2.4.5 s'interprète alors comme un théorème de finitude sur cet immeuble. Il nous permettra plus loin d'obtenir des théorèmes de finitude concernant la cohomologie à support compact des $\breve{\mathcal{M}}(b,\mu)$ comme J_b-modules.

  La section 2.5 contient les définitions et propriétés de base concernant les espaces $\breve{\mathcal{M}}_K(b,\mu)$ (structures de niveau, action sur ces structures).

  Dans cette thèse nous travaillons avec deux théories différentes pour les variétés rigides et leur cohomologie étale ℓ-adique à support compact : la théorie des espaces analytiques de Berkovich et celle des espaces adiques de Huber. La première est la version surconvergente de la seconde : le topos étale analytique coïncide avec le topos étale adique surconvergent. Les raisons pour lesquelles nous n'avons pas fixé une des deux théories sont multiples :
  – Le théorème de lissité de l'action sur la cohomologie ℓ-adique à support compact est formulé dans le cadre de la théorie de Berkovich. La démonstration de ce théorème n'étant pas publiée ([**1**]), nous en avons mis une démonstration en annexe F.
  – Les propriétés des cycles évanescents analytiques de Berkovich sont clairement exposées dans les deux articles [**3**] et [**5**]. Les propriétés des cycles évanescents adiques de Huber sont plus dispersées.
  – Cependant, les théorèmes de finitude de Huber sont plus généraux (il a par exemple une définition des faisceaux constructibles). Nous utilisons notamment les théorèmes de finitude de [**29**].

  Nous avons donc mis en annexe E quelques propriétés de bases qui nous l'espérons permettrons au lecteur de passer aisément d'une théorie à l'autre.

  La définition et les propriétés de base (lissité des actions par exemple) de la cohomologie ℓ-adique des espaces de Rapoport-Zink sont données dans la section 2.6. Le lemme 2.6.12, la proposition 2.6.13 et le corollaire 2.6.14 constituent les trois théorèmes de finitude concernant l'action de J_b sur ces espaces de cohomologie.
– Le chapitre 3 contient des rappels et des précisions sur les résultats principaux de [**51**] concernant l'uniformisation des variétés de Shimura de type P.E.L.. Pour paramétrer les strates de ces variétés nous utilisons l'ensemble $B(G,\mu)$ de Kottwitz ([**42**]) des classes d'isomorphismes d'isocristaux munis de structures additionnelles vérifiant le théorème de Mazur généralisé ([**52**]) sur la position relative des polygones de Hodge et Newton (le polygone de Hodge étant fixé par μ via la condition de Kottwitz). Nous donnons la description explicite de ces ensembles (ainsi que des

groupes J_b associés) dans le cas de $\mathbf{GL}_n$ dans la section 2.1.1, et dans le cas unitaire dans l'appendice D.

On retiendra une propriété importante de l'application d'uniformisation rigide énoncée dans ce chapitre : c'est un isomorphisme local (3.3.9). Cependant (remarque 3.3.4), à part dans le cas de la strate basique, les ouverts rigides uniformisés sont beaucoup plus petit que les tubes au dessus des strates (c'est déjà clair dans le cas des variétés de [**26**], où l'uniformisation de Rapoport-Zink uniformise des complétés formels de la strate μ-ordinaire, ouverte dans la fibre spéciale, le long de sous schémas de dimension 0 de cette fibre spéciale). C'est l'un des problèmes principaux qu'il faudrait surmonter pour comprendre la contribution des strates non basiques.

Partie II. — D'après la formule de Matsushima, la cohomologie de nos variétés de Shimura s'exprime en termes de représentations automorphes du groupe de similitudes unitaires G. Une des idées qui est au coeur de cette thèse est que le facteur en p (après restriction de la représentation galoisienne à un groupe de décomposition en p, c'est à dire comme comme représentation de $G(\mathbb{Q}_p) \times W_{E_\nu}$ où E_ν est le complété en p du corps réflex) de certains morceaux de la cohomologie des variétés de Shimura que nous considérons ne devraient dépendre que de la cohomologie des objets locaux en p que sont les espaces rigides de Rapoport-Zink.

Dans [**26**] cela est une conséquence du théorème de comparaison de Berkovich entre cycles évanescents algébriques et analytiques rigides (comparaison entre le site étale et étale formel d'un schéma hensélien). Comme expliqué auparavant, nous utilisons une approche différente. Nous démontrons l'existence d'une suite spectrale de type Hochschild-Serre reliant la cohomologie des espaces de Rapoport-Zink à celle des tubes qu'ils uniformisent p-adiquement. M.Harris avait déjà démontré l'existence d'une telle suite spectrale dans le cas du demi-plan supérieur de Drinfeld ([**23**]). Il utilisait pour cela la décomposition cellulaire du demi-plan et des résultats de Berkovich sur les "G-modules discrets" (non publiés). Une telle décomposition n'existe pas en général. Notre méthode est différente et s'applique à tous les cas d'uniformisation connus (et conjecturaux, confère [**25**] conjecture 4.2.).

La principale difficulté dans l'établissement d'une telle suite spectrale provient des coefficients ℓ-adiques. En effet, les espaces $\breve{\mathcal{M}}_K$ ne sont pas quasicompacts et en général

$$H_c^\bullet(\breve{\mathcal{M}}_K, \mathbb{Z}_\ell) \neq \varprojlim_n H_c^\bullet(\breve{\mathcal{M}}_K, \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z})$$

à cause des problèmes d'interversion de limite inductive (sur le support compact des sections) et de limite projective (sur les coefficients). Nous contournons ce problème en nous inspirant de l'article ([**29**]). Nous utilisons le foncteur dérivé $\mathbb{R}\pi_*$ de l'annexe F (ainsi que ses versions équivariantes) introduit par Ekedeahl dans [**17**] qui envoi des faisceaux ℓ-adiques sur des complexes de faisceaux de $\mathbb{Z}_\ell$-modules. Grâce au lemme F.1.5 nous pouvons alors travailler avec les foncteurs dérivés des sections à support compact (noté $\Gamma_!$) dans la catégorie dérivée de tels faisceaux de $\mathbb{Z}_\ell$-modules, éliminant ainsi les problèmes de faisceaux ℓ-adiques. Cela permet de démontrer le théorème général 4.2.1. Le théorème principal 4.3.6 s'en déduit.

L'application fondamentale est la formule de Matsushima p-adique calculant la cohomologie de la strate basique en fonction de la cohomologie des espaces de Rapoport-Zink basiques (ceux qui interviennent dans les résultats principaux de la thèse) et des représentations automorphes d'une forme intérieure I^ϕ de G (corollaire 5.0.18) : il y a

une égalité dans le groupe de Grothendieck $\mathrm{Groth}(G(\mathbf{A}_f) \times W_{E_\nu})$

$$\sum_{\substack{i,j \\ \Pi \in \mathcal{T}(I^\phi) \\ \Pi_\infty = \tilde{\rho}}} (-1)^{i+j} \left[\varinjlim_{K_p} \mathrm{Ext}^i_{J_b\text{-lisse}} \left(H^j_c(\breve{\mathcal{M}}_{K_p} \otimes \mathbb{C}_p, \overline{\mathbb{Q}_\ell})(N), \Pi_p \right) \right] \otimes [\Pi^p]$$

$$= \sum_i (-1)^i \left[\varinjlim_K H^i(\mathrm{Sh}_K(G,X)^{an}_{\text{basique}}, \mathcal{L}^{an}_\rho) \right]$$

où $\mathcal{T}(I^\phi)$ désigne l'ensemble des représentations automorphes de I^ϕ, et I^ϕ vérifie $I^\phi(\mathbf{A}_f^p) = G(\mathbf{A}_f^p)$, $I^\phi(\mathbb{Q}_p) = J_b$.

C'est la comparaison géométrique entre cette formule de Matsushima p-adique et celle archimédienne couplée à la comparaison analytique entre la formule des traces d'Arthur de G et sa forme intérieure I^ϕ qui permettra de démontrer dans la partie IV les résultats principaux.

Partie III. — Le but de cette partie est de démontrer l'analogue de l'astuce de Boyer en comparant deux formules des traces : l'une p-adique, c'est à dire utilisant l'uniformisation p-adique, l'autre topologique utilisant l'uniformisation archimédienne par l'espace symétrique hermitien X (un cas particulier de la formule des traces d'Arthur telle qu'elle est reformulée dans [**21**]).

Chapitre 6. — Dans ce chapitre nous démontrons la formule p-adique (théorème 6.12.5). Plusieurs points sont au coeur de cette formule : le théorème de Fujiwara, le fait que la fibre des cycles évanescents algébriques ne dépend que du complété formel en ce point... nous renvoyons à l'introduction de ce chapitre pour plus de détails.

Pour démontrer une telle formule nous utilisons la formule des traces de Lefschetz modulo p, et plus particulièrement le théorème de Fujiwara ([**20**]). Pour cela nous utilisons les cycles évanescents analytiques rigides de Berkovich. Cependant nos variétés de Shimura et les correspondances de Hecke associées ne possèdent pas de bon modèles entiers en tout niveau en p. L'idée consiste alors à spécialiser (au sens de [**20**]) l'image directe sur la fibre générique vers un niveau maximal des correspondances de Hecke en tant que correspondances cohomologiques. Les correspondances cohomologiques agissent sur la cohomologie, cependant nous avons besoin de vérifier que la suite spectrale des cycles évanescents est équivariante vis à vis de ces deux opérations : image directe propre et spécialisation. C'est une des raisons pour laquelle nous développons un formalisme de spécialisation des correspondances cohomologiques rigides dans l'esprit de [**20**] et montrons que celui-ci est compatible à l'image directe et à l'isomorphisme de Berkovich.

Le théorème 6.12.5 est alors une application de ce formalisme couplé au théorème de Fujiwara ([**20**]).

Cependant un point technique doit être soulevé : même en niveau compact hyperspécial C_0 seules les correspondances de Hecke à support dans C_0 possèdent un bon modèle entier (pour appliquer le théorème de Fujiwara une des deux applications de projections de la correspondance doit être quasi-finie). Nous voudrions à priori appliquer notre formule des traces en mettant en p un pseudo-coefficient d'une représentation supercuspidale. Cela n'est donc pas possible. L'alternative consiste à utiliser la théorie des types de Bushnell et Kutzko. En effet, si (J, λ) est un type supercuspidal l'idempotent associé e_λ est à support dans J et donc dans un sous groupe compact hyperspécial. Le problème est presque

résolu à la remarque suivante près : e_λ ne permet pas de séparer les représentations supercuspidales dans une même classe d'équivalence inertielle. A tous les types supercuspidaux connus est associé un couple $(\tilde{J}, \tilde{\lambda})$ où $\tilde{J}$ est un sous groupe compact modulo le centre de $G(\mathbb{Q}_p)$ contenant J et $\tilde{\lambda}$ une extension de λ à $\tilde{J}$. On remarque alors que l'on peut séparer toutes les supercuspidales par les fonctions $e_\lambda * \delta_g$ où $g \in \tilde{J}$ (annexe B). Il suffit donc de faire agir l'automorphisme associé à $g \in \tilde{J}$ sur nos modèles entiers. Remarquant que pour les groupes $G(\mathbb{Q}_p)$ avec lesquels nous travaillons tous les groupes $\tilde{J}$ sont contenus dans le normalisateur d'un sous groupe parahorique de $G(\mathbb{Q}_p)$ on vérifie que l'on peut s'en sortir (6.11.4) en utilisant les modèles entiers définis en niveau parahorique de [**51**].

Chapitre 7. — Dans ce chapitre nous redémontrons un cas très particulier de la formule des traces topologique d'Arthur telle qu'elle est reformulée dans [**21**] (théorème 7.4.1). En effet, en supposant la variété de Shimura compacte et la correspondance de Hecke à support dans les éléments réguliers en une place finie la formule prend une forme très simple.

Bien que cette formule puisse se déduire de [**21**], la lecture de [**21**] (plutôt technique) ne la laisse pas du tout transparaître (les auteurs de [**21**] s'intéressent surtout aux points fixes dans le bord). C'est pourquoi nous avons inclus sa démonstration.

Nous vérifions de plus en utilisant la théorie de Hodge p-adique (théorème 7.3.2) que si l'on disposait d'une formule des traces en géométrie rigide de la forme une somme sur des points fixes locaux naïfs + des termes de Lefschetz au bord (au sens des compactifications de Huber des espaces adiques, confère [**27**] et [**57**]), la distribution somme sur les points fixes naïfs associée à des strates non basiques est à support dans des éléments non-elliptiques réguliers ce qui ramènerait la démonstration de l'astuce de Boyer à montrer que la distribution associée aux termes au bord est "induite" en p.

Chapitre 8. — Celui-ci contient quelques propositions destinées à montrer le théorème principal du chapitre 9.

Chapitre 9. — Il contient le théorème principal de la partie III (et l'un des principaux de cette thèse), l'équivalent de l'astuce de Boyer : le théorème 9.0.2.

La démonstration consiste à comparer les deux formules des traces : topologique et p-adique. La formule des traces topologique 7.4.1 pour la trace d'une fonction f dans l'algèbre de Hecke globale est une combinaison d'intégrales orbitales $\mathcal{O}_\gamma(f_p) \times \mathcal{O}_\gamma(f^p)$ où $\gamma \in G(\mathbb{Q})$. La formule p-adique 6.12.5 est une combinaison linéaire de termes de la forme $a_\gamma(f_p) \times \mathcal{O}_\gamma(f^p)$ où γ est une classe de conjugaison dans un groupe $I^\phi(\mathbb{Q})$ qui se transfert (via l'action sur la cohomologie ℓ-adique hors p d'une variété abélienne) en un élément de $G(\mathbf{A}_f^p)$ et permet de définir $\mathcal{O}_\gamma(f^p)$. Quant à la distribution $f_p \mapsto a_\gamma(f_p)$ il s'agit d'une certaine trace sur la cohomologie étale d'un espace rigide de déformation (par isomorphismes) de groupes p-divisibles. On suppose qu'en une place hors p f est à support dans les éléments réguliers. Toutes les classes de conjugaison γ précédentes sont alors régulières.

Si f_p est dans l'algèbre de Hecke d'un type supercuspidal, dans la formule des traces archimédienne seules des classes de conjugaison elliptiques en p contribuent de façon non nulle. Choisissons une place auxiliaire w de $\mathbb{Q}$ différente de p. Égalant les deux formules des traces et faisant varier les fonctions test en w on en déduit que si la classe d'isogénie ϕ ainsi que $\gamma \in I^\phi(\mathbb{Q})$ contribuent de façon non nulle alors γ est conjugué dans $G(\mathbb{Q}_w)$ à un élément de $G(\mathbb{Q})$ elliptique dans $G(\mathbb{Q}_p)$. Regardons alors γ comme un élément

de $I^{\phi}(\mathbb{Q}_p) \subset J_b$ (où b est déduit de ϕ). La forme intérieure quasidéployée de J_b est le centralisateur du morphisme des pentes $M(b)$ au sens de [**37**], une forme intérieure d'un sous groupe de Levi de $G_{\mathbb{Q}_p}$. Le transfert de γ vers cette forme intérieure est donc un élément de $M(b)(\mathbb{Q}_p)$ stablement conjugué à un élément elliptique de $G(\mathbb{Q}_p)$. Cela n'est donc possible que si $M(b) = G_{\mathbb{Q}_p}$, c'est à dire si ϕ intervient dans la strate basique. On en déduit donc que seuls ces termes interviennent. Appliquant de nouveau la formule des traces p-adique (cette fois ci à la strate basique) on obtient le résultat.

Partie IV. — Elle contient la démonstration des résultats annoncés au début de cette introduction en utilisant la formule de Matsushima p-adique de la partie II, le théorème 9.0.2 du III et les résultats de l'annexe A.

PARTIE I

VARIÉTÉS DE SHIMURA DE TYPE P.E.L. ET ESPACES DE RAPOPORT-ZINK

CHAPITRE 1

VARIÉTÉS DE SHIMURA DE TYPE P.E.L. NON RAMIFIÉES

1.1. Donnée de Shimura de type P.E.L.

Soit $\mathcal{D} = (B, *, V, < .,. >, h)$ une donnée de Shimura de type P.E.L.([**41**]). Plus précisément :

- B est une algèbre simple sur un corps de nombres F
- $*$ est une involution positive sur B : $\forall b \in B\ tr(bb^*) > 0$
- $(V, < .,. >)$ est un B-module hermitien où $< .,. >: V \times V \to \mathbb{Q}$ est symplectique
- $h : \mathbb{C} \to \mathrm{End}_B(V)_{\mathbb{R}}$ est un morphisme d'algèbres à involutions où $\mathrm{End}_B(V)$ est muni de l'adjonction par rapport à la forme symplectique $< .,. >$ et $\mathbb{C}$ de la conjugaison complexe notée c. De plus $< ., h(i). >$ est un produit scalaire.

Notons

$$G = \{g \in \mathrm{GL}_B(V) \mid gg^* = c(g) \in \mathbb{Q}^*\}$$

le groupe des similitudes unitaires défini sur $\mathbb{Q}$ associé et $G_1 = \ker(c)$ le groupe unitaire.

Le morphisme h définit une $\mathbb{Q}$ structure de Hodge polarisée munie d'une action de B. Cette structure de Hodge munie de structures additionnelles est un point dans la variation de structures de Hodge associée aux variétés de Shimura que nous allons utiliser.

Nous noterons X la classe de $G(\mathbb{R})$ conjugaison de $h : \mathbb{C}^\times \to G_{\mathbb{R}}$. Au morphisme h on peut associer

$$\mu_h : \mathbb{C}^\times \to G_{\mathbb{C}}$$

(ou plutôt sa classe de conjugaison) définissant la filtration de Hodge sur $V_{\mathbb{C}} = V_0 \oplus V_1$ où $\mu_h(z) = z$ sur V_1 et $\mu_h = 1$ sur V_0. Dans toute la suite nous suivrons la convention homologique de Kottwitz, c'est à dire l'inverse de [**15**].

Nous noterons $\overline{\mathbb{Q}}$ la clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}$. Soit E le corps reflex associé à $\mathcal{D}$. Le corps E est le corps de définition de la classe de conjugaison de μ,

$$E = \mathbb{Q}[tr_{\mathbb{C}}(b; V_0) \mid b \in B] \subset \overline{\mathbb{Q}}$$

1.1.1. Le cas (A). — Nécessairement, F est soit un corps C.M. soit un corps totalement réel. Supposons que F est un corps C.M., ce que nous appellerons le cas (A).

Fixons $\Phi \subset \mathrm{Hom}(F, \mathbb{C})$ un type C.M. de F. Il existe alors des signatures $(p_\tau, q_\tau)_{\tau\in\Phi}$ telles que $p_\tau + q_\tau = n$ soit indépendant de τ dans Φ et

$$G_{1/\mathbb{R}} \simeq \prod_{\tau\in\Phi} U(p_\tau, q_\tau)$$

De plus

$$G_{\mathbb{C}} \simeq \prod_{\tau\in\Phi} \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^\times$$

le dernier facteur représentant le facteur de similitude d'un élément de $G(\mathbb{C})$.

Avec ces notations,

$$h(z) = \prod_{\tau\in\Phi} \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} z & & \\ & \ddots & \\ & & z \end{matrix}}_{p_\tau} & \\ & \underbrace{\begin{matrix} \bar{z} & & \\ & \ddots & \\ & & \bar{z} \end{matrix}}_{q_\tau} \end{pmatrix}$$

et

$$\mu(z) = \prod_{\tau\in\Phi} \begin{pmatrix} z & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & z & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \times (z)$$

On a la relation

$$n = [B : F]^{1/2}\, \mathrm{rg}_B V$$

Le corps E peut alors se décrire à partir de ces données. Faisons opérer $\mathbf{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q})$ sur les Φ-uplets de couples d'entiers (a_τ, b_τ) de la façon suivante :

$$\forall \sigma \in \mathbf{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q}) \quad \sigma.(a_\tau, b_\tau)_{\tau\in\Phi} = (a'_\tau, b'_\tau)_{\tau\in\Phi}$$

où

$$\forall \tau \in \Phi \ \ (a'_\tau, b'_\tau) = \begin{cases} (a_{\sigma^{-1}\tau}, b_{\sigma^{-1}\tau}) \text{ si } \sigma^{-1}\tau \in \Phi \\ (b_{c\sigma^{-1}\tau}, a_{c\sigma^{-1}\tau}) \text{ si } \sigma^{-1}\tau \notin \Phi \end{cases}$$

$\mathbf{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|E)$ est alors le stabilisateur de $(p_\tau, q_\tau)_{\tau\in\Phi}$ pour cette action.

Exemple 1.1.1. — Notons F^Φ le corps réflex de (F, Φ) défini par l'égalité

$$\mathbf{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|F^\Phi) = \{\tau \in \mathbf{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q}) \mid \tau\Phi = \Phi\ \}$$

Supposons qu'il existe $\tau_0 \in \Phi$ tel que $q_{\tau_0} \neq 0$ et $\forall \tau \neq \tau_0$ $(p_\tau, q_\tau) = (n, 0)$. Supposons de plus que $p_{\tau_0} \neq n/2$. Le corps E est alors le composé

$$E = F^\Phi.\tau_0(F)$$

C'est par exemple le cas de l'article [**12**] dans lequel $(p_{\tau_0}, q_{\tau_0}) = (1, n-1)$.

Par contre, dans [**26**], $(p_{\tau_0}, q_{\tau_0}) = (1, n-1)$ tandis que $\forall \tau \neq \tau_0$ $(p_\tau, q_\tau) = (0, n)$. On a encore dans dans ce cas là $E = F^\Phi.\tau_0(F)$.

Exemple 1.1.2. — Notons F^+ le sous-corps totalement réel maximal de F. Supposons que F est de la forme $F^+.\mathcal{K}$ où $\mathcal{K}|\mathbb{Q}$ est une extension quadratique imaginaire et que le C.M. type Φ est induit à partir d'un C.M. type de $\mathcal{K}$. Le corps réflex de (F, Φ) est alors $\mathcal{K}$. Nous ferons parfois cette hypothèse.

Par exemple, sous cette hypothèse, dans l'exemple précédent $E = \tau_0(F)$ ce qui est le cas de [**26**].

1.1.2. Le cas (C). — Considérons maintenant le cas où F est un corps totalement réel. Dans ce cas là, G_1 est, soit une forme d'un produit de groupes symplectiques, soit une forme de produits de groupes orthogonaux suivant que $B_\mathbb{R}$ est un produit d'algèbres $M_n(\mathbb{R})$ ou $M_n(\mathbb{H})$ (cas (C) et (D) de [**41**] respectivement). Nous ne considérerons que le premier cas. Alors,

$$G_{1/\mathbb{R}} \simeq \prod_{\tau : F \hookrightarrow \mathbb{R}} Sp_n(\mathbb{R})$$

où $Sp_n = \{g \in \mathrm{GL}_n \mid {}^t g J g = J\}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$. Avec ces notations,

$$h(a+ib) = \prod_{\tau : F \hookrightarrow \mathbb{R}} \begin{pmatrix} aI_n & -bI_n \\ bI_n & aI_n \end{pmatrix}$$

et

$$\mu(z) = \prod_{\tau : F : \hookrightarrow \mathbb{R}} \begin{pmatrix} zI_n & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$$

1.2. Variétés de Shimura sur E

A la donnée $\mathcal{D}$ est associée une tour $(\mathrm{Sh}_K)_K$, pour des sous-groupes compacts ouverts K de $G(\mathbf{A}_f)$ suffisamment petits, de variétés quasiprojectives lisses sur E classifiant les quadruplets $(A, \lambda, \iota, \overline{\eta})$ où :

- A est un schéma abélien à isogénie près
- λ est une polarisation $\mathbb{Q}^\times$ homogène de A. Cette dernière condition signifie que pour toute fonction α définie sur le schéma de base du schéma abélien, à valeurs dans $\mathbb{Q}^\times$ et constante sur chaque composante connexe, λ est considérée comme étant équivalente à $\alpha\lambda$.
- $\iota : B \to \mathrm{End}(A)_\mathbb{Q}$ est un morphisme d'algèbres tel que $*$ corresponde à l'involution de Rosati associée à λ. Cela signifie que si $\dagger$ désigne l'involution de Rosati

  $$\forall b \in B \quad \iota(b^*) = \iota(b)^\dagger$$

  Une condition équivalente est de dire que λ induit un morphisme de variétés abéliennes munies d'une action de B par quasi-isogénies entre (A, ι) et $(A^\vee, \iota \circ *)$
- $\eta : V \otimes \mathbf{A}_f \longrightarrow H_1(A, \mathbf{A}_f)[K]$ est un isomorphisme de $B \otimes \mathbf{A}_f$-modules symplectiques définissant une structure de niveau K sur le module de Tate de A. Cet isomorphisme

est défini à une constante de $\mathbf{A}_f^\times$ près puisqu'il faut fixer un isomorphisme $\mathbf{A}_f(1)^\times \simeq \mathbf{A}_f^\times$.

– La condition suivante est vérifiée :

$$\forall b \in B \ \det(b; Lie(A)) = \det(b; V_0)$$

Cette condition est l'analogue algébrique de la condition topologique : $\forall h' \in X, h'$ est conjugué à h.

Exemple 1.2.1. — Plaçons nous dans le cas (A) de la section 1.1.1. L'action de F sur $\mathrm{Lie}(A)$ permet de décomposer

$$\mathrm{Lie}(A) = \bigoplus_{\tau \in \mathrm{Hom}(F, \overline{\mathbb{Q}})} \mathrm{Lie}(A)_\tau$$

où F agit sur $\mathrm{Lie}(A)_\tau$ via τ. La condition de Kottwitz se récrit alors dans ce cadre sous la forme :

$$\begin{array}{rll} \forall \tau \in \Phi & \mathrm{Lie}(A)_\tau & \text{est localement libre de rang } p_\tau [B:F]^{1/2} \\ \text{et} & \mathrm{Lie}(A)_{c\tau} & \text{est localement libre de rang } q_\tau [B:F]^{1/2} \end{array}$$

La tour de variétés $(\mathrm{Sh}_K)_K$ est munie d'une action de $G(\mathbf{A}_f)$ par action sur la structure de niveau $\overline{\eta}$.

La variété de Shimura Sh_K n'est pas en général associée à la donnée de Shimura (G, X). On a en fait la décomposition suivante définie sur E ([**41**] section 8) :

$$\mathrm{Sh}_K = \coprod_{ker^1(\mathbb{Q}, G)} \mathrm{Sh}_K(G', X)$$

où G' parcourt des formes intérieures de G isomorphes à G partout localement, et où $\mathrm{Sh}_K(G', X)$ désigne le modèle canonique sur E de la variété de Shimura associée à la donnée de Shimura (G', X). Plus précisément, si $x \in \mathrm{Sh}_K(\mathbb{C})$ est associé à $(A, \lambda, \iota, \overline{\eta})$, x appartient à la composante indexée par la classe du G-torseur localement trivial

$$Isom_{\text{B-mod.symp.}}(V, H_1(A, \mathbb{Q}))$$

et G' est le groupe des similitudes unitaires associé au B-module symplectique $H_1(A, \mathbb{Q})$.

On remarque ([**41**] chapitre 7) que dans le cas (C) et dans le cas (A) avec n pair, G vérifie le principe de Hasse, c'est à dire que $\ker^1(\mathbb{Q}, G)$ est réduit à un seul élément. Dans ces deux cas les variétés Sh_K sont donc des variétés de Shimura associées à la donnée de Shimura (G, X).

Il est également démontré dans la section 7 de [**41**] que dans le cas (A) avec n impair l'application

$$\ker^1(\mathbb{Q}, Z_G) \longrightarrow \ker^1(\mathbb{Q}, G)$$

est surjective. Dans ce cas, tous les groupes G' sont donc en fait isomorphes à G, et les variétés Sh_K sont donc une union finie de copies d'un modèle canonique de la variété de Shimura associée à la donnée (G, X) ([**15**],[**46**]).

1.3. Systèmes locaux

Soit ℓ un nombre premier différent de p. Fixons définitivement un isomorphisme

$$\iota : \overline{\mathbb{Q}_\ell} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$$

Soit ρ une représentation algébrique complexe de G. ρ définit alors via ι un $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ faisceau lisse $\mathcal{L}_\rho$ sur les différents Sh_K lorsque K varie. Il est muni d'une action de $G(\mathbf{A}_f)$ au sens où $\forall K_1 \subset K_2$, si $\Pi_{K_1,K_2} : \mathrm{Sh}_{K_2} \to \mathrm{Sh}_{K_1}$ désigne le morphisme de changement de niveau, il y a des isomorphismes $\Pi^*_{K_1,K_2}\mathcal{L}_\rho \to \mathcal{L}_\rho$ et pour tout g élément de $G(\mathbf{A}_f)$, si $g : \mathrm{Sh}_K \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sh}_{g^{-1}Kg}$, il y a des morphismes $g^*\mathcal{L}_\rho \to \mathcal{L}_\rho$, le tout vérifiant des conditions de compatibilité évidente.

La variété Sh_K est munie d'un pro-revêtement étale $(\mathrm{Sh}_{K'} \longrightarrow \mathrm{Sh}_K)_{K' \lhd K}$ de groupe K. Composant l'application de projection $K \longrightarrow G(\mathbb{Q}_\ell)$ avec la représentation ρ : $G(\mathbb{Q}_\ell) \hookrightarrow G(\overline{\mathbb{Q}_\ell}) \xrightarrow{\iota\rho} \mathrm{GL}(V_{\iota\rho})$ on obtient une représentation continue $K \longrightarrow \mathrm{GL}(V_{\iota\rho})$. Le système local $\mathcal{L}_\rho$ est celui associé à cette représentation.

1.4. Modèles entiers

1.4.1. Hypothèse de non ramification. — Fixons un plongement $\nu : \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$ et notons E_ν le complété de E correspondant.

Soit $\mathcal{O}_B$ un $\mathbb{Z}_{(p)}$ ordre dans B stable par $*$ et tel que $\mathcal{O}_B \otimes \mathbb{Z}_p$ soit un ordre maximal dans $B_{\mathbb{Q}_p}$.

Nous supposerons (confère [**41**]) :

- $B_{\mathbb{Q}_p}$ est un produit d'algèbres de matrices sur des extensions non ramifiées de $\mathbb{Q}_p$, c'est à dire : B est déployée en toutes les places de F divisant p et F est non ramifié en toutes les places de F divisant p
- Afin de s'assurer que $G_{\mathbb{Q}_p}$ est quasidéployé nous supposerons qu'il existe un réseau autodual Λ_0 dans $V_{\mathbb{Q}_p}$

Sous ces hypothèses le groupe $G_{\mathbb{Q}_p}$ est non ramifié.

1.4.2. Modèles. — Sous les hypothèses précédentes Kottwitz construit dans [**41**] une tour $(S_{K^p})_{K^p}$ de variétés quasiprojectives lisses sur $\mathcal{O}_{E_\nu}$ indexée par des sous-groupes compacts ouverts suffisamment petits $K^p \subset G(\mathbf{A}_f^p)$. Cette tour est munie d'une action de $G(\mathbf{A}_f^p)$. Le schéma S_{K^p} est défini comme l'espace de modules des quadruplets $(A, \lambda, \iota, \overline{\eta^p})$ où :

- A est un schéma abélien défini à une isogénie première à p près
- λ est une polarisation première à p et $\mathbb{Z}_{(p)}^\times$ homogène. Cela siginifie que si α est une fonction définie sur le schéma de base sur lequel est défini A, à valeurs dans $\mathbb{Z}_{(p)}^\times$ et localement constante, alors λ est considérée comme étant équivalente à $\alpha\lambda$.
- $\iota : \mathcal{O}_B \to \mathrm{End}(A) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ est un morphisme d'algèbres transformant l'involution $*$ sur $\mathcal{O}_B$ en l'involution de Rosati associée à λ sur $\mathrm{End}(A) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$
- $\eta^p : V \otimes \mathbf{A}_f^p \longrightarrow H_1(A, \mathbf{A}_f^p)[K^p]$ est un isomorphisme de $B \otimes \mathbf{A}_f^p$-modules symplectiques définissant une structure de niveau K^p au sens de la définition 2.5.5 de [**41**]. Cet isomorphisme est pris à un élément de $\mathbf{A}_f^{p\times}$ près.

Le groupe $G(\mathbf{A}_f^p)$ opère sur la tour $(S_{K^p})_{K^p}$ par action sur $\overline{\eta^p}$.

Soit un réseau autodual $\Lambda_0 \subset V_{\mathbb{Q}_p}$. Soit $C_0 = Stab_{G(\mathbb{Q}_p)}(\Lambda_0)$ le sous-groupe compact hyperspécial associé. Il y a alors des isomorphismes compatibles pour K^p variant

$$S_{K^p} \otimes_{\mathcal{O}_{E_\nu}} E_\nu \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sh}_{C_0 K^p} \otimes_E E_\nu$$

Ces isomorphismes dépendent du choix de Λ_0.

1.5. Structure de $G(\mathbb{Q}_p)$

1.5.1. Cas (A). — On se place dans le cadre de la section 1.1.1. Tout élément $\tau \in \Phi$ fournit un plongement

$$\nu \circ \tau : F \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$$

Soient $(w_i)_{i\in I}, (w_j)_{j\in J}$ les places de F divisant p associées à tous ces plongements lorsque τ parcourt Φ, et où on suppose que $\forall i \in I\ w_i \neq w_i^c$ et $\forall j \in J\ w_j = w_j^c$. On a alors,

$$G_{\mathbb{Q}_p} = \prod_{i\in I} \mathrm{GL}_n(F_{w_i}) \times G\left(\prod_{j\in J} GU(F_{w_j}; n)\right)$$

où si $J = \emptyset, G(\emptyset) = \mathbb{Q}_p^\times$, $\mathrm{GL}_n(F_{w_i})$ désigne la restriction des scalaires de F_{w_i} à $\mathbb{Q}_p$ de GL_n, $GU(F_{w_j}; n)$ est la forme intérieure quasidéployée du groupe des similitudes unitaires en n variables sur F_{w_j} vu comme groupe sur $\mathbb{Q}_p$ (plus précisément, il s'agit du sous-groupe de la restriction des scalaires de F_{w_j} à $\mathbb{Q}_p$ du groupe des similitudes unitaires sur F_{w_j} ayant un facteur de similitude dans $\mathbb{Q}_p^\times$) et où le G devant le produit signifie que l'on prend le sous-groupe du produit formé des uplets ayant même facteur de similitude.

L'algèbre semi-simple $B_{\mathbb{Q}_p}$ est de la forme

$$\prod_i (M_d(F_{w_i}) \times M_d(F_{w_i})^{opp}) \times \prod_j M_d(F_{w_j})$$

L'équivalence de Morita permet de supposer qu'en chaque place on est dans l'un des cas suivant :

1.5.1.1. Cas (AL). — Soit $i \in I$, $B_{\mathbb{Q}_p} = F_{w_i} \times F_{w_i}$, $\mathcal{O}_{B_{\mathbb{Q}_p}} = \mathcal{O}_{F_{w_i}} \times \mathcal{O}_{F_{w_i}}$, $(x, y)^* = (y, x)$, $V_{\mathbb{Q}_p} = V_i \oplus V_i^\vee$, $< x \oplus \varphi, x', \oplus\varphi' >= \varphi'(x) - \varphi(x')$

Un réseau autodual est de la forme $\Lambda_0 = \Lambda \oplus \Lambda^\vee$ où Λ est un réseau de V_i.

1.5.1.2. Cas (AU). — Soit $j \in J$, $B_{\mathbb{Q}_p} = F_{w_j}$, l'involution $*$ est égale à $\sigma^{[F_{w_j}:\mathbb{Q}_p]/2}$ où σ est le Frobenius de l'extension non ramifiée $F_{w_j}|\mathbb{Q}_p$. $\mathcal{O}_{B_{\mathbb{Q}_p}} = \mathcal{O}_{F_{w_j}}$, Dans une base convenable de V_j identifié alors à $F_{w_j}^n$:

$$\forall X, Y \in F_{w_j}^n \quad < X, Y >= \mathrm{Tr}_{F_{w_j}/\mathbb{Q}_p}(\alpha^t X^* J Y)$$

où $\alpha \in F_{w_j}^\times$ est tel que $\alpha^* = -\alpha$,

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_{n/2} \\ I_{n/2} & 0 \end{pmatrix}$$

si n est pair et

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & I_{(n-1)/2} \\ 0 & 1 & 0 \\ I_{(n-1)/2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

si n est impair.

Un réseau autodual dans le cas où n est pair est alors donné par $\Lambda_0 = \Lambda^{(1)} \oplus \Lambda^{(2)}$ où $\Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}$ sont deux sous-$\mathcal{O}_{F_{w_j}}$-modules totalement isotropes tels que l'accouplement $\Lambda^{(1)} \times \Lambda^{(2)} \xrightarrow{<.,.>} \mathbb{Z}_p$ soit parfait.

Dans le cas où n est impair, on peut prendre comme réseau autodual $\Lambda_0 = \Lambda^{(1)} \oplus \mathcal{O}_{F_{w_j}}.\epsilon \oplus \Lambda^{(2)}$ où $\Lambda^{(1)}$ et $\Lambda^{(2)}$ sont comme précédemment et $< \epsilon, \epsilon >= 1$.

1.5.2. Cas (C). —

$$B_{\mathbb{Q}_p} = \prod_{w|p} M_d(F_w)$$

$$G_{\mathbb{Q}_p} = G(\prod_{w|p} GSp_n(F_w))$$

où Gsp est le sous-groupe de la restriction des scalaires de F_w à $\mathbb{Q}_p$ du groupe des similitudes symplectiques qui est formé des éléments ayant un facteur de similitude dans $\mathbb{Q}_p^\times$, et où le G signifie que les facteurs de similitude des différents facteurs sont égaux .

On peut supposer par équivalence de Morita que l'on est dans le cas suivant : $B_{\mathbb{Q}_p} = F_w, \mathcal{O}_{B_{\mathbb{Q}_p}} = \mathcal{O}_{F_w}, V_{\mathbb{Q}_p} = F_w^n, < X, Y >= {}^tXJY$ où

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$$

Un réseau autodual est de la forme $\Lambda_0 = \Lambda^{(1)} \oplus \Lambda^{(2)}$ où $\Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}$ sont des sous-$\mathcal{O}_{F_w}$-modules totalement isotropes et l'accouplement $\Lambda^{(1)} \times \Lambda^{(2)} \xrightarrow{<.,.>} \mathbb{Z}_p$ est parfait.

CHAPITRE 2

ESPACES DE RAPOPORT-ZINK

2.1. Isocristaux munis de structures additionnelles : le cas de GL_n

Nous donnons ici une description explicite pour le groupe linéaire de la classification des isocristaux munis de structures additionnelles donnée par Kottwitz dans [**37**] et [**42**]. Étant donné que nous avons essentiellement en vu comme application dans cette thèse le cas de GL_n nous avons mis les autres cas en annexe.

2.1.1. $\mathbf{GL}_n$. — Oublions momentanément les notations globales du chapitre précédent.

Soit $F|\mathbb{Q}_p$ une extension non ramifiée de degré d. Soit $G = \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}_p}(\mathrm{GL}_n)$. Le groupe algébrique G se déploie sur F en

$$G_{/F} = \prod_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} \mathrm{GL}_{n/F}$$

où le groupe $\Gamma = \mathbf{Gal}(F|\mathbb{Q}_p) = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ opère par permutation cyclique sur les facteurs en translatant par un élément de $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.

Un tore maximal de G défini sur $\mathbb{Q}_p$ est $T = (F^\times)^n$. Un tore déployé maximal est $A = (\mathbb{Q}_p^\times)^n \hookrightarrow (F^\times)^n = T$. Le groupe de Weyl absolu est $W = (\mathfrak{S}_n)^d$.

Définition 2.1.1. — Le corps L est le complété de l'extension maximale non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$.

L'automorphisme σ est le Frobenius géométrique de l'extension $L|\mathbb{Q}_p$.

Définition 2.1.2. — On appelle isocristal un L-espace vectoriel N muni d'une application bijective σ-linéaire $V : N \longrightarrow N$.

On appelle F-isocristal un L-espace vectoriel N muni d'une application bijective σ^d linéaire $V : N \longrightarrow N$ (σ^d est le Frobenius géométrique de l'extension $L|F$).

Rappelons également que deux éléments b_1, b_2 de $G(L)$ sont dits σ-conjugués s'il existe un g dans $G(L)$ tel que

$$b_1 = g b_2 g^{-\sigma}$$

Rappelons alors la définition

Définition 2.1.3 **([37])**. — L'ensemble $B(G)$ désigne l'ensemble des classes de σ-conjugaison dans $G(L)$.

L'ensemble $B(G)$ classifie les isocristaux munis d'une action de F. A la classe de σ-conjugaison de b est associée la classe d'isomorphisme de l'isocristal muni d'une action de F, $(F^n \otimes_{\mathbb{Q}_p} L, b\sigma)$. Il est bien connu que la catégorie des isocristaux munis d'une action de F est équivalente à la catégorie des F-isocristaux, ce qui se traduit dans le langage de Kottwitz par le lemme de Shapiro $B(G) \simeq B(\mathrm{GL}_{n/F})$ ([**37**]).

Un élément $b \in B(G)$ est donné par les pentes du F-isocristal associé

$$\lambda_1 = \frac{d_1}{h_1} > \cdots > \lambda_r = \frac{d_r}{h_r}$$

où $d_i \wedge h_i = 1$, et des multiplicités $m_1, \ldots, m_r$ vérifiant $\sum_i m_i h_i = n$. Le point de Newton associé ([**37**]) est

$$\nu_b = (\underbrace{\frac{\lambda_1}{d}, \ldots, \frac{\lambda_1}{d}}_{m_1 h_1}, \ldots, \underbrace{\frac{\lambda_r}{d}, \ldots, \frac{\lambda_r}{d}}_{m_r h_r}) \in X_*(A)_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}^n$$

(le dénominateur d provient du fait que les pentes d'un F-isocristal sont d fois les pentes de l'isocristal sous-jacent). Le centralisateur du morphisme des pentes ν_b est le sous-groupe de Levi

$$M_b = \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}_p}(\mathrm{GL}_{m_1 h_1}) \times \cdots \times \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}_p}(\mathrm{GL}_{m_r h_r})$$

et b provient d'une classe basique de M_b, où l'on rappelle qu'une classe basique est une classe possédant une unique pente. Rappelons que l'on note J_b le groupe des automorphismes de l'isocristal muni de ses structures additionnelles. Dans le cas présent, la structure additionnelle consiste en l'action de F. J_b est donc le groupe des automorphismes du F-isocristal associé :

$$J_b = \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}_p}\left(\mathrm{GL}_{m_1}(D_{\lambda_1})\right) \times \cdots \times \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}_p}\left(\mathrm{GL}_{m_r}(D_{\lambda_r})\right)$$

où D_λ/F est l'algèbre centrale simple sur F d'invariant λ.

Le groupe G^{der} étant simplement connexe, $X^*(Z(\widehat{G})^\Gamma) = X_*(D)_\Gamma = B(D)$ où $D = G/G^{der}$. Or, le déterminant induit un isomorphisme de groupes det : $G/G^{der} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}_p}\mathbb{G}_m$, et donc $B(D) = \mathbb{Z}$. On identifiera donc $X^*(Z(\widehat{G})^\Gamma)$ à $\mathbb{Z}$. L'application de Kottwitz κ définie dans la section 6 de [**39**] (confère également le théorème 1.15 de [**52**]) est alors

$$\begin{array}{rcl} \kappa : B(G) & \longrightarrow & \mathbb{Z} = X^*(Z(\widehat{G})^\Gamma) \\ b & \longmapsto & v_p(det(b)) \end{array}$$

et est telle que

$$\kappa(b) = \sum_{i=1}^{r} m_i d_i$$

qui est la dimension de l'isocristal ou encore le point terminal du polygone de Newton.

Polygone de Hodge : Soit maintenant un cocaractère $\mu : \mathbb{G}_{m/\overline{\mathbb{Q}_p}} \to G_{/\overline{\mathbb{Q}_p}}$. Ce cocaractère est défini sur F et définit un élément de

$$X_*(T)/W \simeq \{(x_{ij})_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, 1 \leq j \leq n} |\ x_{ij} \in \mathbb{Z}, \forall i\ \ \forall j \leq j' \quad x_{ij} \geq x_{ij'}\}$$

sur lequel le groupe de Galois Γ opère via $\sigma.(x_{ij}) = (x_{i-1j})_{i,j}$.

Nous supposerons μ minuscule donné, avec les notations ci dessus, par $\mu = (\mu_{ij})_{i,j}$ où $\forall i\ \mu_{ij} = 1$ pour $1 \leq j \leq a_i$ et $\mu_{ij} = 0$ si $j > a_i$, les a_i étant des entiers compris entre 1 et n.

Le groupe de Galois $\Gamma = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ agit par permutation sur $(a_i)_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}$, et le corps de définition de la classe de conjugaison de μ a pour groupe de Galois le stabilisateur de $(a_i)_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}$ dans $\Gamma = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$.

Le L-groupe connexe de G est donné par

$$^LG^0 = \widehat{G} = \prod_{\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$$

et le L-groupe par $^LG = \widehat{G} \rtimes \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ où $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ agit par permutation cyclique des composantes. Au cocaractère μ de G, Kottwitz associe un caractère du centre du L-groupe connexe $Z(\widehat{G})$ défini par $\mu_1 = \widehat{\mu}_{|Z(\widehat{G})^\Gamma} \in \mathbb{Z}$ ([**42**] section 6.1), et donné avec nos notations par

$$\mu_1 = \sum_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} a_i$$

le point terminal du polygone de Hodge.

De même ([**42**] section 6.1), Kottwitz définit μ_2 par

$$\begin{array}{ccc} X_*(T)_\Gamma & \xrightarrow{Newt_T} & X_*(A)_\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^n \\ \widehat{\mu}_{|\widehat{T}^\Gamma} & \longmapsto & \mu_2 \end{array}$$

Avec les notations précédentes

$$\mu_2 = \frac{1}{d} \sum_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} (\underbrace{1,\ldots,1}_{a_i},0,\ldots,0)$$

Kottwitz définit dans la section 6 de [**42**] le sous ensemble $B(G,\mu)$ de $B(G)$ formé des classes de σ-conjugaison vérifiant le théorème de Mazur sur la position relative des polygones de Newton et de Hodge tel qu'il généralisé dans [**52**]. D'après ce qui précède, dans notre cas particulier cet ensemble possède la description suivante

$$\begin{array}{lcl} B(G,\mu) & = & \{b \in B(G) \mid Newt(b) \leq \mu_2 \in X_*(A)_\mathbb{Q} \text{ et } \kappa(b) = \mu_1\} \\ & = & \left\{ (\underbrace{\frac{\lambda_1}{d},\ldots,\frac{\lambda_1}{d}}_{m_1h_1},\ldots,\underbrace{\frac{\lambda_r}{d},\ldots,\frac{\lambda_r}{d}}_{m_rh_r}) \leq \frac{1}{d}\sum_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} (\underbrace{1,\ldots,1}_{a_i},0,\ldots,0) \right\} \\ & & \text{et } \displaystyle\sum_{i=1}^r m_id_i = \sum_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} a_i \end{array}$$

où $\leq$ désigne l'ordre usuel sur la chambre de Weyl positive (section 2.1 de [**52**]). L'inégalité s'interpète comme "le polygone de Newton est au dessus du polygone de Hodge", et l'égalité comme "les points terminaux des polygones de Newton et de Hodge sont égaux".

Exemple 2.1.4. — Lorsque $F = \mathbb{Q}_p$, et $b \in B(G)$, $b \in B(G,\mu)$ ssi l'isocristal filtré $(L^n, b\sigma, \mu)$ est faiblement admissible au sens de Fontaine.

Pour un élément de $B(G)$, la condition d'appartenance à $B(G,\mu)$ est donc une condition généralisant la condition d'admissibilité faible de l'isocristal filtré associé qui tient compte des structures additionnelles.

Classes basique dans $B(G,\mu)$:
Il existe une unique classe basique dans $B(G,\mu)$. Notons la b_0. Avec les notations précédentes celle-ci est donnée par l'unique pente

$$\lambda = \frac{1}{n}\sum_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} a_i$$

Si la pente λ est égale à $\frac{r}{s}$ où $r\wedge s = 1$, alors, la multiplicité de la pente est $\frac{n}{s}$, et l'on a

$$J_{b_0} = \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}_p}\mathrm{GL}_{\frac{n}{s}}(D_\lambda)$$

2.2. Généralités sur les espaces de Rapoport-Zink

2.2.1. Données locales de Rapoport-Zink. —

2.2.1.1. Donnée de type E.L. non ramifiée simple. — Une donnée de type E.L. non ramifiée simple (F,V,b,μ) consiste en la donnée
- d'une extension finie non ramifiée F de $\mathbb{Q}_p$
- d'un F-espace vectoriel de dimension finie V
- d'une classe de σ conjugaison $b\in B(G)$ où $G = \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}_p}\mathrm{GL}(V)$
- d'une classe de conjugaison de cocaractère minuscule $\mu : \mathbb{G}_{m\overline{\mathbb{Q}_p}} \longrightarrow G_{\overline{\mathbb{Q}_p}}$ du type de celles de la section 2.1.1.

On suppose que ces données sont reliées entre elles par la relation

$$b\in B(G,\mu)$$

Notons $I_F = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(F,\overline{\mathbb{Q}_p})$ et $n = \dim_F V$. Le cocaractère μ est alors donné par des couples d'entiers

$$(p_\tau, q_\tau)_{\tau\in I_F}$$

vérifiant $p_\tau + q_\tau = n$ (dans les notations de la section 2.1.1, ces couples d'entiers sont les $(a_i, n-a_i)_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}$).

Le corps réflex local associé E est le corps de définition de la classe de conjugaison de μ. $\mathbf{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}|\mathbb{Q}_p)$ opère par permutation sur I_F. $\mathbf{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}|E)$ est alors le stabilisateur dans $\mathbf{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}|\mathbb{Q}_p)$ de (p_τ, q_τ).

2.2.1.2. Donnée de type P.E.L. unitaire non ramifiée simple. — Une donnée de type P.E.L. unitaire non ramifiée simple $(F,*,V,<.,.>,b,\mu)$ consiste en la donnée
- d'une extension finie F de $\mathbb{Q}_p$ non ramifiée munie d'une involution non triviale $*$
- d'un F-espace vectoriel de dimension finie
- d'un produit hermitien symplectique $<.,.>: V\times V \longrightarrow \mathbb{Q}_p$ qui est tel qu'il existe un réseau autodual dans V pour ce produit symplectique
- si G désigne le groupe des similitudes unitaires associé, d'une classe de σ conjugaison $b\in B(G)$

– d'une classe de conjugaison de cocaractère minuscule $\mu : \mathbb{G}_{m\overline{\mathbb{Q}_p}} \longrightarrow G_{\overline{\mathbb{Q}_p}}$
On suppose que ces donnée sont reliées entre elles par la relation

$$c \circ \mu(z) = z$$

où c désigne le facteur de similitude, et

$$b \in B(G, \mu)$$

Le donnée d'un tel μ est équivalente à la donnée de couples d'entiers

$$(p_\tau, q_\tau)_{\tau \in I_F}$$

vérifiant $p_\tau + q_\tau = n$ et $(p_{\tau *}, q_{\tau *}) = (q_\tau, p_\tau)$ (dans la section D.1 ces entiers sont notés $(a_i)_i$).

Le corps réflex associé se décrit comme précédemment.

2.2.1.3. Donnée de type P.E.L. symplectique non ramifiée simple. — Elle consiste en la donnée $(F, V, < ., . >, b, \mu)$ vérifiant des conditions analogues à celles du cas unitaire. G est alors le groupe des similitudes symplectiques.

2.2.2. Espaces de Rapoport-Zink associés. — Nous récrivons la définition 3.21 de [**51**] dans nos cas non ramifiés. Notons $\breve{E} = \widehat{\mathbb{Q}_p^{nr}}$ le complété de l'extension maximale non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$. . Nous noterons $\bar{k} \simeq \overline{\mathbb{F}}_p$ le corps résiduel de $\breve{E}$.

2.2.2.1. Cas E.L. non ramifié. —

Définition 2.2.1. — Soit (V, F, b, μ) une donnée locale de type E.L. non ramifiée simple. Soit $\mathbb{X}$, un groupe p-divisible sur $\bar{k}$ muni d'une action de $\mathcal{O}_F$ et d'isocristal muni de son action de F isomorphe à $(V_L, b\sigma)$ (l'existence d'un tel $\mathbb{X}$ résulte de résultats récents de Rapoport et Kottwitz). Nous noterons $\breve{\mathcal{M}}(b, \mu)/\boldsymbol{Spf}(\mathcal{O}_{\breve{E}})$ l'espace de Rapoport-Zink associé. C'est l'espace de modules de groupes p-divisible munis d'une action de $\mathcal{O}_F$, X, munis d'une quasi-isogénie compatible à l'action de $\mathcal{O}_F$

$$\rho : \mathbb{X} \longrightarrow X$$

et vérifiant la condition : si

$$\mathrm{Lie}(X) = \bigoplus_{\tau \in I_F} \mathrm{Lie}(X)_\tau$$

est la décomposition de $\mathrm{Lie}(X)$ suivant l'action de $\mathcal{O}_F$ alors,

$$\forall \tau \in I_F \ \ \mathrm{Lie}(X)_\tau \text{ est localement libre de rang } p_\tau$$

$\breve{\mathcal{M}}(b, \mu)$ est localement formellement de type fini sur $\boldsymbol{Spf}(\mathcal{O}_{\breve{E}})$ ce qui signifie que localement $\breve{\mathcal{M}}(b, \mu)$ est de la forme

$$\boldsymbol{Spf}(\mathcal{O}_{\breve{E}} < T_1, \ldots, T_n > [[X_1, \ldots, X_m]]/I)$$

pour un idéal I.

Il résulte de la théorie de Grothendieck Messing que $\breve{\mathcal{M}}(b, \mu)$ est formellement lisse sur $\boldsymbol{Spf}(\mathcal{O}_{\breve{E}})$. Soit x un point fermé de sa fibre spéciale. Le complété formel $\breve{\mathcal{M}}(b, \mu)\widehat{\ }_{/\{x\}}$ s'identifie à l'espace de déformation par isomorphismes du groupe p-divisible X_x^{univ}muni de son action de $\mathcal{O}_F$ (X^{univ} désignant le groupe p-divisible universel sur $\breve{\mathcal{M}}(b, \mu)$). Il

résulte de la théorie de Grothendieck Messing que cet espace de déformation est isomorphe au complété formel d'une certaine Grassmanienne (les fameux modèles locaux de [**51**] (définition 3.27)) en un point :

$$\breve{\mathcal{M}}(b,\mu)\widehat{}_{/\{x\}} \simeq \boldsymbol{Spf}\left(\mathcal{O}_{\breve{E}}[[X_1,\ldots,X_{\sum_\tau p_\tau q_\tau}]]\right)$$

2.2.2.2. Cas P.E.L. unitaire non ramifié. —

Définition 2.2.2. — Soit $(F,*,V,<.,.>,b,\mu)$ une donnée locale de type P.E.L. unitaire non ramifiée. Nous noterons $\breve{\mathcal{M}}(b,\mu)/\boldsymbol{Spf}(\mathcal{O}_{\breve{E}})$ l'espace de Rapoport-Zink associé. Soit $(\mathbb{X},\lambda)$ un un groupe p-divisible sur $\bar{k}$ muni d'une action de $\mathcal{O}_F$, d'une polarisation principale λ tels que l'isocristal polarisé de $(\mathbb{X},\lambda)$ muni de son action de F s'identifie à $(V,b\sigma,<.,.>)$ (une fois de plus l'existence d'un tel $(\mathbb{X},\lambda)$ devrait résulter de travaux récents de Rapoport et Kottwitz). Alors, le schéma formel $\breve{\mathcal{M}}(b,\mu)$ classifie les groupes p-divisibles principalement polarisés (X,λ') munis d'une action de $\mathcal{O}_F$, tels que via cette action l'involution de Rosati sur $\mathcal{O}_F$ soit donnée par l'involution $*$, et munis d'une quasi-isogénie compatible à l'action de $\mathcal{O}_F$:

$$\rho : \mathbb{X} \longrightarrow X$$

tels via ρ λ et λ' différent, localement sur la base, d'une constante dans $\mathbb{Q}_p^\times$. On suppose de plus que si

$$\mathrm{Lie}(X) = \bigoplus_{\tau\in I_F} \mathrm{Lie}(X)_\tau$$

désigne la décomposition de $\mathrm{Lie}(X)$ sous l'action de $\mathcal{O}_F$ alors

$$\forall\tau \ \ \mathrm{Lie}(X)_\tau \text{ est localement libre de rang } p_\tau$$

Comme précédemment dans le cas E.L., $\breve{\mathcal{M}}(b,\mu)$ est formellement lisse sur $\boldsymbol{Spf}(\mathcal{O}_{\breve{E}})$. Son complété formel en un point fermé de sa fibre spécial est le spectre formel d'une algèbre de séries formelles en $\frac{1}{2}\sum_\tau p_\tau q_\tau$ variables.

2.2.3. Cas P.E.L. symplectique. — Étant donnée une donnée locale symplectique non ramifiée simple on peut définir de la même façon que dans le cas unitaire l'espace de Rapoport-Zink associé. Nous le noterons $\breve{\mathcal{M}}(b,\mu)$.

2.2.4. Décomposition d'une donnée globale non ramifiée en produits de donnée locales simples. —

2.2.4.1. Cas (A). — Revenons aux notations globales du chapitre précédent. La donnée globale $\mathcal{D}$ couplée au plongement ν fournit une donnée $(B\otimes\mathbb{Q}_p, V\otimes\mathbb{Q}_p, <.,.>, \mu_{\overline{\mathbb{Q}_p}})$ où $\mu_{\overline{\mathbb{Q}_p}}$ est obtenu à partir de μ grâce à ν. Celle ci se scinde en un produit suivant les indices i dans I et j dans J.

Utilisant l'équivalence de Morita on en déduit pour tout i dans I une donnée de type $E.L.$ non ramifiée simple (sans sa classe de σ conjugaison) : (F_{v_i}, V_i, μ_i). Nous noterons

E_i son corps réflex. Avec les notations de 2.2.1.1, le cocaractère μ_i est associé aux couples suivant d'entiers : soient $\Phi_i \subset \Phi$ l'ensemble des τ dans Φ vérifiant $\nu \circ \tau$ induit v_i, alors

$$I_{F_{v_i}} = \{\nu \circ \tau \mid \tau \in \Phi_i\}$$

et μ_i est associé aux

$$(p_{i,\tau}, q_{i,\tau})_{\tau \in I_{F_{v_i}}} = (p_{\nu\circ\tau}, q_{\nu\circ\tau})_{\tau\in\Phi_i}$$

Si maintenant $j \in J$, on obtient une donnée de type P.E.L. non ramifiée unitaire simple sans sa classe de σ conjugaison $(F_{v_j}, V_j, *, < .,. >, \mu_j)$ où $*$ est la conjugaison complexe et μ_j se calcule de la même façon que précédemment. Nous noterons E_j son corps réflex associé.

Il y a donc une inclusion

$$E_\nu \subset \prod_{i\in I} E_i \prod_{j\in J} E_j$$

Remarquons maintenant que

$$B(G_{\mathbb{Q}_p}, \mu_{\overline{\mathbb{Q}_p}}) = \prod_{i\in I} B(\mathrm{GL}_n(F_{w_i}), \mu_i) \times \prod_{j\in J} B(GU(F_{w_j}, n), \mu_j)$$

En effet, l'inclusion $G_{\mathbb{Q}_p} \hookrightarrow \prod_{i\in I} \mathrm{GL}_n(F_{w_i}) \times \prod_{j\in J} GU(F_{w_j}, n)$ induit une inclusion du membre de gauche dans celui de droite. Si maintenant $b = ((b_i)_{i\in I}, (b_j)_{j\in J})$ désigne un élément du membre de droite, pour tout j dans J la condition d'appartenance à $B(GU(F_{w_j}, \mu_j))$ implique que $v_p(c(b_j)) = 1$. Quitte à σ-conjuguer les b_j on peut donc supposer que pour tout j dans J, $c(b_j) = p$. Cela montre que b provient d'une classe de σ-conjugaison de $G_{\mathbb{Q}_p}$.

Pour tout élément b de $B(G_{\mathbb{Q}_p}, \mu_{\overline{\mathbb{Q}_p}})$ notons $b = \prod_{i\in I} b_i \prod_{j\in J} b_j$ sa décomposition. Si $b \in B(G, \mu)$ est donné, la donnée globale $\mathcal{D}$ fournit donc des données locales pour tout i dans I et j dans J.

Définition 2.2.3. — Pour un $b \in B(G_{\mathbb{Q}_p}, \mu_{\overline{\mathbb{Q}_p}})$ nous noterons $(\mathcal{D}_{\mathbb{Q}_p}, b)$ la donnée locale de Rapoport-Zink $(B \otimes \mathbb{Q}_p, V \otimes \mathbb{Q}_p, < .,. >, b, \mu_{\overline{\mathbb{Q}_p}})$ qui se décompose en un produit de données simples comme ci dessus.

2.2.4.2. Cas (C). — La donnée se décompose en un produit de données symplectiques non ramifiées simples indexées par les places de F divisant p. Pour $b \in B(G_{\mathbb{Q}_p}, \mu_{\overline{\mathbb{Q}_p}})$ on note également $(\mathcal{D}_{\mathbb{Q}_p}, b)$ la donnée locale associée.

2.2.5. Espace de Rapoport-Zink associé à $(\mathcal{D}_{\mathbb{Q}_p}, b)$. — Rappelons rapidement la définition de l'espace de Rapoport-Zink associé à $\mathcal{D}$ après tensorisation par $\mathbb{Q}_p$.

Soit donc $b \in B(G_{\mathbb{Q}_p}, \mu_{\overline{\mathbb{Q}_p}})$, soit $\breve{E} = \widehat{E_\nu^{nr}} = \widehat{\mathbb{Q}_p^{nr}}$ le complété de l'extension maximale non ramifiée de E . Nous noterons k le corps résiduel de E_ν et $\bar{k} \simeq \overline{\mathbb{F}}_p$ le corps résiduel de $\breve{E}$. Choisissons un groupe p-divisible $\mathbb{X}/\bar{k}$ ayant pour isocristal muni de structures additionnelles $(V \otimes_{\mathbb{Q}_p} L, b\sigma)$. Nous supposerons que la polarisation de $\mathbb{X}$ est principale c'est à dire que le réseau associé au cristal de $\mathbb{X}$ est autodual dans V_L.

Rappelons la définition de $\breve{\mathcal{M}}(\mathcal{D}_{\mathbb{Q}_p}, b)$:

Définition 2.2.4. — Le schéma formel $\breve{\mathcal{M}}(\mathcal{D}_{\mathbb{Q}_p}, b)/\boldsymbol{Spf}(\mathcal{O}_{\breve{E}})$ est le schéma formel localement formellement de type fini vérifiant : $\forall S/\mathcal{O}_{\breve{E}}$ un schéma sur lequel p est localement nilpotent,

$$\breve{\mathcal{M}}(\mathcal{D}_{\mathbb{Q}_p}, b)(S) = \{(X, \lambda, \iota, \rho)\}/\sim$$

où X est un groupe p divisible sur S muni d'une action ι de $\mathcal{O}_B \otimes \mathbb{Z}_p$, d'une polarisation principale $\lambda : X \longrightarrow \check{X}$ qui induit l'involution $*$ sur $\mathcal{O}_B \otimes \mathbb{Z}_p$, et d'une rigidification

$$\rho : \mathbb{X} \times_k \overline{S} \longrightarrow X \times_S \overline{S}$$

(où $\overline{S}$ désigne la réduction de S modulo p) qui est une quasi-isogénie compatible à l'action de $\mathcal{O}_B \otimes \mathbb{Z}_p$. On suppose de plus que via ρ les polarisations associées à $< .,. >$ sur $\mathbb{X} \times_k \overline{S}$ et λ sur $X \times_S \overline{S}$ diffèrent localement sur $\overline{S}$ d'une constante de $\mathbb{Q}_p^\times$. Cela signifie qu'il existe une fonction localement constante $\alpha : S \longrightarrow \mathbb{Q}_p^\times$ telle que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{X} \times_{\bar{k}} \overline{S} \arrow[r, "\rho"] \arrow[d] & X \times_S \overline{S} \arrow[d, "\alpha.(\lambda \times Id)"] \\
\check{\mathbb{X}} \times_{\bar{k}} \overline{S} & \check{X} \times_S \overline{S} \arrow[l, "\check{\rho}"']
\end{tikzcd}$$

On suppose de plus que X vérifie la condition de Kottwitz relativement à $\mu_{\overline{\mathbb{Q}_p}}$. Deux quadruplets $(X, \lambda, \iota, \rho)$ et $(X', \lambda', \iota', \rho')$ sont équivalents s'il existe un isomorphisme $f : X \xrightarrow{\sim} X'$ compatible aux actions, aux polarisations et tel que $f \circ \rho = \rho'$

$$\begin{tikzcd}
 & X \times_S \overline{S} \arrow[dd, "f", "\simeq"'] \\
\mathbb{X} \times_{\bar{k}} \overline{S} \arrow[ur, "\rho"] \arrow[dr, "\rho'"'] & \\
 & X' \times_S \overline{S}
\end{tikzcd}$$

Remarque 2.2.5. — Il résulte des travaux de Colmez, Fontaine, Breuil que $\mathbb{X}$ se relève en un groupe p-divisible sur $\mathcal{O}_{\breve{E}}$ dont l'isocristal filtré est $(V_L, b\sigma, \mu_{\overline{\mathbb{Q}_p}})$.

Remarque 2.2.6. — L'espace $\breve{\mathcal{M}}(\mathcal{D}_{\mathbb{Q}_p}, b)$ est formellement lisse sur $\boldsymbol{Spf}(\mathcal{O}_{\breve{E}})$. Puisque, comme on la verra, les espaces de Rapoport-Zink uniformisent dans certains cas des strates des variétés Shimura, cela peut paraître en contradiction avec l'existence de singularités dans ces strates. Néanmoins, la fibre spéciale de $\breve{\mathcal{M}}(\mathcal{D}_{\mathbb{Q}_p}, b)$ (le sous schéma réduit) est en général singulière et il n'y a pas de lien entre la lissité formelle d'un schéma formel et les singularités de sa fibre spéciale. Ce qui pourrait induire en erreur est l'exemple de l'espace Drinfeld. Dans ce cas là, les singularités de la fibre spéciale du schéma formel de Drinfeld (des diviseurs à croisement normaux) sont identiques aux

singularités de la fibre spéciale des courbes de Shimura qu'ils uniformisent. Cela est dû au fait que ce schéma formel est adique sur $\boldsymbol{Spf}(\mathcal{O}_{\breve{E}})$ et que donc, sa réduction modulo p est un schéma. En général $\breve{\mathcal{M}}(\mathcal{D}_{\mathbb{Q}_p}, b)$ n'est pas un schéma formel p-adique.

2.2.6. Décomposition de l'espace associé à $(\mathcal{D}_{\mathbb{Q}_p}, b)$ en produit d'espaces simples de type E.L. et P.E.L.. —

2.2.6.1. Cas (A). — Commençons par remarquer que si $\breve{\mathcal{M}}(b, \mu)$ désigne un espace de Rapoport-Zink de type P.E.L. unitaire non ramifié simple, celui ci est muni d'un morphisme

$$\beta : \breve{\mathcal{M}}(b, \mu) \longrightarrow \mathbb{Q}_p^\times / \mathbb{Z}_p^\times$$

mesurant le "défaut" de la polarisation du groupe p-divisible universel à coïncider avec celle définie par $< .,. >$ sur $V_{\mathbb{Q}_p}$.

Soit X^{univ} le groupe p-divisible universel sur $\breve{\mathcal{M}}(\mathcal{D}_{\mathbb{Q}_p}, b)$. L'action de $\mathcal{O}_B \otimes \mathbb{Z}_p$ sur X^{univ}, la polarisation λ et $*$ permettent de décomposer X^{univ} en

$$X^{univ} = \bigoplus_{i \in I} (X_i^{univ} \oplus \check{X}_i^{univ}) \oplus \bigoplus_{j \in J} X_j^{univ}$$

Utilisant le fait que $\mathcal{O}_B \otimes \mathbb{Z}_p$ est un ordre maximal, on peut appliquer une "équivalence de Morita" à chaque terme pour obtenir que l'espace de Rapoport-Zink associé à $(\mathcal{D}_{\mathbb{Q}_p}, b)$ se décompose de la façon suivante si $J \neq \emptyset$:

$$\breve{\mathcal{M}}(\mathcal{D}_{\mathbb{Q}_p}, b) = \prod_{i \in I} \breve{\mathcal{M}}(b_i, \mu_i) \times \left(\prod_{j \in J} \breve{\mathcal{M}}(b_j, \mu_j) \right)^1$$

où

$$\left(\prod_{j \in J} \breve{\mathcal{M}}(b_j, \mu_j) \right)^1 \hookrightarrow \prod_{j \in J} \breve{\mathcal{M}}(b_j, \mu_j)$$

est l'ouvert fermé défini par l'égalité : $\forall j, j' \in J,\ \beta_j = \beta_{j'}$.

Dans le cas où $J = \emptyset$,

$$\breve{\mathcal{M}}(\mathcal{D}_{\mathbb{Q}_p}, b) = \prod_{i \in I} \breve{\mathcal{M}}(b_i, \mu_i) \times \mathbb{Q}_p^\times / \mathbb{Z}_p^\times$$

Remarque 2.2.7. — Cette décomposition en produit d'espaces plus simples par équivalence de Morita est un des points clef de tout ce qui suit. Par exemple, elle permet dans [**26**] de ramener l'étude d'espaces de modules associés à des groupes p-divisibles de dimension supérieur à 1 à celle de groupes p-divisibles de dimension 1.

Exemple 2.2.8. — Supposons que pour un $i \in I$, μ_i soit tel qu'il existe un $\tau_0 \in I_{F_{v_i}}$ tel que $\forall \tau \neq \tau_0\ p_{i,\tau} = 0$. Alors, le schéma formel $\breve{\mathcal{M}}(b_i, \mu_i)$ est l'espace de modules des $\mathcal{O}_{F_{w_i}}^{\tau_0}$-modules p-divisibles X (au sens de [**26**]) sur un schéma S sur lequel p est localement nilpotent munis d'une rigidification avec un $\mathcal{O}_{F_{w_i}}^{\tau_0}$-module p-divisible sur $\overline{\mathbb{F}_p}$ de F isocristal associé à b_i et vérifiant

$$\mathrm{Lie}(X) \text{ est un } \mathcal{O}_S - \text{module libre de rang } p_{i,\tau_0}$$

Exemple 2.2.9. — Avec les notations précédentes, si pour un i appartenant à I $\mu_i = 1$ alors, $B(\mathrm{GL}_n(F_{w_i}, \mu_i))$ est réduit à un seul élément b_i qui est associé à un isocristral étale et

$$\breve{\mathcal{M}}(b_i, \mu_i) = \mathrm{GL}_n(F_{w_i})/C_0$$

comme espace discret (c'est à dire union disjointe de copies de $\boldsymbol{Spf}(\mathcal{O}_{\breve{E}})$).

Il en est de même pour un j appartenant à J.

Exemple 2.2.10. — Avec les notations de l'exemple 2.2.8 si $p_{i,\tau_0} = 1$ et b_i est basique, $\breve{\mathcal{M}}(b_i, \mu_i)$ paramétrise des déformations par quasi-isogénies de $\mathcal{O}_{F_{v_i}}^{\tau_0}$-modules p-divisibles de dimension 1 et de hauteur n.

$$\breve{\mathcal{M}}(b_i, \mu_i) \simeq \boldsymbol{Spf}(\mathcal{O}_{\breve{E}}[[T_1, \ldots, T_{n-1}]]) \times \mathbb{Z}$$

l'espace de Lubin Tate sur lequel opère $J_{b_i} = D_{\frac{1}{n}}^{\times}$.

2.2.6.2. Cas (C). — Comme ci dessus, il y a une décomposition

$$\breve{\mathcal{M}}(\mathcal{D}_{\mathbb{Q}_p}, b) = \left(\prod_{w|p} \breve{\mathcal{M}}(b_w, \mu_w) \right)^1$$

2.3. Continuité de l'action de J_b

Nous notons dans cette section $\breve{\mathcal{M}}$ un espace de Rapoport-Zink associé à une donnée locale simple ou bien à une donnée globale.

Le schéma formel $\breve{\mathcal{M}}$ est muni d'une action à gauche de J_b via

$$\forall g \in J_b \ \ \forall (X, \rho) \in \breve{\mathcal{M}} \quad (X, \rho).g = (X, \rho \circ g^{-1})$$

Lorsque $\breve{\mathcal{M}} = \breve{\mathcal{M}}(\mathcal{D}_{\mathbb{Q}_p}, \mu_{\overline{\mathbb{Q}_p}})$, cette action se fait composante par composante au sens suivant : dans le cas (A), $\prod_{i \in I} J_{b_i} \times \prod_{j \in J} J_{b_j}$ opère sur

$$\prod_{i \in I} \breve{\mathcal{M}}(b_i, \mu_i) \times \prod_{j \in J} \breve{\mathcal{M}}(b_j, \mu_j)$$

et $J_b \subset \prod_{i \in I} J_{b_i} \times \prod_{j \in J} J_{b_j}$ stabilise l'ouvert fermé

$$\breve{\mathcal{M}}(\mathcal{D}_{\mathbb{Q}_p}, b) \subset \prod_{i \in I} \breve{\mathcal{M}}(b_i, \mu_i) \times \prod_{j \in J} \breve{\mathcal{M}}(b_j, \mu_j)$$

Définition 2.3.1. — Soit $\mathfrak{X}$ un schéma formel muni d'une action d'un groupe localement compact totalement discontinu H. Nous dirons que H agit continûment sur $\mathfrak{X}$ si tout ouvert quasicompact U de $\mathfrak{X}$ est stabilisé par un voisinage de l'identité dans H, et si $\mathcal{I}_U \subset \mathcal{O}_U$ est un idéal de définition de $\mathcal{O}_U$, $\forall N \in \mathbb{N}$ il existe un sous-groupe compact ouvert $K_N \subset H$ suffisamment petit tel que $\forall g \in K_N$, $g^* : \mathcal{O}_U/\mathcal{I}_U^N \longrightarrow \mathcal{O}_U/\mathcal{I}_U^N$ est l'identité.

Proposition 2.3.2. — *Le groupe J_b opère continûment sur $\breve{\mathcal{M}}$.*

Démonstration. — On vérifie aisément que l'assertion ci dessus est équivalente à la suivante : si S est un schéma quasicompact sur lequel p est nilpotent et $(X, \rho) \in \breve{\mathcal{M}}(S)$, il existe un voisinage de l'identité dans J_b tel que pour g dans un tel voisinage, $(X, \rho \circ g) \simeq (X, \rho)$.

Notons $\mathrm{End}(\mathbb{X})$ l'anneau des endomorphismes du groupe p-divisible $\mathbb{X}$ muni de ses structures additionnelles (λ et ι) sur $\overline{\mathbb{F}_p}$. L'anneau $\mathrm{End}(\mathbb{X})$ est un $\mathbb{Z}_p$-module libre de type fini. De plus, $\forall N > 0, Id + p^N \mathrm{End}(\mathbb{X})$ est un sous-groupe compact ouvert de J_b et lorsque N varie cette famille de sous-groupes forme une base de voisinages de l'identité dans J_b.

Considérons la quasi-isogénie sur $\overline{S}$

$$\rho \circ (Id + p^N(u \times 1)) \circ \rho^{-1} = Id + p^N \rho(u \times 1)\rho^{-1} \in \mathrm{End}(X \times_S \overline{S})_{\mathbb{Q}}$$

Le schéma S étant quasicompact et p nilpotent, par rigidité des quasi-isogénies

$$\forall u \in \mathrm{End}(\mathbb{X})\ \exists N\ p^N \rho(u \times 1)\rho^{-1} \text{ se relève en un endomorphisme de } X/S$$

Mais l'algèbre $\mathrm{End}(\mathbb{X})$ est un $\mathbb{Z}_p$- module de type fini. On peut donc trouver un tel N uniformément pour tous les éléments u de $\mathrm{End}(\mathbb{X})$. C'est à dire,

$$\exists N\ \forall u \in \mathrm{End}(\mathbb{X})\ \ p^N \rho(u \times 1)\rho^{-1} \text{ se relève en un endomorphisme de } X$$

Nous noterons $(p^N \rho(u \times 1)\rho^{-1})\breve{}$ce relèvement. Comme $\mathrm{End}(\mathbb{X})$ est un anneau p-adique,

$$Id + p(p^N \rho(u \times 1)\rho^{-1})\breve{} \in \mathrm{Aut}(X)$$

On en déduit que $\forall u \in \mathrm{End}(\mathbb{X})$, $Id + p^{N+1}\rho(u \times 1)\rho^{-1}$ se relève en un automorphisme de X ce qui montre que

$$(X, \rho) \simeq (Id + p^{N+1}u).(X, \rho)$$

□

Remarque 2.3.3. — Bien sûr, cette démonstration s'applique à un espace de Rapoport-Zink général tel qu'il est défini dans [**51**].

2.4. Un théorème de finitude pour l'action de J_b

Dans cette section nous oublions les notations globales précédentes et considérons des espaces associés à des donnés locales simples.

Définition 2.4.1. — On posera comme précédemment $L = W(\bar{k})_{\mathbb{Q}}$. L'automorphisme σ désignera toujours un Frobenius géométrique de l'extension non ramifiée $L|\mathbb{Q}_p$. Le cristal associé à un groupe p-divisible est son cristal de Dieudonné covariant (M, V) où V est une application σ linéaire, le Verschiebung.

Bien que dans notre situation $L = \breve{E}$ nous préférons distinguer les notations puisque le rôle de ces deux corps est totalement différent.

2.4.1. Description de $\breve{\mathcal{M}}(b,\mu)(\bar{k})$ en termes de cristaux. — Soit donc une donnée locale de type E.L. ou P.E.L. non ramifiée simple.

Considérons l'isocristal $(V \otimes_{\mathbb{Q}_p} L, b\sigma)$ muni de son action de F et, dans le cas P.E.L., de sa polarisation

$$< .,. >: V_L \times V_L \longrightarrow \mathbb{Q}_p(1)$$

Un élément de $\breve{\mathcal{M}}(b,\mu)(\bar{k})$ s'identifie alors à un cristal M dans $(V_L, b\sigma)$ stable par l'action de $\mathcal{O}_F$ tel que M comme $\mathcal{O}_L$ réseau soit autodual à une constante de $\mathbb{Q}_p^\times$ près (c'est à dire $\exists k \in \mathbb{Z}\ M^\vee = p^k M$) et tel qu'on ait une égalité de fonctions polynomiales :

$$\forall b \in \mathcal{O}_F \quad \det(b; M/VM) = \det(b; V_0)$$

Dit autrement, la dernière condition s'exprime en disant que le polygone de Hodge arithmétique "avec structures additionnelles" est fixé égal à μ. Reprenons les notations de 2.2 et détaillons les différents cas :

Cas (AL) : Reprenons les notations de 2.1.1. Posons $N = V_L$, $V = b\sigma$. Décomposons N sous l'action de F

$$N = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} N(i)$$

où

$$N(i) = \{n \in N \mid \forall x \in F\ x.n = \sigma^i(x)n\}$$

Supposons μ donné par des $(a_i)_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}$, $1 \leq a_i \leq n$ (qui sont les p_τ dans les notations de 2.2.1.1). Un élément de $\breve{\mathcal{M}}(\bar{k})$ est donné par un $\mathcal{O}_F \otimes \mathcal{O}_L$-réseau $M \subset N$ tel que $pM \subset VM \subset M$, et si $M = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} M(i)$ où

$$M(i) = \{m \in M \mid \forall x \in \mathcal{O}_F\ x.m = \sigma^i(x)m\}$$

alors, l'inclusion $VM(i) \subset M(i+1)$ induit une décomposition

$$M/VM = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} M(i)/VM(i-1)$$

où $M(i)/VM(i-1)$ est un $\bar{k}$-espace vectoriel sur lequel le corps résiduel de F agit via le Frobenius géométrique à la puissance i. La condition de Kottwitz s'écrit alors avec ces notations

$$\dim_{\bar{k}} M(i)/VM(i-1) = a_i$$

Cas (AU) : Prenons les notations de l'annexe D.1. Notons encore (N, V) l'isocristal $(V_L, b\sigma)$. Le produit symplectique sur V induit une polarisation $< .,. >: N \times N \longrightarrow \mathbb{Q}_p(1)$. Si

$$N = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/2d\mathbb{Z}} N(i)$$

est la décomposition de N sous l'action de F comme dans le cas (AL), la condition d'être un F-module hermitien :

$$\forall b \in F \ \ < bv, v' > = < v, b^* v' >$$

s'exprime en disant que

$$\forall i \neq j+d \ < N(i), N(j) >= 0$$

$$\text{et le produit } < .,. > \text{ est parfait sur } N(i) \times N(i+d)$$

Avec les notations de D.1 supposons μ donné par des entiers $(a_i)_{0 \leq i \leq d-1}$. Un élément de $\breve{\mathcal{M}}(b,\mu)(\bar{k})$ est alors donné par un $\mathcal{O}_F \otimes \mathcal{O}_L$-réseau $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/2d\mathbb{Z}} M(i)$ tel que $pM \subset VM \subset M$, M est autodual à un élément de $\mathbb{Q}_p^\times$ près et

$$\forall\, 0 \leq i \leq d \quad \dim_{\bar{k}}(M(i)/VM(i-1)) = a_i$$

Cas (C) : L'isocristal (N,V) est polarisé via $< .,. >: N \times N \longrightarrow \mathbb{Q}_p(1)$. Comme précédemment il y a une décomposition $N = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} N(i)$. De plus,

$$\forall i \neq j \quad < N(i), N(j) >= 0$$

$$\text{et } < .,. > \text{ est parfait sur } N(i) \times N(i)$$

Un élément de $\breve{\mathcal{M}}(b,\mu)(\bar{k})$ est alors donné par un $\mathcal{O}_F \otimes \mathcal{O}_L$-réseau $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} M(i)$ tel que $pM \subset VM \subset M$, qui est autodual à un élément de $\mathbb{Q}_p^\times$ près et tel que

$$\forall 0 \leq i < d \ \ \dim_k(M(i)/VM(i-1)) = n$$

Action de J_b Avec les notations précédentes, le groupe J_b admet la description suivante

$$J_b = \{g \in \mathrm{Aut}(N,V) \mid \forall n, n' \ < gn, gn' >= c(g) < n, n' > \}$$

Pour un élément g de J_b vu comme un élément de $G(L)$, l'action de g sur $\breve{\mathcal{M}}(\bar{k})$ est, en termes de cristaux M, l'application $M \longmapsto g.M$.

2.4.2. Lien avec l'immeuble de G. — Donnons une autre description de $\breve{\mathcal{M}}(\bar{k})$ dans l'esprit de la section 4 de ([**47**]) qui le fait apparaître comme un sous-ensemble de l'immeuble de G sur L :

$$\breve{\mathcal{M}}(b,\mu)(\bar{k}) = \{g \in G(L)/K \mid Kg^{-1}bg^\sigma K = K\mu(p)K\}$$

où $K = G(W(k))$ est un sous-groupe compact hyperspécial. On vérifie cette égalité en utilisant le lemme 7.4 de [**41**]. Le lien avec la définition en termes de cristaux est le suivant : soit $M \subset V_L$ un cristal, $M \in \breve{\mathcal{M}}(\bar{k})$, de stabilisateur K dans $G(L)$. A $g \in G(L)/K$ est associé le réseaux $g.M$. Lorsque g vérifie la condition ci dessus, $g.M$ est bien un cristal de polygone de Hodge associé à μ. Dans cette description, $g_0 \in J_b$ opère de la façon suivante :

$$gK \longmapsto g_0 gK$$

Remarque 2.4.2. — Si l'on suppose b "decent" au sens de [**51**], c'est à dire

$$\exists s \ \ (b\sigma)^s = (s\nu_b)(p)\sigma^s$$

où ν_b désigne le morphisme des pentes alors, dans toutes les considérations précédentes on peut remplacer L par $\mathbb{Q}_{p^s}$ l'extension non ramifiée de degré s de $\mathbb{Q}_p$.

2.4.3. Orbites de J_b dans $\breve{\mathcal{M}}(\bar{k})$. — On note (X, ρ) les éléments de $\breve{\mathcal{M}}(\bar{k})$ où X désigne un groupe p-divisible sur $\bar{k}$ muni de son action de $\mathcal{O}_F$ et, dans le cas unitaire ou symplectique, de sa polarisation principale. La quasi-isogénie $\rho : \mathbb{X} \longrightarrow X$ désigne la rigidification avec le groupe p-divisible $\mathbb{X}$ défini sur $\bar{k}$.

Lemme 2.4.3. — *Deux éléments $(X_1, \rho_1), (X_2, \rho_2) \in \breve{\mathcal{M}}(\bar{k})$ sont dans la même J_b-orbite ssi*

$$X_1 \simeq X_2$$

comme groupes p-divisbles munis de structures additionnelles.

Démonstration. — Soit $g \in J_b$ tel que $(X_1, \rho_1) \simeq (X_2, \rho_2 \circ g^{-1})$. Alors, $X_1 \simeq X_2$. Réciproquement, supposons qu'il y ait un isomorphisme de groupes p-divisibles munis de structures additionnelles

$$f : X_1 \xrightarrow{\sim} X_2$$

Considérons la quasi-isogénie $g = \rho_1^{-1} \circ f^{-1} \circ \rho_2 : \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$. Par définition $g \in J_b$. Le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{X} \arrow[r, "\rho_1"] \arrow[d, "g^{-1}"'] & X_1 \arrow[d, "f"'] \\
\mathbb{X} \arrow[r, "\rho_2"] & X_2
\end{tikzcd}$$

ce qui montre que $(X_1, \rho_1) \simeq (X_2, \rho_2 \circ g^{-1})$. □

2.4.4. Action sur les composantes irréductibles. —

Définition 2.4.4. — Si $\breve{\mathcal{M}}$ désigne un espace de Rapoport-Zink, nous noterons $\overline{\mathcal{M}}$ la fibre spéciale de $\breve{\mathcal{M}}$ c'est à dire le sous-schéma réduit défini sur $\bar{k}$.

Rappelons ([**51**]) que les composantes irréductibles de $\overline{\mathcal{M}}$ sont des variétés projectives sur $\bar{k}$ et que $\overline{\mathcal{M}}$ étant localement de type fini une composante irréductible n'intersecte qu'un nombre fini d'autres composantes. Le groupe J_b permute ces composantes.

Théorème 2.4.5. — *Soit $\breve{\mathcal{M}}$ un espace de Rapoport-Zink de type E.L ou P.E.L. non ramifié simple ou encore associé à une donnée globale non ramifiée. Il y a un nombre fini d'orbites de de composantes irréductibles de $\overline{\mathcal{M}}$ sous l'action de J_b.*

Démonstration. — Du point de vue de l'immeuble de G sur L ce théorème est un théorème de finitude pour l'action de J_b sur l'immeuble qui généralise la proposition 2.18 de [**51**].

D'après les remarques du début, un ouvert quasicompact de $\overline{\mathcal{M}}$ intersecte un nombre fini de composantes irréductibles et réciproquement une union finie de composantes irréductibles est quasicompacte. Le théorème est donc équivalent à l'énoncé : il existe un ouvert quasicompact U de $\overline{\mathcal{M}}$ tel que $\overline{\mathcal{M}} = J_b.U$.

On vérifie en utilisant la section 2.2.6 que l'on peut se ramener au cas des espaces associés à une donnée locale non ramifiée simple. Nous supposerons donc que $\breve{\mathcal{M}}$ est de ce type là.

Commençons par rappeler le

Critère de quasicompacité 2.4.6 **(corollaire 2.31 de [51])**
Un ouvert U de $\overline{\mathcal{M}}$ est quasicompact ssi $\exists M \in \overline{\mathcal{M}}(\bar{k})$ $\exists N \in \mathbb{N}$

$$U(\bar{k}) \subset \{M' \in \breve{\mathcal{M}}(\bar{k}), p^N M \subset M' \subset p^{-N} M\}$$

de façon équivalente : $\exists N$, la quasi-isogénie universelle ρ^{univ} soit telle que sur U $p^N \rho^{univ}$ et $p^N (\rho^{univ})^{-1}$ soient des isogénies.

La démonstration consiste maintenant à exhiber un nombre fini d'orbites dans $\overline{\mathcal{M}}(\bar{k})$ (ou, dans le cas unitaire et symplectique, dans un ensebmle plus gros : confère les définitions suivant 2.4.12) sous l'action de J_b vérifiant : il existe une constante c telle que tout point de $\overline{\mathcal{M}}(\bar{k})$ soit à distance inférieure à c d'un point d'une de ces orbites.

Étant donné qu'il n'y a qu'un nombre fini de polygones de Hodge possibles pour un groupe p-divisible muni de structures additionnelles isogène à $\mathbb{X}$, l'énoncé précédent est équivalent au même énoncé sans la condition de Kottwitz sur le polygone de Hodge arithmétique dans la définition de $\breve{\mathcal{M}}(\bar{k})$. Nous ignorerons donc cette condition. Cela signifie que nous allons démontrer le théorème annoncé non pas sur l'espace $\breve{\mathcal{M}}$ mais sur l'espace plus gros défini de façon analogue, sans la condition de Kottwitz sur le polygone de Hodge. Nous noterons encore $\breve{\mathcal{M}}$ cet espace. Le lemme 2.4.3 est bien sûr encore valable pour cet espace.

Commençons par rappeler la définition suivante :

Définition 2.4.7 **([61] section 3)**. — Soit S un schéma de caractéristique p et X un groupe p-divisible sur S. Soit λ un nombre rationnel positif. On dit que X est divisible par rapport à la pente λ s'il existe des entiers naturels r, s tels que $\lambda = \dfrac{r}{s}$ et tels que la quasi-isogénie

$$F^s p^{-r} : X \longrightarrow X^{(p^s)}$$

soit une isogénie.

Nous allons utiliser le résultat suivant de Zink :

Proposition 2.4.8 **([61] proposition 12)**. — *Soit K un corps parfait de caractéristique p et X/K un groupe p-divisible de pentes $\lambda_1 > \cdots > \lambda_r$. Il existe une constante c ne dépendant que de la hauteur de X et un groupe p-divisible Y/K muni d'une isogénie avec X de degré plus petit que c tel que Y vérifie la propriété suivante : Y est muni d'une filtration par des sous groupes p-divisibles*

$$(0) = Y_0 \subset Y_1 \subset \cdots \subset Y_r = Y$$

telle que pour tout i, Y_i soit divisible par rapport à la pente λ_i et Y_i/Y_{i-1} soit de pente λ_i. De plus, une telle filtration se scinde.

Rappels sur la démonstration. — Rappelons que dans la démonstration, si (M, V) est le cristal de X et si $U = p^{-r_1}V^{s_1}$, on pose

$$M' = M + UM + \cdots + U^{h-1}M$$

Le point crucial de la démonstration consiste à démontrer que M' est stable par U. Une fois cela démontré on peut donc décomposer M' en partie bijective et topologiquement nilpotente pour l'action de U :

$$M' = M'_{bij} \oplus M'_{nil}$$

Rappliquant le même procédé à M'_{nil} pour $U = p^{-r_2}V^{s_2}$ on obtient ainsi par récurrence la filtration souhaitée.

De plus, à la première étape $M \subset M' \subset p^{-r_1(h-1)} \subset p^{-h(h-1)}M$ car $r_1 \leq s_1 \leq h$. Répétant ce type d'inégalité à chaque étape, le nombre de pentes étant inférieur à h, l'existence du c s'en déduit. □

Fait 2.4.9. — *Si le corps K est algébriquement clos et si les pentes λ_i sont fixées, tous les groupes Y intervenant dans l'énoncé du lemme précédent sont isomorphes. Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ désignent les pentes du cristal (M, V) associé et $(m_i)_{1 \leq i \leq r}$ les multiplicités associées*

$$M \simeq \oplus_{i=1}^{r} \left(\oplus_1^{m_i} M^{\lambda_i} \right)$$

où si $\lambda = \frac{r}{s}, r \wedge s = 1$

$$M^{\lambda} = W(K)[F, V]/(V^s - p^r, FV - p)$$

Revenons à la démonstration du théorème. Expliquons comment démontrer le théorème dans le cas (AL) lorsque $F = \mathbb{Q}_p$, c'est à dire lorsqu'il n'y a pas de structure additionnelle.

Appliquons le lemme de Zink à $\mathbb{X}$. Soit donc $Y_0/\bar{k}$ un groupe p-divisible tel qu'il est donné par le lemme de Zink avec une isogénie : $f_0 : \mathbb{X} \longrightarrow Y_0$. Soit $\widetilde{\mathcal{O}}$ la J_b-orbite de (Y_0, f_0) dans $\breve{\mathcal{M}}(\bar{k})$.

Soit maintenant $(X, \rho) \in \breve{\mathcal{M}}(\bar{k})$. Appliquons le lemme de Zink à X : soit $Y/\bar{k}$ et $f : X \longrightarrow Y$ l'isogénie de degré inférieur à c (où c ne dépend pas de X mais seulement de $\mathbb{X}$ puisqu'il ne dépend que de la hauteur du groupe p-divisible). Considérons le point $(Y, f \circ \rho) \in \breve{\mathcal{M}}(\bar{k})$. Il est clair que ce point est à distance inférieure à c de (X, ρ). De plus, d'après le lemme 2.4.3 et 2.4.9, $(Y, f \circ \rho) \in \widetilde{\mathcal{O}}$.

On en déduit donc le théorème lorsqu'il n'y a pas de structures additionnelles.

Démontrons maintenant le cas (AL) en général, c'est à dire lorsque l'on ajoute l'action de $\mathcal{O}_F$. Pour cela démontrons des variantes de 2.4.8 et 2.4.9.

Lemme 2.4.10. — *Soit K un corps parfait de caractéristique p et X/K un groupe p-divisible muni d'une action de $\mathcal{O}_F$ de pentes $\lambda_1 > \cdots > \lambda_r$. Il existe une constante c ne dépendant que de la hauteur de X, un groupe p-divisible Y/K muni d'une action de $\mathcal{O}_F$, et d'une isogénie $\mathcal{O}_F$ équivariante avec X de degré plus petit que c, tel que Y vérifie la propriété suivante : Y est muni d'une $\mathcal{O}_F$-filtration par des sous groupes p-divisibles munis d'une action de $\mathcal{O}_F$*

$$(0) = Y_0 \subset Y_1 \subset \cdots \subset Y_r = Y$$

telle que pour tout i, Y_i soit divisible par rapport à la pente λ_i et Y_i/Y_{i-1} soit de pente λ_i. De plus, une telle filtration se scinde.

Démonstration. — Soit (M, V) le cristal de X muni de son action de $\mathcal{O}_F$, c'est à dire d'un morphisme $\mathcal{O}_F \longrightarrow \mathrm{End}(M, V)$. Reprenons le rappel de la démonstration du lemme 2.4.8. L'opérateur U qui y est défini commute à l'action de $\mathcal{O}_F$, puisque V commute à l'action de $\mathcal{O}_F$. Le cristal M' est donc stable par l'action de $\mathcal{O}_F$. La décomposition de M' en parties bijectives et topologiquement nilpotente sous l'action de U est donc stable par l'action de $\mathcal{O}_F$. Le reste de la démonstration est identique. □

Lemme 2.4.11. — *Soient Y_1, Y_2 deux groupes p-divisibles sur un corps algébriquement clos K munis d'une action de $\mathcal{O}_F$, isogènes comme groupes munis d'une action de $\mathcal{O}_F$, et du type de ceux fournis par le lemme précédent. Alors, $Y_1 \simeq Y_2$ comme groupes p-divisibles munis d'une action de $\mathcal{O}_F$.*

Démonstration. — D'après 2.4.9, la catégorie $\mathbb{Z}_p$-linéaire $\mathcal{C}$ des groupes p-divisibles sur K de pente λ divisibles par rapport à λ est semi-simple, d'objet simple ayant pour cristal le cristal M^λ. L'algèbre $\mathrm{End}(M^\lambda)$ est isomorphe à $\mathcal{O}_{D_\lambda}$, l'ordre maximal dans une algèbre à division d'invariant λ sur $\mathbb{Q}_p$. La catégorie des objets de $\mathcal{C}$ munis d'une action de $\mathcal{O}_F$ est donc équivalente à celle des $\mathcal{O}_{D_\lambda} \otimes \mathcal{O}_F$-modules de type fini sans torsion (on pourra consulter le chapitre II de [**59**] pour la théorie des $\mathcal{O}_{D_\lambda}$ modules de type fini qui est analogue à celle des modules de type fini sur un anneau de valuation discrète). L'algèbre $\mathcal{O}_{D_\lambda} \otimes \mathcal{O}_F$ est isomorphe à $M_d(\mathcal{O}_{D'_{\lambda'}})$ pour un entier d et un nombre rationnel λ', où $D'_{\lambda'}$ désigne une algèbre à division d'invariant λ' sur F, et $\mathcal{O}_{D'_{\lambda'}}$ son ordre maximal. Par équivalence de Morita la catégorie des $\mathcal{O}_{D_\lambda} \otimes \mathcal{O}_F$-modules est équivalente à celle des $\mathcal{O}_{D'_{\lambda'}}$-modules. Or, deux $\mathcal{O}_{D'_{\lambda'}}$-modules de type fini sans torsion M_1, M_2 vérifiant $M_1 \otimes \mathbb{Q}_p \simeq M_2 \otimes \mathbb{Q}_p$ comme $D'_{\lambda'}$-modules sont isomorphes puisqu'ils ont même rang. D'où le résultat lorsque Y_1 etY_2 ont une seule pente. Le cas général s'en déduit puisque la décomposition de 2.4.9 en somme de groupes p-divisibles isoclins est stable par l'action de $\mathcal{O}_F$. □

En utilisant ces deux lemmes, la démonstration du cas (AL) est analogue au cas déjà démontré lorsque $F = \mathbb{Q}_p$: il suffit de remplacer groupe p-divisible par groupe p-divisible muni d'une action de $\mathcal{O}_F$.

Passons maintenant au cas (AU). Commençons avant par une définition

Définition 2.4.12. — Soit S un schéma et X un groupe p-divisible sur S. Soit N un entier. On appelle polarisation p^N-quasi-principale une polarisation $\lambda : X \longrightarrow \check{X}$ telle que $p^N\lambda^{-1}$ soit une isogénie.

Une polarisation p^0-quasi-principale est donc une polarisation principale.

Définition 2.4.13. — Soit N un entier. On définit le schéma formel $\check{\mathcal{M}}_{(p^N)}$ sur $\boldsymbol{Spf}(\mathcal{O}_{\check{E}})$ comme étant l'espace de modules des groupes p-divisibles X sur un schéma sur lequel p est localement nilpotent, munis d'une action de $\mathcal{O}_F$, d'une polarisation p^N-quasi-principale λ, et d'une rigidification $\rho : \mathbb{X} \longrightarrow X$ qui est une quasi-isogénie compatible à

l'action de $\mathcal{O}_F$ et qui transforme λ en un multiple rationnel de la polarisation sur $\mathbb{X}$. On ne suppose pas la condition de Kottwitz vérifiée.

Il est implicite dans cette définition que $\breve{\mathcal{M}}_{(p^N)}$ est représentable, ce qui se déduit du théorème 2.16 de [**51**] comme dans le théorème 3.25 de [**51**]. Cependant, nous n'utiliserons que l'ensemble $\breve{\mathcal{M}}_{(p^N)}(\bar{k})$. Le schéma formel $\breve{\mathcal{M}}_{(p^N)}$ est muni d'une action de J_b définie de façon analogue à celle sur $\breve{\mathcal{M}}$. Il y a une immersion J_b-équivariante $\breve{\mathcal{M}} = \breve{\mathcal{M}}_{(p^0)} \hookrightarrow \breve{\mathcal{M}}_{(p^N)}$.

Nous allons démontrer l'existence d'un entier N et d'un nombre fini de J_b-orbites $\widetilde{\mathcal{O}}_1, \ldots, \widetilde{\mathcal{O}}_r$ dans $\breve{\mathcal{M}}_{(p^N)}(\bar{k})$ vérifiant : il existe une constante c telle que tout élément de $\breve{\mathcal{M}}(\bar{k})$ est à distance inférieure à c d'une des orbite $\widetilde{\mathcal{O}}_1, \ldots, \widetilde{\mathcal{O}}_r$. Cela démontrera le théorème dans le cas (AU).

Commençons par une nouvelle variante du lemme 2.4.8 :

Lemme 2.4.14. — *Dans l'énoncé du lemme 2.4.10, supposons de plus X muni d'une polarisation principale λ compatible à l'action de $\mathcal{O}_F$ au sens où l'involution de Rosati induit l'involution $*$ sur $\mathcal{O}_F$. Il existe alors un entier N ne dépendant que de la hauteur de X tel que le groupe p-divisible Y soit muni d'une polarisation p^N-quasi-principale λ' compatible à l'action de $\mathcal{O}_F$ et à l'isogénie entre X et Y.*

Démonstration. — Soient M_1 le cristal de X et M_2 le cristal de Y. Soit une isogénie $f : Y \longrightarrow X$ de degré inférieur à c. Elle induit une inclusion $M_2 \longrightarrow M_1$. Le cristal M_1 est muni d'une polarisation $< .,. >: M_1 \times M_1 \longrightarrow \mathbb{Z}_p(1)$ où $\mathbb{Z}_p(1)$ est le cristal $(W(K), V)$ avec V le Verschiebung sur les vecteurs de Witt. Le produit symplectique $< .,. >$ est parfait au niveau des $W(K)$-modules sous-jacents aux cristaux. Si Λ est un $W(K)$-réseau dans le $W(K)_{\mathbb{Q}}$ espace vectoriel associé à M_1, nous noterons $\Lambda^\vee$ le réseau dual par rapport à $< .,. >$. La restriction du produit $< .,. >$ à M_2 donne une polarisation λ' de Y telle que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\lambda"] & Y \arrow[d, "\lambda'"'] \\ \check{X} & \check{Y} \arrow[l, "\check{f}"'] \end{tikzcd}$$

Étant donné que le degré de f est borné par c, c'est à dire $[M_1 : M_2] \leq c$, il existe un entier N ne dépendant que de c et de la hauteur de X (et donc que de la hauteur de X) tel que $p^N M_1 \subset M_2 \subset M_1$. Cela implique que

$$M_2^\vee \subset p^{-N} M_1^\vee = p^{-N} M_1 \subset p^{-2N} M_2$$

Et donc, $p^{2N} \lambda'^{-1}$ est une isogénie. □

Passons maintenant à un analogue faible de 2.4.9 :

Lemme 2.4.15. — *Supposons K algébriquement clos. Soit N un entier. Il n'y a qu'un nombre fini de classes d'isomophismes de groupes p-divisibles Y sur K munis d'une action de $\mathcal{O}_F$, d'une polarisation p^N-quasi-principale compatible à l'action de $\mathcal{O}_F$, possédant*

une $\mathcal{O}_F$-filtration comme dans le lemme précédent et isogènes avec leurs structures additionnelles à un même X fixé.

Démonstration. — Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les pentes de X (qui sont symétriques par rapport à 1/2). Soit l'anneau $R = \prod_i \mathcal{O}_{D_{\lambda_i}}$. Cet anneau est Morita-équivalent à $\mathrm{End}(X)$. Il y a un isomorphisme $\mathrm{End}(\check{X}) \simeq \mathrm{End}(X)^{opp}$ et la polarisation principale λ induit donc une involution sur $\mathrm{End}(X)$. Celle-ci induit une involution sur R permutant les facteurs $\mathcal{O}_{D_\lambda}$ et $\mathcal{O}_{D_{1-\lambda}}$. Soit A l'anneau $R \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_F$ muni de l'involution $\#$ déduite de celle sur R par tensorisation avec celle sur $\mathcal{O}_F$. Considérons la catégorie $\mathbb{Z}_p$-linéaire $\mathcal{C}$ des groupes p-divisibles Y sur K, de pentes incluses dans l'ensemble $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$, munis d'une action de $\mathcal{O}_F$ et possédant une $\mathcal{O}_F$ filtration comme dans le lemme 2.4.8. Cette catégorie est semi-simple, équivalente à la catégorie des A-modules à gauche de type fini sans torsion. Si Y est comme dans l'énoncé, le A module associé est muni d'une application symplectique $\#$-hermitienne associée à sa polarisation

$$< .,. >: M \times M \longrightarrow \mathbb{Z}_p$$

La condition d'être p^N-quasi-principale signifie que

$$M \subset M^\vee \subset p^{-N} M^\vee \subset M \otimes \mathbb{Q}_p$$

Le résultat est donc une conséquence du lemme qui suit. □

Lemme 2.4.16. — *Soit A une $\mathbb{Z}_p$-algèbre qui est un $\mathbb{Z}_p$-module libre de rang fini, $*$ une involution de A, et B l'anneau $A_{\mathbb{Q}_p}$ muni de $* \otimes 1$. Soit $\mathcal{R}$ une classe d'isomorphismes de A-modules qui sont des $\mathbb{Z}_p$ modules libres de type fini. Si $M \in \mathcal{R}$, et $< .,. >: M \times M \longrightarrow \mathbb{Z}_p$ est un produit symplectique hermitien relativement à $\#$, parfait sur le $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel $M_{\mathbb{Q}_p}$, nous noterons $M^\vee \subset M_{\mathbb{Q}_p}$ le réseau dual. Soit $N \in \mathbb{N}$. Il existe un nombre fini de classes d'isomorphismes de tels A-modules symplectiques hermitiens $(M, < .,. >)$ tels que la classe d'isomorphisme de M soit $\mathcal{R}$ et $M \subset M^\vee \subset p^{-N} M$.*

Démonstration. — Soit n un entier vérifiant $n \geq 4N + 2$. Soit M un A-module dont la classe d'isomorphisme est $\mathcal{R}$. Il existe un nombre fini de structures de $A/p^n A$-module symplectique hermitien sur $M/p^n M$. Montrons que si $< .,. >_1$ et $< .,. >_2$ sont deux structures symplectiques hermitiennes sur M vérifiant

$$\forall x, y \in M \quad < x, y >_1 \equiv < x, y >_2 \ [p^n]$$

alors il existe un isomorphisme $(M, < .,. >_1) \simeq (M, < .,. >_2)$, ce qui conclura.

Soient donc deux tels produits $< .,. >_1$ et $< .,. >_2$. Nous devons montrer l'existence d'un $g \in \mathrm{GL}_A(M)$ tel que

$$\forall x, y \in M \quad < gx, gy >_2 = < gx, gy >_1$$

sachant que, relativement à $< .,. >_1$ et $< .,. >_2$, $M^\vee \subset p^{-N} M$.

Il existe $u \in \mathrm{End}_{A_{\mathbb{Q}_p}}(M_{\mathbb{Q}_p})$ vérifiant

$$\forall x, y \in M_{\mathbb{Q}_p} \quad < x, y >_2 = < u(x), y >_1$$

Notons $*$ l'adjonction par rapport à $< .,. >_1$ sur $\mathrm{End}_{A_{\mathbb{Q}_p}}(M_{\mathbb{Q}_p})$. Désormais tous les réseaux duaux seront pris par rapport à $< .,. >_1$.

On a l'égalité $u^* = u$ et

$$\begin{aligned} \forall x, y \in M \qquad & < u(x), y > \equiv < x, y > \ [p^n] \\ \Longrightarrow \quad & (u - Id)(M) \subset p^n M^\vee \subset p^{n-N} M \end{aligned}$$

Cherchons un $\alpha \in \mathrm{End}_A(M)$ tel que

$$\forall x, y \in M \quad < (Id + p^{[\frac{n}{2}]+1}\alpha)(x), (Id + p^{[\frac{n}{2}]+1}\alpha)(y) >_2 \equiv < x, y >_1 \ [p^{n+1}]$$

Un petit calcul montre que si α est solution de

$$\alpha^* + \alpha = \frac{u - Id}{p^{[\frac{n}{2}]+1}}$$

et vérifie $\alpha^*(M) \subset M$, α conviendra. Or,

$$\begin{aligned} (u - Id)(\Lambda_i) \subset p^{n-N} M \quad & \Rightarrow \quad \left(\frac{u - Id}{p^{[\frac{n}{2}]+1}}\right)(M) \subset p^{n-[\frac{n}{2}]-1-N} M \subset p^{\frac{n}{2}-1-N} M \\ & \Rightarrow \quad \left(\frac{u - Id}{p^{[\frac{n}{2}]+1}}\right)^* (M) \subset p^{\frac{n}{2}-1-2N} M \end{aligned}$$

la dernière inclusion résultant de

$$\forall v \in \mathrm{End}_A(M) \ \ v^*(M) \subset p^{-N} M$$

car $\forall x \in M \ v^*(x) \in M^\vee \subset p^{-N} M$ (l'appliquer à $v = p^{-[\frac{n}{2}]+1+N} \left(\frac{u - Id}{p^{[\frac{n}{2}]+1}}\right)$).

Donc, comme $n \geq 4N + 3$, $\left[\frac{n}{2}\right] - 1 - 2N \geq 1$ ce qui implique (le 1 étant là pour le cas $p = 2$) que

$$\alpha = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{u - Id}{p^{[\frac{n}{2}]+1}}\right) + \left(\frac{u - Id}{p^{[\frac{n}{2}]+1}}\right)^*\right] \in \mathrm{End}_A(M)$$

convient. De plus, $Id + p^{[\frac{n}{2}]+1}\alpha \in \mathrm{GL}_A(M)$.

Quitte à modifier $< ., . >_2$ par cet automorphisme on peut maintenant supposer que $< x, y >_1 \equiv < x, y >_2 \ [p^{n+1}]$ et rappliquer la méthode de résolution par récurrence pour obtenir une suite d'éléments de $\mathrm{GL}_B(V)$ convergeant vers un g tel que $< g\bullet, g\bullet >_2 = < \bullet, \bullet >_1$ (étant donné que le g construit précédemment appartient à $Id + p^{[\frac{n}{2}]+1}\mathrm{End}_A(M)$, la convergence est assurée). □

Appliquons maintenant le lemme 2.4.3 (encore valable pour $\breve{\mathcal{M}}_{(p^N)}$). On obtient donc l'existence d'un nombre fini de J_b-orbites dans $\breve{\mathcal{M}}_{(p^N)}(\bar{k})$ tel que tout point soit à distance inférieure à c d'une telle orbite.

Le cas (C) se traite de la façon analogue au cas précédent en utilisant le lemme 2.4.16. □

2.5. Espaces de Rapoport-Zink rigides

Nous noterons dans cette section $\breve{\mathcal{M}}$ un espace de Rapoport-Zink associé à une donnée globale non ramifiée $\mathcal{D}$ ou bien un espace de Rapoport-Zink associé à une donnée locale non ramifiée simple. Si $\breve{\mathcal{M}}$ est associé à une donnée globale $\mathcal{D}$ nous noterons V pour $V \otimes \mathbb{Q}_p$, B pour $B \otimes \mathbb{Q}_p$ et $\mathcal{O}_B$ pour $\mathcal{O}_B \otimes \mathbb{Z}_p$. Si $\breve{\mathcal{M}}$ est associé à une donnée locale nous noterons $\mathcal{O}_B$ pour $\mathcal{O}_F$. On fixe un réseau autodual Λ_0 dans V. $E \subset \overline{\mathbb{Q}_p}$ désignera soit E_ν dans le cas d'un espace associé à une donnée globale, soit le corps réflex de la donné locale dans le cas d'un espace associé à une donnée locale.

Définition 2.5.1. — $\breve{\mathcal{M}}^{an}$ désigne la fibre générique de $\breve{\mathcal{M}}$ sur $\breve{E}$ au sens des espaces analytiques de Berkovich.

On notera $\breve{\mathcal{M}}^{rig}$ la fibre générique de $\breve{\mathcal{M}}$ au sens des espaces adiques ([**28**] et l'annexe E).

2.5.1. Torseur des périodes. — Si $K|\breve{E}$ est une extension de degré fini, à $x \in \breve{\mathcal{M}}^{an}(K) = \breve{\mathcal{M}}(\mathcal{O}_K)$ est associé un groupe p-divisible $X = X_x^{univ}$ sur $\mathcal{O}_K$ d'isocristal filtré

$$(V_L, b\sigma, \breve{\pi}_1(x))$$

où $\breve{\pi}_1 : \breve{\mathcal{M}}^{an} \to \breve{\mathcal{F}}^{ad}$ est la première composante du morphisme des périodes ([**51**])

Le module de Tate rationnel de X, $V_p(X)$ est une représentation cristalline de $G_K = \mathbf{Gal}(\overline{K}|K)$ munie d 'une action de B et d'un produit symplectique B-hermitien

$$V_p(X) \times V_p(X) \xrightarrow{(.,.)} \mathbb{Q}_p(1)$$

dans lequel $T_p(X)$ est un réseau autodual.

On a alors :

$$V_p(X) \simeq (Fil^0 \mathrm{Hom}(V_L, B_{cris}))^{\varphi}$$

où V_L est filtré par $\breve{\pi}_1(x)$ et B_{cris} de façon usuelle, et

$$V_L = \mathrm{Hom}_{G_K}(V_p(X), B_{cris})$$

sur lequel $b\sigma$ provient du Frobenius cristallin φ sur B_{cris} et $\breve{\pi}_1(x)$ de la filtration de B_{cris} (confère [**18**]).

On s'intéresse alors à la variation du torseur des périodes le long de $\breve{\mathcal{M}}^{an}$:

$$\breve{\mathcal{M}}^{an}(\overline{\breve{E}}) \ni x \longmapsto \mathrm{Isom}_{\text{B-mod.symp.}}(V_p(X_x^{univ}), V)$$

qui est un G-torseur non vide grâce à la rigidification ρ.

D'après [**51**] dans le cas qui nous intéresse (G^{der} est simplement connexe) et plus généralement grâce à [**60**] et aux travaux de Colmez et Fontaine,

Théorème 2.5.2. — *Le torseur des périodes est constant, trivial sur* $\breve{\mathcal{M}}(\overline{\breve{E}})$.

Remarque 2.5.3. — Dans le cas non ramifié auquel nous nous intéressons on peut démontrer cela de façon encore plus directe de la façon suivante : $V_p(X)$ et V sont isomorphes comme B-modules et contiennent tous deux un réseau autodual $T_p(X)$ et Λ_0. Donc d'après le lemme 7.2 de [**42**] ils sont isomorphes comme modules symplectiques.

Remarque 2.5.4. — Plus précisément on a le résultat suivant : si $\mu : \mathbb{G}_{m/\overline{\mathbb{Q}_p}} \longrightarrow G_{/\overline{\mathbb{Q}_p}}$ et $b \in B(G)$ sont tels que (μ, b) soit faiblement admissible, la classe de cohomologie de ce G-torseur est

$$\kappa(b) - \mu_1 \in H^1(\mathbb{Q}_p, G) \simeq \pi_0(Z(\widehat{G})^\Gamma)^D \subset X^*(Z(\widehat{G})^\Gamma)$$

où $\kappa : B(G) \to X^*(Z(\widehat{G})^\Gamma)$ et $\mu_1 = \widehat{\mu}_{|Z(\widehat{G})^\Gamma}$.

En particulier, si $b \in B(G, \mu)$ (c'est à dire (μ, b) est faiblement admissible en un sens plus fort qui tient compte des structures additionnelles), $\kappa(b) = \mu_1$ et la classe du G-torseur est triviale.

2.5.2. Structures de niveau. — Au groupe p-divisible universel $X^{univ}/\breve{\mathcal{M}}$ est associé un groupe p-divisible rigide

$$(X^{univ})^{an} = \varinjlim X^{univ}[n]^{an}$$

où $X^{univ}[n]^{an}/\breve{\mathcal{M}}^{an}$ est étale fini de degré $p^{nht(\mathbb{X})}$.

$T_p(X^{univ}) := (X[n]^{an})_{n\in\mathbb{N}}$ est donc un $\mathbb{Z}_p$ faisceau analytique étale localement constant sur des revêtements étales finis, muni d'une action de $\mathcal{O}_B$ et d'une polarisation

$$T_p(X^{univ}) \times T_p(X^{univ}) \longrightarrow \mathbb{Z}_p(1)$$

où $\mathbb{Z}_p(1)$ est le $\mathbb{Z}_p$ faisceau analytique $(\mu_{p^n})_{n\in\mathbb{N}}$. Cet accouplement de faisceaux est parfait au sens où il induit un isomorphisme

$$T_p(X^{univ})^\vee \xrightarrow{\sim} T_p(X^{univ})(-1)$$

D'après la trivialité du torseur des périodes $\forall x \in \breve{\mathcal{M}}^{an}(\overline{\breve{E}})$ il existe un isomorphisme de $\mathcal{O}_B$-modules symplectiques

$$\Lambda_0 \xrightarrow{\sim} T_p(X_x^{univ})$$

Si $K \subset C_0$ est un sous-groupe compact ouvert, on peut donc parler de structure de niveau K sur $T_p(X^{univ})$ au sens suivant :

Définition 2.5.5. — Fixons un $x \in \breve{\mathcal{M}}(\overline{\breve{E}})$ dans chaque composante connexe de $\breve{\mathcal{M}}^{an}$. Une structure de niveau K sur $T_p(X^{univ})$ est un isomorphisme $\forall x$ de $\mathcal{O}_B$-modules symplectiques

$$\eta : \Lambda_0 \xrightarrow{\sim} T_p(X_x^{univ})$$

tel que via η l'action de $\pi_1^{an}(\breve{\mathcal{M}}^{an}, x)$ se fasse à travers K agissant sur Λ_0. Un η étant considéré modulo composition par un élément de K. On notera $\bar{\eta}$ sa classe.

Bien sûr cette définition ne dépend pas du choix des $x \in \breve{\mathcal{M}}(\overline{\breve{E}})$.

Une définition équivalente est la suivante :

La classe d'isomorphisme de $T_p(X^{univ})$ comme C_0 torseur est donné par un élément de

$$\check{H}^1(\breve{\mathcal{M}}^{an}, C_0) := \varprojlim \check{H}^1(\breve{\mathcal{M}}^{an}, C_0 \otimes \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$$

Dire qu'un système local est trivial équivaut à dire que cette classe est un cobord. De la même façon, une trivialisation modulo K d'un élément de

$$\check{Z}^1(\breve{\mathcal{M}}^{an}, C_0) = \varprojlim \check{Z}^1(\breve{\mathcal{M}}^{an}, C_0 \otimes \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})$$

est un élément $g \in \check{C}^0(\breve{\mathcal{M}}^{an}, C_0)$ modulo $\check{C}^0(\breve{\mathcal{M}}^{an}, K)$ tel que

$$c = \text{cobord}(g) \text{ modulo } K$$

Dit d'une autre façon, $\eta : \Lambda_0 \xrightarrow{\sim} T_p(X^{univ})[K]$ est donné par une famille compatible

$$\eta_n : \Lambda_0/p^n\Lambda_0 \xrightarrow{\sim} X[n]^{an}\ [K]$$

où $\forall n\ \exists \{U_i\}_i$ un recouvrement étale de $\breve{\mathcal{M}}^{an}$ et des isomorphismes

$$(\eta_n)_i : \Lambda_0/p^n\Lambda_0 \xrightarrow{\sim} X[n]^{an}_{|U_i}$$

tels que sur $U_i \cap U_j$,

$$(\eta_n)_{i|U_i\cap U_j} \circ (\eta_n)^{-1}_{|U_i\cap U_j} \in K(U_i \cap U_j) = K^{\pi_0(U_i\cap U_j)}$$

Λ_0 étant fixé, pour $K \subset C_0$ compact ouvert on définit une tour $(\breve{\mathcal{M}}_K)_K$ d'espaces analytiques sur $\breve{E}$ munis de morphismes de transition étales finis pour $K \subset K'$

$$\Pi_{K,K'} : \breve{\mathcal{M}}_{K'} \longrightarrow \breve{\mathcal{M}}_K$$

d'oubli de la structure de niveau. $\Pi_{K,K'}$ est galoisien de groupe K/K' si $K' \lhd K$.

Définition 2.5.6 **([51])**. — $\breve{\mathcal{M}}_K$ classifie les structures de niveau K sur $T_p(X^{univ})$.

Nous noterons $\breve{\mathcal{M}}_K^{rig}$ les espaces adiques correspondants.

2.5.3. Action se $G(\mathbb{Q}_p)$ sur les structures de niveau. — La tour $(\breve{\mathcal{M}}_K)_{K\subset G(\mathbb{Q}_p)}$ est munie d'une action de $G(\mathbb{Q}_p)$ décrite rapidement dans [**51**]. Donnons en une description détaillée.

Si $K \subset C_0$ et $g \in G(\mathbb{Q}_p)$ sont tels que $g^{-1}Kg \subset C_0$ il y a un isomorphisme

$$g : \breve{\mathcal{M}}_K \xrightarrow{\sim} \breve{\mathcal{M}}_{g^{-1}Kg}$$

défini ainsi : si Y est un espace rigide quasicompact sur $\breve{E}$, un élément de $\breve{\mathcal{M}}_K^{rig}(Y)$ est donné par un $(X, \rho) \in \breve{\mathcal{M}}(S)$ et un $\bar{\eta}$ tel que $(X, \rho, \bar{\eta}) \in \breve{\mathcal{M}}_K^{rig}(S^{rig})$ où $S/\boldsymbol{Spf}(\mathcal{O}_{\breve{E}})$ est un schéma formel admissible de fibre générique Y et

$$\eta : \Lambda_0 \xrightarrow{\sim} T_p(X^{rig})\ [K]$$

Étant donné que $g^{-1}Kg \subset C_0$, le réseau $g.\Lambda_0$ est stable par l'action de K et donc $\eta(g.\Lambda_0)$ est stable par l'action du π_1 de Y sur $T_p(X^{rig})$. Il définit donc un groupe p-divisible rigide X' muni d'une quasi-isogénie $X \xrightarrow{f} X'$ telle que via la composée

$$\varphi : \Lambda_0 \otimes \mathbb{Q}_p \xrightarrow{\simeq\ \eta\otimes 1} V_p(X) \xrightarrow{\simeq\ f_*} V_p(X')$$

on ait $\varphi^{-1}(T_p(X')) = g.\Lambda_0$.

X' est de la forme X^{rig}/U où U est un groupe rigide plat fini sur S et f est de la forme $p^n q$ où $q : X \twoheadrightarrow X/U$ et $n \in \mathbb{Z}$. D'après la version relative de la théorie de Raynaud, après un éclatement formel admissible $\widetilde{S} \to S$, U se prolonge en un groupe plat fini $\widetilde{U}/\widetilde{S}$. Posons

$$\widetilde{X}' = (X \times_S \widetilde{S})/\widetilde{U}$$

et $\widetilde{f} : X \times_S \widetilde{S} \longrightarrow \widetilde{X}'$ la quasi-isogénie $p^n\widetilde{q}$, où $\widetilde{q} : X \times_S \widetilde{S} \twoheadrightarrow X \times \widetilde{S}/\widetilde{U}$, qui prolonge f sur $\widetilde{S}$. Munissons $\widetilde{X}'$ de la rigidification

$$\widetilde{\rho} : \mathbb{X} \times_k \overline{\widetilde{S}} \xrightarrow{\rho\times 1} X_{\widetilde{S}} \times \overline{\widetilde{S}} \xrightarrow{f\times 1} \widetilde{X}' \times \overline{\widetilde{S}}$$

ce qui nous donne un $(\widetilde{X}, \widetilde{\rho}) \in \breve{\mathcal{M}}(\widetilde{S})$. Quant à la structure de niveau $\widetilde{\eta}$ sur $T_p(\widetilde{X})$,

$$\widetilde{\eta} = \eta \circ g$$

au sens où le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
g.\Lambda_0 \arrow[rr, "\eta \otimes 1"] & & V_p(X) \arrow[d] \\
\Lambda_0 \arrow[u, "g"] \arrow[r, "\widetilde{\eta}"] & T_p(\widetilde{X}') \arrow[r, hook] & V_p(\widetilde{X}')
\end{tikzcd}$$

La fibre générique de $\widetilde{S}$ est Y et alors $(\widetilde{W}, \widetilde{\rho}, \widetilde{\bar{\eta}}) \in \breve{\mathcal{M}}_{g^{-1}Kg}(Y)$ que l'on pose comme étant égal à $g.(X, \rho, \bar{\eta})$.

Remarque 2.5.7. — Rappelons que si $x \in \breve{\mathcal{M}}^{an}(M)$ pour $M|\breve{E}$ une extension de degré fini, il n'est pas nécessaire d'effectuer un éclatement formel admissible pour prolonger notre groupe p-divisible sur $\mathcal{O}_M$ ce qui simplifie la définition de l'action de $G(\mathbb{Q}_p)$ sur les points $\breve{\mathcal{M}}_K(\overline{\breve{E}})$.

Rappelons également que $\forall K$ $\breve{\mathcal{M}}_K$ est muni de l'action de J_b prolongeant celle de $\breve{\mathcal{M}}^{an}$, commutant à celle de $G(\mathbb{Q}_p)$ et compatible aux morphismes de transition.

Exemple 2.5.8. — Avec les notations du premier premier chapitre, si $J \neq \emptyset$, si

$$K = \prod_{i\in I} K_i \times \prod_{j\in J} K_j$$

$$\breve{\mathcal{M}}_K(b, \mu) = \prod_{i\in I} \breve{\mathcal{M}}_{K_i}(b_i, \mu_i) \times \left(\prod_{j\in J} \breve{\mathcal{M}}_{K_j}(b_j, \mu_j)\right)^1$$

et l'action de $G(\mathbb{Q}_p)$ se fait composante par composante.

Si $J = \emptyset$ et si

$$K = \prod_{i\in I} K_i \times K_t$$

où K_t est un sous-groupe compact ouvert de $\mathbb{Z}_p^\times$,

$$\breve{\mathcal{M}}_K(b, \mu) = \prod_{in\in I} \breve{\mathcal{M}}_{K_i}(b_i, \mu_i) \times \mathbb{Q}_p^\times / K_t$$

où $\mathbb{Q}_p^\times / K_t$ est l'espace de modules des structures de niveau K_t sur le module de Tate $\mathbb{Z}_p(1)$.

Exemple 2.5.9. — Avec les notations de l'exemple précédent et en se plaçant dans le cadre de l'exemple 2.2.9 (cas étale) :

$$\breve{\mathcal{M}}_{K_i}(b_i, \mu_i) = G(\mathbb{Q}_p)/K_i$$

De plus, $J_{b_i} = G(\mathbb{Q}_p)$ qui agit à gauche sur cet ensemble et $G(\mathbb{Q}_p)$ agit à droite via les correspondances de Hecke ensemblistes classiques.

2.5.4. Quelques propriétés des espaces de Rapoport-Zink rigides. —

Lemme 2.5.10. — *Le schéma formel $\breve{\mathcal{M}}$ est séparé sur $\boldsymbol{Spf}(\mathcal{O}_{\breve{E}})$.*

Démonstration. — Il s'agit de montrer que le sous-schéma formel localement fermé

$$\breve{\mathcal{M}} \xhookrightarrow{\Delta} \breve{\mathcal{M}} \times \breve{\mathcal{M}}$$

est une immersion fermée. Soit (X^{univ}, ρ^{univ}) le groupe p-divisible universel muni de sa rigidification ρ^{univ}. Considérons les deux projections

$$\breve{\mathcal{M}} \times \breve{\mathcal{M}} \underset{p_2}{\overset{p_1}{\rightrightarrows}} \breve{\mathcal{M}}$$

L'immersion Δ est alors défini comme étant le lieu défini par

$$p_1^*(X^{univ}, \rho^{univ}) \simeq p_2^*(X^{univ}, \rho^{univ})$$

ce qui est équivalent à dire que la quasi-isogénie

$$\alpha = p_1^*\rho^{univ} \circ (p_2^*\rho^{univ})^{-1} : p_2^*X^{univ} \longrightarrow p_1^*X^{univ}$$

est un isomorphisme ou encore que α ainsi que α^{-1} sont des isogénies. D'après la proposition 2.9 de [**51**] il s'agit d'une condition fermée. □

Pour comprendre l'énoncé qui suit il est conseillé de lire l'appendice E.

Lemme 2.5.11. — *Pour tout K, l'espace analytique $\breve{\mathcal{M}}_K$ est lisse de bord vide. Le morphisme des pentes $\breve{\pi}_1 : \breve{\mathcal{M}}^{an} \longrightarrow \breve{\mathcal{F}}^{ad}$ est étale.*

Traduit dans le langage des espaces adiques : l'espace adique $\breve{\mathcal{M}}_K^{rig}$ est lisse et partiellement propre et le morphisme $\breve{\pi}_1$ est partiellement propre.

Démonstration. — Montrons les assertions sur les espaces adiques qui sont équivalentes à celles sur les espaces analytiques.

D'après le lemme précédent, $\breve{\mathcal{M}}^{rig}$ est séparé. Pour voir qu'il est partiellement propre il suffit donc de constater que les composantes irréductibles de sa fibre spéciale $\overline{\mathcal{M}}$ sont propres.

Les morphismes $\Pi_{K,C_0} : \breve{\mathcal{M}}_K^{rig} \to \breve{\mathcal{M}}^{rig}$ étant finis il en est donc de même pour les $\breve{\mathcal{M}}_K^{rig}$.

On sait déjà que le morphisme des pentes est étale au sens des espaces adiques (proposition 5.17 de [**51**]). Les espaces adiques $\breve{\mathcal{F}}^{ad}$ et $\breve{\mathcal{M}}^{rig}$ étant partiellement propres, le mrophisme $\breve{\pi}_1$ est partiellement propre. □

Remarque 2.5.12. — Ces propriétés peuvent également se déduire de l'existence de l'uniformisation de variétés de Shimura par les $\breve{\mathcal{M}}_K$.

2.6. Cohomologie de $\breve{\mathcal{M}}_K$

Reprenons les mêmes conventions sur $\breve{\mathcal{M}}$ que celles énoncées au début de la section 2.5.

2.6.1. Lissité de l'action de J_b. — Rappelons (section 6 de [**3**]) que si X est un k-espace analytique le groupe des automorphismes analytiques de X, $\mathrm{Aut}(X)$, est muni d'une structure de groupe topologique et que par définition un groupe topologique G agissant par automorphismes analytiques sur X agit continûment si le morphisme induit $G \longrightarrow \mathrm{Aut}(X)$ est continu.

On déduit alors de la proposition 2.3.2 et du lemme 8.4 de [**3**] :

Corollaire 2.6.1. — *Le groupe J_b agit continûment sur $\breve{\mathcal{M}}_K$.*

Définition 2.6.2. — Nous noterons $H_c^\bullet(\breve{\mathcal{M}}_K \otimes_{\breve{E}} \mathbb{C}_p, \mathbb{Q}_\ell)$ la cohomologie à support compact ℓ-adique de l'espace analytique $\breve{\mathcal{M}}_K \otimes \mathbb{C}_p$ (confère l'annexe F).

Remarque 2.6.3. — Le lecteur de désirant pas lire l'annexe F pourra prendre comme définition de $H_c^\bullet(\breve{\mathcal{M}}_K \otimes_{\breve{E}} \mathbb{C}_p, \mathbb{Q}_\ell)$

$$\varinjlim_{U} \varprojlim_{n} H_c^\bullet(U \otimes_{\breve{E}} \mathbb{C}_p, \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}_\ell$$

où U parcourt les ouverts relativement compacts de $\breve{\mathcal{M}}_K$.

Cette espace de cohomologie est muni d'une action de $J_b \times W_E$ de la façon suivante : l'action de J_b est celle induite par l'action sur $\breve{\mathcal{M}}_K$, l'action du groupe d'inertie de $\mathbf{Gal}(\overline{\breve{E}}|\breve{E})$ est celle induite par action sur les coefficients $\mathbb{C}_p$, quant à l'action d'un Frobenius σ de W_E elle est induite par la donnée de descente de Rapoport-Zink ([**51**])

$$\alpha : \breve{\mathcal{M}}_K \to \breve{\mathcal{M}}_K^{(\sigma)}$$

La cohomologie de $\breve{\mathcal{M}}_K^{(\sigma)} \otimes_{\breve{E}} \mathbb{C}_p$ s'identifie à celle de $\breve{\mathcal{M}}_K \otimes_{\breve{E}} \mathbb{C}_p$ via $1 \times \sigma : \breve{\mathcal{M}}_K \otimes \mathbb{C}_p \to \breve{\mathcal{M}}_K^{(\sigma)} \otimes \mathbb{C}_p$.

Étant donné que la donnée de descente commute à l'action de J_b, $H_c^\bullet(\breve{\mathcal{M}}_K \otimes_{\breve{E}} \mathbb{C}_p, \mathbb{Q}_\ell)$ est muni d'une action de $J_b \times W_E$. De plus, lorsque le niveau K varie, le système des $H_c^\bullet(\breve{\mathcal{M}}_K \otimes \mathbb{C}_p, \mathbb{Q}_\ell)$ est muni d'une action de $G(\mathbb{Q}_p) \times J_b \times W_E$.

Remarque 2.6.4. — La donnée de descente α n'étant pas effective, il s'agit vraiment d'une action de W_E et non d'une action de $\mathbf{Gal}(\overline{E}|E)$.

Définition 2.6.5. — Afin d'alléger les notations nous noterons désormais

$$H_c^\bullet(\breve{\mathcal{M}}_K, \mathbb{Q}_\ell) := H_c^\bullet(\breve{\mathcal{M}}_K \otimes \mathbb{C}_p, \mathbb{Q}_\ell)$$

et

$$H_c^\bullet(\breve{\mathcal{M}}_K, \overline{\mathbb{Q}_\ell}) := H_c^\bullet(\breve{\mathcal{M}}_K \otimes \mathbb{C}_p, \mathbb{Q}_\ell) \otimes \overline{\mathbb{Q}_\ell}$$

Lemme 2.6.6. — *Il y a un isomorphisme $H_c^\bullet(\breve{\mathcal{M}}_K, \mathbb{Q}_\ell) \simeq H_c^\bullet(\breve{\mathcal{M}}_K^{rig}, \mathbb{Q}_\ell)$*

Démonstration. — C'est une conséquence du lemme 2.5.11 et du théorème 1.5 de [**29**]. □

Combinant le théorème F.2.9 avec les corollaires 2.6.1 et 3.3.7 on obtient :

Corollaire 2.6.7. — *Pour tout K, $H_c^\bullet(\breve{\mathcal{M}}_K, \mathbb{Q}_\ell)$ est un $J_b \times W_E$-module lisse pour l'action de J_b et continu pour l'action de W_E.*

Exemple 2.6.8. — Plaçons nous dans le cas d'une donnée locale étale (exemple 2.5.9). Alors,

$$H_c^q(\breve{\mathcal{M}}_K(b,\mu), \overline{\mathbb{Q}_\ell}) = \begin{cases} 0 \text{ si } q \neq 0 \\ \mathcal{C}_c^\infty(G(\mathbb{Q}_p)/K) \text{ si } q = 0 \end{cases}$$

et donc,

$$\varinjlim_K H_c^0(\breve{\mathcal{M}}(b,\mu), \overline{\mathbb{Q}_\ell}) = \mathcal{C}_c^\infty(G(\mathbb{Q}_p))$$

où l'action de $J_b = G(\mathbb{Q}_p)$ se fait par la représentation régulière gauche et celle de $G(\mathbb{Q}_p)$ par la représentation régulière droite. L'action de W_E est l'action triviale.

2.6.2. Un lemme d'induction. — Soit $\Delta = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X^*(G)_{\mathbb{Q}_p}, \mathbb{Z})$. Le groupe J_b étant une forme intérieure d'un sous-groupe de Levi M de G, tout $\chi \in X^*(G)_{\mathbb{Q}_p}$ se restreint à M et se transfert à J_b en un $\widetilde{\chi} \in X^*(J_b)_{\mathbb{Q}_p}$. Notons

$$J_b^1 = \bigcap_{\chi \in X^*(G)_{\mathbb{Q}_p}} \ker |\widetilde{\chi}|$$

où

$$\begin{aligned} |\widetilde{\chi}| : J_b &\to \mathbb{Z} \\ x &\mapsto v_p(\widetilde{\chi}(x)) \end{aligned}$$

Il y a une application ([**51**] 3.52)

$$\begin{aligned} \omega_{J_b} : J_b(\mathbb{Q}_p) &\longrightarrow \Delta \\ x &\mapsto [\chi \mapsto \widetilde{\chi}(x)] \end{aligned}$$

Il y a également une application

$$\breve{\pi}_2 : \breve{\mathcal{M}} \longrightarrow \Delta$$

J_b équivariante. $\breve{\pi}_2$ est essentiellement la hauteur de la rigidification ρ ([**51**] 3.52). Notons $\Delta' \subset \Delta$ l'image de $\breve{\pi}_2$ sur laquelle J_b agit avec un nombre fini d'orbites.

Définition 2.6.9. — Pour tout i élément de Δ' notons $\breve{\mathcal{M}}_K^{(i)} = \breve{\pi}_2^{-1}(i)$

On a donc

$$\breve{\mathcal{M}}_K = \coprod_{i \in \Delta'} \breve{\mathcal{M}}_K^{(i)}$$

décomposition de laquelle on déduit :

Lemme 2.6.10. — *Il y a un isomorphisme*

$$H_c^\bullet(\breve{\mathcal{M}}_K, \mathbb{Q}_\ell) \simeq \bigoplus_{\bar{i} \in \Delta'/J_b} c - Ind_{J_b^{1\prime}}^{J_b} H_c^\bullet(\breve{\mathcal{M}}_K^{(i)}, \mathbb{Q}_\ell)$$

où

$$J_b^{1\prime} = \bigcap_{\chi \in X^*(G)_{\mathbb{Q}_p}} \ker(|\widetilde{\chi}|)$$

L'intérêt de ce lemme est que lorsque b est une classe basique $J_b^{1\prime} = J_b^1$ a un centre compact.

Remarque 2.6.11. — L'isomorphisme ci dessus est un isomorphisme de J_b-modules. En fait, le groupe $G(\mathbb{Q}_p)$ agit sur Δ. De même, il y a une action de W_E sur Δ triviale sur l'inertie de W_E et asociée au fait que la donnée de descente de Rapoport-Zink transformant la rigidification ρ en ρ composée avec le Frobenius, elle change sa hauteur. Il y a alors un isomorphisme de $J_b \times G(\mathbb{Q}_p) \times W_E$-modules

$$\varinjlim_K H_c^\bullet(\breve{\mathcal{M}}_K, \mathbb{Q}_p) \simeq \bigoplus_{\bar{i} \in \Delta/J_b \times G(\mathbb{Q}_p) \times W_E} c - Ind_{(J_b \times G(\mathbb{Q}_p) \times W_E)^1}^{J_b} \varinjlim_K H_c^\bullet(\breve{\mathcal{M}}_K^{(i)}, \mathbb{Q}_\ell)$$

où $(J_b \times G(\mathbb{Q}_p) \times W_E)^1$ est le sous-groupe de $J_b \times G(\mathbb{Q}_p) \times W_E$ agissant trivialement sur Δ.

Lemme 2.6.12. — *Soit b une classe basique. Si r désigne le rang semi-simple de J_b, pour une représentation lisse π de J_b, pour $i > r$*

$$Ext^i_{J_b - lisse}(H_c^\bullet(\breve{\mathcal{M}}_K, \mathbb{Q}_\ell), \pi) = 0$$

Démonstration. —

$$\mathrm{Ext}^i_{J_b - \mathrm{lisse}}(c - Ind_{J_b^1}^J H_c^j(\breve{\mathcal{M}}^{(0)}, \mathbb{Q}_\ell), \pi) = \mathrm{Ext}^i_{J_b^1 - \mathrm{lisse}}(H_c^j(\breve{\mathcal{M}}^{(0)}, \mathbb{Q}_\ell), \pi)$$

Notons $J_b^0 = \bigcap_{\chi \in X^*(M)} \ker(\widetilde{\chi})$ qui est un groupe algébrique sur $\mathbb{Q}_p$ à centre fini. $J_b^0(\mathbb{Q}_p) \lhd J_b^1$ et $J_b^1/J_b^0(\mathbb{Q}_p)$ est un groupe compact ce qui implique que si ρ_1, ρ_2 sont deux représentations lisses de J_b^1,

$$\mathrm{Ext}^i_{J_b^1 - lisse}(\rho_1, \rho_2) \simeq \mathrm{Ext}^i_{J_b^0 - lisse}(\rho_1, \rho_2)^{J_b^1/J_b^0}$$

(c'est une conséquence de l'exactitude du foncteur $H^0(J_b^1/J_b^0(\mathbb{Q}_p), -)$ pour les coéfficients discrets). Dans [**56**], il est construit pour toute représentation lisse d'un groupe algébrique H sur $\mathbb{Q}_p$ ayant un caractère central χ sur Z_H^0, la composante connexe neutre du centre, une résolution projective dans la catégorie des représentations lisses ayant χ comme caractère central sur Z_H^0 de longueur inférieure à r.

D'où le résultat. □

2.6.3. Finitude. —

Proposition 2.6.13. — *Supposons que b soit la classe basique. Alors, $\forall \delta \in \Delta$,*

$$H_c^q(\breve{\mathcal{M}}_K^{(\delta)}, \mathbb{Q}_\ell)$$

est un J_b^1-module de type fini. De même

$$H_c^q(\breve{\mathcal{M}}_K, \mathbb{Q}_\ell)$$

est un J_b-module de type fini.

Démonstration. — On vérifie en utilisant le théorème 2.4.5 qu'il y a un nombre fini d'orbites de composantes irréductibles de $\breve{\mathcal{M}}^{(\delta)}$ sous l'action de J_b^1. Si $Z_1, \ldots, Z_t$ sont des représentants de ces orbites, soit

$$U = Z_1^{an} \cup \cdots \cup Z_t^{an}$$

le tube au dessus des Z_i, un ouvert analytique dans $\breve{\mathcal{M}}^{an}$. Notons encore U pour $\Pi_{K,C_0}^{-1}(U) \subset \breve{\mathcal{M}}_K$.

Le corollaire 3.2.4 implique que U s'identifie à un tube au dessus d'un fermé dans l'espace analytique associé à une variété algébrique propre sur $\mathcal{O}_{\breve{E}}$. Il résulte alors du théorème 3.3 (ii) de [**29**] que

$$\dim_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}}(H_c^q(U, \overline{\mathbb{Q}_\ell})) < +\infty$$

Soit $K \subset J_b^1$ le stabilisateur de U. C'est un sous-groupe compact ouvert. Considérons le recouvrement $(g.U)_{\bar{g} \in J_b^1/K}$ de $\breve{\mathcal{M}}_K^{(\delta)}$.

Il lui est associé une suite spectrale de cohomologie de $\check{C}$ech à support compact (II.4.1) concentrée en $p \leq 0$, $\dim(\mathrm{Sh}) \geq q \geq 0$:

$$E_1^{pq} = \bigoplus_{\substack{\bar{\alpha} \subset J_b^1/K \\ |\alpha| = -p+1}} H_c^q(U(\alpha), \mathbb{Q}_\ell) \Longrightarrow H_c^{p+q}(\breve{\mathcal{M}}_K^{(0)}, \mathbb{Q}_\ell)$$

où $U(\alpha) = \bigcap_{\bar{g} \in \alpha} g.U$.

Cette suite spectrale est J_b^1 équivariante où

$$\forall g \in J_b^1 \quad g_! : H_c^q(U(\alpha), \mathbb{Q}_\ell) \xrightarrow{\sim} H_c^q(g.U(\alpha), \mathbb{Q}_\ell)$$

Si $\alpha \subset J_b^1/K$ notons

$$K_\alpha = \bigcap_{\bar{g} \in \alpha} gKg^{-1}$$

Les espaces $H_c^q(U(\alpha), \mathbb{Q}_\ell)$ sont des K_α-modules lisses puisque K_α agit continûment sur $U(\alpha)$ d'après le corollaire 2.6.1.

Récrivons E_1^{pq} sous la forme suivante :

$$E_1^{pq} = \bigoplus_{[\bar{\alpha}] \in J_b^1 \backslash \left(J_b^1/K\right)^{-p+1}} c - Ind_{K_\alpha}^{J_b^1} H_c^q(U(\alpha), \mathbb{Q}_\ell)$$

Montrons maintenant que

$$\#\{[\bar{\alpha}] \in J_b^1 \backslash \left(J_b^1/K\right)^{-p+1} \mid U(\alpha) \neq \emptyset\} < +\infty$$

Pour cela, remarquons que si A est une union finie de composantes irréductibles de $\overline{\mathcal{M}}^{(\delta)}$, $\{g \in J_b^1 \mid g.A \cap A \neq \emptyset\}$ est compact et que donc

$$\Omega = \{g \in J_b^1 \mid g.U \cap U \neq \emptyset\}$$

est compact et contient K.

Si $[\alpha] = [(\bar{g}_0, \ldots, \bar{g}_{-p})] \in J_b^1 \backslash \left(J_b^1/K\right)^{-p+1}$ est tel que $U(\alpha) \neq \emptyset$ alors, $\forall i \neq j \;\; g_i^{-1} g_j \in K \backslash \Omega$ qui est fini.

Modulo l'action de J_b^1 à gauche sur les $(-p+1)$-uplets on peut supposer que $g_{-p} \in K$ et donc $\forall i \; \bar{g}_i \in K \backslash \Omega$ qui est fini. D'où la finitude de l'ensemble.

On conclu donc que E_1^{pq} est une somme finie d'induites compactes de représentations de dimension finie et est donc une représentation de type fini de J_b^1. D'après [**16**] la catégorie des J_b^1-modules lisses est localement noethérienne (i.e. tout objet de type fini est noethérien). On en déduit que $H_c^{p+q}(\breve{\mathcal{M}}^{(\delta)}, \mathbb{Q}_\ell)$ possède une filtration finie $F^p H_c^{p+q}(\breve{\mathcal{M}}^{(\delta)}, \mathbb{Q}_\ell)$ à quotients de type fini et est donc lui même de type fini. □

Corollaire 2.6.14. — *Soit b la classe basique. Pour toute représentation admissible π de J_b, pour tous K, p, q*

$$\dim_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}} Ext^p_{J_b\text{-}lisse}\left(H_c^q(\breve{\mathcal{M}}_K, \overline{\mathbb{Q}_\ell}), \pi\right) < +\infty$$

Démonstration. — La réciprocité de Frobenius donne un isomorphisme :

$$\mathrm{Ext}^p_{J_b\text{-lisse}}\left(H_c^q(\breve{\mathcal{M}}_K, \overline{\mathbb{Q}_\ell}), \pi\right) \simeq \bigoplus_{\bar{\delta} \in \Delta/J_b} \mathrm{Ext}^p_{J_b^1\text{-lisse}}\left(H_c^q(\breve{\mathcal{M}}_K^{(\delta)}, \overline{\mathbb{Q}_\ell}), \pi_{|J_b^1}\right)$$

La représentation $\pi_{|J_b^1}$ est encore admissible. On conclut alors grâce à la proposition précédente et le lemme qui suit en posant $H = \bigcap_{\chi \in X^*(G)} \ker(\chi)$ car

$$\mathrm{Ext}^p_{J_b^1\text{-lisse}}\left(H_c^q(\breve{\mathcal{M}}_K^{(\delta)}, \overline{\mathbb{Q}_\ell}), \pi_{|J_b^1}\right) = \mathrm{Ext}^p_{H(\mathbb{Q}_p)\text{-lisse}}\left(H_c^q(\breve{\mathcal{M}}_K^{(\delta)}, \overline{\mathbb{Q}_\ell}), \pi_{|J_b^1}\right)^{J_b^1/H(\mathbb{Q}_p)}$$

□

Lemme 2.6.15. — *Soit H un groupe p-adique semi-simple, π_1 une représentation lisse de type fini de H et π_2 une représentation admissible. Alors,*

$$\forall i \;\; \dim(Ext^i_{H\text{-}lisse}(\pi_1, \pi_2)) < \infty$$

Démonstration. — π_1 étant de type fini il existe une surjection

$$\alpha : \bigoplus_{i \in I} c - ind_{K_i}^H \rho_i \twoheadrightarrow \pi_1$$

où I est fini, les K_i sont des sous-groupes compacts ouverts et les ρ_i de dimension finie. La représentation de droite étant elle même de type fini, $\ker(\alpha)$ est de type fini (locale noethérianité de la catégorie des représentations lisses de H ([**16**])) et on peut rappliquer le processus pour construire ainsi par récurrence une résolution projective $P^\bullet \to \pi_1$ de π_1 telle que $\forall q \; P^q$ soit une représentation de type finie de H. On conclut aussitôt puisque si ρ est de type fini et π_2 admissible alors $\mathrm{Hom}_H(\rho, \pi_2)$ est de dimension finie. En effet,

un morphisme H équivariant de ρ dans π_2 est déterminé par l'image d'un nombre fini de vecteurs de ρ engendrant ρ. Or une telle famille finie de vecteurs est contenue dans ρ^V pour un sous-groupe compact ouvert V et donc d'image dans π_2^V qui est de dimension finie. □

Remarque 2.6.16. — Dans [**56**] ce lemme est démontré d'une autre façon mais en supposant de plus que π_1 est admissible. Cette restriction est donc inutile.

Corollaire 2.6.17. — *Soit b la classe basique. Supposons J_b anisotrope modulo son centre . Alors,*

$$\forall \delta \in \Delta \ \forall q \quad \dim_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}} H_c^q(\breve{\mathcal{M}}_K^{(\delta)}, \overline{\mathbb{Q}_\ell}) < +\infty$$

Remarque 2.6.18. — Supposons la classe b basique. On ne peut espérer mieux que la proposition 2.6.13 dans le cas où J_b n'est pas anisotrope modulo son centre. En effet, on pourrait penser que $H_c^\bullet(\breve{\mathcal{M}}_K^{(\delta)}, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$ est un J_b^1-module de longueur finie. Mais cela est faux comme le montre l'exemple étale (exemple 2.6.8).

CHAPITRE 3

UNIFORMISATION DES VARIÉTÉS DE SHIMURA DE TYPE P.E.L.

L'uniformisation des variétés de Shimura se décompose en plusieurs étapes :
- stratification de la fibre spéciale selon la classe d'isogénie du groupe p-divisible muni de structures additionnelles
- raffinement d'une strate en classes d'isogénies ϕ de variétés abéliennes munies de structures additionnelles
- classes d'isomorphismes dans une classe d'isogénie :
  - en p grâce à l'espace $\breve{\mathcal{M}}_{K_p}$
  - hors p "tout est étale" et il s'agit d'une description de réseaux munis de structures de niveau c'est à dire d'éléments de $G(\mathbf{A}_f^p)/K_p$

Certaines de ces étapes apparaissent dans le comptage des points des variétés de Shimura sur les corps finis.

3.1. Stratification par la classe d'isogénie du groupe p-divisible

Reprenons les notations globales du premier chapitre.

Soit $\overline{S}_{K^p} = S_{K^p} \times_{\mathcal{O}_{E_\nu}} k$ où k désigne ici le corps résiduel de E_ν. Soit $\mathcal{A}/\overline{S}$ le schéma abélien universel.

Grâce au théorème de spécialisation des cristaux de Grothendieck généralisé dans [**52**], le schéma $\overline{S}$ est stratifiée par le polygone de Newton du cristal muni de structures additionnelles $R^1 f_{cris*}\mathcal{O}_{\mathcal{A}}$.

Plus précisément, si $b \in B(G_{\mathbb{Q}_p}, \mu_{\overline{\mathbb{Q}_p}})$

$$\overline{S}(b) = \{x \in \overline{S}(\overline{k}) \mid (H_{1,cris}(\mathcal{A}_x, W(\overline{k})_{\mathbb{Q}}), F) \simeq (V_{\mathbb{Q}_p} \otimes W(\overline{k})_{\mathbb{Q}}, b \otimes \sigma)\}$$

(l'isomorphisme étant pris au sens des isocristaux munis de structures additionnelles). L'ensemble $\overline{S}(b)$ est l'ensemble des points géométriques sous-jacents à un sous-schéma localement fermé réduit de $\overline{S}$ encore noté $\overline{S}(b)$. On a la stratification

$$\overline{S} = \coprod_{b \in B(G_{\mathbb{Q}_p}, \mu_{\overline{\mathbb{Q}_p}})} \overline{S}(b)$$

et si P est un polygone fixé

$$\coprod_{Newt(b) \geq P} \overline{S}(b)$$

est fermé dans $\overline{S}$.

Deux strates se distinguent particulièrement :
- la strate basique qui est fermée et est associée à la classe basique de $B(G_{\mathbb{Q}_p}, \mu_{\overline{\mathbb{Q}_p}})$. Son polygone de Newton est maximal
- la strate μ-ordinaire associée à l'image via $B(T) \longrightarrow B(G_{\mathbb{Q}_p})$ de $\widehat{\mu}_{|\widehat{T}^\Gamma} \in B(T)$ de polygone de Newton minimal dans $B(G_{\mathbb{Q}_p}, \mu_{\overline{\mathbb{Q}_p}})$. Elle est ouverte et dense dans $\overline{S}$ ([**58**])

Citons :

Conjecture 3.1.1. — *On a l'équivalence suivante* $\overline{S}(b) \neq \emptyset \Leftrightarrow b \in B(G, \mu)$

(La conjecture est pour l'implication de la droite vers la gauche, l'implication de la gauche vers la droite étant la généralisation du théorème de Mazur). Nous montrerons de tout façon plus tard que la strate basique est non vide, ce qui est suffisant pour les applications que nous avons en vue dans cette thèse.

3.2. Uniformisation de Rapoport-Zink

Fixons un point base $x \in \overline{S}(\overline{k})$. Le théorème de Serre Tate permet d'uniformiser S "verticalement" au dessus de x c'est à dire sur un voisinage formel de x :

$$S^{\wedge}_{\{x\}} \simeq : \{ \text{ déformations par isomorphismes du groupe p-divisible muni de structures additionnelles } \mathcal{A}_x[p^\infty] \ \}.$$

Nous voulons uniformiser une plus grande partie de la strate qu'un point, c'est pourquoi on déforme le groupe p-divisible non plus par isomorphismes mais par quasi-isogénies grâce à l'espace $\breve{\mathcal{M}}(\mathcal{D}_{\mathbb{Q}_p}, b)$.

Soit ϕ la classe d'isogénie du triplet $(\mathcal{A}_x, \lambda, \iota)$ et

$$I^\phi = \mathrm{Aut}(\mathcal{A}_x, \lambda, \iota)$$

un groupe réductif sur $\mathbb{Q}$. Notons $b \in B(G_{\mathbb{Q}_p}, \mu_{\overline{\mathbb{Q}_p}})$ la classe associée à ϕ et $\breve{\mathcal{M}} = \breve{\mathcal{M}}(\mathcal{D}_{\mathbb{Q}_p}, b)$ l'espace de Rapoport-Zink associé.

A ϕ est alors associé un ensemble $\widetilde{S}(\phi)$ de sous-schémas fermés projectifs de $\overline{S}(b)_{\bar{k}}$ (confère le théorème 6.23 de [**51**] pour la définition de $\widetilde{S}(\phi)$ où cet ensemble est noté $\mathcal{T}$) tel que

$$\widetilde{S}(\phi)(\overline{k}) = \{y \in \overline{S}(b)(\overline{k}) \mid \text{ la classe d'isogénie de } (\mathcal{A}_y, \lambda, \iota) \in \phi \ \}$$

Le théorème 6.23 de [**51**] affirme alors qu'il y a un isomorphisme de schémas formels sur $\boldsymbol{Spf}(\mathcal{O}_{\breve{E}})$:

$$\Theta : I^\phi(\mathbb{Q}) \backslash \left(\breve{\mathcal{M}} \times G(\mathbf{A}_f^p)/K^p \right) \xrightarrow{\sim} \left(S_{K^p} \otimes_{\mathcal{O}_E} \mathcal{O}_{\breve{E}} \right)^{\wedge}_{/\widetilde{S}(\phi)}$$

où l'application d'uniformisation est définie en tordant le triplet $(\mathcal{A}_x, \lambda, \iota)$ par une déformation par quasi-isogénie de $(\mathcal{A}_x[p^\infty], \lambda, \iota)$ et en tordant la structure de niveau $\overline{\eta^p}$ par un élément de $G(\mathbf{A}_f^p)/K^p$.

L'action de $I^\phi(\mathbb{Q})$ sur $\breve{\mathcal{M}}$ se fait à travers J_b par action de $I^\phi(\mathbb{Q})$ par quasi-isogénies sur $(\mathcal{A}_x[p^\infty], \lambda, \iota)$ ce qui donne une injection

$$I^\phi(\mathbb{Q}) \hookrightarrow J_b$$

et sur $G(\mathbf{A}_f^p)$ via l'action d'un élément de $I^\phi(\mathbb{Q})$ sur le module de Tate $H_1(\mathcal{A}_x, \mathbf{A}_f^p)$ ce qui donne une injection

$$I^\phi(\mathbb{Q}) \hookrightarrow G(\mathbf{A}_f^p)$$

Lorsque K^p varie les différents isomorphismes d'uniformisation sont compatibles et commutent à l'action de $G(\mathbf{A}_f)$ (et donc aux correspondances de Hecke hors p) en un sens évident.

3.2.1. Quelques propriétés de l'isomorphisme d'uniformisation. — Soit $(y_i)_{i\in I}$ un ensemble de représentants des orbites de $I^\phi(\mathbb{Q})$ dans $G(\mathbf{A}_f^p)/K^p$, c'est à dire

$$G(\mathbf{A}_f^p)/K^p = \coprod_{i\in I} I^\phi(\mathbb{Q}).y_i$$

Pour tout $i \in I$ notons $\Gamma_i = Stab_{I^\phi(\mathbb{Q})} y_i$ que l'on verra comme un sous-groupe de J_b.

L'isomorphisme d'uniformisation se récrit alors :

$$\coprod_{i\in I} \Gamma_i \backslash \breve{\mathcal{M}} \xrightarrow{\sim} \left(S_{K^p} \otimes \mathcal{O}_{\breve{E}}\right)^{\widehat{}}_{/\widetilde{S}(\phi)}$$

Définition 3.2.1. — Appelons $\mathcal{C}$ l'ensemble des sous-groupes $\Gamma \subset J_b$ de la forme $I^\phi(\mathbb{Q}) \cap (J_b \times K^p)$ pour $K^p \subset G(\mathbf{A}_f^p)$ tel qu'il existe un $g \in G(\mathbf{A}_f^p), gK^pg^{-1}$ soit suffisamment petit.

Les groupes $\Gamma \in \mathcal{C}$ sont exactement les groupes Γ_i qui interviennent dans les morphismes d'uniformisation ci dessus lorsque K^p et $(y_i)_i$ varient.

Lemme 3.2.2. — *Les éléments de $\mathcal{C}$ vérifient :*
- *Tout élément Γ dans $\mathcal{C}$ est discret sans torsion dans J_b.*
- $\forall \Gamma_1, \Gamma_2 \in \mathcal{C}$ Γ_2 *et* Γ_2 *sont commensurables.*
- $\forall A \subset J_b$ *fini il existe* $\Gamma \in \mathcal{C}$ *tel que* $\Gamma \cap A = \emptyset$.

Démonstration. — Le fait que Γ soit discret et sans torsion est démontré lors de la démonstration du théorème 6.23 de [**51**].

La commensurabilité résulte de la commensurabilité des $K^p \subset G(\mathbf{A}_f^p)$ compacts ouverts.

Quant à la dernière propriété, c'est une conséquence du fait que si $\ell \neq p, I^\phi(\mathbb{Q}) \hookrightarrow G(\mathbb{Q}_\ell)$ et $G(\mathbb{Q}_\ell)$ est séparé au sens où pour tout sous-ensemble fini A de $\subset G(\mathbb{Q}_\ell)$ il existe un sous-groupe ouvert de $G(\mathbb{Q}_\ell)$ ne rencontrant pas A. □

Rappelons également :

Proposition 3.2.3 (**[51]**). — *Pour tout ouvert quasicompact U dans $\breve{\mathcal{M}}$, pour tout groupe Γ dans $\mathcal{C}$, l'ensemble $\{\gamma \in \Gamma \mid U.\gamma \cap U \neq \emptyset\}$ est fini, et $\Gamma \setminus \{Id\}$ n'a pas de point fixe dans $\breve{\mathcal{M}}$.*

Le groupe Γ agit donc en quelque sorte de façon proprement discontinue et sans points fixes sur $\breve{\mathcal{M}}$, comme c'est le cas pour les groupes arithmétiques uniformisant les points complexes des variétés de Shimura et agissant sur les domaines symétriques hermitiens $X = G(\mathbb{R})/K_\infty$.

Corollaire 3.2.4. — *Tout ouvert quasicompact U dans $\breve{\mathcal{M}}$ est isomorphe au complété formel d'une variété quasi-projective sur $\mathcal{O}_{\breve{E}}$ le long d'un sous-schéma fermé de sa fibre spéciale.*

Démonstration. — D'après la proposition précédente et le lemme 3.2.2 il existe $\Gamma \in \mathcal{C}$ tel que $\forall g \in \Gamma \;\; U.\gamma \cap U = \emptyset$.

On peut insérer Γ dans des $(\Gamma_i)_{i\in I}$ uniformisant S. Considérons alors le composé

$$U \hookrightarrow \breve{\mathcal{M}} \to \Gamma\backslash\breve{\mathcal{M}} \hookrightarrow \coprod_{i\in I} \Gamma_i\backslash\breve{\mathcal{M}} \xrightarrow{\sim} S^{\wedge}_{/\widetilde{S}(\phi)}$$

qui induit une immersion ouverte de U dans $S^{\wedge}_{/\widetilde{S}(\phi)}$. L'ouvert U étant quasicompact, la fibre spéciale de l'ouvert de $S^{\wedge}_{/\widetilde{S}(\phi)}$ image par ce composé ne rencontre qu'un nombre fini d'éléments de $\widetilde{S}(\phi)$. Cet ouvert s'identifie donc au complété formel de S le long d'un ouvert d'une union finie d'éléments de $\widetilde{S}(\phi)$, i.e. un ouvert d'un fermé de $\overline{S}$. Le schéma S étant quasiprojectif on en déduit le résultat. □

Corollaire 3.2.5. — *Pour tout Γ élément de $\mathcal{C}$ le morphisme $\breve{\mathcal{M}} \longrightarrow \Gamma\backslash\breve{\mathcal{M}}$ est étale (i.e. adique et formellement étale) et le morphisme d'uniformisation est étale.*

Démonstration. — Il faut montrer que le morphisme $\breve{\mathcal{M}} \to \Gamma\backslash\breve{\mathcal{M}}$ est adique puisqu'il est clairement formellement étale. Il suffit de montrer que ce morphisme est adique en restriction à tout ouvert quasicompact de $\breve{\mathcal{M}}$. Soit U un ouvert quasicompact de $\breve{\mathcal{M}}$. Choisissons un sous groupe $\Gamma' \subset \Gamma$ tel que $\Gamma' \in \mathcal{C}$ et $\forall \gamma \in \Gamma' \setminus \{Id\} \;\; \gamma.U \cap U = \emptyset$. Décomposons l'application $U \longrightarrow \breve{\mathcal{M}}/\Gamma$ en

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, hook, "j"] & \breve{\mathcal{M}} \arrow[r, "p"] & \breve{\mathcal{M}}/\Gamma' \arrow[d, "\pi"'] \\ & & \breve{\mathcal{M}}/\Gamma \end{tikzcd}$$

Si l'on choisit $\Gamma' \subset \Gamma$ tel que Γ soit de la forme $I^\phi(\mathbb{Q}) \cap (J_b \times K^p)$ et Γ' de la forme $I^\phi(\mathbb{Q}) \cap K^{p\prime}$ pour $K^{p\prime} \subset K^p$, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \breve{\mathcal{M}}/\Gamma' \arrow[r, hook] \arrow[d, "\pi"'] & (S_{K^{p\prime}})^{\wedge}_{/\widetilde{S}(\phi)} \arrow[d] \\ \breve{\mathcal{M}}/\Gamma \arrow[r, hook] & (S_{K^p})^{\wedge}_{/\widetilde{S}(\phi)} \end{tikzcd}$$

L'application de droite étant étale on en déduit que π l'est. Le morphisme $p \circ j$ étant une immersion ouverte cela conclu la démonstration. □

Lemme 3.2.6. — *L'inclusion $I^\phi(\mathbf{A}_f^p) \subset G(\mathbf{A}_f^p)$ est un homéomorphisme sur son image.*

Démonstration. — L'existence d'un isomorphisme de $B \otimes \mathbf{A}_f^p$-modules symplectiques

$$\eta : V \otimes \mathbf{A}_f^p \xrightarrow{\sim} H_1(\mathcal{A}_x, \mathbf{A}_f^p)$$

implique que la $\widehat{\mathbb{Z}}^p$ structure sur $G(\mathbf{A}_f^p)$ est la même que celle induite sur $I^\phi(\mathbf{A}_f^p)$. □

Remarque 3.2.7. — Se donner un isomorphisme η comme dans la démonstration précédente est plus fort que se donner $\forall \ell \neq p$ un isomorphisme $V \otimes \mathbb{Q}_\ell \xrightarrow{\sim} H_1(\mathcal{A}_x, \mathbb{Q}_\ell)$. C'est ce qui fait marcher le lemme précédent.

Lemme 3.2.8. — *Pour tout élément Γ dans $\mathcal{C}$, le groupe Γ est cocompact dans $I^\phi(\mathbb{Q}_p)$.*

Démonstration. — Le groupe réductif I^ϕ est anisotrope modulo son centre et $I^\phi(\mathbb{R})$ est compact modulo son centre. On en déduit que si $K' \subset I^\phi(\mathbf{A}_f)$ est un sous-groupe compact ouvert l'ensemble

$$I^\phi(\mathbb{Q}) \backslash I^\phi(\mathbf{A}_f)/K'$$

est fini.

L'inclusion $I^\phi(\mathbf{A}_f) \hookrightarrow J_b \times G(\mathbf{A}_f^p)$ étant continue, si K est un sous-groupe compact ouvert de $J_b \times G(\mathbf{A}_f^p)$, le groupe $K \cap I^\phi(\mathbf{A}_f)$ est compact ouvert dans $I^\phi(\mathbf{A}_f)$.

Si Γ est un élément de $\mathcal{C}$, il existe un sous groupe compact ouvert K^p dans $G(\mathbf{A}_f^p)$ tel que $\Gamma = I^\phi(\mathbb{Q}) \cap K^p$. Si K'_p est un sous-groupe compact ouvert de $I^\phi(\mathbb{Q}_p)$ et si l'on pose $K' = K'_p.(K^p \cap I^\phi(\mathbf{A}_f^p))$, alors l'inclusion

$$\Gamma \backslash I^\phi(\mathbb{Q}_p)/K'_p \hookrightarrow I^\phi(\mathbb{Q}) \backslash I^\phi(\mathbf{A}_f)/K'$$

montre que l'ensemble de gauche est fini. □

3.2.2. Le cas de la strate basique. — Supposons dans cette section que $b = b_0$ est la classe basique de $B(G_{\mathbb{Q}_p}, \mu_{\overline{\mathbb{Q}_p}})$.

D'après [**51**](6.34) on a alors :

- L'ensemble $\{\phi \mid b(\phi) = b_0\}$ est fini
- $\forall \phi \;\; b(\phi) = b_0$, I^ϕ est une forme intérieure de G
- $I^\phi(\mathbb{Q}_p) = J_b$, $\forall \ell \neq p \;\; I^\phi(\mathbb{Q}_\ell) = G(\mathbb{Q}_\ell)$ et donc $I^\phi(\mathbf{A}_f) = J_b \times G(\mathbf{A}_f^p)$ (comme groupes topologiques d'après 3.2.6)
- $I^\phi(\mathbb{R})$ est la forme intérieure compacte modulo le centre de $G(\mathbb{R})$
- Le lemme 3.2.8 implique alors que $\forall \Gamma \in \mathcal{C} \;\; \Gamma$ est cocompact dans J_b

Dans le cas (A) et (C) de [**41**] que nous considérons on a en fait mieux :

Proposition 3.2.9 **([41],[51])**. — *Le nombre de classes d'isogénie ϕ intervenant dans la strate basique est égal a $|\ker^1(\mathbb{Q}, G)|$.*

De plus, pour toutes ces classes d'iosgénie ϕ les groupes I^ϕ sont isomorphes sur $\mathbb{Q}$ et il existe des isomorphismes compatibles avec les isomorphismes $I^\phi(\mathbf{A}_f) \simeq J_b \times G(\mathbf{A}_f^p)$.

Démonstration. — Il résulte du lemme 6.28 de [**51**] que les classes d'isogénie de la strate basique sur un corps fini $\mathbb{F}_{p^r}$ sont associées à un même triplet $(\gamma_0, \gamma, \delta)$ de [**41**]. Le reste de la proposition se déduit de [**41**]. □

Corollaire 3.2.10. — *On a alors une uniformisation de la strate basique :*

$$\coprod_{\ker^1(\mathbb{Q},G)} I^{\phi}(\mathbb{Q})\backslash\left(\breve{\mathcal{M}}\times G(\mathbf{A}_f^p)/K^p\right)\xrightarrow{\sim}(S_{K^p})^{\wedge}_{/\overline{S}(b_0)}$$

où $I^{\phi}(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbf{A}_f^p)/K^p$ est fini.

3.3. Uniformisation rigide

Revenons au cas d'un b quelconque.

Lemme 3.3.1. — *Pour tout Γ dans $\mathcal{C}$ il y a un isomorphisme*

$$\Gamma\backslash\breve{\mathcal{M}}^{an}\xrightarrow{\sim}\left(\Gamma\backslash\breve{\mathcal{M}}\right)^{an}$$

Démonstration. — Si Uest un ouvert quasicompact de $\breve{\mathcal{M}}$, soit $\Gamma'\lhd\Gamma$, $\Gamma'\in\mathcal{C}$ choisi tel que $\forall\gamma'\in\Gamma'\setminus\{Id\}$ $\gamma'.U\cap U=\emptyset$ et tel que le morphisme $\Gamma'\backslash\breve{\mathcal{M}}\to\Gamma\backslash\breve{\mathcal{M}}$ soit étale fini galoisien de groupe Γ/Γ'.

Notons $p':\breve{\mathcal{M}}\to\Gamma'\backslash\breve{\mathcal{M}}$, $p:\breve{\mathcal{M}}\to\Gamma\backslash\breve{\mathcal{M}}$ les projections et $V=p^{-1}(p(U))=\cup_{\gamma\in\Gamma}U.\gamma$.

Étant donné que Γ' est d'indice fini dans Γ, $p'(V)$ est quasicompact. Le morphisme $p'(V)\to p(U)$ est galoisien de groupe Γ/Γ' ce qui implique que

$$p(U)^{an}=(\Gamma/\Gamma')\backslash p'(V)^{an}$$

De plus, $p'(V)=\Gamma'\backslash V$ au sens où $p'(V)$ est le schéma formel recollé des $(\gamma.U)_{\gamma\in\Gamma}$ le long des $\gamma_1.U\cap\gamma'\gamma_2.U$ pour $\gamma_1,\gamma_2\in\Gamma$ et $\gamma'\in\Gamma'$. Donc $p'(V)^{an}$ est l'espace analytique recollé des domaines analytiques fermés $\gamma.U^{an}$ le long des fermés analytiques $\gamma_1.U^{an}\cap\gamma'\gamma_2.U^{an}$. Cela implique que $\Gamma'\backslash p'(V)^{an}=V^{an}$.

Au final,

$$p(U)^{an}=(\Gamma/\Gamma')\backslash p'(V)^{an}=(\Gamma/\Gamma')\backslash(\Gamma'\backslash V^{an})=\Gamma\backslash V^{an}$$

Écrivant $\breve{\mathcal{M}}$ comme union croissante de tels U on obtient le résultat. □

Soit maintenant ϕ une classe d'isogénie comme dans la section 3.2 et $\widetilde{S}(\phi)$ la famille de sous-schémas fermés de $\overline{S}_{\bar{k}}$ associée. Notons $S^{\wedge}_{K^p}$ le complété p-adique du schéma $S_{K^p}\times_{\mathcal{O}_E}\mathcal{O}_{\breve{E}}$ et $\mathrm{Sh}^{an}_{C_0K^p}$ l'espace analytique sur $\breve{E}$ associée à la variété algébrique $\mathrm{Sh}_{C_0K^p}\otimes\breve{E}$. Il y a une immersion

$$(S^{\wedge}_{K^p})^{an}\hookrightarrow\mathrm{Sh}^{an}_{K^pC_0}$$

qui est un domaine analytique fermé égal à tout $\mathrm{Sh}^{an}_{K^pC_0}$ lorsque S est propre ce qui est le cas si $\mathrm{End}_B(V)$ est une algèbre à division sur F ([**42**]).

Le morphisme de spécialisation

$$sp:(S^{\wedge}_{K^p})^{an}\longrightarrow\overline{S}_{K^p}$$

est défini sur ce domaine analytique. Si le schéma S n'est pas propre les points de $\mathrm{Sh}^{an}_{K^pC_0}\setminus(S^{\wedge}_{K^p})^{an}$ se spécialisent sur le bord de la fibre spéciale d'une compactification de S. Dit en d'autres termes, les points géométriques de $(S^{\wedge}_{K^p})^{an}$ sont les points géométriques x de $\mathrm{Sh}^{an}_{K^pC_0}$ où la variété abélienne $\mathcal{A}_x$ muni de ses structures additionnelles a bonne réduction.

Définition 3.3.2. — Nous noterons

$$\mathrm{Sh}^{an}_{C_0K^p}(\phi) = \left((S_{K^p})^{\wedge}_{/\widetilde{S}(\phi)}\right)^{an}$$

la fibre spéciale du schéma formel complété de S le long de $\widetilde{S}(\phi)$.

C'est le tube au dessus de $\widetilde{S}(\phi)$ au sens suivant :

$\forall Z \in \widetilde{S}(\phi)$ $(S^{\wedge}_{/Z})^{an} = sp^{-1}(Z)$ est un domaine analytique ouvert dans $(S^{\wedge})^{an}$. L'espace analytique $\mathrm{Sh}^{an}_{K^pC_0}(\phi)$ est alors l'espace analytique recollé des ouverts $sp^{-1}(Z), Z \in \widetilde{S}(\phi)$ le long des $sp^{-1}(Z_1) \cap sp^{-1}(Z_2)$, $Z_1, Z_2 \in \widetilde{S}(\phi)$. On a donc que $\mathrm{Sh}^{an}_{C_0K^p}(\phi)$ est l'ouvert analytique de $(S^{\wedge})^{an}$ union des $sp^{-1}(Z), Z \in \widetilde{S}(\phi)$.

Remarque 3.3.3. — En fait, on a mieux car les $Z \in \widetilde{S}(\phi)$ sont des variétés projectives et on en déduit que $\mathrm{Sh}^{an}_{C_0K^p}(\phi)$ n'est pas seulement ouvert dans $(S^{\wedge})^{an}$ mais aussi dans $\mathrm{Sh}^{an}_{C_0K^p}$.

Remarque 3.3.4. — A part pour la strate basique,

$$\coprod_{\phi, b(\phi)=b} \mathrm{Sh}^{an}_{C_0K^p}(\phi) \subsetneq sp^{-1}(\overline{S}(b))$$

Par exemple, un point de $sp^{-1}(\overline{S}(b))$ se spécialisant sur le point générique d'une composante irréductible de $\overline{S}(b)$ n'appartient pas au membre de gauche pour b différent de la classe basique.

Définition 3.3.5. — Si $K_p \subset C_0$, $K = K_pK^p$ nous noterons

$$\mathrm{Sh}^{an}_K(\phi) = \Pi^{-1}_{C_0K^p,K}(\mathrm{Sh}^{an}_{C_0K^p}(\phi))$$

un ouvert analytique de $(\mathrm{Sh}_K)^{an}_{\eta}$.

On a alors le théorème suivant combiné de l'uniformisation formelle et du lemme 3.3.1 :

Théorème 3.3.6. — [**51**] *Pour $K = K_pK^p$ variant il y a des isomorphisme compatibles d'espaces analytiques sur $\breve{E}$*

$$I^{\phi}(\mathbb{Q})\backslash\left(\breve{\mathcal{M}}_{K_p} \times G(\mathbf{A}^p_f)/K^p\right) \xrightarrow{\sim} Sh^{an}_K(\phi)$$

Corollaire 3.3.7. — *Pour tout K_p, $\breve{\mathcal{M}}_{K_p}$ est un espace analytique quasi-algébrique (annexe F.2.1).*

Corollaire 3.3.8. — *Pour tout Γ dans $\mathcal{C}$ le morphisme $\breve{\mathcal{M}}_K \longrightarrow \Gamma\backslash\breve{\mathcal{M}}_K$ est un isomorphisme local d'espace analytiques.*

Démonstration. — Soit $x \in \breve{\mathcal{M}}^{an}$. D'après le corollaire précédent, x possède une base de voisinages formée de domaines affinoïdes. De plus, si $sp(x) \in Z$ une composante irréductible de $\overline{\mathcal{M}}$, Z^{an} est un voisinage de x vérifiant

$$\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma.Z^{an} \cap Z^{an}\} \text{ est fini}$$

x possède donc une base de voisinages affinoïdes $\mathcal{B}$ tels que $\forall V \in \mathcal{B}$ $\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma.V \cap V \neq \emptyset\}$ soit fini. Rappelons également que $\Gamma \setminus \{Id\}$ n'a pas de points fixes dans $\breve{\mathcal{M}}^{an}$.

Soit donc $V \in \mathcal{B}$ fixé et

$$\{\gamma_1, \ldots, \gamma_d\} = \{\gamma \in \Gamma \setminus \{Id\} \mid \gamma.V \cap V \neq \emptyset\}$$

Alors,

$$\forall i \in \{1, \ldots, d\} \quad \bigcap_{W \in \mathcal{B}\, W \subset V} W \cap \gamma_i.W = \emptyset$$

car x n'est pas un point fixe de γ_i. Par compacité des $W \in \mathcal{B}$,

$$\forall i, \exists W_i \in \mathcal{B}, \;\; W_i \cap \gamma_i.W_i = \emptyset$$

Alors, $W' = \bigcap_{i=1}^{d} W_i$ est un domaine affinoïde voisinage de x vérifiant $\forall \gamma \in \Gamma \backslash \{Id\} \;\; W' \cap \gamma.W' = \emptyset$ et $W' \hookrightarrow \Gamma \backslash \breve{\mathcal{M}}^{an}$. □

Corollaire 3.3.9. — *Le morphisme d'uniformisation*

$$\breve{\mathcal{M}}_{K_p} \times G(\mathbf{A}_f^p)/K^p \longrightarrow Sh_K^{an}(\phi)$$

est un isomorphisme local.

PARTIE II

UNE SUITE SPECTRALE D'HOCHSCHILD-SERRE POUR L'UNIFORMISATION DE RAPOPORT-ZINK

CHAPITRE 4

SUITE SPECTRALE DE HOCHSCHILD-SERRE

4.1. Suite spectrale de Cohomologie de Čech équivariante

Nous adoptons les notations de l'appendice F sur la cohomologie ℓ-adique des espaces analytiques.

Soit k un corps valué complet non archimédien.

Définition 4.1.1. — Nous dirons qu'un k-espace analytique est de dimension finie sur k si $\dim(X) + cd_\ell(k) < +\infty$.

Proposition 4.1.2. — *Soit X un espace analytique de dimension finie sur k muni d'une action d'un groupe G à gauche, soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert localement fini de X stable par l'action de G et soit $\mathcal{F} \in \Lambda_\bullet - \mathcal{F}sc_{/X_{ét}}$ muni d'une action de G compatible à celle sur X. Il existe alors un complexe borné $(\mathcal{I}^\bullet)$ de faisceaux de Λ-modules sur $X_{ét}$, muni d'une action de G (compatible à celle sur X) comme complexe de faisceaux, et un complexe double*

$$C^{p,q} = \bigoplus_{\substack{\alpha\subset I \\ |\alpha|=-p+1}} \Gamma_c(U(\alpha), \mathcal{I}^q)$$

où $U(\alpha) = \bigcap_{i\in\alpha} U_i$, où $C^{p,q} \longrightarrow C^{p,q+1}$ est induit par $\mathcal{I}^q \longrightarrow \mathcal{I}^{q+1}$, qui est muni d'une action de G via les morphismes

$$\forall g \in G \quad g_! : \Gamma_c(U(\alpha), \mathcal{I}^q) \longrightarrow \Gamma_c(U(\alpha).g, \mathcal{I}^q)$$

tel que la suite spectrale G équivariante associée à la filtration par les ligne soit

$$E_0^{pq} = C^{pq} \quad E_1^{pq} = \bigoplus_{\substack{\alpha\subset I \\ |\alpha|=-p+1}} H_c^q(U(\alpha), \mathcal{F}) \Longrightarrow H_c^{p+q}(X, \mathcal{F})$$

où l'action sur $H_c^{p+q}(X, \mathcal{F})$ est celle induite par l'action de G sur $\mathcal{F}$.

Démonstration. — Par définition une action de G sur $\mathcal{F}$ est la donnée de morphismes

$$\forall g \in G \quad g^*\mathcal{F} \xrightarrow{\alpha_g} \mathcal{F}$$

se composant de façon naturelle :

$$\forall g_1, g_2 \in G \;\; \alpha_{g_2} \circ g_2^* \alpha_{g_1} = \alpha_{g_1 g_2}$$

et vérifiant $\alpha_e = Id$. De tels morphismes sont nécessairement des isomorphismes et $\alpha_{g^{-1}} : (g^{-1})^*\mathcal{F} \to \mathcal{F}$ est l'adjoint l'inverse de α_g via l'égalité $(g^{-1})^*\mathcal{F} = g_*\mathcal{F}$.

Si U est un ouvert de X et g un élément de G, le morphisme

$$g_! : \mathbb{R}\Gamma_c(U, \mathcal{F}) \longrightarrow \mathbb{R}\Gamma_c(g.U, \mathcal{F})$$

est défini de la façon suivante : $\alpha_{g^{-1}}$ définit par adjonction un morphisme $u : \mathcal{F} \to (g^{-1})_*\mathcal{F}$ et $g_!$ est la composé

$$\mathbb{R}\Gamma_c(U, \mathcal{F}) \xrightarrow{\mathbb{R}\Gamma_c(u)} \mathbb{R}\Gamma_c(U, (g^{-1})_*\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}\Gamma_c(g.U, \mathcal{F})$$

Cela définit bien une action à gauche au sens où $(g_1g_2)_! = g_{1!}g_{2!}$.

Si $\mathcal{I}^\bullet$ est un complexe d'injectifs dans $\Lambda - \mathcal{F}\mathrm{sc}_{/X_{\text{ét}}}$ représentant $\mathbb{R}\pi_*(F)$, l'action de G sur $\mathcal{F}$ induit une action de G sur $\mathbb{R}\pi_*(\mathcal{F})$ dans $\boldsymbol{D}^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ et donc une action sur le complexe $\mathcal{I}^\bullet$ à homotopie près au sens où $\forall g \in G$ on a un morphisme de complexes $\beta_g : g^*\mathcal{I}^\bullet \longrightarrow \mathcal{I}^\bullet$ tel que $\beta_{g_1g_2}$ soit homotope à $\beta_{g_2} \circ g_2^*\beta_{g_1}$.

Pour avoir une vraie action nous allons nous placer dans une catégorie de faisceaux plus petite.

Définition 4.1.3. — Si Y est un espace analytique muni d'une action de G, nous noterons $\Lambda_\bullet - G - \mathcal{F}\mathrm{sc}_{/Y_{\text{ét}}}$, resp. $\Lambda - G - \mathcal{F}\mathrm{sc}_{/Y_{\text{ét}}}$ la catégorie des faisceaux Λ-adiques, resp. de Λ-modules sur $Y_{\text{ét}}$ munis d'une action de G compatible à celle sur Y. Nous noterons $\boldsymbol{D}(Y_{\text{ét}}, \Lambda_\bullet - G)$, $\boldsymbol{D}(Y_{\text{ét}}, \Lambda - G)$ les catégories dérivées associées.

Les catégories $\Lambda_\bullet - G - \mathcal{F}\mathrm{sc}_{/Y_{\text{ét}}}$ et $\Lambda - G - \mathcal{F}\mathrm{sc}_{/Y_{\text{ét}}}$ sont des catégories abéliennes Λ linéaires. Si l'action de G sur Y est triviale, elles coïncident avec $\Lambda_\bullet[G] - \mathcal{F}\mathrm{sc}_{/Y_{\text{ét}}}$, resp. $\Lambda[G] - \mathcal{F}\mathrm{sc}_{/Y_{\text{ét}}}$, les catégories de faisceaux de $\Lambda[\Gamma]$-modules.

Définition 4.1.4. — Notons

$$\begin{aligned} \iota_\bullet : \Lambda_\bullet - G - \mathcal{F}\mathrm{sc}_{/Y_{\text{ét}}} &\hookrightarrow \Lambda_\bullet - \mathcal{F}\mathrm{sc}_{/Y_{\text{ét}}} \\ \iota : \Lambda - G - \mathcal{F}\mathrm{sc}_{/Y_{\text{ét}}} &\hookrightarrow \Lambda - \mathcal{F}\mathrm{sc}_{/Y_{\text{ét}}} \end{aligned}$$

les plongements canoniques, et

$$\begin{aligned} \widetilde{\pi}_* : \Lambda_\bullet - G - \mathcal{F}\mathrm{sc}_{/Y_{\text{ét}}} &\longrightarrow \Lambda - G - \mathcal{F}\mathrm{sc}_{/Y_{\text{ét}}} \\ (\mathcal{F}_n)_n &\longmapsto \varprojlim \mathcal{F}_n \end{aligned}$$

Lemme 4.1.5. — *Les catégories $\Lambda_\bullet - G - \mathcal{F}sc_{/Y_{\text{ét}}}$ et $\Lambda - G - \mathcal{F}sc_{/Y_{\text{ét}}}$ possèdent suffisamment d'injectifs, les foncteurs $\iota_\bullet$ et ι sont exactes et envoient suffisamment d'injectifs sur des injectifs.*

Démonstration. — Les foncteurs $\iota_\bullet$ et ι possèdent un adjoint à droite :

$$\mathcal{G} \longmapsto Ind_1^G\mathcal{G} = \prod_{g \in G} g^*\mathcal{G}$$

Soit alors $\mathcal{H}$ un objet de $\Lambda_\bullet - G - \mathcal{F}\mathrm{sc}_{/Y_{\text{ét}}}$ (resp. de $\Lambda - G - \mathcal{F}\mathrm{sc}_{/Y_{\text{ét}}}$). Si $\iota(\mathcal{H}) \hookrightarrow \mathcal{I}$ où $\mathcal{I}$ est un injectif (resp. $\iota_\bullet\mathcal{H} \hookrightarrow \mathcal{I}$), on a une injection $\mathcal{H} \hookrightarrow Ind_1^G(\mathcal{I})$ et le membre de droite

est un injectif puisque Ind_1^G possède un adjoint à gauche. On en déduit que nos deux catégories possèdent suffisamment d'injectifs. De plus $\iota(Ind_1^G(\mathcal{I}))$ (resp. $\iota_\bullet(Ind_1^G(\mathcal{I}))$) est un injectif et donc tout objet de l'une de nos deux catégories se plonge dans un injectif d'image un objet injectif par ι (resp. $\iota_\bullet$), d'où la seconde assertion. □

Lemme 4.1.6. — *On a une égalité*

$$\iota \circ \mathbb{R}\widetilde{\pi}_* = \mathbb{R}\pi_* \circ \iota_\bullet$$

Démonstration. — Cela résulte de l'égalité $\iota \circ \widetilde{\pi}_* = \pi_* \circ \iota_\bullet$, du lemme précédent et de l'exactitude de ι. □

Appliquons maintenant cela à $\mathcal{F} \in \Lambda_\bullet - G - \mathcal{F}\mathrm{sc}_{/X_{\text{ét}}}$:

$$\iota(\mathbb{R}\widetilde{\pi}_*\mathcal{F}) = \mathbb{R}\pi_*\iota_\bullet(\mathcal{F})$$

Il existe donc un complexe d'injectifs $\mathcal{I}^\bullet$ dans $\Lambda - \mathcal{F}\mathrm{sc}_{/X_{\text{ét}}}$ où $\mathcal{I}^q = 0$ pour $q << 0$ et $\mathcal{I}^\bullet$ est muni d'une action de G tel que $\mathcal{I}^\bullet \simeq \mathbb{R}\pi_*(\mathcal{F})$ comme objets de la catégorie dérivée munis d'une action de G.

Rappelons que $\mathbb{R}\Gamma_c = \mathbb{R}\Gamma_! \circ \mathbb{R}\pi_*$ (lemme F.1.5) et que donc la cohomologie du complexe de $\Lambda[G]$-modules $\Gamma_c(X, \mathcal{I}^\bullet)$ calcule $H^\bullet(X_{\text{ét}}, \mathcal{F})$ muni de son action de G.

X étant de dimension finie sur k, $H_c^n(X, \mathcal{F}) = 0$ pour $n >> 0$ et donc, quitte à remplacer $\mathcal{I}^\bullet$ par $\tau_{\leq d}\mathcal{I}^\bullet$ pour $d >> 0$ on peut supposer que le complexe $\mathcal{I}^\bullet$ est borné.

Lemme 4.1.7. — *Si $f : U \longrightarrow X$ est étale, la cohomologie du complexe $\Gamma_c(U, \mathcal{I}^\bullet_{|U})$ calcule $H_c^\bullet(U, \mathcal{F}_{|U})$. C'est en particulier le cas si U est un ouvert de X.*

Démonstration. — Nous noterons

$$\begin{array}{rcl} f^* : \Lambda_\bullet - \mathcal{F}\mathrm{sc}_{/X_{\text{ét}}} & \longrightarrow & \Lambda_\bullet - \mathcal{F}\mathrm{sc}_{/Y_{\text{ét}}} \\ (\mathcal{G}_n)_n & \longmapsto & (f^*\mathcal{G}_n)_n \end{array}$$

qui est exact et possède un adjoint à gauche $((\mathcal{G}_n))_n \longmapsto (f_!\mathcal{G}_n)_n$.

$\pi_* \circ f^* = f^* \circ \pi_*$, donc $\mathbb{R}\pi_* \circ f^* = f^* \circ \mathbb{R}\pi_*$. □

Nous pouvons maintenant appliquer SGAIV,XVII 6.2.10 pour obtenir des résolutions simpliciales :

$$\forall \bullet \leq 0 \quad J^{\bullet,q} = \bigoplus_{\substack{\alpha \subset I \\ |\alpha| = -\bullet+1}} e_{\alpha!}e_\alpha^*\mathcal{I}^q \longrightarrow \mathcal{I}^q$$

où $e_\alpha : U(\alpha) \hookrightarrow X$. Ces résolutions simpliciales sont celles associées au couple de foncteurs adjoints :

$$(j_!, j^*) : (\coprod_{i \in I} U_i)^\sim_{\text{ét}} \longrightarrow X^\sim_{\text{ét}}$$

où $j : \coprod_{i \in I} U_i \to X$ (confère [**31**] par exemple).

$J^{\bullet\bullet}$ est un complexe double muni d'une action de G :

$$J^{p,q} = \bigoplus_{\substack{\alpha \subset I \\ |\alpha| = -p+1}} J_\alpha^{p,q}$$

et l'action de G se décompose sur les composantes en des morphismes

$$\forall g \in G \quad g^* J^{p,q}_{g.\alpha} \longrightarrow J^{p,q}_{\alpha}$$

Le complexe double

$$C^{p,q} = \Gamma_!(X, J^{p,q}) = \bigoplus_{\substack{\alpha \subset I \\ |\alpha| = -p+1}} \Gamma_!(U(\alpha), \mathcal{I}^q_{|U(\alpha)})$$

convient alors car d'après le lemme 4.1.7 on a

$$E_1^{pq} = \bigoplus_{\substack{\alpha \subset I \\ |\alpha| = -p+1}} H^q_c(U(\alpha), \mathcal{F}_{|U(\alpha)})$$

□

On peut montrer (nous n'aurons pas besoin de cette proposition) en utilisant des résolutions par des faisceaux discrets comme dans [**24**] :

Proposition 4.1.8. — *Sous les mêmes hypothèses que précédemment, supposons de plus X quasi-algébrique, $\mathcal{F}$ localement constant, $\forall i$ U_i est un ouvert distingué et l'action de G sur X est continue. On peut alors trouver un complexe double comme précédemment :*

$$C^{p,q} = \bigoplus_{\substack{\alpha \subset I \\ |\alpha| = -p+1}} C^{p,q}_{\alpha}$$

tel que $\forall \alpha$ $C^{p,q}_{\alpha}$ soit un $Stab_G(U(\alpha))$-module lisse.

4.2. Suite spectrale pour l'action d'un groupe discret

Soit X un espace analytique de dimension finie sur k, Γ un groupe discret agissant sur X de telle manière que $\forall x \in X$ $\exists U$ un voisinage de x tel que $\forall \gamma \in \Gamma \setminus \{Id\}$ $\gamma.U \cap U = \emptyset$. Le faisceau $\Gamma \backslash X$ sur le grand site étale de k est alors représentable par un espace analytique obtenu par recollement de tels ouverts (utiliser [**2**] 1.3.2,1.3.3).

Soit une extension de degré fini $L|\mathbb{Q}_\ell$, V un L-espace vectoriel de dimension finie et $\rho : \Gamma \longrightarrow \mathrm{GL}(V_\rho)$ une représentation continue pour Γ muni de la topologie profinie et $\mathrm{GL}(V_\rho)$ de la topologie ℓ-adique.

Le morphisme $p : X \longrightarrow \Gamma \backslash X$ étant un isomorphisme local il est associé à ρ un faisceau étale L-adique localement constant $\mathcal{F}_\rho$ sur $\Gamma \backslash X$: si $M \subset V_\rho$ est un $\mathcal{O}_L$ réseau stable par Γ, $\forall n$ $\rho_n : \Gamma \longrightarrow \mathrm{GL}(M/\varpi_L^n M)$ se factorise par un sous-groupe d'indice fini $\Gamma_n \lhd \Gamma$ et $\mathcal{F}_\rho = (\mathcal{F}_n)_n \otimes_{\mathcal{O}_L} L$ où $\mathcal{F}_n$ est trivial sur $\Gamma_n \backslash X$ (qui est étale fini au dessus de $\Gamma \backslash X$) associé à la représentation

$$\pi_1^{an}(\Gamma \backslash X) \longrightarrow \Gamma_n \backslash \Gamma \xrightarrow{\bar{\rho}_n} \mathrm{GL}(M/\varpi_L^n M)$$

Théorème 4.2.1. — 1. *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau L-adique étale sur $\Gamma \backslash X$. Il y a une suite spectrale convergente*

$$E_2^{pq} = Ext^p_\Gamma \left(H_c^{-q}(X, p^*\mathcal{F}), 1 \right) \Longrightarrow H_c^{-(p+q)}(\Gamma \backslash X, \mathcal{F})^*$$

2. *Il y a une suite spectrale convergente*

$$E_2^{pq} = Ext_\Gamma^p\left(H_c^{-q}(X,L),\check{\rho}\right) \Longrightarrow H_c^{-(p+q)}(\Gamma\backslash X,\mathcal{F}_\rho)^*$$

Démonstration. — Commençons par remarque que 2) se déduit de 1). En effet, il y a un isomorphisme de faisceaux munis d'une action de Γ

$$p^*\mathcal{F}_\rho \simeq \underline{V}_\rho$$

où $\underline{V}_\rho$ désigne le faisceau constant muni de l'action de Γ via ρ. Donc

$$H_c^{-q}(X,p^*\mathcal{F}) \simeq H_c^{-q}(X,L)\otimes\rho$$

comme Γ-modules. Si M et N sont deux $L[\Gamma]$-modules il y a une formule d'adjonction (puisque L est un corps)

$$\mathrm{Ext}_\Gamma^p(M\otimes\rho,N) \simeq \mathrm{Ext}_\Gamma^p(M,\check{\rho}\otimes N)$$

Qui montre donc que 1) implique 2).

Passons donc maintenant à la démonstration de 1).

La démonstration consiste à écrire un complexe de cohomologie de *Čech* à support compact dont la cohomologie calcule la cohomologie à support compact de X à coefficients dans $p^*\mathcal{F}$ dans la catégorie dérivée bornée des complexes de $L[\Gamma]$ modules, et à identifier l'image par le foncteur $\mathbb{R}\mathrm{Hom}_\Gamma(\bullet,1)$ de cet objet avec le dual d'un complexe de cohomologie de Čech à support compact dont la cohomologie est la cohomologie à support compact de $\Gamma\backslash X$ à coefficients dans $\mathcal{F}$.

Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de X par des ouverts vérifiant

$$\forall i\neq j\ U_i\neq U_j \text{ et } \forall\gamma\in\Gamma\setminus\{Id\}\quad U_i.\gamma\cap U_i=\emptyset$$

Nous travaillerons parfois directement avec des faisceaux L-adiques et des faisceaux de L-modules pour ne pas alourdir les notations. Le lecteur effrayé pourra travailler avec des faisceaux $\mathcal{O}_L$ adiques comme précédemment et tensoriser par L dès qu'il verra un $H_c^\bullet$.

Soit $\mathcal{G}\in\mathcal{O}_{L_\bullet}-\mathcal{F}\mathrm{sc}_{/X_{\text{ét}}}$ tel que $\mathcal{F}=\mathcal{G}\otimes L$. Considérons

$$\mathbb{R}\pi_*\mathcal{G}\in\mathbb{D}^+((\Gamma\backslash X)_{\text{ét}},\mathcal{O}_L)$$

et soit $\mathcal{I}^\bullet$ un complexe de faisceaux de L-modules injectifs représentant $(\mathbb{R}\pi_*\mathcal{G})\otimes L$. Tronquons $\mathcal{I}^\bullet$ de telle manière que si l'on note encore $\mathcal{I}^\bullet$ le tronqué, la cohomologie du complexe $\Gamma_!(\Gamma\backslash X,\mathcal{I}^\bullet)$ calcule $H_c^\bullet(\Gamma\backslash X,\mathcal{F})$. p étant étale, $p^*\mathcal{I}^\bullet$ est un complexe de L-modules injectifs qui est muni d'une action de Γ. De plus, d'après la démonstration du lemme 4.1.7

$$p^*(\mathbb{R}\pi_*\mathcal{G}) = \mathbb{R}\tilde{\pi}_*(p^*\mathcal{F})$$

où rappelons que $\tilde{\pi}$ est l'équivalent de π mais pour les faisceaux munis d'une action de Γ compatible à celle sur X. Donc, la cohomologie du complexe $\Gamma_!(X,p^*\mathcal{I}^\bullet)$ muni de l'action de Γ déduite de celle sur $p^*\mathcal{I}^\bullet$ calcule $H_c^\bullet(X,p^*\mathcal{F})$ comme Γ-module.

Considérons le complexe double de cohomologie de Čech à support compact (confère la démonstration de 4.1.2) associé à $p^*\mathcal{I}^\bullet$ et au recouvrement $(U_i.\gamma)_{i\in I,\gamma\in\Gamma}$ de X :

$$C^{p,q} = \bigoplus_{\substack{\alpha\subset I\times\Gamma\\ |\alpha|=-p+1}} \Gamma_!(U(\alpha), p^*\mathcal{I}^q)$$

où $U(\alpha) = \bigcap_{(i,\gamma)\in\alpha} U_i.\gamma$.

Le groupe Γ opère sur $C^{\bullet\bullet}$ via les morphismes

$$\forall\gamma\in\Gamma \quad \Gamma_!(U(\alpha), p^*\mathcal{I}^q) \xrightarrow{\gamma_!} \Gamma_!(U(\gamma.\alpha), \mathcal{I}^q)$$

où pour un γ l'application $\alpha\mapsto\gamma.\alpha$ est définie grâce à l'hypothèse $\forall i\neq j\ U_i\neq U_j$.

On a alors l'isomorphisme de Γ-module

$$H^n(\mathrm{Tot}^\oplus C^{\bullet\bullet}) \simeq H^n(X, p^*\mathcal{F})$$

Posons pour un entier p

$$\mathcal{P}_p = \{\alpha\subset I\times\Gamma \mid |\alpha| = -p+1\ \}$$

sur lequel Γ agit à gauche via la seconde composante. Remarquons maintenant :

Identité fondamentale :

$$C^{p,q} = \bigoplus_{\overline{\alpha}\in\Gamma\backslash\mathcal{P}_p} \text{c-Ind}_1^\Gamma\ \Gamma_!(U(\alpha), p^*\mathcal{I}^q)$$

Il résulte de cette identité que $\mathrm{Tot}^\oplus C^{\bullet\bullet}$ est un complexe de projectifs dans la catégorie des $L[\Gamma]$-modules et que donc, si F désigne le foncteur contravariant exact à gauche $\mathrm{Hom}_\Gamma(-,1)$,

$$\mathbb{R}^nF(\mathrm{Tot}^\oplus C^{\bullet\bullet}) \simeq H^{-n}(F(\mathrm{Tot}^\oplus C^{\bullet\bullet}))$$

où $\mathbb{R}^nF$ désigne l'hypercohomologie de F. Quant à la seconde suite spectrale d'hypercohomologie elle donne :

$$E_2^{pq} = R^pF(H^{-q}(\mathrm{Tot}^\oplus C^{\bullet\bullet})) \Longrightarrow \mathbb{R}^{p+q}F(\mathrm{Tot}^\oplus C^{\bullet\bullet})$$

or, on sait déjà que

$$R^pF(H^q(\mathrm{Tot}^\oplus C^{\bullet\bullet})) = \mathrm{Ext}_\Gamma^p\left(H_c^{-q}(X,L),1\right)$$

Il reste donc à montrer que $H^n(F(\mathrm{Tot}^\oplus C^{\bullet\bullet})) \simeq H_c^n(\Gamma\backslash X, \mathcal{F})$.

Le complexe $F(\mathrm{Tot}^\oplus C^{\bullet\bullet})$ est le complexe simple associé au complexe double $\mathrm{Hom}_\Gamma(C^{\bullet\bullet},1)$. Montrons que $\mathrm{Hom}_\Gamma(C^{\bullet\bullet},1)$ est isomorphe au dual du complexe double de cohomologie de Čech à support compact associé à $\mathcal{I}^\bullet$ et au recouvrement $(p(U_i))_{i\in I}$ de $\Gamma\backslash X$ qui calcule $H_c^\bullet(\Gamma\backslash X,\mathcal{F})$, ce qui conclura.

Notons $\mathcal{C}_p$ un ensemble de représentants de $\mathcal{P}_p$ modulo Γ. D'après l'identité fondamentale et la réciprocité de Frobenius pour les induites compactes

$$\mathrm{Hom}_\Gamma(C^{p,q},1) = \left(\bigoplus_{\alpha\in\mathcal{C}_p} \Gamma_!(U(\alpha), p^*\mathcal{I}^q)\right)^*$$

C'est le complexe double associé au complexe de complexes cosimpliciaux dual du complexe de complexes sipmliciaux associé aux applications

$$\forall \alpha \in \mathcal{C}_{p+1} \forall \beta \in \mathcal{C}_p \;\; f_{\alpha,\beta} : \Gamma_!(U(\alpha), p^*\mathcal{I}^q) \longrightarrow \Gamma_!(U(\beta), p^*\mathcal{I}^q)$$

où $f_{\alpha,\beta} = \gamma_!$ s'il existe $\gamma \in \Gamma$ $\gamma.\alpha \subset \beta$ et $f_{\alpha,\beta} = 0$ sinon.

Le complexe de cohomologie de $\check{C}$ech à support compact associé à $\mathcal{I}^\bullet$ et $(p(U_i))_{i\in I}$ est :

$$B^{p,q} = \bigoplus_{\substack{\beta\subset I \\ |\beta|=-p+1}} \Gamma_! \left(\bigcap_{i\in\beta} p(U_i), \mathcal{I}^q \right)$$

On vérifie en utilisant que $\forall i \; \forall \gamma \in \Gamma \setminus \{Id\} \;\; U_i.\gamma \cap U_i = \emptyset$ que si

$$\begin{array}{rcl} \xi : \mathcal{C}_p & \longrightarrow & \{\beta \subset I \mid |\beta| = -p+1 \} \\ \{(i_0,\gamma_0),\ldots,(i_{-p},\gamma_{-p})\} & \longmapsto & \{i_0,\ldots,i_{-p}\} \end{array}$$

alors,

$$\forall \beta \subset I \quad \bigcap_{i\in\beta} p(U_i) = \coprod_{\substack{\alpha\in\mathcal{C}_p \\ \xi(\alpha)=\beta}} p(U(\alpha))$$

et que donc

$$B^{p,q} = \bigoplus_{\alpha\in\mathcal{C}_p} \Gamma_!(p(U(\alpha)), \mathcal{I}^q)$$

or $p_{|U(\alpha)} : U(\alpha) \xrightarrow{\sim} p(U(\alpha))$ et donc

$$\Gamma_!(p(U(\alpha)), \mathcal{I}^\bullet) \xrightarrow{\sim} \Gamma_!(U(\alpha), p^*\mathcal{I}^\bullet)$$

d'où l'isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_\Gamma(C^{\bullet,\bullet}, 1) \simeq B^{\bullet,\bullet}$$

(on vérifie facilement, par exemple au niveau des complexes simpliciaux, que les applications de bord sont les mêmes) □

Remarque 4.2.2. — (*Indépendance du choix du recouvrement)*

La suite spectrale construite dans le théorème précédent semble à priori dépendre du choix d'un recouvrement $(U_i)_{i\in I}$ de X vérifiant $\forall i \in I \; \forall \gamma \in \Gamma \setminus \{Id\} \;\; U_i \cap \gamma.U_i = \emptyset$. Si $\mathcal{U}$ désigne un tel recouvrement notons $E_r^{pq}(\mathcal{U})$ la suite spectrale associée. Si $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sont deux tels recouvrements on peut toujours trouver un troisième recouvrement $\mathcal{W}$ plus fin que $\mathcal{U}$ et $\mathcal{W}$ vérifiant ces hypothèses. Si de plus $\mathcal{V}$ est plus fin que $\mathcal{U}$ il a un isomorphisme de suites spectrales (pour $r \geq 2$)

$$E_r^{pq}(\mathcal{U}) \xrightarrow{\sim} E_r^{pq}(\mathcal{V})$$

associé (il s'agit d'un morphisme naturel défini au niveau des complexes de cohomologie de $\check{C}$ech à support compact qui induit un isomorphisme puisque c'est le cas au niveau des E_2^{pq}). Ces isomorphismes se composent de façon naturel. On a donc un système inductif de suites spectrales $(E_r^{pq}(\mathcal{U}))_{\mathcal{U}}$ où $\mathcal{U}$ parcourt des recouvrements vérifiant les hypothèses ci dessus et où $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$ si $\mathcal{V}$ est plus fin que $\mathcal{U}$. Les morphismes de transition sont des

isomorphismes et si l'on veut une définition canonique ne dépendant pas du choix d'un recouvrement on peut poser

$$E_r^{pq} = \varinjlim_{\mathcal{U}} E_r^{pq}(\mathcal{U})$$

Remarque 4.2.3. — La suite spectrale est naturelle en X, Γ, ρ au sens suivant : si X', Γ', ρ' vérifient les mêmes hypothèses que X, Γ, ρ et si

$$f : X \longrightarrow X', \quad g : \Gamma \longrightarrow \Gamma'$$

où f est étale fini et g un morphisme de groupe sont tels que

$$\forall \gamma \in \Gamma \; \forall x \in X \quad f(x.\gamma) = f(x).g(\gamma)$$

et

$$\rho = \rho' \circ g$$

alors, il y a un morphisme induit :$\bar{f} : X/\Gamma \longrightarrow X'/\Gamma'$ qui induit un morphisme $\bar{f}^*\mathcal{F}_{\rho'} \longrightarrow \mathcal{F}_\rho$ qui induit un morphisme ${}^t\bar{f}_! : H_c^{-(p+q)}(X'/\Gamma', \mathcal{F}_{\rho'})^* \longrightarrow H_c^{-(p+q)}(X/\Gamma, \mathcal{F}_\rho)^*$.

Il y a alors un morphisme de suite spectrales $E_r^{pq}(X', \Gamma', \rho') \longrightarrow E_r^{p,q}(X, \Gamma, \rho)$ qui induit sur la limite ${}^t\bar{f}_!$ et tel que le morphisme sur les E_2^{pq} soit le morphisme

$$\mathrm{Ext}^p_{\Gamma'}(H_c^{-q}(X', L), \check{\rho}') \longrightarrow \mathrm{Ext}^p_{\Gamma}(H_c^{-q}(X, L), \check{\rho})$$

qui se déduit des deux applications $f_! : H_c^p(X, L) \longrightarrow H_c^p(X', L)$ et $\check{\rho}' \longrightarrow \check{\rho}$ par foncto-rialité des Ext.

Ces morphismes de suites spectrales se composent naturellement au sens où l'application $(X, \Gamma, \rho) \mapsto E_r^{pq}$ est un foncteur de la catégorie des triplets vérifiant les hypothèses ci dessus et munis de morphismes du type de ceux ci dessus dans la catégorie des suites spectrales.

Nous utiliserons en fait la variante suivante du théorème précédent :

Théorème 4.2.4. — *Sous les hypothèses précédentes, il y a une suite spectrale* $\mathbf{Gal}(\bar{k}|k)$ *équivariante*

$$E_2^{pq} = Ext^p_\Gamma(H_c^{-q}(X\hat{\otimes}_k\hat{\bar{k}}), \check{\rho}) \Longrightarrow H_c^{-(p+q)}(\Gamma\backslash X\hat{\otimes}_k\hat{\bar{k}}, \mathcal{F}_\rho)^*$$

Démonstration. — Reprenons les notations de la démonstration du théorème précédent. Appliquons la démonstration de ce théorème au recouvrement $(U_i\hat{\otimes}\hat{\bar{k}})_{i\in I}$ de $X\hat{\otimes}\hat{\bar{k}}$ et au complexes de faisceaux obtenus à partir de $\mathcal{I}^\bullet$ par pull-back vers $X\hat{\otimes}_k\hat{\bar{k}}$. L'équivariance de la suite spectrale obtenue ne pose alors pas de problème. □

Les remarques 4.2.2 et 4.2.3 s'appliquent bien sûr également au théorème 4.2.4.

Variantes 4.2.5. — – *Au lieu de nous placer dans le cadre des coefficients ℓ-adiques considérons des $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ coefficients. La démonstration précédente s'adapte aussitôt (et est même plus simple puisqu'on n'a pas besoin d'utiliser la machinerie du foncteur $\mathbb{R}\pi_*$) pour montrer l'existence d'une suite spectrale du même type. Le point clef étant de remarquer que si M est un $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-espace vectoriel alors $c-Ind_1^\Gamma M$ est un Γ-module projectif, comme c'était le cas pour les L coefficients.*

– *Par contre, si l'on prend comme coefficients un anneau artinien local R de corps résiduel un corps de caractéristique ℓ, la démonstration ne marche pas en général puisque les $H_c^p(U_i, R)$ ne sont pas forcément des R-modules projectifs et les induites compactes de ces R-modules ne sont donc pas forcément des Γ-modules projectifs. La démonstration marche encore si tout point de X possède une base de voisinages formée d'ouverts U vérifiant $H_c^\bullet(U, R)$ est un R-module libre.*

4.3. Une suite spectrale de Hochschild-Serre pour l'uniformisation de Rapoport-Zink

La suite spectrale établie dans cette section n'est pas seulement valable dans le cadre des variétés de Shimura de type P.E.L. considérées dans la première partie mais pour n'importe quelle variété de Shimura possédant une uniformisation par des espaces rigides "raisonnables".

4.3.1. Spéculations. — L'idée de l'existence d'une suite spectrale telle qu'elle est énoncée dans le théorème qui suit est due à Michael Harris ([**23**]). Dans [**23**] M.Harris démontre l'existence de cette suite spectrale dans le cas de l'espace de Drinfeld uniformisant des variétés de Shimura différentes des nôtres. Néanmoins, la démonstration que nous allons donner s'applique à n'importe quel type d'uniformisation.

Reprenons les notations globales du premier chapitre. Soit donc $b \in B(G_{\mathbb{Q}_p}, \mu_{\overline{\mathbb{Q}_p}})$ et ϕ une classe d'isogénie associée à b.

Définition 4.3.1. —

$$G^\phi(\mathbf{A}_f) = J_b \times G(\mathbf{A}_f^p)$$

Il y a donc une inclusion

$$I^\phi(\mathbf{A}_f) \hookrightarrow G^\phi(\mathbf{A}_f)$$

via l'action d'un automorphisme de ϕ sur l'homologie cristalline en p et ℓ-adique pour $\ell \neq p$.

Il y a alors des isomorphismes lorsque $K = K_p K^p$ varie

$$\begin{array}{rcl} I^\phi(\mathbb{Q})\backslash\left(\breve{\mathcal{M}}_{K_p} \times G(\mathbf{A}_f^p)/K^p\right) & \xrightarrow{\sim} & \left(\breve{\mathcal{M}}_{K_p} \times I^\phi(\mathbb{Q})\backslash G^\phi(\mathbf{A}_f)/K^p\right)/J_b \\ [x, yK^p] & \longmapsto & [x, I^\phi(\mathbb{Q})yK^p] \end{array}$$

où, contrairement au membre de gauche, J_b agit à droite sur $\breve{\mathcal{M}}_{K_p}$ dans le membre de droite. Récrivons donc l'isomorphisme d'uniformisation rigide sous la forme

$$\left(\breve{\mathcal{M}}_{K_p} \times I^\phi(\mathbb{Q})\backslash G^\phi(\mathbf{A}_f)/K^p\right)/J_b \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sh}_K^{an}(\phi)$$

De ce point de vue là, l'uniformisation de Rapoport-Zink est une uniformisation p-adique.

Pour simplifier supposons que $\rho = 1$. Supposons l'existence d'une suite spectrale du type Hochschild-Serre associée au quotient p-adique précédent :

$$E_2^{pq} = \mathrm{Ext}^p_{J_b-\mathrm{lisse}}\left(H_c^{-q}(\breve{\mathcal{M}}_{K_p} \times I^\phi(\mathbb{Q})\backslash G^\phi(\mathbf{A}_f)/K^p, \overline{\mathbb{Q}_\ell}), 1\right) \Longrightarrow H_c^{-(p+q)}(\mathrm{Sh}_K^{an}(\phi), \overline{\mathbb{Q}_\ell})^*$$

Alors,

$$H_c^q(\breve{\mathcal{M}}_{K_p} \times I^\phi(\mathbb{Q})\backslash G^\phi(\mathbf{A}_f)/K^p, \overline{\mathbb{Q}_\ell}) = H_c^q(\breve{\mathcal{M}}_{K_p}, \overline{\mathbb{Q}_\ell}) \otimes \overline{\mathbb{Q}_\ell}[I^\phi(\mathbb{Q})\backslash G^\phi(\mathbf{A}_f)/K^p]$$

comme J_b-module. Et donc,

$$E_2^{pq} = \mathrm{Ext}^p_{J_b-\mathrm{lisse}}\left(H_c^q(\breve{\mathcal{M}}_{K_p}, \overline{\mathbb{Q}_\ell}), \underbrace{\underline{\mathrm{Hom}}(I^\phi(\mathbb{Q})\backslash G^\phi(\mathbf{A}_f), \overline{\mathbb{Q}_\ell})^{K^p}_{J_b\mathrm{lisse}}}_{(\mathcal{A}_1^\phi)^{K^p}}\right)$$

où $\mathcal{A}_1^\phi$ est un espace de "formes automorphes sur G^ϕ " de type 1 à l'infini.

Le théorème qui suit donne une démonstration de ces spéculations. La démonstration que nous donnons est valable dans un cadre beaucoup plus général que celui des variétés de Shimura que nous considérons (par exemple dans le cadre de la conjecture 4.2 de [**25**]). Elle est différente de celle de [**23**] qui ne se généralise pas au cadre général.

4.3.2. La suite spectrale. — Rappelons que nous notons

$$H^\bullet(\breve{\mathcal{M}}_K, \overline{\mathbb{Q}_\ell}) = H^\bullet(\breve{\mathcal{M}}_K \otimes \mathbb{C}_p, \mathbb{Q}_\ell) \otimes \overline{\mathbb{Q}_\ell}$$

Fixons $b \in B(G_{\mathbb{Q}_p}, \mu_{\overline{\mathbb{Q}_p}})$ et ϕ une classe d'isogénie dans la strate indexée par b (confère le chapitre 3).

Nous allons définir un espace de formes automorphes sur $G^\phi(\mathbf{A}_f)$.

Définition 4.3.2. — $\mathcal{A}_\rho^\phi = \{f : G^\phi(\mathbf{A}_f) \longrightarrow V_\rho \mid f$ est $G^\phi(\mathbf{A}_f)$ lisse à droite et $\forall \gamma \in I^\phi(\mathbb{Q})\ \ f(\gamma\bullet) = \rho(\gamma).f(\bullet)\}$

Pour $\gamma \in I^\phi(\mathbb{Q}), \rho(\gamma)$ signifie que γ est vu comme un élément de $G(\overline{\mathbb{Q}_\ell})$ via $I^\phi(\mathbb{Q}) \hookrightarrow G(\mathbb{Q}_\ell) \hookrightarrow G(\overline{\mathbb{Q}_\ell})$.

Via l'isomorphisme fixé $\overline{\mathbb{Q}_\ell} \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}$ on a

$$\mathcal{A}_\rho^\phi = \{f : G^\phi(\mathbf{A}_f) \longrightarrow V_\rho \mid f \text{ est lisse et } \forall \gamma \in I^\phi(\mathbb{Q})\ \ f(\gamma\bullet) = \rho(\gamma).f(\bullet)\}$$

où ici $\rho(\gamma)$ est défini via $I^\phi(\mathbb{Q}) \hookrightarrow I^\phi(\mathbb{C}) \hookrightarrow G(\mathbb{C})$.

A_ρ^ϕ est l'espace des "formes automorphes sur G^ϕ" de type ρ à l'infini. Il est muni d'une action lisse de $G^\phi(\mathbf{A}_f)$ par translations à droite.

Si $K^p \subset G(\mathbf{A}_f^p) \subset G^\phi(\mathbf{A}_f)$ nous noterons $(\mathcal{A}_\rho^\phi)^{K^p}$ l'espace des formes invariantes par K^p i.e. de niveau inférieur à K^p.

Remarque 4.3.3. — Soit $\mathcal{A}(I^\phi)_\rho$ l'espace des formes automorphes sur I^ϕ se transformant via $\check{\rho}_{|I^\phi(\mathbb{R})}$ à l'infini. Il y a alors un isomorphisme

$$\mathcal{A}_\rho^\phi \simeq Ind_{I^\phi(\mathbf{A}_f)}^{G^\phi(\mathbf{A}_f)} \mathcal{A}(I^\phi)_\rho$$

où Ind désigne l'induite lisse.

Soit $N = \dim(\breve{\mathcal{M}}^{an}) = \dim(\mathrm{Sh})$. Soit $K = K_pK^p$ un niveau.

Définition 4.3.4. — Posons

$$H^\bullet(\mathrm{Sh}_K^{an}(\phi), \mathcal{L}_\rho) = H_c^{2N-\bullet}(\mathrm{Sh}_K^{an}(\phi), \mathcal{L}_{\tilde{\rho}})^*(-N)$$

Le dual de Poincaré algébrique.

Remarque 4.3.5. — Cette définition est complètement formelle puisqu'à part pour la strate basique, ces espaces de cohomologie sont de dimension infinie.

Néanmoins, dans le cas de la strate basique, ces groupes peuvent s'interpréter comme l'aboutissement d'une suite spectrale des cycles évanescents ℓ-adique (II.6.9.4)

Théorème 4.3.6. — *Il y a un système compatible de suites spectrales $G(\mathbf{A}_f) \times W_{E_\nu}$ équivariant*

$$E_2^{pq}(K_pK^p) = Ext^p_{J_b\text{-}lisse}\left(H_c^{2N-q}(\breve{\mathcal{M}}_{K_p}, \overline{\mathbb{Q}_\ell})(N), (\mathcal{A}_\rho^\phi)^{K^p}\right) \Longrightarrow H^{p+q}(Sh_K^{an}(\phi), \mathcal{L}_\rho^{an})$$

Quelques remarques s'imposent avant la démonstration : $G(\mathbf{A}_f) = G(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbf{A}_f^p)$ et $\forall g \in G(\mathbb{Q}_p)$ il y a un morphisme

$$H_c^{2N-q}(\breve{\mathcal{M}}_{g^{-1}K_pg}, \overline{\mathbb{Q}_\ell}) \xrightarrow{(g^{-1})_!} H_c^{2N-q}(\breve{\mathcal{M}}_{K_p}, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$$

qui induit par fonctorialité des Ext un morphisme $E_2^{pq}(K_pK^p) \to E_2^{pq}(g^{-1}K_pgK^p)$. Dire que la suite spectrale est $G(\mathbb{Q}_p)$ équivariante signifie que ce morphisme est le morphisme associé au niveau des groupes E_2^{pq} à un morphisme de suites spectrales

$$E_r^{pq}(K_pK^p) \to E_r^{pq}(g^{-1}K_pgK^p)$$

qui induit dans la limite le morphisme usuel

$$H^{p+q}(\mathrm{Sh}_K(\phi), \mathcal{L}_\rho^{an}) \longrightarrow H^{p+q}(\mathrm{Sh}_{g^{-1}Kg}(\phi), \mathcal{L}_\rho^{an})$$

Cela signifie également que ces morphismes de suites spectrales se composent de façon naturelle. De même, $G(\mathbf{A}_f^p)$ opère sur $\mathcal{A}_\rho^\phi$ et donc induit un morphisme pour $g \in G(\mathbf{A}_f^p)$

$$(\mathcal{A}_\rho^\phi)^{K^p} \longrightarrow (\mathcal{A}_\rho^\phi)^{g^{-1}Kg}$$

qui induit le morphisme $E_2^{pq}(K) \longrightarrow E_2^{pq}(K_pg^{-1}K^pg)$. La $G(\mathbf{A}_f^p)$ équivariance est alors prise au même sens que pour $G(\mathbb{Q}_p)$. Quant à l'action de W_{E_ν} elle se fait sur chaque $E_2^{pq}(K)$ et ne pose pas de problème d'interprétation.

Reste à expliquer ce que l'on appelle système compatible. Soient donc $K_p' \subset K_p$ et $K^{p\prime} \subset K^p$. La compatibilité signifie qu'il y a un morphisme de suites spectrales

$$E_r^{pq}(K') \longrightarrow E_r^{pq}(K)$$

qui est induit au niveau des termes E_2^{pq} par les morphismes J_b équivariants

$$(\Pi_{K_p,K_p'})_! : H_c^q(\breve{\mathcal{M}}_{K_p'}, \overline{\mathbb{Q}_\ell}) \longrightarrow H_c^q(\breve{\mathcal{M}}_{K_p}, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$$

et l'inclusion

$$(\mathcal{A}_\rho^\phi)^{K^p} \hookrightarrow (\mathcal{A}_\rho^\phi)^{K^{p\prime}}$$

couplés à la fonctorialité de Ext. Bien sûr, ces morphismes de transition sont compatibles à l'action de $G(\mathbf{A}_f) \times W_{E_\nu}$.

Démonstration. — Prenons les notations suivantes pour l'uniformisation rigide :

$$\Theta : I^{\phi}(\mathbb{Q})\backslash \left(\breve{\mathcal{M}}_{K_p} \times G(\mathbf{A}_f^p)/K^p\right) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sh}_K^{an}(\phi)$$

Soient $(y_i)_{i\in I}$ des éléments de $G(\mathbf{A}_f^p)/K^p$ vérifiant

$$G(\mathbf{A}_f^p)/K^p = \coprod_{i\in I} I^{\phi}(\mathbb{Q}).y_i$$

et notons pour tout i dans I $\quad \Gamma_i = Stab_{I^{\phi}(\mathbb{Q})}(y_i)$. Nous verrons les groupes Γ_i comme des sous-groupes de J_b via le plongement $I^{\phi}(\mathbb{Q}) \hookrightarrow J_b$. A un tel choix est associé un isomorphisme

$$\Xi_{(y_i)_i} : \coprod_{i\in I} \Gamma_i\backslash\breve{\mathcal{M}}_{K_p} \xrightarrow{\sim} I^{\phi}(\mathbb{Q})\backslash \left(\breve{\mathcal{M}}_{K_p} \times G(\mathbf{A}_f^p)/K^p\right)$$

Notons $\rho_i : \Gamma_i \longrightarrow \mathrm{GL}(V_\rho)$ le morphisme continu (pour Γ_i muni de la topologie profinie et V_ρ la topologie ℓ-adique) défini par le composé

$$\Gamma_i \hookrightarrow I^{\phi}(\mathbb{Q}) \hookrightarrow G(\mathbb{Q}_\ell) \xrightarrow{\rho} \mathrm{GL}(V_\rho)$$

Lemme 4.3.7. —

$$\Xi^*_{(y_i)_i}(\Theta^*\mathcal{L}_\rho) = \coprod_{i\in I} \mathcal{F}_{\rho_i}$$

où $\mathcal{F}_{\rho_i}$ est le système local associé à ρ_i (cf. le début de la section 4.2).

Démonstration. — Il suffit de regarder ce que donne une variation du niveau K^p à droite sur la décomposition de gauche. □

Nous allons avoir besoin des deux lemmes suivants :

Lemme 4.3.8. — *Soit $i \in I$. Soient π_1 une représentation lisse de J_b et π_2 une représentation lisse de Γ_i.*

$$Ext^{\bullet}_{J_b-lisse}(\pi_1, Ind_{\Gamma_i}^{J_b}\pi_2) \simeq Ext^{\bullet}_{\Gamma}(\pi_1, \pi_2)$$

où les induites Ind sont des induites lisses.

Démonstration. — Cela résulte de la réciprocité de Frobenius usuelle pour les groupes p-adiques et de ce que Γ_i étant discret, $\mathrm{Ext}_{\Gamma_i-lisse} = \mathrm{Ext}_{\Gamma_i}$. □

Lemme 4.3.9. — *Soient π et $(\rho_i)_{i\in I}$ des représentations lisses de J_b. Il y a un isomorphisme canonique :*

$$\prod_{i\in I} Ext^{\bullet}_{J_b-lisse}(\pi, \rho_i) \simeq Ext_{J_b-lisse}(\pi, \left(\prod_{i\in I} \rho_i\right)^{lisse})$$

où $(\prod_i \rho_i)^{lisse}$ est la partie lisse de la représentation produit.

Démonstration. — Soit $P_\bullet \twoheadrightarrow \pi$ une résolution projective de π dans la catégorie des J_b-modules lisses.

$$\begin{aligned}\prod_{i\in I}\mathrm{Ext}^p_{J_b-\mathrm{lisse}}(\pi,\rho_i) &= \prod_{i\in I}H^p(\mathrm{Hom}_{J_b}(P_\bullet,\rho_i))\\ &= H^p\left(\prod_{i\in I}\mathrm{Hom}_{J_b}(P_\bullet,\rho_i)\right)\\ &= H^p\left(\mathrm{Hom}_{J_b}(P^\bullet,\prod_{i\in I}\rho_i)\right)\end{aligned}$$

or $\mathrm{Hom}_{J_b}(P^\bullet,\prod_{i\in I}\rho_i)=\mathrm{Hom}_{J_b}(P^\bullet,(\prod_{i\in I}\rho_i)^{lisse})$ car $P^\bullet$ étant lisse l'image d'un morphisme de J_b-module dans $\prod_i\rho_i$ atterrit dans $(\prod_i\rho_i)^{lisse}$.

D'où le résultat. □

Pour $i\in I$ nous considérons la suite spectrale du théorème 4.2.4 (rappelons qu'a fin de ne pas alourdir les notations on ne note pas les extensions des scalaires à $\mathbb{C}_p$) :

$$E_2^{pq}(i)=\mathrm{Ext}^p_{\Gamma_i}\left(H_c^{-q}(\breve{\mathcal{M}}_{K_p},\overline{\mathbb{Q}_\ell}),\rho_i\right)\Longrightarrow H_c^{-(p+q)}(\Gamma_i\backslash\breve{\mathcal{M}},\mathcal{F}_{\check{\rho}_i})^*$$

Le produit de ces suites spectrales est une suite spectrale convergente

$$\prod_{i\in I}E_2^{pq}(i)\Longrightarrow\prod_{i\in I}H_c^{-(p+q)}(\breve{\mathcal{M}}/\Gamma_{i,K^p},\mathcal{F}_{\check{\rho}_{i,K^p}})^*$$

L'aboutissement de cette suite spectrale se récrit

$$\begin{aligned}&\prod_{i\in I}H_c^{-(p+q)}(\breve{\mathcal{M}}/\Gamma_{i,K^p},\mathcal{F}_{\check{\rho}_{i,K^p}})^*\xrightarrow{\sim}H_c^{-(p+q)}(\coprod_{i\in I}\breve{\mathcal{M}}/\Gamma_{i,K^p},\coprod_{i\in I}\mathcal{F}_{\check{\rho}_{i,K^p}})^*\\ &\xrightarrow[\sim]{(\Xi_{(y_i)_i})_*}H_c^{-(p+q)}\left(I^\phi(\mathbb{Q})\backslash\left(\breve{\mathcal{M}}_{K_p}\times G(\mathbf{A}_f^p)/K^p\right),\mathcal{L}_{\check{\rho}}\right)^*\xrightarrow[\sim]{\Theta_*}H_c^{-(p+q)}(\mathrm{Sh}_K^{an}(\phi),\mathcal{L}_{\check{\rho}})^*\\ &=H^{p+q+2N}(\mathrm{Sh}_K^{an}(\phi),\mathcal{L}_\rho)(N)\end{aligned}$$

Quant aux premiers termes, grâce au lemme 4.3.8

$$\forall i\in I\ \forall p,q\ \ \mathrm{Ext}^p_{\Gamma_i}(H_c^{-q}(\breve{\mathcal{M}}_{K_p},\overline{\mathbb{Q}_\ell}),\rho_i)\simeq\mathrm{Extp}^p_{J_b\text{-lisse}}(H_c^{-q}(\breve{\mathcal{M}}_{K_p},\overline{\mathbb{Q}_\ell}),\mathrm{Ind}_{\Gamma_i}^{J_b}\rho_i)$$

et donc grâce au lemme 4.3.9

$$\prod_{i\in I}E_2^{pq}(i)\simeq\mathrm{Ext}^p_{J_b\text{-lisse}}\left(H_c^{-q}(\breve{\mathcal{M}}_{K_p},\overline{\mathbb{Q}_\ell}),\left(\prod_i\rho_i\right)^{\mathrm{lisse}}\right)$$

L'ingrédient suivant est le lemme

Lemme 4.3.10. — *Il y a un isomorphisme de J_b-modules*

$$\zeta_{(y_i)_i}:\left(\prod_{i\in I}Ind_{\Gamma_i}^J\rho_i\right)^{lisse}\xrightarrow{\sim}(\mathcal{A}_\rho^\phi)^{K^p}$$

Démonstration. — Définissons $\zeta_{(y_i)_i}$. Soit $(f_i)_{i\in I} \in \prod_i Ind_{\Gamma_i}^J \rho_i$. On a donc, $\forall i \in I$ $f_i : J_b \longrightarrow V_\rho$ et est tel que $\forall \gamma \in \Gamma_i$ $f_i(\gamma\bullet) = \rho_i(\gamma).f_i(\bullet)$. Définissons $f = \zeta_{(y_i)_i}((f_i)_i)$: $\left(\mathcal{A}_\rho^\phi \rho\right)^{K^p}$ s'identifie aux fonctions de $J_b \times G(\mathbf{A}_f^p)/K^p$ à valeurs dans V_ρ se transformant via ρ par l'action à gauche de $I^\phi(\mathbb{Q})$. Soit $(a,b) \in J_b \times G(\mathbf{A}_f^p)/K^p$. $\exists! i \in I$ $\exists \gamma \in I^\phi(\mathbb{Q})$ $b = \gamma.y_i$. Posons alors

$$f(a,b) = \rho(\gamma).f_i(\gamma^{-1}a)$$

$f(a,b)$ est bien défini car si $b = \gamma'.y_i$ où $\gamma' \in I^\phi(\mathbb{Q})$ alors ${\gamma'}^{-1}\gamma \in \Gamma_i$ et donc

$$\begin{aligned} \rho(\gamma').f_i({\gamma'}^{-1}a)) &= \rho(\gamma').f_i(({\gamma'}^{-1}\gamma)\gamma^{-1}a) \\ &= \rho(\gamma')\rho_i({\gamma'}^{-1}\gamma)f_i(\gamma^{-1}a) = \rho(\gamma)f_i(\gamma^{-1}a) \end{aligned}$$

Par définition de f, $\forall \gamma \in I^\phi(\mathbb{Q})$ $f(\gamma\bullet) = \rho(\gamma).f(\bullet)$. La lissité de f est claire quant à l'action de $G(\mathbf{A}_f^p)$ puisqu'elle est invariante par K^p, quant à la lissité vis à vis de l'action de J_b elle résulte de l'existence d'un sous-groupe compact ouvert C dans J_b vérifiant $\forall c \in C$ $\forall i \in I$ $f_i(\bullet c) = f_i(\bullet)$.

Définissons l'inverse de $\zeta_{(y_i)_i}$. Si $f \in \left(\mathcal{A}_\rho^\phi\right)^{K^p}$, $f : J_b \times G(\mathbf{A}_f^p)/K^p \longrightarrow V_\rho$, pour un i dans I et a dans J_b posons

$$f_i(a) = f(a, y_i)$$

$f \mapsto (f_i)_i$ est bien l'inverse de $\zeta_{(y_i)_i}$. □

On obtient donc au final une suite spectrale W_{E_ν} équivariante

$$E_2^{pq}((y_i)_{i\in I}) = \mathrm{Ext}^p_{J_b-\mathrm{lisse}}(H_c^{-q}(\breve{\mathcal{M}}_{K_p}, \overline{\mathbb{Q}_\ell}), (\mathcal{A}_\rho^\phi)^{K^p}) \Longrightarrow H^{2N+p+q}(\mathrm{Sh}_K^{an}(\phi), \mathcal{L}_{\check{\rho}})(N)$$

où $E_2^{pq}((y_i)_i)$ et l'aboutissement ne dépendent pas du choix $(y_i)_i$ mais où les autres termes en dépendent à priori.

La suite spectrale annoncée s'obtient en translatant verticalement cette suite spectrale de $2N$ et en la tordant par $\overline{\mathbb{Q}_\ell}(-N)$.

Montrons qu'en fait cette suite spectrale est indépendante du choix des $(y_i)_i$ au sens suivant :

Lemme 4.3.11. — *Supposons choisis des $(y'_j)_{j\in J}$, $y'_j \in G(\mathbf{A}_f)/K^p$ tels que*

$$G(\mathbf{A}_f)/K^p = \coprod_{j\in J} I^\phi(\mathbb{Q}).y'_j$$

Il y alors un isomorphisme naturel de suites spectrales $E_r^{pq}((y_i)_i) \to E_r^{pq}((y'_j)_j)$ induisant l'identité sur E_2^{pq} et l'aboutissement :

$$\begin{array}{ccc} E_2^{pq}((y_i)_{i\in I}) = Ext^p_{J_b-lisse}(H_c^{-q}(\breve{\mathcal{M}}_{K_p}, \overline{\mathbb{Q}_\ell}), (\mathcal{A}_\rho^\phi)^{K^p}) & \Longrightarrow & H_c^{-(p+q)}(Sh_K^{an}(\phi), \mathcal{L}_{\check{\rho}})^* \\ \Big\downarrow Id & & \Big\downarrow Id \\ E_2^{pq}((y'_j)_{j\in J}) = Ext^p_{J_b-lisse}(H_c^{-q}(\breve{\mathcal{M}}_{K_p}, \overline{\mathbb{Q}_\ell}), (\mathcal{A}_\rho^\phi)^{K^p}) & \Longrightarrow & H_c^{-(p+q)}(Sh_K^{an}(\phi), \mathcal{L}_{\check{\rho}})^* \end{array}$$

La naturalité étant prise au sens où si l'on fait un troisième choix $(y''_k)_k$ *comme ci dessus le morphisme de suites spectrales* $E_r^{pq}((y_i)_i) \to E_r^{pq}((y''_k)_k)$ *est le composé de* $E_r^{pq}((y_i)_i) \to E_r^{pq}((y'_j)_j)$ *et* $E_r^{pq}((y'_j)_j) \to E_r^{pq}((x''_k)_k)$

Démonstration. — Quitte à réindexer on peut supposer que $J = I$ et que $\forall i \in I\ y'_i \in I^\phi(\mathbb{Q}).y_i$. Fixons pour tout i dans I un γ_i dans $I^\phi(\mathbb{Q})$ vérifiant $y'_i = \gamma_i.y_i$. On a donc

$$\forall i \in I\ \Gamma'_i = Stab_{I^\phi(\mathbb{Q})} y'_i = \gamma_i \Gamma_i \gamma_i^{-1}$$

On définit comme précédemment ρ'_i. Notons pour tout i dans I $E_r^{pq}(i)'$ la suite spectrale associée à $(\breve{\mathcal{M}}_{K_p}, \Gamma'_i, \rho'_i)$.

Considérons l'isomorphisme de suites spectrales associé au morphisme de triplets $(X, \Gamma, \rho) \longrightarrow (X', \Gamma', \rho')$ par la remarque 4.2.3 où $X = X' = \breve{\mathcal{M}}_{K_p}$, le morphisme $X \to X'$ est l'action de $\gamma_i \in J_b$, $\Gamma = \Gamma_i, \Gamma' = \Gamma'_i$ et le morphisme de groupes $\Gamma \to \Gamma'$ est la conjugaison par γ_i^{-1}, et le morphisme $\rho \to \rho' \circ \mathrm{int}_{\gamma_i^{-1}}$ est la conjugaison par $\rho(\gamma_i)$. A un tel choix de $(\gamma_i)_i$ est donc associé un isomorphisme de suites spectrales

$$\begin{array}{ccc} E_r^{pq}(i) & \Longrightarrow & H_c^{p+q}(\Gamma_i \backslash \breve{\mathcal{M}}_{K_p}, \mathcal{F}_{\check{\rho}_i}) \\ \alpha_{(\gamma_i)_i} \Big\downarrow \simeq & & \Big\downarrow \simeq \\ E_r^{pq}(i)' & \Longrightarrow & H_c^{p+q}(\Gamma'_i \backslash \breve{\mathcal{M}}_{K_p}, \mathcal{F}_{\check{\rho}'_i}) \end{array}$$

Le morphisme $\alpha_{(\gamma_i)_i}$ induit au niveau des E_2^{pq} un morphisme

$$\mathrm{Ext}^p_{\Gamma_i}(H_c^q(\breve{\mathcal{M}}_{K_p}, \overline{\mathbb{Q}_\ell}), \rho_i) \longrightarrow \mathrm{Ext}^p_{\Gamma'_i}(H_c^q(\breve{\mathcal{M}}_{K_p}, \overline{\mathbb{Q}_\ell}), \rho'_i)$$

qui se décrit en utilisant la fonctorialité de Ext.

Le produit de ces isomorphismes de suites spectrales induit un isomorphisme de suites spectrales convergentes

$$\prod_{i \in I} E_r^{pq}(i) \longrightarrow \prod_{i \in I} E_r^{pq}(i)'$$

Rappelons qu'au choix des y_i on a associé deux isomorphismes

$$\prod_{i \in I} E_2^{pq}(i) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^p_{J_b\text{-lisse}}(H_c^q(\breve{\mathcal{M}}_{K_p}, \overline{\mathbb{Q}_\ell}), \left(\mathcal{A}_\rho^\phi\right)^{K^p})$$

et

$$\prod_{i \in I} H_c^{-(p+q)}(\Gamma_i \backslash \breve{\mathcal{M}}_{K_p}, \mathcal{F}_{\check{\rho}_i})^* \xrightarrow{\sim} H_c^{-(p+q)}(\mathrm{Sh}_K^{an}(\phi), \mathcal{L}_{\check{\rho}})^*$$

Il en est de même pour y'_i. On en déduit l'existence de l'isomorphisme de suites spectrales annoncé.

Afin de montrer que ce morphisme induit bien l'identité sur les termes associés à $r = 2$ il faut montrer le lemme suivant

Lemme 4.3.12. — *Les diagrammes suivants commutent :*

$$\begin{tikzcd}
 & \prod_i E_2^{pq}(i) \arrow[dd] \\
Ext^p_{J_b\text{-}lisse}(H_c^{-q}(\breve{\mathcal{M}}_{K_p}, \overline{\mathbb{Q}_\ell}), (\mathcal{A}_\rho^\phi)^{K^p}) \arrow[ur, "\simeq"] \arrow[dr, "\simeq"'] & \\
 & \prod_i E_2^{pq}(i)'
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\prod_i H_c^{p+q}(\Gamma_i \backslash \breve{\mathcal{M}}, \mathcal{F}_{\rho_i}) \arrow[dr, "\simeq"] \arrow[dd, "\prod_i \gamma_{i!}"', "\simeq"] & \\
 & H_c^{p+q}(I^\phi(\mathbb{Q}) \backslash (\breve{\mathcal{M}}_{K_p} \times G(\mathbf{A}_f^p)/K^p), \Theta^* \mathcal{L}_\rho) \\
\prod_i H_c^{-(p+q)}(\Gamma_i' \backslash \breve{\mathcal{M}}, \mathcal{F}_{\rho_i'}) \arrow[ur, "\simeq"'] &
\end{tikzcd}$$

Démonstration. — Pour le deuxième diagramme c'est clair puisque le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\coprod_i \Gamma_i \backslash \breve{\mathcal{M}} \arrow[dr, "\simeq"] \arrow[dd, "\prod_i \gamma_i"'] & \\
 & I^\phi(\mathbb{Q}) \backslash (\breve{\mathcal{M}}_{K_p} \times G(\mathbf{A}_f^p)/K^p) \\
\coprod_i \Gamma_i' \backslash \breve{\mathcal{M}} \arrow[ur, "\simeq"'] &
\end{tikzcd}$$

Quant au premier cela se ramène aisément (il suffit de suivre les différents isomorphismes) à montrer que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
 & \prod_i \mathrm{Ind}_{\Gamma_i}^J \rho_i \arrow[dd, "\prod_i \Delta_i"] \\
(\mathcal{A}_\rho^\phi)^{K^p} \arrow[ur, "\zeta_{(y_i)_i}"] \arrow[dr, "\zeta_{(y'_i)_i}"'] & \\
 & \prod_i \mathrm{Ind}_{\Gamma'_i}^J \rho'_i
\end{tikzcd}$$

où $\Delta_i : Ind_{\Gamma_i}^J \rho_i \xrightarrow{\sim} Ind_{\Gamma'_i}^J \rho'_i$ est induit par $(\mathrm{int}_{g_i}, \rho(\gamma_i)) : (\Gamma_i, \rho_i) \to (\Gamma'_i, \rho'_i)$. La commutativité est laissée au lecteur. □

Remarquons que l'isomorphisme de suites spectrales ainsi construit dépend du choix des γ_i qui ne sont pas uniques. Néanmoins, si l'on fait un autre choix de γ_i l'isomorphisme de suites spectrales induit encore l'identité sur le premier terme de la suite spectrale. Or deux morphismes de suites spectrales coïncidant sur les termes E_2^{pq} coïncident. L'isomorphisme ne dépend donc pas du choix des γ_i.

Finalement il reste à vérifier la naturalité des morphismes de suites spectrales construits mais cela est clair par le même argument que précédemment puisque sur les termes E_2^{pq} tous donnent l'identité. Cela finit la démonstration de l'indépendance des du choix des y_i. □

Afin d'avoir une définition intrinsèque ne dépendant pas du choix des $(y_i)_i$ nous poserons

$$E_r^{pq} = \varprojlim_{(y_i)_i} E_r^{pq}((y_i)_i)$$

où les isomorphismes de transition sont les isomorphismes construits dans le lemme 4.3.11. Il résulte également de ce lemme qu'il y a un isomorphisme

$$E_2^{pq} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}_{J_b-\mathrm{lisse}}(H_c^{-q}(\breve{\mathcal{M}}_{K_p}, \overline{\mathbb{Q}_\ell}), (\mathcal{A}_\rho^\phi)^{K^p})$$

Reste à vérifier l'équivariance de la suite spectrale.

Nous allons faire varier le groupe $K = K_p K^p$, c'est pourquoi nous préciserons les notations précédentes en notant

$$E_r^{pq}(K, y_i)$$

la suite spectrale notée auparavant $E_r^{pq}(i)$,

$$E_r^{pq}(K, (y_i)_i)$$

la suite spectrale construite précédemment associée à des $(y_i)_i$ vérifiant

$$G(\mathbf{A}_f^p)/K^p = \coprod_{i\in I} I^\phi(\mathbb{Q}).y_i$$

et

$$E_r^{pq}(K) = \varprojlim_{(y_i)_i} E_r^{pq}(K,(y_i)_i)$$

Commençons par la $G(\mathbb{Q}_p)$ équivariance. Soit $g \in G(\mathbb{Q}_p)$ et $(y_i)_{i\in I}$. Puisque l'action de $G(\mathbb{Q}_p)$ commute à celle de J_b, pour tout i dans I g^{-1} induit un isomorphisme de triplet (4.2.3)

$$(\breve{\mathcal{M}}_{g^{-1}K_pg}, \Gamma_i, \rho_i) \xrightarrow{\sim} (\breve{\mathcal{M}}_{K_p}, \Gamma_i, \rho_i)$$

d'où d'après la remarque 4.2.3 un isomorphisme de suites spectrales

$$E_r^{pq}(K_p, y_i) \xrightarrow{\sim} E_r^{pq}(g^{-1}K_pg, y_i)$$

qui induit le morphisme annoncé sur les termes E_2^{pq}, c'est à dire le transposé du morphisme

$$H_c^{-q}(\breve{\mathcal{M}}_{g^{-1}K_pg}, \overline{\mathbb{Q}_\ell}) \xrightarrow{(g^{-1})_!} H_c^{-q}(\breve{\mathcal{M}}_{K_p}, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$$

Prenant le produit de ces morphismes lorsque i varie on obtient un isomorphisme

$$E_r^{pq}(K,(y_i)_i) \xrightarrow{\sim} E_r^{pq}(g^{-1}K_pgK^p,(y_i)_i)$$

Si de plus on fait un autre choix de $(y_i')_i$, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
E_r^{pq}(K,(y_i)_i) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\simeq"'] & E_r^{pq}(g^{-1}K_pgK^p,(y_i)_i) \arrow[d, "\simeq"'] \\
E_r^{pq}(K,(y_i')_i) \arrow[r, "\sim"] & E_r^{pq}(g^{-1}K_pgK^p,(y_i')_i)
\end{tikzcd}$$

où les applications verticales sont celles construites dans le lemme 4.3.11. En effet, ce diagramme de suites spectrales commute au niveau des termes E_2^{pq}, il commute donc. On en déduit en prenant la limite un isomorphisme

$$E_r^{pq}(K) \xrightarrow{\sim} E_r^{pq}(g^{-1}K_pgK^p)$$

Passons à la $G(\mathbf{A}_f^p)$ équivariance. Soit donc $g \in G(\mathbf{A}_f^p)$ et $(y_i)_i$ comme précédemment. g induit un isomorphisme

$$\begin{array}{rcl}
\alpha : G(\mathbf{A}_f^p)/K^p & \xrightarrow{\sim} & G(\mathbf{A}_f^p)/(g^{-1}K^pg) \\
xK^p & \mapsto & xg(g^{-1}K^pg)
\end{array}$$

α commute à l'action de $I^\phi(\mathbb{Q})$ et donc, comme $(y_i)_i$ est tel que

$$G(\mathbf{A}_f^p)/K^p = \coprod_{i\in I} I^\phi(\mathbb{Q}).y_i$$

alors

$$G(\mathbf{A}_f^p)/(g^{-1}K^pg) = \coprod_{i\in I} I^\phi(\mathbb{Q}).\alpha(y_i)$$

Remarquons que pour $i \in I \quad \Gamma_i = Stab_{I^\phi(\mathbb{Q})} y_i = Stab_{I_\phi(\mathbb{Q})} \alpha(y_i)$. Il y a donc des égalités

$$E_r^{pq}(K, y_i) = E_r^{pq}(K_p g^{-1} K^p g, \alpha(y_i))$$

Prenant le produit sur i on obtient l'égalité

$$E_r^{pq}(K, (y_i)_i) = E_r^{pq}(K_p g^{-1} K^p g, (\alpha(y_i))_i)$$

Pour montrer que ce morphisme induit bien l'application attendue sur les termes E_2^{pq} il faut montrer le lemme suivant dont la démonstration ne pose aucun problème

Lemme 4.3.13. — *Le diagramme suivant commute*

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{A}_\rho^\phi)^{K^p} \arrow[r, "\zeta_{(y_i)_i}"] \arrow[d, "\simeq"'] & \prod_{i \in I} Ind_{\Gamma_i}^{J_b} \rho_i \arrow[d, equal] \\
(\mathcal{A}_\rho^\phi)^{g^{-1} K^p g} \arrow[r, "\zeta_{(\alpha(y_i))_i}"] & \prod_{i \in I} Ind_{\Gamma_i}^{J_b} \rho_i
\end{tikzcd}$$

où l'application verticale de gauche est induite par la translation d'une fonction de $\mathcal{A}_\rho^\phi$ par g.

Si maintenant $(y_i')_i$ est un autre choix, le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
E_r^{pq}(K, (y_i)_i) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\simeq"'] & E_r^{pq}(K_p g^{-1} K^p g, (\alpha(y_i))_i) \arrow[d, "\simeq"'] \\
E_r^{pq}(K, (y_i')_i) \arrow[r, "\sim"] & E_r^{pq}(K_p g^{-1} K^p g, (\alpha(y_i'))_i)
\end{tikzcd}$$

où les applications verticales sont celles construites dans le lemme 4.3.11. En effet, il résulte de la commutativité du diagramme précédent que ce diagramme commute au niveau des termes E_2^{pq}. Il commute donc. Passant à la limite on obtient donc un isomorphisme

$$E_r^{pq}(K) \xrightarrow{\sim} E_r^{pq}(K_p g^{-1} K^p g)$$

Passons maintenant à la compatibilité lorsque K varie. Soit donc $K_p' \subset K_p$ un sous-groupe compact ouvert et $K' = K_p' K^p$. Soit $(y_i)_i$ comme précédemment. Il y a alors pour tout i dans I un morphisme de triplet

$$(\breve{\mathcal{M}}_{K_p'}, \Gamma_i, \rho_i) \longrightarrow (\breve{\mathcal{M}}_{K_p}, \Gamma_i, \rho_i)$$

qui induit un morphisme de suite spectrale

$$E_r^{pq}(K, y_i) \longrightarrow E_r^{pq}(K', y_i)$$

Prenant le produit des ces morphismes on obtient un morphisme de suite spectrale

$$E_r^{pq}(K, (y_i)_i) \longrightarrow E_r^{pq}(K', (y_i)_i)$$

dont il est clair qu'il induit bien le morphisme attendu au niveau des termes E_2^{pq} et qu'il est compatible aux isomorphismes du lemme 4.3.11 lorsque l'on fait varier $(y_i)_i$.

Soit maintenant $K^{p\prime} \subset K^p$ un sous-groupe compact ouvert et $K' = K_p K^{p\prime}$. La projection

$$pr : G(\mathbf{A}_f^p)/K^p \longrightarrow G(\mathbf{A}_f^p)/K^{p\prime}$$

est compatible à l'action à gauche de $I^\phi(\mathbb{Q})$. Soit $(y_i)_i$ tel que

$$G(\mathbf{A}_f^p)/K^p = \coprod_{i\in I} I^\phi(\mathbb{Q}).y_i$$

et $(x_j)_j$ des éléments de $G(\mathbf{A}_f^p)/K^{p\prime}$ vérifiant

$$G(\mathbf{A}_f^p)/K^{p\prime} = \coprod_{j\in J} I^\phi(\mathbb{Q}).x_j$$

et $\forall j \in J\ \exists i \in I\ pr(x_j) = y_i$. Pour $j \in J$ notons $\beta(j) \in I$ l'élément vérifiant $pr(x_j) = y_{\beta(j)}$. Pour tout $j \in J$, $\Gamma_j \subset GG_{\beta(j)}$ d'où un morphisme de triplets

$$(\breve{\mathcal{M}}_{K_p}, \Gamma_j, \rho_j) \longrightarrow (\breve{\mathcal{M}}_{K_p}, \Gamma_{\beta(j)}, \rho_{\beta(j)})$$

qui induit un morphisme de suites spectrales

$$E_r^{pq}(K, y_{\beta(j)}) \longrightarrow E_r^{pq}(K', y_j)$$

On obtient donc en assemblant ces morphismes un morphisme de suites spectrales

$$E_r^{pq}(K, (y_i)_i) \longrightarrow E_r^{pq}(K', (x_j)_j)$$

Il résulte du lemme suivant dont la démonstration ne pose pas de problème que ce morphisme est bien le morphisme attendu au niveau des termes E_2^{pq}.

Lemme 4.3.14. — *Le diagramme suivant commute*

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{A}_\rho^\phi)^{K^p} \arrow[r, "\zeta_{(y_i)_i}"] \arrow[d, hook] & \prod_{i\in I} Ind_{\Gamma_i}^{J_b}\rho_i \arrow[d] \\
(\mathcal{A}_\rho^\phi)^{K^{p\prime}} \arrow[r, "\zeta_{(x_j)_j}"] & \prod_{j\in J} Ind_{\Gamma_j}^{J_b}\rho_j
\end{tikzcd}$$

où les morphismes de gauches sont induits par les égalités $Res_{\Gamma_{\beta(j)}}^{\Gamma_j}\rho_{\beta(j)} = \rho_j$.

Si maintenant $(y'_j)_j$ et $(x'_j)_j$ sont comme ci dessus, il y a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
E_r^{pq}(K, (y_i)_i) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & E_r^{pq}(K', (x_j)_j) \arrow[d, "\simeq"'] \\
E_r^{pq}(K, (y'_i)_i) \arrow[r] & E_r^{pq}(K', (x'_j)_j)
\end{tikzcd}$$

où les application verticales sont celles construites dans le lemme 4.3.11. En effet, c'est déjà le cas au niveau des termes E_2^{pq}.

On en déduit un morphisme

$$E_r^{pq}(K) \longrightarrow E_r^{pq}(K')$$

Les actions de $G(\mathbb{Q}_p)$ et de $G(\mathbf{A}_f^p)$ construites commutent et se composent naturellement puisque c'est la cas au niveau des termes E_2^{pq}. De même, ces actions commutent aux morphismes de changement de niveau construits ci dessus. $\square$

Corollaire 4.3.15. — *Il y a une suite spectrale $G(\mathbf{A}_f) \times W_{E_\nu}$ équivariante*

$$E_2^{pq} = \varinjlim_K \; Ext^p_{J_b-lisse}\Big(H_c^{2N-q}(\breve{\mathcal{M}}_{K_p}, \overline{\mathbb{Q}_\ell})(N), (\mathcal{A}_\rho^\phi)^{K^p}\Big) \Longrightarrow \varinjlim_K \; H^{p+q}(Sh_K^{an}(\phi), \mathcal{L}_\rho^{an})$$

CHAPITRE 5

APPLICATION À LA STRATE BASIQUE : "UNE FORMULE DE MATSUSHIMA p-ADIQUE"

Soit $b = b_0$ la classe basique de $B(G_{\mathbb{Q}_p}, \mu_{\overline{\mathbb{Q}_p}})$. Supposons $\overline{S}(b_0) \neq \emptyset$ (ce que nous montrerons plus tard).

Si la classe d'isogénie ϕ induit la classe b_0, soit I^ϕ la forme intérieure de G associée. Le groupe réductif I^ϕ étant anisotrope modulo son centre, le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{A}_\rho^\phi$ est l'espace des formes automorphes sur I^ϕ de type à l'infini $\check{\rho}'$ où

$$\rho' : I^\phi(\mathbb{R}) \hookrightarrow I^\phi(\mathbb{C}) = G(\mathbb{C}) \xrightarrow{\rho} \mathrm{GL}(V)$$

au sens où

$$\mathcal{A}_\rho^\phi = \mathrm{Hom}_{I^\phi(\mathbb{R})}(\check{\rho}', \mathcal{A}(I^\phi))$$

Nous noterons encore $\rho = \rho'$.

Supposons maintenant ρ irréductible et soit $\mathcal{A}(I^\phi)$ l'espace des représentations automorphes de I^ϕ (ce n'est pas l'ensemble des classes d'isomorphismes : on tient compte des multiplicités).

Le groupe de Lie $I^\phi(\mathbb{R})$ étant anisotrope modulo son centre, pour un sous groupe compact ouvert K^p de $G(\mathbf{A}_f^p)$

$$(\mathcal{A}_\rho^\phi)^{K^p} = \bigoplus_{\substack{\Pi \in \mathcal{A}(I^\phi) \\ \Pi_\infty = \check{\rho}}} \Pi_p \otimes (\Pi^p)^{K^p}$$

Il y un isomorphisme pour tous p et q

$$\mathrm{Ext}^p_{J_b\text{-lisse}}\left(H_c^q(\breve{\mathcal{M}}_{K_p}), (\mathcal{A}_\rho^\phi)^{K^p}\right) \simeq \bigoplus_{\substack{\Pi \in \mathcal{A}(I^\phi) \\ \Pi_\infty = \check{\rho}}} \mathrm{Ext}^p_{J_b\text{-lisse}}\left(H_c^q(\breve{\mathcal{M}}_{K_p}), \Pi_p\right) \otimes (\Pi^p)^{K^p}$$

où $H_c^q(\breve{\mathcal{M}}_{K_p}) = H_c^q(\breve{\mathcal{M}}_{K_p}, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$. En effet, $H_c^q(\breve{\mathcal{M}}_{K_p})$ étant un J_b-module de type fini (2.6.13), les Ext se calculent par des résolutions de $H_c^q(\breve{\mathcal{M}}_{K_p})$ dont chaque terme est une somme finie de termes du type $c - Ind_{K_0}^{J_b}\pi$ où K_0 compact ouvert et π de dimension finie. Or,

$$Hom_{J_b}(c - Ind_{K_0}^{J_b}\pi, (\mathcal{A}_\rho^\phi)^{K^p}) \simeq \mathrm{Hom}_{K_0}(\pi, (\mathcal{A}_\rho^\phi)^{K^p}) = \mathrm{Hom}_{K_0}(\pi, (\mathcal{A}_\rho^\phi)^{K_1 K^p})$$

où $K_1 \subset K_0$ est compact ouvert tel que $\pi(K_1) = \{Id\}$. $(\mathcal{A}_\rho^\phi)^{K_1 K^p}$ est de dimension finie (admissibilité de l'espace des formes automorphes) et donc

$$\#\{\Pi \in \mathcal{A}(I^\phi) \mid \Pi_\infty = \rho \ \ \Pi^{K_1 K^p} \neq (0)\} < +\infty$$

On en déduit que le calcul des Ext ne fait intervenir qu'un nombre fini de Π d'où le résultat.

On en déduit alors en utilisant le lemme I.2.6.12 ainsi que la proposition I.2.6.13 (confère [**26**] pour la définition du groupe de Grothendieck généralisé $\mathrm{Groth}(G(\mathbf{A}_f) \times W_{E_\nu})$) :

Corollaire 5.0.16. — *Il y a une égalité dans* $Groth(G(\mathbf{A}_f) \times W_{E_\nu})$ *:*

$$\sum_{\substack{i,j \\ \Pi \in \mathcal{A}(I^\phi) \\ \Pi_\infty = \check{\rho}}} (-1)^{i+j} \left[\varinjlim_{K_p} Ext^i_{J_b\text{-}lisse}\Big(H^j_c(\breve{\mathcal{M}}_{K_p} \otimes \mathbb{C}_p, \overline{\mathbb{Q}_\ell})(N), \Pi_p\Big) \right] \otimes [\Pi^p]$$

$$= \sum_i (-1)^i \left[\varinjlim_K H^i(Sh^{an}_K(\phi), \mathcal{L}^{an}_\rho) \right]$$

La décomposition

$$\mathrm{Sh}^{an}_K = \coprod_{\ker^1(\mathbb{Q},G)} \mathrm{Sh}_K(G', X)^{an}$$

induit une décomposition

$$sp^{-1}(\overline{S}(b_0)) = \coprod_{\ker^1(\mathbb{Q},G)} \mathrm{Sh}^{an}_K(G', X) \cap sp^{-1}(\overline{S}(b_0))$$

où $\mathrm{Sh}^{an}_K(G', X) \cap sp^{-1}(\overline{S}(b_0))$ est un ouvert de $\mathrm{Sh}_K(G, X)^{an}$.

Définition 5.0.17. — Dans la décomposition précédente nous noterons

$$\mathrm{Sh}_K(G', X)^{an}_{\text{basique}} = sp^{-1}(b_0) \cap \mathrm{Sh}_K(G', X)^{an}$$

Rappelons (section 3.2.2) que dans le cas que nous considérons les groupes G' sont tous isomorphes à G, d'où un isomorphisme des modèles canoniques sur le corps réflex $E(G, X)$:

$$\mathrm{Sh}_K(G, X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sh}_K(G', X)$$

Les points géométriques dans $\overline{E}$ de $\mathrm{Sh}_K(G, X) \cap sp^{-1}(b_0)$ se décrivent comme étant associés à des triplets (A, λ, ι) dont l'isocristal associé est basique. L'isomorphisme ci dessus induit donc un isomorphisme d'ouverts analytiques

$$\mathrm{Sh}_K(G, X)_{\text{basique}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sh}_K(G', X)_{\text{basique}}$$

Donc, dans $\mathrm{Groth}(G(\mathbf{A}_f) \times W_E)$ on a :

$$[H^\bullet_c(sp^{-1}(b_0), \mathcal{L}^{an}_\rho)] = |\ker^1(\mathbb{Q}, G)|.[H^\bullet_c(\mathrm{Sh}_K(G, X)_{\text{basique}}, \mathcal{L}^{an}_\rho)]$$

Étant donné (3.2.2) que tous les groupes I^ϕ sont isomorphes et qu'il y a $|\ker^1(\mathbb{Q}, G)|$ classes ϕ dans la strate basique, en sommant l'égalité du corollaire précédent sur tous

les ϕ intervenant dans la strate basique et en divisant par $|\ker^1(\mathbb{Q}, G)|$ on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 5.0.18. — *Choisissons la classe d'isogénie ϕ intervenant dans la strate basique. Il y a une égalité dans Groth$(G(\mathbf{A}_f) \times W_{E_\nu})$:*

$$\sum_{\substack{i,j \\ \Pi \in \mathcal{A}(I^\phi) \\ \Pi_\infty = \tilde{\rho}}} (-1)^{i+j} \left[\varinjlim_{K_p} Ext^i_{J_b\text{-}lisse}\Big(H^j_c(\breve{\mathcal{M}}_{K_p} \otimes \mathbb{C}_p, \overline{\mathbb{Q}_\ell})(N), \Pi_p\Big) \right] \otimes [\Pi^p]$$

$$= \sum_i (-1)^i \left[\varinjlim_K H^i(Sh_K(G,X)^{an}_{basique}, \mathcal{L}^{an}_\rho) \right]$$

PARTIE III

CONTRIBUTION DE LA COHOMOLOGIE DE LA STRATE BASIQUE

CHAPITRE 6

FORMULE DE LEFSCHETZ SUR LA FIBRE SPÉCIALE

Le but de ce chapitre est d'établir la formule des traces 6.12.5 pour la trace de certaines fonctions dans l'algèbre de Hecke globale fois un élément du groupe de Weil local W_{E_ν} sur la cohomologie des strates des variétés de Shimura de type P.E.L. non ramifiées en p.

L'un des points clef qui nous permettra d'utiliser cette formule est que les termes intervenant dedans s'expriment comme un produit de la trace d'une fonction de l'algèbre de Hecke en p sur un espace de cohomologie fois une intégrale orbitale hors p. Cette factorisation des termes locaux dans la formule des traces de Lefschetz est une conséquence des trois résultats suivants :

- Le théorème de Fujiwara 6.2.1 qui sous certaines conditions permet d'écrire ces termes locaux comme la trace de certaines fonctions sur la fibre des cycles évanescents.
- Le théorème de comparaison de Berkovich qui montre que cette fibre ne dépend que du complété formel de la variété de Shimura en un point fixe.
- Le théorème de Serre-Tate (ou plus généralement l'uniformisation de Rapoport-Zink) qui montre que ce complété formel ne dépend que de la classe d'isomorphisme du groupe p-divisible en un point fixe et qui permet donc de mettre en facteur la trace de notre fonction dans l'algèbre de Hecke en p sur un espace de déformation de groupes p-divisibles.

Pour appliquer ces trois résultats nous avons besoin de spécialiser les correspondances de Hecke sur la fibre spéciale de modèles entiers de nos variétés de Shimura. Malheureusement, à part en niveau parahorique en p, on ne dispose pas de bon modèles entiers de ces variétés. L'idée consiste alors à considérer le spécialisé au sens de [**20**] de l'image directe sur la fibre générique vers un niveau parahorique d'une correspondance de Hecke. Cependant, nous avons ensuite besoin de montrer que les termes locaux obtenus ne dépendent finalement que de la situation originelle sur la fibre générique. Afin de faire la lien avec la seconde partie nous avons également besoin d'exprimer nos résultats sous forme analytique rigide. C'est pourquoi nous développons un formalisme de spécialisation des correspondances cohomologiques d'un point de vue analytique rigide et montrons que l'isomorphisme de Berkovich ([**5**]) est compatible à ce formalisme.

6.1. Rappels sur les correspondances cohomologiques

Ce qui suit est principalement tiré des articles [**22**], [**49**] et [**20**].

6.1.1. Définition. — Soit S le spectre d'un corps. Considérons un diagramme de schémas sur S

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[d, "c"] \arrow[ddl, "c_1"'] \arrow[ddr, "c_2"] & \\
 & X_1 \times X_2 \arrow[dl, "p_1"] \arrow[dr, "p_2"'] & \\
X_1 & & X_2
\end{tikzcd}$$

où p_1 et p_2 désignent les deux projections de $X_1 \times X_2$ sur X_1 et X_2.

Nous supposerons toujours dans la suite que c est propre.

Définition 6.1.1. — Si $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \in \boldsymbol{D}^b_c(X_1, \overline{\mathbb{Q}_\ell}) \times \boldsymbol{D}^b_c(X_2, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$ on note

$$\underline{\mathrm{Coh}}_C(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) = c_* \underline{\mathrm{Hom}}(c_1^* \mathcal{F}_1, c_2^! \mathcal{F}_2) \in \boldsymbol{D}^b_c(X_1 \times X_2, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$$

le faisceau des correspondances cohomologiques à support dans C.

Nous noterons

$$\mathrm{Coh}_C(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) = H^0(X, \underline{\mathrm{Coh}}_C(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)) = \mathrm{Hom}(c_1^* \mathcal{F}_1, c_2^! \mathcal{F}_2)$$

Lorsque $C = X_1 \times X_2$ on notera $\underline{\mathrm{Coh}}$, resp. Coh pour $\underline{\mathrm{Coh}}_C$, resp. Coh_C

Rappelons que la formule d'induction implique qu'il y a un isomorphisme canonique :

$$c_* c^! \underline{\mathrm{Coh}}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Coh}}_C(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$$

L'adjonction $c_* c^! \to Id$ donne une flèche d'oubli du support

$$\underline{\mathrm{Coh}}_C(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \longrightarrow \underline{\mathrm{Coh}}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$$

et par application de $H^0(X_1 \times X_2, -)$:

$$\mathrm{Coh}_C(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \longrightarrow \mathrm{Coh}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$$

6.1.2. Seconde définition. — La formule de Künneth pour $\underline{\mathrm{Hom}}$ ([**14**]) implique qu'il existe un isomorphisme canonique en $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$:

$$D\mathcal{F}_1 \boxtimes \mathcal{F}_2 \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Coh}}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$$

où $D\mathcal{F} = \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{F}, K_X)$ où K_X désigne le faisceau dualisant sur X.

6.1.3. Exemples. —

– Si $\Delta_X \hookrightarrow X \times_S X$ désigne la diagonale de $X \times X$, on a

$$\mathrm{Coh}_{\Delta_X}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$$

En particulier, pour tout $\mathcal{F}$ on notera Δ la correspondance cohomologique sur $\mathcal{F}$ associée à $Id \in \mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{F})$.

– Plus généralement, si $f : X_2 \to X_1$ et $C = \Gamma_f \subset X_1 \times X_2$ désigne le graphe de f alors

$$\mathrm{Coh}_C(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \simeq \mathrm{Hom}(f^*\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_1)$$

– A un cycle $C \subset X \times X$ est associé une correspondance cohomologique de $\mathbb{Q}_\ell$ dans $c_2^!\mathbb{Q}_\ell(-d)[2d]$ pour un $d \in \mathbb{Z}$ (cf. [**22**])

– Soit $X_0/\mathbb{F}_q$ et $\mathcal{F} \in \mathbb{D}^+(X_0, \overline{\mathbb{Q}_\ell})$. Notons $X = X_0 \times_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}}_q$. Soit $Fr : X_0 \longrightarrow X_0$ l'endomorphisme de Frobenius relatif à $\mathbb{F}_q$. Il y a un isomorphisme canonique

$$Fr^*\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}$$

d'où une correspondance sur $\mathcal{F}$ à support dans le graphe de Fr. Par extension des scalaires cette correspondance donne une correspondance appelée correspondance de Frobenius sur $\overline{\mathcal{F}} = pr_1^*\mathcal{F}$ où $pr_1 : X_0 \times_{\mathbb{F}_q} \overline{\mathbb{F}}_q \to X_0$. Elle est donnée par

$$(Fr \times Id)^*\overline{\mathcal{F}} \longrightarrow \overline{\mathcal{F}}$$

6.1.4. Image directe. — Considérons un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "c_1"'] \arrow[d, "f'"] \arrow[dr, "c_2"] & \\
X_1 \arrow[dd, "f_1"'] & D \arrow[dl, "d_1"'] \arrow[dr, "d_2"] & X_2 \arrow[dd, "f_2"'] \\
 & & \\
Y_1 & & Y_2
\end{tikzcd}$$

On peut alors définir ([**22**]) un morphisme

$$f'_*\underline{\mathrm{Coh}}_C(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \longrightarrow \underline{\mathrm{Coh}}_D(f_{1!}\mathcal{F}_1, f_{2*}\mathcal{F}_2)$$

qui induit un morphisme image directe

$$\mathrm{Coh}_C(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \longrightarrow \mathrm{Coh}_D(f_{1!}\mathcal{F}_1, f_{2*}\mathcal{F}_2)$$

noté $u \mapsto f_*u$.

Remarque 6.1.2. — Supposons $Y_1 = X_1, Y_2 = X_2$ et $D = X_1 \times X_2$. On retrouve alors le morphisme d'oubli du support.

Lorsque $Y_1 = Y_2 = D = S$ on obtient l'action d'une correspondance cohomologique sur la cohomologie. Plus précisément, il s'agit d'un morphisme

$$\mathrm{Coh}_C(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{D}^b_c(\overline{\mathbb{Q}_\ell})}(R\Gamma_c(X_1, \mathcal{F}_1), R\Gamma(X_2, \mathcal{F}_2))$$

et l'on notera $u \mapsto u_*$ le morphisme associé dans ce cas là.

6.1.5. Un cas particulier. — Supposons c_1 propre. Dans ce cas là, le morphisme du cas précédent associé à l'action d'une correspondance cohomologique se factorise par $R\Gamma_c(X_2, \mathcal{F}_2) \to R\Gamma(X_2, \mathcal{F}_2)$ et possède une description simple.

Soit en effet $u : c_1^*\mathcal{F}_1 \longrightarrow c_2^!\mathcal{F}_2$. Par adjonction, la donnée d'un tel u équivaut à celle de $\tilde{u} : c_{2!}c_1^*\mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_2$. u_* est alors définie par le composée

$$R\Gamma_c(X_1, \mathcal{F}_1) \xrightarrow{c_1^*} R\Gamma_c(C, c_1^*\mathcal{F}_1) \xrightarrow{\sim} R\Gamma_c(X_2, c_{2!}c_1^*\mathcal{F}_1) \xrightarrow{R\Gamma_c(X_2, \tilde{u})} R\Gamma_c(X_2, \mathcal{F}_2)$$

où la première application est définie car c_1 est propre.

Le fait que c_1 propre implique que la correspondance cohomologique agit sur la cohomologie à support compact se comprend mieux du point de vue de la section 6.1.7.

6.1.6. Restriction. — Soient $V_1 \subset X_1$ et $V_2 \subset X_2$ deux sous-schémas localement fermés. Supposons que $c_2^{-1}(V_2) \subset c_1^{-1}(V_1)$, d'où une "sous-correspondance" de c

$$c_2^{-1}(V_2) \xrightarrow{(c_1', c_2')} V_1 \times V_2$$

Soit donc $u \in \mathrm{Coh}_C(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ et $\tilde{u} : c_{2!}c_1^*\mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$ le morphisme associé par adjonction.

Considérons la ligne suivante

$$c_{2!}'{c_1'}^*(\mathcal{F}_{1|V_1}) = c_{2!}'\left((c_1^*\mathcal{F}_1)_{|c_2^{-1}(V_2)}\right) \xrightarrow{\sim} (c_{2!}c_1^*\mathcal{F}_1)_{|V_2} \xrightarrow{\tilde{u}_{|V_2}} \mathcal{F}_{2|V_2}$$

où l'isomorphisme du milieu est un isomorphisme de changement de base. Elle définit par adjonction une correspondance restreinte. On en déduit un morphisme de restriction

$$\mathrm{Coh}_C(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \longrightarrow \mathrm{Coh}_{c_2^{-1}(V_2)}(\mathcal{F}_{1|V_1}, \mathcal{F}_{2|V_2})$$

Dans le cas où $X_1 = X_2$, $V_1 = V_2$ nous dirons que V_1 est stable par c.

6.1.7. Extension par zéro. — Supposons c_1 propre. Supposons nous donné des compactifications $j_1 : X_1 \hookrightarrow \overline{X_1}$, $j_2 : X_2 \hookrightarrow \overline{X_2}$ ainsi qu'une compactification $j : C \hookrightarrow \overline{C}$ de C compatible aux deux précédentes, au sens où il y a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d, "c"'] \arrow[dr, phantom, "(\overline{c}_1, \overline{c}_2) = \overline{c}"] & \overline{C} \arrow[d] \\
X_1 \times X_2 \arrow[r, hook, "j_1 \times j_2"] & \overline{X_1} \times \overline{X_2}
\end{tikzcd}$$

Il existe alors un isomorphisme canonique ([**20**] lemme 1.3.1)

$$j_*\underline{\mathrm{Coh}}_C(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Coh}}_{\overline{C}}(j_{1!}\mathcal{F}_1, j_{2!}\mathcal{F}_2)$$

qui induit un isomorphisme

$$\mathrm{Coh}_C(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Coh}_{\overline{C}}(j_{1!}\mathcal{F}_1, j_{2!}\mathcal{F}_2)$$

noté $u \mapsto j_! u$ et qui se décrit ainsi : $\forall u \in \mathrm{Coh}_C(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$, $u : c_1^*\mathcal{F}_1 \to c_2^!\mathcal{F}_2$. c_1 étant propre il existe un morphisme

$$\overline{c_1}^* j_{1!}\mathcal{F}_1 \longrightarrow j_! c_1^* \mathcal{F}_1$$

défini par adjonction.

Alors,

$$j_! u : \overline{c_1}^* j_{1!}\mathcal{F}_1 \longrightarrow j_! c_1^* \mathcal{F}_1 \xrightarrow{j_!(u)} j_! c_2^! \mathcal{F}_2 \longrightarrow \overline{c_2}^! j_{2!}\mathcal{F}_2$$

où le dernier morphisme est défini par adjonction.

L'extension par zéro est compatible aux images directes au sens où "$j_! f_* u = \overline{f}_* j_! u$".

En particulier, l'action de u sur la cohomologie à support compact s'interprète comme l'action de $j_! u$: le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
R\Gamma_c(X_1, \mathcal{F}_1) \arrow[r, "u_*"] \arrow[d, "\wr"'] & R\Gamma_c(X_2, \mathcal{F}_2) \arrow[d, "\wr"] \\
R\Gamma(\overline{X_1}, j_{1!}\mathcal{F}_1) \arrow[r, "(j_! u)_*"] & R\Gamma(\overline{X_2}, j_{2!}\mathcal{F}_2)
\end{tikzcd}$$

6.1.8. Accouplement des correspondances cohomologiques. — Nous supposerons désormais que $X_1 = X_2 = X$. Considérons un diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd}
 & E = C \times_X D \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd, "e"] & \\
C \arrow[dr, "c"'] & & D \arrow[dl, "d"] \\
 & X \times_S X &
\end{tikzcd}$$

i.e. E est le support intersection de C et D.

Il y a alors un morphisme ([**22**] paragraphe 4) d'accouplement des correspondances cohomologiques

$$\underline{\mathrm{Coh}}_C(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \otimes \underline{\mathrm{Coh}}_D(\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_1) \longrightarrow e_* K_E$$

qui induit une forme bilinéaire

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{Coh}_C(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \otimes \mathrm{Coh}_D(\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_1) & \longrightarrow & H^0(E, K_E) \\
u \otimes v & \longmapsto & < u, v >
\end{array}$$

6.1.9. Termes locaux de Lefschetz. — Il y a un isomorphisme

$$H^0(E, K_E) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{\beta \in \pi_0(E)} H^0(\beta, K_\beta)$$

et si $\beta \in \pi_0(E)$, $\dim \beta = 0$, alors $K_\beta = \overline{\mathbb{Q}_\ell}$ et donc $H^0(\beta, K_\beta) \xrightarrow{\sim} \overline{\mathbb{Q}_\ell}$. On note alors $< u, v >_\beta \in \overline{\mathbb{Q}_\ell}$ l'image de $< u, v >$ par les deux applications ci dessus.

Ces termes locaux sont invariants par localisation étale. Cependant, en général, ils ne dépendent pas que de la fibre des faisceaux en des points fixes.

6.1.10. Formule de Lefschetz Verdier Grothendieck. — Elle dit simplement que l'accouplement des correspondances cohomologiques est compatible aux images directes propres.

Plus précisément, étant donné un diagramme commutatif dont les faces supérieures et inférieures sont cartésiennes

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl] \arrow[dd] & & E \arrow[ll] \arrow[dl] \arrow[dd, "b"] \\
X \times X \arrow[dd, "f = f_1 \times f_2"'] & & D \arrow[ll] \arrow[dd] & \\
 & C' \arrow[dl] & & E' \arrow[ll] \arrow[dl] \\
Y \times Y & & D' \arrow[ll] &
\end{tikzcd}$$

où f_1 et f_2 sont propres. Alors, le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Coh}_C(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \otimes \mathrm{Coh}_D(\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_1) \arrow[r] \arrow[d, "f_{1*} \otimes f_{2*}"'] & H^0(E, K_E) \arrow[d, "b_*"] \\
\mathrm{Coh}_{C'}(f_{1*}\mathcal{F}_1, f_{2*}\mathcal{F}_2) \otimes \mathrm{Coh}_{D'}(f_{2*}\mathcal{F}_2, f_{1*}\mathcal{F}_1) \arrow[r] & H^0(E', K_{E'})
\end{tikzcd}$$

soit :

$$< f_* u, f_* v >= b_* < u, v >$$

En particulier, si X est propre sur S, si $(u, v) \in \mathrm{Coh}_C(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \times \mathrm{Coh}_D(\mathcal{F}_2, \mathcal{F}_1)$ et si $\dim E = 0$ alors, $u_* \in \mathrm{Hom}(R\Gamma(X_1, \mathcal{F}_1), R\Gamma(X_2, \mathcal{F}_2))$ et $v_* \in \mathrm{Hom}(R\Gamma(X_2, \mathcal{F}_2), R\Gamma(X_1, \mathcal{F}_1))$ et

$$\mathrm{Tr}(v_* \circ u_*) = \sum_{\beta \in \pi_0(E)} < u, v >_\beta$$

Supposons de plus que $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}$ et que $v = \Delta$ la correspondance diagonale.

Définition 6.1.3. — Nous noterons

$$\mathrm{Fix}(c) = C \times_{X\times X} \Delta_X$$

et si $\beta \in \pi_0(\mathrm{Fix}(c))$, $\dim \beta = 0$ (β est un point fixe isolé)

$$\mathrm{Loc}_\beta(u) =< u, \Delta >_\beta \in \overline{\mathbb{Q}_\ell}$$

Ainsi, lorsque tous les points fixes sont isolés

$$\mathrm{tr}(u, R\Gamma(X, \mathcal{F})) = \sum_{\beta\in\pi_0(\mathrm{Fix}(c))} \mathrm{Loc}_\beta(u)$$

6.1.11. Termes locaux naïfs. — Soit $u \in \mathrm{Coh}_C(\mathcal{F}, \mathcal{F})$ et soit $\beta \in \pi_0(\mathrm{Fix}(c)), \dim \beta = 0$. Soit $x = c_1(\beta) = c_2(\beta) \in X$ et supposons c_2 quasi-fini au voisinage de x.

Le morphisme $u : c_1^*\mathcal{F} \to c_2^!\mathcal{F}$ induit par adjonction $\tilde{u} : c_{2!}c_1^*\mathcal{F} \to \mathcal{F}$, et c_2 étant quasi-fini au voisinage de x

$$(c_{2!}c_1^*\mathcal{F})_x \simeq \bigoplus_{y\in c_2^{-1}(x)} (c_1^*\mathcal{F})_y$$

D'où un morphisme $\mathcal{F}_x = (c_1^*\mathcal{F})_\beta \hookrightarrow (c_{2!}c_1^*\mathcal{F})_x$ qui composé avec $\tilde{u}_x$ donne un endomorphisme

$$u_\beta \in \mathrm{End}(\mathcal{F}_x)$$

Définition 6.1.4. — On pose

$$\mathrm{Loc.naïf}_\beta(u) = \mathrm{Tr}(u_\beta) \in \overline{\mathbb{Q}_\ell}$$

6.1.12. Interprétation des termes locaux naïfs comme de vrais termes locaux. — Bien que $\mathrm{Loc}_\beta(u)$ soit invariant par localisation étale, il ne dépend pas que de la limite $\mathcal{F}_{c_1(\beta)}$ i.e. en général $\mathrm{loc}_\beta \neq \mathrm{Loc.naïf}_\beta$.

Dans [**49**] il est démontré que si β vérifie les hypothèses précédentes alors le calcul de $\mathrm{Loc}_\beta(u)$ se ramène à la situation suivante : $j : X \setminus \{x\} \hookrightarrow X$ est stable par c. Et qu'alors,

$$\mathrm{Loc}_\beta(u) = \mathrm{Loc}_\beta(j_!j^*u) + \mathrm{Loc.naïf}_\beta(u)$$

Le premier terme dans le membre de droite s'interprétant donc comme un terme d'erreur par rapport au terme local naïf.

Le calcul de $\mathrm{Loc}_\beta(u)$ se ramène donc au cas où la fibre du faisceau est nulle.

6.1.13. Exemples. —

– Si X est lisse, $\mathcal{F}$ localement constant et l'intersection en β de C et Δ est transverse

$$\mathrm{Loc}_\beta(u) = \mathrm{Loc.naïf}_\beta(u)$$

– Si X est lisse, si u est la correspondance sur le faisceau constant associé à un cycle, si β est isolé, l'application classe de cycle transformant le produit d'intersection des cycles en cup-produit,

$$\mathrm{Loc}_\beta(u) = (C.\Delta)_\beta$$

6.1.14. Un lemme sur les termes locaux naïfs. — Ce lemme nous servira plus tard dans la démonstration du théorème 6.12.5.

Lemme 6.1.5. — *Soit*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "(c_1,c_2)"] \arrow[d, "f'"'] & X \times X \arrow[d, "f\times f"'] \\ D \arrow[r, "(d_1,d_2)"] & Y \times Y \end{tikzcd}$$

un morphisme de correspondances où les $c_i, d_i (i = 1, 2)$ sont finis et où f' et f sont étales finis. Supposons que $\dim Fix(D) = 0$, *et que*

$$\forall \mathcal{G}\ \forall u \in Coh_D(\mathcal{G})\ \ \forall \beta \in Fix(D) \quad Loc_\beta(u) = Loc.naïf_\beta(u)$$

Alors, $\dim Fix(C) = 0$, *et*

$$\forall \mathcal{F}\ \forall u \in Coh_C(\mathcal{F})\ \forall \beta' \in Fix(C) \quad Loc_\beta(u) = Loc.naïf_\beta(u)$$

Démonstration. — L'assertion $\dim \mathrm{Fix}(C) = 0$ résulte du fait que f' envoie les points fixes de C sur ceux de D et de la finitude des fibres de f'.

Quant à la seconde assertion elle résulte facilement de l'invariance par localisation étale des termes locaux de Lefschetz appliquée à $f_*\mathcal{F}$ muni de la correspondance cohomologique f_*u et de la définition des termes locaux naïfs. □

6.2. Le théorème de Fujiwara

Le théorème qui suit, démontré par Fujiwara dans [**20**], avait été conjecturé par Deligne. Des résultats partiels avaient été obtenus par Zink ([**62**]) et Pink ([**49**]).

Théorème 6.2.1. — *Soit*

$$C_0 \xrightarrow{(c_1, c_2)} X_0$$

une correspondance définie sur $\mathbb{F}_q$. Soit $k|\mathbb{F}_q$ et notons $X = X_0 \times_{\mathbb{F}_q} k$, $C = C_0 \times_{\mathbb{F}_q} k$ et Fr la correspondance de Frobenius sur X_0 étendue à X.

Supposons c_2 quasi-fini et notons

$$\forall \beta \in C \quad d(\beta) = [k(\beta) : k(c_2(\beta))]_{insep.}.long\left(\mathcal{O}_{c_2^{-1}(c_2(\beta)),\beta}\right)$$

Alors, $\forall N \in \mathbb{N}\ \ \forall \beta \in Fix(C.Fr^N)$, $q^N > d(\beta) \Longrightarrow \beta$ est un points fixe isolé et

$$\forall \mathcal{F}\ \forall u \in Coh_{C.Fr^N}(\mathcal{F}, \mathcal{F}) \quad Loc_\beta(u) = Loc.naïf_\beta(u)$$

6.3. Spécialisation des correspondances cohomologiques algébriques

Soit $S = \boldsymbol{Spec}(\mathcal{O})$ un trait de point générique η et de point fermé s. Nous noterons Λ un anneau de coefficients de torsion première à p ou bien $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$.

Nous noterons $\mathrm{R}\Psi_{\bar{\eta}}$ (ou souvent, afin de na pas alourdir les notations, $\mathrm{R}\Psi$) le foncteur des cycles évanescents. De même, pour un morphisme f au dessus de S nous noterons $f_{\bar{s}}$ sa fibre spéciale étendue à $\bar{s}$ et f_η sa fibre générique (mais souvent, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, nous noterons f pour $f_{\bar{s}}$ et f_η).

6.3.1. Règles de calculs sur les cycles évanescents. —

6.3.1.1. Image directe. — Soit $f : X \longrightarrow Y$ au dessus de S. Il y a alors un morphisme naturel ([**13**] 2.1.7.)

$$\mathrm{R}\Psi f_* \longrightarrow f_*\mathrm{R}\Psi$$

qui est un isomorphisme lorsque f est propre. Ce morphisme est bien sûr compatible à la composition :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{R}\Psi((fg)_*) \arrow[r, equal] \arrow[d] & \mathrm{R}\Psi(f_*g_*) \arrow[r] & f_*\mathrm{R}\Psi(g_*) \arrow[d] \\
(fg)_*\mathrm{R}\Psi \arrow[rr, equal] & & f_*g_*\mathrm{R}\Psi
\end{tikzcd}$$

est un diagramme commutatif.

6.3.1.2. Image inverse. — Pour $f : X \longrightarrow Y$ il y également un morphisme naturel ([**13**] 2.1.7.)

$$f^*\mathrm{R}\Psi \longrightarrow \mathrm{R}\Psi f^*$$

qui est un isomorphisme lorsque f est lisse. Comme ci dessus ce morphisme est compatible à la composition vis à vis de l'égalité $(fg)^* = g^*f^*$.

6.3.1.3. Compatibilité au changement de base. —

Lemme 6.3.1. — *Soit*

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & Y' \arrow[d, "g"'] \\
X \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd}$$

un diagramme sur S. Pour $\mathcal{F} \in \boldsymbol{D}^+(Y', \Lambda)$ considérons le morphisme de changement de base

$$f^*g_*\mathcal{F} \xrightarrow{\alpha(\mathcal{F})} g'_*f'^*\mathcal{F}$$

Le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
f^*g_*R\Psi(\mathcal{F}) \arrow[r, "\alpha(R\Psi(\mathcal{F}))"] & g'_*f'^*R\Psi(\mathcal{F}) \arrow[d] \\
f^*R\Psi(g_*\mathcal{F}) \arrow[u] \arrow[d] & g'_*R\Psi(f'^*\mathcal{F}) \\
R\Psi(f^*g_*\mathcal{F}) \arrow[r, "R\Psi(\alpha(\mathcal{F}))"] & R\Psi(g'_*f'^*\mathcal{F}) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

où les applications verticales sont déduites des fonctorialités précédentes par image directe et image inverse.

Démonstration. — Elle ne pose aucun problème. □

6.3.2. Spécialisation. — Considérons un diagramme au dessus de S :

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "c_1"'] \arrow[dr, "c_2"] & \\ X_1 & & X_2 \end{tikzcd}$$

où comme d'habitude $c : C \longrightarrow X_1 \times X_2$ est propre.

Fujiwara a défini dans [**20**] un morphisme de spécialisation des correspondances cohomologiques

$$\mathrm{Coh}_{C_\eta}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \longrightarrow \mathrm{Coh}_{C_{\bar{s}}}(\mathrm{R}\Psi_{\bar{\eta}}(\mathcal{F}_1), \mathrm{R}\Psi_{\bar{\eta}}(\mathcal{F}_2))$$

La définition de ce morphisme utilise l'existence de l'isomorphisme $\mathrm{R}\Psi D \simeq D\mathrm{R}\Psi$ qui se transpose mal au cadre de la géométrie rigide. Afin d'avoir une description simple qui se transporte dans le cadre de la géométrie rigide nous allons décrire le morphisme de spécialisation dans un cadre plus restreint. Nous ferons pour cela l'hypothèse suivante :

Hypothèse : c_1 et c_2 sont propres.

Soit donc $u \in \mathrm{Coh}_{C_\eta}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$, $u : c_{1\eta}^* \mathcal{F}_1 \to c_{2\eta}^! \mathcal{F}_2$. c_2 étant propre il lui est associé $\tilde{u} : c_{2\eta *} c_{1\eta}^* \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$. D'où

$$\mathrm{R}\Psi_{\bar{\eta}}(\tilde{u}) : \mathrm{R}\Psi_{\bar{\eta}}(c_{2\eta *} c_{1\eta}^* \mathcal{F}_1) \longrightarrow \mathrm{R}\Psi_{\bar{\eta}}(\mathcal{F}_2)$$

Appliquant les diverses fonctorialités de $\mathrm{R}\Psi$ et la propreté de c_2 on obtient alors la ligne suivante :

$$c_{2\bar{s}_*} c_{1\bar{s}}^* \mathrm{R}\Psi_{\bar{\eta}}(\mathcal{F}_1) \longrightarrow c_{2\bar{s}*} \mathrm{R}\Psi_{\bar{\eta}}(c_{1\bar{s}}^* \mathcal{F}_1) \xleftarrow{\sim} \mathrm{R}\Psi_{\bar{\eta}}(c_{2\bar{s}*} c_{1\bar{s}}^* \mathcal{F}_1) \xrightarrow{\mathrm{R}\Psi_{\bar{\eta}}(\tilde{u})} \mathrm{R}\Psi_{\bar{\eta}}(\mathcal{F}_2)$$

qui fournit par adjonction un $u_{\bar{s}} \in \mathrm{Coh}_{C_{\bar{s}}}(\mathrm{R}\Psi_{\bar{\eta}}(\mathcal{F}_1), \mathrm{R}\Psi_{\bar{\eta}}(\mathcal{F}_2))$ dont on peut vérifier qu'il coïncide avec celui défini par Fujiwara (nous n'utiliserons pas ce fait par la suite).

La proposition qui suit est démontrée par Fujiwara (proposition 1.6.1 de [**20**]). Néanmoins nous aurons besoin de démontrer son analogue pour les correspondances rigides. Sa démonstration ne s'adaptant pas dans le cadre rigide, nous donnons une démonstration (sous nos hypothèses plus restrictives) qui n'utilise pas la dualité D et le fait que $\mathrm{R}\Psi$ commute à cette dualité.

Remarque 6.3.2. — Si $\mathfrak{X}$ désigne un schéma formel sur S de la forme $\widehat{X}_{/V}$ où X est un schéma séparé de type fini sur S, et V un sous schéma localement fermé de sa fibre spéciale alors, il résulte de l'isomorphisme de comparaison de Berkovich et de la commutation des cycles évanescents algébriques à la dualité que si $\mathcal{F}$ désigne un faisceau étale constructible de torsion première à p sur $X_{\text{ét}}$, il y a un isomorphisme

$$D\mathrm{R}\Theta_{\bar{\eta}}(\mathcal{F}^{an}_{|\mathfrak{X}^{an}}) \simeq \mathrm{R}\Theta_{\bar{\eta}}(D(\mathcal{F}^{an}_{|\mathfrak{X}^{an}}))$$

(on utilise également la commutation de D au foncteur $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}^{an}$, confère [**4**]). Néanmoins, cet isomorphisme dépend à priori du choix de la réalisation de $\mathfrak{X}$ comme le complété formel d'un X le long d'un V et n'est donc pas formulé de façon intrinsèque.

Remarque 6.3.3. — L'hypothèse c_1 et c_2 propres faite ci dessus est inutile pour définir simplement la spécialisation $u_{\bar{s}}$. En effet, pour tout morphisme de schémas de type fini sur S, f, il y a toujours une application $f_!\mathrm{R}\Psi_{\bar{\eta}} \longrightarrow \mathrm{R}\Psi_{\bar{\eta}} f_!$ (elle est duale via D à l'application $\mathrm{R}\Psi_{\bar{\eta}} f_* \longrightarrow f_*\mathrm{R}\Psi_{\bar{\eta}}$ mais peut se définir sans faire appel à la dualité, uniquement grâce au théorème de changement de base propre). Un $u \in \mathrm{Coh}_{C_\eta}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ définit par adjonction un morphisme $\tilde{u} : c_{2\eta!}c_{1\eta}^*\mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$. Le spécialisé $u_{\bar{s}}$ se définit alors via la ligne suivante

$$c_{2\bar{s}!}c_{1\bar{s}}^*\mathrm{R}\Psi_{\bar{\eta}}(\mathcal{F}_1) \longrightarrow c_{2\bar{s}!}\mathrm{R}\Psi_{\bar{\eta}}(c_{1\bar{s}}^*\mathcal{F}_1) \longrightarrow \mathrm{R}\Psi_{\bar{\eta}}(c_{2\bar{s}!}c_{1\bar{s}}^*\mathcal{F}_1) \xrightarrow{\mathrm{R}\Psi_{\bar{\eta}}(\tilde{u})} \mathrm{R}\Psi_{\bar{\eta}}(\mathcal{F}_2)$$

Cependant, pour montrer les propriétés comme la compatibilité aux images directes propres nous utiliserons l'hypothèse de propreté sur c_1 et c_2 et préférerons voir l'application du milieu dans le diagramme ci dessus comme associée à l'inverse de l'application naturelle $\mathrm{R}\Psi_{\bar{\eta}} c_{2\bar{s}*} \to c_{2\bar{s}*}\mathrm{R}\Psi_{\bar{\eta}}$.

Proposition 6.3.4. — *Soit un diagramme sur S*

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "c_1"'] \arrow[dd, "f'"] \arrow[dr, "c_2"] & \\
X_1 \arrow[dd, "f_1"'] & & X_2 \arrow[dd, "f_2"] \\
 & D \arrow[dl, "d_1"] \arrow[dr, "d_2"'] & \\
Y_1 & & Y_2
\end{tikzcd}$$

où $f_1, f_2, c_1, c_2, d_1, d_2$ sont propres. Alors, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
Coh_{C_\eta}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \arrow[r] \arrow[dd, "f_{\eta*}"'] & Coh_{C_{\bar{s}}}(R\Psi_{\bar{\eta}}(\mathcal{F}_1), R\Psi_{\bar{\eta}}(\mathcal{F}_2)) \arrow[dr, "f_{\bar{s}*}"] & \\
 & & Coh_{D_{\bar{s}}}(f_{1\bar{s}*}R\Psi_{\bar{\eta}}(\mathcal{F}_1), f_{2\bar{s}*}R\Psi_{\bar{\eta}}(\mathcal{F}_2)) \\
Coh_{D_\eta}(f_{1\eta*}\mathcal{F}_1, f_{2\eta*}\mathcal{F}_2) \arrow[r] & Coh_{D_{\bar{s}}}(R\Psi_{\bar{\eta}}(f_{1\eta*}\mathcal{F}_1), R\Psi_{\bar{\eta}}(f_{2\eta*}\mathcal{F}_2) \arrow[ur, "\simeq"] &
\end{tikzcd}$$

Démonstration. — Soit $u \in \mathrm{Coh}_{C_\eta}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$. Appliquons le lemme 6.3.1 au carré de gauche et au morphisme de changement de base $d_1^* f_{1*} \longrightarrow f'_* c_1^*$. On obtient un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
d_1^* f_{1*} \mathrm{R}\Psi(\mathcal{F}_1) \arrow[r] & f'_* c_1^* \mathrm{R}\Psi(\mathcal{F}_1) \arrow[d] \\
d_1^* \mathrm{R}\Psi(f_{1*}\mathcal{F}_1) \arrow[u, "\simeq"] \arrow[d] \arrow[r, phantom, "\boxed{\boldsymbol{\mathcal{D}}}"] & f'_* \mathrm{R}\Psi(c_1^* \mathcal{F}_1) \\
\mathrm{R}\Psi(d_1^* f_{1*}\mathcal{F}_1) \arrow[r] & \mathrm{R}\Psi(f'_* c_1^* \mathcal{F}_1) \arrow[u, "\simeq"']
\end{tikzcd}$$

Considérons maintenant le diagramme

$$\begin{tikzcd}
d_{2*} d_1^* f_{1*} \mathrm{R}\Psi(\mathcal{F}_1) \arrow[r] & d_{2*} f'_* c_1^* \mathrm{R}\Psi(\mathcal{F}_1) \arrow[r, equal] \arrow[d] & f_{2*} c_{2*} c_1^* \mathrm{R}\Psi(\mathcal{F}_1) \arrow[r, "\beta"] \arrow[d] & f_{2*} \mathrm{R}\Psi(\mathcal{F}_2) \\
d_{2*} d_1^* \mathrm{R}\Psi(f_{1*}\mathcal{F}_1) \arrow[u, "\simeq"] \arrow[d] \arrow[r, phantom, "\boxed{d_{2*}\boldsymbol{\mathcal{D}}}"] & d_{2*} f'_* \mathrm{R}\Psi(c_1^* \mathcal{F}_1) \arrow[r, equal] & f_{2*} c_{2*} \mathrm{R}\Psi(c_1^* \mathcal{F}_1) \arrow[ur, "\alpha"] & \\
d_{2*} \mathrm{R}\Psi(d_1^* f_{1*}\mathcal{F}_1) \arrow[r] & d_{2*} \mathrm{R}\Psi(f'_* c_1^* \mathcal{F}_1) \arrow[u, "\simeq"'] & f_{2*} \mathrm{R}\Psi(c_{2*} c_1^* \mathcal{F}_1) \arrow[u, "\simeq"'] & \\
\mathrm{R}\Psi(d_{2*} d_1^* f_{1*}\mathcal{F}_1) \arrow[u, "\simeq"] \arrow[r] & \mathrm{R}\Psi(d_{2*} f'_* c_1^* \mathcal{F}_1) \arrow[u, "\simeq"'] \arrow[r, equal] & \mathrm{R}\Psi(f_{2*} c_{2*} c_1^* \mathcal{F}_1) \arrow[u, "\simeq"'] \arrow[r] & \mathrm{R}\Psi(f_{2*}\mathcal{F}_2) \arrow[uu, "\simeq"']
\end{tikzcd}$$

Le carré en haut à gauche est obtenu en appliquant d_{2*} à $\mathcal{D}$. Il commute donc. L'application α est égale à $f_{2*}\mathrm{R}\Psi(\tilde{u})$ (où $\tilde{u} : c_{2*}c_1^*\mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$). L'application β est définie à partir de α de telle manière que le triangle supérieur commute.

L'autre triangle (ou plutôt trapèze) et tous les autres rectangles dans le diagramme commutent car ils sont tous associés à des cas de fonctorialité par image directe ou inverse des cycles évanescents (cf. 6.3.1).

On en déduit donc que le grand rectangle extérieur commute.

Le résultat s'en déduit car en parcourant la ligne du haut on obtient l'image directe de la correspondance spécialisée tandis qu'en joignant les deux sommets du haut en passant par les trois autres cotés on obtient la spécialisation de l'image directe.

□

Corollaire 6.3.5. — *Si X_1/S et X_2/S sont propres alors la suite spectrale des cycles évanescents est équivariante pour l'action de $u_{\bar{s}}$ sur le terme initial et de u sur l'aboutissement : le diagramme suivant commute*

$$\begin{array}{ccc} R\Gamma(X_{1\bar{s}}, R\Psi_{\bar{\eta}}(\mathcal{F}_1)) & \xrightarrow{\sim} & R\Gamma(X_{1\bar{\eta}}, \bar{\mathcal{F}}_1) \\ {\scriptstyle (u_{\bar{s}})_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \bar{u}_*} \\ R\Gamma(X_{2\bar{s}}, R\Psi_{\bar{\eta}}(\mathcal{F}_2)) & \xrightarrow{\sim} & R\Gamma(X_{2\bar{\eta}}, \bar{\mathcal{F}}_2) \end{array}$$

6.4. Cycles évanescents analytiques rigides

6.4.1. Rappels. — Soit $\mathfrak{X}$ un schéma formel localement formellement de type fini sur $\boldsymbol{Spf}(\mathcal{O})$ de fibre générique $\mathfrak{X}^{an}$ et de fibre spéciale $\mathfrak{X}_s$.

Il y a un isomorphisme de sites :

$$(\mathfrak{X}_s)_{\text{ét}} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{X}_{\text{ét}}$$

Si de plus $U/\mathfrak{X}$ est étale, $U^{an}/\mathfrak{X}^{an}$ est quasi-étale. On a donc un diagramme de sites

$$(\mathfrak{X}_s)_{\text{ét}} = \mathfrak{X}_{\text{ét}} \xleftarrow{\nu} \mathfrak{X}^{an}_{q-\text{ét}} \xrightarrow{\mu} \mathfrak{X}^{an}_{\text{ét}}$$

Rappelons (même si nous ne l'utiliserons pas dans la suite) que $\mathfrak{X}^{an}_{q-\text{ét}} \simeq \mathfrak{X}^{rig}_{\text{ét}}$ et que $\mu^* : \widetilde{\mathfrak{X}^{an}_{\text{ét}}} \longrightarrow \widetilde{\mathfrak{X}^{an}_{q-\text{ét}}}$ est pleinement fidèle d'image essentielle les faisceaux surconvergents sur $\mathfrak{X}^{rig}_{\text{ét}}$.

Berkovich pose alors ([**3**],[**5**])

$$\Theta = \nu_*\mu^* : \widetilde{(\mathfrak{X}^{an})_{\text{ét}}} \longrightarrow \widetilde{(\mathfrak{X}^{s})_{\text{ét}}}$$

Si $\hat{\bar{\eta}}$ désigne le complété de $\bar{\eta}$ il y a également un foncteur

$$\Theta_{\bar{\eta}} : \widetilde{(\mathfrak{X}^{an})_{\text{ét}}} \longrightarrow \widetilde{(\mathfrak{X}^{an}\hat{\otimes}\hat{\bar{\eta}})_{\text{ét}}} \longrightarrow \widetilde{(\mathfrak{X}_{\bar{s}})_{\text{ét}}}$$

obtenu grâce à l'extension des scalaires de η à $\hat{\bar{\eta}}$.

Soit Λ un anneau local artinien de torsion première à p. Nous considérerons

$$\mathrm{R}\Theta_{\bar{\eta}} : \boldsymbol{D}^+(\mathfrak{X}^{an}, \Lambda) \longrightarrow \boldsymbol{D}^+(\mathfrak{X}_{\bar{s}}, \Lambda)$$

$\mathrm{R}\Theta_{\bar{\eta}}(\mathcal{F})$ est muni d'une action de $\mathbf{Gal}(\bar{\eta}|\eta)$ compatible à celle sur $\mathfrak{X}_{\bar{s}}$.

Rappelons le théorème de Berkovich

Théorème 6.4.1 ([**5**]). — *Soit X/S un schéma de type fini et $Y \subset X_s$ un sous-schéma localement fermé de sa fibre spéciale. Pour tout faisceau étale abélien constructible $\mathcal{F}$ de torsion première à p, $\forall q \in \mathbb{N}$ il existe un isomorphisme canonique :*

$$R^q\Psi_{\bar{\eta}}(\mathcal{F})_{|Y} \xrightarrow{\sim} R^q\Theta_{\bar{\eta}}(\widehat{\mathcal{F}}_{/Y})$$

où $\widehat{\mathcal{F}}_{/Y}$ désigne la restriction de $\mathcal{F}^{an}$ sur X^{an}_η au domaine analytique $(\widehat{X}_{/Y})^{an} \hookrightarrow X^{an}_\eta$.

Rappelons comment est construit ce morphisme. Commençons par construire un morphisme

$$\Psi_{\bar{\eta}}(\mathcal{F})_{|Y} \longrightarrow \Theta_{\bar{\eta}}(\widehat{\mathcal{F}}_{/Y})$$

$\Psi_{\bar{\eta}}(\mathcal{F})_{|Y}$ est le faisceau associé au préfaisceau qui à un $U/Y_{\bar{s}}$ étale associe $\varinjlim_{\mathcal{D}} \bar{\mathcal{F}}(V_\eta)$ où la limite inductive est prise selon les diagrammes $\mathcal{D}$ suivants

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[d] & V \arrow[d, "\text{étale}"'] \\ Y_{\bar{s}} \arrow[r, hook] & X_{\bar{s}} \arrow[r] & \bar{X} \end{tikzcd}$$

$\Theta_{\bar{\eta}}(\widehat{\mathcal{F}}_{/Y})$ est le faisceau qui à $U/Y_{\bar{s}}$ étale associe $\Gamma(\tilde{U}^{an}, \bar{\mathcal{F}}^{an})$ où $\tilde{U}/\widehat{X}_{/Y}$ est l'unique relèvement étale de U et $\tilde{U}^{an}/X^{an}_{\hat{\bar{\eta}}}$ est quasi-étale (rappelons que si $A \xrightarrow{p} X^{an}$ est quasi-étale et $\mathcal{G}$ est un faisceau sur $X^{an}_{\text{ét}}$, $\Gamma(A_{\text{ét}}, p^*\mathcal{G}) = \Gamma(A_{q-\text{ét}}, \mu^*\mathcal{G})$).

Soit donc maintenant $\mathcal{D}$ un diagramme comme précédemment et $s \in \Gamma(V_\eta, \bar{\mathcal{F}})$. Le diagramme $\mathcal{D}$ et la propriété de relèvement unique des morphismes étales via à vis des immersions nilpotentes implique qu'il existe un unique morphisme

$$\begin{tikzcd} \tilde{U} \arrow[r, "a"] \arrow[d] & \widehat{V}_{/Y} \arrow[dl] \\ \widehat{X}_{/Y} \end{tikzcd}$$

d'où un morphisme

$$\Gamma(V_\eta, \bar{\mathcal{F}}^{an}) \xrightarrow{\text{restriction}} \Gamma(\widehat{V}^{an}_{/Y}, \bar{\mathcal{F}}^{an}) \xrightarrow{a^*} \Gamma(\tilde{U}^{an}, \bar{\mathcal{F}}^{an})$$

L'image de s par ce composé est l'image par le morphisme que l'on voulait décrire au niveau des préfaisceaux. Il induit le morphisme cherché au niveau des faisceaux.

Si $\alpha : Y_{\bar{s}} \hookrightarrow X_{\bar{s}}$ et $\beta : (\widehat{X}_{/Y})^{an} \subset (X_\eta)^{an}$ il y a donc un morphisme

$$\alpha^*\Psi_{\bar{\eta}} \longrightarrow \Theta_{\bar{\eta}}\beta^*$$

D'où un morphisme

$$\alpha^*\mathrm{R}\Psi_{\bar{\eta}} \longrightarrow \mathrm{R}\Theta_{\bar{\eta}}\beta^*$$

Et le théorème de Berkovich implique qu'il s'agit d'un isomorphisme dans la catégorie dérivée $\boldsymbol{D}^+_c(X_{\bar{s}}, \Lambda)$.

6.4.2. Comparaison avec les cycles évanescents adiques. — A un schéma formel $\mathfrak{X}/S$ séparé localement formellement de type fini est associé un espace adique $\mathfrak{X}^{rig}$ noté $\tilde{d}(\mathfrak{X})$ par Huber (confère l'appendice E). Celui ci est muni d'un morphisme de spécialisation $\tilde{\lambda} : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{X}_s$. Ce morphisme induit un morphisme de topos

$$(X^{rig})_{\text{ét}} \longrightarrow \mathfrak{X}_{\text{ét}}$$

Avec les notations précédentes, les faisceaux étales abéliens sur X^{rig} s'identifient aux faisceaux sur le site quasi-étale de $\mathfrak{X}^{an}$ et ce morphisme de sites n'est rien d'autre que

le morphisme ν défini précédemment. Huber définit alors les cycles évanescents adiques (confère par exemple [**30**] 3.12) pour un faisceau $\mathcal{F}$ sur $(\mathfrak{X}^{rig})_{\text{ét}}$ comme étant $\mathbb{R}\tilde{\lambda}_*\mathcal{F}$. Du point de vue analytique, les cycles évanescents adiques ne sont donc rien d'autre que les $\mathbb{R}\nu_*\mathcal{F}$.

Les cycles évanescents adiques et analytiques coïncident au sens où l'on a avec les identifications précédentes entre le site quasi-étale analytique et le site étale adique l'égalité

$$\forall \mathcal{F} \in \boldsymbol{D}^+(\mathfrak{X}^{an}, \Lambda) \;\; \mathrm{R}\Theta(\mathcal{F}) = \mathbb{R}\tilde{\lambda}_*(\mu^*\mathcal{F})$$

Il suffit pour cela de montrer que $\mathbb{R}(\nu_*\mu^*) = \mathbb{R}\nu_* \circ \mu^*$. Or, il résulte par exemple du théorème 3.3 de [**3**] que μ^* envoi les faisceaux mous sur des faisceaux ν_*-acycliques, d'où le résultat.

Nous n'utiliserons que le point de vue des cycles évanescents de Berkovich, mais faisons remarquer au lecteur que Huber possède des théorèmes de comparaison et de finitude plus généraux que ceux déduits du théorème de comparaison de Berkovich (proposition 3.11 et proposition 3.15 de [**30**]).

6.4.3. Fonctorialité de $\mathrm{R}\Theta_{\bar{\eta}}$ et de l'isomorphisme de comparaison. —

6.4.3.1. Image directe. — Soit $f : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{Y}$ un morphisme de schémas formels formellement de type fini sur S. Il y a alors un isomorphisme naturel ([**5**], corollaire 2.3 (ii))

$$\mathrm{R}\Theta_{\bar{\eta}} f_*^{an} \xrightarrow{\sim} f_{\bar{s}*}\mathrm{R}\Theta_{\bar{\eta}}$$

D'où en particulier une suite spectrale des cycles évanescents pour tout $\mathfrak{X}$:

$$R\Gamma(\mathfrak{X}_{\bar{s}}, \mathrm{R}\Theta_{\bar{\eta}}(\mathcal{F})) \simeq R\Gamma(\mathfrak{X}^{an}\hat{\otimes}\hat{\bar{\eta}}, \bar{\mathcal{F}})$$

Lemme 6.4.2. — *Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme de schémas de type fini sur S. Soient $W_0 \subset Y_s$ et $W_1 \subset X_s$ deux sous-schémas fermés tels que $W_{1red} \subset f^{-1}(W_0)_{red}$. Le morphisme f induit donc un morphisme $\hat{f} : \widehat{X}_{/W_1} \longrightarrow \widehat{Y}_{/W_0}$. Soit $\mathcal{F} \in \boldsymbol{D}^+(X_\eta, \Lambda)$. Il y a alors un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd}
R\Psi_{\bar{\eta}}(f_{\eta*}\mathcal{F})_{|W_0} \arrow[r] \arrow[d] & R\Theta_{\bar{\eta}}\left((\hat{f}^{an})_*\widehat{\mathcal{F}}_{/W_1}\right) \arrow[d, "\simeq"'] \\
(f_{\bar{s}*}R\Psi_{\bar{\eta}}(\mathcal{F}))_{|W_0} \arrow[r] & \hat{f}_{\bar{s}*}R\Theta_{\bar{\eta}}\left(\widehat{\mathcal{F}}_{/W_1}\right)
\end{tikzcd}$$

Démonstration. — Le diagramme s'insère dans le grand diagramme suivant dont on doit montrer qu'il est commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{R}\Psi_{\bar\eta}(f_{\eta*}\mathcal{F})_{|W_0} \arrow[r, "A\simeq"] \arrow[dd] & \mathrm{R}\Theta_{\bar\eta}(\widehat{(f_{\eta*}\mathcal{F})}_{/W_0}) \arrow[rr, "\mathrm{R}\Theta(\alpha)\simeq"] & & \mathrm{R}\Theta_{\bar\eta}\left((f^{an}_{\eta*}\mathcal{F}^{an})_{|(\widehat{Y}_{/W_0})^{an}}\right) \arrow[r, "\mathrm{R}\Theta(\beta)"] & \mathrm{R}\Theta_{\bar\eta}\left(\hat f^{an}_{*}(\mathcal{F}^{an}_{|\widehat{X}^{an}_{/W_1}})\right) \arrow[d, "\simeq"'] \\
 & & & & \\
(f_{\bar s*}\mathrm{R}\Psi_{\bar\eta}(\mathcal{F}))_{|W_0} \arrow[rr, "\gamma"] & & (f_{\bar s|W_1})_*\left(\mathrm{R}\Psi_{\bar\eta}(\mathcal{F})_{|W_1}\right) \arrow[rr, "B\simeq"] & & \hat f_{\bar s*}\mathrm{R}\Theta_{\bar\eta}\left(\mathcal{F}^{an}_{|(\widehat{X}_{/W_1})^{an}}\right)
\end{tikzcd}$$

où α est induit par l'isomorphisme de changement de base associé au diagramme de sites (corollaire 7.5.3 de [**2**])

$$\begin{tikzcd}
X^{an}_{\eta,\text{ét}} \arrow[r] \arrow[d] & X_{\eta,\text{ét}} \arrow[d] \\
Y^{an}_{\eta,\text{ét}} \arrow[r] & Y_{\eta,\text{ét}}
\end{tikzcd}$$

β et γ sont des applications de changement de base associées à des restrictions, A et B sont induites par l'isomorphisme de Berkovich, et les deux applications verticales sont induites par la fonctorialité de $\mathrm{R}\Psi$, resp. $\mathrm{R}\Theta$, vis à vis de l'image directe.

Soient $a : W_0 \hookrightarrow Y$ et $b : (\widehat{X}_{/W_1})^{an} \hookrightarrow X^{an}_{\eta}$. On doit vérifier que deux applications naturelles

$$a^*\mathrm{R}\Psi_{\bar\eta}Rf_{\eta*} \rightrightarrows Rf_{\bar s*}\mathrm{R}\Theta_{\bar\eta}b^*$$

coïncident. Or, b étant une quasi-immersion, b^* envoie les faisceaux mous sur des faisceaux mous qui sont eux mêmes $\Theta_{\bar\eta}$ acycliques. De plus, $\Theta_{\bar\eta}$ envoie les faisceaux mous sur des faisceaux flasques (proposition 2.2 de [**5**]). Donc,

$$R(f_{\bar s*}\Theta_{\bar\eta}b^*) = Rf_{\bar s*}\mathrm{R}\Theta_{\bar\eta}b^*$$

Il est également clair que $R(a^*\Psi_{\bar\eta}f_{\eta*}) = a^*\mathrm{R}\Psi_{\bar\eta}Rf_{\eta*}$. On vérifie alors aussitôt que les deux applications naturelles sont induites par dérivation des deux applications naturelles

$$a^*\Psi_{\bar\eta}f_{\eta*} \rightrightarrows f_{\bar s*}\Theta_{\bar\eta}b^*$$

Dont on doit donc montrer qu'elles sont égales. Il faut donc montrer que le diagramme commute sans foncteur dérivés et pour un faisceau $\mathcal{F}$. Il suffit pour cela de démontrer que le diagramme commute au niveau des préfaisceaux définissant les cycles évanescents. Soit donc $U/W_{0\bar s}$ étale et $s \in \Gamma(U, \Psi_{\bar\eta}(f_{\eta*}\mathcal{F})_{|W_0})$. Cette section est donnée par un germe de diagramme

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[rr] \arrow[d] & & V \arrow[d, "\text{étale}"] \\
W_{0\bar s} \arrow[r, hook] & Y_{\bar s} \arrow[r, hook] & \bar Y
\end{tikzcd}$$

et une section

$$t \in \Gamma(V_{\bar\eta}, \overline{f_{\eta*}\mathcal{F}}) = \Gamma(V_{\bar\eta}, f_{\bar\eta*}\bar{\mathcal{F}}) = \Gamma(f^{-1}_{\bar\eta}(V_{\bar\eta}), \bar{\mathcal{F}}) = \Gamma(f^{-1}(V)_{\bar\eta}, \bar{\mathcal{F}})$$

La section image de s par les trois application horizontales du haut est une section $t' \in \Gamma(W_{0\bar{s}}, \Theta_{\bar{\eta}}(\hat{f}_*^{an}(\mathcal{F}^{an}_{|\widehat{X}^{an}_{/W_1}}))$ qui se décrit ainsi : comme dans le 6.4.1 il y a des diagrammes

$$\begin{tikzcd} \widetilde{U} \arrow[r] \arrow[d] & \widehat{V}_{/W_0} \arrow[dl] \\ Y_{/W_0} & \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} \widetilde{U}^{an} \arrow[r] \arrow[d] & \widehat{V}^{an}_{/W_0} \arrow[dl] \\ Y^{an}_{/W_0} & \end{tikzcd}$$

Il y a donc un morphisme $\xi : (f^{an})^{-1}(\widetilde{U}^{an}) \longrightarrow (f^{an})^{-1}(\widehat{V}^{an}_{/W_0})$. La section t donne une section u de $\Gamma((f^{an})^{-1}(\widetilde{U}^{an}), \bar{\mathcal{F}}^{an})$ par les applications

$$\Gamma(f^{-1}(V)_{\bar{\eta}}, \bar{\mathcal{F}}) \longrightarrow \Gamma(f^{-1}(V)^{an}_{\hat{\bar{\eta}}}, \bar{\mathcal{F}}^{an}) \longrightarrow \Gamma((f^{an})^{-1}(\widehat{V}^{an}_{/W_0}), \bar{\mathcal{F}}^{an}) \xrightarrow{\xi^*} \Gamma((f^{an})^{-1}(\widetilde{U}^{an}), \bar{\mathcal{F}}^{an})$$

or, on a l'égalité

$$\Gamma((f^{an})^{-1}(\widetilde{U}^{an}), \bar{\mathcal{F}}^{an}) = \Gamma(\widetilde{U}^{an}, \hat{f}_*^{an}(\mathcal{F}^{an}_{|\widehat{X}^{an}_{/W_1}}))$$

l'image de cette section u par l'application de spécialisation

$$\Gamma(\widetilde{U}^{an}, \hat{f}_*^{an}(\mathcal{F}^{an}_{|\widehat{X}^{an}_{/W_1}})) \longrightarrow \Gamma(U, \Theta_{\bar{\eta}}(\hat{f}_*^{an}(\mathcal{F}^{an}_{|\widehat{X}^{an}_{/W_1}}))$$

est t'. De plus, $\Gamma(U, \hat{f}_{\bar{s}*}\Theta_{\bar{\eta}}(\mathcal{F}^{an}_{|(\widehat{X}_{/W_1})^{an}}) = \Gamma(f^{-1}_{|W_1}(U), \Theta_{\bar{\eta}}(\mathcal{F}^{an}_{|(\widehat{X}_{/W_1})^{an}}))$, et il y a des diagrammes

$$\begin{tikzcd} U_1 = (f_{|W_1})^{-1}(U) \arrow[r] \arrow[d] & f^{-1}(V) \arrow[d, "\text{étale}"] \\ W_{1\bar{s}} \arrow[r, hook] & X_{\bar{s}} \arrow[r, hook] & \bar{X} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \widetilde{U_1} \arrow[r] \arrow[d] & f^{-1}(V)_{/W_1} \arrow[dl] \\ \widehat{X}_{/W_1} & \end{tikzcd}$$

Par définition de l'application de commutation naturelle des cycles évanescents analytiques à l'image directe, l'image de t' par l'application verticale de droite dans le grand diagramme est l'image de u par la composée

$$\Gamma((f^{an})^{-1}(\widetilde{U}^{an}), \bar{\mathcal{F}}^{an}) \longrightarrow \Gamma(\widetilde{U_1}^{an}, \bar{\mathcal{F}}^{an}) \longrightarrow \Gamma(U_1, \Theta_{\bar{\eta}}(\hat{f}_*^{an}(\mathcal{F}^{an}_{|\widehat{X}^{an}_{/W_1}})))$$

où la dernière application est l'application de spécialisation associée aux deux diagrammes ci dessus. Cela donne une description de l'image de t en parcourant le grand diagramme par le haut puis par l'application verticale de droite.

Décrivons l'image de t de l'autre manière.

L'image de t par l'application verticale de gauche composée avec l'application γ dans le grand diagramme est donnée par son image par la composée composée

$$\Gamma(f^{-1}(V)_{\bar{\eta}}, \bar{\mathcal{F}}) \longrightarrow \Gamma(U_1, \Psi_{\bar{\eta}}(\mathcal{F})) = \Gamma(U, (f_{\bar{s}|W_1})_*\Psi_{\bar{\eta}}(\mathcal{F})_{|W_1})$$

où l'application du milieu est l'application de spécialisation associée au diagramme de gauche ci dessus. Par définition de l'isomorphisme de Berkovich, l'image de t, par le second chemin, dans $\Gamma(U, (\hat{f}_{\bar{s}})_*\Theta_{\bar{\eta}}(\mathcal{F}^{an}_{|\widehat{X}^{an}_{/W_1}})) = \Gamma(U_1, \Theta_{\bar{\eta}}(\mathcal{F}^{an}_{|\widehat{X}^{an}_{/W_1}}))$ est l'image de t par la composée

$$\Gamma(f^{-1}(V), \bar{\mathcal{F}}) \longrightarrow \Gamma(f^{-1}(V)^{an}, \bar{\mathcal{F}}^{an}) \longrightarrow \Gamma(\widetilde{U_1}^{an}, \bar{\mathcal{F}}^{an}) \longrightarrow \Gamma(U_1, \Theta_{\bar{\eta}}(\mathcal{F}^{an}_{|\widehat{X}^{an}_{/W_1}}))$$

où la dernière application est l'application de spécialisation.

Le fait que ces deux descriptions donnent la même image est alors clair une fois que l'on mes bout à bout les différents morphismes décrits. □

Corollaire 6.4.3. — *Dans le lemme précédent, supposons $Y = S$ et f propre. Il y a alors un morphisme Galois équivariant de suite spectrale des cycles évanescents*

$$\begin{tikzcd} H^p(X_{\bar{s}}, R^q\Psi_{\bar{\eta}}\mathcal{F}) \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d] & H^{p+q}(X_{\bar{\eta}}, \mathcal{F}) \arrow[d] \\ H^p(W_{1\bar{s}}, R^q\Psi_{\bar{\eta}}\mathcal{F}) \arrow[r, Rightarrow] & H^{p+q}((\widehat{X}_{/W_1})^{an}\hat{\otimes}\hat{\bar{\eta}}, \mathcal{F}^{an}) \end{tikzcd}$$

6.4.3.2. Image inverse. — Soit $f : \mathfrak{X} \longrightarrow \mathfrak{Y}$. Il y a alors un morphisme naturel

$$f^*\mathrm{R}\Theta \longrightarrow \mathrm{R}\Theta f^*$$

défini par adjonction grâce à l'isomorphisme $f_*\mathrm{R}\Theta f^* \simeq \mathrm{R}\Theta f_* f^*$ et l'application d'adjonction $Id \to f_* f^*$.

Le morphisme se décrit ainsi au niveau de la cohomologie : une section de $f^* R^q\Theta_{\bar{\eta}}\mathcal{F}$ est donnée étale localement par un $U/\mathfrak{X}_{\bar{s}}$ étale, par un diagramme

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{X}_{\bar{s}} \arrow[d, "f"'] \\ V \arrow[r] & \mathfrak{Y}_{\bar{s}} \end{tikzcd}$$

où $V/\mathfrak{Y}_{\bar{s}}$ est étale, et une section $t \in H^q(\tilde{V}^{an}, \mathcal{F}^{an})$. Le diagramme se relève en

$$\begin{tikzcd} \tilde{U}^{an} \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{X}^{an} \arrow[d, "f"'] \\ \tilde{V}^{an} \arrow[r] & \mathfrak{Y}^{an} \end{tikzcd}$$

et l'image réciproque de t par l'application verticale de gauche donne un élément de $H^q(\tilde{U}^{an}, f^*\mathcal{F})$, ce qui conclut la description de notre morphisme.

Lemme 6.4.4. — *Plaçons nous dans le cadre du lemme 6.4.2. Il y a alors un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} (f^* R\Psi_{\bar{\eta}}(\mathcal{F}))_{|W_1} \arrow[r] \arrow[d] & \hat{f}_{\bar{s}}^* R\Theta_{\bar{\eta}}(\widehat{\mathcal{F}}_{/W_0}) \arrow[d] \\ R\Psi_{\bar{\eta}}(f^*\mathcal{F})_{|W_1} \arrow[r] & R\Theta_{\bar{\eta}}\left(\hat{f}^{an*}(\widehat{\mathcal{F}}_{/W_0})\right) \end{tikzcd}$$

où les deux applications verticales sont celles associées à la fonctorialité de $R\Psi$ et $R\Theta$ pour f^*.

Démonstration. — Le diagramme s'insère dans le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
(f^*\mathrm{R}\Psi_{\bar\eta}(\mathcal{F}))_{|W_1} \arrow[r, equal] \arrow[d] & (f_{|W_1})^*\left(\mathrm{R}\Psi_{\bar\eta}(\mathcal{F})_{|W_0}\right) \arrow[r, "A\sim"] & (\hat{f}_{\bar s})^*\mathrm{R}\Theta_{\bar\eta}(\widehat{\mathcal{F}}_{/W_0}) \arrow[d] \\
\mathrm{R}\Psi_{\bar\eta}(f^*\mathcal{F})_{|W_1} \arrow[r, "B\sim"] & \mathrm{R}\Theta_{\bar\eta}(\widehat{f^*\mathcal{F}}_{/W_1}) \arrow[r, equal] & \mathrm{R}\Theta_{\bar\eta}\left(\hat{f}^{an*}(\widehat{\mathcal{F}}_{/W_0})\right)
\end{tikzcd}$$

où A est induit par l'isomorphisme de Berkovich et B est l'isomorphisme de Berkovich.

On doit montrer que deux morphismes

$$(f^*\mathrm{R}\Psi_{\bar\eta}(\mathcal{F}))_{|W_1} \rightrightarrows \mathrm{R}\Theta_{\bar\eta}\left(\hat{f}^{an*}(\widehat{\mathcal{F}}_{/W_0})\right)$$

coïncident. Soient $a : W_1 \hookrightarrow X_s$ et $b : (\widehat{Y}_{/W_0})^{an} \hookrightarrow Y_\eta^{an}$. On a donc deux morphismes

$$a^*f^*\mathrm{R}\Psi \rightrightarrows \mathrm{R}\Theta\hat{f}^*b^*$$

Rappelons que $\mathrm{R}\Theta = (R\nu_*) \circ \mu^*$. Se donner deux tels morphismes équivaut donc par adjonction à se donner deux morphismes

$$\nu^*a^*f^*\mathrm{R}\Psi \rightrightarrows \mu^*\hat{f}^*b^*$$

Ce qui revient à se donner deux morphismes

$$\nu^*a^*f^*\Psi \rightrightarrows \mu^*\hat{f}^*b^*$$

ou encore deux morphismes

$$a^*f^*\Psi \rightrightarrows \Theta\hat{f}^*b^*$$

On s'est donc ramené à vérifier la commutativité du diagramme dans le cas où il n'y a plus de foncteurs dérivés, ce qui est facile en utilisant la définition de l'isomorphisme de Berkovich. □

6.4.3.3. Compatibilité au changement de base. — Idem. cas algébrique.

6.5. Correspondances cohomologiques analytiques rigides

Λ désigne un anneau de coefficients de torsion première à p.

6.5.1. Définition. — Soit

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, "c_1"'] \arrow[dr, "c_2"] & \\
X_1 & & X_2
\end{tikzcd}$$

un diagramme d'espaces analytiques de Berkovich sur η, et $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \in \boldsymbol{D}^+(X_1, \Lambda) \times \boldsymbol{D}^+(X_2, \Lambda)$.

Définition 6.5.1. —

$$\mathrm{Coh}_C(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) = \mathrm{Hom}(c_{2*}c_1^*\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$$

6.5.2. Restriction à un domaine analytique. — Soient $U_1 \subset X_1, U_2 \subset X_2$ deux domaines analytiques localement fermés tels que $c_2^{-1}(U_2) \subset c_1^{-1}(U_1)$. Considérons la correspondance

$$\begin{tikzcd} & c_2^{-1}(U_2) \arrow[dl, "c_1'"'] \arrow[dr, "c_2'"] & \\ U_1 & & U_2 \end{tikzcd}$$

Soit $u \in \mathrm{Coh}_C(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$. Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd} c_2^{-1}(U_2) \arrow[r, hook, "b"] \arrow[d, "c_2'"'] & C \arrow[d, "c_2"'] \\ U_2 \arrow[r, hook, "a"] & X_2 \end{tikzcd}$$

duquel il résulte un isomorphisme de changement de base $a^* c_{2*} \xrightarrow{\sim} c_{2*}' b^*$.

La restriction de u est alors définie par la composition suivante

$$res(u) : c_{2*}' c_1'^*(\mathcal{F}_{1|U_1}) = c_{2*}' b^* c_1^* \mathcal{F}_1 \xleftarrow{\sim} a^* c_{2*} c_1^* \mathcal{F}_1 \xrightarrow{a^* u} a^* \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_{2|U_2}$$

$res(u) \in \mathrm{Coh}_{c_2^{-1}(U_2)}(\mathcal{F}_{1|U_1}, \mathcal{F}_{2|U_2})$ et cela définit un morphisme

$$\mathrm{Coh}_C(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \longrightarrow \mathrm{Coh}_{c_2^{-1}(V_2)}(\mathcal{F}_{1|U_1}, \mathcal{F}_{2|U_2})$$

6.5.3. Image directe. — Soit un diagramme d'espaces analytiques

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "c_1"'] \arrow[dd, "f'"'] \arrow[dr, "c_2"] & \\ X_1 \arrow[dd, "f_1"'] & & X_2 \arrow[dd, "f_2"'] \\ & D \arrow[dl, "d_1"'] \arrow[dr, "d_2"] & \\ Y_1 & & Y_2 \end{tikzcd}$$

et soit $u \in \mathrm{Coh}_C(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$. On définit $f_* u$ de la façon suivante

$$f_* u : d_{2*} d_1^* f_{1*} \mathcal{F}_1 \longrightarrow d_{2*} f_*' c_1^* \mathcal{F}_1 = f_{2*} c_{2*} c_1^* \mathcal{F}_1 \xrightarrow{f_{2*} u} f_{2*} \mathcal{F}_2$$

où la première application est déduite du morphisme de changement de base associé au losange de gauche.

On a donc une application :

$$\mathrm{Coh}_C(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \longrightarrow \mathrm{Coh}_D(f_{1*}\mathcal{F}_1, f_{2*}\mathcal{F}_2)$$

D'où en particulier une action sur la cohomologie :

$$\mathrm{Coh}_C(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2) \longrightarrow \mathrm{Hom}(R\Gamma(X_1,\mathcal{F}_1), R\Gamma(X_2,\mathcal{F}_2))$$

qui est définie ainsi :

$$u_* : R\Gamma(X_1,\mathcal{F}_1) \xrightarrow{c_1^*} R\Gamma(C, c_1^*\mathcal{F}_1) \xrightarrow{\sim} R\Gamma(X_2, c_{2*}c_1^*\mathcal{F}_1) \longrightarrow R\Gamma(X_2,\mathcal{F}_2)$$

Ces images directes sont compatibles à la restriction en un sens facile à définir.

6.5.4. Analytification d'une correspondance algébrique. — Soit

$$C \xrightarrow{(c_1,c_2)} X_1 \times X_2$$

une correspondance algébrique avec c_1 propre.

Soit $u \in \mathrm{Coh}_C(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)$ une correspondance cohomologique algébrique où $(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2) \in \boldsymbol{D}_c^+(X_1,\Lambda) \times \boldsymbol{D}_c^+(X_2,\Lambda)$. Il lui est associé un morphisme $\tilde{u} : c_{2*}c_1^*\mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_2$. u^{an} est alors définie ainsi :

$$u^{an} : \quad c_{2*}^{an}c_1^{an*}\mathcal{F}_1^{an} = c_{2*}^{an}(c_1^*\mathcal{F}_1)^{an} \xleftarrow{\sim} (c_{2*}c_1^*\mathcal{F}_1)^{an} \xrightarrow{\tilde{u}^{an}} \mathcal{F}_2^{an}$$

où l'isomorphisme du milieu des l'isomorphisme de changement de base du corollaire 7.5.3 de [**2**]. D'où un morphisme

$$\mathrm{Coh}_C(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2) \longrightarrow \mathrm{Coh}_{C^{an}}(\mathcal{F}_1^{an},\mathcal{F}_2^{an})$$

On vérifie facilement que ce morphisme d'analytification est compatible aux images directes propres.

6.6. Spécialisation des correspondances cohomologiques analytiques rigides

6.6.1. Définition. — Soit

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{C} \arrow[dl, "c_1"'] \arrow[dr, "c_2"] & \\ \mathfrak{X}_1 & & \mathfrak{X}_2 \end{tikzcd}$$

un diagramme de schémas formels localement formellement de type fini sur S, c'est à dire une correspondance formelle. Soit $u \in \mathrm{Coh}_{\mathfrak{C}^{an}}(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2)$. La correspondance spécialisée $u_{\bar{s}}$ est définie ainsi :

$$u_{\bar{s}} : c_{2*}c_1^*\mathrm{R}\Theta_{\bar{\eta}}(\mathcal{F}_1) \longrightarrow c_{2*}\mathrm{R}\Theta_{\bar{\eta}}(c_1^*\mathcal{F}_1) \xleftarrow{\sim} \mathrm{R}\Theta_{\bar{\eta}}(c_{2*}c_1^*\mathcal{F}_1) \xrightarrow{\mathrm{R}\Theta(u)} \mathrm{R}\Theta_{\bar{\eta}}(\mathcal{F}_2)$$

où l'on a utilisé les diverses fonctorialités de $\mathrm{R}\Theta$. Cela définit un morphisme :

$$\mathrm{Coh}_{\mathfrak{C}^{an}}(\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2) \longrightarrow \mathrm{Coh}_{\mathfrak{C}_{\bar{s}}}(\mathrm{R}\Theta_{\bar{\eta}}(\mathcal{F}_1), \mathrm{R}\Theta_{\bar{\eta}}(\mathcal{F}_2))$$

6.6.2. Compatibilité à l'image directe. — Considérons la proposition 6.3.4 dans le cadre rigide en ne faisant aucune hypothèse de propreté sur les morphismes. Sa démonstration s'adapte alors automatiquement au cas rigide en changeant Ψ en Θ et en remarquant que toutes les hypothèses de propreté sont inutiles puisque Θ, contrairement à Ψ, commute toujours aux images directes (il faut bien sûr utiliser les différentes fonctorialités établies pour $\mathrm{R}\Theta_{\bar{\eta}}$ pour adapter la démonstration).

On en déduit donc la compatibilité entre image directe quelconque et spécialisation dans le cas analytique rigide.

6.7. Compatibilité entre les spécialisations algébriques et analytiques rigides

Soit une correspondance sur algébrique S

$$C \xrightarrow{(c_1, c_2)} X_1 \times X_2$$

où l'on suppose que c_1 et c_2 sont propres. Soient $V_1 \subset X_{1s}$ et $V_2 \subset X_{2s}$ deux sous-schémas fermés de leur fibre spéciale. Supposons

$$c_2^{-1}(V_2) \subset c_1^{-1}(V_1)$$

d'où une correspondance sur s

$$c_2^{-1}(V_2) \xrightarrow{(c_1', c_2')} V_1 \times V_2$$

et une correspondance formelle

$$\mathfrak{C} \xrightarrow{(\hat{c}_1, \hat{c}_2)} \mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2$$

où $\mathfrak{C} = \widehat{C}_{/c_2^{-1}(V_2)}$, $\mathfrak{X}_1 = \widehat{X_1}_{/V_1}$, $\mathfrak{X}_2 = \widehat{X_2}_{/V_2}$.

Proposition 6.7.1. — *Soient $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \in \boldsymbol{D}_c^+(X_1, \Lambda) \times \boldsymbol{D}_c^+(X_2, \Lambda)$. Le diagramme suivant commute*

$$\begin{tikzcd}
Coh_{C_\eta}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \arrow[r, "analytification"] \arrow[d, "sp"'] & Coh_{C_\eta^{an}}(\mathcal{F}_1^{an}, \mathcal{F}_2^{an}) \arrow[r, "restriction"] & Coh_{\mathfrak{C}^{an}}(\widehat{\mathcal{F}_1}_{/V_1}, \widehat{\mathcal{F}_2}_{/V_2}) \arrow[d, "sp"'] \\
Coh_{C_{\bar{s}}}(R\Psi_{\bar{\eta}}(\mathcal{F}_1), R\Psi_{\bar{\eta}}(\mathcal{F}_2)) \arrow[r, "restriction"] & Coh_{c_2^{-1}(V_2)}(R\Psi_{\bar{\eta}}(\mathcal{F}_1)_{|V_1}, R\Psi_{\bar{\eta}}(\mathcal{F}_2)_{|V_2}) \arrow[r, "\sim"] & Coh_{\mathfrak{C}_{\bar{s}}}(R\Theta_{\bar{\eta}}(\widehat{\mathcal{F}_1}_{/V_1}), R\Theta_{\bar{\eta}}(\widehat{\mathcal{F}_2}_{/V_2}))
\end{tikzcd}$$

Démonstration. — Soit $u \in \mathrm{Coh}_{C_\eta}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ et notons $\tilde{u} : c_{2*}c_1^*\mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_2$ le morphisme associé par adjonction. La démonstration consiste à appliquer la compatibilité de l'isomorphisme de comparaison avec les deux cas de fonctorialité pour les cycles évanescents.

Appliquons le lemme 6.4.4 à $\mathcal{F}_1$ et

$$\begin{tikzcd}
c_2^{-1}(V_2) \arrow[r, hook] \arrow[d, "c_1'"'] & C \arrow[d, "c_1"'] \\
V_1 \arrow[r, hook] & X_1
\end{tikzcd}$$

On obtient alors un diagramme

$$\begin{tikzcd}
c_1'^{*}\left(\mathrm{R}\Psi(\mathcal{F}_1)_{|V_1}\right) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\boxed{\mathcal{D}}"] & (\hat{c}_{1\bar{s}})^{*}\mathrm{R}\Theta(\widehat{\mathcal{F}_1}_{/V_1}) \arrow[d] \\
\mathrm{R}\Psi(c_1^{*}\mathcal{F}_1)_{|c_2^{-1}(V_2)} \arrow[r] & \mathrm{R}\Theta((\hat{c}_1^{an})^{*}\widehat{\mathcal{F}_1}_{/V_1})
\end{tikzcd}$$

Considérons maintenant le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
c_{2*}'c_1'^{*}\left(\mathrm{R}\Psi(\mathcal{F}_1)_{|V_1}\right) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\boxed{c_{2*}'\mathcal{D}}"] & c_{2*}'(\hat{c}_{1\bar{s}})^{*}\mathrm{R}\Theta(\widehat{\mathcal{F}_1}_{/V_1}) \arrow[d] \\
c_{2*}'\mathrm{R}\Psi(c_1^{*}\mathcal{F}_1)_{|c_2^{-1}(V_2)} \arrow[r] & \hat{c}_{2\bar{s}*}\mathrm{R}\Theta((\hat{c}_1^{an})^{*}\widehat{\mathcal{F}_1}_{/V_1}) \\
(c_{2*}\mathrm{R}\Psi(c_1^{*}\mathcal{F}_1))_{|V_2} \arrow[u, "\simeq"] & \hat{c}_{2\bar{s}*}\mathrm{R}\Theta\left((\widehat{c_1^{*}\mathcal{F}_1})_{/V_1}\right) \arrow[u, "\simeq"] \\
\mathrm{R}\Psi(c_{2*}c_1^{*}\mathcal{F}_1)_{|V_2} \arrow[u, "\simeq"] \arrow[r] \arrow[dr] & \mathrm{R}\Theta\left(\hat{c}_{2*}^{an}(\widehat{c_1^{*}\mathcal{F}_1})_{/V_1}\right) \arrow[u, "\simeq"] \arrow[d, "\simeq"] \\
 & \mathrm{R}\Theta\left(\widehat{c_{2*}c_1^{*}\mathcal{F}_1}_{/V_2}\right) \arrow[r, "\mathrm{R}\Theta(\tilde{u}^{an}_{|\mathfrak{X}_2^{an}})"] & \mathrm{R}\Theta(\widehat{\mathcal{F}_2}_{/V_2})
\end{tikzcd}$$

où le deuxième rectangle commute grâce au lemme 6.4.2.

Le résultat s'en déduit, car les deux éléments de $\mathrm{Coh}_{\mathfrak{C}^{an}}(\mathrm{R}\Theta(\widehat{\mathcal{F}_1}_{/V_1}), \mathrm{R}\Theta(\widehat{\mathcal{F}_2}_{/V_2}))$ associés se déduisent de ce diagramme en le parcourant du sommet en haut à droite vers l'élément en bas à droite des deux façons possibles en suivant les bords du diagramme. $\square$

6.8. Résumé des différentes fonctorialités

Supposons nous donné un morphisme de correspondances sur S

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "(c_1, c_2)"] \arrow[d, "f'"'] & X_1 \times X_2 \arrow[d, "f_1 \times f_2"] \\
D \arrow[r, "(d_1, d_2)"] & Y_1 \times Y_2
\end{tikzcd}$$

Soient $W_1 \subset Y_1, W_2 \subset Y_2$ deux fermés tels que $d_2^{-1}(W_2) \subset d_1^{-1}(W_1)$. Soient $V_i = f_i^{-1}(W_i)$, $i = 1, 2$ et supposons que $c_2^{-1}(V_2) \subset c_1^{-1}(V_1)$.

Soient $\mathfrak{C} = \widehat{C}_{/c_2^{-1}(V_2)}, \mathfrak{X}_i = \widehat{X}_{/V_i}$, $i = 1, 2$. Soient $\mathfrak{D} = \widehat{D}_{/d_2^{-1}(W_2)}, \mathfrak{Y}_i = \widehat{Y}_{i/W_i}$, $i = 1, 2$. Il y a donc un morphisme de correspondances formelles

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{C} \arrow[r, "(\hat{c}_1, \hat{c}_2)"] \arrow[d, "\hat{f}'"'] & \mathfrak{X}_1 \times \mathfrak{X}_2 \arrow[d, "\hat{f}_1 \times \hat{f}_2"] \\ \mathfrak{D} \arrow[r, "(\hat{d}_1, \hat{d}_2)"] & \mathfrak{Y}_1 \times \mathfrak{Y}_2 \end{tikzcd}$$

Qui induit un morphisme de correspondances analytiques.

Soient $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \in \boldsymbol{D}_c^+(X_1, \Lambda) \times \boldsymbol{D}_c^+(X_2, \Lambda)$. Supposons que $c_1, c_2, d_1, d_2, f_1, f_2$ sont propres.

Le diagramme de la page suivante est alors commutatif.

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Coh}_{C_{\bar{s}}}(\mathrm{R}\Psi\mathcal{F}_1, \mathrm{R}\Psi\mathcal{F}_2) \arrow[rr, "\text{restriction+isomorphisme de Berkovich}"] \arrow[d, "f_{\bar{s}*}+ \text{ commutation de l'image directe propre à } \mathrm{R}\Psi"] & & \mathrm{Coh}_{\mathfrak{C}_{\bar{s}}}(\mathrm{R}\Theta\widehat{\mathcal{F}_1}_{/V_1}, \mathrm{R}\Theta\widehat{\mathcal{F}_2}_{/V_2}) \arrow[d, "f'_{\bar{s}*}+ \text{ commutation de l'image directe à } \mathrm{R}\Theta"] \\
\mathrm{Coh}_{C_\eta}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \arrow[ur, "\text{spécialisation}"] \arrow[rr, "\text{analytification+ restriction}"] \arrow[dd, "f_{\eta*}"'] & & \mathrm{Coh}_{\mathfrak{C}^{an}}(\widehat{\mathcal{F}_1}_{/V_1}, \widehat{\mathcal{F}_2}_{/V_2}) \arrow[ur, "\text{spécialisation}"] \arrow[dd, "\hat{f}_*^{an}"'] & \\
 & \mathrm{Coh}_{D_{\bar{s}}}(\mathrm{R}\Psi f_{1*}\mathcal{F}_1, \mathrm{R}\Psi f_{2*}\mathcal{F}_2) \arrow[rr, "\text{restriction+isomorphisme de Berkovich}"] & & \mathrm{Coh}_{\mathfrak{D}_{\bar{s}}}(\mathrm{R}\Theta\widehat{f_{1*}\mathcal{F}_1}_{/W_1}, \mathrm{R}\Theta\widehat{f_{2*}\mathcal{F}_1}_{/W_2}) \\
\mathrm{Coh}_{D_\eta}(f_{1*}\mathcal{F}_1, f_{2*}\mathcal{F}_2) \arrow[ur, "\text{spécialisation}"] \arrow[rr, "\text{analytification+ restriction}"] & & \mathrm{Coh}_{\mathfrak{D}^{an}}(\widehat{f_{1*}\mathcal{F}_1}_{/W_1}, \widehat{f_{2*}\mathcal{F}_1}_{/W_2}) \arrow[ur, "\text{spécialisation}"] &
\end{tikzcd}
$$

6.9. Des coefficients de torsion aux coefficients ℓ-adique

Oublions dans cette section les notations précédentes et reprenons les notations de l'appendice F : en particulier k est un corps valué complet, Λ un anneau de valuation discrète complet dont nous noterons K_Λ le corps des fractions. Soit X un k-espace analytique ou bien un espace adique sur $\mathrm{Spa}(k, k^0)$. En général les groupes de cohomologie étale Λ-adique

$$H^\bullet(X, \Lambda)$$

ne sont pas définis : il n'y a aucune définition intrinsèque qui fasse que ces groupes vérifient de bonnes propriétés. Nous allons voir cependant que dans certains cas, lorsque certaines propriétés de finitude sont satisfaites, on peut donner une définition ad-hoc des $H^\bullet(X, \Lambda)$ satisfaisante.

Définition 6.9.1. — Soit $q \in \mathbb{N}$. Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_n \in \Lambda_\bullet - \mathcal{F}\mathrm{sc}_{/X_{\text{ét}}}$. Supposons que $(H^q(X, \mathcal{F}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ soit un système A.R. Λ-adique de type fini. On posera alors

$$H^q(X, \mathcal{F}) = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} H^q(X, \mathcal{F}_n)$$

un Λ-module de type fini.

Cette définition est justifiée par la proposition suivante :

Proposition 6.9.2. — *Supposons X lisse sur k (ou sur $Spa(k, k^0)$ dans le cas adique) de dimension pure d . Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_n \in \Lambda_\bullet - \mathcal{F}sc_{/X_{\acute{e}t}}$ localement constant. Soit $\check{\mathcal{F}}$ le système local dual. Supposons que $\forall q \in \mathbb{N}$ les systèmes*

$$\left(H^q_c(X\hat{\otimes}\hat{\bar{k}}, \mathcal{F}_n)\right)_{n\in\mathbb{N}} \quad et \quad \left(H^q(X\hat{\otimes}\hat{\bar{k}}, (\check{\mathcal{F}})_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

sont A.R. Λ-adiques de type fini et que l'application

$$H^q_c(X\hat{\otimes}\hat{\bar{k}}, \mathcal{F}) \longrightarrow \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} H^q_c(X\hat{\otimes}\hat{\bar{k}}, \mathcal{F}_n)$$

est un isomorphisme.

Il y a alors un isomorphisme canonique de dualité de Poincaré

$$(H^q_c(X, \mathcal{F}) \otimes_\Lambda K_\Lambda)^* \xrightarrow{\sim} H^{2d-q}(X, \check{\mathcal{F}})(d) \otimes_\Lambda K_\Lambda$$

Démonstration. — Nous allons appliquer le formalisme de Ekedahl [**17**] dont nous utiliserons librement les notations. Soit $f : X\hat{\otimes}\hat{\bar{k}} \longrightarrow \mathcal{M}(\hat{\bar{k}})$ (resp. $\mathrm{Spa}(\hat{\bar{k}}, \hat{\bar{k}}^0)$ dans le cas adique). Il y a alors un foncteur (section 5 de [**17**])

$$\mathbb{R}f_! : \boldsymbol{D}(\mathcal{T} - \underline{\Lambda}) \longrightarrow \boldsymbol{D}(\mathcal{S} - \Lambda)$$

où $\mathcal{T}$ est le topos $\widetilde{X_{\text{ét}}}$ et $\mathcal{S}$ le topos ponctuel $\widetilde{\mathcal{M}\left(\hat{\bar{k}}\right)_{\text{ét}}}$ (resp. $Spa(\hat{\bar{k}}, \hat{\bar{k}}^0)^{\sim}_{\text{ét}}$) vérifiant (confère par exemple la fin de l'énoncé du (iii) du théorème 6.3 de [**17**])

$$\forall n \in \mathbb{N} \;\; \Lambda/\mathfrak{m}^n \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_\Lambda (\mathbb{R}f_!\mathcal{F}) = \mathbb{R}\Gamma_c(X\hat{\otimes}\hat{\bar{k}}, \mathcal{F}_n) \in \boldsymbol{D}^+((X\hat{\otimes}\hat{\bar{k}})_{\text{ét}}, \Lambda/\mathfrak{m}^n)$$

(Ce foncteur est à distinguer du foncteur $\mathbb{R}\Gamma_c(X, -)$ introduit dans l'appendice F) Le topos ponctuel $\mathcal{S}$ vérifie les hypothèses du paragraphe 7 de [**17**]. $\mathbb{R}f_!$ est de dimension

cohomologique finie ($R^i f_!$ s'annule en dimension supérieure à $2d$ pour les coefficients de torsion ([**28**] 5.3.8, [**2**] 5.3.11). Donc, d'après les hypothèses faites

$$\mathbb{R}f_!\mathcal{F} \in \boldsymbol{D}^b_c(\mathcal{S}-\Lambda)$$

D'après le théorème 7.1 de [**17**] il y a une équivalence de catégories

$$\boldsymbol{D}^b_c(\mathcal{S}-\Lambda) \underset{\mathbb{L}\pi^*}{\overset{\mathbb{R}\pi_*}{\rightleftarrows}} \boldsymbol{D}^b_{\text{type fini}}(\Lambda-\text{mod})$$

où π_* est le foncteur $\varprojlim$, π^* le foncteur $M \mapsto (M \otimes \Lambda/\mathfrak{m}^n)_{n\in\mathbb{N}}$, et $\mathbb{R}\pi_*$ et $\mathbb{L}\pi^*$ sont quasi-inverses l'un de l'autre. Donc,

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}f_!\mathcal{F} &\simeq \mathbb{L}\pi^*(\mathbb{R}\pi_*\mathbb{R}f_!\mathcal{F}) \\
&= \left(\Lambda/\mathfrak{m}^n \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_\Lambda \mathbb{R}\pi_*\mathbb{R}f_!\mathcal{F}\right)_{n\in\mathbb{N}} \\
&\simeq \left(\mathbb{R}\Gamma_c(X\hat{\otimes}\hat{\bar{k}}, \mathcal{F}_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}
\end{aligned}$$

Soit $M^\bullet = \mathbb{R}\pi_*(\mathbb{R}f_!\mathcal{F})$. La suite spectrale

$$E_2^{ij} = \mathbb{R}^i\pi_*\left((H^j_c(X\hat{\otimes}\hat{\bar{k}}, \mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) \Longrightarrow H^{i+j}(M^\bullet)$$

vérifie $E_2^{ij} = 0$ si $i \neq 0$ car par hypothèse le système $(H^j_c(X\hat{\otimes}\hat{\bar{k}}, \mathcal{F}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est A.R. Λ-adique. Donc,

$$H^j(M^\bullet) \simeq \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} H^j_c(X, \mathcal{F}_n)$$

Comme dans le paragraphe 6 de [**17**], utilisant les propriétés de finitude de la dimension cohomologique de $f_!$, on peut définir $f^!\Lambda \in \boldsymbol{D}(\mathcal{T}-\underline{\Lambda})$. Il résulte du théorème de dualité de Poincaré pour les coefficients de torsion (théorème 7.3.1 de [**2**] dans le cas analytique et théorème 7.5.3 de [**28**] dans le cas adique) que $f^!\Lambda \simeq \underline{\Lambda}(d)[2d]$. En effet, le morphisme trace pour les coefficients de torsion $\mathbb{R}f_!f^*(-)(d)[2d] \to (-)$ s'étend naturellement en une application de foncteurs de $\boldsymbol{D}^b(\mathcal{S}-\Lambda)$ dans $\boldsymbol{D}^b(\mathcal{S}-\Lambda)$ qui définit par adjonction un morphisme $f^*(-)(d)[2d] \to f^!(-)$ dans $\boldsymbol{D}^b(\mathcal{T}-\Lambda)$. Ce morphisme est un isomorphisme puisqu'après application du foncteur conservatif $-\overset{\mathbb{L}}{\otimes}\Lambda/\mathfrak{m}$ on obtient l'isomorphisme dans le cas de torsion (grâce au 6.3. (iii) de [**17**]). La dualité de Verdier Λ-adique (isomorphisme 6.1 de [**17**]) donne alors un isomorphisme

$$\mathbb{R}\text{Hom}(\mathbb{R}f_!\mathcal{F}, \Lambda_\bullet) \simeq \mathbb{R}\text{Hom}(\mathcal{F}, \Lambda_\bullet(d)[2d])$$

Le premier terme s'identifie via l'équivalence de catégories ci dessus à

$$\mathbb{R}\text{Hom}_\Lambda(M^\bullet, \Lambda)$$

quant au second à

$$\mathbb{R}f_*(\check{\mathcal{F}}(d)[2d])$$

qui, comme précédemment pour $\mathbb{R}f_!$, est égal à

$$(\mathbb{R}\Gamma(X, \mathcal{F}_n))_{n\in\mathbb{N}}$$

Grâce à l'hypothèse que $\forall j,\ (H^j(X,\check{\mathcal{F}}_n))_n$ est un système A.R. Λ-adique de type fini, si

$$N^\bullet = \mathbb{R}\pi_*\mathbb{R}f_*\check{\mathcal{F}}(d)[2d]$$

alors

$$\forall j\ \ H^j(N^\bullet) = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} H^{2d+j}(X,\check{F})(d)$$

On obtient (toujours grâce à l'équivalence du théorème 7.1 de [**17**]) donc

$$\mathbb{R}\mathrm{Hom}_\Lambda(M^\bullet,\Lambda) \simeq N^\bullet$$

dans la catégorie dérivée bornée des complexes de Λ-modules à cohomologie de type fini. Si W est un Λ-module de type fini,

$$Ext^i_\Lambda(W,\Lambda) = \begin{cases} \mathrm{Hom}_\Lambda(W_{\mathrm{torsion}}, K_\Lambda/\Lambda) \text{ si } i=1 \\ 0 \text{ si } i\geq 2 \end{cases}$$

La suite spectrale

$$E_2^{ij} = Ext^i_\Lambda(H^{-j}(M^\bullet),\Lambda) \Longrightarrow H^{i+j}(N^\bullet)$$

dégénère donc en des suites exactes pour tout i

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(H_c^{2d-i+1}(X,\Lambda)_{\mathrm{torsion}}, K_\Lambda/\Lambda) \longrightarrow H^i(X,\check{\mathcal{F}})(d) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(H_c^{2d-i}(X,\mathcal{F}),\Lambda) \longrightarrow 0$$

qui donne le résultat voulu après tensorisation par K_Λ puisque le terme de gauche est de torsion. □

Remarque 6.9.3. — Il est sous entendu que les isomorphismes ci dessus sont Galois équivariants.

Proposition 6.9.4. — *Les hypothèses de la proposition précédente sont vérifiées lorsque X et $\mathcal{F}$ sont de la forme suivante :*

- *Il existe un schéma séparé de type fini Y/k^0, un faisceau étale algébrique constructible $\mathcal{G}$ sur Y_η et un ouvert U de la fibre spéciale de Y, $Y\times_{k^0} k^0/k^{00}$, tels que X s'identifie à la fibre générique au sens des espaces adiques du complété formel de X le long de U*

$$(\widehat{Y}_{/U})^{rig} \subset (Y_\eta)^{rig}$$

  et $\mathcal{F}$ s'identifie à la restriction de $\mathcal{G}^{rig}$ à cet ouvert (et X est lisse et $\mathcal{F}$ est localement constant).
- *Il existe un schéma séparé de type fini Y/k^0, un faisceau étale algébrique constructible $\mathcal{G}$ sur Y_η et, dans le cas analytique, un fermé propre V de la fibre spéciale de Y tels que X s'identifie au tube au dessus de V dans $(Y_\eta)^{an}$, $(\widehat{Y}_{/V})^{an}$, et $\mathcal{F}$ s'identifie à la restriction de $\mathcal{G}^{an}$. Dans le cas adique mêmes conditions mais V est seulement supposé fermé.*

Soit de plus $\mathfrak{X}$ le schéma formel $\widehat{X}_{/U}$ dans le premier cas et $\widehat{X}_{/V}$ dans le second. Soit $(R\Theta_{\bar\eta}(\mathcal{F}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ le système de faisceaux des cycles proches analytiques rigides. Alors,

$$(R\Theta_{\bar\eta}(\mathcal{F}_n))_n \in \boldsymbol{D}^b_c(\mathfrak{X}_{\bar s},\Lambda)$$

la catégorie dérivée bornée à cohomologie constructible 2*-colimite des catégories* $(\boldsymbol{D}_c^b(\mathfrak{X}_{\bar{s}}, \Lambda/\mathfrak{m}^n))_{n\in\mathbb{N}}$*, et il y a une suite spectrale des cycles évanescents de* Λ*-modules de type fini convergente*

$$E_2^{pq} = H^p(\mathfrak{X}_{\bar{s}}, (R\Theta_{\bar{\eta}}(\mathcal{F}_n))_n) = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} H^{p+q}(\mathfrak{X}_{\bar{s}}, R\Theta_{\bar{\eta}}(\mathcal{F}_n)) \Longrightarrow H^{p+q}(X\hat{\otimes}\hat{\bar{k}}, \bar{\mathcal{F}})$$

Démonstration. — Commençons par les assertions sur les cycles évanescents. Le fait que $\forall n$ $\mathrm{R}\Theta_{\bar{\eta}}(\mathcal{F}_n) \in \boldsymbol{D}_c^b(\mathfrak{X}_{\bar{s}}, \Lambda/\mathfrak{m}^n)$ résulte du théorème de comparaison de Berkovich et du théorème de de constructibilité de Deligne ([**14**]) pour les cycles évanescents algébriques. La formule de Künneth pour les cycles évanescents algébriques (appendice de [**32**]) couplée au théorème de comparaison de Berkovich montre que

$$\forall n \ \ \mathrm{R}\Theta_{\bar{\eta}}(\mathcal{F}_{n+1}) \overset{\mathbb{L}}{\otimes} \Lambda/\mathfrak{m}^n \simeq \mathrm{R}\Theta_{\bar{\eta}}(\mathcal{F}_n)$$

(et cet isomorphisme est canonique). On en déduit que

$$(\mathrm{R}\Theta_{\bar{\eta}}(\mathcal{F}_n))_n \in \boldsymbol{D}_c^b(\mathfrak{X}_{\bar{s}}, \Lambda)$$

Il résulte également de [**14**] et de l'annulation des $\mathrm{R}^i\Psi_{\bar{\eta}}$ pour i grand que $(\mathrm{R}\Theta_{\bar{\eta}}(\mathcal{F}_n))_n$ est un système A.R. Λ-adique (utiliser le lemme 12.5 de [**19**] ou bien [**33**] 5.3.1). Le théorème de finitude de la cohomologie étale des faisceaux constructibles sur un corps de [**14**] couplé au théorème 5.3.1 de [**33**] montre alors que $\forall p$ $\forall q$ le $\Lambda_\bullet$-module

$$(H^p(\mathfrak{X}_{\bar{s}}, \mathrm{R}\Theta_{\bar{\eta}}^q(\mathcal{F}_n)))_{n\in\mathbb{N}}$$

est A.R. Λ-adique. Pour tout n il y a une suite spectrale des cycles évanescents

$$E_2^{pq}(n) = H^p(\mathfrak{X}_{\bar{s}}, \mathrm{R}\Theta_{\bar{\eta}}(\mathcal{F}_n)) \Longrightarrow H^{p+q}(X\hat{\otimes}\hat{\bar{k}}, \bar{\mathcal{F}}_n)$$

On obtient donc une suite spectrale convergente dans la catégorie des $\Lambda_\bullet$-modules

$$E_2^{pq} = (E_2^{pq}(n))_{n\in\mathbb{N}} \Longrightarrow \left(H^{p+q}(X\hat{\otimes}\hat{\bar{k}}, \bar{\mathcal{F}}_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Les premiers termes E_2^{pq} sont dans la catégorie des $\Lambda_\bullet$-modules A.R. Λ-adiques de type fini. Cette catégorie est une sous-catégorie abélienne pleine stable par extension de celle des $\Lambda_\bullet$-modules ([**33**] théorème 5.2.3 et proposition 5.2.4). Le fait qu'elle soit abélienne implique que $\forall p$ $\forall q$ $\forall r \geq 2$ $(E_r^{pq}(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est A.R. Λ-adique de type fini. $\forall p$ $\forall q$ l'aboutissement $(H^{p+q}(X\hat{\otimes}\hat{\bar{k}}, \bar{\mathcal{F}}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est alors muni d'une filtration finie dont les gradués sont A.R. Λ-adique de type fini. La stabilité par extensions de la catégorie des $\Lambda_\bullet$-modules A.R. Λ-adiques montre donc que cet aboutissement est A.R. Λ-adique. Considérons maintenant le foncteur $\varprojlim$ qui va de la catégorie des $\Lambda_\bullet$-modules dans celle des Λ-modules. En restriction à la catégorie des $\Lambda_\bullet$-modules A.R. Λ-adiques de type fini il est exact d'image des Λ-modules de type fini. Appliquant ce foncteur exact à la suite spectrale $(E_2^{pq}(n))_{n\in\mathbb{N}}$ on obtient donc une suite spectrale convergente de Λ-modules de type fini

$$E_2^{pq} = H^p(\mathfrak{X}_{\bar{s}}, (\mathrm{R}\Theta_{\bar{\eta}}(\mathcal{F}_n))_n) = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} H^{p+q}(\mathfrak{X}_{\bar{s}}, \mathrm{R}\Theta_{\bar{\eta}}(\mathcal{F}_n)) \Longrightarrow \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} H^{p+q}(X\hat{\otimes}\hat{\bar{k}}, \bar{\mathcal{F}}_n)$$

ce qui termine la démonstration de la partie cycles évanescents de la proposition.

Passons maintenant à la première partie. Dans tous les cas, on a déjà vérifié l'hypothèse concernant $(H^q(X\hat{\otimes}\hat{\bar{k}}, \check{F}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ de la proposition 6.9.2. Reste donc les assertions concernant la cohomologie à support compact. Elles résultent dans le cas des espaces

adiques du théorème 3.1 de [**29**] pour l'espace adique associé au complété formel le long de l'ouvert U et du théorème 3.3 de [**29**] dans le cas de l'espace adique associé au complété formel le long du fermé V. Dans le cas où V est propre, l'énoncé pour l'espace analytique de Berkovich associé au complété formel le long V est une conséquence du fait que V propre implique que l'espace adique est partiellement propre, et que donc sa cohomologie à support compact coïncide avec celle de l'espace analytique associé (proposition 1.5 de [**29**]). □

Définition 6.9.5. — Soit $C \xrightarrow{(c_1,c_2)} X_1 \times X_2$ une correspondance d'espaces analytiques où c_1 et c_2 sont finis. Soient $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in \Lambda_\bullet - \mathcal{F}\mathrm{sc}_{/X_{\text{ét}}}$. On note $\mathrm{Coh}_C(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ les correspondances cohomologiques à support dans C que l'on pose étant égal à l'ensemble des systèmes compatibles de correspondances dans $\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Coh}_C((\mathcal{F}_1)_n, (\mathcal{F}_2)_n)$.

Comme précédemment, une correspondance cohomologique agit sur la cohomologie Λ-adique lorsque celle ci est bien définie par simple passage à la limite. De plus, dans le cas de la fibre générique d'un schéma formel, une correspondance spécialisée (égale par définition au système des correspondances spécialisées) sur les cycles proches analytiques rigides fournit une suite spectrale des cycles proches équivariante comme précédemment. Cela se déduit par passage à la limite projective des suites spectrales obtenues dans le cas de torsion grâce à la proposition précédente.

Remarque 6.9.6. — Soit $(c_1, c_2) : C \longrightarrow X_1 \times X_2$ une correspondance analytique où c_1 et c_2 sont étales finis. Via la dualité de Poincaré de la proposition 6.9.2, l'action d'une correspondance cohomologique Λ-adique sur la cohomologie à support compact doit être définie comme étant l'action de la correspondance duale si l'on veut que l'isomorphisme de Poincaré soit équivariant.

Application 6.9.7. — *La représentation locale fondamentale de* [**26**] *s'exprime comme le dual de Poincaré de la cohomologie ℓ-adique à support compact des espaces de Lubin-Tate.*

Désormais nous utiliserons librement des cycles évanescents ℓ-adiques sans forcément citer la proposition 6.9.4. Cette proposition contient tous les éléments nécessaires (et même plus) pour justifier le passage des coefficients de torsion aux coefficients ℓ-adiques lorsque cela sera nécessaire.

6.10. Formule des traces générale

Théorème 6.10.1. — *Soit $D \xrightarrow{(d_1,d_2)} Y_1 \times Y_2$ une correspondance sur S où D, Y_1 et Y_2 sont propres sur S.*

Soit $C \xrightarrow{(c_1,c_2)} X_1 \times X_2$ une correspondance sur η, où c_1 et c_2 sont finis.

Soit un morphisme de correspondances sur η :

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r] \arrow[d, "f'"'] & X_1 \times X_2 \arrow[d, "f_1 \times f_2"] \\ D_\eta \arrow[r] & Y_{1\eta} \times Y_{2\eta} \end{tikzcd}$$

où f_1, f_2 sont étales finis.

Soient $V_1 \subset Y_{1s}, V_2 \subset Y_{2s}$ deux fermés vérifiant $d_2^{-1}(V_2) \subset d_1^{-1}(V_1)$. Soient $U_1 = (f_1^{an})^{-1}(sp^{-1}(V_1)), U_2 = (f_2^{an})^{-1}(sp^{-1}(V_2))$ les ouverts de X_1^{an}, X_2^{an} associés. Supposons $c_2^{an-1}(U_2) \subset c_1^{an-1}(U_1)$.

Soient $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ deux $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ faisceaux lisses sur X_1, resp. X_2. Soit $u \in Coh_C(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$. Soit $v = (f_* u)_{\bar{s}} \in Coh(R\Psi_{\bar{\eta}}(f_{1*}\mathcal{F}_1), R\Psi_{\bar{\eta}}(f_{2*}\mathcal{F}_2))$ la spécialisation de l'image directe de u. Il y a alors un morphisme de suites spectrales des cycles évanescents commutant à l'action de $\mathbf{Gal}(\bar{\eta}|\eta)$:

$$\begin{tikzcd} H^p\left(V_{1\bar{s}}, R^q\Psi_{\bar{\eta}}(f_{1*}\mathcal{F}_1)\right) \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, "v_*"'] & H^{p+q}\left(U_1 \hat{\otimes} \hat{\bar{\eta}}, \bar{\mathcal{F}}_1\right) \arrow[d, "u_*^{an}"'] \\ H^p\left(V_{2\bar{s}}, R^q\Psi_{\bar{\eta}}(f_{2*}\mathcal{F}_2)\right) \arrow[r, Rightarrow] & H^{p+q}\left(U_2 \hat{\otimes} \hat{\bar{\eta}}, \bar{\mathcal{F}}_2\right) \end{tikzcd}$$

où la cohomologie ℓ-adique des ouverts rigides U_1, U_2 est définie comme étant la Poincaré duale de la cohomologie à support compact et où

$$u_*^{an} : H^i(U_1 \hat{\otimes} \hat{\bar{\eta}}, \bar{\mathcal{F}}_1) \xrightarrow{(c_1^{an})^*_{|c_2^{an-1}(U_2)}} H^i((c_2^{an})^{-1}(U_2) \hat{\otimes} \hat{\bar{\eta}}, c_1^* \bar{\mathcal{F}}_1) \xrightarrow{(c_2^{an})_*} H^i(U_2 \hat{\otimes} \hat{\bar{\eta}}, c_{2*} c_1^* \bar{\mathcal{F}}_1)$$

$$\xrightarrow{H^i(\tilde{u})} H^i(U_2 \hat{\otimes} \hat{\bar{\eta}}, \bar{\mathcal{F}}_2)$$

où $\tilde{u} : c_{2*} c_1^* \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_2$ est associé à u par adjonction.

Démonstration. — Pour $i = 1, 2$ complétons le diagramme

$$\begin{tikzcd} & X_i \arrow[d] \\ Y_i & Y_{i\eta} \arrow[l, hook'] \end{tikzcd}$$

en un diagrame

$$\begin{tikzcd} X_i^0 \arrow[d] & X_i \arrow[l, hook'] \arrow[d] \\ Y_i & Y_{i\eta} \arrow[l, hook'] \end{tikzcd}$$

où X_i^0 est un schéma de type fini sur S et X_i^0/Y_i est fini. En particulier, X_i^0 est propre sur S. Soit le diagramme :

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[d] \\ X_1^0 \times_{Y_1} D \times_{Y_2} X_2^0 & X_1 \times_{Y_{1\eta}} D_\eta \times_{Y_{2\eta}} X_2 \arrow[l, hook'] \end{tikzcd}$$

Et, comme ci dessus, soit C^0 un modèle de type fini de C sur S et fini au dessus de $X_1^0 \times_{Y_1} D \times_{Y_2} X_2^0$. Ce dernier schéma étant propre sur S, C^0 est propre sur S (cependant, et c'est la un point important qui nous a poussé à développer notre formalisme des correspondances cohomologiques dans la catégorie dérivée, on ne peut pas forcément trouver de modèle C^0 tel que C^0/X_1^0 et C^0/X_2^0 soient finis).

On a donc étendu la correspondance $C \to X_1 \times X_2$ sur η en une correspondance $C^0 \to X_1^0 \times X_2^0$ sur S. On a également étendu le morphisme de correspondances f en un morphisme de correspondances sur S. Tous les morphismes étendus sont propres.

Remarquons maintenant que l'hypothèse $c_2^{an-1}(f_2^{an-1}(U_2)) \subset c_1^{an-1}(f_1^{an-1}(U_1))$ implique, grâce à la surjectivité du morphisme de spécialisation, qu'il en est de même sur la fibre spéciale (au niveau des schémas réduits ce qui est suffisant pour nos besoins cohomologiques étales) pour les fermés V_1 et V_2 : $c_{2s}^{-1}(f_{2s}^{-1}(V_2))_{\mathrm{red}} \subset c_{1s}^{-1}(f_{1s}^{-1}(V_1))_{\mathrm{red}}$.

Le théorème résulte donc de la compatibilité des différentes fonctorialités pour les cycles évanescents démontrées dans les section précédentes. □

Nous supposerons désormais que $k(s)$ est le corps fini $\mathbb{F}_q$. Nous noterons η^{nr} le complété de l'extension maximale non ramifiée de η, $\sigma \in \mathbf{Gal}(\eta^{nr}|\eta) \simeq \mathbf{Gal}(\bar{s}|s)$ le Frobenius géométrique et $W_\eta \subset \mathbf{Gal}(\bar{\eta}|\eta)$ le groupe de Weil. Si $\tau \in W_\eta$ nous noterons $v(\tau)$ l'entier vérifiant $\tau_{|\eta^{nr}} = \sigma^{v(\tau)}$.

Soit U un espace analytique sur η^{nr}. Pour tout $\tau \in W_\eta$ il y a un isomorphisme canonique

$$\left(U \hat{\otimes}_{\eta^{nr}} \hat{\bar{\eta}}\right)^{(\tau)} \simeq U^{(\sigma^{v(\tau)})} \hat{\otimes}_{\eta^{nr}} \hat{\bar{\eta}}$$

Si U est un domaine analytique dans un espace analytique de la forme $X \hat{\otimes} \eta^{nr}$ pour un espace analytique X sur η, $U^{(\sigma^{v(\tau)})}$ est le domaine analytique de $X \hat{\otimes}_\eta \eta^{nr}$ dont les points rigides naïfs (ceux du spectre maximal) sont l'image par $\sigma^{v(\tau)}$ de ceux de U.

De l'isomorphisme ci dessus on déduit un morphisme (qui n'est pas au dessus de $\hat{\bar{\eta}}$) d'espaces analytiques pour tout τ

$$U \hat{\otimes}_{\eta^{nr}} \hat{\bar{\eta}} \xrightarrow{Id \times \tau} U^{(\sigma^{v(\tau)})} \hat{\otimes}_{\eta^{nr}} \hat{\bar{\eta}}$$

Si maintenant $\mathcal{F}$ est un faisceau sur $X_{\text{ét}}$, $(Id \times \tau)^* \bar{\mathcal{F}} \simeq \bar{\mathcal{F}}$ où $\bar{\mathcal{F}}$ désigne le pull-back de $\mathcal{F}$ à $X \hat{\otimes} \hat{\bar{\eta}}$. On en déduit pour tout τ dans W_η un isomorphisme

$$H^q\left(U^{(\sigma^{v(\tau)})} \hat{\otimes}_{\eta^{nr}} \hat{\bar{\eta}}, \bar{\mathcal{F}}\right) \xrightarrow{\tau^*} H^q\left(U \hat{\otimes}_{\eta^{nr}} \hat{\bar{\eta}}, \bar{\mathcal{F}}\right)$$

Supposons de plus qu'il existe un schéma formel $\mathfrak{Y}$ sur S, un morphisme $f : X \longrightarrow \mathfrak{Y}^{an}$ et un point fermé $y \in \mathfrak{Y}_{\bar{s}}$ tels que $U = f^{-1}(sp^{-1}(y))$. Alors, si $v(\tau) \geq 0$

$$U^{(\sigma^{v(\tau)})} = f^{-1}(sp^{-1}(Fr^{v(\tau)}(y)))$$

et on en déduit donc un isomorphisme lorsque $v(\tau) \geq 0$

$$H^q\left(f^{-1}(sp^{-1}(Fr^{v(\tau)}(y)))\hat{\otimes}_{\eta^{nr}}\hat{\bar{\eta}}, \bar{\mathcal{F}}\right) \xrightarrow{\tau^*} H^q\left(f^{-1}(sp^{-1}(y))\hat{\otimes}_{\eta^{nr}}\hat{\bar{\eta}}, \bar{\mathcal{F}}\right)$$

Théorème 6.10.2. — *Plaçons nous dans le cadre du théorème précédent lorsque $X_1 = X_2 = X$, $Y_1 = Y_2 = Y$, $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}$, $V_1 = V_2 = V$ et $U_1 = U_2 = U$. Il y a donc un diagramme au dessus de η :*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "(c_1,c_2)"] \arrow[d, "f'"'] & X \times X \arrow[d, "f\times f"] \\ D_\eta \arrow[r, "(d_{1\eta},d_{2\eta})"] & Y_\eta \times Y_\eta \end{tikzcd}$$

Supposons de plus que $d_{2\bar{s}}$ est fini. Il existe alors un entier N ne dépendant que du degré de $d_{2\bar{s}}$ tel que $\forall u \in Coh_{C_\eta}(\mathcal{F}), \forall \tau \in W_\eta\ v(\tau) \geq N$

$$Tr\left(u \times \tau; R\Gamma(X_{\bar{\eta}}, \bar{\mathcal{F}})\right) = \sum_{\substack{y \in D_{\bar{s}}(\bar{k}) \\ Fr^{v(\tau)}(d_1(y)) = d_2(y)}} Tr\left(u \times \tau; R\Gamma\left(f^{an-1}(sp^{-1}(d_2(y)))\hat{\otimes}\hat{\bar{\eta}}, \bar{\mathcal{F}}\right)\right)$$

et

$$Tr\left(u \times \tau; R\Gamma(U\hat{\otimes}\hat{\bar{\eta}}, \bar{\mathcal{F}}^{an})\right) = \sum_{\substack{y \in D_{\bar{s}}(\bar{k}) \\ d_2(y) \in V \\ Fr^{v(\tau)}(d_1(y)) = d_2(y)}} Tr\left(u \times \tau; R\Gamma\left(f^{an-1}(sp^{-1}(d_2(y)))\hat{\otimes}\hat{\bar{\eta}}, \bar{\mathcal{F}}\right)\right)$$

où l'action de $u \times \tau$ dans le membre de droite est le composé des morphismes

$$R\Gamma(f^{an-1}(sp^{-1}(\underbrace{Fr^{v(\tau)}d_1(y)}_{d_2(y)}))\hat{\otimes}\hat{\bar{\eta}}, \bar{\mathcal{F}}) \xrightarrow{\tau^*} R\Gamma\left(f^{an-1}(sp^{-1}(d_1(y)))\hat{\otimes}\hat{\bar{\eta}}, \bar{\mathcal{F}}\right) \xrightarrow{c_1^*}$$

$$R\Gamma\left(f'^{an-1}(sp^{-1}(y))\hat{\otimes}\hat{\bar{\eta}}, \bar{\mathcal{F}}\right) \xrightarrow{c_{2*}} R\Gamma\left(f^{an-1}(sp^{-1}(d_2(y)))\hat{\otimes}\hat{\bar{\eta}}, \bar{\mathcal{F}}\right)$$

Démonstration. — Les cycles évanescents $\mathrm{R}\Psi_{\bar{\eta}}(f_*\mathcal{F})$ sont munis d'une structure de faisceau de Weil et donc d'une correspondance de Frobenius associée à τ :

$$Fr^{v(\tau)*}\mathrm{R}\Psi(f_*\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \tau^*\mathrm{R}\Psi(f_*\mathcal{F}) \longrightarrow \mathrm{R}\Psi(f_*\mathcal{F})$$

Cette correspondance commute aux correspondances cohomologiques spécialisées puisque ces dernières sont définies sur s. On peut donc appliquer le théorème de Fujiwara (6.2.1) à la correspondance cohomologique spécialisée composée avec la correspondance de Frobenius ci dessus associée à τ.

Plus précisément, dans le premier cas on applique Fujiwara à tout X_s. Dans le second cas, d'après le théorème précédent, la trace sur la cohomologie de U est égale à celle sur la cohomologie des cycles évanescents sur V, on applique donc le théorème de Fujiwara à V.

La fibre des cycles évanescents en un point fixe s'identifie à la cohomologie du tube au dessus de ce point fermé. Le calcul des termes locaux naïfs s'effectue alors en utilisant en utilisant les deux fonctorialités de l'isomorphisme de comparaison de Berkovich 6.4.2 et 6.4.4 ainsi que la compatibilité de cet isomorphisme à l'action de Galois. □

6.11. Modèles des variétés de Shimura et des espaces de Rapoport-Zink en niveau parahorique

Nous avons introduit dans le premier chapitre des modèles entiers de nos espaces en niveau compact hyperspécial. Nous aurons néanmoins besoin, pour des raisons techniques liées à la théorie des types, des modèles définis dans [**51**] en niveau parahorique en p. Ces modèles ne nous servirons que comme intermédiaires de démonstration. Nous ne rappellerons donc pas leur définition. Nous reprenons les notations globales de la première partie. $\mathcal{D}$ désignera donc une donnée de type P.E.L. non ramifiée.

6.11.1. Sous-groupes parahoriques et leurs normalisateurs. — Soit $\mathcal{L}$ une multichaîne polarisée de réseaux dans $V_{\mathbb{Q}_p}$ ([**51**] définition 3.14).

Notons

$$K_{\mathcal{L}} = \{g \in G(\mathbb{Q}_p) \mid \forall \Lambda \in \mathcal{L}\ g.\Lambda = \Lambda\}$$

le sous-groupe parahorique associé. Le normalisateur dans $G(\mathbb{Q}_p)$ de $K_{\mathcal{L}}$ est alors défini par

$$N_{\mathcal{L}} = \{g \in G(\mathbb{Q}_p) \mid \forall \Lambda \in \mathcal{L}\ g.\Lambda \in \mathcal{L}\}$$

Si $\mathcal{L} = (\Lambda_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ est uniforme au sens où $i \mapsto [\Lambda_i : \Lambda_{i+1}]$ est constant alors

$$N_{\mathcal{L}} = \{g \in G(\mathbb{Q}_p) \mid \exists j \in \mathbb{Z}\ g.\Lambda_i = \Lambda_{i+j}\}$$

Nous n'aurons besoin dans la suite que de ce cas là et nous supposerons donc que toutes nos multichaînes sont uniformes.

Exemple 6.11.1. — Plaçons nous dans le cas (A) lorsque $J = \emptyset$. Par équivalence de Morita, la donnée d'une telle multichaîne $\mathcal{L}$ est alors équivalente à la donnée pour tout i dans I d'une multichaîne $\mathcal{L}_i$ dans $F_{v_i}^n$. Pour un i fixé la donnée d'une telle multichaîne est alors équivalente (modulo l'action de $\mathrm{GL}_n(F_{v_i})$) à la donnée d'un entier d divisant n. Une chaîne associée à d est alors de la forme

$$\cdots \subset \underbrace{< e_1, \ldots, e_n >}_{\Lambda_0} \subset \cdots \subset \underbrace{< \varpi_{F_{v_i}}^{-1} e_1, \ldots, \varpi_{F_{v_i}}^{-1} e_{kd}, e_{kd+1}, \ldots, e_n >}_{\Lambda_k} \subset \cdots \subset \varpi_{F_{v_i}}^{-1} \Lambda_0 \subset \ldots$$

et le groupe $K_{\mathcal{L}}$ se décrit ainsi par blocs de taille $d \times d$:

$$K_{\mathcal{L}} = \left\{ \begin{pmatrix} \mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_{F_{v_i}}) & \ldots & M_d(\mathcal{O}_{F_{v_i}}) \\ \vdots & \ddots & \\ \varpi_{F_{v_i}} M_d(\mathcal{O}_{F_{v_i}}) & \ldots & \mathrm{GL}_d(\mathcal{O}_{F_{v_i}}) \end{pmatrix} \right\}$$

quant à $N_{\mathcal{L}}$, c'est le groupe engendré par $K_{\mathcal{L}}$ et l'élément suivant

$$\begin{pmatrix} 0 & & & \varpi_{F_{v_i}}^{-1} I_d \\ I_d & \ddots & & 0 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & I_d & 0 \end{pmatrix}$$

6.11.2. Variétés de Shimura. — Dans [**51**], chapitre 6, il est défini des modèles entiers des variétés de Shimura de type P.E.L. que nous considérons sur E_ν en niveau parahorique, $\mathrm{Sh}_{K_{\mathcal{L}}K^p}$. Nous noterons $S_{K_{\mathcal{L}}K^p}$ ces modèles entiers. Lorsque K^p varie ils forment une tour de variétés quasiprojectives sur $\boldsymbol{Spec}(\mathcal{O}_{E_\nu})$ munie d'une action de $G(\mathbf{A}_f^p)$.

Exemple 6.11.2. — Soit Λ_0 un réseau autodual dans $V_{\mathbb{Q}_p}$ de stabilisateur C_0 dans $G(\mathbb{Q}_p)$. Supposons que $\mathcal{L}$ soit la plus petite multichaîne contenant Λ_0. Alors, $K_{\mathcal{L}} = C_0$ est compact hyperspécial et $S_{K_{\mathcal{L}}K^p}$ est le modèle entier défini précédemment en niveau hyperspécial.

Si $\mathcal{L}$ contient un réseau autodual Λ_0 alors, $K_{\mathcal{L}} \subset C_0$ et il y a un morphisme de tours :

$$(S_{K_{\mathcal{L}}K^p})_{K^p} \longrightarrow (S_{C_0K^p})_{K^p}$$

étendant celui défini sur la fibre générique.

Remarque 6.11.3. — En général ce morphisme n'est pas fini !

On ne supposera pas que $\mathcal{L}$ contient un réseau autodual, ce qui nous permettra, par exemple, d'inclure parmi les $K_{\mathcal{L}}$ des sous-groupes compacts maximaux des groupes de similitudes unitaires non hyperspéciaux.

6.11.3. Espaces de Rapoport-Zink. — A $b \in B(G_{\mathbb{Q}_p}, \mu_{\overline{\mathbb{Q}_p}})$ est associé un espace de Rapoport-Zink

$$\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}}(\mathcal{D}_{\mathbb{Q}_p}, b)/\boldsymbol{Spf}(\mathcal{O}_{Eb_\nu})$$

muni d'une action de J_b ([**51**] définition 3.21). Comme précédemment, cet espace se scinde en produit d'espaces de Rapoport-Zink associés à des données simples.

Si $K_p \subset K_{\mathcal{L}}$, il y a une tour d'espaces rigides $\breve{\mathcal{M}}_{K_p}$ au dessus de $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}}^{an} = \breve{\mathcal{M}}_{K_{\mathcal{L}}}$ qui coïncide avec celle définie auparavant lorsque $K_p \subset K_{\mathcal{L}} \cap C_0$.

6.11.4. Extension de l'action du normalisateur d'un parahorique aux modèles entiers. —

6.11.4.1. Variétés de Shimura. — L'action de $G(\mathbb{Q}_p)$ sur la tour $(\mathrm{Sh}_K)_K$ permet de définir un morphisme de groupes trivial sur $K_{\mathcal{L}}$

$$N_{\mathcal{L}} \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathrm{Sh}_{K_{\mathcal{L}}K^p})$$

Le but de cette section est d'étendre ces automorphismes aux modèles entiers ci dessus, c'est à dire définir un morphisme

$$N_{\mathcal{L}} \longrightarrow \mathrm{Aut}(S_{K_{\mathcal{L}}K^p})$$

redonnant celui d'avant sur la fibre générique et commutant à l'action de $G(\mathbf{A}_f^p)$.

Soit donc $g \in N_{\mathcal{L}}$. Soit T un schéma sur $\boldsymbol{Spec}(\mathcal{O}_{E_\nu})$. Un élément de $S_{K_{\mathcal{L}}K^p}(T)$ est donné par un triplet $(A, \lambda, \overline{\eta^p})$ où A est une $\mathcal{L}$-multichaîne de variétés abéliennes sur T, λ une polarisation de cette multichaîne et η^p une structure de niveau hors p, le tout vérifiant certaines conditions ([**51**] chapitre 6).

Posons $g.(A,\lambda,\bar{\eta}^p) = (A',\lambda',\bar{\eta}^p) \in S_{K_{\mathcal{L}}K^p}(T)$ où avec les notations du chapitre 6 de [**51**] :

$$\forall \Lambda \in \mathcal{L} \quad A'_\Lambda = A_{g.\Lambda} \text{ muni de son action de } \mathcal{O}_B$$

$$\forall \Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathcal{L} \;\; \Lambda_1 \subset \Lambda_2 \quad \rho'_{\Lambda_1,\Lambda_2} = \rho_{g.\Lambda_1, g.\Lambda_2}$$

Posons pour tout a dans $B^\times$ normalisant l'ordre $\mathcal{O}_B \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$

$$\theta'_a = \theta_a$$

Définissons λ'. On doit définir pour tout $\Lambda \in \mathcal{L}$ une quasi-isogénie

$$\lambda'_\Lambda : A'_\Lambda \longrightarrow \left(A'_{\Lambda^\vee}\right)^\vee$$

telle que

$$\left(\rho'_{\Lambda^\vee,\Lambda}\right)^\vee \circ \lambda'_\Lambda : A'_\Lambda \longrightarrow \left(A'_\Lambda\right)^\vee$$

soit une polarisation de A'_Λ. Posons λ'_Λ comme étant égal à la quasi-isogénie composée

$$A'_\Lambda = A_{g.\Lambda} \xrightarrow{\lambda_{g.\Lambda}} \left(A_{(g.\Lambda)^\vee}\right)^\vee \xrightarrow{\left(\rho_{(g.\Lambda)^\vee, g.\Lambda^\vee}\right)^\vee} \left(A_{g.\Lambda^\vee}\right)^\vee = \left(A'_{\Lambda^\vee}\right)^\vee$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\left(\rho'_{\Lambda^\vee,\Lambda}\right)^\vee \circ \lambda'_\Lambda &= \left(\rho_{g.\Lambda^\vee, g.\Lambda}\right)^\vee \circ \left(\rho_{(g.\Lambda)^\vee, g.\Lambda^\vee}\right)^\vee \circ \lambda_{g.\Lambda} \\
&= \left(\underbrace{\rho_{(g.\Lambda)^\vee, g.\Lambda^\vee} \circ \rho_{g.\Lambda^\vee, g.\Lambda}}_{\rho_{(g.\Lambda)^\vee, g.\Lambda}}\right)^\vee \circ \lambda_{g.\Lambda}
\end{aligned}$$

qui est donc bien une polarisation. Il reste à vérifier que $\lambda' : A \longrightarrow A'$ est bien un morphisme de multichaînes, mais cela ne pose pas de problème.

Le morphisme ainsi défini vérifie bien les propriétés voulues.

6.11.4.2. Espaces de Rapoport-Zink. — Posons $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}} = \breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}}(\mathcal{D}_{\mathbb{Q}_p}, b)$. On définit comme ci dessus pour les variétés de Shimura un morphisme

$$N_{\mathcal{L}} \longrightarrow \mathrm{Aut}(\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}})$$

trivial sur $K_{\mathcal{L}}$, commutant à l'action de J_b et à la donnée de descente de Rapoport-Zink, et étendant le morphisme défini sur la fibre générique.

Sa définition est similaire à celle ci dessus en remplaçant variétés abéliennes par groupes p-divisibles.

6.11.5. Uniformisation. — Soit ϕ une classe d'isogénie comme dans la première partie. Comme dans la première partie, il y a des isomorphismes de tours lorsque K^p varie ([**51**] théorème 6.23)

$$I^\phi(\mathbb{Q})\backslash \left(\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}} \times G(\mathbf{A}_f^p)/K^p\right) \xrightarrow{\sim} (S_{K_{\mathcal{L}}K^p} \otimes \mathcal{O}_{\breve{E}_\nu})^\wedge_{/\widetilde{S}(\phi)}$$

compatibles à la donnée de descente de Rapoport-Zink et commutant à l'action de $N_{\mathcal{L}}$ définie ci dessus sur les deux membres.

6.12. La formule des traces pour la cohomologie des strates d'une variété de Shimura de type P.E.L.

Soit $\mathcal{D}$ une donnée globale de type P.E.L. non ramifiée en p. Fixons une multichaîne polarisée $\mathcal{L}$ dans $V_{\mathbb{Q}_p}$. Soient $K_{\mathcal{L}}$ le groupe parahorique associé et $N_{\mathcal{L}}$ son normalisateur.

6.12.1. Action de Galois sur les domaines analytiques de $\breve{\mathcal{M}}_{K_p}$. — Soit $K_p \subset K_{\mathcal{L}}$ un sous-groupe compact ouvert. Rappelons que les espaces analytiques $\breve{\mathcal{M}}_{K_p}$ sont définis sur $\breve{E} = \widehat{\mathbb{Q}_p^{nr}}$. Soit

$$\alpha : \breve{\mathcal{M}}_{K_p} \longrightarrow \breve{\mathcal{M}}_{K_p}^{(\sigma)}$$

la donnée de descente de Rapoport-Zink. Soit $U \subset \breve{\mathcal{M}}_{K_p}$ un domaine analytique. $\alpha(U) \subset \breve{\mathcal{M}}_{K_p}^{(\sigma)}$ est alors un domaine analytique et si $pr : \breve{\mathcal{M}}_{K_p}^{(\sigma)} \to \breve{\mathcal{M}}_{K_p}$ désigne la projection, $pr(\alpha(U))$ est un domaine analytique dans $\breve{\mathcal{M}}_{K_p}$ que nous noterons $U^{(\alpha)}$. Il y a alors un morphisme (qui n'est pas défini au dessus de $\breve{E}$)

$$U \longrightarrow U^{(\alpha)}$$

D'où un morphisme $\forall \tau \in W_E \; v(\tau) \geq 0$

$$H^q\left(U^{(\alpha^{v(\tau)})}\hat{\otimes}\mathbb{C}_p, \mathbb{Q}_\ell\right) \xrightarrow{\tau^*} H^q\left(U\hat{\otimes}\mathbb{C}_p, \mathbb{Q}_\ell\right)$$

(lorsque la cohomologie ℓ-adique de U est bien définie ce qui est par exemple le cas si U est le tube au dessus d'un sous-schéma localement fermé quasicompact de $\overline{\mathcal{M}}$, grâce à 3.2.4 de la première partie et 6.9.4).

6.12.2. Tubes et leur cohomologie. — $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}}(\bar{k})$ est muni d'une action d'un Frobenius grâce à α. Lorsque $K_{\mathcal{L}} = C_0$ cette action coïncide avec celle décrite dans [**47**] lorsqu'on voit $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}}(\bar{k})$ comme sous-ensemble de l'immeuble de G sur L. Nous noterons

$$\Phi : \breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}}(\bar{k}) \longrightarrow \breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}}(\bar{k})$$

ce Frobenius.

Ainsi, avec les notations précédentes, si sp désigne le morphisme de spécialisation associé à $\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}}$

$$sp^{-1}(\Phi y) = sp^{-1}(y)^{(\alpha)}$$

Les morphismes de changement de niveau commutant à la donnée de descente on en déduit que

$$\Pi_{K_p,K_{\mathcal{L}}}^{-1}\left(sp^{-1}(\Phi.y)\right) = \Pi_{K_p,K_{\mathcal{L}}}^{-1}\left(sp^{-1}(y)\right)^{(\alpha)}$$

Définition 6.12.1. — $\forall y \in \breve{\mathcal{M}}(\bar{k}) \; \forall K_p \subset K_{\mathcal{L}}$,

$$\breve{\mathcal{M}}_{K_p}(y) = \Pi_{K_p,K_{\mathcal{L}}}^{-1}\left(sp^{-1}(y)\right)$$

un ouvert analytique de bord vide dans $\breve{\mathcal{M}}_{K_p}$ (qui est étale fini au dessus du disque ouvert $\breve{\mathcal{M}}_{C_0}(y)$).

$H^q(\breve{\mathcal{M}}_{K_p}(y)\hat{\otimes}\mathbb{C}_p, \mathbb{Q}_\ell)$ est alors défini comme étant le Poincaré dual de la cohomologie à support compact. C'est un $\mathbb{Q}_\ell$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une action lisse de $Stab_{J_b}(y) \times I_{E_\nu}$, $K_{\mathcal{L}}$ agissant quant à lui sur la limite lorsque K_p varie dans $K_{\mathcal{L}}$.

Soit donc maintenant $f_p \in \mathcal{H}(G(\mathbb{Q}_p))$ de la forme $f'_p * \delta_z$ où $supp(f'_p) \subset K_{\mathcal{L}}$ et $z \in N_{\mathcal{L}}$, $\tau \in W_{E_\nu}$ vérifiant $v(\tau) \geq 0$ et $\gamma \in J_b$. Supposons que $y \in \breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}}(\bar{k})$ vérifie

$$z\gamma\Phi^{v(\tau)}.y = y$$

Il y a alors des morphismes bien défini pour K_p variant

$$H^\bullet(\breve{\mathcal{M}}_{K_p}(y), \mathbb{Q}_\ell) \xrightarrow{z^* \circ \gamma^* \circ \tau^*} H^\bullet(\breve{\mathcal{M}}_{K_p}(y), \mathbb{Q}_\ell)$$

qui composés avec l'action de f'_p permettent de définir

$$\mathrm{Tr}\left(f_p \times \gamma \times \tau; [H^\bullet(\breve{\mathcal{M}}(y), \mathbb{Q}_\ell)]\right) \in \mathbb{Q}_\ell$$

6.12.3. Le théorème. —

Définition 6.12.2. — Soit $b \in B(G_{\mathbb{Q}_p}, \mu_{\overline{\mathbb{Q}_p}})$. Pour $K = K_pK^p$ avec $K_p \subset C_0$, notons $\mathrm{Sh}_K^{rig,\geq b} \subset \mathrm{Sh}_K^{rig}$ le tube au sens des espaces adiques au dessus du fermé

$$\bigcup_{\substack{b' \in B(G_{\mathbb{Q}_p}, \mu_{\overline{\mathbb{Q}_p}}) \\ \mathrm{Newton}(b') \geq \mathrm{Newton}(b)}} \overline{S}(b')$$

lorsque $K_p = C_0$, et son image réciproque par les morphismes de changement de niveau sinon.

Définition 6.12.3. — Nous noterons

$$[H^\bullet(\mathrm{Sh}^{rig,\geq b}, \mathcal{L}_\rho)] = \sum_i (-1)^i [\varinjlim_K H^i(\mathrm{Sh}_K^{rig,\geq b}, \mathcal{L}_\rho)] \in \mathrm{Groth}(G(\mathbf{A}_f) \times W_{E_\nu})$$

qui est bien défini d'après la proposition 6.9.4 et coïncide avec la même définition en remplaçant adique par analytique lorsque S_K est propre ou bien lorsque b est la classe basique.

Il résulte alors de la proposition 6.9.4 que

Proposition 6.12.4. — *Si $b = b_0$ la classe basique, il y a un isomorphisme canonique*

$$H^\bullet(Sh_K^{rig,\geq b_0}, \mathcal{L}_\rho) \xrightarrow{\sim} H^\bullet(Sh^{an}(b_0), \mathcal{L}_\rho)$$

où le membre de gauche est celui définit ci dessus et celui de droite celui défini formellement dans la seconde partie comme dual de Poincaré algébrique de la cohomologie à support compact du tube au dessus du fermé propre $\overline{S}(b_0)$.

Théorème 6.12.5. — *Supposons les variétés de Shimura S_K propres sur $\mathcal{O}_{E_\nu}$. Soit $b \in B(G, \mu)$. $f_p \in \mathcal{H}(G(\mathbb{Q}_p))$ de la forme $f'_p * \delta_z$ où $supp(f'_p) \subset K_{\mathcal{L}}$ et $z \in N_{\mathcal{L}}$. Soit $\widetilde{K} \subset G(\mathbf{A}_f^p)$ un compact ouvert. Il existe alors un $N \in \mathbb{N}$ tel que*

$$\forall f^p \in \mathcal{H}(G(\mathbf{A}_f^p)) \;\; supp(f^p) \subset \widetilde{K}, \; \forall \tau \in W_E \;\; v(\tau) \geq N$$

$$Tr\Big(f_p \otimes f^p \times \tau; [H^\bullet(Sh^{rig,\geq b}, \mathcal{L}_\rho)]\Big) = \sum_{\substack{\phi \\ Newt(b(\phi)) \geq Newt(b)}} \sum_{\{\gamma\} \in \{I^\phi(\mathbb{Q})\}} \sum_{[y] \in I^\phi_\gamma(\mathbb{Q}) \backslash Fix(z \times \gamma \times \Phi^{v(\tau)}; \check{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}}(\bar{k}))}$$

$$vol\Big(I^\phi_\gamma(\mathbb{Q})_y \backslash I^\phi_\gamma(\mathbf{A}^p_f)\Big) \ Tr\rho(\gamma) \ \ Tr\Big(f_p \times \gamma \times \tau \ ; \ [H^\bullet(\check{\mathcal{M}}(y), \mathbb{Q}_\ell)]\Big) \ \mathcal{O}_\gamma(f^p)$$

où $I^\phi_\gamma(\mathbb{Q})_y = Stab_{I^\phi_\gamma(\mathbb{Q})}(y)$.

Démonstration. — Toute fonction $f^p \in \mathcal{H}(G(\mathbf{A}_f))$ telle que $\mathrm{supp}(f^p) \subset \widetilde{K}$ se décompose en combinaison linéaire de fonctions caractéristiques d'ensembles de la forme $K^p g^p K^p$ où K^p est un sous-groupe compact ouvert et où $K^p g^p K^p \subset \widetilde{K}$. Quitte à raffiner une telle décomposition on peut de plus supposer les K^p suffisamment petit. On peut donc supposer $f^p = 1_{K^p g^p K^p}$ avec K^p suffisamment petit. On peut également supposer que $f'_p = 1_{K_p g_p K_p}$ où $K_p \subset K_{\mathcal{L}}$ et $g_p \in K_{\mathcal{L}}$.

Considérons le diagramme suivant de correspondances de Hecke :

$$\begin{tikzcd}
 & Sh_{g_p^{-1} K_p g_p \ (g^p)^{-1} K^p g^p} \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\mathrm{Sh}_{K_p K^p} \arrow[d] & (S_{K_{\mathcal{L}} \ (g^p)^{-1} K^p g^p})_\eta \arrow[dl] \arrow[dr] & \mathrm{Sh}_{K_p K^p} \arrow[d] \\
(S_{K_{\mathcal{L}} K^p})_\eta & & (S_{K_{\mathcal{L}} K^p})_\eta
\end{tikzcd}$$

où la correspondance du bas est définie sur $\mathcal{O}_{E_\nu}$. Tordons ces correspondances par l'isomorphisme associé à z. Et appliquons donc le théorème 6.10.2 à ce diagramme.

Mais pour obtenir l'énoncé annoncé il faut tout d'abord remarquer la chose suivante : lorsque K^p diminue et g^p est tel que $K^p g^p K^p \subset \widetilde{K}$ le degré des correspondances de Hecke associées $[K^p : K^p \cap g^p K^p g^{p-1}]$ ne reste pas borné. On ne peut donc pas appliquer directement le théorème de Fujiwara si l'on veut obtenir la borne uniforme $v(\tau) \geq N$ annoncée lorsque $\mathrm{supp}(f^p) \subset \widetilde{K}$. Néanmoins, fixons un sous-groupe compact ouvert suffisamment petit K' tel que $K'.\widetilde{K}.K' = \widetilde{K}$ et restreignons nous aux K^p contenus dans K'. Pour un tel K^p et g^p tel que $K^p g^p K^p \subset \widetilde{K}$, il y a un morphisme de correspondances de Hecke sur k

$$\begin{tikzcd}
\overline{S}_{K^p \cap g^p K^p g^{p-1}} \arrow[r] \arrow[d] & \overline{S}_{K^p} \times \overline{S}_{K^p} \arrow[d] \\
\overline{S}_{K' \cap g^p K' g^{p-1}} \arrow[r] & \overline{S}_{K'} \times \overline{S}_{K'}
\end{tikzcd}$$

Et on peut appliquer le lemme 6.1.5 à ces correspondances étendues à $\bar{k}$ puis tordues par Frobenius. Maintenant, le degré de la correspondance du bas est donné par $[K' : K' \cap g^p K' g^{p-1}]$. Or, $K' \backslash \widetilde{K} / K'$ est fini et $g^p \in \widetilde{K}$. On en déduit que ce degré reste

borné. Et on peut donc appliquer le théorème de Fujiwara sous la forme du théorème 6.10.2 uniformément lorsque $\mathrm{supp}(f^p)$ reste dans $\widetilde{K}$.

Pour tout $b' \in B(G_{\mathbb{Q}_p}, \mu_{\overline{\mathbb{Q}_p}})$, $\overline{S}(b')(\bar{k})$ est une union disjointe selon les classes d'isogénie ϕ de sous-ensembles $\widetilde{S}(\phi)(\bar{k})$ stables par les correspondances de Hecke. Les points fixes de $Fr^{v(\tau)} \times \mathrm{Hecke}(K^p g^p K^p)$ sont donc une union disjointe de points fixes associés aux différentes de ϕ, d'où la première somme dans la formule annoncée.

De plus,

$$\widetilde{S}(\phi)(\bar{k}) \simeq I^{\phi}(\mathbb{Q})\backslash \left(\breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}}(\bar{k}) \times G(\mathbf{A}_f^p)/K^p\right)$$

où Fr agit via $[\Phi \times Id]$, les correspondances de Hecke de façon usuelle et z via $[z \times Id]$. Appliquant le lemme 5.3 de [**47**] on obtient

$$\mathrm{Fix}\left(Fr^{v(\tau)} \times K^p g^p K^p \times z; \widetilde{S}(\phi)(\bar{k})\right)$$

$$= \coprod_{\{\gamma\} \in \{I^{\phi}(\mathbb{Q})\}} I_{\gamma}^{\phi}(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{Fix}\left(\Phi^{v(\tau)} \times z \times \gamma; \breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}}(\bar{k})\right) \times \mathrm{Fix}\left(\gamma \times K^p g^p K^p\right)$$

Fibrons cet ensemble de points fixes par les éléments de

$$I_{\gamma}^{\phi}(\mathbb{Q})\backslash \mathrm{Fix}\left(\Phi^{v(\tau)} \times z \times \gamma; \breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}}(\bar{k})\right)$$

Le cardinal de la fibre associée à la classe de y est

$$\mathrm{vol}\left(I_{\gamma}^{\phi}(\mathbb{Q})_y \backslash I_{\gamma}^{\phi}(\mathbf{A}_f^p)\right) \quad \mathcal{O}_{\gamma}(f^p)$$

De plus, en tout point β de la fibre en $[y]$,

$$\widehat{\overline{S}}_{/\beta} \simeq \breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}/y}^{\widehat{}}$$

Et les revêtements rigides associés sont donnés par l'uniformisation rigide des variétés de Shimura. On en déduit que le terme local associé dans le théorème 6.10.2 en un tel point β est

$$\mathrm{Tr}\left(f_p \times \gamma \times \tau \ ; \ [H^{\bullet}(\breve{\mathcal{M}}(y), \mathbb{Q}_{\ell})]\right) \ \mathrm{Tr}\rho(\gamma)$$

où le terme $\mathrm{Tr}\rho(\gamma)$ provient du fait que $\mathcal{L}_{\rho}^{an}$ restreint aux tubes ci dessus est le faisceau constant $\underline{V_{\rho}}$. □

Remarque 6.12.6. — Dans la formule précédente, lorsque $\widetilde{K}$,$v(\tau)$ et z sont fixés, indépendamment de f^p le nombre de ϕ et de classes de conjugaison $\{\gamma\}$ contribuant de façon non nulle est fini. Pour le voir, posons $f^p = 1_{\widetilde{K}}$. Ecrivons $\widetilde{K}$ comme une union disjointe d'un nombre fini de classes doubles

$$\widetilde{K} = \coprod_{a \in A} K^p g_a K^p$$

pour un sous groupe compact ouvert K^p de $G(\mathbf{A}_f^p)$. Appliquons la méthode de la démonstration à chacune des correspondances associée à ces doubles classes pour compter le nombre de points fixes des correspondances associées (pas la trace des correspondances cohomologiques). On obtient une formule comme dans la démonstration du théorème,

sans les traces des correspondances cohomologiques. La finitude du nombre de points fixes implique alors qu'il existe un nombre fini de $(\phi, \{\gamma\})$ tels que

$$\mathrm{Fix}\left(\Phi^{v(\tau)} \times z \times \gamma; \breve{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}}(\bar{k})\right) \neq \emptyset$$

et $\mathcal{O}_\gamma(1_{\widetilde{K}}) \neq 0$. Ce dernier point étant équivalent à dire que la classe de $G(\mathbf{A}_f^p)$ conjugaison de γ rencontre le compact $\widetilde{K}$. L'assertion s'en déduit.

CHAPITRE 7

FORMULE DE LEFSCHETZ SUR LA FIBRE GÉNÉRIQUE

Dans ce chapitre, nous redémontrons un cas particulier très simple de la formule d'Arthur pour la trace des correspondances Hecke sur la cohomologie d'intersection des variétés de Shimura, telle qu'elle est réinterprétée topologiquement dans [**21**]. En faisant une hypothèse simple (la correspondance de Hecke est à support dans les éléments réguliers en une place), on s'aperçoit que tous les points fixes sont des points C.M.. Si l'on se restreint aux variétés de Shimura de type P.E.L. considérées dans la première section, nous montrons (7.3.2) que si un tel point fixe se spécialise sur la strate indexée par un $b \in B(G_{\mathbb{Q}_p}, \mu_{\overline{\mathbb{Q}_p}})$ alors la classe de conjugaison γ dans $G(\mathbb{Q})$ associée à ce point fixe est conjuguée dans $G(\mathbb{Q}_p)$ à un élément du centralisateur du morphisme des pentes (un sous-groupe de Levi de $G(\mathbb{Q}_p)$). En particulier, si γ ne se spécialise pas sur la strate basique, γ n'est pas elliptique. Bien que nous n'utiliserons pas ce fait par la suite nous avons inclus le théorème 7.3.2 car il fournit une motivation pour l'énoncé "la cohomologie des strates non basiques est induite en p" (théorème 9.0.2). En effet, si l'on disposait d'une formule des traces rigides pour la trace d'un opérateur de Hecke sur la cohomologie à support compact du tube rigide sur la strate basique faisant intervenir une somme sur des points fixes naïfs + des termes au bord, cela montrerait que la distribution somme sur les points fixes naïfs associée aux strates non basiques est à support dans les éléments non elliptiques.

7.1. Généralités sur les points fixes sur la fibre générique

Soit $(\mathrm{Sh}_K)_{K \subset G(\mathbf{A}_f)}$ une variété de Shimura associée à une donnée de Shimura (G, X). La variété algébrique Sh_K est définie sur le corps reflex associé E et les correspondances de Hecke également. La correspondance associée à KgK où $g \in G(\mathbf{A}_f)$ et K est un sous-groupe compact ouvert de $G(\mathbf{A}_f)$ est :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Sh}_{gKg^{-1}\cap K} \arrow[r, "g"] \arrow[dl, "\Pi"'] & \mathrm{Sh}_{K\cap g^{-1}Kg} \arrow[dr, "\Pi"] & \\
\mathrm{Sh}_K & & & \mathrm{Sh}_K
\end{tikzcd}$$

Lemme 7.1.1. — *Toute fonction $f \in \mathcal{H}(G(\mathbf{A}_f))$ est combinaison linéaire de fonctions caractéristiques 1_{KgK} telles que la correspondance de Hecke associée soit un cycle dans $Sh_K \times Sh_K$:*

$$Sh_{K \cap gKg^{-1}} \hookrightarrow Sh_K \times Sh_K$$

Démonstration. — Si K_1, K_2 sont deux sous-groupes compacts ouverts de $G(\mathbf{A}_f)$ contenus dans un même sous-groupe compact ouvert suffisamment petit alors

$$\mathrm{Sh}_{K_1 \cap K_2} \hookrightarrow \mathrm{Sh}_{K_1} \times \mathrm{Sh}_{K_2}$$

Il suffit donc de montrer que f est combinaison linéaire de fonctions 1_{KgK} où K et gKg^{-1} sont suffisamment petits. Or, f est combinaison linéaire de fonctions 1_{KgK} avec K aussi petit que l'on veut et $KgK \subset \mathrm{supp}(f)$ ($\Rightarrow g \in \mathrm{supp}(f)$). $\mathrm{supp}(f)$ étant compact, lorsque K "tend" $\{1\}$, uniformément pour $g \in \mathrm{supp}(f)$, gKg^{-1} "tend" vers $\{1\}$. □

Étant donné que nous nous intéressons à la trace d'une telle fonction f dans la cohomologie de variétés de Shimura, ce lemme justifie que nous ne nous restreignions qu'à de telles correspondances de Hecke.

Hypothèse 7.1.2. — *Nous supposerons dans ce chapitre que les correspondances de Hecke sont toutes définies par des cycles.*

De telles correspondances sont donc définies par un cycle lisse de $\mathrm{Sh}_K \times \mathrm{Sh}_K$.

Si de plus ρ est donné, la double classe KgK définit une correspondance cohomologique sur $\mathcal{L}_\rho$ à support dans ce cycle :

$$c_2^! \mathcal{L}_\rho = g^* \Pi^* \mathcal{L}_\rho = g^* \mathcal{L}_\rho \longrightarrow \mathcal{L}_\rho = c_1^* \mathcal{L}_\rho$$

Ceci définit des morphismes d'algèbres compatibles pour K variant :

$$\mathcal{H}(G, K) \longrightarrow \mathrm{Coh}(\mathcal{L}_\rho, \mathcal{L}_\rho)$$

Et si

$$\begin{array}{rcl} \pi : \mathcal{H}(G, K) & \longrightarrow & \mathrm{End}(H^\bullet(\mathrm{Sh}_K, \mathcal{L}_\rho)) \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_{G(\mathbf{A}_f)} f(g)\rho(g)dg \end{array}$$

où ρ est l'action de $G(\mathbf{A}_f)$ sur la cohomologie, alors le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}(G, K) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathrm{Coh}(\mathcal{L}_\rho, \mathcal{L}_\rho) \arrow[dl] \\ & \mathrm{End}(H^\bullet(\mathrm{Sh}_K, \mathcal{L}_\rho)) & \end{tikzcd}$$

où l'application verticale de droite est définie par l'action d'une correspondance cohomologique sur la cohomologie (6.1).

Nous allons tout d'abord nous intéresser à la sous-variété des points fixes de cette correspondance :

$$\mathrm{Fix}(KgK) = (\Delta \cap \mathrm{Sh}_{K \cap gKg^{-1}})_{\mathrm{red}}$$

où Δ désigne la diagonale de Sh_K. Pour cela, nous allons décrire ses points complexes :

$$\mathrm{Fix}(KgK)(\mathbb{C}) = \Delta(\mathbb{C}) \cap \mathrm{Sh}_{K\cap gKg^{-1}}(\mathbb{C}) = \{x \in \mathrm{Sh}_{K\cap gKg^{-1}}(\mathbb{C}) \mid \Pi(x) = \Pi(g.x)\}$$

Utilisons l'uniformisation complexe :

$$\mathrm{Sh}_K(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})\backslash(X \times G(\mathbf{A}_f)/K)$$

Dans laquelle $G(\mathbb{Q})$ opère librement sur $X \times G(\mathbf{A}_f)/K$ (car K est suffisamment petit). On utilisera également le fait que le morphisme

$$p : X \times G(\mathbf{A}_f)/K \longrightarrow G(\mathbb{Q})\backslash(X \times G(\mathbf{A}_f)/K)$$

est un isomorphisme analytique local : tout $(x, yK) \in X \times G(\mathbf{A}_f)/K$ est tel qu'il existe Ω voisinage de x dans X tel que $p : \Omega \times \{yK\} \xrightarrow{\sim} p(\Omega \times \{yK\})$ soit un isomorphisme analytique.

La correspondance de Hecke associée à KgK s'écrit alors avec ces notations :

$$\begin{tikzcd}
 & {[x, y(gKg^{-1} \cap K)]} \arrow[dl, leftrightarrow] \arrow[dr, leftrightarrow] & \\
{[x, yK]} & & {[x, ygK]}
\end{tikzcd}$$

et

$$\mathrm{Fix}(KgK)(\mathbb{C}) = \{[x, y(gKg^{-1} \cap K)] \mid [x, yK] = [x, ygK]\ \}$$

que l'on peut voir, par hypothèse, comme un sous-ensemble de $\mathrm{Sh}_K(\mathbb{C})$:

$$\mathrm{Fix}(KgK)(\mathbb{C}) = \{[x, yK)] \mid [x, yK] = [x, ygK]\ \}$$

Or,

$$\begin{aligned}
[x, yK] = [x, ygK] \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists \gamma \in G(\mathbb{Q})\ \ \gamma.x = x \text{ et } \gamma yK = ygK \\
&\Longleftrightarrow \quad \exists \gamma \in G(\mathbb{Q}) \cap ygKy^{-1}\ \ \gamma.x = x
\end{aligned}$$

x, yK étant fixés un tel γ est unique (action libre de $G(\mathbb{Q})$ sur $X \times G(\mathbf{A}_f)/K$) et est semi-simple elliptique dans $G(\mathbb{R})$ car $\gamma \in \mathrm{Stab}_{G(\mathbb{R})}(x)$. De plus, si $\gamma' \in G(\mathbb{Q})$, alors

$$\begin{cases} \gamma.x = x \\ \gamma.yK = ygK \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} (\gamma'\gamma\gamma'^{-1})\gamma'.x = \gamma'.x \\ (\gamma'\gamma\gamma'^{-1})\gamma' yK = \gamma' ygK \end{cases}$$

Et donc $\gamma'\gamma\gamma'^{-1}$ est l'unique élément de $G(\mathbb{Q})$ vérifiant les égalités de droite.

On a donc démontré :

Lemme 7.1.3. — *Il y a une partition naturelle*

$$Fix(KgK)(\mathbb{C}) = \coprod_{\substack{\{\gamma\}\in\{G(\mathbb{Q})\}_{ss} \\ \gamma \text{ elliptique dans } G(\mathbb{R})}} Fix(KgK)(\mathbb{C})_{\{\gamma\}}$$

où $\{G(\mathbb{Q})\}_{ss}$ désigne les classes de conjugaison semi-simples de $G(\mathbb{Q})$ et

$$Fix(KgK)(\mathbb{C})_{\{\gamma\}} = \{[x, yK] \mid \exists \tilde{\gamma} \in \{\gamma\}\ \ \tilde{\gamma}.x = x \text{ et } \tilde{\gamma} yK = ygK\ \}$$

Remarque 7.1.4. — On aurait également pu déduire cette décomposition du lemme 5.3 de [**47**] comme dans la démonstration de la formule des traces sur la fibre spéciale (théorème 6.12.5).

Lemme 7.1.5. — *Si la classe de conjugaison $\{\gamma\}$ est associée à un point fixe de KgK alors $\{\gamma\}$ est associé à tout point de la composante connexe de ce point dans $Fix(KgK)(\mathbb{C})$. On a donc une partition*

$$\pi_0(Fix(KgK)(\mathbb{C})) = \coprod_{\substack{\{\gamma\}\in\{G(\mathbb{Q})\}_{ss} \\ \gamma \text{ elliptique dans } G(\mathbb{R})}} \pi_0(Fix(KgK)(\mathbb{C}))_{\{\gamma\}}$$

Démonstration. — Il suffit de démontrer que tout $[x, yK] \in \mathrm{Fix}(KgK)(\mathbb{C})_{\{\gamma\}}$ possède un voisinage U dans $\mathrm{Sh}_K(\mathbb{C})$ tel que $U \cap \mathrm{Fix}(KgK)(\mathbb{C}) \subset \mathrm{Fix}(KgK)(\mathbb{C})_{\{\gamma\}}$ ce qui montrera que $[x, yK] \mapsto \{\gamma\}$ est localement constante donc constante sur chaque composante connexe.

Fixons $[x, yK]$ dans $\mathrm{Fix}(KgK)(\mathbb{C})$ tel que $\gamma.x = x$ et $\gamma yK = ygK$ où $\gamma \in G(\mathbb{Q})$.

Si Ω est un voisinage compact de x dans X,

$$\{g \in G(\mathbb{R}) \mid g.\Omega \cap \Omega \neq \emptyset\ \}$$

est un compact de $G(\mathbb{R})$ (écrire X sous la forme $G(\mathbb{R})/K_\infty$).

Si de plus Ω est petit p induit un isomorphisme $\Omega \times yK \xrightarrow{\sim} p(\Omega \times \{yK\}) \subset \mathrm{Sh}_K(\mathbb{C})$ où $p(\Omega \times \{yK\})$ est un voisinage de $[x, yK]$ dans $\mathrm{Sh}_K(\mathbb{C})$.

Fixons un Ω vérifiant les deux conditions ci dessus : Ω est compact et petit. Si $(x', yK) \in \Omega \times \{yK\}$ est tel que $[x', yK] = p(x', yK) \in \mathrm{Fix}(KgK)(\mathbb{C})$ alors soit $\gamma' \in G(\mathbb{Q})$ l'unique élément tel que

$$\begin{cases} \gamma'.x' = x' \\ \gamma'.yK = ygK \end{cases}$$

On a donc, $\gamma'.\Omega \cap \Omega \neq \emptyset$ et $\gamma' \in ygKy^{-1} \cap G(\mathbb{Q})$

Par discrétude de $G(\mathbb{Q})$ dans $G(\mathbf{A})$,

$$A_\Omega = \{\gamma'' \in G(\mathbb{Q}) \mid \gamma''.\Omega \cap \Omega \neq \emptyset \text{ et } \gamma'' \in ygKy^{-1}\ \}$$

est fini. Or, lorsque Ω parcourt des ensembles vérifiant les conditions ci dessus,

$$\bigcap_{\Omega} A_\Omega = \{\gamma\}$$

Et donc, quitte à rétrécir Ω on peut supposer qu'il contient un seul élément. On pose alors $U = p(\Omega \times yK)$. □

Proposition 7.1.6. — *Tout élément de $\pi_0(Fix(KgK)(\mathbb{C}))_{\{\gamma\}}$ est une composante connexe de l'image d'une variété de Shimura associée à G_γ^0 où G_γ désigne le centralisateur de γ.*

Démonstration. — Soit $[x, yK] \in \mathrm{Fix}(KgK)(\mathbb{C})_{\{\gamma\}}$ où $\gamma.x = x$ et $\gamma.yK = ygK$. Le point x correspond à un morphisme $h_x : \mathbb{S} \longrightarrow G_{/\mathbb{R}}$, et

$$\gamma.x = x \Longleftrightarrow h_x : \mathbb{S} \longrightarrow (G_\gamma^0)_{\mathbb{R}}$$

Le couple (G^0_γ, h_x) définit alors une variété de Shimura de domaine hermitien associé

$$Y = G^0_\gamma(\mathbb{R})/C_{G^0_\gamma(\mathbb{R})}(h_x) \hookrightarrow X$$

Posons $K' = yKy^{-1} \cap G^0_\gamma(\mathbf{A}_f)$. Le morphisme $(G^0_\gamma, h_x) \longrightarrow (G, h_x)$ induit alors un morphisme analytique

$$\begin{array}{rcl} q : \mathrm{Sh}_{K'}(G^0_\gamma, h_x)(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathrm{Sh}_K(G, X)(\mathbb{C}) \\ [x_1, y_1K'] & \longmapsto & [x_1, y_1yK] \end{array}$$

qui est un revêtement fini au dessus de son image.

De plus,

$$[x, yK] \in \mathrm{im}(q), \text{ et } \mathrm{im}(q) \subset \mathrm{Fix}(KgK)(\mathbb{C})_{\{\gamma\}}$$

Considérons maintenant le lemme suivant

Lemme 7.1.7. — *Soient $x \in X$ et $g_0 \in G(\mathbb{R})$ tels que $g_0.x = x$. Alors,*

$$\begin{array}{rcl} \{x' \in X \mid g_0.x' = x' \} & = & \{g.x \mid g \in C_{G(\mathbb{R})}(g_0) \} \\ & \simeq & C_{G(\mathbb{R})}(g_0)/(C_{G(\mathbb{R})}(g_0) \cap K_\infty) \end{array}$$

Démonstration. — Soit $K_\infty = Stab_{G(\mathbb{R})}(x)$. Soit

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$$

une décomposition de Cartan de $\mathrm{Lie}(G(\mathbb{R}))$ où $\mathfrak{k} = \mathrm{Lie}(K_\infty)$. L'application

$$\begin{array}{rcl} exp : \mathfrak{p} & \xrightarrow{\sim} & X \\ Z & \longmapsto & exp(Z).K_\infty \\ 0 & \longmapsto & x \end{array}$$

est un difféomorphisme.

Si $x' = \exp(Z)K_\infty \in X$ où $Z \in \mathfrak{p}$,

$$g_0.x' = x' \Longleftrightarrow \underbrace{(g_0 \exp(Z) g_0^{-1})}_{\exp(\mathrm{Ad}(g_0)(Z))}.K_\infty = \exp(Z).K_\infty$$

car $g_0 \in K_\infty$. De plus, $g_0 \in K_\infty \Rightarrow \mathrm{Ad}(g_0)(\mathfrak{p}) \subset \mathfrak{p}$ et donc, $\mathrm{Ad}(g_0)(Z) \in \mathfrak{p}$ et l'égalité $\exp(\mathrm{Ad}(g_0)(Z)).K_\infty = \exp(Z).K_\infty$ implique $\mathrm{Ad}(g_0)(Y) = Y$, qui implique elle même que g_0 commute à $\exp(Z)$. Donc :

$$\begin{array}{rcl} \{x' \in X \mid g_0.x' = x' \} & = & \{g.x \mid g \in C_{G(\mathbb{R})}(g_0) \} \\ & = & C_{G(\mathbb{R})}(g_0)/(C_{G(\mathbb{R})}(g_0) \cap K_\infty) \end{array}$$

□

Appliquons ce lemme à x et $g_0 = \gamma$. On trouve que l'ensemble des points fixes de γ dans X est Y. Le résultat s'en déduit. □

Corollaire 7.1.8. — *$Fix(KgK)$ est lisse sur E (en particulier ses composantes connexes sont irréductibles).*

Exemple 7.1.9. — Dans la décomposition

$$\pi_0(\mathrm{Fix}(KgK)(\mathbb{C})) = \coprod_{\{\gamma\}\in\{G(\mathbb{Q})\}_{ss}} \pi_0(\mathrm{Fix}(KgK)(\mathbb{C}))_{\{\gamma\}}$$

- Les classes de conjugaison elliptiques correspondent aux composantes de points fixes compactes.
- Les classes de conjugaison régulières correspondent aux points fixes isolés (et elles sont automatiquement elliptiques dès qu'un tel point fixe existe)

7.2. Points fixes isolés

L'idée sous-jacente à cette section est que tout vecteur tangent dans l'espace tangent en un point fixe qui est fixe infinitésimalement donne lieu à une géodésique dans l'espace hermitien X qui est formée de points fixes, et que donc en tout point fixe isolé l'intersection est transverse.

Les points fixes isolés correspondent comme on l'a vu aux points fixes associés à des classes de conjugaison $\{\gamma\}$ où γ est régulier c'est à dire G_γ^0 est un tore (qui est automatiquement elliptique si un tel point existe). On a donc en particulier :

Lemme 7.2.1. — *Les points fixes isolés sont des points C.M. de Sh_K.*

Nous aurons besoin du lemme suivant pour appliquer une formule des traces de Lefschetz.

Lemme 7.2.2. — *Si $\xi \in Sh_K(\mathbb{C})$ est un point fixe isolé de KgK alors, en ξ, Δ et $Sh_{gKg^{-1}\cap K} \hookrightarrow Sh_K \times Sh_K$ s'intersectent transversalement.*

Démonstration. — Soit

$$\xi \in \mathrm{Fix}(KgK)(\mathbb{C})_{\{\gamma\}},\ \xi = [x, yK],\ \gamma.x = x \text{ et } \gamma yK = ygK$$

Soit Ω voisinage de x dans X tel que $p : \Omega\times\{yK\} \xrightarrow{\sim} p(\Omega\times\{yK\})$ soit un isomorphisme et $\mathrm{Fix}(KgK)(\mathbb{C}) \cap p(\Omega \times yK) = \{\xi\}$.

On a alors que $p : \Omega \times \{y(gKg^{-1} \cap K)\} \xrightarrow{\sim} p(\Omega \times \{y(gKg^{-1} \cap K)\}) \subset \mathrm{Sh}_{gKg^{-1}\cap K}$.

L'inclusion $\mathrm{Sh}_{gKg^{-1}\cap K} \hookrightarrow \mathrm{Sh}_K\times\mathrm{Sh}_K$ s'identifie alors dans la carte locale $\Omega\times\{yK\} \simeq \Omega$ à :

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \Omega\times\Omega \\ x' & \longmapsto & (x', \gamma.x') \end{array}$$

Et Δ à

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \Omega\times\Omega \\ x' & \longmapsto & (x', x') \end{array}$$

Les intersections sont donc transverses ssi $d(\gamma)_x : T_x\Omega \longrightarrow T_x\Omega$ ne possède pas la valeur propre $+1$. Si $K_\infty = \mathrm{Stab}_{G(\mathbb{R})}(x), \mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ est une décomposition de Cartan de

$\mathrm{Lie}(G(\mathbb{R}))$ telle que $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(K_\infty)$ alors,

$$\begin{tikzcd} T_x\Omega \arrow[r, "d(\gamma)_x"] & T_x\Omega \\ \mathfrak{p} \arrow[u, "\simeq"'] \arrow[r, "\mathrm{Ad}(\gamma)_{|\mathfrak{p}}"] & \mathfrak{p} \arrow[u, "\simeq"] \end{tikzcd}$$

où $\gamma \in K_\infty$. L'espace propre associé à la valeur propre $+1$ s'identifie donc à

$$\mathrm{Lie}(C_{G(\mathbb{R})}(\gamma)) \cap \mathfrak{p}$$

Mais $C_G(\gamma)^0$ étant un tore tel que $C_{G(\mathbb{R})}(\gamma)^0 \subset K_\infty$, $\mathrm{Lie}(C_{G(\mathbb{R})}(\gamma)) \subset \mathfrak{k}$ et donc

$$\mathrm{Lie}(C_{G(\mathbb{R})}(\gamma)) \cap \mathfrak{p} = 0$$

□

On déduit également de la démonstration précédente :

Corollaire 7.2.3. — *Si $\xi \in Fix(KgK)(\mathbb{C})_{\{\gamma\}}$ est isolé alors*

$$Lef_\xi(KgK, \mathcal{L}_\rho) = Tr(\rho(\gamma))$$

7.3. Le cas des variétés de Shimura de type P.E.L.

7.3.1. Un lemme sur la conjugaison stable. —

Lemme 7.3.1. — *Soit $G/\mathbb{Q}_p$ un groupe réductif tel que G^{der} soit simplement connexe. Soit $\gamma \in G(\mathbb{Q}_p)$ régulier stablement conjugué à un élément de $M(\mathbb{Q}_p)$ où M est le Levi d'un parabolique propre défini sur $\mathbb{Q}_p$. Alors, γ est conjugué dans $G(\mathbb{Q}_p)$ à un élément de $M(\mathbb{Q}_p)$.*

Démonstration. — Supposons que γ soit stablement conjugué à $\gamma' \in M(\mathbb{Q}_p)$:

$$\gamma' = g\gamma g^{-1} \text{ où } g \in G(\overline{\mathbb{Q}_p})$$

γ et γ' étant réguliers, et G^{der} simplement connexe, les centralisateurs $C_G(\gamma)$, resp. $C_G(\gamma')$, sont des tores maximaux sur $\mathbb{Q}_p$: T, resp. T'.

L'application définie sur $\overline{\mathbb{Q}_p}$

$$\mathrm{int}_g : T \xrightarrow{\sim} T'$$

est en fait un isomorphisme sur $\mathbb{Q}_p$ (les centralisateurs de deux éléments stablement conjugués sont formes intérieures l'un de l'autre via cette application, mais étant abéliens, le cocycle intérieur est trivial : il s'agit de $c_\sigma = int_{gg^{-\sigma}}$ où $gg^{-\sigma} \in T$). Elle induit donc un isomorphisme

$$\mathrm{int}_g : T_d \xrightarrow{\sim} (T')_d$$

(où l'indice d signifie le sous-tore déployé maximal).

Rappelons maintenant que si T est un tore maximal de G sur $\mathbb{Q}_p$, le Levi d'un parabolique défini sur $\mathbb{Q}_p$ minimal parmi ceux contenant T est $C_G(T_d)$ (cf. Borel, Algebraic groups) (par exemple, T est elliptique ssi $T_d \subset Z_G$ ssi T n'est contenu dans aucun parabolique propre).

Dans notre cas, l'isomorphisme $\mathrm{int}_g : T_d \xrightarrow{\sim} (T')_d$ implique que $C_G((T')_d) = gC_G(T_d)g^{-1}$ et que donc, γ et γ' sont dans deux paraboliques sur $\mathbb{Q}_p$ conjugués dans $G(\overline{\mathbb{Q}_p})$. Mais (Borel, Algebraic groups) deux paraboliques sur $\mathbb{Q}_p$ conjugués dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$ le sont déjà sur $\mathbb{Q}_p$. □

7.3.2. Plaçons nous maintenant dans le cadre des variétés de Shimura de type P.E.L. non ramifiées propres étudiées dans la première partie.

Théorème 7.3.2. — *Soit $\xi \in Fix(KgK)(\mathbb{C})_{\{\gamma\}}$ un point fixe isolé. Le point ξ appartient donc à $Sh_K(\overline{E})$. Supposons que ξ se spécialise sur un point de la strate $\overline{S}(b)$ où $b \in B(G_{\mathbb{Q}_p}, \mu_{\overline{\mathbb{Q}_p}})$. Alors, γ est conjugué dans $G(\mathbb{Q}_p)$ à un élément de $M(b)(\mathbb{Q}_p)$, le centralisateur du morphisme des pentes.*

Démonstration. — Soit (A, λ, ι) le triplet associé à ξ sur une extension de degré fini du corps reflex. A est une variété abélienne C.M.. Avec les notations précédentes pour l'uniformisation complexe on peut supposer que $\xi = [x, yK]$ où $\gamma.x = x$ et $\gamma.yK = ygK$. La relation $\gamma.x = x$ implique que γ induit un automorphisme de la $\mathbb{Q}$ structure de Hodge polarisée munie de l'action de B associée à (A, λ, ι) et que donc, γ induit un automorphisme du triplet $(\mathbf{A}, \lambda, \iota)$ sur une extension de degré fini du corps reflex. Nous noterons f cet automorphisme. Rappelons qu'à l'uniformisation complexe est associée un choix d'isomorphisme de B-modules symplectiques :

$$V \xrightarrow{\sim} H^1(A, \mathbb{Q})$$

Il y a alors un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "\gamma"'] & H^1_{\mathrm{B}}(A, \mathbb{Q}) \arrow[d, "f^*"] \\ V \arrow[r, "\simeq"] & H^1_{\mathrm{B}}(A, \mathbb{Q}) \end{tikzcd}$$

Rappelons que l'on note E le complété en une place v divisant p du corps réflexe. Il y a un isomorphisme canonique

$$H^1_{\mathrm{B}}(A, \mathbb{Q}) \otimes \mathbb{Q}_p \xrightarrow{\sim} H^1_{\text{ét}}(A, \mathbb{Q}_p)$$

où le second membre est une représentation cristalline du groupe de Galois absolu d'une extension de degré fini de E que nous noterons K. On a donc un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} V \otimes \mathbb{Q}_p \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "\gamma \otimes 1"'] & H^1_{\text{ét}}(A_K, \mathbb{Q}_p) \arrow[d, "f^*"] \\ V \otimes \mathbb{Q}_p \arrow[r, "\simeq"] & H^1_{\text{ét}}(A_K, \mathbb{Q}_p) \end{tikzcd}$$

Notons F le foncteur de Fontaine entre la catégorie des représentations cristallines du groupe de Galois absolu de K et celle des isocristaux filtrés admissibles. $F(H^1_{\text{ét}}(A_K, \mathbb{Q}_p))$ s'identifie comme isocristal muni de structures additionnelles à la cohomologie cristalline

de la réduction mod p du triplet (A, λ, ι). Dans cette identification, f agit sur cet isocristal par un élément de J_b. Fixons un isomorphisme de L-modules symplectiques munis d'une action de B :

$$F(H^1_{\text{ét}}(A_K, \mathbb{Q}_p)) \simeq (V \otimes \mathbb{Q}_p) \otimes L$$

Il y a donc un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
F(V \otimes \mathbb{Q}_p) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "F(\gamma \otimes 1)"'] & F(H^1_{\text{ét}}(A_K, \mathbb{Q}_p)) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "F(f^*)"] & (V \otimes \mathbb{Q}_p) \otimes L \arrow[d, "g"'] \\
F(V \otimes \mathbb{Q}_p) \arrow[r, "\simeq"] & F(H^1_{\text{ét}}(A_K, \mathbb{Q}_p)) \arrow[r, "\simeq"] & (V \otimes \mathbb{Q}_p) \otimes L
\end{tikzcd}$$

dans lequel $g \in J_b$.

Trivialisons maintenant le torseur des périodes ; c'est à dire étendons les scalaires à B_{dR}. Il y a un isomorphisme canonique

$$(V \otimes \mathbb{Q}_p) \otimes B_{dR} \xrightarrow{\sim} F(V \otimes \mathbb{Q}_p) \otimes_L B_{dR}$$

d'où au final un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
V_{\mathbb{Q}_p} \otimes B_{dR} \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "\gamma \otimes 1"'] & (V_{\mathbb{Q}_p} \otimes L) \otimes B_{dR} \arrow[d, "g \otimes 1"] \\
V_{\mathbb{Q}_p} \otimes B_{dR} \arrow[r, "\simeq"] & (V_{\mathbb{Q}_p} \otimes L) \otimes B_{dR}
\end{tikzcd}$$

Duquel on déduit que γ est stablement conjugué dans $G(L)$ à un élément de J_b.

Rappelons maintenant que dans le cas que nous considérons ($G_{\mathbb{Q}_p}$ quasidéployé) la classe de σ-conjugaison b provient d'une classe de $M(b)(L)$ encore notée b, et que $J_b = \{g \in M(b)(L) \mid gb\sigma = b\sigma g\}$. Rappelons également que l'on peut supposer b "decent" (confère [**51**]) au sens où pour un $s \in \mathbb{N}$, $(b\sigma)^s = (s.\nu_b)(p)\sigma^s$. Dans tous ce qui précède on peut alors remplacer L par $\mathbb{Q}_{p^s}$ l'extension non ramifiée de degré s de $\mathbb{Q}_p$. La relation $b^{-1}gb = g^\sigma$ dans $M(b)(\mathbb{Q}_{p^s})$ montre que la classe de conjugaison de g dans $M(b)(\mathbb{Q}_{p^s})$ est définie sur $\mathbb{Q}_p$ et que donc, d'après [**36**] (pour les groupes avec lesquels nous travaillons $M(b)^{der}$ est simplement connexe), la classe de conjugaison de g dans $M(b)(\overline{\mathbb{Q}_p})$ contient un élément de $M(b)(\mathbb{Q}_p)$.

On déduit donc au final que γ est stablement conjugué dans $G(\mathbb{Q}_p)$ à un élément de $M(b)(\mathbb{Q}_p)$. On conclut alors grâce au lemme 7.3.1. □

Remarque 7.3.3. — Dans la dernière partie de la démonstration, nous n'avons fait qu'expliquer l'existence du transfert des classes de conjugaison stables de J_b vers celles de sa forme intérieure quasi-déployée $M(b)$. Par exemple, lorsque J_b est le groupe des unités d'une algèbre à division $D^\times$, ce transfert est le transfert des classes de conjugaison de $D^\times$ vers les classes de conjugaison elliptiques de $\mathbf{GL}_n$.

7.4. Formule de Lefschetz

Théorème 7.4.1. — *Soit $Sh(G,X)$ une variété de Shimura compacte. Soit $f = \otimes_v f_v \in \mathcal{H}(G(\mathbf{A}_f))$ telle qu'il existe v telle que $supp(f_v) \subset G(\mathbb{Q}_v)_{reg}$. Alors,*

$$tr\,(f;[H^\bullet(Sh,\mathcal{L}_\rho)]) = \sum_{\substack{\{\gamma\}\in\{G(\mathbb{Q})\}\\ \gamma \text{ régulier}\\ \gamma \text{ elliptique dans } G(\mathbb{R})}} vol(G(\mathbb{Q})_\gamma\backslash G(\mathbf{A}_f)_\gamma)\ tr\rho(\gamma)\ \mathcal{O}_\gamma(f)$$

Démonstration. — On peut supposer que f est de la forme 1_{KgK} où $K = \prod_v K_v$ et $K_v g_v K_v \subset G(\mathbb{Q}_v)_{reg}$. Appliquons la formule des traces de Lefschetz à la correspondance de Hecke associée. Soit $\gamma \in G(\mathbb{Q})$ elliptique dans $G(\mathbb{R})$. $\mathrm{Fix}(KgK)(\mathbb{C})_{\{\gamma\}} \neq \emptyset \Rightarrow \gamma$ est régulier. En effet, une relation du type $\gamma yK = ygK$ implique que $\gamma y_v K_v = y_v g_v K_v$ qui implique que $y_v^{-1}\gamma y_v \in K_v g_v K_v \subset G(\mathbb{Q}_v)_{reg}$. Tous les points fixes sont donc isolés. Et la somme dans la formule annoncée provient de la décomposition

$$\mathrm{Fix}(KgK)(\mathbb{C}) = \coprod_{\substack{\{\gamma\}\in\{G(\mathbb{Q})\}\\ \text{régulier}\\ \gamma \text{ elliptique dans } G(\mathbb{R})}} \mathrm{Fix}(KgK)(\mathbb{C})_\gamma$$

Reste donc à montrer que

$$\sum_{\xi\in\mathrm{Fix}(KgK)(\mathbb{C})_{\{\gamma\}}} \mathrm{Lef}_\xi(KgK,\mathcal{L}_\rho) = \mathrm{vol}(G(\mathbb{Q})_\gamma\backslash G(\mathbf{A}_f)_\gamma)\ \mathrm{tr}\rho(\gamma)\ \mathcal{O}_\gamma(f)$$

On sait (corollaire 7.2.3) que $\mathrm{Lef}_\xi(KgK,\mathcal{L}_\rho)$ est constant sur $\mathrm{Fix}(KgK)(\mathbb{C})_{\{\gamma\}}$ et vaut $\mathrm{tr}\rho(\gamma)$. Il faut donc calculer $\#\mathrm{Fix}(KgK)(\mathbb{C})_{\{\gamma\}}$. γ étant régulier, $\mathrm{Fix}(\gamma;X)$ est réduit à un seul élément. On en déduit que $\mathrm{Fix}(KgK)(\mathbb{C})_{\{\gamma\}}$ est en bijection avec

$$G(\mathbb{Q})_\gamma\backslash\{yK \mid y^{-1}\gamma y \in KgK\ \}$$

qui est de cardinal $\mathrm{vol}(G(\mathbb{Q})_\gamma\backslash G(\mathbf{A}_f)_\gamma)\ \mathcal{O}_\gamma(f)$. □

Remarque 7.4.2. — Cette formule se déduit de [**21**] en remarquant grâce au théorème 5.2 de [**21**] que la somme des caractères des séries discrètes de $G(\mathbb{R})$ ayant même caractère infinitésimal que $\check{\rho}$ évaluée en un γ régulier est $\mathrm{tr}\rho(\gamma)$.

Remarque 7.4.3. — Lorsque le support de f reste dans un compact fixé de $G(\mathbf{A}_f)$, les classes $\{\gamma\}$ intervennant dans la formule ci dessus varient dans un ensemble fini ne dépendant que de ce compact. Cela peut se voir de deux façons : la première en utilisant la proposition 8.2 de [**38**] qui implique qu'il y a un nombre fini de classes de $G(\mathbf{A})$-conjugaison contenant un élément de $G(\mathbb{Q})$ et rencontrant un compact de $G(\mathbf{A})$ fixé (ce qui est le cas ici puisque nos classes sont elliptiques à l'infini) ; la deuxième de la même manière que dans la remarque (6.12.6).

CHAPITRE 8

CARACTÉRISATION DES ÉLÉMENTS DE $\mathbf{Groth}(G(\mathbf{A}_f)) \times W_{E_\nu}$ PAR LEURS TRACES

8.1. Un lemme d'algèbre linéaire

Soir K un corps et V un K-espace vectoriel de dimension finie. Soient $u \in \mathrm{End}(V)$ et $v \in \mathrm{GL}(V)$. Le but du lemme qui suit est de montrer que si l'on connaît $\mathrm{tr}(uv^N)$ pour N grand alors on connaît $\mathrm{tr}(u)$.

Pour cela on s'inspire de la formule classique : si $P(T) = \det(Id - Tv)$ alors si $F(T) = \sum_{N\geq 0} \mathrm{tr}(v^{N+1})T^N$, F est une fraction rationnelle et $F(T)dT = -dlogP$. Ainsi, puisque v est inversible

$$\mathrm{Res}_\infty(F(T)dT) = v_\infty(P^{-1}) = \dim(V) = \mathrm{tr}(Id)$$

Lemme 8.1.1. — *Soit*

$$F(T) = \sum_{N\geq 0} tr(uv^{N+1})\, T^N \in K[[T]]$$

La série formelle F est une fraction rationnelle de degré -1 et

$$Res_\infty(F(T)dT) = tr(u)$$

Démonstration. — On peut supposer K algébriquement clos de caractéristique 0. Soit $v = v_s + v_n$ la décomposition de v en parties semi-simples et nilpotentes. Supposons le lemme démontré pour v semi-simple. On a alors

$$\begin{aligned}
F(T) &= \sum_{N\geq 0}\sum_{k=0}^{N+1}\binom{N+1}{k}\mathrm{tr}\left(uv_n^k v_s^{N+1-k}\right)T^N \\
&= \sum_{k=0}^{\dim V}\sum_{\substack{N+1\geq k\\ N\geq 0}}\binom{N+1}{k}\mathrm{tr}\left(uv_n^k v_s^{N+1-k}\right)T^N \\
&= \sum_{N\geq 0}\mathrm{tr}(uv_s^{N+1})T^N + \sum_{k=1}^{\dim V}\underbrace{\sum_{N\geq k-1}\binom{N+1}{k}\mathrm{tr}\left(uv_n^k v_s^{N+1-k}\right)T^N}_{\frac{T^{k-1}}{k!}\frac{d^k}{dT^k}(F_k(T))}
\end{aligned}$$

où

$$F_k(T) = \sum_{N\geq 0} \mathrm{tr}(uv_n^k v_s^{-k} v_s^{N+1})T^N$$

Le terme de gauche est une fraction rationnelles par application du cas semi-simple à u et v_s, quant au terme de droite cela résulte du fait que pour tout $1 \leq k \leq n$, $F_k(T)$ est une fraction rationnelle par application du cas semi-simple à $uv_n^k v_s^{-k}$ et v_s. La série formelle F est donc une fraction rationnelle. De plus, par hypothèse, $\deg F_k = -1$ et donc $\deg\left(\frac{d^k}{dT^k}(TF_k(T))\right) \leq -k-1$. Cela implique que

$$\deg\left(\frac{T^{k-1}}{k!}\frac{d^k}{dT^k}(TF_k(T))\right) \leq -2$$

et est donc de résidu nul en l'infini. La cas semi-simple implique donc les autres cas.

Reste à démontrer le lemme dans le cas où v est semi-simple. Soit donc v semi-simple. Pour tout $w \in \mathrm{GL}(V)$

$$\mathrm{tr}(u(w^{-1}vw)^{N+1}) = \mathrm{tr}(uw^{-1}v^{N+1}w) = \mathrm{tr}((wuw^{-1})v^{N+1})$$

et $\mathrm{tr}(wuw^{-1}) = \mathrm{tr}(u)$. On peut donc supposer que $V = K^n$ et que la matrice de v dans la base canonique de K^n est la matrice diagonale $diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ (où $\forall i\ \lambda_i \neq 0$). Notons $(a_{ij})_{i,j}$ la matrice de u. Alors,

$$\begin{aligned} F(T) &= \sum_{N=0}^{+\infty}\sum_{i=1}^{n} a_{ii}\lambda_i^{N+1}t^N \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_i T} \end{aligned}$$

or $\lambda_i \neq 0 \Rightarrow \mathrm{Res}_\infty\left(\frac{\lambda_i}{1-\lambda_i T}dT\right) = 1$. D'où le résultat. □

Remarque 8.1.2. — L'intérêt de ce lemme est que si P est un polynôme alors

$$\mathrm{Res}_\infty P(T)dT = 0$$

Ainsi, si l'on modifie la série définissant $F(T)$ dans le lemme précédent par un nombre fini de termes on peut encore retrouver la trace de u.

8.2. Séparation des représentations sphériques par les traces de fonctions à support dans les éléments réguliers

Proposition 8.2.1. — *Soit $H/\mathbb{Q}_p$ un groupe réductif non ramifié tel que $H(\mathbb{Q}_p) \to H_{ad}(\mathbb{Q}_p)$ soit surjectif. Soit*

$$\sum_{\pi\in Irr(G(\mathbb{Q}_p))} a_\pi[\pi] \in Groth(G(\mathbb{Q}_p))\hat{\otimes}\mathbb{C}$$

(i.e. $\alpha_\pi \in \mathbb{C}$ et $\forall\ K_p \subset H(\mathbb{Q}_p)$ compact ouvert $\#\{\pi \mid a(\pi) \neq 0$ et $\pi^{K_p} \neq (0)\ \} < \infty$)

Si $\forall f_p \in \mathcal{H}(H(\mathbb{Q}_p)), supp(f_p) \subset H(\mathbb{Q}_p)_{reg}$ *on a :*

$$\sum_{\pi} a_\pi tr\, \pi(f_p) = 0$$

Alors, $\forall\, \pi$ *sphérique* $a(\pi) = 0$.

Démonstration. — Ce résultat est essentiellement contenu dans [**43**] dont nous utiliserons librement les notations.

Commençons par remarquer que dans [**43**], si le paramètre t est régulier alors la fonction élémentaire f_t est à support dans les éléments réguliers de $H(\mathbb{Q}_p)$. D'après la proposition 5 de [**43**] on a en prenant $f_p = f_t$ avec t régulier :

$$\sum_{\substack{\pi\text{sous-quotient} \\ \text{d'une série principale} \\ \text{non ramifiée}}} a_\pi \text{ tr } \pi(f_t) = 0$$

i.e. on peut séparer les sous-quotients des séries principales non ramifiées des autres éléments de $\mathrm{Irr}(H(\mathbb{Q}_p))$.

Remarquant que les éléments réguliers t engendrent le groupe $A(\mathbb{Q}_p)/A(\mathbb{Z}_p)$, la proposition 7 de [**43**] couplée à l'indépendance linéaire des caractères (ici l'indépendance linéaire des caractères non ramifiés λ à valeurs dans $\mathbb{C}^*$ du groupe des points dans $\mathbb{Q}_p$ d'un tore déployé maximal) permet de séparer les π sous-quotients de séries principales non ramifiées associées à des λ, λ' tels que$\forall w \in W \;\; \lambda^w \neq \lambda'$.

La proposition 8 (cf. également la remarque qui la suit) permet à λ (modulo l'action de W) fixé de séparer dans les sous-quotients irréductibles de la série principale non ramifiée le sous-quotient sphérique des autres sous-quotients. D'où le résultat.

□

8.3. Le théorème

Soit G un groupe de similitudes unitaires sur $\mathbb{Q}$ comme dans le I.

Théorème 8.3.1. — *Soit* $A \in Groth(G(\mathbf{A}_f) \times W_{E_\nu})$ *tel que pour tout type supercuspidal* (J, λ) *de* $G(\mathbb{Q}_p)$, $\forall g \in \tilde{J}$ *le sous- groupe compact modulo le centre associé,* $\forall f^p \in \mathcal{H}(G(\mathbf{A}_f^p))$ *telle qu'il existe* $w \neq p$ *vérifiant* $supp(f_w) \subset G(\mathbb{Q}_w)_{reg}$ *il existe un* $N \in \mathbb{N}$ *tel que* $\forall \tau \in W_{E_\nu}$ *vérifiant* $v(\tau) \geq N$ *si*

$$f = (e_\lambda * \delta_g) \otimes f^p$$

on ait

$$tr(f \times \tau; A) = 0$$

Alors,

$$A_{cusp} = 0$$

Démonstration. — fixons $\sigma \in W_{E_\nu}$ tel que $v(\sigma) = 1$. Considérons la distribution sur $G(\mathbf{A}_f)$

$$f \mapsto \sum_{N \geq 0} \mathrm{tr}(f \times \tau\sigma^{N+1}; A) T^N$$

qui est à valeurs dans $\mathbb{C}(T)$ d'après le lemme 8.1.1. Appliquant l'application linéaire

$$\mathrm{Res}_\infty : \mathbb{C}(T) \longrightarrow \mathbb{C}$$

à cette distribution on déduit du lemme 8.1.1 et de la remarque qui le suit que dans l'énoncé du théorème on peut prendre n'importe quel $\tau \in W_{E_\nu}$ indépendamment de f^p.

Fixons π_0 une représentation supercupsidale de $G(\mathbb{Q}_p)$ et (λ, J) un type associé. Notons

$$A = \sum_{\Pi \in \mathrm{Irr}(G(\mathbf{A}_f))} [\Pi] \otimes [\rho(\Pi)]$$

où $[\rho(\Pi)] \in \mathrm{Groth}(W_{E_\nu})$. Fixons $f^p \in \mathcal{H}(G(\mathbf{A}_f^p))$ vérifiant $\exists w \neq p$ $\mathrm{supp}(f_w) \subset G(\mathbb{Q}_w)_{reg}$ et considérons la distribution sur $G(\mathbb{Q}_p)$:

$$f_p \longmapsto \mathrm{tr}(f_p \otimes f^p \times \tau; A) = \sum_{\pi \in \mathrm{Irr}(G(\mathbb{Q}_p))} \underbrace{\left(\sum_{\substack{\Pi \in \mathrm{Irr}(G(\mathbf{A}_f)) \\ \Pi_p \simeq \pi}} \mathrm{tr}(f^p; \Pi^p)\ \mathrm{tr}(\tau; \rho(\Pi)) \right)}_{a_\pi} \mathrm{tr}_\pi(f_p)$$

Il résulte de la définition de $\mathrm{Groth}(G(\mathbf{A}_f) \times W_{E_\nu})$ que pour tout sous-groupe compact ouvert K_p de $G(\mathbb{Q}_p)$

$$\#\{\pi \mid \pi^{K_p} \neq (0) \text{ et } a_\pi \neq 0\} < +\infty$$

Si K_p est tel que $e_\lambda \in \mathcal{H}(G(\mathbb{Q}_p)//K_p)$ alors $\forall g \in \tilde{J}\ \forall \pi\ \ \pi(e_\lambda * \delta_g) = \pi(e_\lambda)\pi(g)$ et donc,

$$\#\{\pi \mid \pi(e_\lambda * \delta_g) \neq 0 \text{ et } a_\pi \neq 0\} < +\infty$$

Il existe donc un ensemble fini E de caractères non ramifiés de $G(\mathbb{Q}_p)$ vérifiant

$$\forall \chi, \chi' \in E\ \ \chi \neq \chi' \Longrightarrow \pi_0 \otimes \chi \not\simeq \pi_0 \otimes \chi'$$

et

$$\sum_{\chi \in E} a_{\pi_0 \otimes \chi} \mathrm{tr}_{\pi_0 \otimes \chi}(e_\lambda * \delta_g) = 0$$

or, $\mathrm{tr}_{\pi_0 \otimes \chi}(e_\lambda * \delta_g) = \chi(g)\mathrm{tr}_{\pi_0}(e_\lambda * \delta_g)$ et $\mathrm{tr}_{\pi_0}(e_\lambda * \delta_g) \neq 0$ (lemme B.1.2). On en déduit

$$\forall g \in \tilde{J}\ \ \sum_{\chi \in E} a_{\pi_0 \otimes \chi}\ \chi(g) = 0$$

Rappelons (annexe B) que $\pi_0 \otimes \chi \not\simeq \pi_0 \otimes \chi' \Leftrightarrow \chi_{|\tilde{J}} \neq \chi'_{|\tilde{J}}$ et donc par indépendance linéaire des caractères

$$a_{\pi_0} = 0$$

Fixons maintenant $\Pi_0 \in \mathrm{Irr}(G(\mathbf{A}_f))$ vérifiant $\Pi_{0p} \simeq \pi_0$. Fixons toujours $\tau \in W_{E_\nu}$. Soit w une place de $\mathbb{Q}$ en laquelle $G(\mathbb{Q}_w)$ est non ramifié de type adjoint et Π_{0w} sphérique. Fixons $f^{pw} \in \mathcal{H}(G(\mathbf{A}_f^{pw}))$. Il résulte de l'égalité $a_{\pi_0} = 0$ que l'on a la relation

$$\forall f_w \in \mathcal{H}(G(\mathbb{Q}_w))\ \ \ \mathrm{supp}(f_w) \subset G(\mathbb{Q}_w)_{reg}$$

$$\sum_{\pi\in\mathrm{Irr}(G(\mathbb{Q}_w))}\left(\sum_{\substack{\Pi\in\mathrm{Irr}(G(\mathbf{A}_f))\\ \Pi_p\simeq\pi_0}}\mathrm{tr}_{\Pi^{pw}}(f^{pw})\mathrm{tr}(\tau;\rho(\Pi))\right)\mathrm{tr}_\pi(f_w)=0$$

On déduit donc du lemme 8.2.1 que

$$\forall f^{pw}\in\mathcal{H}(G(\mathbf{A}_f^{pw}))\ \forall\tau\in W_{E_\nu}\sum_{\substack{\Pi\in\mathrm{Irr}(G(\mathbf{A}_f))\\ \Pi_p\simeq\Pi_{0p}\\ \Pi_w\simeq\Pi_{0w}}}\mathrm{tr}_{\Pi^{pw}}(f^{pw})\mathrm{tr}(\tau;\rho(\Pi))=0$$

Fixons un niveau K^{pw} tel que $(\Pi_0^{pw})^{K^{pw}}\neq(0)$. Alors, si

$$X=\{\Pi^{pw}\in\mathrm{Irr}(G(\mathbf{A}_f^{pw}))\mid(\Pi^{pw})^{K^{pw}}\neq(0)\text{ et }\rho(\Pi_{0,p}\otimes\Pi_{0,w}\otimes\Pi^{pw})\neq(0)\}$$

$\#X<+\infty$. Les représentations semi-simples de W_{E_ν} de dimension finie sur $\mathbb{C}$ sont équivalentes aux représentations semi-simples de dimension finie sur $\mathbb{C}$ de la $\mathbb{C}$-algèbre

$$R=\varinjlim_{i\in\mathbb{N}}\mathbb{C}[W_{E_\nu}/\mathbf{Gal}(\overline{E}_\nu|E_\nu)^{(i)}]$$

Il résulte alors de l'indépendance linéaire des caractères que les traces des éléments de

$$\mathcal{H}(G(\mathbf{A}_f^{pw})//K^{pw})\otimes_{\mathbb{C}}R$$

permettent de séparer les

$$\Pi^{pw}\otimes\rho(\Pi_{0,p}\otimes\Pi_{0,w}\otimes\Pi^{pw})\ ,\quad\Pi^{pw}\in X$$

On en déduit donc que

$$[\rho(\Pi_0)]=0$$

□

CHAPITRE 9

LE THÉORÈME

Soit $\mathcal{D}$ une donnée de type P.E.L. non ramifiée en p, et Sh_K les variétés de Shimura associées, que nous supposerons compactes. Nous supposerons pour cela que $D = \mathrm{End}_B(V)$ est une algèbre à division. Nous supposerons de plus qu'en toutes les places finies de F, D est soit déployée soit une algèbre à division. Nous supposerons également que l'on est dans le cas (A), c'est à dire dans le cas unitaire et que le corps C.M. F est de la forme $F^+\mathcal{K}$ où $\mathcal{K}|\mathbb{Q}$ est une extension quadratique imaginaire.

Rappelons que l'on note

$$G(\mathbb{Q}_p) = \prod_{i\in I} \mathrm{GL}_n(F_{v_i}) \times G(\prod_{j\in J} U(n; F_{v_j}))$$

Le facteur de droite n'étant pas tout à fait un produit, ses représentations ne se décrivent pas immédiatement à partir des représentations de chaque facteur. Afin de ne pas trop alourdir les notations nous supposerons donc dans ce chapitre que $J = \emptyset$ ou bien que $\#J = 1$, ce qui est suffisant pour les applications que nous avons en vue.

Si

$$A = \sum_{\Pi\in\mathrm{Irr}(G(\mathbf{A}_f))} [\Pi] \otimes [\sigma(\Pi)] \in \mathrm{Groth}(G(\mathbf{A}_f) \times W_{E_\nu})$$

on note

$$A_{cusp} = \sum_{\substack{\Pi \\ \Pi_p \text{ supercuspidale}}} [\Pi] \otimes [\sigma(\Pi)]$$

Théorème 9.0.2. — 1. *Supposons p décomposé dans $\mathcal{K}$ (et donc $J = \emptyset$), alors*

$$\left[\varinjlim_K H^\bullet(Sh_K, \mathcal{L}_\rho) \right]_{cusp} = \left[\varinjlim_K H^\bullet(Sh_K^{an}(b_0), \mathcal{L}_\rho) \right]_{cusp}$$

2. *Supposons p inerte dans $\mathcal{K}$ et $\#J = 1$. Supposons démontré l'existence d'une application de changement de base local en p pour les groupes unitaires non ramifiés (ce qui est le cas pour $U(3)$, C.1.3) et l'existence de types pour les représentations supercuspidales des groupes unitaires non ramifiés en p (confère B.3.2) (c'est le cas*

pour $U(3)$ lorsque $p \neq 2$, B.3.1). On a alors l'égalité

$$\left[\varinjlim_{K} H^{\bullet}(Sh_K, \mathcal{L}_\rho) \right]_{|W_{E_\nu \mathcal{K}_p}, cusp} = \left[\varinjlim_{K} H^{\bullet}(Sh_K^{an}(b_0), \mathcal{L}_\rho) \right]_{|W_{E_\nu \mathcal{K}_p}, cusp}$$

Démonstration. — La démonstration consiste à comparer deux formules des traces, l'une sur la fibre générique, l'autre sur la fibre spéciale.

Nous donnons la démonstration dans le cas où $\#J = 1$, le cas où $J = \emptyset$ étant plus simple puisqu'il suffit dans les démonstrations de remplacer le groupe de similitudes unitaires associé à la place indexée par J par $\mathbb{Q}_p^\times$.

Commençons par rappeler quelques notations. Notons $J = \{j\}$. Fixons une représentation supercuspidale π_0 de $G(\mathbb{Q}_p)$. Via l'isomorphisme

$$G(\mathbb{Q}_p) \simeq \prod_{i \in I} \mathrm{GL}_n(F_{v_i}) \times GU(n; F_{v_j})$$

notons

$$\pi_0 = \otimes_{i \in I} \pi_{0,i} \otimes \pi_{0,j}$$

où les représentations $\pi_{0,i}$ et $\pi_{0,j}$ sont supercuspidales. Pour tout k dans $I \cup J$ soit (λ_k, J_k) un type associé à la classe d'équivalence inertielle de $\pi_{0,k}$. Nous noterons $\tilde{J}_k$ le sous-groupe compact modulo le centre associé (confère l'annexe B)), et $\tilde{\lambda}_k$ l'extension de λ_k à $\tilde{J}_k$ vérifiant

$$\forall i \in I \;\; \pi_{0,i} \simeq c - Ind_{\tilde{J}_i}^{\mathrm{GL}_n(F_{v_i})} \tilde{\lambda}_i \text{ et } \forall j \in J \;\; \pi_{0,j} \simeq c - Ind_{\tilde{J}_j}^{GU(n;F_{v_j})}$$

Pour tout k dans $I \cup J$ fixons $g_k \in \tilde{J}_k$, et soit e_{λ_k} l'idempotent de l'algèbre de Hecke associé défini par

$$e_{\lambda_k}(g) = \begin{cases} 0 \text{ si } g \notin J_k \\ \frac{\dim \lambda_k}{vol(J_k)} \chi \lambda_k(g) \text{ si } g \in J_k \end{cases}$$

Posons

$$\begin{array}{rcl} \forall k \in I \cup J \quad f_k & = & e_{\lambda_k} * \delta_{g_k} \\ f_p & = & \otimes_{i \in I} f_i \otimes f_j \in \mathcal{H}(G(\mathbb{Q}_p)) \end{array}$$

Soient $f^p \in \mathcal{H}(G(\mathbf{A}_f^p))$ et $\tau \in W_{E_\nu \mathcal{K}_p}$.

Commençons par établir la formule des traces sur la fibre générique. Plus précisément, on cherche une expression pour

$$\mathrm{tr}(f \times \tau; [H^{\bullet}(\mathrm{Sh}, \mathcal{L}_\rho)])$$

Si la représentation $\Pi \in \mathrm{Irr}(G(\mathbf{A}_f))$ est telle que Π intervienne dans $[H^{\bullet}(Sh, \mathcal{L}_\rho)]$, la non nullité de $\mathrm{tr}(f; \Pi)$ implique que Π_p est supercuspidale et qu'il existe un caractère non ramifié χ de $G(\mathbb{Q}_p)$ tel que $\Pi_p \simeq \pi_0 \otimes \chi$.

Il résulte donc de l'annexe A que :

$$\begin{aligned} &\mathrm{tr} \quad (f \times \tau; [H^\bullet(Sh, \mathcal{L}_\rho)]) \\ &= \sum_{\substack{\Pi \in \mathrm{Irr}(G(\mathbf{A}_f)) \\ \Pi_p \in [\pi_0, G(\mathbb{Q}_p)] \\ \exists \Pi' \in \mathcal{T}(G)_\rho \ \Pi = \Pi'_f}} m_\Pi \ \mathrm{tr}_\Pi(f) \ \mathrm{tr}\left(\tau; r_{\mu_{\overline{\mathbb{Q}_p}}} \circ \tilde{\sigma}_\ell(\mathrm{BC}(\Pi_p))_{|E_\nu} |.|^{-\frac{\dim Sh}{2}}\right) \end{aligned}$$

où m_Π est la multiplicité d'une $\Pi' \in \mathcal{T}(G)_\rho$ vérifiant $\Pi \simeq \Pi'_f$ et BC désigne le changement de base local (qui existe par hypothèse en la place v_j).

On dispose seulement d'une formule des traces pour la trace d'une fonction de l'algèbre de Hecke (théorème 7.4.1), mais pas pour $f \times \tau$. C'est pourquoi nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 9.0.3. — *Pour tout $\tau \in W_{E_\nu \mathcal{K}_p}$ il existe une fonction*

$$\tilde{f}_p^\tau \in \bigotimes_{i \in I} (e_{\lambda_i} * \mathcal{H}(GL_n(F_{v_i})) * e_{\lambda_i}) \otimes (e_{\lambda_j} * \mathcal{H}(GU(n; F_{v_j})) * e_{\lambda_j}) \subset \mathcal{H}(G(\mathbb{Q}_p))$$

telle que $\forall \chi$ caractère non ramifié de $G(\mathbb{Q}_p)$ on ait

$$tr(\tilde{f}_p^\tau; \pi_0 \otimes \chi) = tr(f_p; \pi_0 \otimes \chi) \ tr\left(\tau; r_{\mu_{\overline{\mathbb{Q}_p}}} \circ \tilde{\sigma}_\ell(\pi_0 \otimes \chi)|.|^{-\frac{\dim Sh}{2}}\right)$$

Démonstration. — Notons $X_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}}(G(\mathbb{Q}_p))$ le groupe des caractères non ramifiés de $G(\mathbb{Q}_p)$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times$. Le groupe $X_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}}(G(\mathbb{Q}_p))$ s'identifie aux points à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ d'une variété algébrique de type fini sur $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ (plus précisément un tore). De plus, soit le groupe fini

$$\Gamma = \{\chi \in X_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}}(G(\mathbb{Q}_p)) \mid \pi_0 \otimes \chi \simeq \pi_0\}$$

Les fonctions régulières sur le tore quotient par Γ s'identifient à l'algèbre de Hecke du type $\lambda = \otimes_i \lambda_i \otimes \lambda_j$ de $G(\mathbb{Q}_p)$ (annexe B.1.2).

Considérons maintenant la fonction

$$\begin{aligned} F : X_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}}(G(\mathbb{Q}_p)) &\longrightarrow \overline{\mathbb{Q}_\ell} \\ \chi &\longmapsto \mathrm{tr}(f_p; \pi_0 \otimes \chi) \ \mathrm{tr}(\tau; r_{\mu_{\overline{\mathbb{Q}_p}}} \circ \tilde{\sigma}_\ell(\pi_0 \otimes \chi)_{|E_\nu} |.|^{-\frac{\dim Sh}{2}}) \end{aligned}$$

Étant donné que $\tilde{\sigma}_\ell$ est défini au niveau des classes d'isomorphisme de représentations, F est invariante par Γ et descend donc en une fonction sur $X_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}}(G(\mathbb{Q}_p))/\Gamma$. Montrons que cette fonction est régulière.

Un tel χ élément de $X_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}}(G(\mathbb{Q}_p))$ est de la forme

$$\chi = \otimes_{i \in I} (\chi_i \circ \det) \otimes \chi_j$$

où $\forall i$ χ_i est un caractère non ramifié de $F_{v_i}^\times$ et χ_j de $GU(n; F_{v_j})$. Le caractère $\mathrm{BC}(\chi_j)$ est un caractère non ramifié de $\mathrm{GL}_n(F_{v_j}) \times \mathbb{Q}_p^\times$. Notons $\mathrm{BC}(\chi_j) = (\chi'_j \circ \det) \otimes \chi''_j$. L'application $\chi_j \mapsto \mathrm{BC}(\chi_j)$ est régulière (on peut la décrire explicitement). On a alors,

$$(\pi_{0,i} \otimes \chi_i)(f_i) = \pi_{0,i}(f_i) \ \chi_i(\det g_i) \ \text{ et } \ (\pi_{0,j} \otimes \chi_j)(f_j) = \pi_{0,j}(f_j) \ \chi_j(g_j)$$

duquel on déduit

$$\mathrm{tr}(f_p; \pi_0 \otimes \chi) = \mathrm{tr}(f_p; \pi_0). \prod_{i \in I} \chi_i(\det g_i) \ \chi_j(g_j)$$

De plus,

$$\forall i \in I \;\; \sigma_\ell(\pi_{0,i} \otimes \chi \circ \det) = \sigma_l(\pi_{0,i}) \otimes \sigma_\ell(\chi)$$

où $\sigma_\ell(\chi_i) : W_{F_{v_i}} \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times$ est associé à χ_i par la théorie du corps de classe local, et

$$\sigma_\ell(\mathrm{BC}(\pi_{0,j} \otimes \chi_j)) = \sigma_\ell(\mathrm{BC}(\pi_{0,j}) \otimes ((\chi'_j \circ \det) \otimes \chi''_j)) = \sigma_\ell(\mathrm{BC}(\pi_{0,j})) \otimes \sigma_\ell(\chi'_j) \otimes \sigma_\ell(\chi''_j)$$

Utilisant le fait que pour tout k dans $I \cup J$ l'extension $E_k|\mathbb{Q}_p$ est non ramifiée on en déduit :

$$r_{\mu_{\overline{\mathbb{Q}_p}}} \circ \tilde{\sigma}_\ell(\pi_0 \otimes \chi)(\tau) = (r_{\mu_{\overline{\mathbb{Q}_p}}} \circ \tilde{\sigma}_\ell(\pi_0)(\tau)). \prod_{i \in I} \chi_i(p)^{-v(\tau) \sum_{\tau \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(F_{v_i}, \overline{\mathbb{Q}_p})} p_i} \chi'_j(p)^{-v(\tau) p_j} \chi''_j(p)^{-v(\tau)}$$

où les p_i, p_j sont des entiers associées à μ. La fonction F est donc une fonction régulière. D'après l'annexe B.1.2 il existe donc $\tilde{f}_p^\tau \in \mathcal{H}(\lambda, G(\mathbb{Q}_p))$ vérifiant

$$\forall \chi \in X_{\overline{\mathbb{Q}_\ell}}(G(\mathbb{Q}_p)) \quad F(\chi) = \mathrm{tr}_{\pi_0 \otimes \chi}(\tilde{f}_p^\tau)$$

□

Remarque 9.0.4. — On peut aussi utiliser le théorème de Paley-Wiener scalaire ([**6**]) pour obtenir l'existence d'une fonction $\tilde{f}_p^\tau \in \mathcal{H}(G(\mathbb{Q}_p))$ vérifiant

$$\forall \pi \in \mathrm{Irr}(G(\mathbb{Q}_p)) \;\; \mathrm{tr}_\pi(\tilde{f}_p^\tau) = \mathrm{tr}_\pi(f_p) \; \mathrm{tr}(\tau; r_{\mu_{\overline{\mathbb{Q}_p}}} \circ \tilde{\sigma}_\ell(\pi)_{|E_\nu} |.|^{-\frac{\dim Sh}{2}})$$

Cependant nous aurons besoin par la suite de l'annulation des intégrales orbitales de $\tilde{f}_p^\tau$ sur les éléments réguliers non elliptiques. Pour la fonction $\tilde{f}_p^\tau$ du lemme ci dessus ce sera une conséquence facile de l'appartenance de $\tilde{f}_p^\tau$ à l'algèbre de Hecke d'un type supercuspidal. Si l'on veut utiliser le théorème de Paley-Wiener scalaire et non le lemme ci dessus, cela est une conséquence du théorème A-(b) de [**34**].

Posons $\tilde{f}^\tau = \tilde{f}_p^\tau \otimes f^p$ qui dépend donc de τ. Il résulte du lemme que l'on a l'égalité

$$\mathrm{tr}(\tilde{f}^\tau; [H^\bullet(\mathrm{Sh}, \mathcal{L}_\rho)]) = \mathrm{tr}(f \times \tau; [H^\bullet(\mathrm{Sh}, \mathcal{L}_\rho)])$$

Supposons maintenant qu'en une place w de $\mathbb{Q}$, f_w soit à support dans les éléments réguliers de $G(\mathbb{Q}_w)$ (on suppose f décomposée en un produit $\otimes_v f_v$). Il résulte de l'égalité précédente ainsi que du théorème 7.4.1 que :

$$\mathrm{tr}\,(f \times \tau; [H^\bullet(\mathrm{Sh}, \mathcal{L}_\rho)]) = \sum_{\substack{\{\gamma\} \in \{G(\mathbb{Q})\} \\ \gamma \text{ régulier} \\ \gamma \text{ elliptique dans } G(\mathbb{R})}} vol(G(\mathbb{Q})_\gamma \backslash G(\mathbf{A})_\gamma) \mathrm{tr}\rho(\gamma) \; \mathcal{O}_\gamma(\tilde{f}_p^\tau) \; \mathcal{O}_\gamma(f^p)$$

Remarquons maintenant qu'étant donné que $\tilde{f}_p^\tau$ est dans l'algèbre de Hecke associée à un type supercuspidal, pour tout élément γ de $G(\mathbb{Q}_p)$ semi-simple régulier non elliptique $\mathcal{O}_\gamma(\tilde{f}_p) = 0$.

D'où la formule

$$\mathrm{tr}\,(f \times \tau; [H^\bullet(\mathrm{Sh}, \mathcal{L}_\rho)]) = \sum_{\substack{\{\gamma\} \in \{G(\mathbb{Q})\} \\ \gamma \text{ régulier} \\ \gamma \text{ elliptique dans } G(\mathbb{R}) \text{ et } G(\mathbb{Q}_p)}} vol(G(\mathbb{Q})_\gamma \backslash G(\mathbf{A})_\gamma) \mathrm{tr}\rho(\gamma) \; \mathcal{O}_\gamma(\tilde{f}_p^\tau) \; \mathcal{O}_\gamma(f^p)$$

Passons maintenant à la formule des traces sur la fibre spéciale.

Soit donc f_p comme précédemment fixée définitivement. Soit $\tilde{K} \subset G(\mathbf{A}_f^p)$ un compact. Il résulte du théorème 6.12.5 appliqué à toute la variété de Shimura qu'il existe un entier N tel que $\forall \tau \in W_{E_v\mathcal{K}_p},\ v(\tau) \geq N,\ \forall f^p \in \mathcal{H}(G(\mathbf{A}_f^p))\ \mathrm{supp}(f^p) \subset \tilde{K}$

$$\mathrm{tr}\,(f \times \tau; [H^\bullet(\mathrm{Sh}, \mathcal{L}_\rho)]) = \sum_{\phi} \sum_{\{\gamma\} \in \{I^\phi(\mathbb{Q})\}} \lambda_{\phi,\{\gamma\},\tau}\ \mathcal{O}_\gamma(f^p)$$

où $\lambda_{\phi,\{\gamma\},\tau} = 0$ sauf pour un nombre fini de $(\phi, \{\gamma\})$ (ce nombre fini tendant vers l'infini lorsque $\tilde{K}$ grossi et $v(\tau)$ varient). Nous choisirons de plus N suffisemment grand de tel façon que le théorème 6.12.5 s'applique également à la strate basique.

On a donc l'égalité

$$\mathrm{tr}\,(f \times \tau; [H^\bullet(\mathrm{Sh}^{an}(b_0), \mathcal{L}_\rho)]) = \sum_{\phi, b(\phi)=b_0} \sum_{\{\gamma\} \in \{I^\phi(\mathbb{Q})\}} \lambda_{\phi,\{\gamma\},\tau}\ \mathcal{O}_\gamma(f^p)$$

Remarquons que si ϕ n'est pas basique et $\gamma \in I^\phi(\mathbb{Q})$ alors γ est dans une forme intérieure d'un Levi propre de $G(\mathbb{Q}_p)$, J_b.

Nous pouvons maintenant comparer les formules des traces sur la fibre générique et sur la fibre spéciale.

Fixons un compact $\tilde{K}$ dans $G(\mathbf{A}_f^p)$. Soit $v_1 \neq p$ une place de $\mathbb{Q}$ décomposée dans $\mathcal{K}$. Supposons le compact $\tilde{K}$ de la forme $\tilde{K}_{v_1} \times \tilde{K}^{v_1}$. Soit f_p comme précédemment et $f^{p,v_1} \in \mathcal{H}(G(\mathbf{A}_f^{p,v_1}))$ telle que $\mathrm{supp}(f^{p,v_1}) \subset \tilde{K}^{v_1}$, et en une place f est à support dans les éléments réguliers. Soit $\tau \in W_{E_v\mathcal{K}_p}$ tel que $v(\tau) \geq N$ où N est associé à $\tilde{K}$. Pour une fonction f_{v_1}, on note $\tilde{f}_p^\tau$ la fonction associée à τ et $\tilde{f}^\tau = \tilde{f}_p \otimes f^p$. Désormais, τ et f^{v_1} sont fixés. Alors,

$$\forall f_{v_1}\ \ \mathrm{supp}(f_{v_1}) \subset \tilde{K}_{v_1} \qquad \sum_{\substack{\{\gamma\} \in \{G(\mathbb{Q})\} \\ \gamma \text{ régulier} \\ \gamma \text{ elliptique dans } G(\mathbb{R}) \text{ et } G(\mathbb{Q}_p)}} \alpha_{\{\gamma\}} \mathcal{O}_\gamma(f_{v_1}) = \sum_{\phi} \sum_{\{\gamma\} \in \{I^\phi(\mathbb{Q})\}} \beta_{\phi,\{\gamma\}} \mathcal{O}_\gamma(f_{v_1})$$

où l'on a posé

$$\alpha_{\{\gamma\}} = vol(G(\mathbb{Q})_\gamma \backslash G(\mathbf{A})_\gamma) \mathrm{tr}\rho(\gamma)\ \mathcal{O}_\gamma((\tilde{f}^\tau)^{v_1})$$

et $b_{\phi,\{\gamma\}} = \lambda_{\{\gamma\},\tau}\ \mathcal{O}_\gamma(f^{p,v_1})$ qui dépendent de f^{v_1} et τ.

Regroupons les termes par classes de conjugaison dans $G(\mathbb{Q}_{v_1})$: on obtient

$$\sum_{\{\gamma'\} \in \{G(\mathbb{Q}_{v_1})\}_{reg}} \left(\sum_{\substack{\{\gamma\} \in \{G(\mathbb{Q})\} \\ \gamma \text{ régulier} \\ \gamma \text{ elliptique dans } G(\mathbb{R}) \text{ et } G(\mathbb{Q}_p) \\ \gamma \sim \gamma'}} \alpha_{\{\gamma\}} - \sum_{\substack{\phi, \{\gamma\} \in I^\phi(\mathbb{Q}) \\ \gamma \sim \gamma'}} \beta_{\phi,\{\gamma\}} \right) \mathcal{O}_{\gamma'}(f_{v_1}) = 0$$

où, étant donné que $\mathrm{supp}(f_{v_1})$ reste dans le compact $\tilde{K}_{v_1}$, la somme porte sur un nombre fini de classes de conjugaisons semi-simples régulières dans $G(\mathbb{Q}_{v_1})$ intersectant le compact $\tilde{K}_{v_1}$.

Étant donné que les classes de conjugaison sont fermées, disjointes et en nombre fini on peut les séparer par des éléments $f_{v_1} \in \mathcal{H}(G(\mathbb{Q}_{v_1}))$ vérifiant $\mathrm{supp}(f_{v_1}) \subset \tilde{K}_{v_1}$.

On obtient donc $\forall \gamma' \in G(\mathbb{Q}_{v_1})$ semi-simple régulier

$$\sum_{\substack{\{\gamma\}\in\{G(\mathbb{Q})\}\\ \gamma \text{ régulier}\\ \gamma \text{ elliptique dans } G(\mathbb{R}) \text{ et } G(\mathbb{Q}_p)\\ \gamma\sim\gamma'}} \alpha_{\{\gamma\}} = \sum_{\substack{\phi,\{\gamma\}\in I^{\phi}(\mathbb{Q})\\ \gamma\sim\gamma'}} \beta_{\phi,\{\gamma\}}$$

Remarquons maintenant que si ϕ est non basique et $\gamma_1 \in I^{\phi}(\mathbb{Q})$ régulier, γ_1 ne peut être conjugué dans $G(\mathbb{Q}_{v_1})$ à un élément γ_2 de $G(\mathbb{Q})$ elliptique dans $G(\mathbb{Q}_p)$. En effet, γ_1 vu comme élément de J_b se transfert en un élément γ_1' de $M(b)$ (le centralisateur du morphisme des pentes) la forme intérieure quasi-déployée de J_b (l'explicitation de l'existence de ce transfert est faite à la fin du théorème III.7.3.2). L'élément γ_2 serait alors stablement conjugué à un élément γ_1' d'un Levi propre de $G(\mathbb{Q}_p)$ ce qui d'après le lemme 7.3.1 est incompatible avec le fait que γ_2 est elliptique régulier.

On en déduit donc :

$$\sum_{\substack{\phi \text{ non basique}\\ \{\gamma\}\in\{I^{\phi}(\mathbb{Q})\}}} \beta_{\phi,\{\gamma\}} = 0$$

On peut maintenant appliquer de nouveau le théorème 6.12.5 à la strate basique pour obtenir que $\forall f_{v_1},\ \mathrm{supp}(f_{v_1}) \subset \tilde{K}_{v_1}$

$$\mathrm{tr}\,(f \times \tau; [H^{\bullet}(\mathrm{Sh}, \mathcal{L}_{\rho})]) = \mathrm{tr}\,(f \times \tau; [H^{\bullet}(\mathrm{Sh}^{an}(b_0), \mathcal{L}_{\rho})])$$

Nous pouvons mainteant faire varier f^{v_1} et τ tels que $\mathrm{supp}(f^{v_1}) \subset \tilde{K}^{v_1}$ et $v(\tau) \geq N$. On peut alors appliquer le théorème 8.3.1 pour conclure. □

Remarque 9.0.5. — Dans le théorème précédent, dans le second cas, lorsque G est un groupe de similitudes unitaires en trois variables la restriction de W_{E_ν} à $W_{E_\nu \mathcal{K}_p}$ est inutile. C'est une conséquence du théorème A.7.8.

PARTIE IV

APPLICATION À LA COHOMOLOGIE DES ESPACES DE RAPOPORT-ZINK DE TYPE E.L. ET P.E.L.

CHAPITRE 10

Nous démontrons dans cette partie les principaux résultats de cette thèse, à savoir les conjectures de Kottwitz ([**50**] conjecture 5.1, [**25**] conjecture 5.3 et la conjecture 5.4 qui est une généralisation de la conjecture de Kottwitz) pour la partie supercuspidale de la cohomologie des espaces de Rapoport-Zink basiques suivants :

- Les espaces de type E.L. non ramifiés pour lesquels le groupe J_b est anisotrope modulo le centre ou bien égal à G (théorèmes 10.1.4 et 10.1.5) (la restriction sur J_b provient du fait que cette hypothèse simplifie la comparaison des formules des traces)
- Pour les espaces de type P.E.L. non ramifiés associés au groupe unitaire $U(3)$ sur des extensions de degré impaires de $\mathbb{Q}_p$, $p \neq 2$, nous les démontrons pour les représentations supercuspidales stables. Nous démontrons des résultats plus faibles pour les autres représentations supercuspidales. (théorème 10.2.2)
- De même pour $U(n)$ en supposant certains faits connus concernant l'analyse harmonique sur les groupes unitaires locaux et globaux en n variables.

Avec le cas des espaces de type P.E.L. non ramifiés associés au groupe $U(3)$ nous donnons ainsi le premier exemple de loi de réciprocité locale non abélienne construite géométriquement et associée à des groupes autres que des formes intérieures du groupe linéaire.

Remarque 10.0.6. — Si l'on sait démontrer la conjecture de Kottwitz pour les espaces de Rapoport-Zink associés à des données simples, on sait la démontrer pour des produits de tels espaces, c'est à dire des espaces associés à des données semi-simples. C'est une simple application de la formule de Künneth. En particulier, les résultats annoncés restent valables pour des produits des espaces non ramifiés de type E.L. et P.E.L. pour lesquels le résultat est démontré.

10.1. Espaces de type E.L. non ramifiés

10.1.1. Construction de données globales à partir de données locales. —

10.1.1.1. Le résultat de Clozel. — Commençons par rappeler les résultats de la seconde section de [**12**] qui donnent une condition nécessaire et suffisante pour qu'une famille de

formes intérieures locales d'un groupe unitaire presque-partout localement triviale provienne d'un groupe unitaire global. Ces conditions sont déduites du formalisme développé par Kottwitz pour étudier la cohomologie galoisienne des groupes réductifs sur les corps de nombres.

Soit donc F un corps C.M. de sous corps totalement réel maximal F^+. Supposons nous donnée une famille $(U_v)_v$, où v parcourt les places de F^+, de groupes unitaires en n variables sur F_v^+ (nous entendons par là que U_v est une forme intérieure du groupe $U(n)_{F_v^+}$ où $U(n)/F^+$ est le groupe unitaire quasi-dépolyé en n variables associé à l'extension quadratique $F|F^+$). Soit Φ un type C.M. de F. Lorsque v parcourt les places infinies de F^+, les groupes U_v sont donc donnés par des couples d'entiers $(p_\tau, q_\tau)_{\tau\in\Phi}$ tels que si τ induit v alors

$$U_v \simeq U(p_\tau, q_\tau)$$

Si v est une place de F^+ décomposée dans F, U_v est du type $\mathbf{GL}_a(D)$ où $a|n$ et D/F_v^+ est une algèbre à division d'invariant $\dfrac{r}{n/a}$ avec $r \wedge n/a = 1$. Avec les notations de (2.3) de [**12**], lorsque n est pair, l'invariant local associé dans $\mu_n^D \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est ra mod n. Dans ce cas, la composante en v de l'invariant global associé est donc ra mod 2. Qui est non nul ssi a est impair (puisque a impaire implique r impair).

Si v est une place finie de F^+ inerte dans F, si n est impaire, il y a un unique groupe unitaire en n variables sur F_v^+, le groupe unitaire quasi-déployé. Le groupe U_v est donc ce groupe. Si n est pair, il y en a deux : la forme quasidéployée et l'autre (suivant que le discriminant de la forme hermitienne définissant le groupe est une norme de l'extension quadratique ou non). Dans ce cas là, il y a donc deux possibilités pour U_v.

Les résultats de la section 2 de [**12**] s'énoncent ainsi :

Proposition 10.1.1. — *Supposons que pour presque tout v, U_v est quasi-déployé.*

Si n est impair, il existe un groupe unitaire U/F^+ tel que $\forall v\ \ U_{F_v^+} \simeq U_v$.

Si n est pair, notons A le cardinal de l'ensemble des places finies déployées de F^+ telles que U_v soit de la forme $\mathbf{GL}_a(D)$ avec a impair, notons B le cardinal des places finies inertes de F^+ telles que U_v soit non quasi-déployé. Il existe un groupe unitaire U/F^+ tel que $\forall v\ \ U_{F_v^+} \simeq U_v$ ssi

$$\frac{n}{2}[F^+ : \mathbb{Q}] + \sum_{\tau\in\Phi} p_\tau \equiv A + B \ \ mod\ 2$$

Dans tous les cas, U est le groupe unitaire associé à $(\mathcal{B}, *)$ où $\mathcal{B}/F$ est une algèbre simple et $*$ une involution de seconde espèce.

10.1.1.2. Un lemme. —

Lemme 10.1.2. — *Soit $F'|\mathbb{Q}_p$ une extension de degré fini. Il existe un corps de nombres totalement réel F^0 tel que p soit inerte dans F^0 et $F_p^0 \simeq F'$.*

Démonstration. — Écrivons pour cela $F' = \mathbb{Q}_p(\alpha)$ avec $P \in \mathbb{Q}_p[X]$ le polynôme minimal de α. On peut choisir α tel que P soit unitaire à coefficients dans $\mathbb{Z}_p$. Notons d le degré de P. Alors, le lemme de Krasner montre que pour $Q \in \mathbb{Z}_p[X]$ suffisamment proche de

P, Q est irréductible et une racine de Q engendre F'.

Par densité de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}_p$ le lemme se ramène alors à montrer que pour tout polynôme $Q \in \mathbb{Z}[X]$ de degré d, pour tout voisinage p-adique de Q dans les polynômes à coefficients entiers de degré d il existe un polynôme dont toutes les racines soient réelles. Le fait que dans dans l'extension construite à partir d'une racine d'un tel polynôme, p reste inerte est conséquence du fait que le polynôme de $\mathbb{Z}[X]$ est irréductible dans $\mathbb{Q}_p[X]$.

Soit $E = \mathbb{R}[X]_d$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes de degré inférieure ou égal à d. Pour tout entier N, $p^N.\mathbb{Z}[X]_d$ est un réseau de E. Considérons l'isomorphisme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels

$$\begin{array}{rcl} \varphi : E & \longrightarrow & \mathbb{R}^{d+1} \\ R & \longmapsto & (R(0), \ldots, R(d)) \end{array}$$

Le groupe $\varphi(p^N.\mathbb{Z}[X]_d)$ est un réseau de $\mathbb{R}^{d+1}$. Et l'on veut montrer que $\varphi(Q+p^N.\mathbb{Z}[X]_d)$ intersecte l'ensemble $\{x_0 < 0, x_1 > 0, x_2 < 0, \ldots\}$. Or on montre aisément que pour tout réseau Λ et tout $x \in \mathbb{R}^{d+1}$, $x + \Lambda$ intersecte un tel ensemble. □

10.1.1.3. Construction d'une donnée de type P.E.L. globale à partir d'une donnée de Rapoport-Zink locale de type E.L. non ramifiée simple. — Soit (F', V', b', μ') une donnée de type E.L. non ramifiée simple (I.2.2.1.1) sans sa classe de σ-conjugaison. Nous notons $n = \dim_{F'}(V')$. Soit F^+ un corps de nombres totalement réel dans lequel p est inerte et tel que $F_p^+ \simeq F'$ (lemme 10.1.2). Nous fixons définitivement un isomorphisme $F_p^+ \xrightarrow{\sim} F'$. Soit $\mathcal{K}$ un corps quadratique imaginaire dans lequel p est décomposé. Notons F le corps C.M. $F^+\mathcal{K}$. Notons $p = v_1 v_1^c$ la décomposition de p dans F. Fixons un plongement $\nu : \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$ (où, rappelons le, $\overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$). Définissons le type C.M. Φ de F de la façon suivante :

$$\Phi = \{\tau \in \mathrm{Hom}(F, \overline{\mathbb{Q}}) \mid \nu \circ \tau : F \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p} \text{ induit } v_1 \}$$

Rappelons que le cocaractère μ' est donné par des couples d'entiers $(p'_\tau, q'_\tau)_{\tau \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(F', \overline{\mathbb{Q}_p})}$. Pour $\tau \in \Phi$, τ induit un plongement $\nu \circ \tau : F \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$ qui via l'isomorphisme $F_{v_1} \simeq F'$ (induit par l'isomorphisme $F_p^+ \simeq F'$) induit un plongement $\alpha(\tau) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(F', \overline{\mathbb{Q}_p})$. Nous noterons $(p_\tau, q_\tau) = (p'_{\alpha(\tau)}, q'_{\alpha(\tau)})$.

Construisons un système $(U_v)_v$ comme dans le 10.1.1.1. Pour toute place v de F^+ divisant l'infini, il existe un unique $\tau \in \Phi$ tel que τ induise v. Posons alors

$$U_v = U(p_\tau, q_\tau)$$

Posons également

$$U_p = \mathrm{GL}_n(F')$$

Choisissons une place finie w de F^+ différente de p, décomposée dans F, et posons U_w comme étant égal au groupe des unités d'une algèbre à division sur F_w^+. Posons pour toute place finie w' de F^+ décomposée dans F, différente de p et w, $U_{w'} = \mathbf{GL}_n(F_{w'}^+)$. Si n est impair, faisons un choix quelconque (presque partout quasi-déployé) de groupes unitaires $U_{w''}$ en les places w'' de F^+ inertes dans F. Si n est pair, on peut toujours choisir le

nombre de $U_{w"}$ non quasi-déployés de tel manière que l'équation de la proposition 10.1.1 soit satisfaite.

A ce choix de groupes locaux, la proposition 10.1.1 associe un couple $(\mathcal{B}, *)$ où $\mathcal{B}$ est une algèbre simple sur F et $*$ une involution de seconde espèce sur $\mathcal{B}$.

Étant donné qu'en la place w, $\mathcal{B}$ est une algèbre à division, $\mathcal{B}$ est une algèbre à division. Posons

$$B = \mathcal{B}^{opp}$$

qui est donc muni de l'involution $*$. Sur $\mathbb{R}$ l'involution $*$ devient conjuguée à une involution positive. D'après le lemme 2.8 de [**41**], l'ensemble des $b \in B^{*=1} \otimes \mathbb{R}$ tels que le produit symétrique $(x, y)_b = \mathrm{tr}_{B_{\mathbb{R}}/\mathbb{R}}(xby^*)$ sur $B_{\mathbb{R}} \times B_{\mathbb{R}}$ soit positif est un cône ouvert non vide. Par un argument de densité, cet ensemble rencontre donc l'ensemble $B^{\times} \cap B^{*=1}$. On en déduit qu'il existe un $b \in B^{\times}$ tel que $b^* = b$ et tel que l'involution $\#$ définie sur B par

$$\forall x \in B \quad x^{\#} = bx^*b^{-1}$$

est une involution positive de seconde espèce. Fixons un tel b et notons $\#$ l'involution associée. Soit $\beta \in F$ tel que $\beta^{\#} = -\beta$. Posons $V = B$ vu comme B-module à gauche. Considérons le produit $< .,. >$ défini sur $V \times V$ par

$$\forall x, y \in V \quad < x, y >= \mathrm{tr}_{B/\mathbb{Q}}(xb^{-1}\beta y^{\#})$$

C'est un produit symplectique qui fait de V un $(B, \#)$-module hermitien. De plus,

$$\begin{aligned}
\forall a \in \mathcal{B} = \mathrm{End}_B(V)\ \forall x, y \in V \quad < a(x), y > &= < xa, y > \\
&= \mathrm{tr}_{B/\mathbb{Q}}(xab^{-1}\beta y^{\#}) \\
&= \mathrm{tr}_{B/\mathbb{Q}}(xb^{-1}\beta(bab^{-1})y^{\#}) \\
&= \mathrm{tr}_{B/\mathbb{Q}}(xb^{-1}\beta(y\underbrace{(bab^{-1})^{\#}}_{a^*})^{\#}) \\
&= < x, a^*(y) >
\end{aligned}$$

On en déduit donc que $\mathcal{B} = \mathrm{End}_B(V)$ muni de l'adjonction associée à $< .,. >$ est égal au couple $(\mathcal{B}, *)$. Soit G le groupe des similitudes unitaires associé à $(B, \#, V, < .,. >)$ et G_1 le groupe unitaire. Le groupe G_1 est donc le groupe unitaire associé à $(\mathcal{B}, *)$. Étant donné qu'à l'infini les signatures (p_τ, q_τ) sont fixées, il existe une unique classe de $G_1(\mathbb{R})$-conjugaison h de morphisme d'algèbre à involution de $(\mathbb{C}, c)$ dans $(\mathcal{B}, *)$ telle que le produit $< ., h(i). >$ soit défini positif. Fixons un tel $h : \mathbb{C} \longrightarrow \mathrm{End}_B(V)$. Et posons

$$\mathcal{D} = (B, \#, V, < .,. >, h)$$

qui est une donnée de type P.E.L. au sens du chapitre I.

D'après le choix fait pour Φ et les (p_τ, q_τ) en fonction des (p'_τ, q'_τ) on en déduit la proposition suivante :

Proposition 10.1.3. — *Étant donnée une donnée locale de type E.L. non ramifiée simple sur une extension de $\mathbb{Q}_p$, il existe une donnée globale de type P.E.L. $\mathcal{D} = (B, \#, V, < .,. >, h)$, un plongement $\nu : \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$ tel que via ν, $\mathcal{D}$ induise (i.e. après équivalence de Morita, confère I.2.2.4) la donnée locale. On peut de plus supposer que $End_B(V)$ est une algèbre à division qui est en toutes les places finies soit déployée, soit*

une algèbre à division. On peut également supposer le corps C.M. F de la forme $F^+\mathcal{K}$ où $\mathcal{K}$ est un corps quadratique imaginaire et où p est inerte dans $\mathcal{F}^+$ et décomposé dans $\mathcal{K}$.

10.1.2. Le théorème principal. — Si H est un groupe réductif p-adique, si V est un H-module lisse, on peut définir le sous H-module V_{cusp} de V, la partie supercuspidale, en utilisant par exemple le centre de Bernstein :

$$V_{cusp} = \bigoplus_e e.V$$

où e parcourt les idempotents du centre de Bernstein de H associés aux classes d'équivalences inertielles des représentations supercuspidales de H.

Théorème 10.1.4. — *Soit (V, F, b, μ) une donnée locale de Rapoport-Zink de type E.L. non ramifiée simple basique. Soit $E \subset \overline{\mathbb{Q}_p}$ le corps réflex associé. Supposons le groupe réductif J_b anisotrope modulo son centre, c'est à dire $J_b = D^\times$ pour une algèbre à division D sur F d'invariant calculé en fonction de μ. Notons JL la correspondance de Jacquet-Langlands. Soit π une représentation irréductible de J_b telle que $JL(\pi)$ soit supercuspidale. Il y a une égalité dans le groupe de Grothendieck $Groth(G(\mathbb{Q}_p) \times W_E)$*

$$\sum_i (-1)^i [\varinjlim_K Hom_{J_b}(H^i_c(\breve{\mathcal{M}}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p, \overline{\mathbb{Q}_\ell}), \pi)]_{cusp} = [JL(\pi)] \otimes [r_\mu \circ \tilde{\sigma}_\ell(JL(\pi))_{|E}] \, |.|^{\frac{-\sum_\tau p_\tau q_\tau}{2}}$$

où $\tilde{\sigma}_\ell$ la correspondance de Langlands locale "absolue" ℓ-adique pour le groupe linéaire (A.7.1) et r_μ la représentation du L-groupe associé (A.7.2) sur E.

Rappelons avec les notations du I.2.1.1 que la classe de conjugaison de μ est donnée par des entiers $(a_i)_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}}$, et que J_b est anisotrope ssi

$$\left(\sum_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} a_i \right) \wedge n = 1$$

Alors, $J_b = D^\times$ où l'invariant local de D est $\frac{1}{n} \sum_i a_i \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Il peut également arriver, lorsque $n | \sum_i a_i$, que J_b soit égal à $G(\mathbb{Q}_p)$. Cela ne veut pas dire que les groupe p-divisibles associés sont étales (ce qui est la cas ssi $\forall i \; a_i = 0$), car le groupe J_b tient compte de l'action de F. Dans ce cas là, la correspondance de Jacquet-Langlands est l'identité et on a le théorème suivant :

Théorème 10.1.5. — *Soit (V, F, b, μ) une donnée locale de Rapoport-Zink de type E.L. non ramifiée simple basique. Soit $E \subset \overline{\mathbb{Q}_p}$ le corps réflex associé. Supposons le groupe réductif J_b égal à $G = \mathbf{GL}_n$. Soit π une représentation irréductible supercuspidale de J_b. Il y a une égalité dans $Groth(G(\mathbb{Q}_p) \times W_E)$*

$$\sum_i (-1)^i [\varinjlim_K Hom_{J_b}(H^i_c(\breve{\mathcal{M}}_K \hat{\otimes} \mathbb{C}_p, \overline{\mathbb{Q}_\ell}), \pi)]_{cusp} = [\pi] \otimes [r_\mu \circ \tilde{\sigma}_\ell(\pi)_{|E}] \, |.|^{-\sum_\tau \frac{p_\tau q_\tau}{2}}$$

Voici la démonstration des deux théorèmes ci dessus :

Démonstration. — Soit $\mathcal{D}$ une donnée de type P.E.L. globale induisant la donnée locale, comme dans la proposition 10.1.3. Soit Sh la variété de Shimura associée. Le groupe $G(\mathbb{Q}_p)$ est $\mathbf{GL}_n(F_v) \times \mathbb{Q}_p^\times$ (où F_v est le corps local noté F dans les énoncés). Notons $\breve{\mathcal{M}}(b,\mu)$ l'espace de Rapoport-Zink local associé à la donnée locale. L'espace de Rapoport-Zink associé à $\mathcal{D}$ en p et à la classe basique $b \in B(G_{\mathbb{Q}_p}, \mu_{\overline{\mathbb{Q}_p}})$ est donc

$$\breve{\mathcal{M}}(\mathcal{D}_{\mathbb{Q}_p}, b) = \breve{\mathcal{M}}(b,\mu) \times \mathbb{Q}_p^\times / \mathbb{Z}_p^\times$$

D'après les résultats de l'appendice A, dans le groupe de Grothendieck $\mathrm{Groth}(G(\mathbf{A}_f) \times W_{E_\nu})$, si

$$[H^\bullet(\mathrm{Sh}, \mathcal{L}_\rho)] = \mid \ker^1(\mathbb{Q}, G) \mid \sum_{\Pi \in \mathrm{Irr}(G(\mathbf{A}_f))} [\Pi] \otimes [R_{\ell,\rho,\mu}(\Pi)]$$

la représentation semi-simple $[R_{\ell,\rho,\mu}(\Pi')]$ est non nulle ssi il existe $\Pi \in \mathcal{T}(G)_\rho$ telle que $\Pi' \simeq \Pi_f$. De plus, pour une telle $\Pi \in \mathcal{T}(G)_\rho$, contribuant à $[H^\bullet(\mathrm{Sh}, \mathcal{L}_\rho)]_{cusp}$, i.e. telle que Π_p soit supercuspidale,

$$[R_{\ell,\rho,\mu}(\Pi_f)] = m_\Pi [r_\mu \circ \tilde{\sigma}_\ell(\Pi_p)] \mid . \mid^{-\frac{\dim Sh}{2}}$$

où m_Π désigne la multiplicité de Π dans l'espace des formes automorphes sur G. On obtient donc l'égalité suivante

$$[H^\bullet(\mathrm{Sh}, \mathcal{L}_\rho)]_{cusp} = \mid \ker^1(\mathbb{Q}, G) \mid \sum_{\substack{\Pi \in \mathcal{T}(G)_\rho \\ \Pi_p \text{ supercuspidale}}} [\Pi_f] \otimes [r_\mu \circ \tilde{\sigma}_\ell(\Pi_p)] \mid . \mid^{-\frac{\dim Sh}{2}}$$

Soit ϕ une classe d'isogénie intervenant dans la strate basique et I^ϕ le groupe réductif associé. Rappelons que $I^\phi(\mathbb{R})$ est la forme compacte modulo le centre de $G(\mathbb{R})$, que $I^\phi(\mathbb{Q}_p) = J_b \times \mathbb{Q}_p^\times$ et que $I^\phi(\mathbf{A}_f^p) = G(\mathbf{A}_f^p)$.

Le corollaire 5.0.18 couplé au théorème 9.0.2 montre que l'on a l'égalité suivante :

$$[H^\bullet(\mathrm{Sh}, \mathcal{L}_\rho)]_{cusp} = \mid \ker^1(\mathbb{Q}, G) \mid \sum_{\substack{\Pi \in \mathcal{T}(I^\phi) \\ \Pi_\infty = \check{\rho} \\ \Pi_p \text{ supercuspidale}}} [\varinjlim_K \mathrm{Hom}_{J_b \times \mathbb{Q}_p^\times}(H_c^\bullet(\breve{\mathcal{M}}_K(\mathcal{D}_{\mathbb{Q}_p}, b), \overline{\mathbb{Q}_\ell}), \Pi_p)] \otimes [\Pi^p]$$

Si $\Pi_p = \pi_1 \otimes \chi$ où π_1 est une représentation irréductible de J_b et χ un caractère de $\mathbb{Q}_p^\times$, il y a un isomorphisme

$$\varinjlim_K \mathrm{Hom}_{J_b \times \mathbb{Q}_p^\times}(H_c^\bullet(\breve{\mathcal{M}}_K(\mathcal{D}_{\mathbb{Q}_p}, b), \overline{\mathbb{Q}_\ell}), \Pi_p) = \varinjlim_K \mathrm{Hom}_{J_b}(H_c^\bullet(\breve{\mathcal{M}}_K(b,\mu), \overline{\mathbb{Q}_\ell}), \pi_1) \otimes \chi$$

comme représentation de $G(\mathbb{Q}_p) = \mathbf{GL}_n(F) \times \mathbb{Q}_p^\times$.

Fixons $\rho = 1$. Il existe une représentation automorphe Π de I^ϕ telle que $\Pi_p = \pi \otimes 1$ et $\Pi_\infty = 1$ ([**11**]). Utilisons le théorème A.4.1 appliqué aux groupes formes intérieurs I^ϕ et G. On obtient alors le résultat en égalant les deux expressions ci dessus pour $[H^\bullet(\mathrm{Sh}, \mathcal{L}_\rho)]_{cusp}$ et en prenant la partie Π_f^p-isotypique (après avoir divisé par $\mid \ker^1(\mathbb{Q}, G) \mid m_\Pi$, où m_Π désigne la multiplicité de Π dans l'espace des formes automorphes sur I^ϕ qui est égale à celle de $\pi_\infty \otimes JL(\Pi_p) \otimes \Pi_f^p$ dans l'espace des formes automorphes sur G pour une représentation de la série discrète π_∞ ayant de la cohomologie dans ρ, d'après A.4.1). $\square$

10.2. espaces de type P.E.L.

10.2.1. Construction de données globales à partir de données locales. — Soit $F'|\mathbb{Q}_p$ une extension non ramifiée de degré pair. On veut trouver un corps de nombres totalement réel F^+ et un corps quadratique imaginaire $\mathcal{K}|\mathbb{Q}$ dans lesquels p est inerte, tels que F_p^+ et $\mathcal{K}_p$ soient linéairement disjointes (c'est à dire p reste inerte dans $F^+\mathcal{K}$) et tels que $F' = F_p^+\mathcal{K}_p$. Cela est possible ssi $[F' : \mathbb{Q}_p]$ n'est pas un multiple de 4 (utiliser le lemme 10.1.2). De la même manière que pour la proposition 10.1.3 on montre alors la proposition suivante :

Proposition 10.2.1. — *Étant donnée une donnée locale de type P.E.L. non ramifiée simple sur une extension de $\mathbb{Q}_p$ de degré qui n'est pas un multiple de 4, il existe une donnée globale de type P.E.L. $\mathcal{D} = (B, \#, V, < .,. >, h)$, un plongement $\nu : \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$ tel que via ν, $\mathcal{D}$ induise la donnée locale. On peut de plus supposer que $End_B(V)$ est une algèbre à division qui est en toutes les places finies soit déployée, soit une algèbre à division. On peut également supposer le corps C.M. F de la forme $F^+\mathcal{K}$ où $\mathcal{K}$ est un corps quadratique imaginaire.*

10.2.2. Le théorème principal pour $GU(3)$. —

Théorème 10.2.2. — *Soit $(F, *, V, < .,. >, b, \mu)$ une donnée locale de type P.E.L. non ramifiée simple basique. Supposons $p \neq 2$, $[F : \mathbb{Q}_p]/2$ impair et $\dim_F(V) = 3$. Soit $E \subset \overline{\mathbb{Q}_p}$ le corps réflex associé.*

1. *Soit $\psi : W_{\mathbb{Q}_p} \longrightarrow {}^LG$ une classe de conjugaison de L-paramètre vérifiant : $im(\psi)$ n'est pas contenue dans ${}^LB$ pour un sous groupe de Borel B de G. Soit $\Pi(\psi)$ le L-paquet supercuspidal de représentations de $G(\mathbb{Q}_p)$ associé (C.1.4.2). Rappelons que $J_b = G(\mathbb{Q}_p) = GU(3)$. Il y a une égalité dans $Groth(G(\mathbb{Q}_p) \times W_E)$:*

$$\sum_{\pi\in\Pi(\psi)} \left[\varinjlim_K Hom_{J_b}\left(H_c^\bullet(\breve{\mathcal{M}}_K\hat{\otimes}\mathbb{C}_p, \overline{\mathbb{Q}_\ell}), \pi\right)\right]_{cusp} = \sum_{\pi\in\Pi(\psi)} [\pi] \otimes [r_\mu \circ \psi_{|W_E}]\, |.|^{-\frac{\sum_\tau p_\tau q_\tau}{4}}$$

En particulier, si $\Pi(\psi)$ est stable la conjecture de Kottwitz est vérifiée.

2. *Soit ξ un caractère du groupe endoscopique H de $U(3)$ (appendice C) et $St_H(\xi)$ la représentation de Steinberg associée. Soit $\Pi(St_H(\xi)) = \{\pi^2(\xi), \pi^s(\xi)\}$ le L-paquet transfert endoscopique à $U(3)$ (C.1.6). Soit $\Pi = \{\pi^2, \pi^s\}$ un L-paquet de représentations de $G(\mathbb{Q}_p)$ tel que $\pi^2_{|U(3)} = \pi^2(\xi), \pi^s_{|U(3)} = \pi^s(\xi)$. A Π est associé un L-paramètre $\psi : W_{\mathbb{Q}_p} \times SL_2(\mathbb{C}) \longrightarrow {}^LG$. Il y a une égalité dans $Groth(G(\mathbb{Q}_p) \times W_E)$:*

$$\left[\varinjlim_K Hom_{J_b}\left(H_c^\bullet(\breve{\mathcal{M}}_K\hat{\otimes}\mathbb{C}_p, \overline{\mathbb{Q}_\ell}), \pi^s\right)\right]_{cusp} + \left[\varinjlim_K Ext^\bullet_{J_b-lisse}(H_c^\bullet(\breve{\mathcal{M}}_K\hat{\otimes}\mathbb{C}_p, \overline{\mathbb{Q}_\ell}), \pi^2)\right]_{cusp}$$
$$= [\pi^s] \otimes [r_\mu \circ \psi_{|W_E}]\, |.|^{-\frac{\sum_\tau p_\tau q_\tau}{4}}$$

3. *Soit χ un caractère de $G(\mathbb{Q}_p)$ et $St_G(\chi)$ la représentation de Steinberg associée. Il y a une égalité dans Groth$(G(\mathbb{Q}) \times W_E)$:*

$$\left[Ext^{\bullet}_{J_b-lisse}\left(H^{\bullet}_c(\breve{\mathcal{M}}_K\hat{\otimes}\mathbb{C}_p, \overline{\mathbb{Q}_\ell}), St_G(\chi)\right)\right]_{cusp} = 0$$

Démonstration. — Soit $\mathcal{D}$ une donnée globale de type P.E.L. induisant la donnée locale comme dans la proposition 10.2.1. Soit Sh la variété de Shimura associée. Il y a un isomorphisme d'espaces analytiques $\breve{\mathcal{M}}(\mathcal{D}_{\mathbb{Q}_p}, b) \simeq \breve{\mathcal{M}}(b, \mu)$. Soit ϕ une classe d'isogénie intervenant dans la classe basique.

Dans les trois cas de l'énoncé, pour chacun des L-paquets locaux en p, Π (dans le troisième cas $\{St_G(\chi)\}$ est un L-paquet, confère page 174 de [**53**]), on peut trouver une représentation irréductible de $G(\mathbf{A}_f^p)$, Π^p, telle que

$$\forall \pi_p \in \Pi \ \ \mathrm{Triv}_\infty \otimes \pi_p \otimes \Pi^p \in \mathcal{T}(I^\phi)_{Triv_\infty}$$

En effet, il suffit de choisir une représentation $\pi_p \in \Pi$, de la globaliser ([**11**]) (dans le troisième cas cela est une conséquence du fait que $St_G(\chi)$ est de carré intégrable). Alors, les L-paquets globaux de représentations de G étant stables (c'est une conséquence du fait que $\mathrm{End}_B(V)$ est une algèbre à division, [**53**] théorème 14.6.3) tous les éléments d'un même L-paquet apparaissent avec la même multiplicité dans le spectre discret de G (multiplicité qui est 1).

Utilisons le théorème A.7.8 Le résultat s'en déduit comme dans la démonstration du théorème 10.1.4 en prenant la partie Π^p isotypique dans les deux expressions différentes pour $[H^{\bullet}(\mathrm{Sh}, \overline{\mathbb{Q}_\ell})]_{cusp}$ en termes de représentations automorphes de G et I^ϕ, et en utilisant le fait que si deux représentations automorphes de G, resp. I^ϕ, sont isomorphes hors p elle sont dans le même L-paquet global et que donc leur composante en p sont dans le même L-paquet local ([**53**])(et en utilisant également le fait énoncé ci dessus que la multiplicité est constante pour tous les éléments d'un même L-paquet global). □

10.2.3. Spéculations. — Le théorème précédent ne donne une démonstration de la conjecture de Kottwitz que dans le cas des représentations supercuspidales π telles que $\{\pi\}$ soit un L-paquet, c'est à dire telles que le changement de base de π soit une représentation supercuspidale de $\mathbf{GL}_3(F) \times K^\times$. La raison de "l'échec" de la méthode dans le cas des autres représentations supercuspidales de $G(\mathbb{Q})$ est que quelque soit la globalisation d'une représentation locale en une représentation globale de G, le L-paquet global obtenu (il faudrait plutôt parler de A-paquet) est stable et donc les multiplicités de chaque élément sont égales. On obtient donc dans tous les cas dans les membres de gauche du théorème 10.2.2 une somme sur tous les éléments du L-paquet local qui ne permet pas de séparer chaque terme.

Voila une stratégie permettant d'attaquer la conjecture de Kottwitz dans les autres cas : il faudrait travailler avec des groupes unitaires G qui ne sont plus associés à une algèbre à division mais à $M_3(F)$. En effet, dans ce cas là le spectre discret de G est beaucoup plus riche que dans le cas précédent. Par exemple, avec les notations de C.1.4.2 si ρ est une représentation supercuspidale stable de $H(\mathbb{Q}_p)$, si $\Pi(\rho)$ désigne le L-paquet associé de $U(3)$ celui ci est de cardinal 2. On peut globaliser ρ en une représentation de l'analogue global du groupe endoscopique local H ([**53**]) dont le changement de base à

GL_2 est cuspidale, puis considérer le transfert endoscopique global de cette représentation à $U(3)$. Notons Π le L-paquet global obtenu. Avec les notations de [**53**], $\Pi \in \Pi_e(G)$. En p, le L-paquet local associé à Π est le L-paquet local $\Pi(\rho)$. De plus, les multiplicités de chaque élément de ce L-paquet global dans le spectre discret de G sont calculées dans [**53**] (confère également [**54**]). Ces multiplicités ne sont pas constantes. On peut ainsi espérer obtenir suffisamment de relations pour isoler chaque facteur dans les sommes des membres de gauche du théorème 10.2.2. Cependant, pour l'algèbre à division $M_3(F)$ les variétés de Shimura associées ne sont pas en général compactes. Pour avoir des variétés de Shimura compactes, il faut imposer que le groupe unitaire à l'infini possède un facteur simple compacte (c'est à dire $\exists \tau$ $p_\tau = 0$ ou $q_\tau = 0$). Cela implique que la variété de Shimura est propre sur la fibre générique. Il resterait à vérifier que c'est également le cas pour les modèles entiers (un exercice en théorie des modèles de Néron).

APPENDICE A

RÉSULTATS CONCERNANT LES REPRÉSENTATIONS AUTOMORPHES DES GROUPES UNITAIRES, LEUR COHOMOLOGIE ET LES REPRÉSENTATIONS GALOISIENNES ASSOCIÉES

A.1. Hypothèses générales

Soit $\mathcal{D} = (B, *, V, < ., . >, h)$ une donnée de type P.E.L. globale comme dans le premier chapitre.

Nous supposerons dans cet appendice que que $\mathrm{End}_B(V)$ est une algèbre à division D sur le corps C.M. F. Les variétés de Shimura associées sont donc propres. Nous supposerons de plus que le corps F est de la forme $F^+\mathcal{K}$ où $\mathcal{K}|\mathbb{Q}$ est une extension quadratique imaginaire. Nous ferons également l'hypothèse qu'en toute place v de F, l'algèbre simple D_v est soit déployée soit une algèbre à division.

Soit Φ un type C.M. de F. Rappelons que

$$G_1(\mathbb{R}) \simeq \prod_{\tau \in \Phi} U(p_\tau, q_\tau)$$

où $p_\tau + q_\tau = n$ et que

$$G(\mathbb{C}) \simeq \prod_{\Phi} GL_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^\times$$

Rappelons que ρ est une représentation algébrique irréductible de dimension finie de $G_{\mathbb{C}}$ et que nous notons également ρ sa restriction à $G(\mathbb{R})$.

Si v est une place finie de F divisant un premier p de $\mathbb{Q}$ décomposé dans $\mathcal{K}$, le groupe $\mathbf{GL}_n(F_v)$ est un facteur de $G(\mathbb{Q}_p)$. Si Π est une représentation automorphe de G on peut donc définir Π_v comme représentation irréductible de $\mathbf{GL}_n(F_v)$.

Le groupe G étant anisotrope modulo son centre, l'espace des formes automorphes sur G de caractère central fixé est décomposé discrètement ; il n'y a pas de spectre continu. Si Π est une représentation automorphe de G on peut donc définir sa multiplicité comme étant la multiplicité de la classe d'isomorphisme de Π dans le $(\mathfrak{g}_\infty, K_\infty) \times G(\mathbf{A}_f)$-module admissible des formes automorphes se transformant selon le caractère central de Π. Nous noterons m_Π cette multiplicité.

A.2. Résultats de Clozel, Harris et Labesse sur la pureté de la cohomologie des représentations automorphes

Certains des résultats énoncés ci dessous sont démontrés par Clozel dans [**12**] (on pourra également consulter le corollaire VII.2.7 de [**26**]) . Ils sont démontrés dans le cas de signature quelconque par Harris et Labesse dans des notes non publiées.

Définition A.2.1. — Nous noterons $\mathcal{T}(G)_\rho$ l'ensemble des représentations automorphes Π de G vérifiant que Π_∞ a de la cohomologie dans ρ.

Bien que son énoncé ne le fasse pas apparaître, la démonstration du résultat qui suit utilise la cohomologie des variétés de Shimura de type P.E.L., et notamment les résultats de Kottwitz sur la cohomologie en une place de bonne réduction ([**40**]), couplés aux estimations connues sur les valeurs propres des composantes locales des représentations automorphes unitaires cuspidales de $\mathbf{GL}_n$ (c'est à dire les estimations connues concernant la conjecture de Ramanujan). Plus précisément, si Π est une représentation automorphe de G intervenant dans la cohomologie de la variété de Shimura associée, le lien démontré par Kottwitz entre les valeurs propres de Frobenius en une place de bonne réduction (qui vérifient certaines conditions grâce au théorème de pureté de Deligne) et les paramètres de Hecke associés permettent de démontrer que le motif (tout du moins sa réalisation ℓ-adique, De Rham...) découpé par Π_f dans la variété de Shimura est pure de poids $\dim \mathrm{Sh}$.

Théorème A.2.2. — *Soit $\Pi \in \mathcal{T}(G)_\rho$ telle qu'il existe un premier p de $\mathbb{Q}$ décomposé dans $\mathcal{K}$ et une place finie v de F divisant p vérifiant : Π_v soit dans la série discrète. Alors,*

$$\dim H^i(\mathfrak{g}_\infty, K_\infty; \Pi_\infty \otimes \rho) = \begin{cases} 1 \ \textit{si } i = \sum_\tau p_\tau q_\tau = \dim Sh \\ 0 \ \textit{sinon} \end{cases}$$

*De plus, Π_∞ appartient au L-paquet de la série discrète de $G(\mathbb{R})$ formé des représentations de la série discrète de $G(\mathbb{R})$ ayant de la cohomologie dans ρ. Ce L-paquet est exactement la fibre du changement de base vers $G(\mathbb{C})$ en l'unique représentation tempérée de $G(\mathbb{C})$ ayant de la cohomologie dans ρ . Son cardinal est égal à $\dim r_\mu$ où r_μ est la représentation du L-groupe de G associée à μ ([**45**])(confère A.7.3).*

Théorème A.2.3. — *Sous les hypothèses du théorème précédent, supposons de plus que Π_v soit supercuspidale. Alors, pour toute représentation π'_∞ de $G(\mathbb{R})$ dans le L-paquet de la série discrète ci dessus $\Pi' = \pi'_\infty \otimes \Pi_f \in \mathcal{T}(G)_\rho$. De plus, les multiplicités m_Π, $m_{\Pi'}$ de Π et Π' sont égales.*

A.3. Résultats de Clozel, Harris et Labesse sur le changement de base quadratique stable

Nous énonçons ici un théorème de Harris et Labesse démontré dans des notes non publiées. Le cas de signature $(1, n-1)$ est démontré par Clozel dans [**12**] (dans le VII.2 de [**26**] le résultat de Clozel est expliqué en détails, il y est également expliqué comment passer du cas des groupes unitaires au cas des groupes de similitudes unitaires). Les

morphismes de L-groupes associés aux fonctorialités de Langlands que démontrent ce théorème sont exposés dans la démonstration du théorème A.7.2.

Soit p un premier de $\mathbb{Q}$ décomposé dans $\mathcal{K}$, $p = w_0 w_0^c$. Supposons l'algèbre à division $D = \mathrm{End}_B(V)$ déployée en p. Si $(v_i)_{i\in I}$ désigne un ensemble de représentants des classes de places v divisant p modulo l'action de c,

$$G(\mathbb{Q}_p) = \prod_{i\in I} \mathrm{GL}_n(F_{v_i}) \times \mathbb{Q}_p^\times$$

et si $\pi = (\otimes_i \pi_i) \otimes \chi$ est une représentation irréductible de $G(\mathbb{Q}_p)$ on peut définir le changement de base quadratique de π comme étant

$$BC(\pi) = (\otimes_{i\in I} \pi_i \otimes \check{\pi}_i^c) \otimes (\chi \otimes \chi^{-1})$$

Lorsque D n'est plus déployée en p on peut encore définir un changement de base quadratique stable en composant le changement de base qui vient d'être décrit avec la correspondance de Jacquet-Langlands locale.

Si maintenant p un premier de $\mathbb{Q}$ en lequel $G_{\mathbb{Q}_p}$ est non ramifié, si π est une représentation sphérique de $G(\mathbb{Q}_p)$ on peut alors définir le changement de base non ramifié de π comme représentation de

$$\prod_{v|p} \mathrm{GL}_n(F_v) \times \prod_{w|p} \mathcal{K}_w^\times$$

où v parcourt des places de F et w de $\mathcal{K}$. Dans le cas où p est décomposé dans $\mathcal{K}$ on retrouve le cas précédent restreint aux représentations sphériques. Dans le cas où p n'est pas décomposé dans $\mathcal{K}$, si $BC(\pi) = (\otimes_v \pi'_v) \otimes \chi_w$, on a les relations

$$\forall v \;\; \pi'_v \simeq \check{\pi}'_{v^c}$$

Le théorème qui suit énonce l'existence d'un changement de base quadratique stable pour des représentation automorphes de G vers celles d'un groupe linéaire. Le mot stable signifie que l'on a composé un changement de base quadratique avec une correspondance de Jacquet-Langlands.

Théorème A.3.1. — *Soit $\Pi \in \mathcal{T}(G)_\rho$ telle qu'il existe un premier p décomposé dans $\mathcal{K}$ et une place v de F^+ divisant p telle que Π_v soit supercuspidale. Il existe alors une représentation automorphe cuspidale Π' de $GL_n(\mathbf{A}_F)$ ainsi qu'un caractère de Hecke χ de $\mathbf{A}_{\mathcal{K}}^\times$ vérifiant*

- $\chi = \chi^c_{\Pi|\mathbf{A}_{\mathcal{K}}^\times}$
- *Si Π_p est non ramifiée alors $(\Pi' \otimes \chi)_p$ est le changement de base non ramifié de Π_p*
- *Π'_∞ est de la forme*

$$\prod_{\tau\in\Phi} \pi'_\tau$$

  où $\prod_\tau \pi'_\tau$ est l'unique représentation tempérée de $G_1(\mathbb{C})$ ayant de la cohomologie dans $\rho_{|G_1(\mathbb{C})}$. De plus,

$$\chi_\infty = \rho^{-1}_{|\mathbb{C}^\times}$$

  où $\mathbb{C}^\times \subset G(\mathbb{C})$ désigne l'inclusion du facteur de similitude.
- $\check{\Pi}' \simeq \Pi'^c$

– *Si p est décomposé dans $\mathcal{K}$ alors*

$$(\Pi' \otimes \chi)_p = BC(\Pi_p)$$

comme représentation de $(Res_{F/\mathbb{Q}} GL_n \times Res_{\mathcal{K}|\mathbb{Q}} \mathbb{G}_m)(\mathbb{Q}_p)$.

– $\chi_{\Pi'|\mathbf{A}_{\mathcal{K}}^\times} = \chi/\chi^c$

Par multiplicité un forte, une telle représentation automorphe Π' est unique.

A.4. Résultats de Harris et Labesse sur la comparaison entre la formule des traces pour deux groupes unitaires formes intérieures

Soit v une place finie de F vérifiant $v \neq v^c$. Soient G_1 et G_2 deux groupes unitaires comme ci dessus, formes intérieurs l'un de l'autre tels que $G_1(\mathbf{A}_f^v) = G_2(\mathbf{A}_f^v)$. Nous notons JL le transfert local des représentations supercuspidales de G_{1v} et G_{2v} vers les représentations de leur forme intérieur quasidéployée : $\mathrm{GL}_n(F_v)$.

Théorème A.4.1. — *Soit $\Pi_1 \in \mathcal{T}(G_1)_\rho$ telle que $JL(\Pi_{1v})$ soit supercuspidale. Alors, pour toute représentation π_∞ de $G_2(\mathbb{R})$ faisant partie du L-paquet de la série discrète ayant de la cohomologie dans ρ, il existe une $\Pi_2 \in \mathcal{T}(G_2)_\rho$ telle que*

– $\Pi_{2\infty} = \pi_\infty$

– $\Pi_2^v \simeq \Pi_1^v$

De plus, pour une telle Π_2

$$JL(\Pi_{2v}) = JL(\Pi_{1v})$$

et les multiplicités de Π_1 et Π_2 sont égales.

On déduit en particulier de ce théorème, du théorème A.2.2 et de la formule de Matushima que si Π_1 est comme dans l'énoncé, la multiplicité de $\Pi_{1,f}$ dans la cohomologie de la variété de Shimura associée est

$$\text{multiplicité}(\Pi_1) \times \dim r_\mu$$

Nous verrons en fait dans le théorème A.7.2 que le facteur $\dim r_\mu$ est la dimension d'une représentation galoisienne telle que la représentation galoisienne décomposée par $\Pi_{1,f}$ dans la cohomologie est multiplicité(Π_1)-fois cette représentation. Dans le cas de la signature $(1, n-1)$ ce théorème de divisibilité est démontré par Taylor en utilisant la théorie de Hodge-Tate p-adique (à l'origine dans une lettre de Taylor à Clozel, cet argument est esquissé dans [**23**] page 102 ; pour plus de détails, confère [**26**] et notamment le lemme II.2.2 et la proposition VIII.1.8). Dans le cas général, nous déduirons ce résultat du cas de signature $(1, n-1)$ (théorème A.7.2).

A.5. Résultats de Clozel, Harris, Kottwitz et Taylor sur les représentations galoisiennes

Voici une partie de l'énoncé du théorème VIII.1.9 de [**26**] qui généralise le théorème principal de [**12**].

Théorème A.5.1. — *Soit* Π *une représentation automorphe cuspidale de* $GL_n(\mathbf{A}_F)$ *satisfaisant les hypothèses suivantes :*
- $\check{\Pi} \simeq \Pi^c$
- Π_∞ *a même caractère infinitésimal que* $\check{\rho}_{|G_1(\mathbb{C})}$

Il existe alors une représentation continue

$$R_\ell(\Pi) : \mathbf{Gal}(\bar{F}|F) \longrightarrow \mathbf{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}_\ell})$$

vérifiant
- *En toute place* v *de* F *ne divisant pas* ℓ *la restriction de* $R_\ell(\Pi)$ *à* W_{F_v} *est* $\sigma_\ell(\Pi_v^\vee) \otimes |.|^{\frac{1-n}{2}}$ *où* σ_ℓ *désigne la correspondance de Langlands locale pour* $\mathbf{GL}_n(F_v)$.
- *En toute place* v *où* $R_\ell(\Pi)$ *est non ramifiée, les valeurs propres de Frobenius sont algébriques pures de poids* $n-1$

A.6. Résultat de Kottwitz sur les représentations galoisiennes obtenues dans la cohomologie des variétés de Shimura en une place de bonne réduction

Dans l'article [**40**] Kottwitz démontre qu'en presque toutes les places de bonne réduction, la correspondance de Langlands locale non ramifiée est réalisée dans la cohomologie des variétés de Shimura que nous considérons. Ce résultat est le corollaire des nombreux travaux de Kottwitz sur la stabilisation de la formule des traces ainsi que de ses travaux sur le comptage des points des variétés de Shimura sur les corps finis ([**41**]). Nous renvoyons le lecteur au théorème 1 de [**40**] (et au nombreux travaux antérieurs de Kottwitz) pour l'énoncé. Le théorème A.7.2 est une généralisation de ce théorème à d'autres places.

A.7. Application aux représentations galoisiennes obtenues dans la cohomologie des variétés de Shimura de type P.E.L. de signature quelconque

Nous montrons que la représentation galoisienne associée à une représentation automorphe d'un groupe unitaire dans une variété de Shimura de signature quelconque est bien celle prédite dans [**45**], du moins en une place décomposée ou bien en d'autres places sous certaines hypothèses.

A.7.1. Correspondance de Langlands locale pour $\mathbf{GL}_n$ revisitée. — Soit $F|\mathbb{Q}_p$ une extension de degré fini. Soit

$$\sigma_\ell : \mathcal{A}_\ell(n,F) \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_\ell(n,F)$$

la correspondance de Langlands locale pour $\mathrm{GL}_n(F)$ ℓ-adique, au sens où des deux cotés les représentations sont à valeurs dans des $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$-espaces vectoriels et où nous prenons comme définition de $\mathcal{G}_\ell(n,F)$: l'ensemble des classes d'isomorphisme de représentations $\rho : W_F \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}_\ell})$ Frobenius semi-simples. L'ensemble $\mathcal{A}_\ell(n,F)$ est défini de la même façon que pour des coefficients complexes en remplaçant formellement $\mathbb{C}$ par $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$.

Considérons le groupe $H = \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}_p}(\mathrm{GL}_{n/F})$, et

$$^L H = \left(\prod_{\tau \in I_F} \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}_\ell}) \right) \rtimes W_{\mathbb{Q}_p}$$

son L-groupe ℓ-adique où $I_F = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(F, \overline{\mathbb{Q}_p})$ sur lequel $\mathbf{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}|\mathbb{Q}_p)$ agit par composition.

Le lemme de Shapiro

$$H^1(W_{\mathbb{Q}_p}, {}^L H^0) \simeq H^1(W_F, \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}_\ell}))$$

implique alors l'existence d'une bijection

$$\pi \longmapsto \tilde{\sigma}_\ell(\pi)$$

entre $\mathcal{A}_\ell(n, F)$ et l'ensemble des classes de morphismes continus de $W_{\mathbb{Q}_p}$ dans $^L H$ induisant l'identité après projection sur $W_{\mathbb{Q}_p}$, tels que l'image du Frobenius de F dans $^L H^0$ soit semi-simple, et où deux tels morphismes sont dans la même classe ssi ils sont conjugués par un élément de $^L H^0$. La correspondance $\tilde{\sigma}$ est la correspondance de Langlands locale "absolue", c'est à dire sur $\mathbb{Q}_p$.

A.7.2. Le morphisme r_μ local. — Nous explicitons la définition de [**45**] dans notre cas.

Soit H comme précédemment et

$$\mu : \mathbb{G}_m/\overline{\mathbb{Q}_p} \longrightarrow H_{/\overline{\mathbb{Q}_p}}$$

un cocaractère. Soit $E \subset \overline{\mathbb{Q}_p}$ le corps de définition de la classe de conjugaison de μ.

$$H_{\overline{\mathbb{Q}_p}} \simeq \prod_{\tau \in I_F} \mathrm{GL}_{n\overline{\mathbb{Q}_p}}$$

et si via cet isomorphisme $\mu = (\mu_\tau)_{\tau \in I_F}$ où $\forall \tau \ \mu_\tau \in \mathbb{Z}^n/\mathfrak{S}^n \simeq X_*(\mathrm{GL}_n)/\text{conjugaison}$, $\mathbf{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}|E)$ est le stabilisateur de $(\mu_\tau)_\tau$ dans $\mathbf{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}|\mathbb{Q}_p)$.

Exemple A.7.1. — Si $\tau_0 \in I_F$ est fixé et $\forall \tau \neq \tau_0 \quad \mu_\tau = 0$, $\mu_{\tau_0} \neq 0$ alors $E = F^{\tau_0}$.

μ définit un poids dominant $\check{\mu}$ de $^L H^0$ dont la classe de conjugaison est invariante par $\mathbf{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}|E)$.

Supposons $\check{\mu}$ minuscule donné par des entiers $(p_\tau)_{\tau \in I_F}$, $0 \leq p_\tau \leq n$, et $\mu_\tau = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{p_\tau}, 0, \ldots, 0)$.

A $\check{\mu}$ est associé la représentation irréductible de dimension finie de $^L H^0$ de plus haut poids $(1, \ldots, 1) - \check{\mu}$ (et non $\check{\mu}$, à cause de la convention homologique de Kottwitz qui identifie μ au caractère définissant la filtration de Hodge sur le H_1 et non le H^1). Étendons cette représentation en une représentation r_μ de $^L H_E$ en posant que l'action de W_E sur l'espace de plus haut poids est triviale.

Plus explicitement :

$$r_{\mu|\,^L H^0} = \bigotimes_{\tau \in I_F} \left(\bigwedge^{p_\tau} St \right)^*$$

où St désigne la représentation standard. Pour un élément $\sigma \in W_E$

$$(1 \rtimes \sigma).(\otimes_\tau v_\tau) = \otimes_\tau v_{\sigma^{-1}\tau}$$

(cette expression est bien définie car si $\sigma \in W_E, p_{\sigma^{-1}\tau} = p_\tau$).

Si $\pi \in \mathcal{A}_\ell(n, F)$ on peut donc définir

$$r_\mu \circ \tilde{\sigma}_\ell(\pi)_{|E} \in \mathcal{G}_\ell(\dim r_\mu, E)$$

Si plus généralement $H = \prod_{i\in I} \mathrm{Res}_{F_i/\mathbb{Q}_p}(\mathrm{GL}_{nF_i})$ pour des corps locaux p-adiques F_i , si $\mu = \prod_i \mu_i$ est un cocaractère de $H_{\overline{\mathbb{Q}_p}}$, si E_i est le corps réflex de la composante μ_i alors, le corps réflex de μ, encore noté E, vérifie $E \subset \prod_i E_i =: M$. De plus, la représentation r_μ du L-groupe de H est encore définie et

$$r_{\mu_{|M}} = \bigotimes_{i\in I} r_{\mu_i|M}$$

Ainsi, si $\pi = \otimes_i \pi_i$ est un représentation irréductible de $H(\mathbb{Q}_p)$, la représentation $\tilde{\sigma}_\ell(\pi)$: $W_{\mathbb{Q}_p} \longrightarrow {}^L H$ est définie et l'on a l'égalité

$$r_\mu \circ \tilde{\sigma}(\pi)_{|M} = \bigotimes_{i\in I} \left(r_{\mu_i} \circ \tilde{\sigma}_\ell(\pi_i)_{|E_i}\right)_{|M}$$

A.7.3. Le théorème. — Nous supposerons maintenant que le type C.M. Φ est induit à partir d'un type C.M. de $\mathcal{K}$, c'est à dire qu'il existe un $\tau_0 \in \mathrm{Hom}(\mathcal{K}, \mathbb{C})$ tel que $\Phi = \{\tau \in \mathrm{Hom}(F, \mathbb{C}) \mid \tau_{|\mathcal{K}} = \tau_0\}$. Soit μ le cocaractère de $G_{\overline{\mathbb{Q}}}$ associé à la donnée de Shimura. Rappelons que le cocaractère μ est donné par un uplet $(p_\tau, q_\tau)_{\tau\in\Phi}$ où $p_\tau + q_\tau = n$. Nous reprenons les notations du I.

Rappelons la formule de Matsushima qui décompose la cohomologie de De Rham de la variété de Shimura en représentations irréductibles de $G(\mathbf{A}_f)$:

$$\forall i \quad \varinjlim_K H^i(\mathrm{Sh}_K, \mathcal{L}_\rho) = \bigoplus_{\Pi\in\mathcal{T}(G)_\rho} \dim H^i(\mathfrak{g}_\infty, K_\infty; \Pi_\infty \otimes \rho).\ \Pi_f$$

L'action de $G(\mathbf{A}_f) \times \mathbf{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|E)$ sur cette cohomologie permet quant à elle de décomposer la cohomologie étale ℓ-adique en

$$\forall i \quad \varinjlim_K H^i(\mathrm{Sh}_K, \mathcal{L}_\rho) = \bigoplus_{\Pi'\in\mathrm{Irr}(G(\mathbf{A}_f))} \Pi' \otimes R^i_{\ell,\rho,\mu}(\Pi')$$

où $R^i_{\ell,\rho,\mu}(\Pi_f)$ est une représentation continue de $\mathbf{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|E)$. De la formule de Matsushima on déduit que

$$\exists i\ R^i_{\ell,\rho,\mu}(\Pi') \neq 0 \Longrightarrow \exists \Pi \in \mathcal{T}(G)_\rho\ \ \Pi_f \simeq \Pi'$$

Du théorème A.2.3, on déduit que si $\Pi \in \mathcal{T}(G)_\rho$ et si en une place v décomposée de F, Π_v est supercuspidale

$$R^i_{\ell,\rho,\mu}(\Pi_f) = 0 \text{ si } i \neq \dim \mathrm{Sh}$$

et

$$\dim R^{\dim \mathrm{Sh}}_{\ell,\rho,\mu}(\Pi_f) = m_\Pi\ \dim r_\mu$$

où m_Π désigne la multiplicité de Π. Nous poserons $[R^i_{\ell,\rho,\mu}(\Pi_f)]$ comme étant la représentation galoisienne semi-simplifiée de la représentation précédente.

Théorème A.7.2. — *Soit $\Pi \in \mathcal{T}(G)_\rho$, soit $[R_{\ell,\rho,\mu}(\Pi_f)]$ la représentation semi-simple de $\mathbf{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|E)$ associée à Π_f en degré moitié dans la cohomologie de la variété de Shimura de type P.E.L. associée à μ. Supposons qu'en une place finie v de F divisant un premier de $\mathbb{Q}$ décomposé dans $\mathcal{K}$, Π_v soit supercuspidale. Soit p un premier de $\mathbb{Q}$ décomposé dans $\mathcal{K}$. Notons $G(\mathbb{Q}_p) = \prod_{i\in I} GL_n(F_{v_i})\times\mathbb{Q}_p^\times$ et $\Pi_p = \otimes_v \Pi_v \otimes \chi$. Rappelons qu'un plongement ν de $\overline{\mathbb{Q}}$ dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$ est fixé, et qu'on note $\mu_{\overline{\mathbb{Q}_p}} = \prod_{i\in I}\mu_i$ le cocaractère de Shimura local associés. Il y alors une égalité*

$$[R_{\ell,\rho,\mu}(\Pi_f)]_{|W_{E_\nu}} = [r_{\mu_{\overline{\mathbb{Q}_p}}} \circ \tilde{\sigma}_\ell(\Pi_p)_{|E_\nu}]^{m_\Pi} \otimes |.|^{-\frac{\dim Sh}{2}}$$

comme représentation semi-simple de W_{E_ν}.

De plus, si pour i dans I, E_i désigne le corps réflex de μ_i, $E_\nu \subset \prod_i E_i =: M$ et

$$[R_{\ell,\rho,\mu}(\Pi_f)]_{|W_M} = m_\Pi \bigotimes_{i\in I}[r_{\mu_i|M} \circ \tilde{\sigma}_\ell(\Pi_{v_i})_{|M}] \otimes \sigma_\ell(\chi)^{-1}_{|M}\ |.|^{-\frac{\sum_\tau p_\tau q_\tau}{2}}$$

Démonstration. — La deuxième formule est une conséquence immédiate de la première.

Commençons par quelques préliminaires de L-groupes "ℓ-adiques" (étant donné que nous ne disposons que de systèmes compatibles de représentations galoisiennes et pas de représentation du groupe de Weil global, nous ne pouvons travailler directement avec des L-groupes complexes). Soit le L-groupe ℓ-adique de G

$${}^LG = \left(\prod_{\tau\in\Phi}\mathbf{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}_\ell}) \times \overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times\right) \rtimes \mathbf{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q})$$

où $\forall\sigma \in \mathbf{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q})$ $\sigma.((g_\tau)_\tau, z) = ((h_\tau)_\tau, z')$ avec

$$\forall\tau\in\Phi\ \ h_\tau = \begin{cases} g_{\sigma^{-1}\tau} \text{ si } \sigma^{-1}\tau\in\Phi \\ w^t(g_{c\sigma^{-1}\tau})^{-1}w^{-1} \text{ si } \sigma^{-1}\tau\notin\Phi \end{cases}$$

où

$$w = ((-1)^{i-1}\delta_{i,n-j+1})_{i,j}$$

et

$$z' = z \prod_{\substack{\tau\in\Phi \\ \sigma^{-1}\tau\notin\Phi}} \det(g_\tau)$$

L'élément w a été choisi de manière à ce qu'il envoie l'image par l'automorphisme $g \mapsto {}^tg^{-1}$ de l'épinglage standard de GL_n sur l'épinglage standard. Soit maintenant $H = (\mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}\mathrm{GL}_n) \times \mathrm{Res}_{\mathcal{K}/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_m$. Le groupe réductif $\mathrm{Res}_{\mathcal{K}/\mathbb{Q}}G_{\mathcal{K}}$ étant une forme intérieure de H il y a un isomorphisme de L-groupes

$${}^L\left(\mathrm{Res}_{\mathcal{K}/\mathbb{Q}}G_{\mathcal{K}}\right) \xrightarrow{\sim} {}^LH \simeq \left(\prod_{\tau\in I_F}\mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}_\ell}) \times \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times\right) \rtimes \mathbf{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q})$$

auquel est associé la correspondance de Jacquet-Langlands. Il y a également un morphisme de L-groupes

$$\begin{array}{rcl} {}^LG & \longrightarrow & {}^L\left(\mathrm{Res}_{\mathcal{K}/\mathbb{Q}}G_{\mathcal{K}}\right) \\ ((g_\tau)_\tau, z) \rtimes \sigma & \longmapsto & ((g_\tau)_\tau, w\,{}^t(g_\tau^{-1})_{c\tau}w^{-1}, z, z\prod_{\tau\in\Phi}\det g_\tau) \rtimes \sigma \end{array}$$

auquel est associé le changement de base quadratique. Le composé des deux morphismes ci dessus est associé au changement de base stable de la section A.3.

Rappelons que E désigne le corps réflex de μ. Ce corps ne contient pas forcément le corps réflex de (F,Φ). Comme dans la section précédente dans le cas local, au cocaractère μ est associé une représentation r_μ de ${}^LG_E$ vérifiant

$$r_{\mu|\,{}^LG^0} = \bigotimes_{\tau\in\Phi}\left(\bigwedge^{p_\tau} St\right)^* \otimes (St)^{-1}$$

et

$$\forall\sigma\in\mathbf{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|E)\quad r_\mu(\sigma)\left(\bigotimes_{\tau\in\Phi} v_\tau\otimes z\right) = \bigotimes_{\substack{\tau\in\Phi\\ \sigma^{-1}\tau\in\Phi}} v_{\sigma^{-1}\tau}\bigotimes_{\substack{\tau\in\Phi\\ \sigma^{-1}\tau\notin\Phi}} {}^t\left(\bigwedge^{p_\tau} w^{-1}\right)(v_{c\sigma^{-1}\tau})\otimes z$$

Remarque A.7.3. — Le morphisme r_μ est bien défini : on doit vérifier l'égalité pour tout g et σ

$$r_\mu(\sigma)r_\mu(g)r_\mu(\sigma)^{-1} = r_\mu(g^\sigma)$$

Cela ne pose pas de problème au niveau des composantes du produit tensoriel indexées par des $\tau\in\Phi$ vérifiant $\sigma^{-1}\tau\in\Phi$. Cependant, si $\sigma^{-1}\tau\notin\Phi$, il faut remarquer qu'étant donné que σ stabilise la classe de conjugaison μ, $q_{c\sigma^{-1}\tau} = p_\tau$, et que si g est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n alors pour tout i, $\det(g)^{-1}.\bigwedge^i g = {}^t\left(\bigwedge^{n-i} g\right)$.

Rappelons que F^Φ désigne le corps réflex de (F,Φ). Dans notre cas $F^\Phi = \tau_0(\mathcal{K})$ pour un plongement τ_0 de $\mathcal{K}$ dans $\mathbb{C}$. Nous allons nous intéresser au corps composé EF^Φ. On peut définir une représentation r'_μ de ${}^LH_{EF^\Phi}$ de la façon suivante :

$${}^LH \simeq \left(\prod_{\tau\in\Phi}\mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}_\ell})\times\prod_{\tau\in c\Phi}\mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}_\ell})\times\overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times\times\overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times\right)\rtimes\mathbf{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q})$$

Posons

$$r'_{\mu|\,{}^LH^0} = \bigotimes_{\tau\in\Phi}\left(\bigwedge^{p_\tau} St\right)^*\bigotimes_{\tau\in c\Phi} 1\otimes(St)^{-1}\otimes 1$$

et $\forall\sigma\in\mathbf{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|EF^\Phi)$

$$r'_\mu(\sigma)(\bigotimes_{\tau\in\Phi} v_\tau\otimes\lambda) = \bigotimes_{\tau\in\Phi} v_{\sigma^{-1}\tau}\otimes\lambda$$

Et remarquons maintenant que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
{}^LG_{EF^\Phi} \arrow[r] \arrow[dr, "r_{\mu|EF^\Phi}"'] & {}^L(\mathrm{Res}_{\mathcal{K}/\mathbb{Q}}G_{\mathcal{K}})_{EF^\Phi} \arrow[r, "\sim"] & {}^LH_{EF^\Phi} \arrow[dl, "r'_\mu"] \\
& \mathrm{GL}_{dim(r_\mu)}(\overline{\mathbb{Q}_\ell}) &
\end{tikzcd}$$

où la première application horizontale est l'application associée au changement de base et la seconde à la correspondance de Jacquet-Langlands décrites auparavant.

Notons maintenant $R_1 = [R_{\ell,\rho,\mu}(\Pi_f)]$ la représentation de $\mathbf{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|E)$ associée à Π_f dans la cohomologie de la variété de Shimura. Soit (Π', χ) le changement de base stable de Π associé à Π grâce au théorème A.3.1. Soit R' la représentation ℓ-adique de $\mathbf{Gal}(\overline{F}|F)$ associée à Π' par le théorème A.5.1. Il résulte du théorème A.3.1 que χ est un caractère de Hecke algébrique. On peut donc également lui associer un caractère ℓ-adique χ' : $\mathbf{Gal}(\overline{\mathcal{K}}|\mathcal{K}) \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times$. Faisons maintenant la remarque fondamentale suivante qui résulte de l'égalité $q_\tau = n - p_\tau$:

$$a := \sum_{\tau\in\Phi} p_\tau(n-1) - \sum_{\tau\in\Phi} p_\tau q_\tau \equiv 0 \bmod 2$$

A l'entier $\frac{a}{2}$ est associé le caractère cyclotomique ℓ-adique tordu $\frac{a}{2}$-fois (qui est le caractère Galoisien ℓ-adique associé au caractère de Hecke algébrique $||.||^{a/2}$) ; nous noterons $(-) \mapsto (-)(\frac{a}{2})$ la torsion par ce caractère. Le couple (R', χ') fournit (par le lemme de Shapiro) un morphisme

$$R'_2 : \mathbf{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q}) \longrightarrow {}^LH$$

Posons

$$R_2 = \left(r'_\mu \circ R'_{2|EF^\Phi}\right)^{m_\Pi} (\frac{a}{2})$$

comme représentation de $\mathbf{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|EF^\Phi)$.

Montrons que $R_{2|\mathbf{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|EF^\Phi)} = R_1$ ce qui conclura la démonstration d'après les propriétés de R' énoncées dans le théorème A.5.1, la forme du changement de base local en un p décomposé, la définition de r'_μ, le choix de a et qu'étant donné que p est décomposé dans $\mathcal{K}$, $(EF^\Phi)_\nu = E_\nu$.

Pour montrer que $R_{2|\mathbf{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|EF^\Phi)} = R_1$ il suffit d'après le théorème de densité de Tchebotarev de montrer que pour presque toutes les places v de EF^Φ, $R_{2|W_{(EF^\Phi)_v}} = R_{1|W_{(EF^\Phi)_v}}$. Restreignons nous aux places v divisant des premiers p_0 de $\mathbb{Q}$ tels que Π_{p_0} soit non ramifiée. L'égalité ci dessus résulte alors de la commutativité du diagramme global ci dessus restreint à $W_{(EF^\Phi)_v}$ et du théorème de Kottwitz calculant la représentation galoisiennes non ramifiée en une place de bonne réduction. □

Corollaire A.7.4. — *Soit v_0 une place de F fixée. Soit ν un plongement de $\overline{\mathbb{Q}}$ dans $\overline{\mathbb{Q}_p}$ tel que si $\tau \in \Phi$ vérifie $\nu \circ \tau : F \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}_p}$ n'induise pas v_0 alors $p_\tau = 0$ (autrement dit,*

la donnée de Shimura locale associée est étale hors v_0). Alors, $E_\nu = E(\mu_{v_0})$ et

$$[R_{\ell,\rho,\mu}(\Pi_f)]_{|W_{E_\nu}} = m_\Pi [r_{\mu_{v_0}} \circ \tilde{\sigma}_\ell(\Pi_{v_0})_{|E(\mu_{v_0})}] \otimes \sigma_\ell(\chi)^{-1}_{|E_\nu} \, |.|^{\frac{-\sum_\tau p_\tau q_\tau}{2}}$$

Remarque A.7.5. — Les représentations ℓ-adiques des groupes de Weil locaux considérées ci dessus sont semi-simples et pas seulement Frobenius semi-simples : on a semi-simplifié la monodromie de ces représentations. Ainsi, par exemple si ρ est une représentation galoisienne locale

$$[\rho \otimes sp(r)] = r[\rho]$$

Cependant le théorème ci dessus devrait être encore vrai sans semi-simplification de la monodromie, c'est à dire il devrait y avoir un isomorphisme comme représentations du groupe de Weil-Deligne.

Nous allons maintenant nous intéresser à la restriction de la représentation galoisienne obtenue dans la cohomologie de la variété de Shimura en une place non décomposée. Soit donc p un premier de $\mathbb{Q}$ inerte dans $\mathcal{K}$. Avec les notations du I, il y a une décomposition

$$G(\mathbb{Q}_p) = \prod_{i\in I} \mathbf{GL}_n(F_{v_i}) \times G(\prod_{j\in J} U(n, F_{v_j}))$$

où l'on suppose que l'ensemble J paramétrant les places de F égales à leur complexe conjuguée est non vide. Si Π est une représentation automorphe de G satisfaisant les hypothèses du théorème A.3.1, le changement de base stable global $BC(\Pi)$ consiste en une représentation automorphe Π' de $\mathbf{GL}_{n/F}$ et un caractère de Hecke χ de $\mathbf{A}^\times_{\mathcal{K}}$. La composante en p de $\Pi' \otimes \chi$ est donc une représentation du groupe p-adique

$$\prod_{i\in I} \left(\mathbf{GL}_n(F_{v_i}) \times \mathbf{GL}_n(F_{v_i^c})\right) \times \prod_{j\in J} \mathbf{GL}_n(F_{v_j}) \times \mathcal{K}_p^\times$$

de la forme

$$(\Pi' \otimes \chi)_p = \bigotimes_{i\in I} (\pi_i \otimes \check{\pi}_i) \otimes \bigotimes_{j\in J} \pi_j \otimes \chi_p$$

où $\forall j \in J$ $\pi_j \simeq \check{\pi}_j$. Nous noterons alors

$$\mathrm{BC}(\Pi)^0_p = \bigotimes_{i\in I} \pi_i \otimes \bigotimes_{j\in J} \pi_j \otimes \chi_p$$

comme représentation de $\prod_{i\in I} \mathbf{GL}_n(F_{v_i}) \times \prod_{j\in J} \mathrm{GL}_n(F_{v_j}) \times \mathcal{K}_p^\times$ qui est le groupe des $\mathbb{Q}_p$-points du groupe algébrique $\prod_{i\in I} \mathrm{Res}_{F_{v_i}/\mathbb{Q}_p} \mathbf{GL}_n \times \prod_{j\in J} \mathrm{Res}_{F_{v_j}/\mathbb{Q}_p} \mathbf{GL}_n \times \mathrm{Res}_{\mathcal{K}_p/\mathbb{Q}_p} \mathbb{G}_m$. On peut en particulier définir la représentation $\tilde{\sigma}_\ell(\mathrm{BC}(\Pi)^0_p)$ de $\mathbf{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}|\mathbb{Q}_p)$ dans le L-groupe de ce groupe réductif (confère A.7.1). Dans la démonstration du théorème précédent, l'égalité $R_{2|\mathbf{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|EF^\Phi)} = R_1$ implique alors le théorème suivant :

Théorème A.7.6. — *Plaçons nous dans le cadre du théorème précédent en supposant cette fois ci que p est inerte dans $\mathcal{K}$. Il y a une égalité pour toute $\Pi \in \mathcal{T}(G)_\rho$:*

$$[R_{\ell,\rho,\mu}(\Pi_f)]_{|W_{(E_\nu \mathcal{K}_p)}} = [r_{\mu_{\overline{\mathbb{Q}_p}}} \circ \tilde{\sigma}_\ell(BC(\Pi)^0_p)_{|E_\nu \mathcal{K}_p}]^{m_\Pi} \otimes |.|^{-\frac{\dim Sh}{2}}$$

et si $BC(\Pi)_p^0 = \otimes_{i\in I}\pi_i \otimes_{j\in J} \pi_j \otimes \chi$, *si* M *désigne le produit des corps réflex locaux, on a l'égalité*

$$[R_{\ell,\rho,\mu}(\Pi_f)]_{|W_{(M\mathcal{K}_p)}}] = m_\Pi \bigotimes_{i\in I}[(r_{\mu_i})_{|M\mathcal{K}_p}\circ\tilde{\sigma}_\ell(\pi_i)_{|M\mathcal{K}_p} \bigotimes_{j\in J}(r_{\mu_j})_{|M\mathcal{K}_p}\circ\tilde{\sigma}_\ell(\pi_j)_{|M\mathcal{K}_p}\otimes\sigma_\ell(\chi)_{|M\mathcal{K}_p}$$

Remarque A.7.7. — Dans le cas d'un groupe unitaire en 3-variables les travaux de Rogawski ([**53**] et appendice C.1.3) montrent que dans le théorème précédent $BC(\Pi)_p^0$ ne dépend que de Π_p et que donc la représentation galoisienne découpée par Π_f restreinte à un groupe de décomposition en p ne dépend que de Π_f.

Nous allons préciser ce théorème dans le cas de d'un groupe unitaire en trois variables.

Théorème A.7.8. — *Supposons* $n = 3$ *et* $G(\mathbb{Q}_p) = GU(3)$ *le groupe non ramifié en trois variables. Soit* $\Pi \in \mathcal{T}(G)_\rho$. *Supposons* Π_p *supercuspidale ou bien une représentation de Steinberg de* $G(\mathbb{Q}_p)$. *Soit* $\psi : W_{\mathbb{Q}_p} \longrightarrow {}^LGU(3)$ *le L-paramètre local associé (confère l'appendice C ; dans le cas de la représentation notée* $\pi^s(\xi)$ *dans l'appendice C ou de la représentation de Steinberg, le L-paramètre n'est pas trivial sur le facteur* $SL_2(\mathbb{C})$ *; dans ce cas on note* ψ *la restriction à* $W_{\mathbb{Q}_p}$ *de ce L-paramètre). Supposons qu'en une place finie de* $\mathbb{Q}$ *décomposée dans* $\mathcal{K}$, Π *est supercuspidale. Il y a a alors une égalité*

$$[R_{\ell,\rho,\mu}(\Pi_f)]_{|W_{E_\nu}} = [r_\mu \circ \psi_{|W_{E_\nu}}]\ |.|^{-\frac{\dim Sh}{2}}$$

Démonstration. — Notons (Π', χ) le changement de base stable de Π (A.3) et R' la représentation ℓ-adique de $\mathbf{Gal}(\overline{F}|F)$ associée à Π' par le théorème A.5.1. Étant donné que $\check{\Pi}' \simeq \Pi'^c$, $\check{R}' \simeq R'^c$ (utilisant qu'en une place finie de F, R' réalise la correspondance de Langlands locale on en déduit que cet isomorphisme est vrai en toute les places finies de F et qu'il est donc vérifié par le théorème de densité de Tchebotarev). La représentation Π étant supercuspidale en une place finie décomposée, Π' est supercuspidale en une place finie, et donc la restriction de R' à un groupe de décomposition en cette place est irréductible (il s'agit d'une propriété de la correspondance de Langlands locale). La représentation R' est donc irréductible. Comme dans le lemme 15.1.2 de [**53**], il existe un signe $c(R') \in \{\pm 1\}$ obstruction à ce que R' se relève en un L-paramètre $\mathbf{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|F^+) \longrightarrow {}^LG_1$. Montrons que $c(R') = 1$. Le caractère $\det(R')$ est le caractère ℓ-adique associé au caractère central de Π' (puisque cela est vérifié en toutes les places finies d'après une propriété standard de la correspondance de Langlands locale). Comme dans le lemme 15.1.2 de [**53**], $c(R') = 1$ ssi ce caractère central est trivial sur $(F^+)^\times\backslash\mathbf{A}_{F^+}^\times$, ce qui est le cas d'après la dernière propriété du théorème A.3. Il existe donc une unique extension de R',

$$\varphi' : \mathbf{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|F^+) \longrightarrow {}^LG_1$$

où G_1 est vu comme groupe sur F^+. D'où un L-paramètre

$$\varphi'' : \mathbf{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q}) \longrightarrow {}^LG_1$$

où cette fois ci G_1 est un groupe sur $\mathbb{Q}$. Le caractère algébrique χ fournit un caractère ℓ-adique χ' qui couplé à φ'' nous donne un L-paramètre

$$\varphi : \mathbf{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}|\mathbb{Q}) \longrightarrow {}^LG$$

L'application de changement de base locale de Rogawski est injective ([**53**] théorème 13.2.1). On montre de même que si $GU(3)$ désigne le groupe de similitudes unitaires p-adique non ramifiée 3 variables, si $\varphi : W_{\mathbb{Q}_p} \longrightarrow {}^L GU(3)$ est un L-paramètre, $\varphi_{|W_K}$ détermine φ de façon unique, où K est l'extension quadratique non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$. On en déduit en particulier que

$$\varphi_{|W_{\mathbb{Q}_p}} = \psi$$

et qu'en toutes les places v où Π est non ramifiée, $\varphi_{|W_{\mathbb{Q}_v}}$ est associé à Π_v via la correspondance de Langlands locale non ramifiée.

Considérons maintenant $r_\mu \circ \varphi$. Comme dans la démonstration précédente, d'après le théorème de Kottwitz (A.6), $[r_\mu \circ \varphi]$ est égal à $[R_{\ell,\mu,\rho}(\Pi_f)]\ |.|^{-\frac{\dim \mathrm{Sh}}{2}}$ en presque toutes les places où Π est non ramifiée. D'où le résultat d'après le théorème de densité de Tchebotarev. $\square$

APPENDICE B

RÉSULTATS CONCERNANT LES TYPES ASSOCIÉS AUX REPRÉSENTATIONS DES GROUPES P-ADIQUES

B.1. Quelques propriétés générales des types associés aux représentations supercuspidales des groupes p-adiques ([9])

Soit F un corps local et G les points à valeurs dans F d'un groupe réductif sur F. Soit π une représentation supercuspidale de G. Notons $\mathfrak{s} = [\pi, G]$ sa classe d'équivalence inertielle.

Nous ferons l'hypothèse suivante :

Hypothèse B.1.1. — *Il existe un $\mathfrak{s}$ type (J, λ), un sous-groupe compact ouvert modulo le centre de G, $\tilde{J}$ tel que $J = \tilde{J} \cap G^1$, et une extension $\tilde{\lambda}$ de λ à $\tilde{J}$ tels que*

$$\pi \simeq c - Ind_{\tilde{J}}^{G}\, \tilde{\lambda}$$

Soient maintenant χ_1, χ_2 deux caractères non ramifiés de G.

Fait B.1.1. — *On a l'équivalence*

$$\pi \otimes \chi_1 \simeq \pi \otimes \chi_2 \Longleftrightarrow \chi_{1|\tilde{J}} = \chi_{2|\tilde{J}}$$

En effet, l'implication de la droite vers la gauche résulte de l'isomorphisme $(c - Ind_{\tilde{J}}^{G}\pi) \otimes \chi \simeq c - Ind_{\tilde{J}}^{G}(\pi \otimes \chi_{|\tilde{J}})$. Dans l'autre sens, si $\pi \otimes \chi_1 \simeq \pi \otimes \chi_2$, alors $(\pi \otimes \chi_1)_{|\tilde{J}} \simeq (\pi \otimes \chi_2)_{|\tilde{J}}$ or, pour $i = 1, 2$ il résulte de la proposition 5.6 de [**9**] que $(\pi \otimes \chi_i)_{|\tilde{J}} = \tilde{\lambda} \otimes \chi_{i|\tilde{J}}$. $\tilde{\lambda}$ étant irréductible de dimension finie, on en déduit en utilisant le caractère de $\tilde{\lambda}$ que $\chi_{1|\tilde{J}} = \chi_{2|\tilde{J}}$.

Notons $X_{\mathbb{C}}(G)$ le groupe des caractères non ramifiés de G. Le groupe $X_{\mathbb{C}}(G)$ s'identifie aux points d'un tore algébrique sur $\mathbb{C}$.

Fait B.1.2. — *Soit $\Gamma = \{\chi \in X_{\mathbb{C}}(G) \mid \pi \otimes \chi \simeq \pi\}$, un sous-groupe fini de $X_{\mathbb{C}}(G)$. L'algèbre de Hecke du type, $\mathcal{H}(\lambda, G)$ est isomorphe à l'algèbre des fonctions régulières sur la composante connexe du centre de Bernstein indexée par $\mathfrak{s}$. L'algèbre $\mathcal{H}(\lambda, G)$ s'identifie donc aux fonctions régulières sur le tore complexe $X_{\mathbb{C}}(G)/\Gamma$.*

Notons $e_\lambda \in \mathcal{H}(G)$ l'idempotent associé à λ et $\mathcal{H}(\lambda, G) = e_\lambda * \mathcal{H}(G) * e_\lambda$. Pour toute représentation π' dans la classe d'équivalence $\mathfrak{s}$, l'espace $\pi'(e_\lambda).V_{\pi'}$ est un $\mathcal{H}(\lambda, G)$-module sur lequel $\mathcal{H}(\lambda, G)$ opère par un caractère qui correspond au point associé à π'.

L'application suivante est alors un isomorphisme

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{H}(\lambda, G) & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{C}[X_{\mathbb{C}}(G)/\Gamma] \\ f & \mapsto & [[\chi] \mapsto \mathrm{tr}_{\pi\otimes\chi}(f)] \end{array}$$

Nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme B.1.2. — *On a l'inégalité*

$$\forall g \in \tilde{J} \quad tr_{\pi}(e_\lambda * \delta_g) \neq 0$$

Démonstration. — Commençons par remarquer que

$$\mathrm{tr}_\pi(e_\lambda * \delta_g) = \mathrm{tr}_\pi(e_\lambda * \delta_g * e_\lambda) \text{ où } e_\lambda * \delta_g * e_\lambda \in \mathcal{H}(\lambda, G)$$

On vérifie de plus que

$$\forall \chi \in X_{\mathbb{C}}(G) \quad \mathrm{tr}_{\pi\otimes\chi}(e_\lambda * \delta_g) = \chi(g)\ \mathrm{tr}_\pi(e_\lambda * \delta_g)$$

et donc, $\mathrm{tr}_\pi(e_\lambda * \delta_g) = 0 \Longleftrightarrow$ la fonction régulière associée à $e_\lambda * \delta_g * e_\lambda$ est nulle $\Longleftrightarrow$ $e_\lambda * \delta_g * e_\lambda = 0$ (grâce à l'isomorphisme ci dessus).

Or,

$$(e_\lambda * \delta_g * e_\lambda) * \delta_{g^{-1}} = e_\lambda * (\delta_g * e_\lambda * \delta_{g^{-1}}) = e_\lambda * e_{\lambda^g}$$

Étant donné que λ s'étend en $\tilde{\lambda}$ et que $g \in \tilde{J}$, $\lambda^g \simeq \lambda$ et donc $e_{\lambda^g} = e_\lambda$. D'où

$$(e_\lambda * \delta_g * e_\lambda) * \delta_{g^{-1}} = e_\lambda * e_\lambda = e_\lambda \neq 0 \Longrightarrow e_\lambda * \delta_g * e_\lambda \neq 0$$

□

B.2. Types pour GL_n

Rappelons l'un des théorèmes principaux de [**8**]

Théorème B.2.1 ([**8**]). — *Pour $G = GL_n$, l'hypothèse B.1.1 de la section précédente est vérifiée.*

Nous remarquerons de plus que tous les groupes $\tilde{J}$ obtenus sont contenus dans des normalisateurs de groupes parahoriques dans GL_n (cela est valable pour n'importe quel sous-groupe compact modulo le centre de GL_n et résulte de la classification des sous-groupes compacts maximaux de PGL_n).

B.3. Types pour les groupes unitaires non ramifiés

B.3.1. Le groupe unitaire en trois variables. — Dans [**48**] le théorème suivant est démontré :

Théorème B.3.1. — *Supposons p différent de 2. Toutes les représentations supercuspidales du groupe unitaire quasi-déployé $U(3)$ sur un corps local p-adique possèdent un type vérifiant l'hypothèse B.1.1.*

Nous utiliserons des types pour les groupes de similitudes unitaires non ramifiés. Bien que le théorème précédent soit démontré dans le cas des groupes unitaires, on peut l'étendre aux groupes de similitude unitaires en utilisant la section C.1.7

B.3.2. Le groupe unitaire général. — Dans l'article [**35**], Ju-Lee Kim construit des types vérifiant l'hypothèse B.1.1 pour des représentations supercuspidales des groupes unitaires non ramifiés. Elle conjecture qu'elle obtient ainsi toutes les représentation supercuspidales de ces groupes. Ses résultats s'étendent aux groupes de similitudes unitaires (bien que cela n'est pas été publié).

APPENDICE C

RÉSULTATS DE ROGAWSKI SUR $U(3)$

Nous rassemblons dans cette annexe les résultats de [**53**] que nous utilisons. La lecture des articles [**54**] et [**55**] est également utile.

C.1.

C.1.1. Notations. — Soit $F|F_0$ une extension quadratique de corps locaux p-adiques. Soit $G = U(3)$ le groupe unitaire en trois variables quasidéployé vu comme groupe sur F_0.

Soit $H = U(2) \times U(1)$ l'unique groupe endoscopique elliptique de G. Il est donc muni d'un morphisme de L-groupes ${}^LH \longrightarrow {}^LG$ décrit dans le chapitre 4.6 et 4.7 de [**53**].

Soit $C = U(1) \times U(1) \times U(1)$ l'unique groupe endoscopique elliptique de H.

Les groupes C et H sont les deux groupes endoscopiques associés à G (plus généralement, les groupes endoscopiques associés aux groupes unitaires $U(n)$ sont décrits dans la partie 1.2 de [**54**]).

C.1.2. Transfert endoscopique local. —

C.1.2.1. De C à H. — Dans le chapitre 11 de [**53**], l'existence du transfert endoscopique des représentations admissibles irréductibles de C vers celles de H est énoncé (les démonstrations étant identiques à celles de [**44**]). Il s'agit d'une application injective

$$\begin{array}{rcl} \Pi(C) & \longrightarrow & \Pi(H) \\ \theta & \longmapsto & \rho(\theta) \end{array}$$

où $\Pi(C)$ désigne les représentation irréductibles de $C(F_0)$ (i.e. les caractères $\theta = \theta_1 \otimes \theta_2 \otimes \theta_3$ de $U(1) \times U(1) \times U(1)$) et $\Pi(H)$ les L-paquets de représentations admissibles irréductibles irréductibles de $H(\mathbb{Q}_p)$.

C.1.2.2. De H à G. — Dans le chapitre 13 de [**53**], l'existence du transfert local

$$\begin{array}{rcl} \Pi(H) & \longrightarrow & \Pi(G) \\ \rho & \longmapsto & \Pi(\rho) \end{array}$$

est démontré, où $\Pi(G)$ désigne l'ensemble des L-paquets associés à $G(F_0)$.

C.1.3. Changement de base local. — Dans le chapitre 13.2 de [**53**], Rogawski démontre l'existence d'une application de changement de base quadratique

$$BC : \Pi(G) \longrightarrow \Pi(\mathbf{GL}_{n/F}) = \mathcal{A}(3, F)$$

compatible avec le changement de base global de l'annexe A. Son image est constituée de représentations de $\mathbf{GL}(3, F)$, π vérifiant $\check{\pi} \simeq \pi^c$ et $\omega_{\pi|F_0^\times} = 1$ où c désigne l'automorphisme non trivial de $F|F_0$ et ω_π le caractère central de π.

C.1.4. Classification des L-paquets supercuspidaux de G. — Dans la section 12-2 de [**53**], il est donné une description détaillée des L-paquets de représentations de $G(F_0)$. Nous rappelons cette classification dans le cas des représentations supercuspidales qui est le seul cas que nous considérons.

C.1.4.1. L-paquets supercuspidaux pour H. — [proposition 11.1.1 de [**53**]]

Définition C.1.1. — Un L-paquet de représentations de H contient une représentation supercuspidale ssi ce L-paquet est formé de représentations supercuspidales (ce fait est faux en général). Nous appellerons un tel L-paquet un L-paquet supercuspidal.

Les L-paquets supercuspidaux de représentations de H se scindent en deux ensembles :
- Les L-paquets de cardinal 1 ou encore L-paquets stables. Ce sont les $\{\rho\}$ où ρ est une représentation supercuspidale de H telle que le changement de base quadratique $BC(\rho)$ soit une représentation supercuspidale de $\mathbf{GL}_2(F) \times F^\times$.
- Si θ est un caractère de C de la forme $\theta_1 \otimes \theta_2 \otimes \theta_1$ où $\theta_1 \neq \theta_2$, le L-paquet transfert endoscopique $\rho(\theta)$ est supercuspidal de cardinal 2. Lorsque θ parcourt les caractères de C du type précédent on obtient ainsi tous les L-paquets supercuspidaux de G de cardinal plus grand que 1. Un L-paquet supercuspidal Π est de la forme $\rho(\theta)$ ssi $BC(\Pi)$ n'est par supercuspidale ($BC(\Pi)$ est alors un quotient d'une série principale de $\mathbf{GL}_2(F) \times F^\times$ calculée en fonction de θ).

C.1.4.2. L-paquets supercuspidaux pour G. —

Définition C.1.2. — Un L-paquet de représentations de G est appelé un L-paquet supercuspidal s'il est constitué de représentations supercuspidales.

Les L-paquets supercuspidaux de représentations de G se scindent en trois sous ensembles :
- Les L-paquets de cardinal 1 ou encore L-paquets stables. Ce sont les $\Pi = \{\pi\}$ où π est une représentation supercuspidale telle que $BC(\pi)$ soit une représentation supercuspidale de $\mathbf{GL}_3(E)$.
- Les L-paquets de cardinal 2. Ils sont construits de la façon suivante : soit ρ un L-paquet supercuspidal de cardinal 1 de H. Alors, le transfert endoscopique $\Pi(\rho)$ est un L-paquet supercuspidal de cardinal 2 de G. Un L-paquet supercuspidal Π est de cette forme ssi $BC(\Pi)$ est une représentation de $\mathbf{GL}_3(F)$ dont le support supercuspidal est une représentation du sous groupe de Levi $\mathbf{GL}_2(F) \times \mathbf{GL}_1(F)$.
- Les L-paquets de cardinal 4. Ils sont construits ainsi : Soit $\rho = \rho(\theta)$ un L-paquet supercuspidal de cardinal 2 de H tel que si $\theta = \theta_1 \otimes \theta_2 \otimes \theta_3$ alors $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ sont deux

à deux distincts. Le L-paquet obtenu par transfert de H à G de ρ, noté $\Pi(\rho)$ est alors de cardinal 4. Un L-paquet supercupsidal Π de G est de ce type là ssi $BC(\Pi)$ est un sous-quotient d'une série principale de $\mathbf{GL}_3(F)$.

C.1.5. Correspondance de Langlands locale pour les L-paquets supercuspidaux de G. — Dans le chapitre 15 de [**53**], il est expliqué comment construire une correspondance de Langlands locale pour les L-paquets supercuspidaux de G à partir de la correspondance de Langlands locale pour $\mathbf{GL}_3(F)$, et la classification précédente.

Rappelons cette correspondance :

– L'application $BC : \Pi(G) \longrightarrow \mathcal{A}(3, F)$ induit une bijection entre les L-paquets supercuspidaux de cardinal 1 et les représentations supercuspidales π' de $\mathbf{GL}_3(F)$ vérifiant $\check{\pi}' \simeq \pi'^c$ (où c est l'automorphisme non trivial de $F|F_0$) et $\omega_{\pi'|F_0^\times} = 1$. Si $\{\pi\} \in \Pi(G)$ est un tel L-paquet, si $\varphi : W_F \longrightarrow \mathbf{GL}_3(\mathbb{C})$ est le paramètre de Langlands associé à $BC(\pi)$ (une représentation irréductible de dimension 3), φ défini un morphisme de L-groupe $W_F \longrightarrow {}^LG_F = \mathbf{GL}_3(\mathbb{C}) \times W_F$ qui possède une unique extension en un L-morphisme $W_{F_0} \longrightarrow {}^LG$. Cela établit une bijection entre les L-paquets supercuspidaux de cardinal 1 de G et les classes de ${}^LG^0$-conjugaison φ de L-morphismes de W_{F_0} dans ${}^LG$ telles que $\varphi_{|W_{F_0}}$ soit irréductible.

– On établit de même une correspondance de Langlands locale pour les L-paquets supercuspidaux de H de cardinal 1. Alors, si $\Pi = \Pi(\rho)$ est un L-paquet supercuspidal de cardinal 2 de G, si $\varphi : W_{F_0} \longrightarrow {}^LH$ est le paramètre de Langlands associé à ρ, le paramètre associé à Π est celui composé $W_{F_0} \longrightarrow {}^LH \longrightarrow {}^LG$. Cela établit une bijection entre les L-paquets supercuspidaux de G de cardinal 2 et les classes de ${}^LG^0$-conjugaison de L-morphismes $\varphi : W_{F_0} \longrightarrow {}^LG$ telles que $\mathrm{im}(\varphi)$ ne soit pas contenue dans ${}^LB$, où B est un sous-groupe de Borel de G, et telles que $\varphi_{|W_F}$ soit somme de deux représentations irréductibles.

– La correspondance de Langlands locale pour C se déduit de la théorie du corps de classe local. Si $\Pi = \Pi(\rho(\theta))$ est un L-paquet supercuspidal de cardinal 4 de G, où θ est un caractère de C, si $\varphi : W_{F_0} \longrightarrow {}^LC$ est le paramètre associé à θ, on associe à Π le paramètre composé $W_{F_0} \longrightarrow {}^LC \longrightarrow {}^LH \longrightarrow {}^LG$. Cela définit une bijection entre les L-paquets supercuspidaux de G de cardinal 4 et les classes de ${}^LG^0$-conjugaison de L-morphismes $\varphi : W_{F_0} \longrightarrow {}^LG$ telles que $\mathrm{im}(\varphi)$ ne soit pas contenue dans ${}^LB$, où B est un sous-groupe Borel de G, et telles que $\varphi_{|W_{F_0}}$ soit somme de trois caractères.

Il y donc une bijection entre les L-paquets supercuspidaux de G et les classes de ${}^LG^0$-conjugaison de L-morphismes $\varphi : W_{F_0} \longrightarrow {}^LG$ telles que $\mathrm{im}(\varphi)$ ne soit pas contenue dans ${}^LB$ pour un sous-groupe de Borel B de G. L'application de changement de base se lit au niveau des L-paramètres comme l'application de restriction $\varphi \longmapsto \varphi_{|W_F}$.

C.1.6. Classification des représentations supercuspidales de G. — Comme nous l'avons vu, les représentations supercuspidales de H sont toutes membres d'un L-paquet supercuspidal. Cela est faux pour G. Il existe une famille de représentations supercuspidales de G, $(\pi^s(\xi))_\xi$, toutes membres de L-paquets de cardinal 2 qui ne sont pas supercuspidaux.

Ces représentations supercuspidales se construisent ainsi : soit ξ un caractère de H. A ξ est associé la représentation de Steinberg $St_H(\xi)$ de H définie comme constituante d'une série principale réductible de H (l'autre constituant étant ξ, confère [**53**] 12.1). L'ensemble $\{St_H(\xi)\}$ est un L-paquet stable de carré intégrable de représentations de H. Considérons le L-paquet de représentations de G, $\Pi(St_H(\xi))$, transfert endoscopique de $\{St_H(\xi)\}$. C'est un L-paquet de cardinal 2 noté

$$\Pi(St_H(\xi)) = \{\pi^2(\xi), \pi^s(\xi)\}$$

où $\pi^s(\xi)$ est une représentation supercuspidale et $\pi^2(\xi)$ une représentation de carré intégrable. Alors,

Fait C.1.3. — *Les représentations supercuspidales de G sont soit membres d'un L-paquet supercuspidal soit de la forme $\pi^s(\xi)$ pour une unique représentation de dimension 1 de H, ξ.*

C.1.7. Passage de $U(3)$ à $GU(3)$. — Soit $G = GU(3)$ un groupe de similitudes unitaires non ramifié en 3 variables défini sur $\mathbb{Q}_p$ et $G_1 \subset G$ le groupe unitaire noyau du facteur de similitude. Soit $K|\mathbb{Q}_p$ l'extension quadratique non ramifiée. Il y a une inclusion $K^\times \hookrightarrow Z_G$.

Lemme C.1.4. — *On a l'égalité suivante*

$$G(\mathbb{Q}_p) = G_1(\mathbb{Q}_p)K^\times$$

Démonstration. — Étant donné que G est non ramifié il y a une décomposition d'Iwasawa $G(\mathbb{Q}_p) = C.A(\mathbb{Q}_p).N(\mathbb{Q}_p)$, où C est compact, A est un tore déployé maximal et N unipotent. Donc, $v_p(c(G(\mathbb{Q}_p))) = v_p(c(A(\mathbb{Q}_p)))$. Avec les notations de l'appendice D, $A(\mathbb{Q}_p) = \{\mathrm{diag}(t, x, t^{-1}x^2) \mid t \in \mathbb{Q}_p^\times\ x \in \mathbb{Q}_p^\times\ \}$ et $c = x^2$. Donc, $v_p(c(G(\mathbb{Q}_p))) = 2\mathbb{Z}$.

De plus, $N_{K/\mathbb{Q}_p}(K^\times) = p^{2\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_p^\times$ et donc $c(G(\mathbb{Q}_p)) \subset N_{K/\mathbb{Q}_p}(K^\times)$. D'où le résultat puisque $c_{|K^\times} = N_{K/\mathbb{Q}_p}$. □

Corollaire C.1.5. — *Il y a une bijection entre les représentations irréductibles de $G(\mathbb{Q}_p)$ et les couples (π, χ) où π est une représentation irréductible du groupe unitaire $G_1(\mathbb{Q}_p)$ et χ un caractère de $K^\times$ tel que $\omega_{\pi|K^\times} = \chi$.*

Corollaire C.1.6. — *La description des représentations supercuspidales de $G(\mathbb{Q}_p)$ est identique à celle de $G_1(\mathbb{Q}_p)$. En particulier, il y a une paramétrisation des paquets supercuspidaux de $G(\mathbb{Q}_p)$ par des L-paramètres $\psi : W_{\mathbb{Q}_p} \longrightarrow {}^LG$ tels que $im(\psi)$ n'est pas contenu dans ${}^LB$ pour un sous groupe de Borel B de G.*

APPENDICE D

ISOCRISTAUX MUNIS DE STRUCTURES ADDITIONNELLES : LE CAS DES GROUPES UNITAIRES

Nous traduisons dans cet appendices les résultats de [**37**] et [**42**] dans le cas des groupes de similitudes unitaires quasidéployés. Nous utiliserons librement les notations de ces deux articles.

D.1. Groupes unitaires en un nombre pair de variables

Soit $F|\mathbb{Q}_p$ non ramifiée de degré pair $[F:\mathbb{Q}_p]=2d$. Nous notons comme d'habitude σ le Frobenius de $F|\mathbb{Q}_p$ et Γ le groupe de Galois $\mathbf{Gal}(F|\mathbb{Q}_p)$. Soit $*=\sigma^d$ l'involution de degré 2 et F_0 le corps fixe de $*$. Notons G le groupe des similitudes unitaires quasidéployé en n variables, n pair,

$$G=\{g\in \mathrm{GL}_n(F)\mid {}^t g^* J g = c(g)J, c(g)\in \mathbb{Q}_p^\times\}$$

où $J=\begin{pmatrix} 0 & I_{n/2} \\ I_{n/2} & 0\end{pmatrix}$

Un tore maximal de G défini sur $\mathbb{Q}_p$ est

$$T=\left\{\begin{pmatrix} t_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & t_{n/2} & & & \\ & & & c(t_1^{-1})^* & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & c(t_n^{-1})^* \end{pmatrix} \mid t_i\in F^\times, c\in\mathbb{Q}_p^\times\right\}\simeq (F^\times)^{n/2}\times\mathbb{Q}_p^\times$$

Un tore déployé maximal est $A=(\mathbb{Q}_p^\times)^{n/2}\times\mathbb{Q}_p^\times\subset (F^\times)^{n/2}\times\mathbb{Q}_p^\times=T$.

G est déployé sur F,

$$G_F\simeq\prod_{0\le i<d-1}\mathrm{GL}_n(F)\times F^\times$$

Le L-groupe connexe de G est donné par

$$\widehat{G}=\prod_{0\le i<d}\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\times\mathbb{C}^\times$$

sur lequel $\sigma = \bar{1} \in \mathbb{Z}/2d\mathbb{Z}$ opère via

$$\sigma.((g_0, \ldots, g_{d-1}), c) = ((w^t g_{d-1}^{-1} w, g_0, \ldots, g_{d-2}), c \det g_{d-1})$$

où $w = ((-1)^{i-1}\delta_{i,n-j+1})_{i,j}$.

$$X_*(T) = \{(x_{ij})_{i\in\mathbb{Z}/2d\mathbb{Z}, 1\leq j\leq n} \mid x_{i,j} + x_{i+d,j+\frac{n}{2}} = c \in \mathbb{Z} \text{ constant } \}$$

$\Gamma = \mathbb{Z}/2d\mathbb{Z}$ agissant par translations de coordonnée i sur les (x_{ij})

Le groupe de Weyl absolu est

$$W = \mathfrak{S}_n^d$$

et

$$X_*(T)/W = \{(x_{ij}) \mid \forall 0 \leq i < d \ \ \forall j \leq j' \ \ x_{ij} \geq x_{ij'}\}$$

Le groupe de Weyl relatif sur $\mathbb{Q}_p$ est $W_{\mathbb{Q}_p} = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\frac{n}{2}} \rtimes \mathfrak{S}_{n/2}$ et

$$X_*(A)/W_{\mathbb{Q}_p} = \{(y_i)_{1\leq i\leq \frac{n}{2}} \mid \forall i \leq i' \ y_i \geq y_{i'} \text{ et } \forall i \ y_i \geq 0\} \times \mathbb{Z}$$

G^{der} est simplement connexe et le cocentre $D = G/G^{der}$ est isomorphe à

$$\{(x,t) \in F^\times \times \mathbb{Q}_p^\times \mid N_{F/F_0}(x) = t^n\} \text{ via } g \mapsto (\det_F(g), c(g))$$

$D \simeq \{\ker N_{F/F_0} : F^\times \to F_0^\times\} \times \mathbb{Q}_p^\times$ puisque n est pair et $N_{F/F_0} = t^n \Leftrightarrow N_{F/F_0}(xt^{-n/2}) = 1$. On en déduit aisément que,

$$X^*(Z(\widehat{G})^\Gamma) = X_*(D)_\Gamma = B(D) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

Nous normaliserons cet isomorphisme de la façon suivante : avec les notations précédentes

$$Z(\widehat{G}) = \prod_{0\leq i<d} \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times$$

et on vérifie aussitôt avec l'action donnée de σ sur $\widehat{G}$ que l'on a :

$$Z(\widehat{G})^\Gamma = \mu_2 \times \mathbb{C}^\times$$

où $\mu_2 \hookrightarrow (\mathbb{C}^\times)^d$ est le plongement diagonal et l'isomorphisme est fixé en posant $\mu_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Nous allons maintenant nous intéresser aux classes de σ conjugaison $b \in B(G)$ vérifiant $v_p(c(g)) = 1$ ce qui équivaut à dire que via l'application $\kappa : B(G) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ la seconde composante de $\kappa(b)$ est 1.

De telle classes de σ conjugaison classifient des isocristaux (N, Φ) munis d'une action de F et d'une polarisation $< .,. >: N \times N \to \mathbb{Q}_p(1)$ telle que si

$$N = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}} N(i)$$

est la décomposition $N(i) = \{n \in N | \forall x \in F \ x.n = \sigma^i(x)n\}$, $\Phi : N(i) \to N(i+1)$, alors

$$\forall i \neq j + d \ \ < N(i), N(j) >= 0 \text{ et } \ < .,. > \ \text{ est parfait sur } N(i) \times N(i+d)$$

Classes basiques :

D'après Kottwitz, il y a un isomorphisme

$$\kappa : B(G)_b \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

où la seconde composante est $b \mapsto v_p(c(g))$. Il y a donc une bijection entre les classes basiques telles que $v_p(c(g)) = 1$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Pour $b \in B(G)_b$, notons $\kappa(b)_1 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ la première composante de $\kappa(b)$.

L'unique pente du $\mathbb{Q}_p$ isocristal sous-jacent associée à une telle classe est $\frac{1}{2}$.

Le groupe J_b associé est une forme intérieure de G qui est un groupe de similitudes unitaires qui dépend de $\kappa(b)_1$. On a en fait le lemme suivant valable pour n'importe quel G et dont la vérification est facile :

Lemme D.1.1. — *Soit $\kappa : B(G)_b \xrightarrow{\sim} X^*(Z(\widehat{G})^\Gamma)$. Via l'identification $\widehat{G_{ad}} \simeq (\widehat{G})_{sc}$ considérons l'isomorphisme de Kottwitz $H^1(F, G_{ad}) \xrightarrow{\sim} X^*(Z((\widehat{G})_{sc})^\Gamma)$. Soit l'application $B(G)_b \longrightarrow H^1(F, G_{ad})$ qui à une classe basique b associe la classe de cohomologie d'un cocyle définissant la forme intérieure J_b. Le diagramme suivant est alors commutatif*

$$\begin{tikzcd} B(G)_b \arrow[r, "\kappa"] \arrow[d] & X^*(Z(\widehat{G})^\Gamma) \arrow[d] \\ H^1(F, G_{ad}) \arrow[r, "\sim"] & X^*(Z((\widehat{G})_{sc})^\Gamma) \end{tikzcd}$$

où l'application verticale de droite est la composition d'un caractère de $Z(\widehat{G})^\Gamma$ avec l'application naturelle $Z((\widehat{G})_{sc})^\Gamma \to Z(\widehat{G})^\Gamma$ induite par l'application Galois équivariante $Z((\widehat{G})_{sc}) \to Z(\widehat{G})$, elle même déduite du morphisme $(\widehat{G})_{sc} \to \widehat{G}$.

On en déduit donc le corollaire suivant dans la cadre de notre groupe unitaire :

Corollaire D.1.2. —

$$\forall b \in B(G)_b \;\; J_b = \begin{cases} G \;\; si \; \kappa(b)_1 = \bar{0} \\ G' \;\; si \; \kappa(b)_1 = \bar{1} \end{cases}$$

où G' désigne le groupe des similitudes unitaires en n variables non quasidéployé.

Classes quelconques : Si $b \in B(G)$, $v_p(c(g)) = 1$, et si les pentes du F-isocristal sous-jacent (avec les notations précédentes cet isocristal est $(N(0), \Phi^{2d})$) sont :

$$\lambda_1 = \frac{d_1}{h_1} > \cdots > \lambda_r = d > d - \lambda_1 > \cdots > d - \lambda_{r-1}$$

de multiplicités $m_1, \ldots, m_{r-1}, m_r, m_{r-1}, \ldots, m_1$. Avec les notations précédentes pour $X_*(A)/W_{\mathbb{Q}_p}$ on a

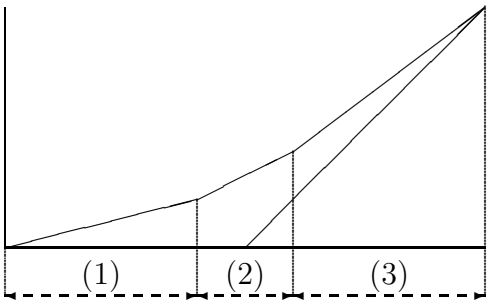
$$Newt(b) = (\underbrace{\frac{\lambda_1}{2d}, \ldots, \frac{\lambda_1}{2d}}_{m_1 h_1}, \ldots, \underbrace{\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}}_{m_r/2}) \times (1) \in X_*(A)_{\mathbb{Q}}/W_{\mathbb{Q}_p}$$

Si $m_r \neq 0$ le centralisateur du morphisme des pentes est le sous-groupe de Lévy

$$\begin{aligned} M &= \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}_p}(\mathrm{GL}_{m_1 h_1}) \times \cdots \times \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}_p}(\mathrm{GL}_{m_{r-1} h_{r-1}}) \times GU(F; 2m_r) \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & A_{r-1} & & & & \\ & & & B & & & \\ & & & & c^t A_1^{-*} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & c^t A_{r-1}^{-*} \end{pmatrix} \mid A_i \in \mathrm{GL},\ B \in GU \right\} \end{aligned}$$

où $GU(F; 2m_r)$ est le groupe des similitudes unitaires quasidéployé en $2m_r$ variables. Si $m_r = 0$,

$$M = \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}_p}(\mathrm{GL}_{m_1 h_1}) \times \cdots \times \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}_p}(\mathrm{GL}_{m_{r-1} h_{r-1}}) \times \mathbb{Q}_p^\times$$



– (2) est autoduale de pente 1/2 et provient d'un groupe unitaire
– (1) et (3) sont en dualité de pentes $\lambda, 1-\lambda$ et proviennent d'un GL

b est donc déterminé par les pentes $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ les multiplicités et par l'élément de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ associé à la classe basique de $GU(F; 2m_r)$. On a alors

$$J_b = \mathrm{GL}_{m_1}(D_{\lambda_1}) \times \cdots \times \mathrm{GL}_{m_{r-1}}(D_{\lambda_{r-1}}) \times H_b$$

où H_b est un groupe de similitudes unitaires en un nombre pair de variables déployé ou non suivant l'invariant dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (et où l'on pose $H_b = \mathbb{Q}_p^\times$ si $m_r = 0$).

Polygone de Hodge : Soit $\mu \in X_*(T)$ tel que μ soit donné par $\mu = (x_{ij})_{i \in \mathbb{Z}/2d\mathbb{Z}, 1 \leq j \leq n}$ où

$$\forall 1 \leq i < d \ \ \forall j \leq a_i \ \ x_{ij} = 1,\ \forall j > a_i \ \ x_{ij} = 0$$

où les $a_0, \ldots, a_{d-1}$ sont des entiers compris entre 1 et n, et où $c \circ \mu = 1$ i.e. $x_{i+d, j+\frac{n}{2}} = 1 - x_{i,j}$.

$\mu_1 = \widehat{\mu}_{Z(\widehat{G})^\Gamma} \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ est donné par

$$\mu_1 = (\sum_{0 \leq i < d-1} a_i \bmod 2, 1)$$

et $\mu_2 \in X_*(A)_\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^{n/2}$ est donné par

$$\mu_2 = \frac{1}{d} \sum_{0 \leq i < d} l_i$$

où

– $l_i = (\underbrace{1,\dots,1}_{a_i}, \frac{1}{2},\dots,\frac{1}{2})$ si $a_i \leq \frac{n}{2}$

– $l_i = (\underbrace{\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{2}}_{n/2-a_i}, 1,\dots,1)$ si $a_i > \frac{n}{2}$

Et donc finalement :

$$B(G,\mu) = \left\{ b \mid v_p(c(g)) = 1,\ \kappa(b)_1 = \sum_{0\leq i<d} a_i \bmod 2 \text{ et } \left(\underbrace{\lambda_1,\dots,\lambda_1}_{m_1h_1},\dots,\underbrace{\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{2}}_{m_r/2} \right) \leq \frac{1}{d} \sum_{0\leq i<d} l_i \right\}$$

au sens où le membre de droite doit d'abord être ramené dans la chambre de Weyl positive de $X_*(A)_{\mathbb{Q}}$ avant d'être comparé.

L'unique classe basique de $B(G,\mu)$ est la classe basique b telle que $v_p(c(g)) = 1$ et $\kappa(b)_1 \equiv \sum_i a_i \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Remarque D.1.3. — Dans la description de $B(G,\mu)$ les points terminaux des polygones n'interviennent pas. En effet, la condition que les point terminaux des polygones de Hodge et de Newton soient égaux est automatique puisqu'un polygone symétrique a pour dimension le double de sa hauteur.

D.2. Groupes unitaires en un nombre impair de variables

Soit $F|\mathbb{Q}_p$ comme précédemment et

$$G = \{g \in \mathrm{GL}_n(F) \mid {}^t g^* J g = c(g)J,\ c(g) \in \mathbb{Q}_p^\times\}$$

où $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & I_{\frac{n-1}{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ I_{\frac{n-1}{2}} & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Un tore maximal défini sur $\mathbb{Q}_p$ est

$$T = diag(t_1,\dots,t_{\frac{n-1}{2}}, c(t_1^{-1})^*,\dots,c(t_n^{-1})^*)$$

où $t_i, x \in F^\times, xx^* = c \in \mathbb{Q}_p^\times$. $T \simeq (F^\times)^{\frac{n-1}{2}} \times \{x \in F^\times \mid N_{F/F_0}(x) \in \mathbb{Q}_p^\times\}$.

Un tore déployé maximal est $A = (\mathbb{Q}_p^\times)^{\frac{n-1}{2}} \times \mathbb{Q}_p^\times \subset T$.

$\widehat{G}$ et ${}^LG$ sont de la même forme que précédemment.

Notons

$$X_*(T) = \{(x_{ij})_{i\in\mathbb{Z}/2d\mathbb{Z}, 1\leq j\leq n} \mid \forall j \leq \frac{n-1}{2}\ \ x_{i,j} + x_{i+d,j+\frac{n+1}{2}} = c, x_{i,\frac{n+1}{2}} + x_{i+d,\frac{n+1}{2}} = c\}$$

$W = \mathfrak{S}_n^d$ et

$$X_*(T)/W = \{(x_{ij}) \mid \forall 0 \leq i < d-1\ \ \forall j \leq j'\ \ x_{ij} \geq x_{ij'}\}$$

Le groups de Weyl relatif s'identifie quant à lui à $W_{\mathbb{Q}_p} \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{\frac{n-1}{2}} \rtimes \mathfrak{S}_{\frac{n-1}{2}}$ et

$$X_*(A)/W_{Qp} = \{(y_j)_{1\leq j\leq \frac{n+1}{2}} \mid \forall 1 \leq j \leq j' < \frac{n+1}{2} \;\; y_j \geq y_{j'},\; y_1 \geq 0\}$$

Le cocentre D est isomorphe comme précédemment à

$$\{(x,t) \in F^\times \times \mathbb{Q}_p^\times \mid N_{F/F_0}(x) = t^n\}$$

qui est isomorphe à

$$\{x \in F^\times \mid N_{F/F_0}(x) \in \mathbb{Q}_p^\times\} \times \mathbb{Q}_p^\times$$

On en déduit aisément que

$$X^*(Z(\widehat{G})^\Gamma) \simeq \mathbb{Z}$$

et que $\forall b \in B(G)\ \kappa(b) = v_p(c(g))$.

Classes basiques : Soit l'isomorphisme de Kottwitz

$$\kappa : B(G)_b \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$$

On en déduit qu'il existe une unique classe basique b telle que $v_p(c(g)) = 1$. Et on a alors, puisque G ne possède pas d'autre forme intérieure que lui même,

$$J_b = G$$

Classes quelconques : La discussion pour les pentes, M et J_b est la même que précédemment à ceci près que la classe basique du groupe unitaire est unique. On a

$$Newt(b) = \left(\underbrace{\frac{\lambda_1}{2d}, \ldots, \frac{\lambda_1}{2d}}_{m_1 h_1}, \ldots, \underbrace{\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}}_{\frac{m_r-1}{2}}, \frac{1}{2}\right)$$

Polygone de Hodge : Supposons donné μ par $\mu = (\mu_{ij})_{i,j}$ tel que

$$\forall 1 \leq i < d\, \forall j \leq a_i\; x_{ij} = 1,\; \forall j > a_i\; x_{ij} = 0$$

et où $c \circ \mu = 1$ i.e.

$$x_{i,j} + x_{i+d,j+\frac{n+1}{2}} = 1, x_{i,\frac{n+1}{2}} + x_{i+d,\frac{n+1}{2}} = 1$$

$\mu_1 = \widehat{\mu}_{|Z(\widehat{G})^\Gamma}$ est donné par $\mu_1 = 1$ et $\mu_2 \in X_*(A)_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}^{\frac{n+1}{2}}$ est donné par

$$\mu_2 = \frac{1}{d} \sum_{0\leq i<d} l_i$$

où

- $l_i = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{a_i}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ si $a_i \leq \frac{n-1}{2}$
- $l_i = (1, \ldots, 1, \frac{1}{2})$ si $a_i = \frac{n+1}{2}$

– $l_i = (\underbrace{\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}}_{a_i - \frac{n+1}{2}}, 1, \ldots, 1, \frac{1}{2})$ si $a_i > \frac{n+1}{2}$

Posons $l'_i = l_i$ moins le $\frac{1}{2}$ à droite, alors

$$B(G, \mu) = \left\{ b \mid v_p(c(g)) = 1 \text{ et } \left(\underbrace{\frac{\lambda_1}{2d}, \ldots, \frac{\lambda_1}{2d}}_{m_1 h_1}, \ldots, \underbrace{\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}}_{\frac{m_r - 1}{2}} \right) \leq \frac{1}{d} \sum_{0 \leq i < d} l'_i \right\}$$

APPENDICE E

ESPACES ADIQUES ET ESPACES ANALYTIQUES

E.1. Différents espaces

Soit k un corps valué complet muni d'une valuation de rang 1.

Rappelons qu'il y a un foncteur pleinement fidèle ([**2**] 1.6.1)

$$X \longmapsto s(X)$$

de la catégorie des espaces analytiques de Berkovich Hausdorff (i.e. $|X|$ est séparé) dans la catégorie des variétés rigides quasiséparées.

Si $\mathcal{A}$ est une algèbre affinoïde, $s(\mathcal{M}(\mathcal{A})) = Spm(\mathcal{A})$.

Rappelons également ([**28**] 1.1.11) qu'il y a une équivalence de catégorie

$$Y \longmapsto r(Y)$$

entre la catégorie des variétés rigides quasiséparées Y sur k et la catégorie des espaces adiques quasiséparés localement de type fini sur $\mathrm{Spa}(k, k^0)$. Nous noterons

$$X \longmapsto X^{rig}$$

la composée $X \mapsto r(s(X))$ qui est pleinement fidèle.

Rappelons la proposition suivante

Fait E.1.1. — *([**28**] 8.3.3) L'image essentielle de $X \mapsto X^{rig}$ est formée de la catégorie des espaces adiques quasiséparés localement de type fini tendus ("taut") sur $Spa(k, k^0)$.*

La condition d'être tendu portant uniquement sur l'espace topologie de l'espace adique ([**28**] 5.1.2).

Supposons maintenant la valuation de k discrète.

A $\mathfrak{X}$ un schéma formel localement formellement de type fini sur $\boldsymbol{Spf}(k^0)$ est associé un k-espace analytique paracompact $\mathfrak{X}^{an}$. Il est muni d'un morphisme de spécialisation

$$sp : \mathfrak{X}^{an} \longrightarrow \mathfrak{X}$$

Si $Y \subset \mathfrak{X}_s$ est un sous-schéma localement fermé de la fibre spéciale de $\mathfrak{X}$ on a un isomorphisme canonique

$$(\mathfrak{X}^{\wedge}_{/Y})^{an} \xrightarrow{\sim} sp^{-1}(Y)$$

où $sp^{-1}(Y)$ est un domaine analytique localement fermé dans $\mathfrak{X}^{an}$.

Si Y est ouvert, $sp^{-1}(Y)$ est fermé ($Y = D(f) \Rightarrow sp^{-1}(Y) = \{|f| = 1\}$.
Si Y est fermé, $sp^{-1}(Y)$ est ouvert ($Y = V(f) \Rightarrow sp^{-1}(Y) = \{|f| < 1\}$.

A $\mathfrak{X}$ est également associé fonctoriellement un espace adique $t(\mathfrak{X})$. t étant défini localement par $t(\boldsymbol{Spf}(A)) = \mathrm{Spa}(A, A)$. On peut alors considérer l'espace adique

$$d(\mathfrak{X}) = t(\mathfrak{X})_a$$

l'ouvert de $t(\mathfrak{X})$ formé des points analytiques i.e. des valuations ayant un support non ouvert. Si I est un idéal de définition de A,

$$d(\boldsymbol{Spf}(A)) = \mathrm{Spa}(A, A) \setminus V(I)$$

On a alors un morphisme de spécialisation d'espaces annelés

$$(d(\mathfrak{X}), \mathcal{O}_{d(\mathfrak{X})}) \xrightarrow{\lambda} (\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$$

l'application au niveau des espaces topologiques étant celle qui associe à un point $x \in d(\mathfrak{X})$ le support d'une spécialisation de x dans $t(\mathfrak{X})$ formée d'un point non analytique.

Si $\mathfrak{X}/\boldsymbol{Spf}(k^0)$ est adique c'est la bonne définition de la fibre générique de $\mathfrak{X}$ au sens des espaces adiques.

Dans le cas général

$$\widetilde{d}(\mathfrak{X}) = t(\mathfrak{X}) \setminus V(\pi) \subset d(\mathfrak{X})$$

est un espace adique ouvert dans $d(\mathfrak{X})$ muni du morphisme de spécialisation obtenu par restriction de λ :

$$\widetilde{\lambda} : \widetilde{d}(\mathfrak{X}) \longrightarrow \mathfrak{X}$$

C'est la bonne définition de la fibre générique au sens de Berthelot et on a des isomorphismes canoniques commutant aux morphismes de spécialisation

$$(\mathfrak{X}^{an})^{rig} \simeq \widetilde{d}(\mathfrak{X})$$

Nous noterons donc $\widetilde{d}(\mathfrak{X}) = \mathfrak{X}^{rig}$.

Si maintenant $Y \subset \mathfrak{X}_s$ et un sous-schéma fermé, $\widetilde{\lambda}^{-1}(Y) \subset \mathfrak{X}^{rig}$ est un ensemble fermé constructible et on a un isomorphisme canonique

$$(\mathfrak{X}^{\wedge}_{/Y})^{rig} \simeq (\widetilde{\lambda}^{-1}(Y))^0$$

(l'intérieur de $\widetilde{\lambda}^{-1}(Y)$). Ainsi $(\mathfrak{X}^{\wedge}_{/Y})^{rig}$ s'identifie à un ouvert de $\mathfrak{X}^{rig}$ qui est l'ouvert $sp^{-1}(Y)^{rig}$.

Si $\mathcal{Y} \subset \mathfrak{X}$ est ouvert, $\mathcal{Y}^{rig} \subset \mathfrak{X}^{rig}$ est l'ouvert $\widetilde{\lambda}^{-1}(Y)$.

Exemple E.1.1. — Si $\mathfrak{X} = \boldsymbol{Spf}(k^0 < X_1, \ldots, X_n >)$, $\mathfrak{X}^{an} = \mathbb{B}^n$ la boule fermée analytique, $\mathfrak{X}^{rig} = \mathbb{B}^n$ la boule fermée adique (qui est ouverte dans $\mathbf{A}^n$) . Si $Y = V(0)$, $\mathfrak{X}^{\wedge}_{/Y} = \boldsymbol{Spf}(k^0[\![X_1, \ldots, X_n]\!])$, $sp^{-1}(Y) = \tilde{\mathbb{B}}^n$ la boule ouverte analytique obtenue par recollement d'une union croissante de boules fermées (ce n'est pas l'intérieur de la boule fermée analytique pour la topologie de Berkovich !).

$\widetilde{\lambda}^{-1}(Y) = \{|X_i| < 1\} \subset \mathbb{B}^n$ un fermé (ce n'est pas un espace adique, c'est un espace pseudo-adique) et $(\mathfrak{X}^{\wedge}_{/Y})^{rig}$ est la boule ouverte adique obtenue comme union croissante

des boules ouvertes de rayon strictement inférieur à 1. $\widetilde{\lambda}^{-1}(Y) \setminus \widetilde{\lambda}^{-1}(Y)^0$ est constitué de valuations de rang ≥ 2 qui ne sont pas dans l'espace de Berkovich.

On remarquera que la stratification associée à un fermé $Y \subset \mathfrak{X}_s$ de la fibre spéciale est plus compliquée dans le cas de l'espace adique :

- La stratification de $\mathfrak{X}^{an}$ associée est $sp^{-1}(Y) \subset \mathfrak{X}^{an}$ où $sp^{-1}(Y)$ est un domaine analytique ouvert et $\mathfrak{X}^{an} \setminus sp^{-1}(Y)$ est un domaine analytique fermé. Les deux strates sont donc des espaces analytiques
- La stratification de $\mathfrak{X}^{rig}$ associée est
$$\widetilde{\lambda}^{-1}(Y)^0 \subset \widetilde{\lambda}^{-1}(Y) \subset \mathfrak{X}^{an}$$
où $\widetilde{\lambda}^{-1}(Y)$ est un espace pseudo-adique (i.e. un germe d'espace adique) et le complémentaire est un espace adique ouvert dans $\mathfrak{X}^{rig}$.

E.2. Différents morphismes étales

Si $j : \mathbb{B}^n \hookrightarrow \mathbb{A}^n$ désigne l'inclusion de la boule fermée dans l'espace affine, j est une immersion ouverte au sens des espaces adiques et est donc étale. L'espace adique $\mathbb{B}^n$ est lisse sur $\mathrm{Spa}(k, k^0)$. Cependant, j n'est pas étale au sens des espaces analytiques car $\partial(\mathbb{B}^n/\mathbb{A}^n) \neq \emptyset$. Ainsi, $\mathbb{B}^n$ n'est pas lisse comme espace analytique sur k.

Rappelons :

Définition E.2.1. — [**3**] Soit $f : X \to Y$ un morphisme d'espace analytique. f est quasi-étale si tout point $x \in X$ possède un voisinage qui est un domaine analytique fermé étale au dessus de Y.

Fait E.2.1. — *([**3**] 2.3, resp. [**28**] 3.5.1) Si $\mathfrak{X} \to \mathcal{Y}$ est un morphisme de schémas formels, $\mathfrak{X}^{an} \to \mathcal{Y}^{an}$ est quasi-étale et $\mathfrak{X}^{rig} \to \mathcal{Y}^{rig}$ est étale.*

Par exemple, si $\mathfrak{X} \hookrightarrow \mathcal{Y}$ est une immersion ouverte, donc étale, elle induit une inclusion d'un domaine analytique fermé $\mathfrak{X}^{an}$ dans $\mathcal{Y}^{an}$ qui n'est pas étale mais quasi-étale. Par contre elle induit une immersion ouverte d'espaces adiques.

Le lien entre les deux notions est le suivant :

Fait E.2.2. — *([**28**] 8.3.4) Si $f : X \to Y$ est quasi-étale, f est étale ssi $f^{rig} : X^{rig} \to Y^{rig}$ est partiellement propre.*

Rappelons qu'un morphisme d'espaces adiques est partiellement propre s'il vérifie un critère valuatif de propreté (et est localement de type fini) et qu'un morphisme est propre ssi il est partiellement propre et quasicompact.

Ainsi, un domaine analytique ouvert induit une immersion ouverte d'espace adique qui est partiellement propre et à un ouvert analytique d'un espace analytique de bord vide sur k est du point de vue adique partiellement propre (c'est en particulier le cas

d'un ouvert analytique de l'espace analytique associé à un schéma)

Les deux exemples typique d'espace partiellement propre sont les suivants :

Fait E.2.3. — *Si X/k est un schéma localement de type fini, $X^{rig}/Spa(k, k^0)$ est partiellement propre.*

Fait E.2.4. — *Si $\mathfrak{X}/\boldsymbol{Spf}(k^0)$ est un schéma formel localement formellement de type fini séparé,*

$$\mathfrak{X}_s \text{ propre } \Longrightarrow \mathfrak{X}^{rig} \text{ partiellement propre}$$

Lorsque $\mathfrak{X}$ est adique sur k^0, il s'agit même d'une équivalence.

Exemple E.2.2. — Le tube au dessus d'un fermé propre de la fibre spéciale d'un schéma formel est partiellement propre.

Du point de vue des espaces adiques de Huber

Fait E.2.5. — *Soit $f : X \to Y$ un morphisme d'espaces analytiques. f^{rig} est partiellement propre ssi $\partial(X/Y) = \emptyset$.*

Si $X = \mathcal{M}(\mathcal{A}) \xrightarrow{f} Y = \mathcal{M}(\mathcal{B})$, f est partiellement propre s'il existe une immersion fermée

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[dr, "f"'] & \mathbb{B}^n(0,\epsilon) \times Y \arrow[d] \\ & Y \end{tikzcd}$$

pour $0 < \epsilon < 1$ telle que X soit Zariski fermé dans $\mathbb{B}^n(0,1) \times Y$.

APPENDICE F

COHOMOLOGIE ℓ-ADIQUE DES ESPACES ANALYTIQUES

Dans cette section nous donnons des démonstration des résultats non publiés de [**1**] en suivant [**29**].

F.1. Propriétés générales

Soit k un corps valué complet et X un k-espace analytique Hausdorff (i.e. $|X|$ est séparé). Soit Λ un anneau de valuation discrète complet d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ et de caractéristique résiduelle $\ell \neq p$ où $p = char(k^0/k^{00})$.

Définition F.1.1. — Un $\Lambda_\bullet$ faisceau ou encore un faisceau Λ-adique sur $X_{\text{ét}}$ est un système projectif $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de faisceaux en Λ-modules sur $X_{\text{ét}}$ vérifiant $\forall n \;\; \mathfrak{m}^n\mathcal{F}_n = 0$.
Nous noterons $\Lambda_\bullet - \mathcal{F}\text{sc}_{/X^{\text{ét}}}$ la catégorie associée.
On définit de même $\Lambda_\bullet - mod$ la catégorie des $\Lambda_\bullet$-modules
On notera également $\Lambda - \mathcal{F}\text{sc}_{/X^{\text{ét}}}$ la catégorie des faisceaux de Λ-modules.

$\Lambda_\bullet - \mathcal{F}\text{sc}_{/X^{\text{ét}}}$ est une catégorie abélienne Λ linéaire possédant suffisamment d'injectifs.

On a un foncteur exact à gauche

$$\begin{array}{rcl} \pi_* : \Lambda_\bullet - \mathcal{F}\text{sc}_{/X_{\text{ét}}} & \longrightarrow & \Lambda - \mathcal{F}\text{sc}_{/X_{\text{ét}}} \\ (\mathcal{F}_n)_n & \longmapsto & \varprojlim \; \mathcal{F}_n \end{array}$$

Si $(\mathcal{F}_n)_n \in \Lambda_\bullet - \mathcal{F}\text{sc}_{/X_{\text{ét}}}$ et X n'est pas compact il n'est pas raisonnable de poser $\Gamma_c(X, (\mathcal{F}_n)_n)$ comme étant égal à $\varprojlim \; \Gamma_c(X, \mathcal{F}_n)$ car si $(s_n)_n \in \varprojlim \; \Gamma_c(X, \mathcal{F}_n)$ il se peut que l'adhérence de $\cup_n supp(s_n)$ ne soit pas compact.

Nous adopterons donc la définition suivante :

Définition F.1.2. —

$$\begin{array}{rcl} \Gamma_! : \Lambda - \mathcal{F}\text{sc}_{/X_{\text{ét}}} & \longrightarrow & \boldsymbol{Ab} \\ \mathcal{F} & \longmapsto & \Gamma_c(X, \mathcal{F}) \end{array}$$

$$\Gamma_c = \Gamma_! \circ \pi_*$$

On a donc $\Gamma_c(X,(\mathcal{F}_n)_n) = \{(s_n)_n \in \varprojlim \Gamma(X,\mathcal{F}_n) \mid \overline{\cup_n supp(s_n)} \text{ est compact } \}$.

On posera

$$H^p_c(X,(\mathcal{F}_n)_n) = R^p(\Gamma_c(X,-))((\mathcal{F}_n)_n)$$

Remarque F.1.3. — Si X est compact $\Gamma_c(X,(\mathcal{F}_n)_n) = \varprojlim_n \Gamma(X,\mathcal{F}_n)$.

Lemme F.1.4. — *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau abélien sur $X_{ét}$. Si $\forall x \in X$ $\mathcal{F}_x$ est un $\mathbf{Gal}(\mathcal{K}(x)^s|\mathcal{K}(x))$-module acyclique et si $\mathcal{F}_{|_{|X|}}$ est un faisceau mou, $\mathcal{F}$ est Γ_c acyclique.*

Démonstration. — Il suffit de considérer le morphisme de site $f : X_{\text{ét}} \to |X|$. La première hypothèses montre que $\forall p > 0$ $R^p f_*(\mathcal{F}) = 0$ car ses fibres en tous les points de $|X|$ sont nulles (cf. [**2**], 4.2.4) . La suite spectrale de Leray associée dégénère donc en $H^p_c(X_{\text{ét}},\mathcal{F}) \simeq H^p_c(|X|,\mathcal{F}_{|X|})$ mais $|X|$ est localement paracompact donc $\mathcal{F}_{|_{|X|}}$ étant mou il est $\Gamma_c(|X|,-)$ acyclique. □

L'intérêt du lemme qui suit est qu'il permet de calculer la cohomologie à support compact d'un faisceau Λ-adique comme l'hypercohomologie à support compact d'un complexe de faisceaux de Λ-modules.

Lemme F.1.5. — $\mathbb{R}\Gamma_c = \mathbb{R}\Gamma_! \circ \mathbb{R}\pi_*$

Démonstration. — En suivant la preuve du i) du lemme 2.3 de [**29**] on voit qu'il suffit de montrer que si $\forall n$ $\mathcal{I}_n$ est un injectif de $\Lambda/\mathfrak{m}^n - \mathcal{F}\text{sc}_{/X_{\text{ét}}}$ alors $\prod_{k=0}^{\infty}\mathcal{I}_k$ est $\Gamma_!$ acyclique. Pour cela nous allons appliquer le lemme F.1.4.

$$\forall x \in X \quad (\prod_k \mathcal{I}_k)_x \simeq \left(\prod (\mathcal{I}_k)_x\right)^{disc}$$

comme $\mathbf{Gal}(\mathcal{K}(x)^s|\mathcal{K}(x))$-module galoisien discret, où si M est un module galoisien M^{disc} désigne sa partie discrète. Or, si $(M_k)_{k\in K}$ sont des $\mathbf{Gal}(\mathcal{K}(x)^s|\mathcal{K}(x))$-modules discrets

$$H^q\left(\mathbf{Gal}(\mathcal{K}(x)^s|\mathcal{K}(x)), \left(\prod_k M_k\right)^{disc}\right) \simeq \prod_k H^q(\mathbf{Gal}(\mathcal{K}(x)^s|\mathcal{K}(x)), M_k)$$

$\mathcal{I}_k$ étant injectif comme faisceau de $\Lambda/\mathfrak{m}^n$-modules, $\forall x$ $\mathcal{I}_{k,x}$ est un $\mathbf{Gal}(\mathcal{K}(x)^s|\mathcal{K}(x))$-module galoisien acyclique ([**2**], 4.2.5) . On en déduit donc que $(\prod_k \mathcal{I}_k)_x$ en est également un.

De plus, $(\prod_k \mathcal{I}_k)_{|_{|X|}}$ est mou car il est flasque et $|X|$ est localement paracompact. □

Dégageons quelques propriétés simples de la cohomologie Λ-adique :

Lemme F.1.6. — *Soit $\mathbb{U}(X)$ un ensemble d'ouverts de X tels que $\forall U \in \mathbb{U}(X), \overline{U}$ est compact, $\forall U_1, U_2 \in \mathbb{U}(X)$ $\exists U_3 \in \mathbb{U}(X)$ $U_1 \cup U_2 \subset U_3$ et $\bigcup_{U\in\mathbb{U}(X)} U = X$. On a alors,*

$$\Gamma_c(X,(\mathcal{F}_n)_n) = \varinjlim_{U\in\mathbb{U}(X)} \varprojlim_n \Gamma_c(U,\mathcal{F}_n)$$

Démonstration. — Cela résulte de ce que tout compact de X est contenu dans un élément de $\mathbb{U}(X)$ et réciproquement. □

Nous choisirons généralement $\mathbb{U}(X) = \{$ ouverts U de X, $\overline{U}$ est compact $\}$ ou bien $\mathbb{U}(X) = \{$ ouverts distingués de $X\}$ où rappelons

Définition F.1.7. — [**1**] Un ouvert U de X est distingué s'il peut s'écrire $U = V_1 \setminus V_2$ où V_1 et V_2 sont des domaines analytiques compacts.

Lemme F.1.8. — 1. *Si $i : Y \hookrightarrow X$ est une immersion fermée d'espaces analytiques ou une immersion d'un domaine analytique fermé, il y a un isomorphisme canonique*

$$H^p_c(Y, (\mathcal{F}_n)_n) \xrightarrow{\sim} H^p_c(X, (i_*\mathcal{F}_n)_n)$$

2. *Si $j : U \hookrightarrow X$ est une immersion ouverte, pour tout $(\mathcal{F}_n)_n \in \Lambda_\bullet - \mathcal{F}sc_{/X_{ét}}$ il y a une application naturelle*

$$H^p_c(U, (\mathcal{F}_{n|U})_n) \longrightarrow H^p_c(X, (\mathcal{F}_n)_n)$$

et $\forall (\mathcal{F}_n)_n \in \Lambda_\bullet - \mathcal{F}sc_{/U_{ètt}}$ une application naturelle

$$H^p_c(U, (\mathcal{F}_n)_n) \longrightarrow H^p_c(X, (j_!\mathcal{F}_n)_n)$$

3. *Si $\mathbb{V}$ est un recouvrement ouvert de X tel que $\forall V_1, V_2 \in \mathbb{V}\ \exists V_3 \in \mathbb{V}\ \ V_1 \cup V_2 \subset V_3$*

$$H^p_c(X, (\mathcal{F}_n)_n) = \varinjlim_{V \in \mathbb{V}} H^p_c(V, (\mathcal{F}_{n|V})_n)$$

Démonstration. — 1) Soit le foncteur

$$\begin{array}{rcl} i_* : \Lambda_\bullet - \mathcal{F}\mathrm{sc}_{/Y^{\text{ét}}} & \longrightarrow & \Lambda_\bullet - \mathcal{F}\mathrm{sc}_{/X_{\text{ét}}} \\ (\mathcal{F}_n)_n & \longmapsto & (i_*\mathcal{F}_n)_n \end{array}$$

il est exact et possède un adjoint à gauche $(\mathcal{F}_n)_n \longmapsto (i^*\mathcal{F}_n)_n$. Il envoie donc les injectifs sur des injectifs. De plus, $|Y|$ étant fermé $\Gamma_c(Y, -) = \Gamma_c(X, -) \circ i_*$. D'où le 1).

2) Soit le foncteur

$$\begin{array}{rcl} j^* : \Lambda_\bullet - \mathcal{F}\mathrm{sc}_{/X_{\text{ét}}} & \longrightarrow & \Lambda_\bullet - \mathcal{F}\mathrm{sc}_{/U^{\text{èt}}} \\ (\mathcal{F}_n)_n & \longmapsto & (j^*\mathcal{F}_n)_n \end{array}$$

qui est exact et possède un adjoint à gauche $(\mathcal{F}_n)_n \mapsto (j_!\mathcal{F}_n)_n$. On a donc $R^+(\Gamma_c(U, -) \circ j^*) = R^+\Gamma_c(U, -) \circ j^*$. On a de plus une application naturelle

$$\Gamma_c(U, -) \circ j^* \longrightarrow \Gamma_c(X, -)$$

ce qui conclu la démonstration de la première partie.

Si maintenant $(\mathcal{F}_n)_n \in \Lambda_\bullet - \mathcal{F}\mathrm{sc}_{/U^{\text{èt}}}$ il y a une application canonique d'adjonction

$$(\mathcal{F}_n)_n \longrightarrow (j^*j_!\mathcal{F}_n)_n$$

L'application cherchée est alors la composée

$$H^p_c(U, (\mathcal{F}_n)_n) \to H^p_c(U, (j^*j_!\mathcal{F}_n)_n) \to H^p_c(X, (j_!\mathcal{F}_n)_n)$$

où la dernière application est celle définie auparavant.

Le 3) est clair car $\varinjlim_{V\in\mathbb{V}} \circ \varinjlim_{U\in\mathbb{U}(X)} = \varinjlim_{U\in\mathbb{U}(X)}$ et les limites étant filtrées elles sont exactes. □

7

Remarque F.1.9. — En général l'application

$$H^p_c(U,(\mathcal{F}_n)_n) \longrightarrow H^p_c(U,(j_!\mathcal{F}_n)_n)$$

n'est pas bijective. Cela est du au fait qu'en général j ne possède pas de bonnes propriétés de finitude. Déjà dans le cas algébrique, pour $X \xrightarrow{f} Y$ un morphisme de type fini, pour montrer que $(R^+f_!)((\mathcal{F}_n)_n) = (R^+f_!\mathcal{F}_n)_n$ pour $(\mathcal{F}_n)_n$ constructible et $R^+\Gamma_c \circ R^+f_! = R^+\Gamma_c$ il faut utiliser les propriétés de finitude de $f_!$: $f_!$(constructible) est constructible.

Par exemple, en général $H^p_c(\check{\mathcal{F}}^{ad},\mathbb{Q}_\ell) \neq H^p_c(\check{\mathcal{F}},j_!\mathbb{Q}_\ell)$ (cf. [**29**], exemple 2.7)

Comme dans le lemme 2.3 de [**29**] on a une factorisation $R^+\Gamma_c = \varinjlim_{\mathbb{U}(X)} \circ \mathrm{Ind}(R^+\rho)\circ R^+\sigma$ de laquelle on déduit :

Proposition F.1.10. — *$\forall(\mathcal{F}_n)_n \in \Lambda_\bullet - \mathcal{F}sc_{/X_{ét}}$ il y a des suites exactes : $\forall p \in \mathbb{N}$*

$$0 \longrightarrow \varinjlim_{U\in\mathbb{U}(X)} \varprojlim_n{}^1\ H^{p-1}_c(U,\mathcal{F}_n) \longrightarrow H^p_c(X,(\mathcal{F}_n)_n) \longrightarrow \varinjlim_{U\in\mathbb{U}(X)} \varprojlim_n\ H^p_c(X,\mathcal{F}_n) \longrightarrow 0$$

Corollaire F.1.11. —

a) *Si $\forall n\ \forall p\ \ \forall U \in \mathbb{U}(X)\ \ H^p_c(U,\mathcal{F}_n)$ est un $\Lambda/\mathfrak{m}^n$-module de type fini*

$$\forall p \in \mathbb{N}\ \ H^p_c(X,(\mathcal{F}_n)_n) \xrightarrow{\sim} \varinjlim_{U\in\mathbb{U}(X)} \varprojlim_{n\in\mathbb{N}}\ H^p_c(U,\mathcal{F}_n)$$

b) *$\forall p > 2\dim(X) + cd_\ell(k) + 1\ \ \forall(\mathcal{F}_n)_n \in \Lambda_\bullet - \mathcal{F}sc_{/X_{ét}}\ \ H^p_c(X,(\mathcal{F}_n)_n) = 0$ et sous l'hypothèse du a) cela est vrai pour tout $p > 2\dim(X) + cd_\ell(k)$*

Exemple F.1.12. — Si $X = \widetilde{\mathbb{B}}^n_k$ est la boule ouverte de dimension n, $\mathbb{U}(X) = \{\widetilde{\mathbb{B}}^n_k(0,\epsilon) \mid 0 < \epsilon < 1\}$ les hypothèses du a) sont vérifiées pour $\mathbb{Z}_\ell = (\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z})_n$ et

$$\begin{aligned} H^p_c(\widetilde{\mathbb{B}}^n_k,\mathbb{Z}_\ell) &= \varinjlim_{\epsilon\to 1} \varprojlim_{n\in\mathbb{N}}\ H^p_c(\widetilde{\mathbb{B}}^n_k(0,\epsilon),\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}) \\ &= \begin{cases} 0 \text{ si } p \neq 2n \\ \mathbb{Z}_\ell \text{ si } p = 2n \end{cases} \end{aligned}$$

F.2. Cohomologie ℓ-adique des espaces analytiques quasi-algébriques

Les hypothèses faites ici : X quasi algébrique et $\mathcal{F}$ localement constant ne sont là que pour palier à l'existence d'une théorie des faisceaux constructibles pour les espaces analytiques comme c'est le cas pour les espaces adiques ([**28**],[**29**]).

Définition F.2.1. — ([**3**],[**1**]) X est quasi-algébrique si $\forall x \in X \quad \exists V_1, \ldots, V_n$ des domaines affinoïdes tels que $x \in \bigcap_{i=1}^n V_i, \bigcup_{i=1}^n V_i$ est un voisinage de x et tout V_i est quasi-étale au dessus d'un domaine affinoïde de l'espace analytique associé à un schéma de type fini sur k.

Remarque F.2.2. — D'après [**1**] cela implique que l'on peut trouver des V_i qui sont eux mêmes des domaines affinoïdes dans l'espace analytique associé à un schéma de type fini.

Remarque F.2.3. — Tout espace analytique lisse sur k est quasi-algébrique.

Définition F.2.4. — $(\mathcal{F}_n)_n \in \Lambda_\bullet - \mathcal{F}\mathrm{sc}_{/X_{\text{ét}}}$ est localement constant si

$$\forall m \geq n \quad \mathcal{F}_m \otimes \Lambda/\mathfrak{m}^n \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_n$$

et $\forall n \quad \mathcal{F}_n$ est localement constant fini sur $X_{\text{ét}}$ comme $\Lambda/\mathfrak{m}^n$-module.

Lemme F.2.5. — *Soit X quasi-algébrique et U un ouvert distingué de X ou un domaine analytique compact. $\forall \mathcal{F} \in \Lambda/\mathfrak{m}^n - \mathcal{F}sc_{/X_{\acute{e}t}}$ localement constant fini, $\forall p \in \mathbb{N} \quad H_c^p(U, \mathcal{F})$ est un $\Lambda/\mathfrak{m}^n$-module de type fini.*

Démonstration. — Si U est un domaine compact c'est le corollaire 5.6 de [**3**].

Si $U = V_1 \setminus V_2$ est un ouvert où V_1 et V_2 sont des domaines compacts cela résulte de la suite exacte longue de cohomologie

$$\longrightarrow H_c^p(U, \mathcal{F}) \longrightarrow H^p(V_1, \mathcal{F}) \longrightarrow H^p(V_1 \cap V_2, \mathcal{F}) \longrightarrow$$

et de l'assertion pour un domaine compact. □

Corollaire F.2.6. — *Si X est quasi-algébrique et $(\mathcal{F}_n)_n$ est localement constant*

$$H_c^p(X, (\mathcal{F}_n)_n) = \varinjlim_{U \text{ distingué}} \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} H_c^p(U, \mathcal{F}_n)$$

En particulier si X est compact

$$H^p(X, (\mathcal{F}_n)_n) = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} H^p(X, \mathcal{F}_n)$$

Démonstration. — Cela résulte du lemme précédent et du corollaire F.1.11. □

Proposition F.2.7. — *Supposons $cd_\ell(k) < +\infty$. Soit U un ouvert distingué ou un domaine compact d'un espace quasi-algébrique X, $\mathcal{F}$ localement constant sur X. $\forall p \in \mathbb{N}$ $(H^p_c(U,\mathcal{F}_n))_n$ est AR $\mathfrak{m}$-adique et $\varprojlim_{n\in\mathbb{N}} H^p_c(U,\mathcal{F}_n)$ est un Λ-module de type fini.*

Démonstration. — $H^p_c(U,\mathcal{F}_1)$ étant de type fini, la première partie de la proposition entraîne la seconde.

Pour tout n, soit $C^\bullet(\mathcal{F}_n)$ la résolution de Godement de $\mathcal{F}_n$ associée aux points de $|X|$ (si $x \in |X|$ il y a un morphisme de sites $i_x : \boldsymbol{Spec}(\mathcal{K}(x)^s)_{\text{ét}} \to \boldsymbol{Spec}(\mathcal{K}(x))_{\text{ét}} \to X_{\text{ét}}$ et $C^0(\mathcal{G}) = \prod_x i_{x*}i_x^*\mathcal{G}$).

En utilisant le lemme F.1.4 on vérifie que c'est une résolution $\Gamma_c(U,-)$ acyclique de $\mathcal{F}$. Cette résolution est scindée sur chaque fibre. Etant donné que $\forall n$ $\mathcal{F}_n$ est localement constant, pour tout n $C^\bullet(\mathcal{F}_n)$ est $\Lambda/\mathfrak{m}^n$ plat et

$$\forall m \geq n \quad C^\bullet(\mathcal{F}_m) \otimes \Lambda/\mathfrak{m}^n \xrightarrow{\sim} C^\bullet(\mathcal{F}_n)$$

Si $m \geq n$ considérons la résolution périodique $D^\bullet$ de $\Lambda/\mathfrak{m}^n$ dans la catégorie des $\Lambda/\mathfrak{m}^m$-modules (et faisceaux)

$$\cdots \longrightarrow \Lambda/\mathfrak{m}^m \xrightarrow{\varpi_\Lambda^n} \Lambda/\mathfrak{m}^m \xrightarrow{\varpi_\Lambda^{m-n}} \Lambda/\mathfrak{m}^m \xrightarrow{\varpi_\Lambda^n} \Lambda/\mathfrak{m}^m \longrightarrow 0$$

Pour tout p appliquons la formule de projection ([**2**] 5.3.9) :

$$\begin{aligned} C^p(\mathcal{F}_m) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\Lambda/\mathfrak{m}^m} D^\bullet &= C^p(\mathcal{F}_m) \otimes \Lambda/\mathfrak{m}^n \simeq C^p(\mathcal{F}_n) \\ \Longrightarrow R^\bullet\Gamma_c(C^p(\mathcal{F}_m) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\Lambda/\mathfrak{m}^m} D^\bullet) &\simeq \Gamma_c(U, C^p(\mathcal{F}_n)) \end{aligned}$$

et

$$R^\bullet\Gamma_c(U, C^p(\mathcal{F}_m)) \overset{\mathbb{L}}{\otimes}_{\Lambda/\mathfrak{m}^m} D^\bullet = \Gamma_c(U, C^p(\mathcal{F}_m)) \overset{\mathbb{L}}{\otimes} D^\bullet$$

$$= \cdots \longrightarrow \Gamma_c(U, C^p(\mathcal{F}_m)) \xrightarrow{\varpi_\Lambda^n} \Gamma_c(U, C^p(\mathcal{F}_m)) \xrightarrow{\varpi_\Lambda^{m-n}} \Gamma_c(U, C^p(\mathcal{F}_m)) \xrightarrow{\varpi_\Lambda^n} \Gamma_c(U, C^p(\mathcal{F}_m)) \longrightarrow 0$$

On en déduit donc que

$$\Gamma_c(U, C^p(\mathcal{F}_m))/\pi_\Lambda^n\Gamma_c(U, C^p(\mathcal{F}_m)) \xrightarrow{\sim} \Gamma_c(U, C^p(\mathcal{F}_n))$$

et que $\Gamma_c(U, C^p(\mathcal{F}_m))$ est un $\Lambda/\mathfrak{m}^m$-module plat (par récurrence sur m).

X étant quasi-algébrique et $\overline{U}$ compact, $\dim(U) < +\infty$ et donc pour $d > 2\dim(U) + cd_\ell(k)$ $\tau_{\leq d}\Gamma_c(U, C^\bullet(\mathcal{F}_n))$ calcule $H^\bullet_c(U,\mathcal{F}_n)$ qui est un $\Lambda/\mathfrak{m}^n$-module de type fini. On peut alors appliquer le lemme 12-14 de [**19**] pour conclure. □

Définition F.2.8. — Soit L le corps des fractions de Λ. Un faisceau L-adique est un faisceau Λ-adique modulo $\mathfrak{m}$ torsion. On notera pour $\mathcal{F} \in \Lambda_\bullet - \mathcal{F}\text{sc}$ $\mathcal{F} \otimes L$ le faisceau L-adique associé et on posera $H^p_c(X, \mathcal{F} \otimes L) = H^p_c(X,\mathcal{F}) \otimes L$.

Un faisceau L-adique localement constant est un faisceau L-adique de la forme $\mathcal{F} \otimes L$ avec $\mathcal{F}$ localement constant.

Corollaire F.2.9. — *Soit X quasi-algébrique muni d'une action continue ([**3**], 6) d'un groupe G tel que G possède un pro-p sous-groupe ouvert. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau L-adique localement constant muni d'une action de G compatible à celle sur X. Alors, $H_c^p(X, \mathcal{F})$ est un G-module lisse.*

Démonstration. — Si $\mathcal{F} = \mathcal{G} \otimes L$, $\mathcal{G}$ localement constant,

$$H_c^p(X, \mathcal{F}) = \varinjlim_{U \text{ distingué}} \left[\varprojlim_n H_c^p(U, \mathcal{G}) \right] \otimes L$$

Soit donc $s \in H_c^p(X, \mathcal{F})$. Il existe U distingué tel que

$$s \in \operatorname{im}\left(H_c^p(U, \mathcal{G}) \otimes L \to H_c^p(X, \mathcal{G}) \otimes L\right)$$

Si $U = V_1 \setminus V_2$ où V_1 et V_2 sont des domaines compacts, par continuité de l'action $\exists K \subset G$ un sous-groupe ouvert tel que $\forall g \in K \;\; g.V_1 = V_1, g.V_2 = V_2$ et donc $g.U = U$. D'après [**3**] 7.7, $\forall n \;\; H_c^p(U, \mathcal{G}_n)$ est un K-module lisse. Etant un $\Lambda/\mathfrak{m}^n$-module de type fini c'est un K-module discret. K agit donc continuement sur le Λ-module de type fini $\varprojlim_n H_c^p(U, \mathcal{F}_n)$. Si $K' \subset K$ est un sous-pro-p-groupe ouvert, un sous-groupe ouvert K'' de K' s'envoit sur un pro-ℓ groupe et agit donc trivialement. Donc, $\forall g \in K'' \;\; g.s = s$. $\square$

On montre de même :

Corollaire F.2.10. — *Sous les mêmes hypothèses $\mathbf{Gal}(\overline{k}|k)$ agit continûment sur $H_c^p(X \otimes \widehat{\overline{k}}, \mathcal{F})$ au sens où $H_c^p(X \otimes \widehat{\overline{k}}, \mathcal{F})$ est une union croissante de $\mathbf{Gal}(\overline{k}|k)$-modules de dimension finie continus.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] V. Berkovich – « Étale cohomology for p-adic analytic spaces », Notes d'un exposé à Toulouse, Juin 1994.

[2] ———, « Étale cohomology for non-archimedean analytic spaces », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **78** (1993), p. 5–161.

[3] ———, « Vanishing cycles for formal schemes. », *Invent. Math.* **115** (1994), no. 3, p. 539–571.

[4] ———, « On the comparison theorem for étale cohomology of non-archimedean analytic spaces », *Israel J. Math.* **92** (1995), no. 1-3, p. 45–59.

[5] ———, « Vanishing cycles for formal schemes. II », *Invent. Math.* **125** (1996), no. 2, p. 367–390.

[6] J. Bernstein, P. Deligne & D. Kazhdan – « Trace Paley Wiener theorem for reductive p-adic groups », *J. Analyse Math.* **47** (1986), p. 180–192.

[7] P. Boyer – « Mauvaise réduction des variétés de Drinfeld et correspondance de Langlands locale », *Invent. Math.* **138** (1999), no. 3, p. 573.

[8] C. Bushnell & P. Kutzko – *The admissible dual of GL(N) via compact open subgroups*, Annals of Mathematics Studies, vol. 129, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.

[9] ———, « Smooth representations of reductive p-adic groups : structure theory via types », *Proc. London Math. Soc.* **77** (1998), no. 3, p. 582–634.

[10] H. Carayol – « Nonabelian Lubin-Tate theory », *Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions*, Perspect. Math., vol. 11, Academic Press, Boston, MA, 1990, p. 15–39.

[11] L. Clozel – « On limit multiplicities of discrete series representations in spaces of automorphic forms », *Invent. Math.* **83** (1986), no. 2, p. 265–284.

[12] ———, « Représentations galoisiennes associées aux représentations automorphes autoduales de GL(n) », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **73** (1991), p. 97–145.

[13] P. Deligne – « Le formalisme des cycles évanescents », *SGA 7*.

[14] P. Deligne – « Théorèmes de finitude en cohomologie ℓ adique », *SGA* $4\frac{1}{2}$.

[15] P. Deligne – « Travaux de Shimura », *Séminaire Bourbaki, 23ème année (1970/71), Exp. No. 389, Lecture Notes in Math.* **244** (1971), p. 123–165.

[16] P. Deligne, D. Kazhdan & M. Vignéras – « Représentations des algèbres centrales simples p-adiques », *Travaux en Cours, Hermann, Paris* (1984).

[17] T. Ekedeahl – « On the adic formalism », *The Grothendieck Festschrieft*, vol. 2, Birkhauser.

[18] J. Fontaine – « Représentations l-adiques potentiellement semi-stables », *Périodes p-adiques*, vol. 294, Astérisque, 1994, p. 321–347.

[19] R. Freitag, R. Kiehl – *Étale cohomology and the Weil conjecture.*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1988.

[20] K. Fujiwara – « Rigid geometry, Lefschetz-Verdier trace formula and Deligne's conjecture », *Invent.math.* **127** (1997).

[21] M. Goresky, R. Kottwitz & R. MacPherson – « Discrete series characters and the Lefschetz formula for Hecke operators », *Duke Math. J.* **89** (1997), no. 3, p. 477–554.

[22] A. Grothendieck & L. Illusie – « Formule de Lefschetz », *SGA 5*, Lecture Notes in Math., vol. 589, Springer Verlag, 1977, p. 73–135.

[23] M. Harris – « Supercuspidal representations in the cohomology of Drinfel'd upper half spaces ; elaboration of Carayol's program », *Invent. Math.* **129** (1997), no. 1, p. 75–119.

[24] ———, « Galois properties of cohomological automorphic forms on GL(n) », *J. Math. Kyoto Univ.* **39** (1999), no. 1, p. 299–318.

[25] ———, « Local Langlands correspondences and vanishing cycles on Shimura varieties », *Proceedings of the E.C.M.* (2000).

[26] M. Harris, R. Taylor – « On the geometry and cohomology of some simple Shimura varieties », *A paraitre dans Annals of math. studies.*

[27] R. Huber – « Swan representations associated with rigid analytic curves », *Preprint.*

[28] ———, *Étale cohomology of rigid analytic varieties and adic spaces.*, Aspects of Mathematics., Friedr. Vieweg and Sohn, Braunschweig, 1996.

[29] ———, « A comparison theorem for l-adic cohomology. », *Compositio Math.* **112** (1998), no. 2, p. 217–235.

[30] ———, « A finiteness result for direct image sheaves on the étale site of rigid analytic varieties », *J. Algebraic Geom.* **7** (1998), no. 2, p. 159–403.

[31] L. Illusie – *Complexe cotangent et déformations. I*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 239, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971.

[32] ———, « Autour du théorème de monodromie locale », *Périodes p-adiques*, Astérisque, no. 223, 1994.

[33] J. Jouanolou – « Systèmes projectifs J-adiques », *SGA V.*

[34] D. Kazhdan – « Cuspidal geometry of p-adic groups », *J. Analyse Math.* **47** (1986), p. 1–36.

[35] J.-L. Kim – « Hecke algebras of classical groups over p-adic fields and supercuspidal representations », *Amer. J. Math.* **121** (1999), no. 5, p. 967–1029.

[36] R. Kottwitz – « Rational conjugacy classes in reductive groups », *Duke Math. J.* **49** (1982), no. 4, p. 785–806.

[37] ———, « Isocrystals with additional structure. », *Compositio Math.* **56** (1985), no. 2, p. 201–220.

[38] ———, « Stable trace formula : elliptic singular terms », *Math. Ann.* **275** (1986), no. 3, p. 365–399.

[39] ———, « Shimura varieties ans λ-adic representations », *Automorphic forms, Shimura varieties and L-functions*, vol. 1, Perspectives in Mathematics, no. 10, Academic Press, 1990, p. 161–209.

[40] ———, « On the λ-adic representations associated to some simple Shimura varieties », *Invent. Math.* **108** (1992), no. 3, p. 653–665.

[41] ———, « Points on some Shimura varieties over finite fields. », *J. Amer. Math. Soc.* **5** (1992), no. 2, p. 373–444.

[42] ———, « Isocrystals with additional structure.II », *Compositio Math.* **109** (1997), no. 3, p. 255–339.

[43] J.-P. Labesse – « Fonctions élémentaires et lemme fondamental pour le changement de base stable », *Duke Math. J.* **61** (1990), no. 2, p. 519–530.

[44] J. Labesse & R. P. Langlands – « L-indistinguishability for SL(2) », *Canad. J. Math.* **31** (1979), no. 4, p. 726–785.

[45] R. P. Langlands – « Automorphic representations, Shimura varieties, and motives. Ein Märchen. », *Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore.)*, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, vol. 2, Amer. Math. Soc., Providence, R.I, 1979.

[46] J. Milne – « Canonical models of (mixed) Shimura varieties and automorphic vector bundles », *Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions*, Perspect. Math. 10, vol. I, Academic Press, Boston, MA, 1990.

[47] J. Milne – « The points on a Shimura variety modulo a prime of good reduction. », *The Zeta functions of Picard modular surfaces*, Univ. Montréal, Montreal, PQ, 1992, p. 151–253.

[48] A. Moy – « Representations of U(2,1) over a p-adic field », *J. Reine Angew. Math.* **372** (1986), p. 178–208.

[49] R. Pink – « On the calculation of local terms in the Lefschetz-Verdier trace formula and its application to a conjecture of Deligne », *Ann. of Math.* **135** (1992), p. 483–525.

[50] M. Rapoport – « Non-archimedean period domains », *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994)*, Birkhäuser, 1995, p. 423–434.

[51] M. Rapoport, Th. Zink – *Period spaces for p-divisible groups.*, Annals of Mathematics Studies, no. 141, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996.

[52] M. Richartz, M. Rapoport – « On the classification and specialization of F-isocrystals with additional structure. », *Compositio Math.* **103** (1996), no. 2, p. 153–181.

[53] J. Rogawski – *Automorphic representations of unitary groups in three variables*, Annals of Mathematics Studies, vol. 123, Princeton University Press, Princeton,NJ, 1990.

[54] ———, « Analytic expression for the number of points mod p », *The Zeta functions of Picard modular surfaces*, Univ. Montréal, Montreal, QC, 1992, p. 65–109.

[55] ———, « The multiplicity formula for A-packets », *The Zeta functions of Picard modular surfaces*, Univ. Montréal, Montreal, QC, 1992, p. 395–419.

[56] P. Schneider, U. Stuhler – « Representation theory and sheaves on the Bruhat-Tits building. », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **85** (1997), p. 97–191.

[57] M. Strauch – « On the Jacquet-Langlands correspondance in the cohomology of Lubin-Tate deformation tower », *Preprint.*

[58] T. Wedhorn – « Ordinariness in good reductions of Shimura varieties of PEL-type. », *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **32** (1999), no. 5, p. 575–618.

[59] A. Weil – *Basic number theory.*, Springer-Verlag,, 1973.

[60] J.-P. Wintenberger – « Propriétés du groupe tannakien des structures de Hodge p-adiques et torseur entre cohomologies cristalline et étale », *Ann. Inst. Fourier* **47** (1997), no. 5, p. 1289–1334.

[61] T. Zink – « On the slope filtration », *preprint.*

[62] ———, « The Lefschetz trace formula for an open algebraic surface », *Automorphic forms, Shimura varieties, and L-functions*, Perspect. Math., 11, vol. II, Academic Press, Boston, MA, 1990.