Sorbonne Université

École doctorale de Sciences Mathématiques de Paris Centre (ED386)

Institut de Mathématiques de Jussieu - Paris Rive Gauche
Équipe Topologie et Géométrie Algébrique

La décomposition de Zariski : une approche valuative

Par Milan Perera
Thèse de doctorat de Mathématiques

Dirigée par Sébastien Boucksom & Gérard Freixas I Monplet

Présentée et soutenue publiquement le 5 juillet 2021

devant le jury composé de :

M. Antoine Ducros	Président du Jury
M. Sébastien Boucksom	Directeur de thèse
M. Gérard Freixas I Monplet	Directeur de thèse
Mme. Catriona Maclean	Rapporteur
M. Martin Sombra	Rapporteur
Mme. Ana-Maria Castravet	Examinateur

Table des matières

Remerciements **7**

Introduction **9**

I Préliminaires **23**

1 Diviseurs, fibrés en droites et positivité **27**
1.1 Diviseurs et fibrés en droites 27
1.1.1 Diviseurs de Weil et de Cartier 27
1.1.2 Faisceaux d'idéaux et fibrés en droites 31
1.2 Notions classiques de positivité 32
1.2.1 Équivalence numérique et Néron-Severi 33
1.2.2 Ensemble-base, cône ample et cône nef 34
1.2.3 Volume, cône gros et cône psef 38
1.2.4 Mobile et nef en codimension 1 41
1.2.5 Les différents cônes dans le Néron-Severi 42
1.2.6 Les différents seuils : psef, nef et nef en codim 1 42
1.2.7 Dualité diviseurs-courbes 43
1.2.8 Néron-Severi sur une surface 44
1.3 Notions de positivité relative 45
1.3.1 Idéal de base relatif 45
1.3.2 Équivalence linéaire relative 46
1.3.3 Équivalence numérique relative 47
1.3.4 Notions de positivité relative 48

2 La décomposition de Zariski **51**
2.1 Définitions et premières remarques 51
2.2 Décomposition de Zariski en dimension 2 52

2.3 Partie mobile et partie fixe 53
2.4 La décomposition de Zariski divisorielle 55
2.4.1 La construction pour les diviseurs gros 55
2.4.2 Extensions aux diviseurs pseudo-effectifs 58
2.4.3 Diviseurs N-exceptionnels 59
2.5 La décomposition de Zariski et modèles dominants 61

II Caractérisation de la décomposition de Zariski 63

3 Valuations sur un corps de fonctions 67
3.1 Valuations sur une extension de corps 67
3.1.1 Premières définitions 67
3.1.2 Les invariants d'une valuation 67
3.1.3 Les valuations d'Abhyankar 68
3.2 Le corps de fonctions d'une variété 69
3.2.1 Modèles d'une extension de corps 69
3.2.2 Le centre d'une valuation 70
3.3 Exemples de valuations 73
3.3.1 Les valuations divisorielles 73
3.3.2 L'ordre d'annulation le long d'une sous-variété 75
3.3.3 Les valuations quasi-monomiales 77
3.4 Valuations et suites graduées d'idéaux 82
3.4.1 Valuations sur un idéal 82
3.4.2 Suites graduées d'idéaux 83
3.4.3 Valuations d'une suite graduée d'idéaux 84

4 Espaces de valuations et fonctions PL 87
4.1 Topologie et fonctions remarquables 87
4.2 Valuations quasi-monomiales et paires SNC 91
4.2.1 Le complexe dual d'une variété SNC 91
4.2.2 Le complexe des valuations 92
4.3 Structure de l'espace des valuations sur X 93
4.4 Fonctions PL 95
4.4.1 Fonctions PL sur un complexe simplicial 95
4.4.2 Lien avec les fonctions PL sur l'espace des valuations 96

5 Ordres d'annulation asymptotiques et décomposition de Zariski 97
5.1 Ordres d'annulation asymptotiques d'un diviseur 97
5.2 La décomposition de Zariski relative 103

III Application du critère valuatif à la recherche d'un contre-exemple 107

6 Étude des valuations sur une variété polarisée 111
6.1 Le cône sur une variété polarisée 111
6.2 Espaces des valuations sur Y et V 112
6.2.1 Valuations sur Y 112
6.2.2 Valuations sur V 114
6.3 Lien entre les fonctions d'Izumi sur Y et celles sur V 115
6.4 Cas où v_0 est une valuation divisorielle 117
6.5 Utilisation d'une variété S auxiliaire 119

7 Construction de Cutkosky et contre-exemple 129
7.1 Réseaux quadratiques et surfaces K3 129
7.1.1 Surfaces K3 129
7.1.2 Réseaux quadratiques 129
7.1.3 Construction de S 130
7.2 Étude de S 130
7.2.1 Premières remarques 130
7.2.2 Plongement de S dans $\mathbb{P}^3$ 132
7.2.3 Construction de la courbe Z 133
7.3 Le contre-exemple 134

IV Annexes 137

8 La décomposition de Zariski sur les surfaces 139

9 Contre-exemple de Nakayama 145
9.1 Correspondance de Legendre 145
9.2 Suite d'éclatements et décomposition de Zariski 146
9.3 Les variétés de Nakayama 147
9.3.1 Les B-réseaux 147
9.3.2 La structure relativement torique 147

9.3.3 Quelques propriétés des variétés de Nakayama 150
9.4 Le contre-exemple de Nakayama 152

Bibliographie **165**

Remerciements

Lorsque j'ai commencé cette longue thèse, j'étais à l'aube de ma vingtaine ; aujourd'hui j'en suis au crépuscule. Nombre de personnes ont croisé ma route durant ces années et ont — à leur manière — contribué à la réalisation du présent travail. Il sera donc impossible d'être entièrement exhaustif dans ces remerciements, mais je ferai de mon mieux.

Je tiens d'abord et avant tout à remercier mes deux directeurs de thèse, Gerard Freixas et Sébastien Boucksom. Dire que sans eux cette thèse n'aurait jamais vu le jour est un euphémisme. Sans leur disponibilité, leurs solides compétences, leur expérience, leur soutien sans faille, leur patience souvent mise à l'épreuve, rien de tout cela n'aurait été possible. Ils ont été le fil d'Ariane dans l'obscurité.

L'équipe du TGA a été aussi d'une grande aide pendant ces années, ainsi que le fameux couloir des doctorants. Mes pensées vont d'abord à Martin, avec qui nous avons fait du bureau notre QG, à Amiel, vieux compagnon de l'ENS dont le soutien et la motivation ont été essentiels dans plusieurs moments critiques, et aussi Hugo, toujours de bonne humeur, dont la voix résonnait chaque midi pour mener l'expédition au RA,

Je tiens également à remercier l'équipe du département de mathématiques de l'ENS Paris-Saclay, dont mon recrutement comme ATER puis AGPR a permis de terminer cette thèse dans des conditions plus qu'idéales. Merci en particulier à l'équipe de la prépa Agreg pour la bonne ambiance qui y a régné (et qui y règne toujours), à Simon, à Tuong-Huy, à Sandrine, à Arnaud, à Louis, et — last but not least — à Frédéric.

Bien sûr, les remerciements ne peuvent se circonscrire aux seuls mathématiciens sans rester cruellement incomplets.

Merci à ma mère, à mes sœurs, à mes grands-parents et à toute ma famille pour leur soutien et leurs encouragements.

Merci à Arthur et à la petite famille, dont les retrouvailles ponctuelles et régulières sont autant indispensables que les battements du cœur.

Merci à toute la bande de la résidence pour ces moments quotidiens de joie et de rire, merci à Alassane, à Samba, à Nini, à p'tit Mouss, à Tanzee, à Fatou, à Carla, à Paupau, à Coline, et surtout à Fanfan, dont la présence et le soutien se sont prolongés dans la colocation, et qui furent particulièrement cruciaux pour la fin.

Merci à la bande de l'ENS, dont la plupart ont déjà soutenu leur thèse.

Merci à mes professeurs — de mathématiques ou non — qui à tout niveau durant ma scolarité ont su éveiller ma curiosité, ma créativité, et me tirer vers le haut.

Et merci à tous ceux qui, sans être cités ici, n'en ont pas moins été des appuis et des jalons durant ces années !

Introduction

La décomposition de Zariski et ses limites en dimension supérieure

La motivation originelle

Les diviseurs et les fibrés en droites sont des objets centraux de la géométrie algébrique. Leur étude permet de comprendre et de classifier les variétés algébriques ; la donnée d'un fibré en droites (très) ample correspond par exemple à celle d'un plongement de X dans un espace projectif. L'étude des diviseurs et des fibrés en droites est également au cœur de la géométrie birationnelle, notamment l'étude du fibré canonique (noté K_X) dans le programme du modèle minimal. Précisément, à partir d'une variété X projective lisse de type général (K_X gros *i.e* de volume non nul, voir formule (1) page 11), on voudrait trouver une variété plus simple (en un certain sens) et birationnellement équivalente à X. On cherche alors ce qu'on appelle le modèle canonique X_{can} (unique à isomorphisme près), c'est-à-dire vérifiant :

(i) X_{can} est projective, normale et "peu singulière" (précisément à singularités canoniques)

(ii) $K_{X_{\text{can}}}$ est ample

(iii) X_{can} est birationnellement équivalente à X.

On a le fait suivant : le modèle canonique X_{can} existe *si et seulement si* $R(X, K_X) := \bigoplus_m H^0(X, mK_X)$ est de type fini, propriété connue sous le nom de *finitude de l'anneau canonique*. Comme nous le verrons au paragraphe suivant, la finitude de l'algèbre des sections d'un fibré en droites gros L entraîne toujours l'existence d'une décomposition de Zariski pour L, la réciproque étant fausse en général. Dans la cas du fibré canonique $L = K_X$, Kawamata a cependant montré au début des années 1980, via une version fine du célèbre “basepoint-free theorem”, que cette réciproque est valable, i.e. que X_{can} existe *si et seulement si* K_X admet une décomposition de Zariski. Bien que cette approche ne fût finalement pas celle qui permit la résolution de

la conjecture de finitude de l'anneau canonique par Birkar-Cascini-Hacon-McKernan, elle suscita néanmoins un regain d'intérêt pour l'étude générale de la décomposition de Zariski.

La décomposition de Zariski sur les surfaces

En 1962, Zariski publie "The theorem of Riemann-Roch for high multiples of an effective divisor on an algebraic surface" ([Zar62]), où il étudie la croissance de la dimension des systèmes linéaires de diviseurs effectifs sur une surface. Dans cet article, Zariski démontre le résultat suivant :

Théorème 0.0.1. *Soit D un diviseur effectif sur une surface X projective lisse. Alors, il existe une* unique *décomposition de D en $\mathbb{Q}$-diviseurs effectifs P et N :*

$$D = P + N$$

tel que

*(i) P est nef (*i.e *$P \cdot C \geq 0$ pour toute courbe C irréductible).*

(ii) N est soit nul, soit de matrice d'intersection $(C_i \cdot C_j)_{i,j}$ définie négative (où les C_i sont les composantes irréductibles de N).

(iii) $P \cdot C_i = 0$ pour toute composante irréductible de N.

Cette décomposition a le bon goût de vérifier que l'inclusion naturelle $H^0(X, lP) \subset H^0(X, lD)$ est un isomorphisme pour tout entier naturel l (ici, comme ailleurs, on pose $H^0(X, E) := H^0\big(X, \mathcal{O}_X(\lfloor E \rfloor)\big)$ pour un $\mathbb{Q}$- ou $\mathbb{R}$-diviseur E). Ainsi, dans le cas des surfaces, cela donne une méthode systématique pour, à partir d'un diviseur D effectif, obtenir un $\mathbb{Q}$-diviseur P nef dont les systèmes linéaires des puissances de P et de D ainsi que l'algèbre graduée des sections sont isomorphes.

L'étude de D se ramène donc à l'étude de P avec de meilleures propriétés de positivité. Cela nous donne un outil puissant pour l'étude des diviseurs sur les surfaces, notamment pour l'étude du diviseur canonique et la classification des surfaces.

En 1979, Fujita est parvenu à étendre la décomposition de Zariski à tout diviseur pseudo-effectif sur une surface — pour rappel, un diviseur est pseudo-effectif si sa classe numérique est limite de classes de diviseurs effectifs dans le Néron-Severi.

On aimerait bien disposer d'un tel outil pour les variétés projectives lisses de dimension supérieure ; précisément, on voudrait pouvoir décomposer un diviseur (pseudo-)effectif D en $D = P+N$ avec P, N $\mathbb{Q}$-diviseurs, P nef, N effectif, et $H^0(X, lP) =$

$H^0(X, lD)$ pour tout $l \in \mathbb{N}$. Mais avec ce genre d'hypothèses, trop strictes, on trouve rapidement des contre-exemples. Rappelons que le volume d'un diviseur est défini de la manière suivante :

$$\mathrm{Vol}_X(D) := \limsup_m n! \frac{h^0(X, mD)}{m^n}, \text{ avec } n := \dim X. \tag{1}$$

Une conséquence immédiate d'une décomposition de Zariski $D = P + N$ est que $\mathrm{Vol}(D) = \mathrm{Vol}(P)$. Or, comme P est un $\mathbb{Q}$-diviseur nef, $\mathrm{Vol}(P) = (P^{\dim X})$ qui est rationnel. Cependant, on a des exemples de diviseurs avec un volume irrationnel. On ne peut donc espérer avoir une décomposition de Zariski à coefficient rationnel pour tout diviseur pseudo-effectif. Cela amène donc un premier assouplissement : On considère des décompositions de Zariski à coefficients dans $\mathbb{R}$, et donc on travaille directement avec des $\mathbb{R}$-diviseurs.

La décomposition de Zariski divisorielle

Pour aller plus loin, on va introduire une nouvelle décomposition. On va d'abord décomposer un $\mathbb{R}$-diviseur D gros en partie fixe $F(D)$ et partie mobile $M(D)$; intuitivement, on met dans $F(D)$ les diviseurs qui apparaissent dans l'ensemble-base de D — plus formellement, $F(D)$ est le plus petit $\mathbb{R}$-diviseur effectif tel que $M(D) = D - F(D)$ a un ensemble-base de codimension au moins 2. Or, pour un $\mathbb{R}$-diviseur D gros, on a $H^0(X, D) = H^0(X, M(D))$.

Comme les coefficients de $F(mD)$ forment des suites sous-additives, $\frac{1}{m}F(mD)$ converge coefficient par coefficient grâce au lemme de Fekete. On considère alors la limite de la décomposition $D = \frac{1}{m}M(mD) + \frac{1}{m}F(mD)$ et on parvient à avoir une version plus faible de la décomposition de Zariski, une décomposition de Zariski dite divisorielle :

$$D = P(D) + N(D)$$

avec $P(D), N(D)$ des $\mathbb{R}$-diviseurs, $N(D)$ effectif, $P(D)$ nef en codimension 1 (sans diviseurs dans son ensemble-base), et l'algèbre des sections de $P(D)$ est isomorphe à celle de D.

Intuitivement, on a mis les diviseurs de l'ensemble-base asymptotique de D dans $N(D)$, et $P(D) = D - N(D)$ est alors sans diviseur dans son ensemble-base. On généralise ensuite à tout diviseur pseudo-effectif par passage à la limite.

Si D est un diviseur dont l'algèbre des sections est de type fini, la suite $D = \frac{1}{m}M(mD) + \frac{1}{m}F(mD)$ est stationnaire et fournie donc la décomposition de Zariski divisorielle pour m assez grand.

Dans le cas des surfaces, la décomposition de Zariski divisorielle coïncide exactement avec la décomposition de Zariski sur les surfaces (énoncé au premier théorème) ; voir proposition 2.4.8.

La décomposition de Zariski en dimension supérieure

On se donne la définition suivante pour une décomposition de Zariski en dimension supérieure :

Définition 0.0.2. Un $\mathbb{R}$-diviseur D gros sur X projective admet une décomposition de Zariski s'il existe $\mu : X' \to X$ un morphisme birationnel projectif avec X' lisse tel que $P\big(\mu^*(D)\big)$ est nef.

Nous nous plaçons sur un modèle dominant de X (et non plus sur X) car en dimension supérieure, $P(D)$ n'est pas nécessairement nef, mais seulement nef en codimension 1 ; ou, d'un autre point de vue, le poussé-en-avant d'un diviseur nef sur un modèle au-dessus de X n'est plus que nef en codim 1. Cela est illustré par le cas des variétés toriques, où un diviseur correspond à une fonction linéaire sur chaque cône de l'éventail de la variété, et écrire la décomposition de Zariski revient à prendre l'enveloppe convexe de la fonction. Cette dernière est linéaire par morceaux, donc linéaire sur un raffinement de l'éventail. Or, un tel raffinement correspond à un morphisme birationnel, et oblige à définir la décomposition sur un modèle dominant.

Plus généralement, si l'algèbre des sections d'un diviseur de Cartier D est de type fini, on a une décomposition de Zariski. En effet, en éclatant l'idéal de base de mD pour m suffisamment divisible, on obtient μ tel que $P(\mu^* D)$ est nef. La réciproque est cependant fausse en générale : déjà sur les surfaces, on peut trouver des exemples de diviseurs nef et gros dont l'algèbre des sections n'est pas de type fini.

Pour se mettre en quête d'une décomposition de Zariski de D sur une variété X, on pourrait essayer la méthode suivante : on commence par décomposer $D = P(D) + N(D)$. Si $P(D)$ est nef, on arrête, on a notre décomposition de Zariski. Sinon, on considère une sous-variété V de dimension non-nulle du lieu non-nef de $P(D)$. On éclate notre variété X en V et on obtient X'. On pose D' le tiré-en-arrière de D, on écrit $D' = P(D') + N(D')$ et on recommence. Si le processus s'arrête, on a une décomposition de Zariski.

Contre-exemple de Nakayama à la décomposition de Zariski

Munis de cette définition, obtenons-nous l'existence de la décomposition de Zariski pour tout diviseur ? La réponse est non. Nakayama le prouve en 2004 dans "Zariski-decomposition and abundance" ([Nak04]).

En se plaçant sur une variété relativement torique, Nakayama parvient à faire correspondre décomposition de Zariski divisorielle d'un diviseur et approximation d'une fonction par une fonction linéaire par morceau. Or, en prenant une fonction non linéaire par morceau, Nakayama parvient à construire une suite infinie d'éclatement :

$$\cdots \to X^{[n+1]} \xrightarrow[\mu_{n+1}]{} X^{[n]} \to \cdots X^{[1]} \to X^{[0]} = X$$

avec sur chaque $X^{[n]}$ une décomposition de Zariski divisorielle $P_n + N_n$ du tiré-en-arrière de D, avec $\mu_{n+1}^* N_n < N_{n+1}$. On se retrouve typiquement dans une situation où la stratégie décrite au-dessus n'aboutit pas. De plus, Nakayama parvient à montrer que dans cette situation, il n'y a pas de décomposition de Zariski. Cela est détaillé dans le dernier chapitre, dans les annexes.

Recherche de contre-exemples dans le cas relatif

Cependant, la connaissance de contre-exemples — en dehors de ceux fournis par Nakayama — restait limitée. Notamment, il n'existait pas de contre-exemple connu à la décomposition de Zariski dans le cas relatif. Dans cette thèse, nous sommes partis de la recherche d'un contre-exemple à une décomposition de Zariski dans le cas relatif.

Dans le cas relatif, c'est-à-dire deux variétés X, Y et un morphisme $\pi : X \to Y$ projectif, on peut introduire des notions de positivité *relative*, qui coïncident avec les notions classiques lorsque Y est réduit à un point. On obtient alors la notion de volume relatif, de relativement gros, de relativement nef — ce sera introduit à la section 1.3. La même procédure que dans le cas absolu fournit une version relative de la décomposition de Zariski divisorielle pour un diviseur D relativement gros sur X : $D = P(D) + N(D)$ avec $N(D)$ effectif. Nous disons que D admet une décomposition de Zariski relative s'il existe un π-modèle lisse X' de X tel que, en notant D' le tiré-en-arrière de D, $P(D')$ est π-nef (on dira qu'un diviseur est π-nef si l'intersection avec toute courbe verticale est positive). Tout cela est développé au chapitre 5.

Nous avons atteint deux objectifs. Premièrement, nous avons développé un approche systématique en étudiant l'espace des valuations pour savoir s'il existe ou non une décomposition de Zariski — c'est l'objet de la deuxième partie. Deuxièmement, nous avons utilisé cette approche dans une situation concrète et nous sommes parvenus à exhiber un contre-exemple à la décomposition de Zariski dans le cas relatif — c'est l'objet de la troisième partie.

Approche valuative

Le point de vue des b-diviseurs

La difficulté de l'étude de potentiels contre-exemples réside dans la construction d'éclatements successifs, un formalisme qui peut vite devenir très lourd dans le cas concret.

Le formalisme des b-diviseurs apporte une première réponse à ce problème. Un b-diviseur de Weil est une limite projective de diviseurs de Weil par rapport aux modèles de X.

On définit également un b-diviseur de Cartier en prenant un diviseur de Cartier D sur une variété X et en considérant la limite projective du tiré-en-arrière de D sur les modèles de X. Si $\mathbf{D}$ est un b-diviseur de Cartier, tout diviseur D_1 sur un modèle X_1 tel que la limite projective des tiré-en-arrière de D_1 donne $\mathbf{D}$ est appelé *détermination* de $\mathbf{D}$.

Ce formalisme donne des résultats probants : dans [KM13], Küronya et Maclean parviennent à montrer une version "limite projective" de la décomposition de Zariski pour tout b-diviseur effectif sur une variété projective lisse :

Théorème 0.0.3 (Küronya-Maclean)**.** *Soit $\mathbf{D}$ un $\mathbb{Q}$-b-diviseur effectif sur une variété projective normale $\mathbb{Q}$-factorielle (par exemple lisse) sur un corps algébriquement clos. Alors, il existe une unique décomposition :*

$$\mathbf{D} = \mathbf{P} + \mathbf{N}$$

en deux $\mathbb{R}$-b-diviseurs effectifs $\mathbf{P}$ et $\mathbf{N}$ vérifiant :

(i) $H^0(X, l\mathbf{P}) = H^0(X, l\mathbf{D})$ pour tout $l \in \mathbb{N}$

(ii) $\mathbf{P}$ est une limite de b-diviseurs nef (au sens de la convergence sur tout modèle dominant X)

(iii) Pour tout $\mathbf{P}'$ b-diviseur nef vérifiant $\mathbf{P}' \leq \mathbf{D}$, on a $\mathbf{P}' \leq \mathbf{P}$.

Sauf qu'un b-diviseur de Weil ne se réalise pas nécessairement comme un vrai diviseur, c'est-à-dire n'est pas nécessairement b-Cartier (sinon, il n'y aurait pas de contre-exemple à la décomposition de Zariski). Le problème de la décomposition de Zariski se reformule de manière un peu différente : la décomposition de Zariski "limite projective" (qui existe et qui est unique) est-elle une décomposition en b-diviseurs de Cartier, et donc leur détermination donne-t-elle une vraie décomposition de Zariski sur un certain modèle de X ?

Pour répondre à cette question, nous avons choisi un autre point du vue que les b-diviseurs, un point de vue valuatif.

Point de vue valuatif

Pour toute la suite de l'introduction, soit k un corps que nous supposerons de caractéristique 0 et algébriquement clos. On va considérer l'espace des valuations sur une k-variété X, c'est-à-dire l'ensemble Val_X des valuations réelles de $K(X)/k$ possédant un centre dans X, qu'on munit de la topologie de la convergence simple sur $K(X)$. On vérifie que si X' est un éclatement de X, alors $\mathrm{Val}_{X'} = \mathrm{Val}_X$ par le critère valuatif de propreté. On a alors un cadre qui, comme les b-diviseurs, permet de faire l'étude "d'un coup" sur toutes les modèles et de court-circuiter la fastidieuse construction d'éclatements successifs.

Un rôle important est celui joué par les valuations divisorielles : pour un diviseur premier E sur un modèle normal de X, on considère la valuation ord_E, où $\mathrm{ord}_E(f)$ pour $f \in K(X)$ est l'ordre d'annulation de f le long de E, et pour un $\mathbb{R}$-diviseur D, $\mathrm{ord}_E(D)$ est le coefficient de E dans le diviseur D. En fait, les b-diviseurs correspondent essentiellement aux fonctions sur les valuations divisorielles de X : à chaque valuation ord_E, on associe le coefficient en E.

Pour un b-diviseur de Cartier (réel), il s'avère que cette fonction s'étend naturellement en une fonction continue sur Val_X, unique par densité des valuations divisorielles. On appelle $\mathrm{PL}(\mathrm{Val}_X) \subset C^0(\mathrm{Val}_X)$ l'espace des fonctions ainsi définies. Comme on va le voir ci-dessous, il s'agit en effet de fonctions PL en un sens naturel.

La question de l'existence de la décomposition de Zariski (ou le fait qu'un b-diviseur de Weil est également un b-diviseur de Cartier) se traduit en : telle fonction peut elle s'écrire sous la forme $\varphi_D : v \mapsto v(D)$ pour un certain $\mathbb{R}$-diviseur D ? Et ensuite : le fait qu'une fonction s'écrive sous la forme $v \mapsto v(D)$ peut-il se traduire en propriété de régularité ? Cela va effectivement être le cas.

Structure de l'espace des valuations et fonctions PL

Il s'agit d'abord de pouvoir faire de l'analyse sur Val_X, en exploitant sa structure qui est connue notamment grâce aux travaux de Berkovich, Thuillier et Kontsevich. À partir d'un modèle Y de X et d'un diviseur premier E sur Y, on obtient une valuation divisorielle $\mathrm{ord}_E \in \mathrm{Val}_X$; plus généralement, à partir d'un diviseur D à croisement normaux sur un modèle Y, on obtient un complexe simplicial conique $\Delta(Y, D) \subset \mathrm{Val}_Y = \mathrm{Val}_X$ de valuations monomiales sur Y, et donc quasi-monomiales sur X. Ces complexes peuvent être vu comme les briques élémentaires de Val_X : pour chaque $\Delta(Y, D)$, il existe une rétraction de Val_X sur $\Delta(Y, D)$ et Val_X est la limite projective de ces complexes simpliciaux. Cela permet d'aborder la structure de Val_X. Par exemple, si $X = \mathbb{A}^1$, Val_X est un arbre réel. En dimension supérieure, c'est une sorte d'immeuble.

Grâce à la description de Val_X comme limite projective de complexes coniques, on peut se ramener à étudier nos fonctions sur un $\Delta(Y, D)$ donné, et se retrouver avec des fonctions sur un éventail dans $\mathbb{R}^s$.

On s'intéresse aux fonctions PL, les fonctions de Val_X qui s'écrivent comme la composée d'une part d'une fonction linéaire par morceaux avec des ruptures de pentes rationnelles sur un certain $\Delta(Y, D)$ et d'autre part de la rétraction. On a la proposition suivante :

Proposition 0.0.4. *Une fonction sur* Val_X *est de la forme* $v \mapsto v(D')$ *pour un b-diviseur de Cartier réel* D' si et seulement si *elle se factorise comme une fonction PL sur un certain* $\Delta(Y, D)$ *via la rétraction sur* $\Delta(Y, D)$.

Ordre d'annulation asymptotique le long d'une valuation

En adaptant en situation relative ce qui est fait dans [ELM+05], on peut introduire l'ordre d'annulation asymptotique le long d'une valuation $v \in \mathrm{Val}_X$ pour un $\mathbb{R}$-diviseur de Cartier D relativement gros en posant :

$$v\|D\|_\pi := \lim_{m \to +\infty} \frac{1}{m} \inf_{D' \in |mD|_\pi} v(D').$$

Notons $\varphi_{\|D\|_\pi} : v \mapsto v\|D\|_\pi$ la fonction sur Val_X ainsi obtenue. Comme on a :

$$N(D) = \sum_{E_i \text{ diviseur premier de } X} (\mathrm{ord}_{E_i}\|D\|_\pi) E_i,$$

la fonction $\varphi_{\|D\|_\pi}$ correspond au b-diviseur $\mathbf{N}$ — la partie négative de la décomposition de Zariski "limite projective" du b-diviseur associé à D. Autrement dit, sur chaque modèle $\mu : X' \to X$, on a :

$$N(\mu^* D) = \sum_{E \text{ diviseur premier de } X'} \varphi_{\|D\|_\pi}(E) E.$$

On va donc s'intéresser à la fonction $\varphi_{\|D\|_\pi} : v \mapsto v\|D\|_\pi$ de Val_X.

Approche valuative de la décomposition de Zariski

On montre le résultat suivant : si $D = P + N$ est une décomposition de Zariski relative, alors pour toute valuation v, on a $v\|D\|_\pi = v(N)$. Or, la réciproque est vraie : si on a un diviseur effectif N sur un modèle $\mu : X' \to X$ tel que pour toute valuation v, on a $v\|D\|_\pi = v(N)$, alors $\mu^* D = (\mu^* D - N) + N$ est la décomposition de

Zariski relative. Ainsi, il existe une décomposition de Zariski de D *si et seulement si* il existe un diviseur effectif N sur un certain modèle vérifiant $v\|D\|_\pi = v(N)$ pour toute $v \in \mathrm{Val}_X$.

On obtient alors le critère valuatif général suivant, résultat central de cette thèse, énoncé en 5.2.9 :

Théorème 0.0.5. *Soit $\pi : X \to Y$ un morphisme projectif et surjectif entre variétés avec Y quasi-projective et D un $\mathbb{R}$-diviseur π-gros sur X. Alors D admet une décomposition de Zariski relative* si et seulement si *la fonction $\varphi_{\|D\|_\pi}$ de Val_X dans $\mathbb{R}$ qui à v associe $v\|D\|_\pi$ est une fonction PL.*

Le problème de l'existence de la décomposition de Zariski est ramené à l'étude de la "régularité" de la fonction $\varphi_{\|D\|_\pi}$. Néanmoins, la difficulté est reportée à présent dans le calcul de cette fonction, a priori peu accessible dans le cas général.

Valuations sur le cône au-dessus d'une variété polarisée

Finalement, nous allons montrer que dans le contexte relativement général des variétés polarisées, la fonction $\varphi_{\|D\|_\pi} : v \mapsto v\|D\|_\pi$ peut être explicitée. On va s'en servir ensuite pour appliquer le critère valuatif et conclure à la non-existence de la décomposition de Zariski pour un exemple dans le cas relatif.

Fonction $\varphi_{\|D\|_\pi}$ et fonction d'Izumi

Nous considérons $\pi : X' \to Y$ un morphisme projectif entre deux variétés et nous étudierons la décomposition d'un diviseur D de la forme $D = -E$ où E est un diviseur premier sur X', et tel que $\pi(E)$ est un point de Y. Dans ce cas, en notant $v_0 = \mathrm{ord}_E$, on a pour toute valuation $v \in \mathrm{Val}_X$:

$$\varphi_{v_0}(v) := \inf_{f \in \mathcal{O}_{X,0}} \frac{v(f)}{v_0(f)} = v\|-E\|_\pi - v(E).$$

L'étude de $v \mapsto v\|D\|_\pi$ se ramène ainsi à l'étude de $\varphi_{v_0}(v)$. Or, si v est également divisorielle, on reconnait la constante apparaissant dans le théorème de comparaison d'Izumi ; rappelons que ce théorème permet de comparer deux valuations divisorielles ayant même centre, avec $\varphi_{v_0}(v)$ comme meilleure constante possible.

Par la formule ci-dessus, la fonction φ_{v_0}, que nous appellerons fonction d'Izumi associée à v_0, est PL si et seulement si $\varphi_{\|D\|_\pi}$ l'est aussi.

Cas général

Soit (V, A) une variété (sur k) polarisée *i.e* munie d'un fibré en droites ample A. Considérons le cône Y sur cette variété, de sommet $0 \in Y$ (correspondant à l'idéal irrelevant de V). Ainsi, V est le diviseur exceptionnel de l'éclatement de Y en 0 et posons ρ le morphisme :

$$\begin{array}{ccc} V & \subset & X = \mathcal{B}l_0(Y) \\ \downarrow & & \downarrow \rho \\ 0 & \in & Y \end{array}$$

On a alors une action de k^* sur Y. On va s'intéresser à une classe praticulière de valuations : les valuations k^*-invariantes sur Y. On montre qu'on a une correspondance entre les valuations k^*-invariantes sur Y et les valuations sur V (proposition 6.2.5) par la restriction des valuations sur V (modulo une normalisation). Cela va faciliter l'étude de $v \mapsto v\|D\|_\pi$ pour un diviseur D.

Complétons notre construction : on considère une variété Z dans V, et on note respectivement X' et F les éclatements de X et de V le long de Z :

$$\begin{array}{ccccc} E & & F & & X' = \mathcal{B}l_Z(X) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \mu \\ Z & \subset & V & \subset & X = \mathcal{B}l_0(Y) \\ & & \downarrow & & \downarrow \rho \\ & & 0 & \in & Y \end{array}$$

Posons $G = F \cap E$ (le diviseur exceptionnel de $F \to V$) et $H = \mu^* A$. Puisque $\pi := \rho \circ \mu : X' \to Y$ est birationnelle, $D := -E$ est π-gros, et c'est sa π-décomposition de Zariski que nous allons étudier.

Comme nous l'avons vu plus haut, il s'agira d'expliciter la fonction $\varphi_{v_0} := \varphi_{\mathrm{ord}_E}$. L'idée va être de ramener l'étude de la décomposition de Zariski de $-E$ sur X' à étudier G et H sur F. Pour cela, on va utiliser le lien entre les valuations sur F (ou V) et les valuations k^*-invariantes de Y (ou X').

En utilisant la correspondance entre valuations k^*-invariantes sur Y et valuations sur F (car $\mathrm{Val}_F = \mathrm{Val}_V$), on parvient au calcul suivant pour $\varphi_{v_0}(v)$:

Théorème 0.0.6. *Pour toute valuation k^*-invariante v sur Y, en notant w sa restriction sur V, on a :*

$$\varphi_{v_0}(v) = \inf_{t \geq -1} \frac{1}{1+t}\Big(v(\mathfrak{m}_0) + w\|H - tG\| + tw(G)\Big).$$

Ainsi, la difficulté du calcul de $v\|-E\|_\pi$ (ou $\varphi_{v_0}(v)$) pour tout v se ramène au calcul de $w\|H-tG\|$ pour toute valuation w de F.

Or, il y a un cas où $w\|H-tG\|$ est facile à calculer : quand $H-tG$ admet une décomposition de Zariski sur F — dans ce cas, il vaut $w(N)$ où N est la partie négative.

En se plaçant dans le plan du Néron-Severi de F engendré par $[H]$ et $[G]$, on voit que l'existence d'une décomposition de $H-tG$ est équivalente au fait que le cône nef et le cône nef en codim 1 coïncident dans ce plan. On trouve la condition suffisante suivante : il suffit qu'il existe une sous-variété S de V contenant Z sur laquelle le cône psef et le cône nef se confondent (*i.e* sur laquelle nef est équivalent à pseudo-effectif). On obtient dans ce cas la décomposition de Zariski de $H-tG$ (voir théorème 6.5.10) :

$$H-tG \quad \equiv \quad \frac{s_{psef}-t}{s_{psef}-s_{nef}}(H-s_{nef}G)+\frac{t-s_{nef}}{s_{psef}-s_{nef}}s_{psef}\tilde{S}.$$

Les seuils s_{nef} et s_{psef} correspondent aux frontières du cône nef et psef dans $\mathrm{Vect}([H],[G])$. On en déduit alors : $w\|H-tG\| = \frac{t-s_{nef}}{s_{psef}-s_{nef}}s_{psef}w(\tilde{S})$, où $\tilde{S}$ est la tranformée stricte de S dans F.

Cela permet dans un cadre relativement général d'avancer sur le calcul de $v \mapsto v\|-E\|_\pi$. On parvient en effet à montrer que φ_{v_0} est linéaire par morceaux sur une partie du cône simplicial de Val_X engendré par les 3 valuations ord_S, $\mathrm{ord}_E = \mathrm{ord}_Z$ et $\mathrm{ord}_F = \mathrm{ord}_V = \mathrm{ord}_0$, et avec les ruptures de pentes suivantes (proposition 6.5.15) :

$$\{x=y\} \quad ; \quad \{x=y+z\} \quad ; \quad \{x=y+\frac{1+s_{nef}}{s_{psef}-s_{nef}}s_{psef}z\}. \tag{2}$$

L'exemple de Cutkosky-Küronya

Au chapitre 7, on va montrer l'énoncé suivant :

Proposition 0.0.7. *En considérant $\mathbb{P}^3$ comme le diviseur exceptionnel de $\mathbb{C}^4$ en 0, il existe une courbe lisse Z dans $\mathbb{P}^3$ telle que la valuation ord_Z correspondante a une fonction d'Izumi φ_{ord_Z} qui n'est pas PL sur $\mathrm{Val}_{\mathbb{C}^4}$.*

On se place dans le cadre de la construction de Cutkosky, qui est un cas particulier du cas de la variété polarisée développé juste avant. La construction procède en sens inverse : on commence par produire S comme surface K3, en prescrivant son réseau de Néron-Severi de telle sorte que les cônes nef et psef coïncident (notamment en faisant en sorte que S ne contienne pas de (-2)-courbe).

Ensuite, on réalise la variété S comme une quartique dans $\mathbb{P}^3$, en envoyant un diviseur premier ample B de S sur un diviseur premier A ample de $\mathbb{P}^3$. On a alors $Y = \mathbb{C}^4$ et $V = \mathbb{P}^3 : (\mathbb{P}^3, A)$ est notre variété polarisée.

On choisit ensuite une courbe Z dans S de telle sorte que la droite $[B] + t[Z]$ coupe le cône nef de S pour un $t = \lambda$ irrationnel. On pose comme précédemment $F = \mathcal{B}l_Z(\mathbb{P}^3)$, G le diviseur exceptionnel, H le tiré-en-arrière de A. Dans le plan du Néron-Severi de F engendré par $[H]$ et $[G]$, on a alors $s_{nef} = \lambda^{-1}$ et $s_{psef} = \frac{1}{4}$.

Comme s_{nef} est irrationnel, on montre que la dernière rupture de pente de la formule (2) (page précédente) n'est pas rationnelle, puis que φ_{v_0} n'est pas PL, et donc $-E$ n'admet pas de décomposition de Zariski dans le cadre relatif.

On notera que la construction avait été introduite par Cutkosky dans [Cut00] pour exhiber un exemple de courbe lisse de $\mathbb{P}^3$ dont la régularité de Castelnuovo-Mumford est irrationnelle — en effet, Cutkosky montre qu'elle vaut λ.

Pour aller plus loin, on pourrait se demander si la fonction est finalement PL au sens réel, et si on peut trouver des diviseurs D tels que $\varphi_{\|D\|_\pi}$ n'est pas PL même en autorisant des ruptures de pentes irrationnelles.

Par ailleurs, la réussite de l'étude du contre-exemple mène naturellement à se demander si d'autres situations seraient adaptées pour l'application de ce critère, ainsi qu'à une étude plus générale de la fonction $\varphi_{\|D\|_\pi}$. Dans ce cas, cela suggère un approfondissement de l'étude des fonctions sur les espaces de valuations, ouvrant éventuellement une interaction avec les espaces de Berkovich.

Conventions

- k désignera un corps algébriquement clos, généralement de caractéristique zéro.

- On parlera de variétés pour des schémas intègres séparés de type fini sur k. Les variétés et les sous-variétés seront donc toutes irréductibles.

- Une variété X sera dite régulière au point $x \in X$ si $\mathcal{O}_{X,x}$ est un anneau local régulier (on dit alors que x est un point lisse ou régulier de X, par opposition à un point singulier). Une variété dont tous les points sont réguliers sera appelée variété régulière (ou non-singulière). La notion de variété lisse, qu'on peut trouver par exemple dans [Har77, p.268], coïncide avec la notion de variété régulière lorsque nous sommes sur des corps algébriquement clos, ce qui sera toujours le cas ici.

- Une variété X sera dite normale au point $x \in X$ si l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est intégralement clos dans $K(X)$ (on dit alors que x est un point normal de X). Une variété dont tous les points sont normaux est appelée variété normale.

- On parlera d'*idéal sur* X pour parler de faisceau cohérent d'idéaux sur X.

- Lorsqu'on parlera de diviseur, on sous-entend un diviseur de Cartier. Lorsqu'on parlera de diviseur premier, on sous-entend un diviseur de Weil irréductible.

- Si V est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, un cône de V désignera un sous-ensemble de V stable par addition et par multiplication par un scalaire positif.

Première partie

Préliminaires

Cette partie a un double objectif : introduire les notions de base et de positivité sur les diviseurs et rappeler la problématique de la décomposition de Zariski et ses développements.

Pour le premier chapitre, les notions de positivité classique — ample, gros, nef, pseudo-effectif — seront réintroduites, ainsi que la notion d'équivalence numérique et le Néron-Severi. Après un rappel de ces notions classiques de positivité en situation situation absolue, on introduit les notions de positivité relative à un morphisme π projectif (π-ample, π-gros, π-nef, π-pseudo-effectif), ainsi que la notion de Néron-Severi relatif. On remarquera que la version absolue est un cas particulier de la version relative.

Dans le deuxième chapitre, nous reviendrons sur la décomposition de Zariski, les premiers résultats qui en découlent et les premières méthodes développées pour tenter de la généraliser en dimension plus grande que 2.

Chapitre 1

Diviseurs, fibrés en droites et positivité

Dans tout ce chapitre, X désignera une variété algébrique de dimension n, avec $n \geq 1$

1.1 Diviseurs et fibrés en droites

Nous allons commencer par passer en revue les notions de base concernant les diviseurs.

1.1.1 Diviseurs de Weil et de Cartier

Diviseurs de Weil

Définition 1.1.1. Un l-cycle sur X est une somme formelle (finie) de la forme :

$$\sum_i n_i D_i \tag{1.1}$$

où les n_i sont des entiers et les D_i des sous-variétés de dimension l.

Définition 1.1.2. Les $(n-1)$-cycles sont appelés *diviseurs de Weil*.

L'ensemble $\mathrm{WDiv}(X)$ des diviseurs de Weil est naturellement muni d'une structure de groupe abélien. Les sous-variétés de codimension 1 sont appelées diviseurs premiers ou diviseurs irréductibles.

Définition 1.1.3. Un diviseur de Weil D est dit *effectif* lorsque tous les coefficients sont positifs. L'ensemble des diviseurs de Weil effectifs est noté $\mathrm{WDiv}^+(X)$. On notera aussi $D \geq 0$ pour dire que D est effectif, et on a une relation d'ordre en définissant :

$$D \geq D' \iff D - D' \geq 0 \tag{1.2}$$

Cela revient à dire que tous les coefficients de D sont supérieurs à ceux de D'.

Jusqu'à la fin de la sous-section, on supposera que X est normale.

Soit D un diviseur premier. Comme une variété normale est lisse en codimension 1, son anneau local $\mathcal{O}_{X,\xi}$ au point générique de D est un anneau de valuation discrète. Ceci nous permet de définir une valuation sur l'ensemble des fonctions rationnelles de X, qu'on appellera *l'ordre d'annulation le long de* D (et qu'on notera ord_D). Pour une fonction rationnelle f, si $\mathrm{ord}_D(f)$ est strictement positif, on dit que f a un zéro le long de D. S'il est strictement négatif, on dit que f a un pôle le long de D.

Grâce au lemme suivant, on va pouvoir définir le diviseur de Weil associé à une fonction rationnelle.

Lemme 1.1.4. *Soit f une fonction rationnelle de X. Alors il n'y a qu'un nombre fini de diviseur premier D tel que* $\mathrm{ord}_D(f) \neq 0$.

Démonstration. En remarquant qu'une variété algébrique est un schéma noethérien, on applique [Har77, Lem. 6.1, p.131]. □

Définition 1.1.5. Soit f une fonction rationnelle sur X. On pose :

$$\mathrm{div}(f) = \sum_{\substack{D \text{ diviseur} \\ \text{premier de } X}} \mathrm{ord}_D(f) D. \tag{1.3}$$

De manière intuitive, le diviseur de Weil d'une fonction correspond aux zéros moins les pôles (comptés avec multiplicité). De tels diviseurs de Weil sont appelés *diviseurs de Weil principaux.*

Remarque 1.1.6.

- On a $\mathrm{div}(f) = \mathrm{div}(g)$ *si et seulement si* $f/g \in \mathcal{O}_X^*$.
- Pour f et g deux fonctions rationnelles de X, on vérifie aisément que $\mathrm{div}(fg) = \mathrm{div}(f) + \mathrm{div}(g)$ et $\mathrm{div}(f^{-1}) = -\mathrm{div}(f)$.
- L'ensemble des diviseurs principaux forme donc un sous-groupe de $\mathrm{WDiv}(X)$. Deux diviseurs égaux modulo un diviseur principal sont dit linéairement (ou rationnellement) équivalent (on notera $D \sim D'$). Cela forme une relation d'équivalence dont les classes forment le *groupe des classes* $\mathrm{Cl}(X)$.

Rappelons alors la proposition [Har77, Prop. 6.2, p.132] :

Proposition 1.1.7. *Si $X = \operatorname{Spec} A$ avec A factoriel (ainsi X est normale), alors tous les diviseurs sont principaux (*i.e $\mathrm{Cl}(X) = 0$*).*

Exemple 1.1.8.
- Sur $\mathbb{A}^n_k$, tous les diviseurs sont principaux d'après la proposition précédente.
- Sur $\mathbb{P}^n_k$, Cl est isomorphe à $\mathbb{Z}$ d'après [Har77, Prop. 6.4, p.132].

Diviseurs de Cartier

Comme X est une variété algébrique, le faisceau des fonctions méromorphes $\mathcal{M}_X$ est un faisceau localement constant, égal à $K(X)$, où $K(X)$ est le corps des fonctions rationnelles sur X.

Définition 1.1.9. Un diviseur de Cartier est une section globale du faisceau $\mathcal{M}_X^*/\mathcal{O}_X^*$. On note alors $\mathrm{Div}(X) := \Gamma(X, \mathcal{M}_X^*/\mathcal{O}_X^*)$ le groupe des diviseurs de Cartier.

Le sous-ensemble des diviseurs effectifs est défini par :

$$\mathrm{Div}^+(X) := \Gamma\big(X, (\mathcal{O}_X \cap \mathcal{M}_X^*)/\mathcal{O}_X^*\big). \tag{1.4}$$

Remarque 1.1.10.
- Pour que la définition ci-dessus soit manipulable, on utilise la représentation suivante : un diviseur de Cartier est représenté par un recouvrement ouvert U_i de X et sur chaque U_i, une fonction rationnelle $f_i \in K(U_i)^*$, avec $\frac{f_i}{f_j} \in \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)^*$. Deux représentations (U_i, f_i) et (V_j, g_j) représentent le même diviseur si on a, pour tout (i, j), $f_i/g_j \in \mathcal{O}_X^*$ sur $U_i \cap V_j$.
- Si $D = (U_i, f_i)$ avec tous les $f_i \in \mathcal{O}_X(U_i)^*$ alors D est trivial.
- Pour tout ouvert U de X, on peut définir $D|_U = (U_i \cap U, f_i)$ qui forme un diviseur sur le sous-schéma ouvert U.
- Si (U_i, f_i) et (V_j, g_j) sont deux diviseurs de Cartier, alors $(U_i, f_i) + (V_j, g_j) = (U_i \cap V_j, f_i g_j)$ et $-(U_i, f_i) = (U_i, f_i^{-1})$.
- Les diviseurs de Cartier effectifs peuvent être représentés sous la forme (U_i, f_i) avec les f_i *régulières* sur U_i. Ainsi la somme de deux diviseurs de Cartier effectif reste effective. On peut écrire $D \geq 0$ si D effectif et $D \geq D' \iff D - D' \geq 0$ défini une relation d'ordre compatible avec l'addition.
- À une fonction rationnelle f on peut associer le diviseur (X, f). Par abus de notation, on notera ce diviseur $\mathrm{div} f$, ce qui sera compatible avec la correspondance entre diviseurs de Cartier et diviseurs de Weil (voir après). Les

diviseurs de Cartier avec cette représentation sont appelés les diviseurs de Cartier principaux (on remarque que par construction, les diviseurs de Cartier sont localement principaux).

Définition 1.1.11. De même que précédemment, on dit que deux diviseurs de Cartier D et D' sont linéairement équivalents ($D \sim D'$) si $D - D'$ est principal.

Lien entre les diviseurs de Cartier et les diviseurs de Weil

Si X est une variété normale, il y a un plongement des diviseurs de Cartier dans les diviseurs de Weil :

$$\mathrm{Div}(X) \hookrightarrow \mathrm{WDiv}(X).$$

De plus, les diviseurs de Cartier principaux s'envoient sur les diviseurs de Weil principaux et les diviseurs de Cartier effectifs s'envoient sur les diviseurs de Weil effectifs. Si X est lisse, le plongement est un isomorphisme. On trouve la preuve dans [Har77, prop. 6.11 p.141].

$\mathbb{Q}$- et $\mathbb{R}$-diviseurs

On peut vouloir "compléter" l'ensemble des diviseurs en considérant des diviseurs avec des coefficients non-entiers. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$, on définit l'ensemble des $\mathbb{K}$-diviseurs par $\mathbb{K} \otimes \mathrm{Div}(X)$. Concrètement, D est un $\mathbb{K}$-diviseur s'il s'écrit sous la forme :

$$D = \sum_i a_i E_i$$

avec les E_i diviseurs de Cartier et les a_i dans $\mathbb{K}$. Pour parler des diviseurs de Cartier "classiques", on employera simplement le terme de diviseur. L'ensemble des $\mathbb{K}$-diviseurs de Cartier $\mathrm{Div}_{\mathbb{K}}(X)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et on a, si X est normale : $\mathrm{Div}(X) \subset \mathrm{Div}_{\mathbb{Q}}(X) \subset \mathrm{Div}_{\mathbb{R}}(X)$.

Pour D un $\mathbb{R}$-diviseur de Weil $\sum_i a_i E_i$, on notera :

$$\lfloor D \rfloor := \sum_i \lfloor a_i \rfloor E_i$$

le diviseur obtenu en prenant la partie entière des coefficients de D. Sur une variété normale X, on peut également le faire pour D un $\mathbb{R}$-diviseur de Cartier (en le voyant comme un $\mathbb{R}$-diviseur de Weil) mais $\lfloor D \rfloor$ n'est pas nécessairement Cartier — Il l'est en revanche si X est lisse.

1.1.2 Faisceaux d'idéaux, faisceaux inversibles et fibrés en droites

Soit $\mathcal{L}$ un $\mathcal{O}_X$-module. On définit le $\mathcal{O}_X$-module dual en posant $\mathcal{L}^\vee := \mathcal{H}om(\mathcal{L}, \mathcal{O}_X)$. On a un morphisme naturel de $\mathcal{O}_X$-modules : $\phi_{\mathcal{L}} : \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^\vee \to \mathcal{O}_X$ définit, pour U ouvert de X :

$$\phi_{\mathcal{L}}(U) : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(U) \otimes \mathcal{H}om\big(\mathcal{L}(U), \mathcal{O}_X(U)\big) & \longrightarrow & \mathcal{O}_X(U) \\ (s \otimes \psi) & \mapsto & \psi(s). \end{array}$$

On sait alors que $\mathcal{L}$ est localement libre de rang 1 *si et seulement si* $\mathcal{L}$ est cohérent et $\phi_{\mathcal{L}}$ est un isomorphisme. Dans ce cas, on dit alors que $\mathcal{L}$ est un *faisceau inversible* ou un *fibré en droites*, et $\mathcal{L}^\vee$ sera alors noté $\mathcal{L}^{-1}$.

Remarque 1.1.12. Dans la pratique, à isomorphisme près, un fibré en droites $\mathcal{L}$ va être défini par un recouvrement (U_i) de X avec $\mathcal{L}|_{U_i} \simeq_{\phi_i} \mathcal{O}_{U_i}$ et des fonctions de transitions $(f_{i,j}) \in \mathcal{O}_X^{-1}(U_i \cap U_j)$ telles que :

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j) & \longrightarrow & \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j) \\ s & \mapsto & f_{i,j} s. \end{array}$$

Définition 1.1.13. On définit le groupe de Picard comme le groupe des classes d'isomorphisme des fibrés en droites.

Exemple 1.1.14. À isomorphisme près, tous les fibrés en droites de $\mathbb{P}^n$ sont égaux à $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ pour un certain d (voir [Har77, Cor. 6.17, p.145]). D'où $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^n) \simeq \mathbb{Z}$.

On définit le fibré en droites associé à un diviseur D de la façon qui suit :

$$\mathcal{O}_X(D)(U) := \{f \in K(X) \mid \mathrm{div}(f|_U) + D|_U \geq 0\}.$$

Proposition 1.1.15. *Le faisceau $\mathcal{O}_X(D)$ défini juste au-dessus est un fibré en droites. Précisément, à partir d'une présentation (U_i, f_i) pour D, on a un recouvrement trivialisant $\mathcal{O}_X(D)$ avec pour fonction de transition $f_{i,j} = f_i/f_j$. Comme X est intègre (car une variété), la construction définit une correspondance bijective entre les classes d'équivalence linéaire des diviseurs de Cartier de X est les fibrés en droites de X (à isomorphisme près). De plus :*

(i) Pour D_1, D_2 diviseurs, $\mathcal{O}_X(D_1 - D_2) \simeq \mathcal{O}_X(D_1) \otimes \mathcal{O}_X^{-1}(D_2)$.

(ii) $D_1 \sim D_2$ si et seulement $\mathcal{O}_X(D_1) \simeq \mathcal{O}_X(D_2)$.

Grâce à l'intégrité de X, la correspondance ci-dessus se quotiente en un isomorphisme entre le groupe des classes de Cartier et le groupe de Picard.

Démonstration. [Har77, prop. 6.13, p.144]. □

Par définition, $H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$ est formé des fonctions rationnelles f de X telle que $\operatorname{div}(f) \geq -D$. L'ensemble $H^0(X, \mathcal{O}_X(D))$ sera noté simplement $H^0(X, D)$.

Remarque 1.1.16. Supposons X lisse. Pour un $\mathbb{R}$-diviseur de Cartier D, on peut aussi définir $\mathcal{O}_X(D)$ en posant comme au-dessus $\mathcal{O}_X(D)(U) := \{f \in K(X) \mid \operatorname{div}(f|_U) + D|_U \geq 0\}$. On obtient alors $\mathcal{O}_X(D) = \mathcal{O}_X(\lfloor D \rfloor)$ et $H^0(X, D) = H^0(X, \lfloor D \rfloor)$. L'hypothèse de lissité permet de garantir que $\lfloor D \rfloor$ est bien un diviseur de Cartier.

Pour un diviseur effectif, le fibré en droites s'interprète en terme d'idéal d'annulation.

Proposition 1.1.17. *Soit $D = (U_i, f_i)$ un diviseur effectif. On peut définir $\mathcal{I}_D$ le faisceau d'idéaux localement principaux vérifiant $\mathcal{I}_D(U_i) = f_i \mathcal{O}_X(U_i)$. Alors on a :*

$$\mathcal{I}_D \simeq \mathcal{O}_X(-D). \tag{1.5}$$

$\mathcal{I}_D$ est précisément le faisceau des fonctions s'annulant sur D.

Système linéaire d'un diviseur

Dans ce paragraphe, nous supposerons X propre (par exemple projective).

Soit D un diviseur (de Cartier). On définit $|D|$ le système linéaire de D comme :

$$\begin{aligned} |D| &:= \{D' \in \operatorname{Div}(X) \mid D' \geq 0 \text{ et } D' \sim D\} \\ &= \{D + \operatorname{div}(f) \mid f \in K(X) \text{ et } f \geq -D\}. \end{aligned}$$

La fonction div définit une surjection de $H^0(X, D) \setminus \{0\}$ vers $|D|$ qui se quotiente en un isomorphisme :

$$\mathbb{P}H^0(X, D) \simeq |D|.$$

Remarque 1.1.18. Pour f une fonction rationnelle avec $\operatorname{div} f \geq -D$, on prendra gare à ne pas confondre le diviseur de f vu comme une fonction rationnelle ($\operatorname{div} f$) et le diviseur de f vu comme une section globale de D ($\operatorname{div}_D f := \operatorname{div} f + D$). Les sections globales de D sont exactements les fonctions rationnelles f telles que $\operatorname{div}_D f \geq 0$.

1.2 Notions classiques de positivité

Soit X une variété projective. Nous introduisons ici les notions classiques de positivité sur les fibrés en droites et sur les diviseurs. Pour cette section, nous nous appuyerons essentiellement sur [Laz04, Chap. I].

Souvent, les notions se définissent sur les fibrés en droites L puis se transmettent aux diviseurs D en considérant $\mathcal{O}_X(D)$, le fibré en droites associé.

On utilisera la notion de nombre d'intersection qu'on trouve par exemple [Laz04, Subsection 1.1.C], ou dans [Ful98] pour plus de précision.

1.2.1 Équivalence numérique et Néron-Severi

Définition 1.2.1. Deux $\mathbb{R}$-diviseurs D_1, D_2 sont dits numériquement équivalent ($D_1 \equiv D_2$) si, pour toute courbe C irréductible, on a :

$$D_1 \cdot C = D_2 \cdot C.$$

Un $\mathbb{R}$-diviseur (ou diviseur) numériquement équivalent à 0 est dit numériquement trivial. L'ensemble $\mathrm{Num}_{\mathbb{R}}(X)$ (resp. $\mathrm{Num}(X)$) des $\mathbb{R}$-diviseurs (resp. diviseurs) numériquement triviaux est un sous-groupe de $\mathrm{Div}_{\mathbb{R}}(X)$ (resp. $\mathrm{Div}(X)$).

Si deux $\mathbb{R}$-diviseurs sont $\mathbb{R}$-linéairement équivalents, ils sont automatiquement $\mathbb{R}$-numériquement équivalents. En effet, l'intersection entre un diviseur et une courbe, par définition, ne dépend que de la classe d'isomorphisme du fibré en droites associé.

Comme les notions qui vont être introduites sont invariantes par équivalence numérique, plutôt que de travailler directement avec des diviseurs, nous travaillerons avec les classes de diviseur par équivalence numérique.

Définition 1.2.2. On définit le $\mathbb{R}$-*Néron-Severi* $\mathrm{N}^1(X)$ (resp. le Néron-Severi $\mathrm{NS}(X)$) comme l'ensemble des classes d'équivalence numérique des $\mathbb{R}$-diviseurs (resp. diviseurs) :

$$\mathrm{N}^1(X) := \mathrm{Div}_{\mathbb{R}}(X)/\mathrm{Num}_{\mathbb{R}}(X) \quad \text{et} \quad \mathrm{NS}(X) := \mathrm{Div}(X)/\mathrm{Num}(X).$$

On a alors $\mathrm{NS}(X)$ un réseau inclu dans $\mathrm{N}^1(X)$. $\mathrm{NS}(X)$ correspond aux points entiers de $\mathrm{N}^1(X)$.

Comme X est projective, le Néron-Severi est de dimension finie :

Proposition 1.2.3. *Le* $\mathbb{R}$-Néron-Severi *est un* $\mathbb{R}$-*espace vectoriel de dimension finie.*

Démonstration. [LN59]. □

On place alors sur $\mathrm{N}^1(X)$ la topologie naturelle induite par n'importe quelle norme (car toutes les normes sont équivalentes).

1.2.2 Ensemble-base, cône ample et cône nef

Dans le début de cette sous-section, nous ne supposons plus X projective.

Définition 1.2.4. Soit L un fibré en droites sur X et soit V un sous-espace vectoriel de $H^0(X, L)$. On considère le morphisme $V \otimes L^\vee \to \mathcal{O}_X$. Nous noterons son image $\mathfrak{b}(V, L)$.

Proposition 1.2.5. *En gardant les mêmes notations, $\mathfrak{b}(V, L)$ est un idéal de X (donc cohérent selon nos conventions). Il sera appelé l'idéal de base de (V, L).*

Démonstration. Rappelons que selon notre convention, les idéaux sur X sont cohérents. La difficulté est donc de montrer que $\mathfrak{b}(V, L)$ est cohérent. Si $\dim V < +\infty$, c'est clair car il est finiment engendré. Sinon, on va utiliser la nœthérianité de X. On peut écrire $V = \bigcup_i V_i$ avec les V_i de dimension finie et $V_i \subset V_{i+1}$. On obtient alors que $\mathfrak{b}(V, L) = \bigcup_i \mathfrak{b}(V_i, L)$, avec les $\mathfrak{b}(V_i, L)$ cohérents. Or, par noethérianité, on a localement pour i assez grand $\mathfrak{b}(V, L) = \mathfrak{b}(V_i, L)$. Ainsi, $\mathfrak{b}(V, L)$ est localement finiment engendré, donc cohérent. □

Quand $V = H^0(X, L)$, l'idéal de base est alors $\mathfrak{b}(H^0(X, L), L)$ qui sera noté simplement $\mathfrak{b}(L)$. On parle alors de l'idéal de base associé à L ou de l'idéal de base de L. Localement, sur une trivialisation, il s'interprète comme l'idéal engendré par les fonctions correspondant aux sections globales de L par la trivialisation.

De plus, l'idéal $\mathfrak{b}(V, L)$ définit un sous-schéma $\mathrm{Bs}(V, L)$. Dans le cas $V = H^0(X, L)$, on appelle ce sous-schéma l'ensemble-base de L (le lieu où toutes les sections globales de L s'annulent) et on le note $\mathrm{Bs}(L)$.

On définit l'ensemble-base d'un diviseur à partir de celui de son fibré en droites associé :

Définition 1.2.6. Soit D un diviseur sur X. On définit l'idéal de base de D par $\mathfrak{b}(D) := \mathfrak{b}\big(\mathcal{O}_X(D)\big)$ et l'ensemble-base de D par $\mathrm{Bs}(D) := \mathrm{Bs}\big(\mathcal{O}_X(D)\big)$.

Proposition 1.2.7. *Soit V un sous-espace vectoriel de $H^0(X, L)$ de dimension finie. L'évaluation des sections globales de V nous donne un morphisme :*

$$\Phi : X \smallsetminus \mathrm{Bs}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(V)^\vee \simeq \mathbb{P}^{\dim V - 1}.$$

Si V est de dimension finie, une fois fixée une base $(\sigma_1, \cdots, \sigma_r)$ de V, on obtient le morphisme suivant vers $\mathbb{P}^{r-1}$:

$$x \mapsto [\sigma_1(x), \cdots, \sigma_r(x)].$$

Le cas le plus simple est celui où l'ensemble-base est réduit à l'ensemble vide ($i.e$ $\mathfrak{b}(L) = \mathcal{O}_X$) :

Définition 1.2.8. On dit qu'un fibré L (respectivement un diviseur D) est sans point-base si $\mathrm{Bs}(L) = \varnothing$ *i.e* $\mathfrak{b}(L) = \mathcal{O}_X$ (respectivement $\mathrm{Bs}(D) = \varnothing$). C'est équivalent à ce que L (respectivement D) soit engendré par ses sections globales.

Ainsi, si D est sans point-base, pour tout point $x \in X$, on peut trouver une section globale $s \in H^0(X, D)$ telle que $s(x) \neq 0$. Quand X est projective, $H^0(X, D)$ est de dimension finie et l'application précédente devient un morphisme de X vers un espace projectif, dont le tiré-en-arrière de $\mathcal{O}(1)$ est L.

On suppose de nouveau X projective jusqu'à la fin de la section.

On dira qu'un fibré L est *semi-ample* s'il existe une puissance de L sans point-base. Cela prendra tout son sens avec la notion de fibré ample qui suit.

Notion de fibré ample

On peut à présent introduire la notion la plus classique de positivité : l'amplitude.

Définition 1.2.9. Soit L un fibré en droites sur X. On dit que L est *très ample* s'il existe un plongement fermé de X dans un espace projectif $\mathbb{P}$ tel que le tiré-en-arrière de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)$ soit isomorphe à L — le plongement est alors donné comme dans proposition 1.2.7. On dit que L est ample s'il existe une puissance de L (noté additivement mL) qui est très ample.

On dira alors qu'un diviseur est très ample si le fibré en droites associé est très ample. On dira qu'un diviseur est ample si le fibré en droites associé est ample, ou de manière équivalente, si une puissance du diviseur est très ample.

La proposition suivante montre que l'ensemble des diviseurs amples forment un cône :

Proposition 1.2.10. *L'ensemble des diviseurs ample est stable par somme (donc par multiplication par un entier positif).*

Démonstration. Cela se montre par exemple en utilisant le critère de Seshadri qu'on trouve en [Laz04, Thm. 1.4.13, p.54], qui se généralise ensuite pour les $\mathbb{R}$-diviseurs (voir proposition 1.2.13). □

On peut donc considérer, dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des diviseurs de Cartier, le cône engendré par les diviseurs amples. Cela permet d'étendre la notion d'amplitude aux $\mathbb{R}$-diviseurs. Précisément, on a la définition suivante :

Définition 1.2.11. Un $\mathbb{R}$-diviseur est ample s'il est combinaison linéaire de diviseurs amples par des réels positifs.

Remarque 1.2.12. Un $\mathbb{Q}$-diviseur D est ample *si et seulement si* pour $l \in \mathbb{N}^*$ assez divisible, lD est un diviseur ample.

Grâce au critère de Seshadri, on a une caractérisation numérique de l'amplitude :

Proposition 1.2.13. *Soit D un $\mathbb{R}$-diviseur sur X. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :*
(i) D est ample.
(ii) (critère de Seshadri) Il existe $\epsilon > 0$ tel que :

$$D \cdot C \geq \epsilon \mathsf{mult}_x(C)$$

pour tout point x et toute courbe C passant par x.

Démonstration. Grâce à [Laz04, thm. 1.4.13, p.54], l'équivalence est claire pour les diviseurs, donc aussi pour les $\mathbb{Q}$-diviseurs. L'implication est également aisé pour les $\mathbb{R}$-diviseurs. □

Cela permet d'en déduire aisément la propriété suivante :

Proposition 1.2.14. *L'ensemble des classes amples dans le Néron-Severi forme un cône ouvert.*

Notion de fibré nef

La deuxième notion de positivité introduite est celle de numériquement effectif ou *nef*. Elle correspond à l'adhérence de l'amplitude :

Définition 1.2.15. On dit qu'un $\mathbb{R}$-diviseur D est nef si pour toute courbe C irréductible, on a :

$$D \cdot C \geq 0$$

Le critère de Seshadri pour les diviseurs amples permet de déduire la proposition suivante :

Proposition 1.2.16. *Si $[D]$ est la classe d'un $\mathbb{R}$-diviseur nef, il existe $[D_n]$ une suite de classe de $\mathbb{R}$-diviseurs amples convergente vers $[D]$ dans $N^1_{\mathbb{R}}(X)$.*

Démonstration. Il suffit de prendre un diviseur D' ample et de considérer la suite $[D + \frac{1}{n}D']$. □

Pour que l'intersection de D avec toute courbe irréductible soit positive, il faut éviter les intersections des courbes et des points de l'ensemble-base.

Proposition 1.2.17. *Soit D un diviseur. On a (D ample) implique (D semi-ample) implique (D nef).*

Démonstration. Comme un fibré très ample induit un plongement de la variété dans un espace projectif, il est sans point-base, donc si un multiple mD est très ample, alors mD est sans point-base, puis D est semi-ample.

Soit D semi-ample, alors mD est sans point-base pour un certain m. Il y a alors un morphisme ϕ de X vers $Y \subset \mathbb{P}^r$ et $\phi^*(\mathcal{O}_Y(1)) = \mathcal{O}_X(D)$. Alors, il existe un diviseur très ample H sur Y tel que $\phi^*(H) = D$. Soit à présent une courbe C de X. Grâce à la formule de projection, on a alors :

$$D \cdot C = \frac{1}{m}(mD \cdot C) = \frac{1}{m}(H \cdot \phi_*(C))$$

qui est supérieur à zéro d'après le critère de Seshadri sur les diviseurs amples, car soit $\phi_*(C)$ est un point, soit une courbe irréductible. □

Une dernière remarque quant à la stabilité de nef par tiré-en-arrière :

Remarque 1.2.18. Grâce à la formule de projection, si $f : X' \to X$ est propre et D un diviseur nef sur X, alors $f^*(D)$ est nef sur X'.

Ensemble-base asymptotique et lieu non-nef

Tous les faits de cette sous-section peuvent être trouvés dans les deux premières sections de [BBP13].

À partir de l'ensemble-base, on définit deux notions qui nous aideront à étudier la positivité de notre diviseur : l'ensemble-base asymptotique et le lieu non-nef.

Définition 1.2.19. Soit D un diviseur. On définit $\mathbf{B}(D)$ l'ensemble-base asymptotique de D de la manière suivante :

$$\mathbf{B}(D) := \bigcap_{m \geq 1} \mathrm{Bs}(mD).$$

Par définition, on a immédiatement que $\mathbf{B}(kD) = \mathbf{B}(D)$ pour tout entier $k > 1$. Cela nous permet d'étendre la définition à tout $\mathbb{Q}$-diviseur.

On a de plus le fait suivant :

Proposition 1.2.20. *Soit D un $\mathbb{Q}$-diviseur. On a :*

$$\mathbf{B}(D) = \bigcap \{\mathrm{Supp} E \mid E \ \mathbb{R}\text{-}\textit{diviseur effectif}, \ E \sim D\}.$$

Cela nous permet d'étendre la définition de l'ensemble-base asymptotique à tout $\mathbb{R}$-diviseur.

Introduisons maintenant le lieu non-nef :

Définition 1.2.21. Soit D un $\mathbb{R}$-diviseur. On définit le lieu non-nef en posant :

$$\mathbf{B}_{-}(D) := \bigcup \mathbf{B}(D + A)$$

où A parcourt l'ensemble des $\mathbb{R}$-diviseurs amples.

On a déjà $\mathbf{B}_{-}(D) \subset \mathbf{B}(D)$. De plus, on a :

Proposition 1.2.22. *Soit D un $\mathbb{R}$-diviseur. On a :*

$$\mathbf{B}_{-}(D) = \varnothing \iff D \text{ nef.}$$

Remarque 1.2.23. Habituellement, le $\mathbf{B}_{-}$ défini précédemment est appelé le lieu de base diminué (ou restreint). Le lieu non-nef se définit plutôt comme :

$$\mathrm{NNef(D)} := \bigcup \{c_X(v) \mid v\|D\| > 0\}.$$

où v parcourt les valuations divisorielles. Les notations seront introduites dans les chapitres 3 et 5. A priori, on a seulement $\mathrm{NNef}(D) \subset \mathbf{B}_{-}(D)$ pour tout $\mathbb{R}$-diviseur D pseudo-effectif. Cependant, pour une variété projective lisse — le cas qui nous intéresse — on a l'égalité.

1.2.3 Volume, cône gros et cône psef

Notion de fibré gros

Définition 1.2.24. Soit L un fibré en droites sur X. On dit que L est très gros si l'application rationnelle $X \dashrightarrow \mathbb{P}(H^0(X, L)^\vee)$ est birationnelle sur son image. On dit que L est gros s'il existe mL une puissance de L telle que mL est très gros.

On définit alors naturellement les notions de diviseurs gros et très gros.

La proposition suivante, contenue dans [Laz04, Cor. 2.2.7 p.141], nous donne une caractérisation du fait d'être gros pour un diviseur :

Proposition 1.2.25. *Soit D un diviseur. D est gros* si et seulement s'*il existe un entier $m > 0$, un diviseur ample A et un diviseur effectif E tels que :*

$$mD \equiv A + E.$$

On en déduit alors aisément que l'ensemble des diviseurs gros est stable par somme et que le fait d'être gros ne dépend que de la classe numérique. De plus, on a également ample implique gros. Les classes grosses engendrent donc un cône dans $N^1(X)$, noté $\mathrm{Big}(X)$. On dira qu'un $\mathbb{R}$-diviseur est gros si sa classe est dans $\mathrm{Big}(X)$, ou, de manière équivalente :

Définition 1.2.26. Soit D un $\mathbb{R}$-diviseur. D est gros s'il est combinaison linéaire réelle positive de diviseurs gros.

Volume et dimension d'Iitaka

Le fait d'être gros peut s'interpréter en terme de croissance de la dimension des sections globales des multiples de L. La notion de gros sera alors relié au volume et à la dimension d'Iitaka.

La croissance de la dimension des sections est contrôlée polynomialement. Précisément, on a :

Proposition 1.2.27. *Soit L un fibré en droites sur une variété projective X. Alors, il existe $\kappa \in \{-\infty, 0, 1, \cdots, n\}$ et $C > 0$, tels que pour m assez grand et assez divisible :*

$$C^{-1} m^{\kappa} \leq \dim H^0(X, mL) \leq C m^{\kappa}.$$

L'hypothèse de divisibilité est nécessaire car on se restreint aux cas où $H^0(X, mL)$ est non réduit à zéro.

Un tel κ est clairement unique et est appelé la dimension d'Iitaka de L (on définit de même la dimension d'Iitaka d'un diviseur). Cela nous donne une autre manière de concevoir la notion de fibré gros :

Proposition 1.2.28. *Les fibrés gros sont exactement les fibrés de dimension d'Iitaka maximale (égale à $n = \dim X$).*

Démonstration. C'est une conséquence directe de [Laz04, Lem. 2.2.3, p.139]. □

On définit également le volume d'un fibré L, invariant numérique, non nul *si et seulement si* la dimension d'Iitaka est maximale *i.e* si le fibré est gros.

Définition 1.2.29. Pour L un fibré en droites sur une variété projective X de dimension n, on pose :

$$\mathrm{Vol}_X(L) := \limsup_m n! \frac{h^0(X, mL)}{m^n}. \tag{1.6}$$

On définit le volume d'un diviseur de Cartier D comme le volume de $\mathcal{O}_X(D)$.

Remarque 1.2.30. En utilisant le théorème d'approximation de Fujita, on peut montrer que la limite-sup est en réalité une limite — voir par exemple [Laz04, Ex. 11.4.7, p. 299 - II]. Cela montre également que pour un diviseur D gros, on a $H^0(X, lD) \neq \{0\}$ pour l assez grand.

Comme pour tout diviseur D et entier naturel l, on a $\mathrm{Vol}_X(lD) = l^n \mathrm{Vol}_X(D)$, on définit naturellement le volume d'un $\mathbb{Q}$-diviseur :

Définition 1.2.31. Si D est un $\mathbb{Q}$-diviseur, on définit le volume de D comme

$$\mathrm{Vol}_X(D) := \frac{\mathrm{Vol}_X(lD)}{l^n}$$

pour l un entier naturel tel que lD est un diviseur.

Comme le volume ne dépend que de la classe numérique, on peut considérer le volume d'une classe de $\mathbb{Q}$-diviseurs puis prolonger la notion de volume à tous les $\mathbb{R}$-diviseurs :

Proposition 1.2.32. *Considérons l'application de $\mathrm{N}^1_{\mathbb{Q}}(X)$ dans $\mathbb{R}$ qui a une $\mathbb{Q}$-classe associe son volume. Cette application se prolonge de manière unique en une fonction continue sur tout $\mathrm{N}^1(X)$. On définit ainsi le volume d'un $\mathbb{R}$-diviseur.*

Démonstration. [Laz04, Cor. 2.2.45, p.153]. □

Les $\mathbb{R}$-diviseurs gros sont alors exactement les $\mathbb{R}$-diviseurs avec un volume strictement positif. Comme le volume est continu, on obtient que $\mathrm{Big}(X)$ est un cône ouvert.

Enfin, le volume se conserve par tiré-en-arrière dans certains cas (donc la notion de gros également) :

Proposition 1.2.33. *Soit $f : X' \longrightarrow X$ un morphisme projectif birationnel et X, X' des variétés de dimension n. Alors, pour tout $\mathbb{R}$-diviseur D sur X, on a :*

$$\mathrm{Vol}_{X'}\big(f^*(D)\big) = \mathrm{Vol}_X(D).$$

Notion de fibré pseudo-effectif

De même que la notion de nef est l'adhérence de la notion d'ample, la notion de pseudo-effectif est l'adhérence de la notion de gros.

Soit α une classe dans le Néron-Severi. On dira qu'une classe est effective si elle admet au moins un représentant effectif.

D'abord, on remarque qu'une classe grosse est effective, et que l'ensemble des classes effectives sont dans l'adhérence de $\mathrm{Big}(X)$:

Proposition 1.2.34.

(i) Soit D un $\mathbb{R}$-diviseur gros. Il existe D' un $\mathbb{R}$-diviseur effectif tel que $D \equiv D'$.

(ii) Soit D un $\mathbb{R}$-diviseur effectif. Il existe une suite (D_n) de diviseurs gros telle que $([D_n])$ converge vers $[D]$.

Démonstration. (i) : Soit D un diviseur gros. Alors, un certain multiple lD a des sections globales, donc lD est linéairement équivalent à un diviseur effectif, donc D numériquement équivalent à un $\mathbb{Q}$-diviseur effectif. Comme un $\mathbb{R}$-diviseur gros est combinaison linéaire positive de diviseur gros, on en déduit qu'il est numériquement équivalent à un $\mathbb{R}$-diviseur effectif.

(ii) : Soit D un $\mathbb{R}$-diviseur effectif. Soit A un diviseur ample (qui existe car X est projective). Posons $D_n = \frac{1}{n}A + D$. Grâce à la proposition 1.2.25, on voit aisément que les D_n sont des $\mathbb{R}$-diviseurs gros. De plus, par définition, il est clair que $([D_n])$ converge vers $[D]$. □

Cependant, la notion d'effectivité n'est pas l'adhérence de la notion de gros car le cône effectif n'est pas fermé. On définit alors la notion de pseudo-effectif :

Définition 1.2.35. On définit le cône effectif $\mathrm{Eff}(X)$ comme le cône engendré par les classes des diviseurs effectifs. On définit le cône pseudo-effectif $\overline{\mathrm{Eff}}(X)$ comme l'adhérence du cône effectif.

Ainsi, si D un $\mathbb{R}$-diviseur, D est pseudo-effectif s'il existe une suite (D_n) de diviseurs effectifs telle que $([D_n])$ converge vers $[D]$. Le cône des classes pseudo-effectives $\overline{\mathrm{Eff}}(X)$ est bien l'adhérence de $\mathrm{Big}(X)$ grâce à la proposition précédente.

On a également une caractérisation de la pseudo-effectivité à l'aide du lieu non-nef (voir [BBP13]) :

Proposition 1.2.36. *Soit D un $\mathbb{R}$-diviseur. On a :*

$$\mathbf{B}_{-}(D) \neq X \iff D \text{ pseudo-effectif.}$$

1.2.4 Mobile et nef en codimension 1

On définit une dernière notion de positivité, plus faible que nef : nef en codimension 1.

D'abord, définissons la notion de mobile :

Définition 1.2.37. Soit D un diviseur sur X. On dit que D est mobile s'il n'y a pas de diviseur inclus dans $\mathrm{Bs}(D)$.

On définit alors le cône nef en codimension 1, $\mathrm{Nef}^1(X)$, comme le cône fermé engendré par les classes de diviseurs mobiles. On dit qu'un diviseur est nef en codim 1 s'il est dans ce cône.

Proposition 1.2.38. *On a* $\mathrm{Nef}^1(X) \subset \overline{\mathrm{Eff}}(X)$.

Démonstration. Soit D un diviseur mobile. Comme $\mathrm{Bs}(D)$ est un fermé de Zariski ne contenant aucun diviseur, il est de codimension au moins 2. Ainsi, D possède une section globale non-nulle, donc $|D| \neq \varnothing$, et il existe alors un diviseur effectif linéairement équivalent à D. Ainsi, D est pseudo-effectif, puis comme l'ensemble des classes pseudo-effectives est un cône fermé, le cône fermé engendré par les classes de diviseurs mobiles est dedans, d'où le résultat. □

1.2.5 Les différents cônes dans le Néron-Severi

Récapitulons alors les cônes et leurs inclusions :

Proposition 1.2.39. *On a les propriétés suivantes :*

- $\mathrm{Big}(X) = \mathrm{Int}\big(\mathrm{Eff}(X)\big)$ *et* $\overline{\mathrm{Big}(X)} = \overline{\mathrm{Eff}}(X)$.
- $\mathrm{Amp}(X) = \mathrm{Int}\big(\mathrm{Nef}(X)\big)$ *et* $\overline{\mathrm{Amp}(X)} = \mathrm{Nef}(X)$.

De plus, comme ample implique gros, on a ;

$$\mathrm{Amp}(X) \subset \mathrm{Big}(X) \text{ et } \mathrm{Nef}(X) \subset \mathrm{Nef}^1(X) \subset \overline{\mathrm{Eff}}(X)$$

1.2.6 Les différents seuils : psef, nef et nef en codim 1

Soit L un fibré en droites ample et $Z \subset X$ une sous-variété, d'idéal I_Z. On définit $\mu : \tilde{X} \to X$ l'éclatement de Z dans X, et E le diviseur exceptionnel de l'éclatement.

Définition 1.2.40. On pose :

- $s_{nef}(L, Z) := \sup\{t \geq 0 \mid \mu^* L - tE \text{ nef}\}$
- $s_{psef}(L, Z) := \sup\{t \geq 0 \mid \mu^* L - tE \text{ psef}\}$
- $s^{(1)}_{nef}(L, Z) := \sup\{t \geq 0 \mid \mu^* L - tE \text{ nef en codim } 1\}$

On donne à présent une caractérisation séquentielle du seuil nef et psef.

Proposition 1.2.41.

- *On a :* $0 \leq s_{nef}(L, Z) \leq s^{(1)}_{nef}(L, Z) \leq s_{psef}(L, Z)$.
- *Pour* $d \in \mathbb{N}$, *on pose* $m_d := \max\{m \geq 1 \mid \mathcal{O}_X(dL) \otimes I_Z^m$ *globalement engendré*$\}$. *Alors* m_d/d *tend vers* $s_{nef}(L, Z)$.

- *Pour $d \in \mathbb{N}$, on pose $m_d := \max\{m \geq 1 \mid \mathcal{O}_X(dL) \otimes I_Z^m \neq \{0\}\}$. Alors m_d/d tend vers $s_{psef}(L, Z)$.*

Démonstration. Comme (nef) implique (nef en codim 1) implique (pseudo-effectif), le premier point est clair.

Ensuite, remarquons grâce à [CEL01, Lem. 3.3, p.15] que pour m assez grand, $\mu_*\big(\mathcal{O}_X(-mE)\big) = I_Z^m$. Ainsi, pour m assez grand, $\mathcal{O}_X(dL) \otimes I_Z^m$ est globalement engendré (resp. a des sections globales non-nulles) *si et seulement si* $d\mu^*L - mE$ est globalement engendré (resp. a des sections globales non-nulles).

Dans les deux cas, m_d est sur-additive donc m_d/d converge vers son sup. Si p/q est un rationnel strictement plus petit que le seuil alors $\mu^*L - \frac{p}{q}E$ est ample (resp. gros) donc $q\mu^*L - pE$ est globalement engendré (resp. a des sections globales non-nulles), d'où $p \leq m_q$ par définition puis $p/q \leq m_q/q \leq \sup m_d/d$ donc le seuil est plus petit que la limite de m_d/d, ce qui donne une première inégalité. Par ailleurs, par définition, $d\mu^*L - m_dE$ est globalement engendré (resp. a des sections globales non-nulles) donc $\mu^*L - \frac{m_d}{d}E$ est nef (resp. pseudo-effectif) donc m_d/d est plus petit que le seuil pour tout d, donc sa limite aussi. Cela donne l'inégalité inverse.

□

1.2.7 Dualité diviseurs-courbes

Définition 1.2.42. Soit X une variété projective. Soit $Z_1(X)_{\mathbb{R}}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des 1-cycles de X, c'est-à-dire les $\mathbb{R}$-combinaisons linéaires formelles de courbes irréductibles.

Deux 1-cycles γ_1 et γ_2 sont dits numériquement équivalents si, pour tout diviseur D, $(D \cdot \gamma_1) = (D \cdot \gamma_2)$.

On pose alors $\mathrm{N}_1(X)$ le quotient de $Z_1(X)_{\mathbb{R}}$ par l'équivalence numérique.

Proposition 1.2.43. *On a une application naturelle :*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{N}^1(X) \times \mathrm{N}_1(X) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ ([D], [K]) & \mapsto & (D \cdot K). \end{array}$$

De plus, on a un $\mathbb{R}$-isomorphisme entre $\mathrm{N}^1(X)$ et $\big(\mathrm{N}_1(X)\big)^\vee$: les deux espaces sont duaux.

Démonstration. On regarde l'injectivité des applications associées et on utilise la dimension finie de $\mathrm{N}^1(X)$. □

On place alors sur $\mathrm{N}_1(X)$ la topologie standard d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

Définition 1.2.44. On définit le cône des courbes comme le cône engendré par les classes de courbes, ou de manière équivalente le cône des classes des 1-cycles effectifs :

$$NE(X) := \left\{ \sum a_i[C_i] \mid C_i \text{ irréductible et } a_i \in \mathbb{R}_+ \right\}.$$

Sa fermeture $\overline{NE}(X)$ est appelé le cône fermé des courbes de X.

Proposition 1.2.45. *$\overline{NE}(X)$ est le dual de* $\mathrm{Nef}(X)$ *:*

$$\overline{NE}(X) = \{[K] \in N_1(X) \mid (K.D) \geq 0 \quad \forall [D] \in \mathrm{Nef}(X)\}.$$

Démonstration. On utilise la dualité sur les cônes, voir [Laz04, Prop. 1.4.28 p.77]. □

1.2.8 Néron-Severi sur une surface

Sur les surfaces, les notions de diviseur irréductible et de courbe irréductible coïncident.

Proposition 1.2.46. *Soit S une surface projective lisse. Alors on a :*
(i) $\mathrm{N}_1(S) = \mathrm{N}^1(S)$.
(ii) $NE(S) = \mathrm{Eff}(S)$ *et* $\overline{NE} = \overline{\mathrm{Eff}}(S)$.
(iii) $\mathrm{Nef}(S) \subset \overline{\mathrm{Eff}}(S)$.
(iv) Si $C^2 \geq 0$ pour toute courbe irréductible C, alors $\mathrm{Nef}(S) = \overline{\mathrm{Eff}}(S)$.

Démonstration. [Har77, V.1]. □

Cette proposition sur les surfaces nous sera utile lorsque nous étudierons la situation mise en avant par Cutkosky (voir sous-section 7.2.1).

L'ensemble $\mathrm{N}^1(S)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de rang fini, qui est ici muni d'une forme $\mathbb{R}$-bilinéaire symétrique π_q, qui, à deux diviseurs, (qui sont aussi des 1-cycles) associe leur intersection. Si on considère q la forme quadratique associée et qu'on se restreint aux points entiers $\mathrm{N}^1(S)_{\mathbb{Z}}$, on obtient une structure $\left(\mathrm{N}^1(S)_{\mathbb{Z}}, q\right)$, appelée un réseau quadratique (cf. 7.1.2).

Proposition 1.2.47 (Théorème d'indice de Hodge)**.** *La forme d'intersection sur le Néron-Severi d'une surface est de signature* $(1, \rho - 1)$ *(avec ρ la dimension du Néron-Severi).*

Démonstration. [Har77, Rem. 1.9.1, chap. V, p.364]. □

1.3 Notions de positivité relative

Nous allons maintenant, en nous inspirant des notions de positivité absolue, définir des notions de positivité relative. On pourra trouver ces notions développées dans [Nak04, II.5.d, p.67-72] ou plus sommairement dans [Les16, Sec. 2, p.2-4].

Soit X, Y des variétés algébriques telles qu'on ait un morphisme projectif et surjectif $\pi : X \to Y$. On va à présent redéfinir toutes les notions dans le cas relatif. L'idée va être de remplacer dans les définitions l'espace vectoriel $H^0(X, L)$ par $\pi_* L$.

On pourra à chaque fois remarquer que le cas absolu est un cas particulier du cas relatif en prenant $Y = \mathrm{Spec}(k)$ et π la projection sur $\mathrm{Spec}(k)$.

Dans toute cette section, nous considèrerons un fibré en droites L sur X.

1.3.1 Idéal de base relatif

Définition 1.3.1. On appelle $\pi_* L$ le faisceau des sections (π)-relatives de L. On considère alors le morphisme d'évaluation :

$$\pi^* \pi_* L \otimes L^\vee \to \mathcal{O}_X.$$

Posons $\mathfrak{b}_\pi(L)$ l'image de ce morphisme. On l'appelle l'idéal de base de L relativement à π.

Remarque 1.3.2. Si $Y = \mathrm{Spec}(k)$, $\pi_* L = H^0(X, L)$ correspond exactement aux sections globales de L. On retrouve alors $\mathfrak{b}_\pi(L) = \mathfrak{b}(L)$. Dans le cas général, il y a plus de sections globales relatives que de sections globales absolues.

Proposition 1.3.3. *Si Y est affine, $\mathfrak{b}(L) = \mathfrak{b}_\pi(L)$.*

Démonstration. Pour montrer cela, on utilise le fait que tout faisceau cohérent sur une variété affine est globalement engendré. Ainsi, $\pi_* L$ est engendré par ses sections globales, d'où $\mathfrak{b}_\pi(L)$ est l'image du morphisme d'évaluation

$$H^0(Y, \pi_* L) \otimes L^\vee \to \mathcal{O}_X$$

ce qui nous permet de conclure car $H^0(Y, \pi_* L) = H^0(X, L)$. □

On peut à présent définir la notion relative de fibré en droites globalement engendré.

Définition 1.3.4. On dit qu'un fibré en droites L est π-globalement engendré si la flèche $\pi^* \pi_* L \to L$ est surjective. Grâce à la proposition précédente, c'est équivalent à dire que, pour tout U ouvert affine de Y, $L|_{\pi^{-1}(U)}$ est globalement engendré.

1.3.2 Équivalence linéaire relative

On voudrait une équivalence linéaire relative la plus large laissant invariant l'idéal de base.

Proposition 1.3.5. *Soit L un fibré en droites et G un diviseur sur Y. Alors :*

$$\mathfrak{b}_\pi(L) = \mathfrak{b}_\pi\big(L \otimes \mathcal{O}_X(\pi^*(G))\big).$$

Démonstration. On a $\pi_*\big(L \otimes \mathcal{O}_X(\pi^*(G))\big) = \pi_*(L) \otimes \mathcal{O}_Y(G)$ par la formule de projection. Ensuite, on a :

$$\pi^*\pi_*\big(L \otimes \mathcal{O}_X(\pi^*(G))\big) = \pi^*\pi_* L \otimes \mathcal{O}_X(\pi^*(G))$$

car $\pi^*(\mathcal{O}_Y(G)) = \mathcal{O}_X(\pi^*(G))$. On obtient alors :

$$\begin{aligned} & \pi^*\pi_*\big(L \otimes \mathcal{O}_X(\pi^*(G))\big) \otimes \big(L \otimes \mathcal{O}_X(\pi^*(G))\big)^\vee \\ = \; & \pi^*\pi_* L \otimes \mathcal{O}_X(\pi^*(G)) \otimes L^* \otimes \mathcal{O}_X(\pi^*(G))^\vee \\ = \; & \pi^*\pi_* L \otimes L^\vee \end{aligned}$$

d'où $\mathfrak{b}_\pi(L)$ et $\mathfrak{b}_\pi\big(L \otimes \mathcal{O}_X(\pi^*(G))\big)$ sont égaux.

□

On en déduit alors que pour D un diviseur sur X et E un diviseur sur Y, on a $\mathfrak{b}_\pi(D + \pi^*E) = \mathfrak{b}_\pi(D)$.

On va définir à présent la π-équivalence linéaire. Comme le suggère la proposition précédente, on va définir les diviseurs linéairement triviaux comme la somme d'un diviseur associé à une fonction rationnelle et le tiré-en-arrière d'un diviseur provenant de la base.

Définition 1.3.6. Un diviseur D sera dit π-trivial linéairement s'il existe une fonction rationnelle f sur X et un diviseur E sur Y tels que :

$$D = \operatorname{div}(f) + \pi^*E.$$

Deux diviseurs D_1, D_2 sont dits π-linéairement équivalents si leur différence est π-triviale linéairement. On notera $D_1 \sim_\pi D_2$.

Définition 1.3.7. On définit le système linéaire relatif de D par :

$$|D|_\pi := \{D' \text{ diviseur effectif sur } X \mid D' \sim_\pi D\}.$$

Remarque 1.3.8.

— Il y a plus de diviseurs triviaux linéairement au sens relatif qu'au sens absolu. Ainsi, l'équivalence linéaire est moins fine dans le cas relatif que dans le cas absolu. On a alors $|D| \subset |D|_\pi$.

— On peut définir la $\mathbb{R}$- (resp. $\mathbb{Q}$-)équivalence linéaire relative $\sim_\pi^{\mathbb{R}}$ (resp. $\sim_\pi^{\mathbb{Q}}$) en définissant les $\mathbb{R}$-(resp. $\mathbb{Q}$-)diviseurs π-triviaux linéairement en tensorisant les diviseurs π-triviaux linairement par $\mathbb{R}$ (resp. par $\mathbb{Q}$).

Nous n'avons pas un isomorphisme comme $|D| \simeq \mathbb{P}\Big(H^0(X, D)^\vee\Big)$ dans le cas relatif. Néanmoins, on a quand même la description suivante :

Proposition 1.3.9. *Supposons Y quasi-projective et soit D un diviseur. On a :*

$$\begin{aligned} |D|_\pi &= \bigcup_{G \text{ diviseur de } Y} |D + \pi^* G| \\ &= \{\mathrm{div}(s) \mid G \text{ diviseur de } Y \text{ et } s \in H^0(X, D + \pi^* G)\}. \end{aligned}$$

Démonstration. Remarquons déjà qu'on a par définition :

$$\bigcup_{G \text{ diviseur de } Y} |D + \pi^* G| = \{\mathrm{div}(s) \mid G \text{ diviseur de } Y \text{ et } s \in H^0(X, D + \pi^* G)\}.$$

Ensuite, montrons que $|D|_\pi = \bigcup_{G \text{ diviseur de } Y} |D+\pi^* G|$. Soit E un diviseur effectif. E est dans $|D|_\pi$ *ssi* $E \sim D+\pi^* G$ pour un certain diviseur G de Y *ssi* $E \in \bigcup_{G \text{ diviseur de } Y} |D + \pi^* G|$, d'où le résultat. □

1.3.3 Équivalence numérique relative

On définit l'équivalence numérique relative en ne prenant que les courbes irréductibles π-verticales, c'est-à-dire incluses dans une fibre de π (on définira numériquement trivial et numériquement effectif dans le cas relatif de la même manière).

Définition 1.3.10. Soit D_1 et D_2 deux $\mathbb{R}$-diviseurs de X. D_1 et D_2 sont dits π-numériquement équivalents ($D_1 \equiv_\pi D_2$) si, pour toute courbe irréductible π-verticale C, on a :

$$D_1 \cdot C = D_2 \cdot C.$$

Le nombre d'intersection existe car la courbe est verticale et que π est projectif. On va alors définir le Néron-Severi relatif :

Définition 1.3.11. On définit le Néron-Severi relatif (qu'on va écrire $\mathrm{N}^1(X/Y)$) en quotientant l'ensemble des $\mathbb{R}$-diviseurs par les $\mathbb{R}$-diviseurs numériquement triviaux (relativement à π).

De même que dans le cas absolu, grâce à la projectivité de π, on a :

Proposition 1.3.12. $\mathrm{N}^1(X/Y)$ *est de dimension finie.*

1.3.4 Notions de positivité relative

Cône ample et nef relatif

On va définir l'amplitude relative de la façon suivante :

Définition 1.3.13. Un $\mathbb{R}$-diviseur D sur X sera dit π-ample si la restriction D_y à toute fibre X_y est ample.

On a également un critère de Seshadri pour l'amplitude relative :

Proposition 1.3.14. *Soit D un $\mathbb{R}$-diviseur. Alors D est π-ample si et seulement si la condition suivante est vérifiée :*
il existe $\epsilon > 0$ tel que

$$D \cdot C \geq \epsilon \mathsf{mult}_x(C)$$

pour tout point x et toute courbe C verticale passant par x.

On voit alors que la π-amplitude ne dépend que de la classe numérique relative, puis :

Proposition 1.3.15. *L'ensemble* $\mathrm{Amp}(X/Y)$ *des classes π-amples forme un cône ouvert de* $\mathrm{N}^1(X/Y)$.

On définit à présent la notion de diviseur relativement nef :

Définition 1.3.16. Soit D un $\mathbb{R}$-diviseur. D est π-nef si $D \cdot C \geq 0$ pour toute courbe C irréductible et π-verticale.

On a la proposition correspondante à celle dans le cas absolu :

Proposition 1.3.17. *L'ensemble* $\mathrm{Nef}(X/Y)$ *des classes nef relative est l'adhérence de* $\mathrm{Amp}(X/Y)$ *(et est donc un cône fermé).*

Cône gros et pseudo-effectif relatif

On considère un fibré en droites L de X. Comme son image directe par π est sans torsion, elle est localement libre sur un ouvert dense. Le rang de $\pi_* L$ sur cet ouvert dense est appelé rang générique et sera noté $\mathrm{rg}(\pi_*(L))$. On dira qu'une propriété est vraie pour tout $y \in Y$ général si elle est vraie sur un ouvert dense de Y.

On définit le volume relatif de la façon suivante :

Définition 1.3.18. En posant $\dim \pi$ la dimension de la fibre générique, on définit le volume relatif par :

$$\mathrm{Vol}_{X/Y}(L) := \limsup_m (\dim \pi)! \frac{\mathrm{rg}(\pi_* mL)}{m^{(\dim \pi)}}. \tag{1.7}$$

On définit le volume d'un diviseur de Cartier D comme le volume de $\mathcal{O}_X(D)$.

De même que dans le cas absolu, le volume ne dépend que de la classe numérique relative. Par homogonéité, on peut associer à chaque $\mathbb{Q}$-classe un volume.

Cette application s'étend par continuité aux $\mathbb{R}$-classes, à tout $\mathrm{N}^1(X/Y)$, ce qui nous permet de définir le volume relatif de tout $\mathbb{R}$-diviseur.

Proposition 1.3.19. *Soit D un $\mathbb{Q}$-diviseur. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\mathrm{rg}\, \pi_*(mD)$ *est à croissance maximale* i.e *en* $m^{(\dim \pi)}$ i.e $\mathrm{Vol}_{X/Y}(L) > 0$.

(ii) Il existe A un $\mathbb{Q}$-diviseur π-ample et E un $\mathbb{Q}$-diviseur effectif tels que $D \equiv_\pi A + E$.

(iii) $D|_{X_y}$ est gros pour tout $y \in Y$ général.

Définition 1.3.20. Soit D un diviseur. Si une des assertions de la proposition précédente est vérifiée, on dit que D est π-gros. Soit D un $\mathbb{R}$-diviseur. On dit que D est π-gros s'il est $\mathbb{R}_+$-combinaison linéaire de diviseurs π-gros.

C'est équivalent à $\mathrm{Vol}_{X/Y}(D)$ non-nul (après l'avoir prolongé).

Pour que la pseudo-effectivité relative soit l'adhérence de la notion de relativement gros, on va la définir de la manière suivante :

Définition 1.3.21. Soit D un $\mathbb{R}$-diviseur. D est π-psef si $D|_{X_y}$ est pseudo-effectif pour $y \in Y$ général.

On obtient alors les mêmes liens entre les cônes relativement gros et psef dans le cas relatif que dans le cas absolu.

Enfin, si Y est quasi-projective, π-gros est bien l'intérieur du cône effectif dans le Néron-Séveri relatif :

Proposition 1.3.22. *Si Y est quasi-projective, tout diviseur π-gros est π-linéairement équivalent à un $\mathbb{Q}$-diviseur effectif.*

Démonstration. Soit D un diviseur π-gros. On sait qu'une puissance de D a des sections relatives *i.e* $\pi_*(mD) \neq \{0\}$ pour m assez grand. On sait qu'il existe un diviseur ample H sur Y, ce qui nous permet de dire que pour m suffisamment grand, $\pi_*(mD) + mH$ a des sections globales non-nulles. Par la formule de projection, cela donne que $mD + m\pi^*H$ a une section globale non-nulle s, et posons $E = \frac{1}{m}\mathrm{div}s$. mE est effectif, et linéairement équivalent à $mD + m\pi^*H$ donc E est π-linéairement équivalent à D. $\square$

Remarque 1.3.23. On en déduit par additivité que tout $\mathbb{R}$-diviseur π-gros est π-linéairement équivalent à un $\mathbb{R}$-diviseur effectif.

Chapitre 2

La décomposition de Zariski

Dans ce chapitre, on suppose k de caractéristique 0.

Un des problèmes de la géométrie algébrique et de l'étude des variétés est l'étude de la finitude de l'algèbre $R(L) := \bigoplus_m H^0(mL)$ pour un fibré en droites L ou $R(D) := \bigoplus_m H^0(mD)$ pour un $\mathbb{R}$-diviseur D sur X projective. Grâce à la remarque 1.1.16, sur une variété lisse, on a $H^0(mD) = H^0(m\lfloor D \rfloor)$ et $R(D) := \bigoplus_m H^0(m\lfloor D \rfloor)$.

Pour obtenir la finitude de $R(D)$, on a notamment le fait suivant, présent dans [Pro03, Prop. 3.2, p.9] : pour un diviseur D sur une variété normale et projective sur k, si $\mathrm{Bs}(D) = \varnothing$ alors $R(D)$ est finiment engendré.

Ainsi, pour un diviseur D, l'idée va être d'essayer de se ramener à un diviseur plus positif (ample, nef, sans point-base...) pour mieux étudier la finitude de $R(D)$.

2.1 Définitions et premières remarques

Soit $\mathbb{K}$ un corps intermédiaire entre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$.

Définition 2.1.1. Soit D un $\mathbb{K}$-diviseur gros sur une variété X projective lisse. On dit que D admet une $\mathbb{K}$-décomposition de Zariski *sur* X s'il existe des $\mathbb{K}$-diviseurs P et N sur X tels que :

(i) $D = P + N$.

(ii) P est nef et N est effectif.

(iii) Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, l'inclusion $H^0(X, mP) \subset H^0(X, mD)$ est une égalité.

Quand $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on parle simplement de décomposition de Zariski sur X. On verra par la suite qu'une telle décomposition est unique.

Si D admet une décomposition de Zariski sur X ($D = P + N$), on obtient bien $R(D) = R(P)$. On s'est donc ramené à un diviseur P plus positif. Par commodité

pour le travail qui va suivre, on se limitera principalement aux $\mathbb{R}$-diviseurs gros. Dans le cas absolu, on peut étendre sans trop de difficultés le travail aux diviseurs pseudo-effectifs, mais ce n'est pas possible dans le cas relatif.

En général, une décomposition de Zariski sur X peut ne pas exister. Une variante plus souple consiste à s'autoriser les transformations birationnelles. Précisément :

Définition 2.1.2. On dit qu'un $\mathbb{R}$-diviseur D sur X projective admet une décomposition de Zariski s'il existe $\mu : X' \to X$ un morphisme birationnel propre avec X' lisse tel que $\mu^*(D)$ admet une décomposition de Zariski sur X'.

Comme nous sommes en caractéristique zéro, grâce à la résolution des singularités, nous avons toujours l'existence d'une variété X' projective lisse et d'un morphisme birationnel propre $X' \to X$.

2.2 Décomposition de Zariski en dimension 2

Zariski montre dans [Zar62] le résultat suivant pour les seuls diviseurs effectifs, que Fujita va ensuite étendre aux diviseurs pseudo-effectifs dans [Fuj79, Thm. 1.12, p.108] :

Théorème 2.2.1. *Soit D un $\mathbb{K}$-diviseur pseudo-effectif sur une surface X projective lisse. Alors, il existe une* unique *décomposition de D en $\mathbb{K}$-diviseurs P et N :*

$$D = P + N \tag{2.1}$$

tel que

(i) P est nef et N est effectif.

(ii) N est soit nul, soit sa matrice d'intersection $(C_i \cdot C_j)$ est définie négative (en notant $C_1, \cdots, C_k$ les composantes irréductibles de N).

(iii) $P \cdot C = 0$ pour tout C composante irréductible de N.

La preuve de ce résultat sera détaillée au chapitre 8. Comme cette décomposition est a priori distincte de celle introduite en début de chapitre, on l'appellera la décomposition de Zariski-Fujita.

Corollaire 2.2.2. *Tout $\mathbb{Q}$-diviseur pseudo-effectif sur une surface projective lisse a un volume rationnel.*

Démonstration. On écrit $D = P + N$. Comme on le verra à la proposition 2.3.4, on a $H^0(X, mD) = H^0(X, mP)$ pour tout m, d'où $\mathrm{Vol}_X(D) = \mathrm{Vol}_X(P) = P^2$ car P est nef. Comme P est un $\mathbb{Q}$-diviseur, on a le résultat. □

C'est ce qui nous avait amené à étudier la construction de Cutkosky, pour laquelle Küronya exhibait dans [Kur03] un diviseur au volume irrationnel.

Néanmoins, il reste à voir que la décomposition introduite par Zariski correspond bien à la décomposition que nous avons définie avant. C'est bien le cas ; nous le verrons à la proposition 2.3.4. On peut déjà montrer la proposition suivante :

Proposition 2.2.3. *Soit D un $\mathbb{R}$-diviseur pseudo-effectif sur X surface projective lisse, et soit $D = P + N$ sa décomposition de Zariski-Fujita. Alors, P est le plus grand des diviseurs nef inférieurs ou égaux à D.*

Démonstration. Soit P' un diviseur nef avec $P' \leq D$. Notons C_i les composantes irréductibles de N. Déjà, on remarque que $C_i \cdot (P - P') = -C_i \cdot P' \leq 0$.

D'un autre côté, écrivons :

$$P - P' = (D - P') - N = F_1 - N_1$$

où F_1 et N_1 sont les deux diviseurs effectifs obtenus en simplifiant les composantes communes de $(D - P')$ et N. On obtient alors que F_1 et N_1 n'ont pas de composante commune (donc par positivité de leurs coefficients, $F_1 \cdot N_1 \geq 0$) et que les composantes de N_1 sont parmi les C_i. On a alors :

$$0 \geq N_1 \cdot (P - P') = N_1 \cdot F_1 - N_1^2.$$

Or $F_1 \cdot N_1 \geq 0$ et $N_1^2 \leq 0$ car la matrice d'intersection des C_i est négative. On a donc $N_1^2 = 0$, puis comme la matrice d'intersection des C_i est définie négative, $N_1 = 0$ et $(P - P') = F_1 \geq 0$ d'où le résultat. □

Ainsi, dans le cas des surfaces, la décomposition de Zariski est la décomposition $D = P + N$ avec P nef, N effectif, P maximal et N minimal.

Remarque 2.2.4. Cela montre que, si D est effectif, P est nécessairement effectif. En effet, 0 est un diviseur nef inférieur ou égal à D, donc $P \geq 0$.

2.3 Partie mobile et partie fixe

La preuve de Zariski ainsi que l'existence d'une décomposition ne s'étend pas aux variétés de dimension supérieure. On va, en s'inspirant de la dimension 2, chercher à décomposer $D = P + N$ avec N effectif, P nef ou quelque chose s'en rapprochant, et N le plus petit possible. Quitte à effectuer une résolution des singularités, on peut supposer que X est *lisse*. On commence par décomposer notre diviseur en partie mobile et partie fixe.

Définition 2.3.1. Soit D un $\mathbb{R}$-diviseur tel que $H^0(X, D) \neq \{0\}$. On considère le diviseur $F(D)$ formé de la partie divisorielle de l'ensemble-base. Plus formellement, c'est le plus petit diviseur effectif F (pour la relation d'ordre entre les diviseurs de Cartier) tel que $D - F$ a un ensemble-base de codimension au moins 2. On l'appelle la partie fixe de D. Comme X est lisse, $F(D)$ est Cartier.

On pose alors $M(D) := D - F(D)$ la partie mobile de D, qui est un diviseur mobile (défini au chapitre précédent). On obtient la décomposition en partie mobile et partie fixe :

$$D = M(D) + F(D).$$

Remarque 2.3.2. En utilisant l'égalité entre diviseur de Weil et de Cartier sur une variété lisse, on peut définir également $M(D)$ et $F(D)$ de la façon suivante (cela est fait dans [Pro03, p.4]) :

$$\begin{aligned} M(D) &= -\inf_{f \in K(X)^\times} \{\mathrm{div} f \mid D + \mathrm{div} f \geq 0\} \\ F(D) &= \inf\{G \mid G \sim D, G \geq 0\} \end{aligned}$$

Ici, l'inf est pris coefficient par coefficient. Avec cette présentation, on voit immédiatement $M(D) = M(\lfloor D \rfloor)$.

On voit aisément que $M(D)$ est le plus grand des diviseurs plus petits que D sans composante fixe, *i.e* avec un ensemble-base de codimension au moins 2. Mais on a également les propriétés suivantes :

Proposition 2.3.3. *Soit D un $\mathbb{R}$-diviseur tel que $H^0(X, D) \neq \{0\}$. Alors $M(D)$ vérifie les propriétés suivantes :*

(i) $M(D) \leq D$

(ii) $H^0(X, M(D)) = H^0(X, D)$

(iii) Pour tout diviseur M' vérifiant $M' \leq D$ et $H^0(X, M') = H^0(X, D)$, on a $M' \geq M(D)$

De plus, on en déduit que $M(D)$ est l'unique diviseur vérifiant les propriétés (i)-(iii).

Démonstration. (i) est clair par définition. Pour (ii), on a déjà $H^0(X, M(D)) \subset H^0(X, D)$. Ensuite, prenons $f \in H^0(X, D)$. On a donc $\mathrm{div} f + D \geq 0$. Or, par la remarque 2.3.2, on a $M(D) + \mathrm{div} f \geq 0$, puis $f \in H^0(X, M(D))$. Enfin, pour (iii), soit M' tel que $H^0(X, M') = H^0(X, D)$. Alors, pour toute fonction rationnelle f, on a $M' + \mathrm{div} f \geq 0$ si et seulement si $D + \mathrm{div} f \geq 0$. Ainsi, $M(D) = M(M')$ d'où $M' \geq M(D)$. □

On peut alors en déduire que la décomposition de Zariski-Fujita correspond à la décomposition de Zariski, introduite au début du chapitre :

Proposition 2.3.4. *Soit X une surface projective lisse et D un $\mathbb{R}$-diviseur gros. Alors la décomposition de Zariski-Fujita $D = P + N$ vérifie $R(D) = R(P)$.*

Démonstration. Soit l un entier strictement positif. Comme $lP \leq lD$, on a $H^0(X, lP) \subset H^0(X, lD)$. Par ailleurs, comme $lD = lP + lN$ est la décomposition de Zariski-Fujita, lP est le plus grand diviseur nef inférieur ou égal à lD ; or, comme X est une surface, $M(D)$ est nef. Ainsi, $M(lD) \leq lP$ puis :

$$H^0(X, lD) = H^0\big(X, M(lD)\big) \subset H^0(X, lP)$$

d'où le résultat. □

2.4 La décomposition de Zariski divisorielle

Dans toute la section, X sera supposée projective et lisse.

2.4.1 La construction pour les diviseurs gros

Notre objectif reste de se ramener à un diviseur P plus positif avec $P \leq D$ et $R(P) = R(D)$. Dans la section précédente, on a exhibé la partie mobile $M(D)$ — nef en codim 1 — vérifiant $H^0(X, M(D))$ isomorphe à $H^0(X, D)$ (si $H^0(X, D)$ n'est pas réduit à zéro). On va alors, pour tout $l \in \mathbb{N}$, considérer $M(lD)$. Comme D est gros, on a bien $H^0(X, lD) \neq \{0\}$ pour l assez grand, donc on peut appliquer la proposition précédente et obtenir $H^0(X, M(lD)) = H^0(X, lD)$ pour l assez grand. On va donc fabriquer une nouvelle décomposition de D.

Soit D un $\mathbb{R}$-diviseur gros et l un entier naturel assez grand. On a une décomposition $lD = M(lD) + F(lD)$, d'où :

$$D = \frac{1}{l} M(lD) + \frac{1}{l} F(lD).$$

Proposition 2.4.1. *Soit l, p deux entiers naturels assez grands. On a :*

$$M(pD) + M(lD) \leq M\big((p + l)D\big).$$

Démonstration. En effet, par définition de F comme un inf, on a immédiatement $F(D' + D'') \leq F(D') + F(D'')$ pour deux diviseurs D', D''. On a alors l'inégalité inverse pour M d'où le résultat. □

On peut donc introduire la décomposition de Zariski divisorielle :

Proposition 2.4.2. *La suite* $\left(\frac{1}{l}M(lD)\right)_{l\in\mathbb{N}}$ *(et donc* $\left(\frac{1}{l}F(lD)\right)_{l\in\mathbb{N}}$ *) converge coefficient par coefficient vers un* $\mathbb{R}$*-diviseur que nous noterons* $P(D)$ *(resp.* $N(D)$*).*

Démonstration. Grâce à la proposition précédente, les coefficients des $M(lD)$ forment des suites sur-additives. Ainsi, par le lemme de Fekete, les coefficients de $\frac{1}{l}M(lD)$ forment des suites qui convergent vers le sup de leurs valeurs. □

On obtient alors la décomposition suivante :

Définition 2.4.3. Pour un $\mathbb{R}$-diviseur gros D, la décomposition $D = P(D) + N(D)$ est appelée la décomposition de Zariski divisorielle.

En utilisant l'identification entre diviseur de Cartier et diviseur de Weil, on peut également introduire $N(D)$ en posant :

$$N(D) := \inf\{N \mid N \sim_{\mathbb{Q}} D, N \geq 0\}.$$

Remarque 2.4.4. En appliquant la même définition formelle, on pourrait définir naïvement $N(D)$ pour D seulement effectif. Dans la lignée des travaux de Nakayama, ce n'est pas ainsi que nous définirons $N(\cdot)$ pour les diviseurs effectifs et pseudo-effectifs. Néanmoins, nous aurons besoin, pour la preuve de la proposition 2.4.7, de la définition "naïve" de $N(D)$ pour D effectif. Nous la noterons $\tilde{N}(D)$ pour la différencier de la définiton que nous adopterons ensuite pour les diviseurs effectifs.

Proposition 2.4.5. *Pour tout* $\mathbb{R}$*-diviseur gros* D*, la décomposition de Zariski divisorielle* $D = P(D) + N(D)$ *vérifie les propriétés suivantes :*
(i) $P(D) \leq D$ *et est nef en codim 1*
(ii) $H^0(X, lD) = H^0(X, lP(D))$ *pour tout entier positif* l*.*

Démonstration. $N(D)$ est effectif comme limite de diviseurs effectifs coefficient par coefficient, d'où $P(D) \leq D$. $P(D)$ est nef en codim 1 car dans l'adhérence du cône mobile. De plus, on a, pour tout l assez grand, $M(lD) \leq lP(D) \leq lD$, d'où :

$$H^0\big(X, M(lD)\big) \subset H^0\big(X, lP(D)\big) \subset H^0(X, lD).$$

Puis, comme $H^0\big(X, M(lD)\big) = H^0(X, lD)$, on a (ii). □

Grâce à un lemme de Nakayama, on a une caractérisation de nef en codim 1 :

Lemme 2.4.6. *Soit* D *un* $\mathbb{R}$*-diviseur gros. Alors :* D *est nef en codim* 1 si et seulement *si* $N(D) = 0$

Démonstration. Déjà, si $N(D) = 0$, alors $D = P(D)$ est nef en codim 1. Pour la réciproque, le travail est plus délicat et nécessite une autre approche, voir [Nak04, Prop. 1.14 (1), p.85]. □

On va pouvoir alors caractériser $P(D)$ de façon précise :

Proposition 2.4.7. *Soit D un $\mathbb{R}$-diviseur gros et $D = P(D)+N(D)$ sa décomposition de Zariski divisorielle et soit $P \leq D$.*
— *Si P est nef en codim 1, $P \leq P(D)$*
— *Si $R(D) = R(P)$, $P \geq P(D)$.*

Démonstration. Pour le premier point, on remarque déjà que pour tout $\mathbb{R}$-diviseurs D, D' effectifs tels que $D - D'$ est effectif, $\tilde{N}(D) - \tilde{N}(D') \leq \tilde{N}(D - D')$. On a alors :

$$N(D) \leq N(P) + \tilde{N}(D - P) = \tilde{N}(D - P)$$

car P est nef en codim 1. Puis, comme $D - P$ est effectif, $\tilde{N}(D - P) \leq D - P$, d'où $P \leq D - N(D) = P(D)$.

Pour le deuxième point, pour tout entier l, on a $H^0(X, lP) = H^0(X, lD)$ et $lP \leq lD$. Par minimalité de $M(lD)$, on a alors $\frac{1}{l}M(lD) \leq P$, d'où le résultat en passant à la limite. □

La décomposition de Zariski divisorielle est donc l'unique décomposition vérifiant les conditions de la proposition 2.4.5. Comme nef en codim 1 implique nef, on a immédiatement :

Proposition 2.4.8. *Si D admet $D = P + N$ comme décomposition de Zariski sur X, alors $P(D) = P$ et $N(D) = N$.*

On en déduit alors que D admet une décomposition de Zariksi sur X *si et seulement si* $P(D)$ est nef. Dans ce cas, $D = P(D) + N(D)$ est la décomposition de Zariski.

On peut également en déduire une nouvelle preuve de l'existence de la décomposition de Zariski sur une surface projective lisse (cependant sans indication sur le corps des coefficients). En dimension 2, l'ensemble-base d'un diviseur D n'est formé que de courbes ou de points. Ainsi, l'ensemble-base de $M(lD)$ est réduit à un nombre fini de points. On conclut grâce à la proposition suivante :

Proposition 2.4.9. *Si X une variété projective et* $\mathrm{Bs}(D)$ *est un ensemble fini, il existe l un entier naturel tel que lD est sans point-base.*

Démonstration. [Laz04, rem. 2.1.32]. □

On obtient donc que $M(lD)$ est nef pour l assez grand, puis, comme $\frac{1}{l}M(lD)$ converge coefficient par coefficient vers $P(D)$, on a la convergence dans $N^1(X)$. Ainsi, comme le cône nef est fermé, $P(D)$ est nef, puis $D = P(D) + N(D)$ nous donne une décomposition de Zariski sur X.

2.4.2 À propos de la construction de la décomposition de Zariski divisorielle et extensions aux diviseurs pseudo-effectifs

On peut introduire la décomposition de Zariski divisorielle pour les diviseurs gros de deux manières (qui reviennent en fait au même).

La première manière correspond au travail effectué dans cette section et la précédente, pour un diviseur gros, avec la partie fixe et la partie mobile, et en passant à la limite — on obtient alors $D = P(D) + N(D)$, notre décomposition de Zariski divisorielle. Mais on peut également faire comme dans [Nak04] et poser des coefficients que Nakayama appelle σ. On pose :

$$\sigma_E(D) = \inf\{\mathrm{ord}_E(D') \mid mD' \in |mD|\} = \lim_{m\in\mathbb{N}} \frac{1}{m} \inf_{D'\in|mD|} \mathrm{ord}_E(D')$$

pour un diviseur E premier— et qui sera noté $\mathrm{ord}_E\|D\|$ dans la suite de cette thèse. On pose ensuite

$$N(D) := \sum_{E \text{ premier}} \sigma_E(D)E$$

puis $P(D) = D - N(D)$. On obtient alors aussi une décomposition $D = P(D) + N(D)$.

Ces deux manières reviennent en fait exactement au même : on peut voir facilement que les coefficients du $N(D)$ de la première manière sont exactement les $\sigma_E(D)$ (ce sera démontré à la proposition 5.1.3).

L'intérêt de définir $\mathrm{ord}_E\|\cdot\|$ à partir de ord_E, c'est qu'on peut remplacer ord_E par n'importe quelle valuation v. Ainsi, dans la deuxième partie de cette thèse, pour introduire la décomposition de Zariski dans le cas relatif, nous partirons du calcul des coefficients σ (ou $\mathrm{ord}\|\cdot\|$), mieux adaptés à un travail valuatif. On montrera notamment, y compris dans le cas relatif, que $N(D)$, pour un diviseur (relativement) gros, *ne dépend que de la classe numérique de D*. On peut également trouver une preuve dans le cas absolu dans [Pro03, Prop. 4.13, p.18].

Néanmoins, nous aurons besoin à la marge de la notion de décomposition de Zariski divisorielle pour les diviseurs pseudo-effectifs, essentiellement à la sous-section suivante.

Proposition 2.4.10. *Soit D un diviseur pseudo-effectif sur une variété projective. Soit H un diviseur ample ; $D+\epsilon H$ est donc gros pour tout $\epsilon > 0$. La limite $\lim_{\epsilon\to 0} N(D+\epsilon H)$ existe et ne dépend pas du diviseur ample H choisi. On pose alors :*

$$N(D) := \lim_{\epsilon\to 0} N(D+\epsilon H).$$

Démonstration. En effet, pour deux $\mathbb{R}$-diviseurs gros D', D'', on a :

$$N(D'+D'') \leq N(D') + N(D'').$$

On a alors :

$$N(D+(\epsilon+\epsilon')H) \leq N(D+\epsilon H) + N(\epsilon' H) = N(D+\epsilon H).$$

Ainsi, quand ϵ tend vers 0, $N(D+\epsilon H)$ croit. Or pour $\epsilon < 1$, $N(D+\epsilon H) \leq D+H$, d'où la convergence coefficient par coefficient.

Soit à présent H, H' deux diviseurs amples. Comme le cône ample est ouvert, pour δ suffisamment petit, on a $H' - \delta H$ ample. On a alors :

$$N(D+\epsilon H') \leq N(D+\epsilon\delta H) + N(D+\epsilon(H'-\delta H)) = N(D+\epsilon\delta H)$$

Ainsi, $\lim_{\epsilon\to 0} N(D+\epsilon H') \leq \lim_{\epsilon\to 0} N(D+\epsilon H)$. En intervertissant H et H', on a le résultat. □

On retrouve également dans ce cas-là la caractérisation de la décomposition divisorielle par la maximalité (voir [Pro03, Prop. 4.4, p.14]) :

Proposition 2.4.11. *Soit D un diviseur pseudo-effectif et $D = P(D) + N(D)$ sa décomposition de Zariski divisorielle et soit $P \leq D$. Si P est nef en codim 1 alors $P \leq P(D)$.*

Remarque 2.4.12. On a également que $N(D)$ ne dépend que de la classe numérique de D quand D est pseudo-effectif. En effet, soit D, D' deux diviseurs effectifs numériquement équivalent. Soit H un diviseur ample. Alors, pour $\epsilon > 0$, $D+\epsilon H$ et $D'+\epsilon H$ sont gros et numériquement équivalents. Ainsi $N(D+\epsilon H) = N(D'+\epsilon H)$ d'où $N(D) = N(D')$ en passant à la limite.

2.4.3 Diviseurs N-exceptionnels

Dans cette sous-section, nous nous intéressons à une classe particulière de diviseurs, en lien avec la décomposition de Zariski divisorielle : les diviseurs N-*exceptionnels*.

Définition 2.4.13. Soit $S \subset X$ un diviseur premier de X. On dit que S est N-exceptionnel dans X s'il est psef et si $N(S) = S$.

Comme $N(\cdot)$ est invariant par équivalence numérique, S est nécessairement l'unique représentant effectif de la classe numérique de S.

Remarque 2.4.14. Si on est sur une surface, être N-exceptionnel revient à être d'auto-intersection negative. Dans ce cas, le diviseur peut être contracté sur un point.

D'abord, on peut remarquer que, pour un diviseur premier, être N-exceptionnel n'est pas quelque chose de très... exceptionnel :

Proposition 2.4.15. *Soit S un diviseur premier de X. Alors :*
- *Soit S est nef en codim 1 (et alors $S|_S$ est psef).*
- *Soit S est N-exceptionnel.*

$S|_S$ désigne ici la restriction du fibré $\mathcal{O}_X(S)$ à S.

Démonstration. Supposons que S n'est pas nef en codim 1. Écrivons la décomposition divisorielle $S = P(S) + N(S)$. Comme S n'est pas nef en codim 1, on a que S est exactement la partie divisorielle du lieu non-nef de S, d'où $N(S) = \alpha S$ avec $\alpha \in [0, 1]$. Or, si $\alpha \neq 1$, $S = \frac{1}{1-\alpha} P(S)$ qui est nef en codim 1, ce qui est absurde. On a donc $N(S) = S$. □

On en déduit aisément alors que tous les diviseurs apparaissant dans la partie négative d'un diviseur sont N-exceptionnels. En effet, si $D = P(D) + \sum_i a_i E_i$, si E_j pour un certain j est nef en codim 1, alors $D = (P(D) + a_j E_j) + \sum_{i \neq j} a_i E_i$ est une nouvelle décomposition en partie nef en codim 1 et partie effective, ce qui contredit la maximalité de $P(D)$.

On a surtout la proposition suivante, qui nous servira dans la troisième partie de cette thèse :

Proposition 2.4.16. *Soit S un diviseur premier d'une variété X. Si S est N-exceptionnel, alors S engendre un rayon extrémal du cône psef.*

Démonstration. Écrivons $[S] = [D_1] + [D_2] = [D_1 + D_2]$ avec D_1, D_2 deux diviseurs psef. On définit $P(\cdot)$ pour une classe numérique α en posant $P(\alpha) := \alpha - [N(\alpha)]$. On met également une relation d'ordre sur les classes numériques en posant $\alpha \leq \alpha' \iff \alpha' - \alpha$ pseudo-effectif (c'est effectivement une relation d'ordre car si α et $-\alpha$ sont pseudo-effectifs, alors $\alpha = 0$). Ainsi, avec cette relation d'ordre, on retrouve immédiatement que $[N(\cdot)]$ est sous-additive, donc que $P(\cdot)$ est sur-additive. On obtient alors :

$$0 = [P(S)] = P([S]) \geq P([D_1]) + P([D_2]).$$

Or, $P([D_1]) = [P(D_1)]$ et $P([D_2]) = [P(D_2)]$ sont psef donc ≥ 0. Ainsi, $P([D_1])$ et $P([D_2])$ sont nuls, d'où $[D_1] = [N(D_1)]$ et $[D_2] = [N(D_2)]$. On a alors $[S] = [N(D_1) + N(D_2)]$ d'où $S = N(D_1) + N(D_2)$ par unicité du représentant effectif. Comme tout le monde est effectif et que S est premier, on a nécessairement $N(D_1)$ et $N(D_2)$ proportionnels à S donc $[N(D_1)]$ et $[N(D_2)]$ sont proportionnels à $[S]$. $[S]$ est bien un rayon extrémal du cône psef.

□

2.5 La décomposition de Zariski et modèles dominants

La décomposition de Zariski divisorielle permet de nous ramener à un ensemble-base épuré de diviseurs, mais pas des sous-variétés de dimension inférieure. A priori, nous n'avons que l'assurance d'obtenir la décomposition $D = P(D)+N(D)$ et de nous ramener à un diviseur nef en codimension 1. C'est déjà une première simplification, mais on aimerait aller plus loin.

Si $P(D)$ n'est pas nef, nous sommes sûrs qu'il n'y a pas de décomposition de Zariski sur X. C'est sur des modèles dominants de X, à savoir sur des X' avec $\mu : X' \to X$ morphisme birationnel propre qu'on va essayer de la trouver.

Proposition 2.5.1. *Soit D un $\mathbb{R}$-diviseur gros, X' et X des variétés projectives lisses et $\mu : X' \to X$ morphisme birationnel propre. Alors :*

(i) $P(\mu^* D) \leq \mu^* P(D)$ et $N(\mu^* D) \geq \mu^* N(D)$

(ii) Si $P(D)$ est nef, alors $P(\mu^* D) = \mu^* P(D)$ et $N(\mu^* D) = \mu^* N(D)$

Démonstration. Grâce au main theorem de Zariski, on a $\mu_* \mathcal{O}_{X'} = \mathcal{O}_X$ quand X est lisse, puis $H^0(X', \mu^* L) = H^0(X, L)$ pour tout fibré L. Ainsi, pour tout $m \geq 0$, on a :

$$H^0\big(X', m\mu^* P(D)\big) = H^0\big(X, mP(D)\big) = H^0\big(X, mD\big) = H^0\big(X', m\mu^* D\big)$$

d'où $R(\mu^* P(D)) = R(\mu^* D)$. Par ailleurs, on a $R(\mu^* D) = R(P(\mu^* D))$ et comme $P(D) \leq D$, $\mu^* P(D) \leq \mu^* D$. Ainsi, par minimalité, $P(\mu^* D) \leq \mu^* P(D)$ d'où le premier point. Pour le deuxième point, le fait d'être nef passe au tiré-en-arrière et on conclut grâce à l'unicité de la décomposition de Zariski divisorielle répondant aux conditions de la proposition 2.4.5. □

Cette proposition suggère la méthode suivante pour trouver une décomposition de Zariski : on se place sur des modèles dominants successifs en essayant de réduire $P(\cdot)$, jusqu'à ce qu'on obtienne $P(\cdot)$ nef. Remarquons également que la proposition

précédente permet de parler de *la* décomposition de Zariski de D, indépendamment du modèle considéré.

On éclate donc une sous-variété du lieu non-nef de $P(D)$. On se retrouve dans une nouvelle variété X' avec $\mu : X' \to X$ et E comme diviseur exceptionnel, puis on pose $D' = \mu^*(D)$. On a alors :

$$D' = \mu^* P(D) + \mu^* N(D).$$

Mais comme le lieu non-nef de $\mu^* P(D)$ contient un diviseur, on peut écrire sa décomposition de Zariski divisorielle :

$$\mu^* P(D) = \tilde{P} + \tilde{N}$$

où $\tilde{N}$ contient au moins un multiple strictement positif de E. On obtient une nouvelle décomposition de Zariski divisorielle :

$$D' = P(D') + N(D')$$

avec $P(D') = \tilde{P}$ et $N(D') = \mu^* N(D) + \tilde{N} > \mu^* N(D)$.

En itérant ce procédé, on obtient ainsi une suite d'éclatements

$$\cdots \to X_n \to \cdots \to X_1 \to X_0$$

avec $X_0 = X$, $X_1 = X'$, et une suite de diviseurs (D_n) avec D_n sur X_n, tiré-en-arrière de D_{n-1} ($D_1 = D'$ et $D_0 = D$), avec des $N(D_n)$ contenant de plus en plus de composantes et des $P(D_n)$ avec un ensemble-base de plus en plus petit.

Malheureusement, cette stratégie n'aboutit pas nécessairement. Non seulement on peut se retrouver avec une suite infinie d'éclatements (ce qui ne permet pas de conclure à l'existence ou non de la décomposition de Zariski), mais en plus, dans [Nak04], Nakayama parvient à exhiber une situation où ce procédé ne marche pas. Ce sera détaillé en annexe.

Deuxième partie

Caractérisation valuative de la décomposition de Zariski

Dans l'approche classique de l'étude de l'existence de la décomposition de Zariski (détaillée précédemment), nous nous retrouvons avec des suites d'éclatements, ce qui peut rendre délicat l'étude d'exemples concrets. Ainsi, nous allons développer ici une approche valuative. L'idée est la suivante : on cherche à étudier les valuations ord_E avec E diviseur premier, éventuellement sur un éclatement. Comme ce sont toutes des valuations, on va s'intéresser à l'ensemble des valuations sur une variété, car ce dernier est invariant par changement de modèle dominant (et donc par éclatement).

On va donc traduire les propriétés de positivité et de décomposition de Zariski en terme du comportement des valuations sur le corps des fonctions, et associer à nos diviseurs des fonctions de l'espace des valuations.

Nous étudierons l'application qui a une valuation associe son ordre d'annulation asymptotique en un diviseur, puis nous aboutirons à une condition nécessaire et suffisante sur la régularité de cette application pour que le diviseur admette une décomposition de Zariski.

Chapitre 3

Valuations sur un corps de fonctions

Dans ce chapitre, nous développerons un certain nombre de notions autour des valuations et les premiers liens avec les diviseurs.

3.1 Valuations sur une extension de corps

3.1.1 Premières définitions

Soit k un corps algébriquement clos, et K/k une extension de corps de type fini. On pose $n := \deg_{\mathrm{tr}}(K/k)$ le degré de transcendance de K sur k. On adoptera la définition suivante pour une valuation :

Définition 3.1.1. Une valuation sur K/k est une application $v : K \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ telle que :

(i) Pour tout $x \in K$, $v(x) = +\infty$ *ssi* $x = 0$.
(ii) Pour tout $x, y \in K$, $v(xy) = v(x) + v(y)$.
(iii) Pour tout $x, y \in K$, $v(x + y) \geq \min\{v(x); v(y)\}$.
(iv) Pour tout $a \in k^*$, $v(a) = 0$.

Remarque 3.1.2. si $v(x) \neq v(y)$, alors $v(x + y) = \min\{v(x); v(y)\}$. Ainsi, si on a $x_1, \cdots, x_l$ non tous nuls tels que $\sum_i x_i = 0$, il existe nécessairement $i \neq j$ tels que $v(x_i) = v(x_j)$ et $x_i, x_j \neq 0$.

3.1.2 Les invariants d'une valuation

Voici maintenant les trois objets usuellement associés à une valuation :

Définition 3.1.3.

- On définit le *groupe de valeurs* de v comme $\Gamma_v := v(K^*)$. v est dite *discrète* si Γ_v est un sous-groupe discret de $\mathbb{R}$ non réduit à zéro. Dans ce cas, il est isomorphe à $\mathbb{Z}$.
- On définit l'*anneau de valuation* $\mathcal{O}_v := \{x \in K \mid v(x) \geq 0\}$. C'est un anneau local, d'idéal maximal $\mathfrak{m}_v := \{x \in K \mid v(x) > 0\}$.
- On définit le *corps résiduel* k_v par

$$k_v := \mathcal{O}_v/\mathfrak{m}_v.$$

Remarque 3.1.4. On voit immédiatement que $\mathcal{O}_v$ vérifie $x \in \mathcal{O}_v$ ou $x^{-1} \in \mathcal{O}_v$ pour tout $x \in K^*$. Un sous-anneau $\mathcal{O}$ de K vérifiant $x \in \mathcal{O}$ ou $x^{-1} \in \mathcal{O}$ pour tout $x \in K^*$ est appelé *anneau de valuation*. Si en plus $\mathcal{O}$ est principal, $\mathcal{O}$ est appelé *anneau de valuation discrète*. Si v est une valuation discrète, alors $\mathcal{O}_v$ est un anneau de valuation dicrète.

Introduisons maintenant les notions de rang et de degré d'une valuation :

Définition 3.1.5. Soit v une valuation de K sur k. On définit $\deg_{\mathrm{tr}}(v)$ le degré de transcendance de v et $\mathrm{rg}_{\mathrm{rat}}(v)$ le rang rationnel de v par :

$$\deg_{\mathrm{tr}}(v) := \deg_{\mathrm{tr}}(k_v/k) \quad \text{et} \quad \mathrm{rg}_{\mathrm{rat}}(v) = \dim_{\mathbb{Q}}(\Gamma_v \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}). \tag{3.1}$$

3.1.3 Les valuations d'Abhyankar

L'inégalité de Zariski-Abhyankar nous montre non seulement que le degré de transcendance et le rang rationnel sont finis, mais aussi que leur somme est inférieure au degré de l'extension.

Théorème 3.1.6. *(Zariski-Abhyankar) Pour une valuation v sur K/k, on a :*

$$\deg_{\mathrm{tr}}(v) + \mathrm{rg}_{\mathrm{rat}}(v) \leq \deg_{\mathrm{tr}}(K/k) = n. \tag{3.2}$$

Démonstration. Choisissons des éléments $x_1, \cdots, x_r$ de $\mathcal{O}_v$ tels que les $\overline{x_i}$ dans k_v soient algébriquement indépendants sur k. On prend également $y_1, \cdots, y_s$ dans $\mathfrak{m}_v \setminus \{0\}$ tels que les $v(y_i)$ soient linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$. Supposons qu'il existe un polynôme à $r+s$ variable P et à coefficient dans k tel que :
$P(x_1, \cdots, x_r, y_1, \cdots, y_s) = 0$. Écrivons cela sous la forme suivante :

$$\sum_{(\rho,\sigma)\in\mathbb{N}^r\times\mathbb{N}^s} a_{\rho,\sigma} x_1^{\rho_1}\cdots x_r^{\rho_r} y_1^{\sigma_1}\cdots y_s^{\sigma_s} \quad = \quad 0 \qquad \text{avec les } a_{\rho,\sigma} \in k.$$

Réécrivons cette équation de la façon suivante :

$$\sum_{\sigma\in\mathbb{N}^s} P_\sigma(x_1,\cdots,x_r)y_1^{\sigma_1}\cdots y_s^{\sigma_s} \quad = \quad 0 \qquad \text{où } P_\sigma = \sum_{\rho\in\mathbb{N}^r} a_{\rho,\sigma}X_1^{\rho_1}\cdots X_r^{\rho_r}.$$

Si $v(P_\sigma(x_1,\cdots,x_r)) > 0$, alors $P_\sigma(\overline{x_1},\cdots,\overline{x_r}) = 0$, donc $P_\sigma = 0$ car $\overline{x_1},\cdots,\overline{x_r}$ sont algébriquement indépendants.

Si $r = s = 0$, on a l'inégalité souhaitée. Sinon, plaçons-nous dans le cas $r + s > 0$ et supposons que P est non-nul. Alors, les P_σ ne sont pas tous nuls, et donc les $P_\sigma(x_1,\cdots,x_r)y_1^{\sigma_1}\cdots y_s^{\sigma_s}$ ne sont pas tous nuls. Par la remarque 3.1.2, il y en a donc deux qui ont la même valuation (car leur somme est nulle). Or, pour tout σ avec $P_\sigma \neq 0$, la première partie de la preuve donne :

$$v\Big(P_\sigma(x_1,\cdots,x_r)y_1^{\sigma_1}\cdots y_s^{\sigma_s}\Big) \quad = \quad \sum_{i=1}^{s}\sigma_i v(y_i).$$

Ainsi, si pour σ et σ' distincts, $P_\sigma(x_1,\cdots,x_r)y_1^{\sigma_1}\cdots y_s^{\sigma_s}$ et $P_{\sigma'}(x_1,\cdots,x_r)y_1^{\sigma'_1}\cdots y_s^{\sigma'_s}$ ont même valuation, on a une relation de dépendance linéaire à coefficients entiers entre les $v(y_i)$. On aboutit à une contradiction, ce qui montre que P est nul. Ainsi, les $x_1,\cdots,x_r,y_1,\cdots,y_s$ sont algébriquement indépendants sur k. On en déduit alors l'inégalité de Zariski-Abhyankar.

□

Définition 3.1.7. Lorsque, pour une valuation v de K/k, on a $\deg_{\mathrm{tr}}(v) + \mathrm{rg}_{\mathrm{rat}}(v) = \deg_{\mathrm{tr}}(K/k)$, on dit que v est d'Abhyankar.

Plus loin, nous verrons que les valuations d'Abhyankar de rang rationnel 1 s'interprètent comme les valuations divisorielles sur un modèle de K/k.

3.2 Le corps de fonctions d'une variété

3.2.1 Modèles d'une extension de corps

Définition 3.2.1. Soit K/k une extension de corps de type fini. Un modèle de K/k est la donnée d'un couple (X,ϕ) où X est une variété sur k et ϕ un k-isomorphisme de $K(X)$ vers K. Souvent, le morphisme sera implicite et on parlera d'un modèle X de K/k.

On en déduit les propriétés suivantes :

Remarque 3.2.2.

- Tout modèle X de K/k est de dimension $n = \deg_{\mathrm{tr}}(K/k)$.
- Pour toute extension K/k de type fini, on peut trouver un modèle affine de K/k en considérant les équations polynomiales définissant K. Comme ce modèle affine est plongeable dans un certain $\mathbb{P}^N$, on trouve un modèle projectif de K/k en prenant l'adhérence de Zariski dans $\mathbb{P}^N$.
- Deux modèles (X, ϕ) et (X', ϕ') sont reliés par l'application birationnelle canonique induite par $\phi'^{-1} \circ \phi$.
- si k est de caractéristique zéro, grâce à la résolution des singularités, on peut toujours trouver un modèle *lisse*.

Définition 3.2.3. Soit (X, ϕ) et (X', ϕ') deux modèles de K/k. On dit que (X', ϕ') domine (X, ϕ) — ou parfois juste X' domine X — lorsque l'application birationnelle canonique de $X' \dashrightarrow X$ se prolonge en $X' \to X$ *propre*. On notera $X' \geq X$. Cela induit une relation d'ordre partielle entre les modèles de K/k.

Enfin, une autre remarque, qui nous sera pratique lorsque nous chercherons à construire des valuations :

Remarque 3.2.4. Une valuation est entièrement déterminée par sa valeur sur un anneau de K dont le corps des fractions est K. Par exemple, sur un modèle X de K/k, il suffit de définir v sur un anneau local $\mathcal{O}_{X,\xi}$ et vérifiant les propriétés de la définition 3.1.1 sur cet anneau pour obtenir une valuation v sur $K(X)$ (et donc K) tout entier.

3.2.2 Le centre d'une valuation

Intéressons-nous maintenant à la notion de centre d'une valuation sur une variété.

Définition 3.2.5. Soit v une valuation de K/k, X un modèle de K/k et ξ un point schématique de X. On dit que v admet ξ comme centre si :

(i) Pour tout $f \in \mathcal{O}_{X,\xi}$, $v(f) \geq 0$.

(ii) Pour tout $f \in \mathfrak{m}_{X,\xi}$, $v(f) > 0$.

Cela est équivalent à avoir $\mathcal{O}_{X,\xi} \subset \mathcal{O}_v$ et $\mathfrak{m}_{X,\xi} = \mathfrak{m}_v \cap \mathcal{O}_{X,\xi}$. On dit que l'anneau local $\mathcal{O}_{X,\xi}$ est dominé par $\mathcal{O}_v$.

Remarque 3.2.6. Parfois, on utilise le terme de centre pour désigner non plus le point schématique ξ mais la variété $W = \overline{\{\xi\}}$.

Remarque 3.2.7. Le centre met en évidence la partie de X où "il se passe quelque chose" pour v, c'est-à-dire pour tout $f \in \mathcal{O}_{X,\xi}$, on a $v(f) = 0$ *ssi* le germe de f en ξ est inversible.

Proposition 3.2.8. *Soit v une valuation sur K/k et X un modèle de v. Si le centre existe sur X, alors il est unique.*

Démonstration. On va utiliser le critère de séparation, présent par exemple dans [Har77, thm. 4.3, p 97] : Comme le morphisme structural f est séparé, il existe au plus un morphisme entre $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_v$ et X, représenté par la flèche en pointillé dans le diagramme suivant, qui le laisse commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} K \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\
\operatorname{Spec}\mathcal{O}_v \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & \operatorname{Spec} k
\end{tikzcd}$$

Or, un morphisme entre $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_v$ et X laissant le diagramme ci-dessus commutatif correspond exactement à un centre pour v dans X, d'où l'unicité. □

On écrira alors, sans risque d'ambiguïté, $c_X(v)$ pour désigner le centre de v sur X lorsqu'il existe.

Proposition 3.2.9. *Si X est propre sur k alors toute valuation de $k(X)/k$ a un centre.*

Démonstration. On reprend les mêmes notations que précédemment, Cette fois-ci, le morphisme de variété f est de type fini. On peut appliquer [Har77, thm. 4.7 p.101] : comme f est propre, pour toute valuation v, il existe un morphisme entre $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_v$ et X faisant commuter le diagramme présent dans la preuve précédente. Or, cela correspond exactement à l'existence d'un centre.

□

Comme le morphisme d'une variété projective vers $\operatorname{Spec} k$ est propre, on en déduit la proposition suivante :

Proposition 3.2.10. *Soit v une valuation sur K/k et soit X un modèle projectif. Alors v a un et un seul centre en X.*

Remarque 3.2.11. Comme on peut toujours trouver un modèle projectif de K/k de type fini, toute valuation sur K/k a un centre dans un certain modèle X de K/k.

Mais qu'en est-il des liens entre les centres de deux modèles ? D'abord, on peut remarquer que si X et X' sont deux modèles de K/k et si l'application birationnelle canonique de X' vers X est un morphisme, alors tout centre de X' se projette en un centre sur X.

Mais le théorème [Har77, 4.7 p.101] nous donne en fait l'équivalence dans le cas d'un modèle en dominant un autre :

Proposition 3.2.12. *Si X' et X sont deux modèles avec $X' \geq X$, alors v à un centre sur X* si et seulement si *elle en a également un sur X'.*

Démonstration. Supposons que v admette un centre dans X. Il suffit d'appliquer le théorème [Har77, thm 4.7 p.101] au diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} K \arrow[r] \arrow[d] & X' \arrow[d, "f"] \\
\operatorname{Spec} \mathcal{O}_v \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & X
\end{tikzcd}$$

Ainsi, le morphisme entre $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_v$ et X définissant le centre se remonte en un morphisme entre $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_v$ et X', prouvant que v est centrée en X'. Par la proposition précédente, on a donc bien l'équivalence.

□

On choisira de se concentrer sur les valuations avec un centre (appelées parfois valuations centrées). On adoptera donc la définition suivante pour une valuation sur X :

Définition 3.2.13. Une valuation v sera appelée une valuation sur X si c'est une valuation de $K(X)/k$ admettant un centre sur X. L'ensemble des valuations sur X sera noté Val_X.

Cet ensemble est invariant par homothétie réelle, et est muni d'un ordre partiel naturel que nous évoquons juste après. Par ailleurs, grâce à la proposition 3.2.12, si X' domine X, alors $\mathrm{Val}_X = \mathrm{Val}_{X'}$.

Définition 3.2.14. Soit $v, w \in \mathrm{Val}_X$. On dit que $v \leq w$ si $\xi := c_X(w) \in \overline{\{c_X(v)\}}$ et $v(f) \leq w(f)$ pour tout $f \in \mathcal{O}_{X,\xi}$.

Définissons également la valuation d'une section d'un fibré en droites :

Définition 3.2.15. Soit L un fibré en droites sur X et v une valuation de centre ξ. Soit s une section globale de L. Soit U un ouvert contenant ξ et trivialisant L : $L|_U = \mathcal{O}_X(U) \cdot e$. On écrit alors $s = fe$ avec $f \in \mathcal{O}_X(U)$ et on pose $v(s) := v(f)$.

Comme deux trivialisations diffèrent d'une unité, donc d'un élément de valuation nulle, on voit que cette définition ne dépend pas de la trivialisation choisie.

3.3 Exemples de valuations

Nous verrons dans cette section quelques exemples typiques de valuations sur X qui seront amplement retrouvées dans la suite.

3.3.1 Les valuations divisorielles

Définition 3.3.1. Supposons X normale. Soit E un diviseur premier. Comme le lieu singulier X_{sing} est de codimension au moins 2, X est régulier au point générique de E. On a donc une équation locale f_E de E au point générique ξ. Pour $f \in k(X)$, posons :

$$\operatorname{ord}_E(f) = \sup\{k \in \mathbb{Z} \mid f_E^{-k} f \in \mathcal{O}_{X,\xi}\}. \tag{3.3}$$

On l'appelle l'ordre d'annulation le long de E.

Proposition 3.3.2. *Sous les conditions précédentes,* ord_E *définit une valuation de centre* ξ *(le point générique de* E*).*

Cette valuation est celle qui a été introduite à la sous-section 1.1.1.

Démonstration. la fonction ord_E vérifie aisément les propriétés de valuation du produit et de la somme. Pour une constante non nulle $a \in k$, on a $a, a^{-1} \in \mathcal{O}_{X,\xi}$ donc $\operatorname{ord}_E(a) = 0$. Il reste donc à montrer que ord_E a ξ pour centre. C'est clair par définition que si $f \in \mathcal{O}_{X,\xi}$, alors $\operatorname{ord}_E(f) \geq 0$. De plus, comme $\mathfrak{m}_{X,\xi}$ est engendré par f_E, alors toute fonction de $\mathfrak{m}_{X,\xi}$ est de valuation au moins 1, ce qui achève la preuve. □

Remarque 3.3.3. Pour f une fonction rationnelle, $\operatorname{ord}_E(f)$ est un entier. Si $\operatorname{ord}_E(f) > 0$, on dira que f admet un zéro d'ordre $\operatorname{ord}_E(f)$ le long de E et si $\operatorname{ord}_E(f) < 0$, on dira que f admet un pôle d'ordre $-\operatorname{ord}_E(f)$ le long de E.

Comme nous nous intéressons à l'ensemble des valuations, invariant par équivalence birationnelle, nous adopterons la définition suivante pour une valuation divisorielle :

Définition 3.3.4. Soit v une valuation sur K/k. Nous dirons que v est divisorielle s'il existe un modèle normal X de K/k et un diviseur premier E sur X tel que $v = c \cdot \mathrm{ord}_E$, pour une constante $c > 0$.

En fait, un théorème de Zariski nous donne une description très précise des valuations divisorielles :

Théorème 3.3.5 (Zariski)**.** *Soit v une valuation sur K/k. Les propositions suivantes sont équivalentes :*
(i) v est divisorielle.
(ii) v est d'Abhyankar et $\mathrm{rg}_{\mathrm{rat}}(v) = 1$.

Démonstration. On adapte ici une preuve présente dans les notes [Ste18]. Soit v une valuation divisorielle. Comme c'est une valuation discrète, elle est de rang rationnel égal à 1. Ensuite, plaçons-nous sur une variété normale X sur laquelle $v = \mathrm{ord}_E$, où E est un diviseur premier sur X. Alors k_v est le corps des fractions de E. En effet, quitte à se restreindre à un ouvert affine contenant ξ le point générique de E, on peut supposer $X = \operatorname{Spec} A$ pour A une certaine k-algèbre intègre de degré de transcendance égale à n et $E = V(\mathfrak{p})$ pour $\mathfrak{p}$ un idéal de A de hauteur 1. On a alors $n - 1 = \deg_{tr}\big(\mathrm{Frac}(A/\mathfrak{p})/k\big)$, puis :

$$A/\mathfrak{p} = A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} = \mathcal{O}_{X,\xi}/\mathfrak{m}_{\xi} = k_v.$$

Réciproquement, soit v une valuation sur K/k de rang rationnel 1 et de degré de transcendance $n-1$. Soit $x_1, \cdots, x_{n-1}$ dans $\mathcal{O}_v \smallsetminus \mathfrak{m}_v$ tels que leurs images dans k_v soient algébriquement indépendantes. Nécessairement, ils sont également indépendants sur K (sinon on aurait une relation de dépendance algébrique qui passerait au quotient). Complétons maintenant $x_1, \cdots, x_{n-1}$ par x_n en une base de transcendance. Posons $R = k[x_1, \cdots, x_n]$, $L = k(x_1, \cdots, x_n)$ et $Y = \mathrm{Spec}(R)$. Alors, comme $\deg_{tr}(L/k) = n$, K est une extension finie de L. Considérons $w = v|_Y$ la restriction de v à Y (*i.e* la restriction de v à L). Comme K est une extension finie de L, il n'y a qu'une seule valuation qui prolonge w à K tout entier. Déjà, w n'est pas nulle, car sinon la valuation triviale sur K prolongerait w et v serait triviale. Comme $w(x_i) = v(x_i) = 0$ pour tout $i \in \{1, \cdots, n-1\}$, on a nécessairement $w(x_n) = v(x_n) \neq 0$. Posons $c = w(x_n)$, et quitte à prendre x_n^{-1} au lieu de x_n, on peut supposer $c > 0$. Tout élément f de L peut s'écrire comme un polynôme de $k(x_1, \cdots, x_{n-1})[x_n]$, puis on trouve $w(f) = c \cdot \mathsf{val}_{x_n}(f)$, d'où w est une valuation discrète. Or, une valuation discrète s'étend en une valuation discrète sur toute extension finie, d'où v est discrète.

Considérons maintenant l'idéal de R : $I = \{g \in R \mid w(g) > 0\}$. Comme $w = c \cdot \mathsf{val}_{x_n}$, on a $I = x_n R$. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier inclus strictement dans I, et soit P un polynôme

non-nul de $\mathfrak{p}$. Écrivons $P = x_n^k Q$ où Q est de valuation zéro en x_n. On a alors $x_n^k \in \mathfrak{p}$ ou $Q \in \mathfrak{p} \subset I$, mais $Q \notin I$. On a donc nécessairement $x_n^k \in \mathfrak{p}$, puis $x_n \in \mathfrak{p}$, d'où nécessairement $\mathfrak{p} = \{0\}$. Ainsi, I est de hauteur 1, donc la localisation R_I est un anneau de valuation discrète. Comme w est positif sur R_I et strictement positif sur IR_I, R_I est dominé par $\mathcal{O}_w$. Mais les anneaux de valuation discrète sont des éléments maximaux pour la relation de domination, d'où $R_I = \mathcal{O}_w$.

Plaçons-nous maintenant dans K et considérons $\tilde{R}$ la clôture intégrale de R dans K, et posons $X = \mathrm{Spec}(\tilde{R})$. X est une variété normale sur k, et on obtiendra que $K(X) \simeq K$. D'abord, remarquons que v est positive sur $\tilde{R}$. En effet, la clôture intégrale de R est l'intersection de tous les anneaux de valuation contenant R, en particulier $\mathcal{O}_v$ (puisque $R \subset \mathcal{O}_v$), d'où $\tilde{R} \subset \mathcal{O}_v$. Posons $\mathfrak{q} = \{f \in \tilde{R} \mid v(f) > 0\}$, on va montrer que $\mathfrak{q}$ de hauteur 1. Soit $\mathfrak{q}'$ un idéal premier strictement inclus dans $\mathfrak{q}$, on a alors :

$$n - 1 = \deg_{\mathrm{tr}} \mathrm{Frac}\left((\tilde{R}/\mathfrak{q})/k\right) < \deg_{\mathrm{tr}}(\mathrm{Frac}\left((\tilde{R}/\mathfrak{q}')/k\right) \leq \deg_{\mathrm{tr}}(\mathrm{Frac}\left((\tilde{R})/k\right) = n.$$

Ainsi, on a nécessairement $\mathfrak{q}' = \{0\}$, ce qui montre que $\mathfrak{q}$ est de hauteur 1, puis posons $E := V(\mathfrak{q})$ qui est donc un diviseur premier (de dimension $n-1$ et irréductible) de X. Ainsi $\tilde{R}_{\mathfrak{q}} = \mathcal{O}_{X,E}$ est un anneau de valuation discrète, dominé par $\mathcal{O}_v$, d'où $\mathcal{O}_{X,E} = \tilde{R}_{\mathfrak{q}} = \mathcal{O}_v$. Ainsi, $K(X) \simeq \mathrm{Frac}(\mathcal{O}_v) = K$, donc X est un modèle de K/k, et v est équivalente à ord_E, d'où le résultat.

□

3.3.2 L'ordre d'annulation le long d'une sous-variété

Soit X un modèle de K/k. Nous allons essayer de construire l'ordre d'annulation le long d'une sous-variété W, ou de manière équivalente en un point schématique ξ.

Définition 3.3.6. Pour tout $f \in \mathcal{O}_{X,\xi}$, posons :

$$\mathrm{ord}_\xi(f) := \max\{l \in \mathbb{N} \mid f \in \mathfrak{m}_\xi^l\}.$$

Cela définit ce qu'on appelle une fonction d'ordre dans [LJT08], qui vérifie les propriétés suivantes :

Proposition 3.3.7.
(i) Pour tout $f \in \mathcal{O}_{X,\xi}$, $\mathrm{ord}_\xi(f) = +\infty$ ssi $f = 0$.
(ii) Pour tout $f, g \in \mathcal{O}_{X,\xi}$, $\mathrm{ord}_\xi(fg) \geq \mathrm{ord}_\xi(f) + \mathrm{ord}_\xi(g)$.
(iii) Pour tout $f, g \in \mathcal{O}_{X,\xi}$, $\mathrm{ord}_\xi(f+g) \geq \min\{\mathrm{ord}_\xi(f); \mathrm{ord}_\xi(g)\}$.
(iv) Pour tout $a \in k^*$, $\mathrm{ord}_\xi(a) = 0$.

Ainsi, ord_ξ vérifie toutes les propriétés d'une valuation (définition 3.1.1) sauf la propriété (ii) sur le produit, où on a seulement l'inégalité en général. Mais on a la propriété suivante, qui permet de caractériser dans quel cas ord_ξ est effectivement une valuation.

Proposition 3.3.8. *Les deux propositions suivantes sont équivalentes :*
(i) $\forall f, g \in \mathcal{O}_{X,\xi}$, $\mathrm{ord}_\xi(fg) = \mathrm{ord}_\xi(f) + \mathrm{ord}_\xi(g)$.
(ii) l'algèbre graduée $\bigoplus_{l\in\mathbb{N}} \mathfrak{m}_\xi^l/\mathfrak{m}_\xi^{l+1}$ *est intègre.*

Démonstration. Soit $f, g \in \mathcal{O}_{X,\xi}$ et posons $l = \mathrm{ord}_\xi(f)$ et $p = \mathrm{ord}_\xi(g)$. On voit que $\mathrm{ord}_\xi(fg) > \mathrm{ord}(f) + \mathrm{ord}(g)$ est équivalent à $fg \in \mathfrak{m}_\xi^{l+p+1}$ *i.e* $fg = 0$ dans $\bigoplus_{l\in\mathbb{N}} \mathfrak{m}_\xi^l/\mathfrak{m}_\xi^{l+1}$, d'où on déduit l'équivalence. □

On obtient alors une condition nécessaire et suffisante pour que ord_ξ soit une valuation. Posons $W := \overline{\{\xi\}}$. Si on restreint le cône normal à W dans X — $\mathrm{Spec}(\bigoplus_{l\in\mathbb{N}} I_W^l/I_W^{l+1})$ — au point générique, on obtient $\bigoplus_{l\in\mathbb{N}} \mathfrak{m}_\xi^l/\mathfrak{m}_\xi^{l+1}$. Ainsi, ord_ξ est une valuation si et seulement si le cône normal à W en X est intègre au point ξ.

Exemple 3.3.9. Prenons un diviseur premier E sur une variété X normale (donc irréductible et réduit), ξ son point générique. On a alors, en notant f_E une équation locale de E en ξ :

$$\mathfrak{m}_\xi^l = f_E^l \mathcal{O}_{X,\xi}.$$

Puis on voit ensuite que $\mathfrak{m}_\xi^l/\mathfrak{m}_\xi^{l+1}$ correspond aux éléments qui s'écrivent sous la forme f_E^l multipliés par un élément inversible de $\mathcal{O}_{X,\xi}$, d'où l'intégrité.

Remarque 3.3.10. Si D est un diviseur, d'équation f_D au voisinage de ξ, alors on a $\mathrm{ord}_\xi(f_D) = \mathrm{mult}_W(D)$ comme défini dans [Nak04] et [Les16]. Plus tard, $\mathrm{ord}_\xi(f_D)$ servira de définition pour $\mathrm{ord}_\xi(D)$.

On va chercher à établir un lien entre ord_ξ et le diviseur exceptionnel D_W de $\mathcal{B}l_W(X)$. D'abord, définissons une nouvelle fonction d'ordre à partir de ord_ξ. Comme il manque la propriété d'additivité du produit, on peut essayer de remédier partiellement à ce problème en la rendant multiplicative pour les puissances d'un élément et obtenir une nouvelle fonction d'ordre vérifiant au moins $v(f^k) = kv(f)$.

Définition 3.3.11. Pour tout $f \in \mathcal{O}_{X,\xi}$, la suite $\left(\mathrm{ord}_\xi(f^k)\right)_k$ est sous-additive. On pose alors :

$$\overline{\mathrm{ord}_\xi}(f) := \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k}\mathrm{ord}_\xi(f^k).$$

Proposition 3.3.12. *La fonction* $\overline{\mathrm{ord}_\xi}$ *vérifie :*
$\forall f, g \in \mathcal{O}_{X,\xi} \quad \overline{\mathrm{ord}_\xi}(f+g) \geq \min\{\overline{\mathrm{ord}_\xi}(f); \overline{\mathrm{ord}_\xi}(g)\}$.

$\forall f, g \in \mathcal{O}_{X,\xi} \quad \overline{\mathrm{ord}_\xi}(fg) \geq \overline{\mathrm{ord}_\xi}(f) + \overline{\mathrm{ord}_\xi}(g)$.
$\forall f \in \mathcal{O}_{X,\xi}, \forall k \in \mathbb{N}, \quad \overline{\mathrm{ord}_\xi}(f^k) = k\overline{\mathrm{ord}_\xi}(f)$.
$\forall a \in k^*, \ \overline{\mathrm{ord}_\xi}(a) = 0$.

Démonstration. [LJT08, Cor. 0.2.6 & Prop. 0.2.9, p.9-10]. □

Comme ξ peut être dans le lieu singulier de X, l'éclatement de X le long de W n'est pas nécessairement normal. Or, on voudrait parler des ordres d'annulation du diviseur exceptionnel, donc on a besoin d'être sur une variété normale.

Pour remédier à cela, posons $\tilde{X}$ la normalisation de l'éclatement de X le long de W et $\pi : \tilde{X} \to X$ la projection. $\pi^*(I_W)$ correspond à un diviseur de Cartier effectif E :

$$\pi^*(I_W) \cdot \mathcal{O}_{\tilde{X}} \quad = \quad \mathcal{O}_{\tilde{X}}(-E).$$

Comme $\tilde{X}$ est normal, on peut décomposer E en somme de diviseur premier : $E = \sum_i a_i E_i$.

On retrouve un lien entre les deux approches :

Proposition 3.3.13. *Avec les notations précédentes, on a :*

$$\overline{\mathrm{ord}_\xi} = \min_i \frac{\mathrm{ord}_{E_i}}{a_i}.$$

Démonstration. [LJT08, Thm. 4.1.6 p.32]. □

3.3.3 Les valuations quasi-monomiales

Nous définissons maintenant une autre classe importante de valuations : les valuations monomiales et quasi-monomiales.

Commençons par un exemple :

Exemple 3.3.14. Prenons $K = k(T_1, \cdots, T_n)$ et $X = \mathbb{A}^n_k$. Nous allons définir nos valuations sur $k[T_1, \cdots, T_n]$, elles s'étendront ensuite naturellement à K. Soit $t = (t_1, \cdots, t_n) \in \mathbb{R}^n_+$. On définit alors une valuation v_t en posant :

$$v_t\Big(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha T_1^{\alpha_1} \cdots T_n^{\alpha_n}\Big) := \inf\{\langle \alpha | t \rangle \mid a_\alpha \neq 0\}$$

où $\langle \alpha | t \rangle$ désigne le produit scalaire $\sum_i \alpha_i t_i$.

v_t est une sorte d'interpolation vérifiant $v_t(T_i) = t_i$. Dans l'espace des valuations, les v_t permettent de définir un cône dont les génératrices sont les $\mathbb{R}_+ \mathrm{ord}_{D_i}$, où D_i est le diviseur défini par $\{T_i = 0\}$.

Avec un peu de matériel (tel le théorème de structure de Cohen), nous allons pouvoir étendre cette construction à n'importe quel modèle.

Le théorème de Cohen nous permet de déduire l'énoncé suivant :

Proposition 3.3.15. *Soit $(R, \mathfrak{m})$ un anneau local nœthérien complet et régulier. Alors, si l est un corps et qu'on a un morphisme d'anneau de l vers R qui se factorise en un isomorphisme de corps entre l et $R/\mathfrak{m}$, R est isomorphe à un anneau de séries formelles sur l.*

Définition 3.3.16. Soit X un modèle de K/k et soit x un point schématique régulier de X. On choisit des coordonnées locales en x, c'est-à-dire un système régulier de paramètres $(z_1, \cdots, z_s)$ de $\mathcal{O}_{X,x}$.

D'après la proposition précédente, on a un isomorphisme (non-canonique) entre le complété $\widehat{\mathcal{O}_{X,x}}$ et l'anneau des séries formelles $k(x)[[z_1, \cdots, z_s]]$. Soit $f \in \mathcal{O}_{X,x}$. Par l'isomorphisme au-dessus, on peut l'écrire sous la forme $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^s} a_\alpha z_1^{\alpha_1} \cdots z_s^{\alpha_s}$. On pose alors, pour $t \in \mathbb{R}_+^s$:

$$\mathsf{val}_t(f) := \inf\{\langle \alpha | t \rangle \mid a_\alpha \neq 0\}.$$

Proposition 3.3.17. *En gardant les notations précédentes, pour t et f fixés, l'ensemble $\{\langle \alpha | t \rangle \mid a_\alpha \neq 0\}$ a un minimum.*

Démonstration. Posons $m = \inf\{\langle \alpha | t \rangle \mid a_\alpha \neq 0\}$. Considérons l'ensemble $J := \{i \mid t_i \neq 0\}$ et considérons A la projection des α sur les coordonnées de J. Alors, en posant $l = \lceil \min_{i \in J} m/t_i \rceil$, on a :

$$m = \min_{\beta \in A \cap \{1, \cdots, l\}^{|J|}} \sum_{i \in J} \beta_i t_i$$

donc sur un nombre fini d'élément de A. C'est donc bien un minimum, atteint en un certain uplet β_0. Il existe donc un α_0 dont la projection sur J est β_0, puis :

$$\langle \alpha_0 | t \rangle = \sum_{i \in J} \beta_i t_i = \inf\{\langle \alpha | t \rangle \mid a_\alpha \neq 0\}.$$

□

Proposition 3.3.18. *La valuation val_t ne dépend pas de l'isomorphisme choisi.*

Démonstration. On va s'inspirer de la preuve dans [JM12, Prop. 3.1, p.18]. Soit $f \in \widehat{\mathcal{O}_{X,x}}$. Considérons deux isomorphismes entre $\widehat{\mathcal{O}_{X,x}}$ et $k(x)[[z_1, \cdots, z_s]]$, chacun nous donnant deux expressions de f :

$$f = \sum_\alpha a_\alpha z^\alpha \quad \text{et} \quad f = \sum_\alpha b_\alpha z^\alpha$$

avec un automorphisme i de $k(x)[[z_1, \cdots, z_s]]$ tel que

$$i\Big(\sum_\alpha a_\alpha z^\alpha\Big) = \sum_\alpha b_\alpha z^\alpha.$$

Soit maintenant $t \in (\mathbb{R}_+)^s$, on va montrer que

$$\min\{\langle\alpha|t\rangle \mid a_\alpha \neq 0\} = \min\{\langle\alpha|t\rangle \mid b_\alpha \neq 0\}.$$

Posons $i(a_\alpha) = \sum_\gamma a_{\alpha,\gamma} z^\gamma$. On a alors $b_\alpha = \sum_{\gamma\leq\alpha} a_{\gamma,\alpha-\gamma}$.

Alors, si $b_\alpha \neq 0$, il existe $\gamma \leq \alpha$ tel que $a_{\gamma,\beta-\gamma} \neq 0$ puis $a_\gamma \neq 0$. Comme $\langle\gamma|t\rangle \leq \langle\alpha|t\rangle$ on en déduit :

$$\min\{\langle\alpha|t\rangle \mid a_\alpha \neq 0\} \leq \min\{\langle\alpha|t\rangle \mid b_\alpha \neq 0\}.$$

En faisant le même raisonnement avec i^{-1}, on a l'inégalité inverse, d'où le résultat. □

Proposition 3.3.19. *Soit f fixé. Alors il existe un ensemble fini B d'indice α (avec $a_\alpha \neq 0$) tel que* $\mathsf{val}_t(f) = \min_{\alpha\in B}\langle\alpha|t\rangle, \quad \forall t \in (\mathbb{R}_+)^s$.

Démonstration. On va montrer que pour tout sous ensemble A de $\mathbb{N}^s$, il existe un sous-ensemble fini B de A tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^s, \quad \min_{\alpha\in A}\langle\alpha|t\rangle = \min_{\alpha\in B}\langle\alpha|t\rangle.$$

Nous allons prouver le résultat par récurrence sur s, la taille de nos vecteurs. D'abord, pour $s = 1$, les α sont dans $\mathbb{N}$, il suffit de prendre le plus petit pour avoir le résultat.

Supposons maintenant le résultat vrai au rang s, et montrons-le au rang $s+1$. Pour $l \in \mathbb{N}$, posons $A_l := \{(\alpha_1, \cdots, \alpha_s) \mid (\alpha_1, \cdots, \alpha_s, l) \in A\}$. Posons également A' la projection de A sur ses s premières coordonnées : $A' := \{(\alpha_1, \cdots, \alpha_s) \mid \exists m \in \mathbb{N}, (\alpha_1, \cdots, \alpha_s, m) \in A\}$.

On applique l'hypothèse de récurrence à chaque A_l : on trouve alors un ensemble B_l. On va poser $C_l = \{(\beta, l) \mid \beta \in B_l\}$ qui est par définition un sous-ensemble fini de A.

On l'applique également à A', et on trouve un certain ensemble B'. Pour chaque élément β de B', il existe r tel que $(\beta, r) \in A$. Pour chaque $\beta \in B'$, prenons le plus petit possible et appelons le r_β. Ensuite, prenons r_0 le maximum des r_β (pris sur un ensemble fini).

Maintenant, considérons l'ensemble :

$$B = C_0 \cup C_1 \cup \cdots \cdot C_{r_0} \cup \{(\beta, r_\beta) \mid \beta \in B'\}.$$

Montrons que B convient. Soit $\alpha \in A \setminus B$. Posons $\alpha' = (\alpha_1, \cdots, \alpha_s)$. Si $\alpha_{s+1} \leq r_0$, on a $\alpha' \in B_{\alpha_{s+1}}$. Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^s$:

$$\min_{\beta \in B_{\alpha_{s+1}}} \langle \beta | t \rangle \leq \langle \alpha' | t \rangle$$

donc, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^s$ et $u \in \mathbb{R}_+$:

$$\min_{\beta \in B_{\alpha_{s+1}}} \left(\langle \beta | t \rangle + \alpha_{s+1} u \right) \leq \langle \alpha' | t \rangle + \alpha_{s+1} u$$

puis, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^{s+1}$:

$$\min_{\beta \in C_{\alpha_{s+1}}} \langle \beta | t \rangle \leq \langle \alpha | t \rangle$$

d'où, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^{s+1}$:

$$\min_{\beta \in B} \langle \beta | t \rangle \leq \langle \alpha | t \rangle.$$

Supposons maintenant que $\alpha_{s+1} > r_0$ et prenons la même définition pour α'. Alors, on a par hypothèse sur B', pour tout $t \in \mathbb{R}_+^s$:

$$\min_{\beta \in B'} \langle \beta | t \rangle \leq \langle \alpha' | t \rangle$$

donc, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^s$ et $u \in \mathbb{R}_+$:

$$\min_{\beta \in B'} \left(\langle \beta | t \rangle + r_\beta u \right) \leq \min_{\beta \in B'} \left(\langle \beta | t \rangle + r_0 u \right) \leq \langle \alpha' | t \rangle + r_0 u \leq \langle \alpha' | t \rangle + \alpha_{s+1} u$$

puis, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^{s+1}$, on a $\min_{\beta \in B} \langle \beta | t \rangle \leq \langle \alpha | t \rangle$.

On en déduit alors :

$$\min_{\alpha \in B} \langle \alpha | t \rangle \leq \min_{\alpha \in A} \langle \alpha | t \rangle.$$

L'inégalité inverse est immédiate car $B \subset A$.

On a donc montré l'hérédité, puis le résultat.

□

Définition 3.3.20. Soit X une variété. On dira qu'une valuation v est monomiale sur X s'il existe un point régulier x de X, des coordonnées locales $z_1, \cdots, z_s$ au voisinage de x et $t \in \mathbb{R}_+^s$ tel que $v = \mathsf{val}_t$ comme construit à la définition 3.3.16. On dira qu'une valuation v est quasi-monomiale s'il existe un modèle X sur lequel v est monomiale.

Remarque 3.3.21. Dans [Ste18], on montre que les valuations quasi-monomiales de K/k sont exactement les valuations vérifiant les conditions suivantes : Il existe

(i) X un modèle lisse de K/k.

(ii) x un point (schématique) de X.

(iii) Des coordonnées locales $y_1, \cdots, y_s$ en x telles que $v(y_1), \cdots, v(y_s)$ engendrent librement Γ_v.

Proposition 3.3.22. *Soit X un modèle, x un point régulier de X (avec $y_1, \cdots, y_s$ un système de paramètres) et v une valuation monomiale en x avec $\big(v(y_1), \cdots, v(y_s)\big) = (t_1, \cdots, t_s)$. Quitte à réindexer, on peut supposer que $t_1, \cdots, t_{s'} > 0$ et $t_{s'+1}, \cdots, t_s = 0$.*

Alors, le centre de la valuation est le point générique η de $\bigcap_{i=1}^{s'} \overline{\{y_i\}}$.

De plus, v est égale à la valuation monomiale définie en η avec $(y_1, \cdots, y_{s'})$ formant un système régulier de paramètres, et avec $\big(v(y_1), \cdots, v(y_{s'})\big) = (t_1, \cdots, t_{s'})$.

Démonstration. [JM12, Prop 3.1, p.18]. □

En fait, les valuations quasi-monomiales recouvrent une classe assez large de valuations, ce qui sera illustré par les propositions suivantes : l'une disant qu'elles sont d'Abhyankar, l'autre disant qu'en caractéristique zéro, elles décrivent toutes les valuations d'Abhyankar.

Proposition 3.3.23. *Soit v une valuation monomiale en (X, x) avec x régulier. Alors v est d'Abhyankar.*

Démonstration. Soit $z_1, \cdots, z_s$ un système régulier de paramètres en x et t tel que $v = \mathsf{val}_t$. Quitte à réindexer, on peut supposer que les s premières coordonnées de t sont $\mathbb{Q}$-libres et engendrent les suivantes. Soit maintenant y un point fermé de $\overline{\{x\}}$ et complétons $z_1, \cdots, z_s$ en $z_1, \cdots, z_s, z_{s+1} \cdots, z_n$ pour obtenir un système de paramètres au voisinage de y, et $t' \in \mathbb{R}_+^n$ dont les s premières coordonnées sont les mêmes que t et les suivantes sont nulles. D'après la proposition précédente, on a que $\mathsf{val}_{t'} = \mathsf{val}_t = v$. Comme $v(z_1), \cdots, v(z_s)$ sont $\mathbb{Q}$-libres, on a déjà $\mathrm{rg}_{\mathrm{rat}}(v) \geq s$. Par ailleurs, les valeurs prises par les fonctions de $\mathcal{O}_{X,y}$ (donc par celle de K) sont à valeurs dans le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel engendré par $v(z_1), \cdots, v(z_s)$.

$v(z_1), \cdots, v(z_s)$ engendrent $v(z_{s+1}), \cdots, v(z_n)$ $\mathbb{Q}$-linéairement (donc linéairement). Il existe donc un produit de la forme $z_1^{a_1} \cdots z_s^{a_s}$ tel que, pour tout $i \in \{s+1, \cdots, n\}$, il existe $c_i \in \mathbb{Z}$ tel que $z_i' := z_i^{c_i} z_1^{a_1} \cdots z_s^{a_s}$ est de valuation nulle. Montrons alors que les images de $z_{s+1}', \cdots, z_n'$ dans k_v sont algébriquement indépendants sur k. Supposons que ce ne soit pas le cas. On a alors un polynôme P non-nul à coefficient dans k tel que

$$P(\overline{z_{s+1}'}, \cdots, \overline{z_n'}) = 0$$

d'où $P(z_{s+1}', \cdots, z_n')$ est soit nul, soit de valuation strictement positive. Nous allons montrer qu'il est de valuation nulle. Déjà, remarquons que la valuation d'un polynôme

en $z_1, \cdots, z_n$ est égal au minimum de la valuation de ses monômes (par définition d'une valuation monomiale en $z_1, \cdots, z_n$). Considérons maintenant un produit $z_1^{b_1} \cdots z_s^{b_s}$ avec $b_1, \cdots, b_s$ suffisament grands pour que $Q := z_1^{b_1} \cdots z_s^{b_s} P(z'_{s+1}, \cdots, z'_n)$ soit un polynôme en $z_1, \cdots, z_n$. Comme les $z'_{s+1}, \cdots, z'_n$ sont de valuation nulle, tous les monômes de Q ont la même valuation, à savoir $\sum_{i=1}^s b_i t_i$, d'où $v(Q) = \sum_{i=1}^s b_i t_i$. Or, on a également que $v\big(P(z'_{s+1}, \cdots, z'_n)\big) = v(Q) - v(z_1^{b_1} \cdots z_s^{b_s}) = 0$. Ainsi, $P(z'_{s+1}, \cdots, z'_n)$ est nul, or les $z'_{s+1}, \cdots, z'_n$ sont algébriquement indépendants, donc P est nul, puis les $\overline{z'_{s+1}}, \cdots, \overline{z'_n}$ sont algébriquement indépendants. Ainsi, $\deg_{\mathrm{tr}}(v) \geq n - s$, puis $\mathrm{rg}_{\mathrm{rat}}(v) + \deg_{\mathrm{tr}}(v) \geq n$, ce qui montre que v est nécessairement d'Abhyankar.

□

Théorème 3.3.24. *Supposons k de caractéristique zéro et soit v une valuation d'Abhyankar. Alors il existe un modèle lisse X' de K/k et un point x de X' sur lequel v est quasi-monomiale.*

Démonstration. La preuve de [Ste18, th. 5.7] utilise la caractérisation d'une valuation quasi-monomiale donnée à la remarque 3.3.21. Sa preuve montre un résultat plus général, à savoir : si on a un modèle avec une valuation d'Abhyankar (centrée), alors il existe un deuxième modèle, dominant le premier, lisse, sur lequel la valuation est monomiale.

Posons $r = \mathrm{rg}_{\mathrm{rat}}(v)$ et considérons $f_1, \cdots, f_r$ engendrant Γ_v (qu'on peut supposer de valuation > 0 quitte à prendre leur inverse). On se place sur la variété $X = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_v$, vérifiant donc $f_1, \cdots, f_r \in \mathcal{O}_v$ et $\dim\big(c_X(v)\big) = \dim(\mathcal{O}_v) = \deg_{\mathrm{tr}}(v)$. On peut donc ensuite procéder exactement comme dans la preuve de [Ste18, th. 5.7]. Ici, la caractéristique zéro est nécessaire pour effectuer une résolution des singularités.

□

3.4 Valuations et suites graduées d'idéaux

On considère X un modèle de K/k et v une valuation sur X, de centre ξ.

3.4.1 Valuations sur un idéal

Soit $\mathfrak{a}$ un idéal sur X. On évalue v sur $\mathfrak{a}$ en localisant au centre de v :

Définition 3.4.1. On pose :

$$v(\mathfrak{a}) \quad = \quad \inf\{v(f) \mid f \in \mathfrak{a}_\xi\} \in \mathbb{R}_+. \tag{3.4}$$

On a alors facilement la proposition suivante :

Proposition 3.4.2. *Soit $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ des idéaux de X. On a :*

- $v(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) = \min\{v(\mathfrak{a}); v(\mathfrak{b})\}$.
- $v(\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b}) = v(\mathfrak{a}) + v(\mathfrak{b})$.

3.4.2 Suites graduées d'idéaux

Définition 3.4.3. Soit $\mathfrak{a}_i, i \in \mathbb{N}$ une suite d'idéaux de X indexée dans $\mathbb{N}$ et vérifiant $\mathfrak{a}_i \cdot \mathfrak{a}_j \subset \mathfrak{a}_{i+j}$ pour tout $i, j \in \mathbb{N}$. Une telle suite sera appelée une suite graduée d'idéaux.

Venons-en maintenant à deux exemples de suites graduées d'idéaux qui seront utilisées par la suite : les suites graduées associées à une valuation et les suites graduées associées à un fibré en droite.

Définition 3.4.4. On définit $\mathfrak{a}_i(v)$ la suite graduée d'idéaux sur X associée à v pour tout $i \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} &\mathfrak{a}_i(v)(U) := \{f \in \mathcal{O}_X(U) \mid v(f) \geq i\} && \text{si } U \text{ contient le centre } \xi \\ &\mathfrak{a}_i(v)(U) := \mathcal{O}_X(U) && \text{sinon.} \end{aligned}$$

On vérifie aisément que $\mathfrak{a}_i(v) \cdot \mathfrak{a}_j(v) \subset \mathfrak{a}_{i+j}(v)$.

Mais à présent, il faut vérifier que les $\mathfrak{a}_i(v)$ forment des idéaux de X *i.e* qu'ils sont cohérents. D'abord, ils sont quasi-cohérents car sur tout ouvert affine $\operatorname{Spec} A$, ils correspondent à un idéal de A par construction. Ensuite, grâce à [Har77, prop. 5.9, p.116], on sait que tout faisceau d'idéaux quasi-cohérent sur un schéma nœthérien est cohérent, d'où le résultat.

Ensuite, venons-en aux suites graduées d'idéaux associées à un fibré en droites :

Définition 3.4.5. Soit X, Y des variétés algébriques telles qu'on a un morphisme projectif $\pi : X \to Y$ et soit L un fibré en droites sur X. On considère alors, pour tout $m \in \mathbb{N}$, l'idéal de base $\mathfrak{b}_\pi(mL)$ relatif de mL (voir 1.3.1). Alors, les $\mathfrak{b}_\pi(mL)$ vérifient :

$$\mathfrak{b}_\pi(mL) \cdot \mathfrak{b}_\pi(m'L) \subset \mathfrak{b}_\pi\big((m+m')L\big).$$

On obtient donc une suite graduée d'idéaux de X.

Mais nous allons définir un troisième type de suite graduée d'idéaux, qui dans un certain sens est un produit des deux précédentes : la suite d'idéaux d'une valuation, mais tordue par un fibré en droites.

Exemple 3.4.6. Soit m un entier, L un fibré en droites et v une valuation. Soit $V_m := H^0\big(X, mL \otimes \mathfrak{a}_m(v)\big)$, sous-espace vectoriel de $H^0(X, mL)$. On pose :

$$\mathfrak{a}_m^L(v) := \mathfrak{b}(V_m, mL).$$

On rappelle que $\mathfrak{b}(V_m, mL)$ est l'idéal de base de (V_m, mL), défini en 1.2.4. La suite $(\mathfrak{a}_\bullet^L(v))$ forme une suite graduée d'idéaux.

3.4.3 Valuations d'une suite graduée d'idéaux

Définition 3.4.7. Soit $\mathfrak{a}_\bullet$ une suite d'idéaux de X et v une valuation sur X. On regarde la suite $v(\mathfrak{a}_\mathfrak{m})$. Comme $\mathfrak{a}_m \cdot \mathfrak{a}_n \subset \mathfrak{a}_{m+n}$, la suite $\big(v(\mathfrak{a}_m)\big)_{m\in\mathbb{N}}$ est sous-additive. Ainsi, d'après le lemme de Fekete, $\big(\frac{1}{m}v(\mathfrak{a}_m)\big)_{m\in\mathbb{N}}$ converge, et on pose :

$$v(\mathfrak{a}_\bullet) \quad := \lim_{m\to+\infty, \mathfrak{a}_m\neq\{0\}} \frac{1}{m} v(\mathfrak{a}_m) \quad = \inf_{m\in\mathbb{N}, \mathfrak{a}_m\neq\{0\}} \frac{1}{m} v(\mathfrak{a}_m).$$

Remarque 3.4.8. Un des éléments centraux développé dans cette thèse sera justement la compréhension de fonctions de la forme $v \mapsto v(\mathfrak{a}_\bullet)$, leur étude et leur lien avec l'existence d'une décomposition de Zariski.

Définition 3.4.9. On notera, pour v_0, v des valuations :

$$\varphi_{v_0}(v) := v\big(\mathfrak{a}_\bullet(v_0)\big).$$

Si L est un fibré en droites, on notera :

$$\varphi_{v_0}^L(v) := v\big(\mathfrak{a}_\bullet^L(v_0)\big).$$

$\varphi_{v_0}^L$ sera appelée la fonction d'Izumi associée à (v_0, L). φ_{v_0} sera simplement appelé la fonction d'Izumi associé à v_0.

Les évaluations asymptotiques $\varphi_{v_0}(v) = v\big(\mathfrak{a}_\bullet(v_0)\big)$ vont apparaître comme la pente entre deux valuations.

Pour la fin de ce chapitre, nous supposerons k de caractéristique 0. Rappelons le théorème de comparaison d'Izumi :

Théorème 3.4.10 (Izumi)**.** *Soit v, w deux valuations divisorielles sur X avec $\xi := c_X(v) \in \overline{\{c_X(w)\}}$. Alors, il existe une constante non-nulle C telle que $Cw \leq v$.*

Démonstration. On peut trouver ce fait généralisé aux valuations d'Abhyankar dans [ELS03, Cor. 2.5, p.11]. □

Grâce à nos valuations asymptotiques sur les suites graduées d'idéaux, nous allons pouvoir exprimer les "meilleures" constantes possibles.

Proposition 3.4.11. *Soit v, w deux valuations divisorielles sur X avec $\xi := c_X(v) \in \overline{\{c_X(w)\}}$. Alors $v\big(\mathfrak{a}_\bullet(w)\big)w \leq v$ et :*

$$\forall C \geq 0, Cw \leq v \Longrightarrow C \leq v\big(\mathfrak{a}_\bullet(w)\big).$$

Cela prouve également que $v\big(\mathfrak{a}_\bullet(w)\big)$ est non-nulle.

Démonstration. Prouvons que $v\big(\mathfrak{a}_\bullet(w)\big)w(f) \leq v(f)$ et que $v\big(\mathfrak{a}_\bullet(w)\big)$ est la meilleure constante possible. On va chercher à évaluer cette constante en utilisant les suites graduées d'idéaux.

Calculons $\inf_{f \in \mathcal{O}_{X,\xi}} \frac{v(f)}{w(f)}$:

$$\begin{aligned}
\inf_{f \in \mathcal{O}_{X,\xi}} \frac{v(f)}{w(f)} &= \inf_{m \in \mathbb{N}} \inf_{f \in \mathfrak{a}_m(w)} \frac{v(f)}{w(f)} && (3.5)\\
&= \inf_{m \in \mathbb{N}} \frac{1}{m} \inf\{v(f) \mid f \in \mathcal{O}_{X,\xi} \text{ et } w(f) \geq m\} && (3.6)\\
&= \inf_{m \in \mathbb{N}} \frac{1}{m} v\big(\mathfrak{a}_m(w)\big) && (3.7)\\
&= v\big(\mathfrak{a}_\bullet(w)\big). && (3.8)
\end{aligned}$$

La meilleure constante C qu'on peut prendre est donc $\varphi_w(v) = v\big(\mathfrak{a}_\bullet(w)\big)$, qui est non nulle grâce au théorème d'Izumi. □

Chapitre 4

Espaces de valuations et fonctions PL

Dans ce chapitre, nous approfondissons l'étude de l'ensemble des valuations comme espace topologique. Nous nous intéressons aux fonctions sur cet espace, particulièrement aux fonctions d'évaluation des diviseurs, ainsi que l'étude de leur régularité. C'est ainsi que nous introduirons en fin de chapitre les notions de fonctions PL.

Soit X une variété. Rappelons que Val_X (introduit à la définition 3.2.13) est l'ensemble des valuations de X (qui ont donc un centre dans X).

4.1 Topologie de l'espace des valuations sur X et fonctions remarquables

On peut déjà munir Val_X de la topologie de la convergence simple en considérant les valuations comme des fonctions de $K(X)^\times \to \mathbb{R}$, que nous noterons $\mathcal{T}$. Les $W(f,U) := \{v \in \mathrm{Val}_X \mid v(f) \in U\}$ où f est une fonction rationnelle et U un ouvert de $\mathbb{R}$ forment alors une prébase de $\mathcal{T}$.

Définition 4.1.1. Pour tout $f \in K(X)^\times$, on définit la fonction $\varphi_f : \mathrm{Val}_X \to \mathbb{R}$ par $\varphi_f(v) = v(f)$. La topologie placée sur Val_X est exactement la topologie la plus grossière rendant les φ_f continues.

Définition 4.1.2. Pour tout $\mathfrak{a}$ idéal de X, on définit l'application $\varphi_\mathfrak{a} : \mathrm{Val}_X \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi_\mathfrak{a}(v) = v(\mathfrak{a})$.

Soit $v \in \mathrm{Val}_X$. Si $\mathfrak{a}$ est localement principal, de générateur $f \in \mathcal{O}_{X,\xi} \subset K(X)$ en le localisant au centre $\xi = c_X(v)$, alors $\varphi_\mathfrak{a} = \varphi_f$.

On a déjà muni Val_X d'une relation d'ordre partielle à la définition 3.2.14. En fait, on peut la définir également à partir des idéaux :

Proposition 4.1.3. *Pour tout $v, w \in \mathrm{Val}_X$, on a $v \leq w$* si et seulement si

$$v(\mathfrak{a}) \leq w(\mathfrak{a}) \quad \forall \mathfrak{a} \text{ idéal de } X.$$

Démonstration. [JM12, Lem. 4.4, p.25] : Posons $\eta = c_X(w)$ et $\xi = c_X(v)$. Supposons d'abord que $v \leq w$. On a alors $\eta \in \overline{\{\xi\}}$ et $v(f) \leq w(f)$ pour tout $f \in \mathcal{O}_{X,\eta}$. Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de X. On a alors :

$$v(\mathfrak{a}) = \min_{f \in \mathfrak{a}_\xi} v(f) \leq \min_{f \in \mathfrak{a}_\eta} v(f) \leq \min_{f \in \mathfrak{a}_\eta} w(f) = w(\mathfrak{a}).$$

Réciproquement, supposons que $v(\mathfrak{a}) \leq w(\mathfrak{a})$ pour tout $\mathfrak{a}$ idéal de X. Considérons $I_{\overline{\{\xi\}}}$, l'idéal définissant $\overline{\{\xi\}}$. Alors $w(I_{\overline{\{\xi\}}}) \geq v(I_{\overline{\{\xi\}}}) > 0$ d'où $\eta \in \overline{\{\xi\}}$. Ensuite, soit $f \in \mathcal{O}_{X,\eta}$. De même qu'à la définition 3.4.4, on peut définir l'idéal de valuation $\mathfrak{a}_i(v)$, mais en ne prenant pas nécessairement i entier. On obtient cependant également un idéal sur X, la preuve de la cohérence ne nécessitant nullement i entier. On considère alors l'idéal $\mathfrak{a} := \mathfrak{a}_{v(f)}(v)$. On a alors :

$$v(f) = v(\mathfrak{a}) \leq w(\mathfrak{a}) \leq w(f)$$

d'où le résultat.

□

Les $\varphi_\mathfrak{a}$ ont de bonnes propriétés pour les opérations naturelles sur les idéaux. En effet, par une simple réécriture de la proposition 3.4.2, on obtient :

Proposition 4.1.4. *Pour $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}'$ deux idéaux de X, on a :*

$$\varphi_{\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{a}'} = \varphi_\mathfrak{a} + \varphi_{\mathfrak{a}'} \text{ et } \varphi_{\mathfrak{a}+\mathfrak{a}'} = \min\{\varphi_\mathfrak{a}; \varphi_{\mathfrak{a}'}\}. \tag{4.1}$$

On va définir maintenant une troisième classe de fonctions φ à partir des diviseurs, mais avant ça, on va avoir besoin de définir $v(D)$ pour un $\mathbb{R}$-diviseur de Cartier.

Définition 4.1.5. Soit E un diviseur de Cartier. On choisit une équation locale f de E au centre de v. On pose alors $v(E) := v(f)$. On voit aisément que pour E, F diviseur de Cartier, on a $v(E+F) = v(E)+v(F)$. On étend naturellement la définition aux $\mathbb{R}$-diviseurs de Cartier par linéarité en posant $v(\sum_l a_l E_l) = \sum_l a_l v(E_l)$.

Remarque 4.1.6. Comme précisé à la remarque 3.3.10, si $v = \mathrm{ord}_W$ avec W une sous-variété non contenue dans X_{sing}, $\mathrm{ord}_W(E)$ correspond à $\mathrm{mult}_W(E)$, la multiplicité de E le long de W, définie par exemple dans [Nak04] et [Les16].

On peut donc poser :

Définition 4.1.7. Pour tout $\mathbb{R}$-diviseur de Cartier D défini sur un modèle X' dominant X, on définit application $\varphi_D : \mathrm{Val}_X \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi_D(v) = v(D)$.

Remarque 4.1.8. Pour un diviseur D effectif, on a $\varphi_D = \varphi_{\mathcal{O}_X(-D)}$.

Maintenant, considérons la fonction centre $c_X : \mathrm{Val}_X \to X$, qui envoie toute valuation sur son centre dans X. Alors :

Proposition 4.1.9. *c_X est anti-continue. Précisément, si U est un ouvert de X, $c_X^{-1}(U) = \mathrm{Val}_U$ est fermé dans Val_X.*

Démonstration. Soit U un ouvert non-vide de X. L'image réciproque de U par l'application au-dessus est l'ensemble des valuations sur X avec un centre dans U, ce qui par densité de U dans X (donc égalité de leur corps de fractions) est exactement Val_U. Il reste donc à montrer que Val_U est fermé dans Val_X. Pour cela, il suffit de remarquer que le centre d'une valuation v est dans U si et seulement si $v(f) \geq 0$ pour tout $f \in \mathcal{O}_X(U)$, puis :

$$\mathrm{Val}_U = \bigcap_{h \in \mathcal{O}_X(U)} \{v \in \mathrm{Val}_X \mid v(h) \geq 0\}$$

qui est bien un fermé pour notre topologie.

□

Venons-en maintenant au lien entre les différentes fonctions remarquables sur Val_X, définies précédemment.

Théorème 4.1.10. *Les propositions suivantes sont vérifiées :*

(i) Les $\varphi_{\mathfrak{a}}$ et les φ_D sont continues pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de X et tout diviseur de Cartier D sur $X' \geq X$.

(ii) La topologie définie par les $\varphi_{\mathfrak{a}}$ est la même que $\mathcal{T}$ (celle définie précédemment sur Val_X).

(iii) En notant $< \{\varphi_{\mathfrak{a}}\} >$ le groupe additif engendré par les $\varphi_{\mathfrak{a}}$, on a :

$$< \{\varphi_{\mathfrak{a}}\} >= \{\varphi_D\}.$$

Démonstration. (i). Cela découlera de (ii) et de (iii).

(ii). Pour montrer que les topologies sont les mêmes, on va utiliser la preuve de [JM12, Lem. 4.1 p.25]. Si X est affine, alors tout idéal $\mathfrak{a}$ de X est engendré par un nombre fini de fonctions régulières $f_1, \cdots, f_k$, puis $\varphi_{\mathfrak{a}} = \min_i \varphi_{f_i}$ (grâce à la proposition 4.1.4), d'où l'égalité des topologies dans le cas affine. On se ramène ensuite au cas affine en considérant un recouvrement de X par des ouverts affines U de X et en rappelant que les Val_U sont des fermés de Val_X.

(iii) Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de X. Posons $X' = \mathcal{B}l_{\mathfrak{a}}(X)$ et μ le morphisme de l'éclatement. Alors $\mu^*(\mathfrak{a})$ devient un idéal localement principal, correspondant alors à un diviseur de Cartier effectif D ce qui nous donne $\varphi_{\mathfrak{a}} = \varphi_D$. Cela montre déjà une inclusion.

Soit à présent X' un variété dominant X et D un diviseur sur X'. On peut voir X' comme un X-schéma ; de plus X' est une variété donc de type fini sur X, et X est une variété donc un schéma nœthérien. On peut donc appliquer le corollaire du lemme de Chow de [GD61, Cor. 5.6.2, p.106] pour obtenir une variété $X'' \geq X'$, avec un morphisme projectif $\mu' : X'' \to X$ dominant le morphisme propre $\mu : X' \to X$. On considère alors D' le tiré-en-arrière de D sur X''. Comme μ' est projectif, il existe un diviseur A μ'-ample sur X''. Ainsi, pour $m \in \mathbb{N}$ suffisamment grand, on a mA et $mA - D'$ μ'-très ample, donc μ'-sans point-base. Par ailleurs, on a :

$$\varphi_D = \varphi_{D'} = \varphi_{D'-mA} - \varphi_{-mA}.$$

Il suffit alors de montrer que pour un diviseur E sur $\tilde{X} \geq X$ tel que $-E$ est ρ-sans point-base (avec $\rho : \tilde{X} \to X$ un modèle dominant), E s'écrit comme différence de fonctions associées à des idéaux sur X. On pose alors $I := \mathcal{O}_{\tilde{X}}(-E)$ et $J := \rho_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}(-E)$. J n'est qu'un idéal fractionnaire sur X, c'est-à-dire un sous-module cohérent du faisceau des fonctions rationnelles. On peut néanmoins définir φ_J de la même manière qu'on l'a fait pour les idéaux (non-fractionnaires) sur X.

Comme $-E$ est ρ-sans point-base :

$$\rho^* J = \rho^*\rho_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}(-E) = \mathcal{O}_{\tilde{X}}(-E) = I$$

d'où $\varphi_J = \varphi_E$.

On veut donc maintenant écrire φ_J comme différence de fonctions $\varphi_{\mathfrak{a}}$ associées à des idéaux sur X. Pour cela, on considère le faisceau d'idéaux des pôles de J : $P := \{f \in \mathcal{O}_X, fJ \subset \mathcal{O}_X\}$, qui localement sur des ouverts affines va être donné par un idéal ; ainsi, ce faisceau va être quasi-cohérent donc cohérent. Par construction, $Q := PJ$ est alors un idéal de X. On écrit alors $\varphi_J = \varphi_Q - \varphi_P$, ce qui conclut la preuve. □

Définition 4.1.11. Les fonctions φ_D sur Val_X avec D un $\mathbb{R}$-diviseur de Cartier sur une extension $X' \geq X$ sont appelées PL (piecewise linear).

La raison de la terminologie "linéaire par morceaux" pour ces fonctions sera justifiée à la section 4.4 où nous verrons que les fonctions PL ainsi définies proviennent de fonctions linéaires par morceaux sur certains complexes simpliciaux coniques. Pour une approche via les espaces de Berkovich de telles fonctions, on pourra se référer à [GM19] ou [CLD12].

Remarque 4.1.12. Les fonctions PL ainsi introduites correspondent exactement aux b-diviseurs de Cartier réels. En effet, la fonctions φ_D ne dépend que du b-diviseur associé à D. L'application $D \mapsto \varphi_D$ permet de passer du b-diviseur à la fonction PL, et sa réciproque

$$\psi \longmapsto \sum_{\mathrm{ord}_E \text{ divisorielle}} \psi(\mathrm{ord}_E)E$$

permet de passer de la fonction au b-diviseur.

4.2 Valuations quasi-monomiales et paires SNC

Nous allons étudier les modèles d'une variété dont l'ensemble des valuations monomiales servira de briques élémentaires pour l'espace des valuations : les paires SNC.

Définition 4.2.1. Soit X une variété *lisse* et $D = \sum_i E_i$ un diviseur effectif réduit. On dira que la paire (X, D) est une paire SNC si :

- Pour tout i, E_i est lisse.
- En tout point x de X, il existe des coordonnées locales $z_1, \cdots, z_n$ telles que $z_1 \cdots z_l = 0$ $(l \leq n)$ est l'équation locale de D.
- $\bigcap_{i \in J} E_i$ est connexe pour tout J sous-ensemble des indices des (E_i).

Remarque 4.2.2. La condition "$\bigcap_{i \in J} E_i$ est connexe pour tout $E_i, i \in J$ sous-ensemble des E_i", que nous imposons par commodité, n'est pas une vraie restriction. En effet, puisque nous travaillons à modèle dominant près (car cela ne change pas l'espace des valuations), sur une paire SNC (X, D) mais sans notre hypothèse de connexité, on se ramène au cas SNC en effectuant les bons éclatements.

La condition de connexité nous permet de donner une description plus simple du complexe dual, que nous introduisons juste après.

4.2.1 Le complexe dual d'une variété SNC

Définition 4.2.3. Soit (X, D) une paire SNC avec $D = \sum_i E_i$ sa décomposition en diviseur premier. On définit le complexe (conique) dual $\Delta(X, D)$ de la manière suivante :

- Pour chaque diviseur premier E_i, on a un rayon générateur $\mathbb{R}_+ e_i$.
- Pour chaque $J \subset I$ tel que $\bigcap_{j \in J} E_j \neq \varnothing$, on définit σ_J la face engendrée par les $\mathbb{R}_+ e_j, j \in J$.

Par construction, c'est un éventail de $\mathbb{R}^s$, de support donné par :

$$\Big\{t = \sum_i t_i e_i \mid t_i \geq 0, \quad \bigcap_{i|t_i>0} E_i \neq \varnothing\Big\}.$$

Définition 4.2.4. Soit (X, D) une paire SNC et $D = \sum_i E_i$. On considère l'application de Val_X dans $(\mathbb{R}_+)^s$: $v \mapsto \Big(v(E_1), \cdots, v(E_s)\Big)$. On remarque que son image est contenue dans $|\Delta(X, D)|$ et on note $r_{X,D}$ l'application de Val_X dans $|\Delta(X, D)|$ induite. On l'appelle la rétraction sur $\Delta(X, D)$.

Comme on le verra à la sous-section suivante, l'image est $|\Delta(X, D)|$ tout entier.

4.2.2 Le complexe des valuations

On va plonger $|\Delta(X, D)|$ dans Val_X de manière équivariante par homothétie réelle :

Définition 4.2.5. Soit $t = (t_1, \cdots, t_s) = \sum_{i=1}^s t_i e_i \in \Delta(X, D)$, et soit $J \subset I$ son support. On a alors $\bigcap_{j\in J} E_j \neq \varnothing$. Soit η_J le point générique de $\bigcap_{j\in J} E_j$ et considérons des coordonnées locales $(z_j, j \in J)$ de η_J avec E_j défini localement par $\{z_j = 0\}$. Comme à la sous-section 3.3.3, on construit une valuation quasi-monomiale utilisant $k(\eta_J)[[z_j, j \in J]] \simeq \widehat{\mathcal{O}_{X,\eta_J}}$ en posant :

$$\mathsf{val}_t\Big(\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^J} a_\alpha z^\alpha\Big) := \min\Big\{\langle t_{|J}|\alpha\rangle \mid a_\alpha \neq 0\Big\}.$$

La définition précédente permet pour tout point $t \in \Delta(X, D)$ de construire une valuation val_t qui vérifie par construction $r_{X,D}(\mathsf{val}_t) = t$. Cela montre que $r_{X,D}$ est bien surjective sur $\Delta(X, D)$.

Proposition 4.2.6. *L'application $t \mapsto \mathsf{val}_t$ est un homéomorphisme de $\Delta(X, D)$ sur son image dans Val_X.*

Démonstration. Grâce à [JM12, Prop 3.1, p.18], on a que l'application définie au-dessus est continue. Ensuite, en notant $D = \sum_{i=1}^s E_i$, on peut considérer la rétraction $r_{X,D}$ de Val_X dans $\Delta(X, D)$: $v \mapsto \Big(v(E_1), \cdots, v(E_s)\Big)$. Cette application est continue car les φ_{E_i} sont continues, et sa restriction à l'image de $\Delta(X, D)$ nous donne un inverse. D'où le résultat. □

À partir de maintenant, on identifiera $\Delta(X, D)$ à son image dans Val_X.

4.3 Structure de l'espace des valuations sur X : le théorème d'homéomorphisme

Pour la suite de cette section, nous supposerons k de caractéristique 0.

Définition 4.3.1. On dit qu'une paire SNC (Y, D) est une paire SNC au-dessus de X si $Y \geq X$.

Remarque 4.3.2.

— On munit l'ensemble des paires SNC au-dessus X (à isomorphisme près) d'une relation d'ordre partielle en posant $(Y', D') \geq_X (Y, D)$ si on a $Y' \geq Y$ avec $\mathrm{supp}\big(\phi^*(D)\big) \subset \mathrm{supp}(D')$.

— Grâce au travail fait en 4.2.2, pour toute paire (Y, D) SNC sur X, on a une inclusion $\Delta(Y, D) \subset \mathrm{Val}_X = \mathrm{Val}_Y$.

Définition 4.3.3. Pour un idéal $\mathfrak{a}$ de X, on dira qu'une paire SNC (Y, D) de X est une log-résolution de $\mathfrak{a}$ si $\mathfrak{a}\mathcal{O}_Y$ est l'idéal d'un diviseur dont les composantes sont parmi celles de D.

Proposition 4.3.4. *Pour toute valuation v de X quasi-monomiale, il existe une paire (Y, D) SNC au-dessus de X telle que $v \in \Delta(Y, D)$. Autrement dit, en notant Val_X^{qm} l'ensemble des valuations quasi-monomiales, on a :*

$$\mathrm{Val}_X^{qm} = \bigcup_{(Y,D)} \Delta(Y, D). \tag{4.2}$$

Démonstration. [JM12, rem 3.3 & 3.4, p.20]. Ici, la caractéristique zéro est nécessaire pour avoir la résolution des singularités. □

Maintenant, des propriétés pour les rétractions de l'espace des valuations sur $\Delta(Y, D)$:

Proposition 4.3.5. *Pour tout paire (Y, D) SNC au-dessus de X, l'application $r_{Y,D}$ est continue de Val_X vers $\Delta(Y, D)$ et vaut l'identité sur $\Delta(Y, D)$. De plus, si $(Y', D') \geq_X (Y, D)$, alors on a $\Delta(Y, D) \subset \Delta(Y', D')$ et $r_{Y,D} \circ r_{Y',D'} = r_{Y,D}$.*

Démonstration. [JM12, Lem. 4.6, p.26] : Par l'identification entre $\Delta(Y, D)$ et son image dans Val_X, $r_{Y,D}$ vaut automatiquement l'identité sur $\Delta(Y, D)$. Ensuite, soit $(Y', D') \geq_X (Y, D)$, $v \in \mathrm{Val}_X$ et $v' = r_{Y',D'}(v)$. Notons E_i et E_i' les composantes irréductibles respectives de D et D', alors, en notant μ le morphisme birationnel entre Y' et Y, on a $\mu^*(E_i) = \sum_j a_{ij} E_i'$ pour des $a_{ij} \geq 0$. On a alors :

$$v(E_i) = \sum_j a_{ij} v(E_i') = \sum_j a_{ij} v'(E_i') = v'(E_i)$$

d'où $r_{Y,D}(v) = r_{Y,D}(v')$, d'où le résultat. $\square$

Enfin, une autre propriété de la rétraction :

Proposition 4.3.6. *Pour toute valuation $v \in \mathrm{Val}_X$, on a $r_{Y,D}(v) \leq v$ pour toute paire SNC. De plus, si (Y, D) est une log-résolution de $\mathfrak{a}$, alors $r_{Y,D}(v)(\mathfrak{a}) = v(\mathfrak{a})$.*

Démonstration. [JM12, Cor. 4.8, p.27]. $\square$

On en vient au théorème de structure de Val_X, qui nous dit que toute valuation peut être obtenue comme limite de valuations quasi-monomiales.

Théorème 4.3.7. *La limite projective r des rétractions induit un homéomorphisme :*

$$r : \mathrm{Val}_X \to \varprojlim_{(Y,D)} \Delta(Y, D).$$

Démonstration. [JM12, thm. 4.9, p.27] : comme les rétractions sont continues, r est continue. On va construire son inverse et on montrera qu'il est continue. Soit une limite projective de valuations compatibles $(v_{Y,D})$. On va définir une fonction v de la façon suivante : pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de X, on pose $v(\mathfrak{a}) := \sup_{(Y,D)} v_{Y,D}(\mathfrak{a})$. D'après la proposition précédente, si $(Y', D') \geq_X (Y, D)$, alors $v_{Y',D'} \geq v_{Y,D}$.

Soit $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ deux idéaux de X. Comme nous sommes en caractéristique zéro, il existe (Y, D) une log-résolution de $\mathfrak{a}$ et de $\mathfrak{b}$. On a alors :

$$v(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = v_{Y,D}(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = \min\{v_{Y,D}(\mathfrak{a}), v_{Y,D}(\mathfrak{b})\}$$

et de même pour l'axiome de multiplicativité. Ainsi, en considérant l'idéal $f\mathcal{O}_X$ pour $f \in K(X)$, cela nous définit bien une valuation de $K(X)/k$.

Quant au centre, comme $(Y', D') \geq_X (Y, D)$ implique $c_X(v_{Y',D'}) \in \overline{\{c_X(v_{Y,D})\}}$, il existe un élément minimal parmi tous les $c_X(v_{Y,D})$ (pour l'inclusion et parce que la dimension est finie). On vérifie aisément que cet élément constitue un centre.

Enfin, pour la continuité de la réciproque, soit $((v^k_{Y,D}))_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\varprojlim_{(Y,D)} \Delta(Y, D)$ convergeant vers un élément $(v_{Y,D})$ pour la topologie de la limite projective. Soit un idéal $\mathfrak{a}$ de X et (Y_0, D_0) une log-résolution de $\mathfrak{a}$. Alors $(v^k_{Y_0,D_0})$ converge vers v_{Y_0,D_0} puis $r^{-1}(v^k_{Y,D})(\mathfrak{a}) = v^k_{Y_0,D_0}(\mathfrak{a})$ converge vers $r^{-1}(v_{Y,D})(\mathfrak{a}) = v_{Y_0,D_0}(\mathfrak{a})$. Ainsi, comme c'est vrai pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de X, on a bien que $r^{-1}(v^k_{Y,D})$ converge vers $r^{-1}(v_{Y,D})$, ce qui montre la continuité.

$\square$

Corollaire 4.3.8. *Les valuations quasi-monomiales ainsi que les valuations divisorielles sont denses dans* Val_X.

Démonstration. La première assertion est juste grâce à la proposition 4.3.4 car alors toute valuation peut s'écrire comme une limite convergente de valuations quasi-monomiales. Pour la deuxième, on remarque que les valuations divisorielles sont exactement les valuations quasi-monomiales de rang rationnel 1. Ainsi, par la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, les valuations divisorielles sont denses dans tous les $\Delta(Y, D)$ puis dans Val_X. □

4.4 Fonctions PL

4.4.1 Fonctions PL sur un complexe simplicial

Considérons (Y, D) une paire SNC sur X, avec $D = \sum_i E_i$.

Définition 4.4.1. On dira qu'une fonction ψ sur un complexe conique Δ est linéaire si elle est linéaire sur chacune de ses faces.

Remarque 4.4.2. Une fonction linéaire sur un complexe est entièrement déterminée par les valeurs prises sur les rayons.

Définition 4.4.3. On dit qu'une fonction ψ sur un complexe Δ est PL s'il existe un rafinement rationnel Δ' de Δ rendant ψ linéaire sur Δ'.

On pose $\mathrm{PL}\big(\Delta\big)$ l'ensemble des fonctions PL sur Δ. Ainsi, $\mathrm{PL}\big(\Delta\big)$ est la réunion des fonctions linéaires sur Δ', où Δ' parcourt l'ensemble des raffinements rationnels de Δ. $\mathrm{PL}\big(\Delta\big)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, dont tous les éléments sont linéaires sur un raffinement rationnel de Δ.

On caractérise les fonctions PL de la façon suivante :

Proposition 4.4.4. *Soit ψ une fonction continue de $\Delta(Y, D)$. ψ est PL* si et seulement si *il existe un $\mathbb{R}$-diviseur D'' sur un modèle dominant Y' de Y et un diviseur D' sur Y' avec $(Y', D') \geq (Y, D)$, tel que $\psi = \varphi_{D''}$ sur $\Delta(Y', D')$.*

Démonstration. Soit ψ une fonction PL sur $\Delta(Y, D)$. Il existe donc un raffinement rationnel Δ' de $\Delta(Y, D)$ sur lequel ψ est linéaire. Grâce à la théorie des plongements toroïdaux, présente dans [KKMSD73], on va monter qu'il existe une paire SNC $(Y', D') \geq (Y, D)$ tel que $\Delta(Y', D')$ est un raffinement de Δ', donc de $\Delta(Y, D)$. En effet, pour chaque plongement toroïdal, on définit un cône polyhédral Δ (p.71 et thm. 1 p.74) — la définition dans cette thèse au 4.2.3 de $\Delta(X, D)$ avec (X, D) SNC en est un cas particulier — de telle sorte qu'un raffinement rationnel correspond à une modification toroïdale (thm. 3 p.85). On obtient alors un plongement toroïdal

(Y_1, D_1) dominant (Y, D), tel que $\Delta(Y_1, D_1) = \Delta'$. Cependant, (Y_1, D_1) n'est pas nécessairement SNC ; en effet, un plongement toroïdal est lisse si et seulement si il est SNC, et Y_1 n'est pas nécessairement lisse. Mais grâce au thm. 11 p.94, on a un éclatement normalisé Y' de Y_1 qui donne un nouveau plongement toroïdal (Y', D') avec Y' lisse. (Y', D') est alors bien SNC avec $\Delta(Y', D')$ raffinement rationnel de Δ'.

Ainsi, ψ est linéaire sur $\Delta(Y', D')$. Soit E_i les composantes irréductibles de D'. En posant $D'' := \sum_i \psi(E_i) E_i$, on obtient $\psi = \varphi_{D''}|_{\Delta(Y,D)}$. Réciproquement, supposons que $\psi = \varphi_{D''}|_{\Delta(Y',D')}$ pour un certain diviseur D'' de Y'. Notons $\{E_i\}$ la réunion des composantes irréductibles de D et D''. Posons $\tilde{D} := \sum_i E_i$. On a $(Y', \tilde{D}) \geq (Y', D') \geq (Y, D)$ et $\varphi_{D''}$ est par construction linéaire sur $\Delta(Y', \tilde{D})$. □

4.4.2 Lien avec les fonctions PL sur l'espace des valuations

Proposition 4.4.5. *Une fonction ψ de Val_X dans $\mathbb{R}$ est PL si et seulement s'il existe une paire SNC (Y, D) au-dessus de X telle que ψ est PL sur $\Delta(Y, D)$ et invariante par la composition avec $r_{(Y,D)}$. Autrement dit, il existe une fonction $\psi' \in \mathrm{PL}\big(\Delta(Y, D)\big)$ telle que :*

$$\psi = \psi' \circ r_{(Y,D)}$$

Démonstration. Pour le sens direct, soit D un $\mathbb{R}$-diviseur de Cartier sur une extension $Y \geq X$. On a par construction que φ_D est invariante par composition avec la rétraction sur $\Delta(Y, D)$, et φ_D est linéaire sur chaque face de $\Delta(Y, D)$, donc PL.

Réciproquement, soit ψ invariante par rétraction et PL sur $\Delta(Y, D)$. Grâce à la sous-section précédente, on obtient une paire SNC (Y', D') au-dessus de X tel que ψ est égale à $\varphi_{D''}$ sur $\Delta(Y', D')$ pour un certain diviseur D'' à support dans $\mathrm{supp}(D')$, et invariante par composition avec $r_{Y,D}$, donc également invariante par composition avec $r_{Y',D'}$. Or, il n'y a qu'une seule fonction vérifiant cela : c'est $\varphi_{D''}$. □

Remarque 4.4.6. En d'autre terme, l'espace des fonctions PL sur Val_X satisfait :

$$\mathrm{PL}(\mathrm{Val}_X) = \varprojlim_{(Y,D) \text{ paire SNC}} \mathrm{PL}\big(\Delta(Y, D)\big).$$

Chapitre 5

Ordres d'annulation asymptotiques et décomposition de Zariski

Dans ce chapitre, nous développerons la notion d'ordre d'annulation asymptotique dans le cas relatif, puis, par analogie avec le cas absolu, nous expliciterons la notion décomposition de Zariski relative. Enfin, nous arriverons au critère valuatif annoncé dans l'introduction — à savoir que D admet une décomposition de Zariski si et seulement si $v \mapsto v\|D\|_\pi$ est PL.

k sera supposé de caractéristique 0.

5.1 Ordres d'annulation asymptotiques d'un diviseur le long d'une valuation

Nous allons définir à présent l'ordre d'annulation asympotique associée à un $\mathbb{Q}$-fibré en droites L. Soit d'abord X une variété projective.

Définition 5.1.1 (ordre d'annulation asymptotique en situation absolue)**.** Soit L un fibré en droites gros. On considère $\mathfrak{b}_\bullet(L)$ la suite graduée d'idéaux sur X définie par les idéaux de base des mL, $m \in \mathbb{N}^*$. On pose alors :

$$v\|L\| := v\big(\mathfrak{b}_\bullet(L)\big).$$

On définit ensuite $v\|D\| := v\|\mathcal{O}_X(D)\|$ pour D un diviseur gros.

On remarque que pour $k \in \mathbb{N}^*$, $v\|kL\| = kv\|L\|$. On peut donc étendre $v\|\cdot\|$ aux $\mathbb{Q}$-diviseurs gros par homogénéité : pour un $\mathbb{Q}$-fibré en droites L gros (resp. un $\mathbb{Q}$-diviseur D gros), soit k tel que kL est un fibré en droites (resp. kD un diviseur), et posons $v\|L\| := \frac{1}{k}v\|kL\|$ (resp. $v\|D\| := \frac{1}{k}v\|kD\|$).

Remarque 5.1.2. Cette définition coïncide avec celle donnée dans [ELM+05]. En effet, dans *loc. cit.*, $v(|D|)$ est définie comme $v(D')$ où D' est un élément général de $|D|$, c'est-à-dire comme l'infimum des $v(f)$ où $f \in \mathfrak{b}(|D|)$, puis ensuite $v\|D\|$ est définie à partir des $v(|mD|)$ de la même façon qu'au-dessus.

Quand $v = \mathrm{ord}_E$, on retrouve les coefficients de $N(D)$ (défini à la proposition 2.4.2) :

Proposition 5.1.3. *Soit D un diviseur gros sur X, supposée ici lisse. On a :*

$$N(D) = \sum_{E \text{ diviseur premier sur } X} (\mathrm{ord}_E\|D\|)E.$$

Démonstration. Pour E un diviseur premier, intéressons-nous au coefficient en E de la partie fixe $F(lD)$. Par définition de la partie fixe, c'est le plus petit m tel que E ne soit pas dans l'ensemble-base de $lD - mE$. Ainsi :

$$m = \inf_{D' \in |D|} \mathrm{ord}_E(D') = \inf_{f \in \mathfrak{b}(lD)} \mathrm{ord}_E(f) = \mathrm{ord}_E(\mathfrak{b}(lD)).$$

Comme le coefficient en E de $N(D)$ est celui de la limite de $\frac{1}{l}(F(lD))$, on en déduit alors que c'est la limite de $\frac{1}{l}\mathrm{ord}_E(\mathfrak{b}(lD))$ qui est bien $\mathrm{ord}_E\|D\|$. □

C'est en cohérence avec cela que nous donnerons la définition de la décomposition de Zariski dans le cas relatif.

Considérons maintenant la situation relative : soient X, Y des variétés avec $\pi : X \to Y$ un morphisme projectif et surjectif.

Définition 5.1.4 (en situation relative)**.** Soit L un $\mathbb{Q}$-fibré en droites π-gros. On considère la suite graduée d'idéaux $\mathfrak{b}_{\pi,\bullet}(L)$ obtenue en prenant les idéaux de base des sections relatives des multiples de L (voir 3.4.5). On pose alors :

$$v\|L\|_\pi := v(\mathfrak{b}_{\pi,\bullet}(L)).$$

On définit également l'ordre d'annulation asymptotique pour un diviseur π-gros D en posant $v\|D\|_\pi := v\|\mathcal{O}_X(D)\|_\pi$.

Remarque 5.1.5. Si Y est réduit à un point, on a $\mathfrak{b}_\pi(mL) = \mathfrak{b}(mL)$ puis $v\|\cdot\|_\pi = v\|\cdot\|$. On retrouve le cas absolu.

Dans la suite, nous allons étendre $v\|\cdot\|_\pi$ à tout le Néron-Severi relatif. Grâce aux lemmes et propositions suivantes, on va pouvoir étendre l'application $v\|\cdot\|_\pi$ aux $\mathbb{R}$-diviseurs et en extraire un certain nombre de propriétés. Pour la suite, Y sera supposée quasi-projective.

Rappelons que $\sim_\pi$ (resp. $\sim_\pi^{\mathbb{Q}}$) symbolise l'équivalence linéaire relative (resp. la $\mathbb{Q}$-équivalence linéaire relative), ainsi que $\equiv_\pi$ symbolise l'équivalence numérique relative, et que $|D|_\pi$ est défini comme l'ensemble des diviseurs effectifs π-linéairement équivalents à D.

Lemme 5.1.6. *Soit D un diviseur π-gros sur X, $\mathfrak{b}_\pi(D)$ son idéal de base relatif, et v une valuation sur X. Alors on a :*

$$v\big(\mathfrak{b}_\pi(D)\big) = \inf_{E\in|D|_\pi} v(E).$$

Démonstration. Pour montrer cette égalité, on va se ramener au cas absolu. Déjà, remarquons que grâce à la proposition 1.3.9, on a :

$$\inf_{E\in|D|_\pi} v(E) = \inf\{v(s) \mid G \text{ diviseur de } Y \text{ et } s\in H^0(X, D+\pi^*G)\}$$

ce qui vaut grâce à la remarque 5.1.2 :

$$\inf_{G \text{ diviseur de } Y} v(\mathfrak{b}(D+\pi^*G)).$$

Or, pour tout G diviseur de Y, on a $\mathfrak{b}(D+\pi^*G)\subset\mathfrak{b}_\pi(D+\pi^*G) = \mathfrak{b}_\pi(D)$. On en déduit l'inégalité

$$v\big(\mathfrak{b}_\pi(D)\big) \le \inf_{E\in|D|_\pi} v(E).$$

Pour l'autre sens, comme D est π-gros, il a des sections relatives. Comme Y est quasi-projective, il existe un diviseur H ample sur Y. Ainsi, pour m assez grand, $\pi_*(D)+mH$ est globalement engendré donc est égal à $H^0(Y,\pi_*D+mH)$ qui est égal à $H^0(X, D+m\pi^*H)$ par la formule de projection. Ainsi, $\mathfrak{b}_\pi(D+m\pi^*(H)) = \mathfrak{b}(D+m\pi^*(H))$ puis :

$$v\big(\mathfrak{b}_\pi(D)\big) = v\big(\mathfrak{b}_\pi(D+m\pi^*(H))\big) = v\big(\mathfrak{b}(D+m\pi^*(H))\big) = \inf_{E\in|D+m\pi^*H|} v(E)$$

grâce à la remarque 5.1.2. Or $|D+m\pi^*H|\subset|D+m\pi^*H|_\pi = |D|_\pi$ d'où l'inégalité inverse. □

Lemme 5.1.7. *Soit D un $\mathbb{Q}$-diviseur π-gros sur X. Alors :*

$$v\|D\|_\pi = \inf\{v(E) \mid E \ \mathbb{Q}\text{-diviseur effectif et } E\sim_\pi^{\mathbb{Q}} D\}.$$

Démonstration. Soit k tel que kD soit un diviseur de Cartier. On a alors que $v\|D\|_\pi = \frac{1}{k}\lim_m \frac{1}{m} v\big(\mathfrak{b}_\pi(mkD)\big)$. Grâce à la proposition 1.3.22, on sait qu'il existe E $\mathbb{Q}$-effectif avec $E \sim_\pi^{\mathbb{Q}} D$. Soit alors un tel E. Il existe k, m des entiers tels que $kmE \in |kmD|_\pi$ puis $v(E) \geq \frac{1}{km} v\big(\mathfrak{b}_\pi(mkD)\big)$ d'où une première inégalité. Pour la deuxième, on écrit :

$$\begin{aligned} v\|D\|_\pi &= \liminf_m \{\frac{v(E)}{km} \mid E \text{ effectif et } E \in |kmD|_\pi\} \\ &\leq \inf\{v(E) \mid E \ \mathbb{Q}\text{-effectif et } E \sim_\pi^{\mathbb{Q}} D\}. \end{aligned}$$

□

Proposition 5.1.8. *Si D est un $\mathbb{Q}$-diviseur π-gros, on a :*

$$v\|D\|_\pi = \inf\{v(E) \mid E \ \mathbb{Q}\text{-diviseur effectif et } E \equiv_\pi D\}.$$

Démonstration. Si E est un $\mathbb{Q}$-diviseur effectif $\mathbb{Q}$-linéairement équivalent à D, alors on a $E \equiv_\pi D$, d'où :

$$\begin{aligned} v\|D\|_\pi &= \inf\{v(E) \mid E \text{ effectif et } E \sim_\pi^{\mathbb{Q}} D\} && (5.1) \\ &\geq \inf\{v(E) \mid E \ \mathbb{Q}\text{-diviseur effectif et } E \equiv_\pi D\}. && (5.2) \end{aligned}$$

Réciproquement, soit E un $\mathbb{Q}$-diviseur numériquement équivalent à D. On va montrer que $v\|E\|_\pi \geq v\|D\|_\pi$ puis, comme $v(E) \geq v\|E\|_\pi$, cela donnera l'inégalité inverse. Par homogénéité, on peut supposer que D et E sont de Cartier.

Comme π est projectif, grâce au théorème [dFEM13, Cor. 2.6.7, p.140], il existe un diviseur A sur X tel que, pour tout diviseur π-nef N, $A + N$ est π-globalement engendré. Alors, pour tout m suffisamment divisible, $\mathcal{O}_X(A + mD - mE)$ est π-globalement engendré — en effet, $E - D \equiv_\pi 0$ donc est π-nef.

Comme $\mathfrak{b}_\pi(mE) \otimes \mathcal{O}_X(mE)$ est π-globalement engendré par définition, en tensorisant par $\mathcal{O}_X(A+mD-mE)$, on obtient que $\mathfrak{b}_\pi(mE) \otimes \mathcal{O}_X(A+mD)$ est π-globalement engendré, d'où :

$$\mathfrak{b}_\pi(mE) \subset \mathfrak{b}_\pi(A + mD).$$

Par ailleurs, comme D est π-gros, pour q entier suffisamment grand, $qD - A$ est π-gros donc a des sections relatives *i.e* $\pi_*(qD - A) \neq \{0\}$. Comme Y est quasi-projective, il existe H un fibré ample sur Y. Ainsi, pour l suffisamment grand, $\pi_*(qD - A) \otimes lH$ est ample donc a des sections globales non-nulles. Cela nous donne alors une section globale s du fibré $(qD - A) \otimes l\pi^*(H)$ sur X. Posons alors $G = \operatorname{div} s$. G est un diviseur effectif sur X linéairement équivalent à $qD - A + l\pi^*(H)$, donc π-linéairement équivalent à $qD - A$. On a alors :

$$\mathfrak{b}_\pi(A + mD) = \mathfrak{b}_\pi(qD - G + mD).$$

La multiplication par la section canonique de G restreinte à Y nous donne la flèche injective suivante :

$$\pi_*\big((q+m)D-G\big) \hookrightarrow \pi_*\big((q+m)D\big)$$

ce qui se remonte en l'inclusion suivante :

$$\mathcal{O}_X(-G)\cdot\mathfrak{b}_\pi\big((q+m)D-G\big) \subset \mathfrak{b}_\pi\big((q+m)D\big)$$

d'où :

$$\mathcal{O}_X(-G)\cdot\mathfrak{b}_\pi(mE) \subset \mathfrak{b}_\pi\big((q+m)D\big)$$

Posons maintenant l'idéal $\mathfrak{c} = \mathcal{O}_X(-G)$. On a alors :

$$\frac{v(\mathfrak{c})}{m} + \frac{\mathfrak{b}_\pi(mE)}{m} \geq \frac{\mathfrak{b}_\pi((m+q)D)}{m}$$

d'où, en faisant tendre m vers l'infini, on obtient $v\|E\|_\pi \geq v\|D\|_\pi$.

□

Proposition 5.1.9. *Si D est $\mathbb{Q}$-diviseur π-gros, on a :*

$$v\|D\|_\pi = \inf\{v(E) \mid E \ \mathbb{R}\text{-}\textit{diviseur effectif et } E \equiv_\pi D\}.$$

Démonstration. On a déjà

$$\begin{aligned}&\{v(E) \mid E\ \mathbb{Q}\text{-diviseur effectif et } E \equiv_\pi D\}\\ &\subset \{v(E) \mid E\ \mathbb{R}\text{-diviseur effectif et } E \equiv_\pi D\}\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}&\inf\{v(E) \mid E\ \mathbb{Q}\text{-diviseur effectif et } E \equiv_\pi D\}\\ &\geq \inf\{v(E) \mid E\ \mathbb{R}\text{-diviseur effectif et } E \equiv_\pi D\}.\end{aligned}$$

Réciproquement, soit E un $\mathbb{R}$-diviseur effectif, π-numériquement équivalent à L, et qui n'est pas un $\mathbb{Q}$-diviseur. On écrit alors $E = a_1E_1 + \cdots + a_rE_r$ avec les E_i des diviseurs de Cartier effectifs et a_i des réels positifs. On regarde alors l'ensemble A des $\mathbb{R}$-uplets $(x_1,\cdots,x_r)$ tels que $x_1E_1 + \cdots + x_rE_r \equiv_\pi D$. A est un $\mathbb{R}$-sous-espace affine de $\mathbb{R}^r$, non-vide (car contenant $(a_1,\cdots,a_r)$) et de direction le sous-espace vectoriel A_0 des $(x_1,\cdots,x_r)$ tel que $x_1E_1 + \cdots + x_rE_r$ est numériquement trivial.

Considérons les applications linéaires $\phi_\mathbb{R} : \mathbb{R}^r \to N_1(X)$ et $\phi_\mathbb{Q} : \mathbb{Q}^r \to N_1(X)_\mathbb{Q}$ qui à $(x_1,\cdots,x_r)$ associent $x_1[E_1] + \cdots + x_r[E_r]$ (comme les E_i sont dans $\mathrm{NS}(X) =$

$N_1(X)_{\mathbb{Z}}$, $\phi_{\mathbb{Q}}$ est bien définie). Le système $\phi_{\mathbb{R}}(x_1, \cdots, x_r) = D$ a une solution. Or, en utilisant le pivot de Gauss, on voit que cela implique que $\phi_{\mathbb{Q}}(x_1, \cdots, x_r) = [D]$ a une solution, qu'on va noter $(q_1, \cdots, q_r)$. Ainsi, comme E n'est pas un $\mathbb{Q}$-diviseur, $\phi_{\mathbb{R}} = [D]$ a deux solutions distinctes, donc le noyau A_0 de $\phi_{\mathbb{R}}$ est au moins de dimension 1. Comme on obtient une base du noyau en résolvant l'équation $\phi_{\mathbb{R}} = 0$ avec le pivot de Gauss, on trouve une base $e_1, \cdots, e_l$ de A_0 de coordonnées rationnelles, puis on a $A = (q_1, \cdots, q_r) + \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(e_1, \cdots, e_l)$. Ainsi, on obtient que les point rationnels de A *i.e* $\phi_{\mathbb{Q}}^{-1}([D])$ est $(q_1, \cdots, q_r) + \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}}(e_1, \cdots, e_l)$ donc est dense dans A. On obtient donc une suite $E_n = a_{1,n}E_1 + \cdots + a_{r,n}E_r$ de $\mathbb{Q}$-diviseurs effectifs avec $(a_{i,n})$ suite de rationnels tendant vers a_i. Ainsi, comme (E_n) converge vers E coefficient par coefficient, $v(E_n)$ converge vers $v(E)$ par linéarité de v. On a donc $v(E) \leq \inf\{v(F) \mid F$ $\mathbb{Q}$-diviseur effectif et $F \equiv_\pi D\}$, ce qui permet de conclure à l'inégalité inverse.

□

On en déduit alors la proposition suivante :

Proposition 5.1.10. *L'application $v_\pi\|\cdot\|$ s'étend aux $\mathbb{R}$-diviseurs gros et ne dépend que de la classe numérique. Elle définit alors une fonction sur le cône π-gros du Néron-Severi relatif. De plus, cette fonction est continue, homogène, sous-additive et convexe.*

Démonstration. Pour D un $\mathbb{R}$-diviseurs π-gros, on pose :

$$v\|D\|_\pi = \inf\{v(E) \mid E \ \mathbb{R}\text{-diviseur effectif et } E \equiv_\pi D\}.$$

Par définition, on en déduit immédiatemment l'homogénéité, la sous-additivité et la convexité, ainsi qu'elle ne dépend que de la classe numérique. La continuité résulte du fait bien connu que toute fonction convexe sur un ouvert convexe est continue. □

Remarque 5.1.11. Grâce à la proposition précédente, on voit que, pour une variété W non-incluse dans le lieu singulier de X, on obtient $\mathrm{ord}_W\|D\|$ qui correspond à $\sigma_W(D)$ défini dans [Nak04, Chap. III - Def. 1.1, p.79] ; et $\mathrm{ord}_W\|D\|_\pi$ qui correspond à $\sigma_W(D; X/Y)$ défini dans [Les16, Def. 1, p.3].

Remarque 5.1.12. Nakayama étend dans le cas absolu $v\|\cdot\|$ à tout $\mathbb{R}$-diviseur pseudo-effectif D. Pour ce faire, à partir d'un diviseur ample A, il pose $v\|D\| := \lim_{\epsilon\to 0} v\|D + \epsilon A\|$, puis il montre que la définition ne dépend pas de A, et donne une fonction $v\|\cdot\|$ vérifiant les propriétés de la proposition précédente sur le cône psef. Cependant, dans le cas général (relatif), la limite de $v\|D + \epsilon A\|_\pi$ peut être infinie ! Un tel exemple est construit dans la section 3 de [Les16].

Néanmoins, on peut citer cette proposition de [Nak04, Lem. 4.3 - Chap. III, p.98], rappelée dans [Les16] :

Proposition 5.1.13. *Supposons X lisse. Pour D π-pseudo-effectif et W une sous-variété irréductible de X, la limite* $\operatorname{ord}_W \|D\|_\pi$ *existe et est fini si une des conditions suivantes est vérifiée :*

(i) Y est réduit à un point.

(ii) D est π-numériquement équivalent à un $\mathbb{R}$-diviseur effectif.

(iii) $\operatorname{codim} \pi(W) < 2$.

On peut donc définir $\operatorname{ord}_E\|D\|$ pour E diviseur premier quand D est seulement pseudo-effectif si Y est réduit à un point ou une droite, ou si D est effectif.

Remarque 5.1.14. On aurait pu faire comme [Nak04] et définir $v\|\cdot\|_\pi$ sur les $\mathbb{R}$-diviseurs gros de la manière suivante : Pour un $\mathbb{R}$-diviseur $D = \sum_i a_i D_i$ avec les D_i entiers, on posera $\lfloor D \rfloor := \sum_i \lfloor a_i \rfloor D_i$. On remarque que $\mathfrak{b}_\pi\big(\mathcal{O}_X(-\lfloor mD \rfloor)\big)$ forme un faisceau d'une suite graduée d'idéaux. On pose alors $v\|D\|_\pi$ la valuation de cette suite d'idéaux localisé au centre de v.

5.2 La décomposition de Zariski relative

On se place dans la même situation relative $\pi : X \to Y$, avec en plus l'hypothèse X lisse. Ainsi, les notions de diviseurs de Cartier et de diviseurs de Weil se confondent.

On a une proposition similaire pour les $\mathbb{R}$-diviseurs :

Proposition 5.2.1. *Soit D un $\mathbb{R}$-diviseur π-gros sur X. Il n'y a qu'un nombre fini de diviseur premier $E \subset X$ tels que* $\operatorname{ord}_E \|D\|_\pi > 0$.

Démonstration. Comme D est π-gros, il est numériquement équivalent à un $\mathbb{R}$-diviseur effectif D' d'après la remarque 1.3.23. Et la proposition est claire pour D' car $0 < \operatorname{ord}_E\|D'\|_\pi \leq \operatorname{ord}_E(D')$ implique que E apparait dans la décomposition de D' en diviseur premier. □

Définition 5.2.2. Soit D un $\mathbb{R}$-diviseur π-gros sur X. On définit

$$N(D) := \sum_{E \text{ diviseur premier de } X} \operatorname{ord}_E\|D\|_\pi E.$$

On pose ensuite $P(D) = D - N(D)$ et on appelle $D = P(D) + N(D)$ la π-décomposition de Zariski divisorielle de D.

On remarque que dans le cas absolu, où Y est réduit à un point et $\|D\|_\pi = \|D\|$, la définition est compatible avec la proposition 5.1.3.

La décomposition de Zariski relative

On en vient alors à la décomposition de Zariski relative :

Définition 5.2.3. On dit que $D = P(D) + N(D)$ est la π-décomposition de Zariski (ou la décomposition de Zariski relative à π) sur X si $P(D)$ est π-nef.

Remarque 5.2.4. Grâce à la remarque 5.1.11, on voit que cette définition coïncide avec les définitions de [Nak04] et de [Les16].

Remarque 5.2.5. Grâce à la proposition 5.1.13, on remarque également que si Y est de dimension < 2, ou si D est π-numériquement équivalent à un diviseur effectif, on peut définir la décomposition de Zariski sur X même si D n'est que pseudo-effectif.

Définition 5.2.6. Soit $\pi : X \to Y$ un morphisme projectif entre variétés *pas nécessairement lisses* et D un diviseur π-gros sur X. On dit que D admet une π-décomposition de Zariski s'il existe X' un π-modèle lisse dominant X tel que $P(D')$ est nef.

Avant d'arriver à un critère d'existence de la décomposition de Zariski, nous allons d'abord exhiber un critère valuatif du fait d'être nef.

Proposition 5.2.7. *Soit D un $\mathbb{R}$-diviseur π-gros de X. On a l'équivalence*

$$D \text{ est } \pi\text{-nef} \iff v\|D\|_\pi = 0 \quad \text{pour toute } v \text{ valuation divisorielle.}$$

Démonstration. Soit $\mu : X' \to X$ une résolution des singularité. On a D π-nef si et seulement si $\mu^* D$ est $\pi \circ \mu$-nef. On peut donc sans perte de généralité supposer X lisse.

Nous allons prouver la proposition pour les diviseurs π-nef. Comme on s'intéresse à l'ordre d'annulation asymptotique, on obtient alors immédiatement le résultat pour les $\mathbb{Q}$-diviseurs par homogénéité, puis ensuite pour les $\mathbb{R}$-diviseurs par continuité de $v\|\cdot\|_\pi$.

Supposons d'abord que D est π-nef. Soit A un diviseur π-ample. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, alors $D + \frac{1}{k}A$ est π-ample, d'où $l(D + \frac{1}{k}A)$ est π-globalement engendré pour l assez grand et assez divisible, d'où $\mathfrak{b}_\pi\big(l(D + \frac{1}{k}A)\big) = \mathcal{O}_X$ pour l assez grand et assez divisible, ce qui montre que $v\|(D + \frac{1}{k}A)\|_\pi = 0$ par définition. On conclut grâce à la continuité de $v\|\cdot\|_\pi$ en faisant tendre k vers $+\infty$.

Réciproquement, supposons que $v\|D\|_\pi = 0$ pour toute valuation divisorielle. On veut montrer que $D \cdot C \geq 0$ pour toute courbe C verticale. On va pour cela adapter la méthode de l'article [ELM+06] dans le cas relatif.

D'abord, on considère l'idéal multiplicateur asymptotique relatif $\mathcal{J}(\pi, \|kD\|)$ associé au diviseur kD comme défini dans [Laz04, Var. 11.1.12, p273, Tome II] — on peut le faire en posant :

$$\mathcal{J}(\pi, \|kD\|) := \mathcal{J}(\mathfrak{b}^k_{\pi,\bullet})$$

avec les notations de [Laz04, Sec. 11.1.B, p274, Tome II].

Soit v une valuation divisorielle. Comme dans [ELM+06] en remplaçant l'idéal multiplicateur aymptotique par son équivalent relatif, posons $\mathfrak{j}_\mathfrak{p}$ l'image de $\mathcal{J}(\pi, \|kD\|)$ dans $\mathcal{O}_v$. Grâce au théorème [Laz04, Gen. 11.2.15, p285, Tome II], on a $\mathfrak{b}_\pi(pD) \subset \mathcal{J}(\pi, \|pD\|)$ d'où $v(\mathfrak{b}_\pi(pD)) \geq v(\mathfrak{j}_p)$. En faisant tendre vers p vers $+\infty$, on obtient :

$$v\|D\|_\pi \geq \lim_p \frac{v(\mathfrak{j}_\mathfrak{p})}{p} = \sup_p \frac{v(\mathfrak{j}_\mathfrak{p})}{p}.$$

En raisonnant comme à [ELM+06, Rem. 2.6, p.11], on a que $v\|D\|_\pi = 0$ implique $\mathfrak{j}_\mathfrak{p} = \mathcal{O}_v$ pour tout p puis, en notant ξ le centre de v, on a $\mathcal{J}(\pi, \|pD\|)_\xi = \mathcal{O}_{X,\xi}$. Comme on est dans le cas X lisse, pour tout point $x \in X$, il existe une valuation divisorielle dont le centre est x, et donc $\mathcal{J}(\pi, \|pD\|) = \mathcal{O}_X$ pour tout p.

Il reste alors à montrer une version relative de la proposition [Laz04, Prop. 11.2.18, p285, Tome II] — du moins de son sens réciproque — qui impliquerait alors que D est π-nef. Soit A un diviseur π-ample et π-globalement engendré. Toujours grâce à [Laz04, Gen. 11.2.15, p287, Tome II], on a :

$$R^i\pi_*(K_X + pD + mA) = 0, \quad \forall m \geq 0.$$

On en déduit que $K_X + pD$ est $n+1$-régulier selon A relativement à π. Une version relative du théorème de Mumford (qu'on trouve dans [Laz04, Ex. 1.8.24, p105, Tome I]) montre alors que $K_X + pD + (n+1)A$ est π-globalement engendré, donc π-nef pour tout p *i.e* $D + \frac{1}{p}(K_X + (n+1)A)$ est π-nef pour tout p. On conclut grâce à la fermeture du cône nef relatif en faisant tendre p vers $+\infty$.

□

On a ensuite :

Corollaire 5.2.8. *Soit $D = P + N$ une π-décomposition de Zariski sur X projective lisse d'un diviseur D π-gros. On a :*

$$v\|D\|_\pi = v(N)$$

pour toute valuation.

Démonstration. Soit E effectif π-numériquement équivalent à D. Comme $N(D)$ est invariant par π-équivalence numérique, on a $N = N(D) = N(E)$. Ainsi, on a $E \geq N$ d'où $v\|D\|_\pi \geq v(N)$. L'autre inégalité vient de $v\|D\|_\pi \leq v\|P\|_\pi + v\|N\|_\pi \leq v(N)$ car $v(P) = 0$. □

On arrive au théorème de la caractérisation de l'existence de la décomposition de Zariski relative :

Théorème 5.2.9. *Soit $\pi : X \to Y$ un morphisme projectif et surjectif entre variétés avec Y quasi-projective et D un $\mathbb{R}$-diviseur π-gros sur X. Alors D admet une décomposition de Zariski relative* si et seulement si *l'application $\varphi_{\|D\|_\pi}$ de Val_X dans $\mathbb{R}$ qui à v associe $v\|D\|_\pi$ est PL.*

Démonstration. D'abord, supposons que D admette une π-décomposition de Zariski. Il existe donc un modèle X' lisse dominant X avec D', le tiré-en-arrière de D, tel que $D' = P + N$ soit sa π-décomposition de Zariski sur X'. Grâce à la proposition 5.2.8, on a alors, pour toute valuation v de Val_X :

$$v\|D\|_\pi = v(N) = \varphi_N(v)$$

Ainsi, l'application de Val_X dans $\mathbb{R}$ qui a une valuation v associe $v\|D\|_\pi$ est PL.

Réciproquement, supposons que $v \mapsto v\|D\|_\pi$ soit égale à φ_M pour un diviseur M sur un modèle X_1 dominant X. Par une résolution des singularité, on obtient un modèle X' dominant X_1 et posons N le tiré-en-arrière de M. On a alors $v\|D'\|_\pi = v(N)$ où D' est le tiré-en-arrière de D sur X'. Comme X' est lisse, on peut écrire $N = \sum_i b_i E_i$ avec les b_i des réels non-nul et les E_i diviseurs premiers. En prenant $v = \mathrm{ord}_{E_i}$, on trouve $b_i = \mathrm{ord}_{E_i}\|D\|_\pi \geq 0$. D'où $b_i > 0$ et N est effectif, et $N = N(D')$. Posons alors $P := P(D') = D' - N(D') = D' - N$ et on va montrer que P est nef. Soit v une valuation de Val_X, donc centrée en X'. Grâce à la proposition 5.1.9, on sait que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $\mathbb{R}$-diviseur effectif E avec $E \equiv_\pi D$ et

$$v\|D\|_\pi \leq v(E) \leq v\|D\|_\pi + \epsilon$$

Comme E est un $\mathbb{R}$-diviseur effectif π-numériquement équivalent à D, alors $w(E) \geq w\|D'\|_\pi = w(N)$ pour toute valuation w, donc y compris pour les ord_{E_i}. Ainsi, $E \geq N$ et $E' = E - N$ est un $\mathbb{R}$-diviseur effectif, vérifiant $E' \equiv D - N = P$ et $0 \leq v(E') \leq \epsilon$. Ainsi, $v\|P\|_\pi \leq \epsilon$. Cela montre que $v\|P\|_\pi = 0$ pour toute valuation v, puis que P est nef d'après la proposition 5.2.7, ce qui conclut la preuve.

□

Troisième partie

Application du critère valuatif à la recherche d'un contre-exemple

Dans cette partie, en généralisant une construction due à Cutkosky, on parvient à exhiber une situation où la fonction $v \mapsto v\|D\|_\pi$ est explicite pour un certain diviseur D. En effet, nous nous plaçons sur une variété polarisée (V, A), son cône Y correspondant, et nous construisons la suite suivante d'éclatement :

$$\begin{array}{ccccccc}
E' & ; & E_S & ; & F' & \subset & X'' = \mathcal{B}l_{\tilde{S}}(X') \\
\wr & & | & & \wr & & \downarrow \\
E & ; & \tilde{S} & \subset & F & \subset & X' = \mathcal{B}l_Z(Y) \\
| & & \wr & & \wr & & \downarrow \mu \\
Z & \subset & S & \subset & V & \subset & X = \mathcal{B}l_0(X) \\
 & & & & | & & \downarrow \rho \\
 & & & & 0 & \in & Y
\end{array}$$

Sous certaines hypothèses sur S, on obtient une décomposition de Zariski sur F pour les diviseurs de la forme $H - tG$ avec $H = \mu^* A$ et $G = E \cap F$. On parvient alors, pour toute valuation v, à exprimer $v\| - E\|_\pi$ (où $\pi = \rho \circ \mu$) en fonction de $v(E'), v(E_S)$ et $v(F')$.

Ensuite, dans le chapitre suivant, on revient sur la construction précise de Cutkosky : X devient $\mathbb{C}^4$, V devient $\mathbb{P}^3$, A devient un diviseur très ample sur $\mathbb{P}^3$, et S une surface K3 dont le cône nef et psef coïncident. On montre alors que $-E$ n'admet pas de décomposition de Zariski relative.

Chapitre 6

Étude des valuations sur une variété polarisée

Dans tout le chapitre, k sera supposé algébriquement clos.

6.1 Le cône sur une variété polarisée

Soit V une variété projective sur k, munie d'un diviseur ample A, fixé une fois pour toutes. On dit que le couple (V, A) est une variété polarisée. Posons $L = \mathcal{O}_V(A)$ le fibré en droites correspondant à A.

Comme dans le chapitre 2, on considère $R = R(A)$, la k-algèbre graduée :

$$R = \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} H^0(V, mA) = \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} R_m.$$

On a un isomorphisme naturel $V \to \mathrm{Proj}(R)$.

On pose $Y = \mathrm{Spec}(R)$ le cône sur V. Comme R est graduée, on a une action de k^* sur R, qui agit sur les éléments de degré l de la manière suivante :

$$k^* \times R_l \to R_l \quad (\lambda, f_l) \mapsto \lambda^l f_l.$$

Cette action donne à Y une structure de cône affine sur V. En posant $K = \mathrm{Frac}(R)$, on a $k(Y) \simeq K$ et $k(V) \simeq K_0$ où K_0 est l'ensemble des éléments de K de degré 0.

Soit $0 \in Y$ le point fermé correspondant à l'idéal maximal R^+. On pose alors $X := \mathcal{B}l_0(Y)$ et V est alors le diviseur exceptionnel de X. X est alors l'espace total du fibre dual $A^\vee$, avec V identifié à la section nulle.

$$\begin{array}{ccc} V & \subset & X = \mathcal{B}l_0(Y) \\ | & & \downarrow \rho \\ 0 & \in & Y \end{array}$$

Remarque 6.1.1. On a un isomorphisme $K \simeq K_0(t)$ non-canonique — car dépendant du choix d'un élément $a \in R_1$. On envoie tout élément f_l de R_l vers f_l/a^l (puis on prolonge), et réciproquement, on envoie tout élément $f(t)$ de $K_0[t]$ vers $f(a)$. Géométriquement, cela revient à se placer sur la carte affine $\{a \neq 0\}$ dans X et d'utiliser la correspondance entre les fonctions homogènes et les fonctions sur la carte affine, comme pour $\mathbb{P}^n$.

6.2 Espaces des valuations sur Y et V

Intéressons-nous à présent aux valuations sur Y et sur V.

6.2.1 Valuations sur Y

On peut déjà remarquer que Val_Y est exactement l'ensemble des valuations de K/k positives sur R. De plus, comme $\mathfrak{m}_0 = R^+$, l'ensemble des valuations centrées en 0 est exactement l'ensemble des valuations non-nulles sur les éléments de R homogènes de degré supérieur ou égal à 1.

On va s'intéresser à une classe particulière de valuations : les valuations k^*-invariantes. Rappelons l'action de k^* sur R :

$$k^* \times R_l \to R_l \quad (\lambda, f_l) \mapsto \lambda^l f_l.$$

Les valuations stables par cette action seront appelées k^*-invariantes, et l'ensemble de ces valuations sera noté $\mathrm{Val}_Y^{k^*}$. Par exemple, si V est normal, $\mathrm{ord}_0(f)$ est une valuation ; comme $\mathrm{ord}_0(f)$ est égal au degré du plus petit monôme homogène de f, la valuation en 0 est stable par cette action.

Proposition 6.2.1. *Soit v une valuation sur Y. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) v est k^*-invariante.
(ii) Pour tout élément $f \in R$ se décomposant en somme d'éléments homogènes $f = f_0 + f_1 + \cdots + f_l$, on a $v = \min_i v(f_i)$.

Pour prouver la proposition, on va d'abord montrer le lemme suivant :

Lemme 6.2.2. *Soient $f_{j_1}, \cdots, f_{j_m}$ des éléments homogènes, avec leur degré respectif j_i tous distincts, et tous de même valuation par v (égale à $c \in \mathbb{R}$). Supposons également que v est k^*-invariante. Alors on a :*

$$v(f_{j_1} + \cdots + f_{j_m}) = c.$$

Démonstration. Montrons ce résultat par récurrence sur m : pour $m = 1$, c'est immédiat. Supposons le résultat vrai au rang $m - 1$. Montrons-le au rang m. Soient $f_{j_1}, \cdots, f_{j_m}$ vérifiant les conditions ci-dessus. Supposons par l'absurde que $v(f_{j_1} + \cdots + f_{j_m}) > c$; en utilisant le fait que v vaut 0 sur k^*, on peut multiplier par 2^{j_1} pour obtenir :

$$v(2^{j_1} f_{j_1} + \cdots + 2^{j_1} f_{j_m}) > c.$$

Par ailleurs, par k^*-invariance, on a :

$$v(2^{j_1} f_{j_1} + \cdots + 2^{j_m} f_{j_m}) > c.$$

On peut ensuite soustraire les expressions dans chacunes des valuations pour obtenir :

$$v\big((2^{j_2} - 2^{j_1}) f_{j_2} + \cdots + (2^{j_m} - 2^{j_1}) f_{j_m}\big) > c.$$

Or, les $(2^{j_i} - 2^{j_1}) f_{j_i}$ vérifient les hypothèses de la récurrence au rang $m-1$: on devrait avoir $v\big((2^{j_2} - 2^{j_1}) f_{j_2} + \cdots + (2^{j_m} - 2^{j_1}) f_{j_m}\big) = c$, ce qui aboutit à une contradiction. On obtient alors par l'absurde l'hérédité, puis le résultat. Le lemme est prouvé. □

Revenons à la preuve de la proposition.

Démonstration. Soit v une valuation k^*-invariante et $f = f_0 + f_1 + \cdots + f_l$ un élément de R, décomposé en somme d'éléments homogènes. Soit J l'ensemble des indices j tels que $v(f_j) = \min_i v(f_i) := c$. On a :

$$v(f) = v\Big(\sum_{i \in J} f_i + \sum_{i \notin J} f_i\Big).$$

D'après le lemme, la valuation du premier terme vaut exactement c. La valuation du deuxième est nécessairement supérieur au minimum des éléments n'appartenant pas à J, donc strictement supérieur à c. On obtient donc bien $v(f) = c = \min_i v(f_i)$.

Réciproquement, soit v une valuation vérifiant la deuxième propriété et $f = f_0 + f_1 + \cdots + f_l$ un élément de R. Alors, en faisant agir λ sur f, on obtient :

$$v(\lambda \cdot f) = v(f_0 + \lambda f_1 + \cdots + \lambda^l f_l) = \min_i v(\lambda^i f_i) = \min_i v(f_i) = v(f).$$

□

Avant de finir cette sous-section, une proposition sur l'ensemble des valuations k^*-invariantes.

Proposition 6.2.3. *Soient X' est un modèle dominant de X sur lequel l'action de k^* se relève, $D = \sum_{i=1}^{s} E_i$ un diviseur SNC de X' et supposons que les E_i sont invariants sous l'action de k^*. Alors on a : $\Delta(X', D) \subset \mathrm{Val}_X^{k^*}$.*

Démonstration. Il faut reprendre la construction des complexes de valuation de la définition 4.2.5. Soit $t = |\Delta(X', D)| \subset \mathbb{R}_+^s$ et soit J son support. On a par définition $\bigcap_{j\in J} E_j \neq \varnothing$. Soit η_J le point générique de $\bigcap_{j\in J} E_j$ et considérons des coordonnées locales $(z_j, j \in J)$ en η_J avec $\{z_j = 0\}$ définissant E_j pour tout $j \in J$.

Soit $\lambda \in k^*$. Comme E_j est invariant sous l'action de k^* pour tout $j \in J$, on a que $\lambda \cdot z_j$ définit également E_j au voisinage de η_J, d'où il existe $b_j \in k(\eta_J)^*$ tel que $\lambda \cdot z_j = b_j z_j$.

On utilise maintenant l'isomorphisme $k(\eta_J)[[z_j, j \in J]] \simeq \widehat{\mathcal{O}_{X,\eta_J}}$ pour écrire les fonctions de $\mathcal{O}_{X,\eta_J}$. Soit $f \in \mathcal{O}_{X,\eta_J}$ et écrivons $f = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^J} a_\alpha z^\alpha$. On a

$$\lambda \cdot \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^J} a_\alpha z^\alpha = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^J} a_\alpha \lambda \cdot z^\alpha = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^J} a_\alpha \prod_{j\in J} b_j^{\alpha_j} z^\alpha = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^J} a'_\alpha z^\alpha$$

en posant $a'_\alpha := a_\alpha \prod_{j\in J} b_j^{\alpha_j}$. Comme les b_j sont non nuls, on a $a_\alpha \neq 0 \iff a'_\alpha \neq 0$. Ensuite, on a :

$$\mathsf{val}_t(\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^J} a_\alpha z^\alpha) = \min\left\{\langle t_{|J}|\alpha\rangle \mid a_\alpha \neq 0\right\} = \min\left\{\langle t_{|J}|\alpha\rangle \mid a'_\alpha \neq 0\right\} = \mathsf{val}_t(\lambda \cdot \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^J} a_\alpha z^\alpha).$$

On en déduit alors que val_t est invariante par l'action de k^*.

□

On remarquera que sur un modèle dominant de Y obtenu en éclatant successivement des sous-variétés k^*-invariantes, l'action de k^* se relève.

6.2.2 Valuations sur V

On s'intéresse aux valuations sur V, c'est-à-dire aux valuations sur K_0. On a une correspondance entre les valuations k^*-invariantes de Val_Y et les valuations sur V (dépendant d'un paramètre auxiliaire) de la façon suivante : dans un sens, la restriction à $K_0 \subset K$ d'une valuation $v \in \mathrm{Val}_Y$ nous donne une valuation sur V.

Dans l'autre sens, soit une valuation w de Val_V, c'est-à-dire une valuation sur K_0, et choisissons une valeur $c \in \mathbb{R}_+$ (le paramètre auxiliaire). Pour un élément $f \in R_d$, posons $w(f)$ l'évaluation de f *en tant que section* de $H^0(V, dA)$ comme définie en

3.2.15. On pose alors $\hat{w}(f) = dc + w(f)$. On pose également, si les $f_i \in R_i$ avec les i distincts :

$$\hat{w}\Big(\sum_i f_i\Big) = \min_i \hat{w}(f_i).$$

Proposition 6.2.4. *L'application $\hat{w}$ définie au-dessus est une valuation k^*-invariante sur Y.*

Démonstration. Pour l'axiome de la multiplicativité : soit $f \in R_d$ et $g \in R_l$. On a $\hat{w}(fg) = (d+l)c + w(fg) = dc + w(f) + lc + w(g) = \hat{w}(f) + \hat{w}(g)$.

Pour l'axiome de l'additivité et la k^*-invariance : cela découle de la définition de $\hat{w}\big(\sum_i f_i\big)$.

On voit également que $v(f) = +\infty$ si et seulement si $f = 0$.

Enfin, comme le corps de base de V et Y sont les mêmes, on a bien $\hat{w}(a) = 0$ pour tout $a \in k^*$.

□

On en déduit alors la proposition suivante :

Proposition 6.2.5. *L'application qui à v une valuation k^*-invariante de Y associe le couple $\big(v|_V, v(R^+)\big)$, et celle qui a un couple (w, c) associe $\hat{w}$ la valuation de Y définie plus haut, sont réciproques l'une de l'autre et établissent une correspondance bijective :* $\mathrm{Val}_Y^{k^*} \simeq \mathrm{Val}_V \times \mathbb{R}_+$.

6.3 Lien entre les fonctions d'Izumi sur Y et celles sur V

On se fixe $v_0 \in \mathrm{Val}_Y^{k^*}$ et w_0 la valuation correspondante dans Val_V. Pour une valuation v dans $\mathrm{Val}_Y^{k^*}$, on va chercher à calculer la pente entre v et v_0, à savoir, comme définie en 3.4.9, à calculer $\varphi_{v_0}(v)$. On pose également $c_0 := v_0(\mathfrak{m}_0) = v_0(V)$ (en voyant V comme une sous-variété de X).

Soit $\mathfrak{a}_\bullet := \mathfrak{a}_\bullet(v_0)$ la suite graduée d'idéaux de Y associée à v_0 et $\mathfrak{a}'_\bullet(w_0)$ la suite d'idéaux de V associée à w_0. Considérons la suite graduée d'idéaux $\mathfrak{a}'^L_\bullet(w_0)$ définie dans l'exemple 3.4.6 : on pose $V_m := H^0\big(V, mL \otimes \mathfrak{a}'_m(w_0)\big)$ et $\mathfrak{a}'^L_m(w_0) := \mathfrak{b}(V_m, mL)$.

Reprenons les fonctions d'Izumi définies en 3.4.9. Soit $v \in \mathrm{Val}_Y^{k^*}$ et w sa valuation correspondante dans Val_V. Notons $c := v(\mathfrak{m}_0) = v(V)$. On considère la fonction d'Izumi associé à v :

$$\varphi_{v_0}(v) = v(\mathfrak{a}_\bullet) = \lim_{l \to +\infty} \frac{1}{l} v(\mathfrak{a}_l) = \inf_{f \in \mathcal{O}_{X,0}} \frac{v(f)}{v_0(f)}.$$

On considère également la fonction d'Izumi associée à (w, L) :

$$\varphi^L_{w_0}(w) := w\big(\mathfrak{a}'^L_\bullet(w_0)\big).$$

Le but va être d'établir un lien entre $\varphi_{v_0}(v)$ et une fonction de la forme $\varphi^L_{w_0}(w)$.

Remarque 6.3.1. Dans cette section et la suivante, pour un espace vectoriel K, nous utiliserons la notation $w(K)$ pour désigner l'infimum de w sur les éléments de K.

Lemme 6.3.2. *Soit l un réel positif. On a :*

$$\begin{aligned} v(\mathfrak{a}_l) &= \inf_{d\in\mathbb{N}}\{dc + w\big(H^0(V, dL \otimes \mathfrak{a}'_{(l-dc_0)}(w_0))\big)\} && (6.1)\\ &= \inf_{d\in\mathbb{N}}\Big\{dc + w\Big(\mathfrak{a}'^L_d\big((l/d - c_0)^{-1}w_0\big)\Big)\Big\}. && (6.2)\end{aligned}$$

Démonstration. D'abord, on remarque qu'on a $R_d \cap \mathfrak{a}_l = H^0(V, dL \otimes \mathfrak{a}'_{(l-dc_0)})$. En effet, un élément f est dans $R_d \cap \mathfrak{a}_l$ si et seulement si $f \in R_d$ et $v_0(f) = l$, ce qui équivaut à avoir f section de dL et, en évaluant f comme une section, à avoir $w_0(f) = l - dc_0$. Les deux ensembles sont donc identiques, avec d'un côté les éléments interprétés comme des fonctions sur Y, et de l'autre les mêmes éléments interprétés comme des sections sur V.

Regardons alors leur évaluation en v et w : d'après la sous-section précédente, pour $f \in R_d$, on a $v(f) = dc + w(f)$ où $w(f)$ est l'évaluation de f selon w en tant que section de $H^0(V, dL)$.

On en déduit alors que $v(R_d \cap \mathfrak{a}_l) = dc + w\big(H^0(V, dL \otimes \mathfrak{a}'_{(l-dc_0)}(w_0))\big)$, puis que :

$$v(\mathfrak{a}_l) = \inf_{d\in\mathbb{N}} v(R_d \cap \mathfrak{a}_l) = \inf_{d\in\mathbb{N}}\Big\{dc + w\big(H^0(V, dL \otimes \mathfrak{a}'_{(l-dc_0)}(w_0))\big)\Big\}.$$

La première égalité est montrée. Pour la deuxième, il suffit de montrer que $w\big(H^0(V, dL \otimes \mathfrak{a}'_{(l-dc_0)}(w_0))\big) = w\Big(\mathfrak{a}'^L_d\big((l/d - c_0)^{-1}w_0\big)\Big)$. On peut déjà remarquer que $H^0(V, dL \otimes \mathfrak{a}'_{(l-dc_0)}(w_0)) = H^0\Big(V, dL \otimes \mathfrak{a}'_d\big((l/d - c_0)^{-1}w_0\big)\Big)$ ce qui vaut $H^0(V, dL \otimes \mathfrak{a}'_d(w'_0))$ en notant $w'_0 := (l/d - c_0)^{-1}w_0$. Or :

$$w\big(H^0(V, dL \otimes \mathfrak{a}'_d(w'_0))\big) = w\big(\mathfrak{b}(dL \otimes \mathfrak{a}'_d(w'_0)), dL\big) = w\big(\mathfrak{a}'^L_d(w'_0)\big)$$

d'où le résultat.

La difficulté du cas $l - dc_0 = 0$ se contourne de la façon suivante : il suffit de poser alors $(l/d - c_0)^{-1} = +\infty$ et $w'_0 = +\infty \cdot w_0$ avec les opérations classiques dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et la convention $+\infty \cdot 0 = +\infty$. On obtient alors :

$$\mathfrak{a}'_d(+\infty \cdot w_0) = \mathfrak{a}'_0(w_0) = \mathcal{O}_V$$

et les calculs ci-dessus restent valables.

□

Proposition 6.3.3. *Avec les notations précédentes, on a :*

$$\begin{aligned}
\varphi_{v_0}(v) &= \inf_{d,l\in\mathbb{N}} \frac{d}{l}\Big(c + \frac{1}{d} w\big(H^0(V, dL \otimes \mathfrak{a}'_{d(\frac{l}{d}-c_0)})\big)\Big) && (6.3)\\
&= \inf_{\substack{\lambda\geq -c_0\\ \lambda\in\mathbb{R}}} \frac{1}{\lambda + c_0}\Big(c + \varphi^L_{\lambda^{-1}w_0}(w)\Big) && (6.4)\\
&= \inf_{\substack{\lambda\geq -c_0\\ \lambda\in\mathbb{R}}} \frac{1}{\lambda + c_0}\Big(v(\mathfrak{m}_0) + \varphi^L_{\lambda^{-1}w_0}(w)\Big). && (6.5)
\end{aligned}$$

Démonstration. On a :

$$\varphi_{v_0}(v) = \inf_{l\geq 0} \frac{1}{l} \inf_{d\geq 0} \Big\{dc + w\big(H^0(V, dL \otimes \mathfrak{a}'_{(l-dc_0)}(w_0))\big)\Big\}.$$

Ce qui donne la première égalité. Puis, de nouveau grâce au lemme 6.3.2, on a :

$$\varphi_{v_0}(v) = \inf_{l\geq 0} \inf_{d\geq 0} \frac{d}{l}\{c + \frac{1}{d} w\Big(\mathfrak{a}'^L_d\big((l/d - c_0)^{-1} w_0\big)\Big)\}.$$

On pose alors $\lambda = \frac{l}{d} - c_0$, puis, en remarquant $l/d \geq 0 \iff \lambda \geq -c_0$:

$$\varphi_{v_0}(v) = \inf_{\lambda\geq -c_0} \inf_{d\geq 0} \frac{1}{\lambda + c_0}\Big\{c + \frac{1}{d} w\Big(\mathfrak{a}'^L_d\big(\lambda^{-1} w_0\big)\Big)\Big\} = \inf_{\lambda\geq -c_0} \frac{1}{\lambda + c_0}(c + \varphi^L_{\lambda^{-1}w_0}(w))$$

l'infimum portant sur les λ dans $[-c_0, +\infty] \cap \mathbb{Q}$. Grâce à la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, comme c'est un infimum, c'est égal à l'infimum pris sur tous les $\lambda \in [-c_0, +\infty]$.

Ici aussi le cas $\lambda = 0$ se traite en posant $\lambda^{-1} = +\infty$ et

$$\varphi^L_{+\infty\cdot w_0}(w) = \lim_d \frac{1}{d} w\big(\mathfrak{a}'^L_d(+\infty \cdot w_0)\big) = \lim_d \frac{1}{d} w\big(H^0(V, dL \otimes \mathcal{O}_V)\big) = w\|L\|.$$

□

6.4 Cas où v_0 est une valuation divisorielle

Dans toute la suite, V sera supposée lisse.

Soit Z une sous-variété lisse de V. On éclate Y en 0, on obtient $X := \mathcal{B}l_0(Y)$ dont le diviseur exceptionnel est exactement V. Posons ensuite $X' := \mathcal{B}l_Z(X)$. On note $\mu : X' \to X$ le morphisme de l'éclatement, E le diviseur exceptionnel, F la transformée stricte de V. Ainsi, sur V, μ induit un éclatement μ_F vérifiant $\mathcal{B}l_Z(V) = F$, avec pour diviseur exceptionnel $G := E \cap F$.

On pose également $H := \mu_F^*(A)$.

$$\begin{array}{ccccc} E & & F & & X' = \mathcal{B}l_Z(Y) \\ | & & \wr & & \downarrow \mu \\ Z & \subset & V & \subset & X = \mathcal{B}l_0(Y) \\ & & | & & \downarrow \rho \\ & & 0 & \in & Y \end{array}$$

Notre objectif est d'étudier la π-décomposition de Zariski de $D := -E$ avec $\pi = \rho \circ \mu : X' \to Y$. Pour cela, on a la proposition suivante :

Proposition 6.4.1. *En gardant les notations précédentes et en prenant $v_0 = \mathrm{ord}_Z = \mathrm{ord}_E$, on a, pour toute valuation v sur X' :*

$$v\|-E\|_\pi = \varphi_{v_0}(v) + v(E) \quad \text{i.e} \quad \varphi_{\|-E\|_\pi} = \varphi_{\mathrm{ord}_E} + \varphi_E. \tag{6.6}$$

Démonstration. On a $\mathfrak{a}_m = \pi_*\mathcal{O}_{X'}(-mE)$ d'où :

$$\pi^*\mathfrak{a}_m = \pi^*\pi_*\mathcal{O}_{X'}(-mE)$$

puis :

$$\pi^*\mathfrak{a}_m \otimes \mathcal{O}_{X'}(mE) = \pi^*\pi_*\mathcal{O}_{X'}(-mE) \otimes \mathcal{O}_{X'}(mE) = \mathfrak{b}_\pi(-mE).$$

On en déduit alors que $v\big(\mathfrak{b}_\pi(-mE)\big) = v(\mathfrak{a}_m) + mv(E)$ d'où le résultat.

□

Ainsi, $v \mapsto v\|-E\|_\pi$ est PL *si et seulement si* φ_{ord_E} est PL. C'est cette dernière que nous allons étudier.

On va appliquer les résultats de la section précédente en prenant $v_0 = \mathrm{ord}_E = \mathrm{ord}_Z$, qui est k^*-invariante par la proposition 6.2.3. On a alors $\mathfrak{a}'_l = I_Z^l$ où I_Z est l'idéal de définition de Z dans V. On est donc amené à calculer $\varphi^L_{(t^{-1}\mathrm{ord}_Z)|_V}(w)$ avec t réel supérieur à $-c_0 = -1$.

Proposition 6.4.2. *Avec les notations précédentes, on a*

$$\varphi^L_{t^{-1}\mathrm{ord}_Z|_V}(w) = w\|H - tG\| + tw(G).$$

Démonstration. Déjà, comme $\mathfrak{a}'_m(\mathrm{ord}_Z) = I_Z^m$, on a $\mathfrak{a}'_m(t^{-1}\mathrm{ord}_Z) = I_Z^{\lceil tm \rceil}$

On a :

$$\varphi^L_{t^{-1}\mathrm{ord}_Z|_V}(w) = \inf_{d\geq 0} \frac{1}{d} w\Big(H^0(V, dL \otimes I_Z^{\lceil dt \rceil})\Big).$$

Du fait que F est la transformée stricte de V, on a un isomorphisme :

$$H^0(V, dL \otimes I_Z^l) \simeq H^0(F, dH \otimes I_G^l)$$

qui conserve la valuation. Puis on a un isomorphisme :

$$H^0(F, dH \otimes I_G^l) \simeq H^0(F, dH - lG)$$

qui envoie f sur un élément σ_f, vérifiant localement $\sigma_f(f_G)^l = f$, où f_G est une équation locale de G. On a alors $w(f) = w(\sigma_f) + lw(G)$. On en déduit :

$$w\Big(H^0(V, dL \otimes I_Z^{\lceil dt \rceil})\Big) = w\Big(H^0\big(F, dH - \lceil dt \rceil G\big)\Big) + \lceil dt \rceil w(G).$$

Puis :

$$\lim_{d \to +\infty} \frac{1}{d} w\Big(H^0(V, dL \otimes I_Z^{\lceil dt \rceil})\Big) = \lim_{d \to +\infty} \Big(\frac{1}{d} w\Big(H^0\big(F, dH - \lceil dt \rceil G\big)\Big)\Big) + \Big(\lim_{d \to +\infty} \frac{\lceil dt \rceil}{d}\Big) w(G)$$

ce qui donne $w\|H - tG\| + tw(G)$ d'où le résultat.

Pour le cas $t = 0$, on a bien $\varphi^L_{+\infty \cdot \mathrm{ord}_Z|_V}(w) = w\|L\| = w\|H\|$. □

Comme $v_0 = \mathrm{ord}_E$, on a $c_0 = \mathrm{ord}_E(V) = 1$. Grâce à la proposition 6.3.3, on en déduit alors que :

Théorème 6.4.3.

$$\varphi_{v_0}(v) = \inf_{t \geq -1} \frac{1}{1+t}\Big(v(\mathfrak{m}_0) + w\|H - tG\| + tw(G)\Big). \tag{6.7}$$

La formule pour la fonction φ_{v_0} écrite au-dessus est valable seulement pour des valuations k^*-invariantes. En se plaçant dans la situation de la proposition 6.2.3, on travaillera dans un complexe composé seulement de valuations k^*-invariantes.

6.5 Utilisation d'une variété S auxiliaire

Dans cette section, on reste dans la situation de la section précédente. Pour pouvoir aller plus loin dans le calcul de $\varphi_{v_0}(v)$, on va calculer $w\|H - tG\|$ grâce à l'existence d'une décomposition de Zariski sur F. On se place dans le plan du Néron-Severi engendré par H et G.

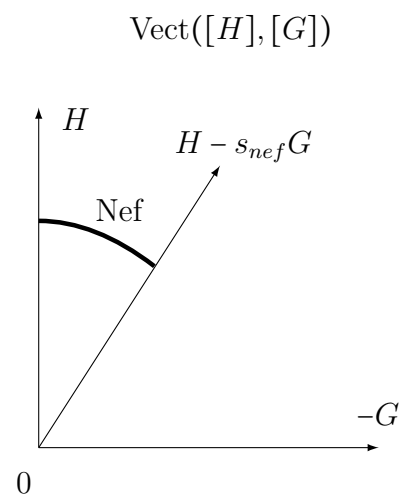
Rappelons que G est le diviseur exceptionnel de F, l'éclatement de V en Z. Délimitons le cône nef et psef dans le plan $\mathrm{Vect}([H], [G]) \subset \mathrm{N}^1(F)$:

Proposition 6.5.1. *H engendre un des rayons extrémaux du cône nef intersecté avec* $\mathrm{Vect}([H],[G])$*. L'autre est engendré par $H - s_{nef}G$, avec $s_{nef} = s_{nef}(L,Z) > 0$.*

Démonstration. Comme $-G$ est relativement ample et que H est le tiré-en-arrière d'un fibré ample sur V, $H - \epsilon G$ est ample pour ϵ assez petit et > 0. Le secteur entre $\mathrm{Vect}([H])$ et la projection du bord du cône nef n'est donc pas trivial.

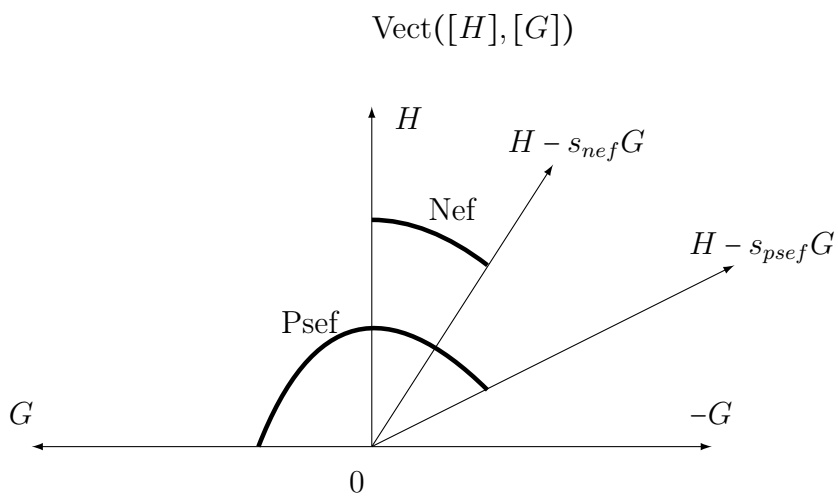
H est nef, mais pas ample, donc forme un des rayons extremaux du cône nef dans le plan.

Comme $-G$ est μ-ample et L est ample, $\mu^*(mL) - G$ est ample pour m suffisament grand. La droite $H - s_{nef}G$ nous donne le deuxième rayon extremal du cône nef. □



Proposition 6.5.2. *G engendre un des rayons extrémaux du cône psef intersecté avec* $\mathrm{Vect}([H],[G])$*. L'autre est engendré par $H - s_{psef}G$, avec $s_{psef} := s_{psef}(L,Z) > 0$.*

Démonstration. Comme G est exceptionnel, il est effectif mais pas gros. Ainsi, il est un rayon extremal du cône psef. De plus, $-G$ et G ne peuvent pas être pseudo-effectifs. Ainsi, $s_{psef}(L,Z) = \sup\{t | H - tG \text{ psef}\} \geq s_{nef}(L,Z)$ est l'autre rayon du cône psef. □



On en déduit des informations plus précises pour le calcul de $\varphi_{v_0}(v)$ (lorsque $v_0 = \mathrm{ord}_Z$). En effet, lorsque $t > s_{psef}$, $w\|H - tG\| = +\infty$, donc l'inf est entre -1 et s_{psef}. De plus, lorsque $0 \leq t \leq s_{nef}$, $w\|H - tG\| = 0$ grâce à la proposition 5.2.7.

Cela nous permet de calculer la constante d'Izumi pour $\mathrm{ord}_V/\mathrm{ord}_Z$:

Proposition 6.5.3. *On a :* $\varphi_{\mathrm{ord}_Z}(\mathrm{ord}_V) = \frac{1}{1+s_{psef}}$.

Démonstration. On remarque déja que $\mathrm{ord}_V|_V$ vaut tout le temps zéro (sauf pour la fonction nulle), donc on obtient :

$$\varphi_{\mathrm{ord}_Z}(\mathrm{ord}_V) = \inf_{-1 \leq t \leq s_{psef}} \frac{1}{1+t}.$$

On en déduit alors immédiatement le résultat. □

Grâce au travail à la sous-section 2.4.3, on a immédiatement :

Proposition 6.5.4. *Soit S un diviseur premier de V distinct de Z et soit $\tilde{S}$ sa transformée stricte dans F. Supposons $[\tilde{S}] \in \mathrm{Vect}([H],[G])$. Alors :*
- *Soit $\tilde{S}$ est nef en codim 1 (et donc $\tilde{S}|_{\tilde{S}}$ est psef).*
- *Soit $\tilde{S}$ est N-exceptionnel et engendre $H - s_{psef}G$.*

Prenons alors un diviseur premier lisse S, contenant Z et vérifiant $S \equiv aA$ pour un certain $a \in \mathbb{Q}$. Comme S et Z sont lisses, la multiplicité de Z dans S est 1 et on a $\tilde{S} \equiv aH - G$. Posons :

$$t_S := a^{-1} \qquad t_{nef} := s_{nef}(L|_S, Z) \qquad t_{psef} := s_{psef}(L|_S, Z).$$

Lemme 6.5.5. *On a :*

$$s_{nef} = \min(t_{nef}, s_{psef}) \quad et \quad s^{(1)}_{nef} \leq t_{psef}.$$

Démonstration. L'inégalité de droite est immédiate car si $H - tG$ est nef en codim 1, alors $H - tG|_S$ est psef.

Pour l'égalité de gauche, on a déjà $s_{nef} \leq s_{psef}$ en toute généralité, et comme la restriction d'un diviseur nef est nef, on a $s_{nef} \leq t_{nef}$, ce qui donne $s_{nef} \leq \min(t_{nef}, s_{psef})$. Dans l'autre sens, soit $t \in [s_{nef}; \min(t_{nef}, s_{psef})]$. Comme $t \in [s_{nef}, s_{psef}]$, on peut écrire

$$H - tG = \alpha(H - s_{nef}G) + \beta(H - s_{psef}G) \equiv \alpha(H - s_{nef}G) + \beta\tilde{S}$$

avec $\alpha, \beta \geq 0$. Comme $\alpha(H - s_{nef}G)$ est nef, le lieu non-nef de $H - tG$ est inclus dans $\tilde{S}$, donc $H - tG$ est nef si et seulement si $H - tG|_{\tilde{S}}$ est nef. Or c'est vrai car $t \leq t_{nef}$. Ainsi, $t = s_{nef}$ et l'intervalle $[s_{nef}; \min(t_{nef}, s_{psef})]$ est réduit à un point, ce qui prouve l'egalité. □

Proposition 6.5.6. *Si $\tilde{S}$ est N-exceptionnel, on a :*

$$t_{nef} = s_{nef} \leq s^{(1)}_{nef} \leq t_{psef}.$$

Démonstration. Grâce au lemme précédent, on a soit $s_{nef} = t_{nef}$, soit $s_{nef} = s_{psef}$. Or le deuxième cas implique que $H - s_{psef}G$ est nef, donc nef en codim 1, ce qui n'est pas possible car on aurait alors que $\tilde{S}$ est nef en codim 1 puis $N(\tilde{S}) = 0$. □

Remarque 6.5.7. Si $\tilde{S}|_{\tilde{S}}$ pas psef, on a alors $(H - s_{psef}G)|_{\tilde{S}}$ pas psef d'où :

$$t_{nef} = s_{nef} \leq s^{(1)}_{nef} \leq t_{psef} < s_{psef}.$$

On obtient alors une condition suffisante relativement simple sur S pour avoir la décomposition de Zariski :

Proposition 6.5.8. *Pour que $H - tG$ admette une décomposition de Zariski pour tout $t \geq 0$, il faut et il suffit que $s_{nef} = s^{(1)}_{nef}$. Il est alors suffisant d'avoir $t_{nef} = t_{psef}$.*

Démonstration. Si $s_{nef} = s^{(1)}_{nef}$, la partie nef en codim 1 dans la décomposition de Zariski divisorielle devient nef, ce qui revient à avoir une décomposition de Zariski. Si $s_{nef} < s^{(1)}_{nef}$ alors $H - s^{(1)}_{nef}G$ a pour décomposition de Zariski divisorielle $H - s^{(1)}_{nef}G + 0$ (par maximalité) dont la partie nef en codim 1 n'est pas nef, donc qui n'admet pas de décomposition de Zariski.

Supposons $t_{nef} = t_{psef}$. On a alors :

— si $s_{nef} = t_{nef} = t_{psef}$, or on a $s_{nef} \leq s^{(1)}_{nef} \leq t_{psef}$ d'où $s_{nef} = s^{(1)}_{nef} = t_{psef}$ ce qui suffit pour avoir une décomposition de Zariski de $H - tG$ pour tout $t \geq 0$.
— si $s_{nef} = s_{psef}$ alors comme $s_{nef} \leq s^{(1)}_{nef} \leq s_{psef}$, on a $s_{nef} = s^{(1)}_{nef} = s_{psef}$ ce qui convient également.

On a prouvé que la condition $t_{nef} = t_{psef}$ est suffisante. □

On obtient alors ce qu'on veut si on a $\tilde{S}$ est N-exceptionnel et $t_{nef} = t_{psef}$. Mais on aimerait avoir le caractère N-exceptionnel comme conséquence d'une propriété plus "intrinsèque" (ou au moins plus lisible). C'est le sujet de la proposition suivante :

Proposition 6.5.9. *Supposons que $t_{nef} = t_{psef}$. Alors $\tilde{S}$ est N-exceptionnel* si et seulement si $t_S > t_{psef}$ *; dans ce cas $s_{psef} = t_S$.*

Démonstration. Supposons que $\tilde{S}$ est N-exceptionnel. Comme $t_{nef} = t_{psef}$, on a $s^{(1)}_{nef} = t_{psef}$. Or, comme S est N-exceptionnel, elle ne peut pas être nef en codim 1, d'où $t_S > s^{(1)}_{nef} = t_{psef}$.

Réciproquement, supposons que $t_S > t_{psef} = s^{(1)}_{nef}$, on a alors que $\tilde{S}$ est N-exceptionnel, puis nécessairement $t_S = s_{psef}$ car $\tilde{S}$ engendre le rayon $H - s_{psef}G$. □

On arrive au théorème suivant :

Théorème 6.5.10. *Supposons qu'il existe un diviseur premier S de V vérifiant $S \equiv aL$ pour un certain $a > 0$, et tel que $a^{-1} := t_S > t_{psef} = t_{nef} > 0$. Alors $s_{nef} = t_{nef} = t_{psef}$, $s_{psef} = t_S$ et tout diviseur $H - tG$, $t \in [s_{nef}; s_{psef}]$ a la décomposition de Zariski suivante :*

$$\begin{aligned} H - tG &= \Big(\frac{s_{psef} - t}{s_{psef} - s_{nef}}(H - s_{nef}G) + \frac{t - s_{nef}}{s_{psef} - s_{nef}}(H - s_{psef}G - \tilde{S})\Big) + \Big(\frac{t - s_{nef}}{s_{psef} - s_{nef}}\tilde{S}\Big) \\ &\equiv \frac{s_{psef} - t}{s_{psef} - s_{nef}}(H - s_{nef}G) + \frac{t - s_{nef}}{s_{psef} - s_{nef}} s_{psef}\tilde{S}. \end{aligned}$$

Démonstration. Déjà, comme $s_{nef} = s^{(1)}_{nef}$, avec $t \in [s_{nef}; s_{psef}]$, la décomposition divisorielle de $H - tG$ est automatiquement une décomposition de Zariski. On cherche alors la décomposition $H - tG = P(H - tG) + N(H - tG)$. Écrivons déjà $H - tG = \alpha(H - s_{nef}G) + \beta(H - s_{psef}G)$ avec $\alpha, \beta \geq 0$, décomposition qui existe et qui est unique car $H - tG$ est dans le cône délimité par $H - s_{nef}G$ et $H - s_{psef}G$. On a $H - s_{psef}G \equiv s_{psef}\tilde{S}$, ce qui nous permet d'écrire :

$$H - tG = \Big(\alpha(H - s_{nef}G) + \beta(H - s_{psef}G - \tilde{S})\Big) + \Big(\beta s_{psef}\tilde{S}\Big).$$

On va montrer qu'on a trouvé ici la décomposition de Zariski. Déjà, comme $(H - s_{psef}G - s_{psef}\tilde{S})$ est numériquement trivial puis $H - tG - \beta s_{psef}\tilde{S}$ est nef, on a par maximalité $N(H - tG) \leq \beta s_{psef}\tilde{S}$, donc $N(H - tG) = \gamma s_{psef}\tilde{S}$ avec $0 \leq \gamma \leq \beta$. On va montrer que $\gamma = \beta$. Raisonnons par l'absurde et supposons $\beta > \gamma$. On a alors :

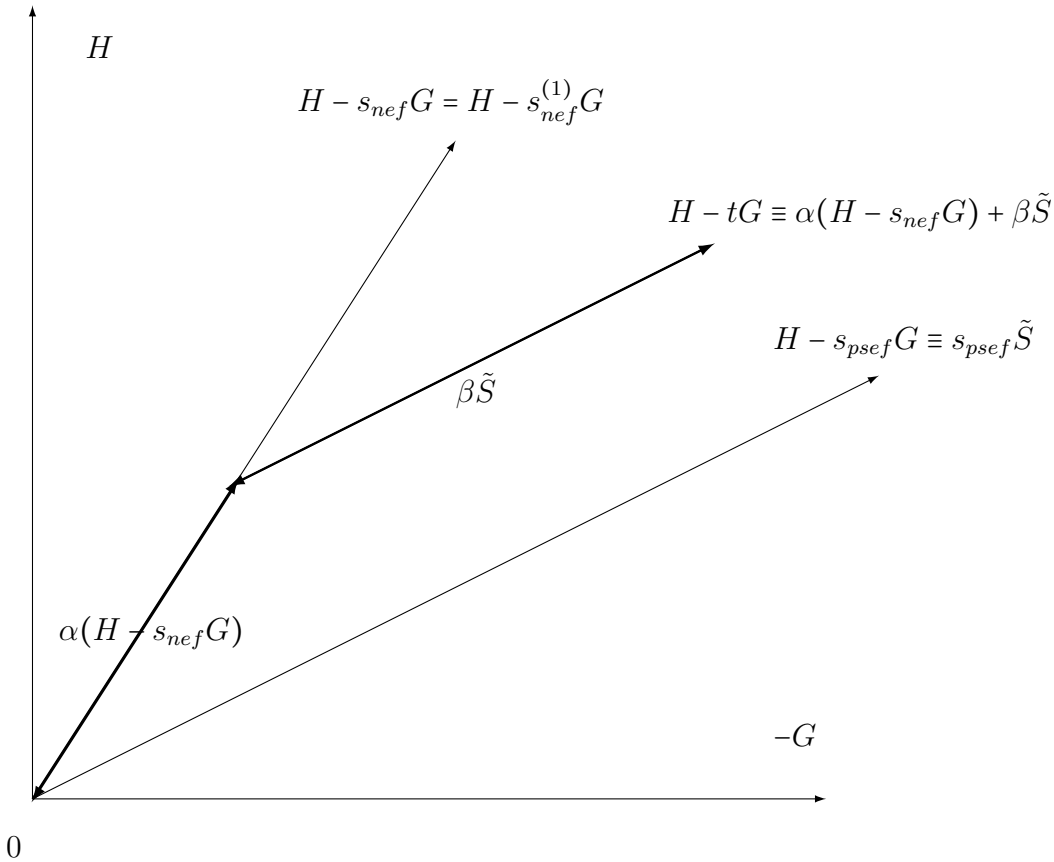
$$P(H-tG) = \alpha(H-s_{nef}G)+\beta(H-s_{psef}G)-\gamma s_{psef}\tilde{S} \equiv \alpha(H-s_{nef}G)+(\beta-\gamma)(H-s_{psef}G)$$

ce qui sort $P(H - tG)$ du cône nef, ce qui amène à une contradiction. Ensuite, en résolvant le système, on obtient :

$$\alpha = \frac{s_{psef} - t}{s_{psef} - s_{nef}} \text{ et } \beta = \frac{t - s_{nef}}{s_{psef} - s_{nef}} s_{psef}.$$

□

$\mathrm{Vect}([H],[G])$



On en déduit alors la proposition suivante :

Proposition 6.5.11. *Pour toute valuation w sur V, on a :*
- *Si $t < 0$, $w\|H - tG\| = -tw(G)$.*
- *Si $t \in [0; s_{nef}]$, $w\|H - tG\| = 0$.*
- *Si $t \in [s_{nef}; s_{psef}]$, $w\|H - tG\| = \frac{t - s_{nef}}{s_{psef} - s_{nef}} s_{psef} w(\tilde{S})$.*
- *Si $t > s_{psef}$, $w\|H - tG\| = +\infty$.*

On peut à présent décrire entièrement $\varphi_{v_0}(v)$ pour $v_0 = \mathrm{ord}_Z$:

Proposition 6.5.12. *Pour toute valuation v k^*-invariante, en posant w sa restriction à Y, on a :*

$$\varphi_{v_0}(v) = \inf\Big(v(\mathfrak{m}_0); \frac{v(\mathfrak{m}_0) + s_{nef} w(G)}{1 + s_{nef}}; \frac{v(\mathfrak{m}_0) + s_{psef} w(\tilde{S}) + s_{psef} w(G)}{1 + s_{psef}}\Big).$$

Mais nous aimerions avoir l'expression de $\varphi_{v_0}(v)$ sur un complexe issu d'un diviseur à croisements normaux. Pour cela, on a la proposition suivante :

Lemme 6.5.13. *Soit T une sous-variété lisse de V. Posons $I_{T/X}$ l'idéal annulateur de T vu comme sous-variété de X, et $I_{T/V}$ l'idéal annulateur de T vu comme sous-variété de V. Alors :*

$$v(I_{T/X}) = \min\Big(w(I_{T/V}), v(V)\Big).$$

Démonstration. Puisque A est ample, pour m suffisamment grand, mA et $mA \otimes I_{T/V}$ soient globalement engendrés sur V. On peut donc choisir des sections $s_0, s_1, ..., s_r \in R_m$ telles que s_0 ne s'annule pas au centre $\xi = c_V(w)$ de w sur V, et que les $f_i := s_i/s_0 \in O_{V,\xi}, i = 1, ..., r$ engendrent $I_{T/V}$ en ξ.

On peut aussi interpréter s_i/s_0 comme une fonction rationnelle $g_i \in O_{X,\xi} \subset K(X) = K(Y)$, dont la restriction à V est égale à f_i. Si on note $g_0 \in O_{X,\xi}$ une équation locale de V, alors $I_{T/X} = (g_0, g_1, ..., g_r)$ en $\xi = c_X(v)$, et donc :

$$v(I_{T/X}) = \min(v(g_0), v(g_1), ..., v(g_r)).$$

Or $v(g_0) = v(V)$, et pour $i \geq 1$, on a $v(g_i) = v(s_i) - mv(s_0) = w(s_i) = w(f_i)$, et donc $v(I_{T/X}) = \min(v(V), v(I_{T/V}))$. □

Soit à présent $X'' = \mathcal{B}l_{\tilde{S}}(X')$. Posons E_S le diviseur exceptionnel, E', F' les transformées strictes de E, F. On a :

Proposition 6.5.14. *E_S, E' et F' sont à croisements normaux et $v(E) = \min\big(v(V), w(G)\big)$; $v(E_S) = \min\big(v(V), w(\tilde{S})\big)$.*

Démonstration. La deuxième partie est directement issue du lemme précédent. Pour la première partie, la seule difficulté est de voir que $E_S \cap E' \cap F'$ est connexe. Or, c'est le tiré-en-arrière de $G \cap \tilde{S}$ d'où le résultat. □

Comme V est invariant sous l'action de k^*, on obtient que F, Z, S le sont aussi, puis F', E', E_S également. On se place alors sur le complexe défini par le diviseur $E_S + E' + F'$, inclus dans les valuations k^*-invariantes d'après la proposition 6.2.3.

On remarque déjà qu'on a $v(V) = v(F) + v(E) = v(F') + v(E') + v(E_S)$, ce qui nous permet de déduire que $w(G) = v(E) = v(E')$ et $w(\tilde{S}) = v(E_S)$ dès que $v(F') \neq 0$.

Posons $x = v(F'), y = v(E'), z = v(E_S)$. Sur le morceau d'espace défini par $\{x \neq 0\}$, On a :

$$\varphi_{v_0}(v) = \inf\Big(x + y + z; \frac{x}{1 + s_{nef}} + y; \frac{x}{1 + s_{psef}} + y + z\Big).$$

On voit alors immédiatement :

Proposition 6.5.15. *Les ruptures de pentes de la fonction précédente sont définies par les plans* $\{x = 0\}$ *;* $\{\frac{s_{nef}}{1+s_{nef}} x = z\}$ *;* $\{\frac{s_{psef}-s_{nef}}{(1+s_{psef})(1+s_{nef})} x = z\}$.

Démonstration. Il suffit de résoudre les équations :

$$\begin{aligned} x + y + z &= \frac{x}{1 + s_{psef}} + y + z \\ x + y + z &= \frac{x}{1 + s_{nef}} + y \\ \frac{x}{1 + s_{nef}} + y &= \frac{x}{1 + s_{psef}} + y + z \end{aligned}$$

□

On a donc une expression précise de $v \mapsto \varphi_{v_0}(v)$ puis de $\varphi_{\|D\|_\pi} : v \mapsto v\|D\|_\pi$ grâce à la proposition 6.4.1. Ces résultat vont permettre, dans un cadre plus précis développé au chapitre suivant, de pouvoir étudier précisément l'existence de la décomposition de Zariski relative de $-E$.

Chapitre 7

Construction de Cutkosky et contre-exemple

7.1 Réseaux quadratiques et surfaces K3

7.1.1 Surfaces K3

Définition 7.1.1. On dit que S est une surface K3 si c'est une surface complexe projective non-singulière vérifiant $H^1(S, \mathcal{O}_S) = 0$ et de diviseur canonique K_S trivial.

Proposition 7.1.2. *Pour C une courbe irréductible sur une surface K3, on a $(C^2) \in 2\mathbb{N}$ ou $(C^2) = -2$ (et $C \simeq \mathbb{P}^1$).*

Démonstration. [Huy16, 1.3 p.17-18] : Par la formule d'adjonction, on a $C^2 = 2p_a(C) - 2$ où $p_a(C)$ est le genre arithmétique de C, donc un entier positif. Ainsi, C^2 est un multiple de 2 supérieur à -2. □

Remarque 7.1.3. Les courbes irréductibles telles que $C^2 = -2$ sont appelées les (-2)-courbes.

7.1.2 Réseaux quadratiques

Définition 7.1.4. On définit un réseau quadratique Λ comme un $\mathbb{Z}$-module libre de rang fini, équipé d'une $\mathbb{Z}$-forme bilinéaire symétrique q.

On dit que Λ est pair si $x \mapsto q(x, x)$ ne prend que des valeurs paires.

On définit également la signature du réseau comme la signature de la forme bilinéaire associée.

Pour toute surface X, la dualité diviseur-courbe se transforme en une forme d'intersection sur le Néron-Severi (*cf.* 1.2.8). Ainsi, $\mathrm{NS}(X)$ muni de la forme $q([D_1],[D_2]) = (D_1 \cdot D_2)$ est un réseau quadratique.

Maintenant, le théorème à la base de la construction de Cutkosky :

Théorème 7.1.5 (Morrison)**.** *Pour $\rho \leq 10$, tout réseau quadratique pair de signature $(1, \rho - 1)$ est réalisable comme le Néron-Severi d'une surface K3.*

Démonstration. [Mor84, Cor. 2.9] □

7.1.3 Construction de S

Considérons le réseau quadratique $(\mathbb{Z}^3, q)$ et $q(x,y,z) = 4x^2 - 4y^2 - 4z^2$. Il est clair que q est de signature $(1,2)$. De plus, 4 divise $q(x,y,z)$ pour $(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3$, donc $(\mathbb{Z}^3, q)$ est pair.

On peut donc appliquer le théorème de Morrison. On obtient alors S une surface K3, donc projective et lisse, dont le Néron-Severi $\mathrm{NS}(S)$ muni de la forme bilinéaire symétrique d'intersection est isomorphe à $(\mathbb{Z}^3, q)$. Il semblerait qu'on n'ait aucune information sur S mis à part la structure de son Néron-Severi, mais cela nous suffira pour l'étude de S que nous voulons mener.

7.2 Étude de S

7.2.1 Premières remarques

Proposition 7.2.1. *Pour toute courbe irréductible, on a $(C^2) \geq 0$.*

Démonstration. Comme vu à la proposition 7.1.2, on a $(C^2) \geq 0$ ou $C^2 = -2$. Or, $(C^2) = q([C])$ qui est un multiple de 4. Le cas -2 étant exclu, on a donc $(C^2) \geq 0$ □

Grâce à la proposition 1.2.46, on en déduit la proposition suivante :

Proposition 7.2.2. *Sur S, on a les relations suivantes :*

$$\mathrm{Amp}(S) = \mathrm{Big}(S) \subset \mathrm{Eff}(S) \subset \mathrm{Nef}(S) = \overline{NE}(S) = \overline{\mathrm{Eff}}(S).$$

Intéressons-nous maintenant au cône Nef :

Proposition 7.2.3. *Considérons un isomophisme entre $\big(NS(S);\cdot\big)$ et $\big(\mathbb{Z}^3, q\big)$, qui a $[C]$ associe $\varphi([C])$. On est dans l'un des deux cas suivants :*

(1) La première coordonnée de $\varphi[C]$ est positive pour toute courbe irréductible.
(2) La première coordonnée de $\varphi[C]$ est négative pour toute courbe irréductible.

Démonstration. Soient C et C' deux courbes irréductibles dont les classes $[C]$ et $[C']$ sont disctinctes. On a alors $(C \cdot C') \geq 0$. Posons $\varphi[C] = (x, y, z)$ et $\varphi[C'] = (x', y', z')$.

Comme les auto-intersections sont positives, on a : $(C^2) \geq 0$ et $(C'^2) \geq 0$ d'où :

$$x^2 \geq y^2 + z^2 \text{ et } x'^2 \geq y'^2 + z'^2.$$

On a alors ensuite :

$$x^2x'^2 \geq y^2y'^2 + z^2z'^2 + y^2z'^2 + y'^2z^2 \geq (|yy'| + |zz'|)^2 + (|yz'| - |zy'|)^2.$$

Puis :

$$x^2x'^2 \geq (|yy'| + |zz'|)^2$$

d'où $|xx'| \geq |yy'| + |zz'|$. Ainsi, si x et x' étaient non-nuls et de signes différents, on aurait

$$(C \cdot C') = 4(xx' - yy' - zz') = 4(-|xx'| - yy' - zz') \leq 4(|yy'| + |zz'| - |xx'|) \leq 0$$

donc ce serait égal à zéro. On serait alors partout dans le cas d'égalité. Cela donne $x^2 = y^2 + z^2$, $x'^2 = y'^2 + z'^2$ et $(|yz'| - |zy'|)^2 = 0$ donc (y^2, z^2) est colinéaire à (y'^2, z'^2). Posons α le réel tel que $(y'^2, z'^2) = \alpha(y^2, z^2)$. On a alors $x'^2 = \alpha x^2$ puis, comme x et x' sont de signes distincts, on a :

$$(C \cdot C') = 4\sqrt{\alpha}(-x^2 \pm y^2 \pm z^2)$$

qui vaut 0 seulement si y, y' et z, z' sont de signes opposés. Ainsi, on obtient que $[C'] = -\sqrt{\alpha}[C]$ puis $[C]$ et $-[C]$ sont pseudo-effectifs. Ainsi $[C] = 0$, ce qui est absurde car on avait supposé $x \neq 0$.

□

Quitte à prendre l'opposé de l'isomophisme considéré, on peut supposer que la première coordonnée de la classe d'une courbe irréductible est toujours positive. On identifiera maintenant le Néron-Severi à ses coordonnées via cet isomorphisme, c'est-à-dire pris dans la base :

$$\Big(\varphi^{-1}\big((1;0;0)\big), \varphi^{-1}\big((0;1;0)\big), \varphi^{-1}\big((0;0;1)\big)\Big).$$

Comme le cône effectif est engendré par les courbes irréductibles, on obtient que tous les éléments du $\mathbb{R}$-cône effectif ont une première coordonnée positive, donc le

cône $\overline{NE}(S)$ ne contient que des éléments avec une première coordonnée positive. Par ailleurs, ces éléments sont nef, donc d'auto-intersection positive. On a donc :

$$\mathrm{Nef}(S) \subset \{(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3 \mid 4(x^2 - y^2 - z^2) \geq 0 \text{ et } x \geq 0\}.$$

Réciproquement, si on a un diviseur D tel que $[D] \in \{(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3 \mid 4(x^2 - y^2 - z^2) \geq 0 \text{ et } x \geq 0\}$, alors on a $x_D^2 \geq y_D^2 + z_D^2$. Prenons une courbe C, irréductible, avec $[C] = (x,y,z)$. On a $x^2 \geq y^2 + z^2$ et $x \geq 0$. Alors, par les mêmes calculs qu'à la preuve précédente, on a $x_D x \geq |y_D y| + |z_D z|$. D'où :

$$(D \cdot C) = 4(x_D x - y_D y - z_D z) \geq 0.$$

Ceci étant vrai pour toute courbe irréductible, D est nef, puis :

$$\mathrm{Nef}(S) = \{(x,y,z) \in \mathbb{Z}^3 \mid 4(x^2 - y^2 - z^2) \geq 0 \text{ et } x \geq 0\}.$$

7.2.2 Plongement de S dans $\mathbb{P}^3$

Pour les prochaines propositions, nous nous appuyerons sur [Cut00, Sect. 3 & 4, p.3-8].

Proposition 7.2.4. *Soit B un diviseur ample sur S. Alors :*

(i) B est sans point-base et il existe une courbe lisse C numériquement équivalente à B.

(ii) Le morphisme ϕ induit par $|B|$ est de S vers $\mathbb{P}^g$, avec $g = \frac{1}{2}(B^2) + 1$.

(iii) On est dans l'un des deux cas suivants :

- *ϕ est un isomorphisme sur une surface de degré $2g - 2$.*
- *ϕ est un morphisme de degré 2 sur une surface rationnelle de degré $g - 1$.*

Démonstration. [Cut00, thm. 3] □

Considérons à présent un diviseur ample et effectif B, vérifiant $[B] = (1,0,0)$. Ce dernier existe car $(1,0,0)$ est dans l'intérieur du cône nef, donc est une classe ample et grosse. On a alors :

Proposition 7.2.5. *$[B]$ induit plongement de S dans $\mathbb{P}^3$ sur une surface de degré 4.*

Démonstration. [Cut00, thm. 5] : On montre qu'il ne peut s'agir d'un morphisme de degré 2 et qu'on est donc nécessairement dans le cas d'un isomorphisme entre S et un surface sur $\mathbb{P}^g$ de degré $2g - 2$, avec $g = \frac{1}{2}(B)^2 + 1 = 3$. □

Dans la suite, on identifiera S avec son image dans $\mathbb{P}^3$. Ainsi, on écrira : $\mathcal{O}_S(B) = \mathcal{O}_S(1) := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)|_S$. B s'envoie également sur un certain diviseur ample A de $\mathbb{P}^3$ vérifiant $[A] = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)$. C'est $(\mathbb{P}^3, A)$ qui va être la variété polarisée considérée.

Comme S est une quartique, on a également $S \equiv 4A$.

7.2.3 Construction de la courbe Z

On cherche Z une courbe de S telle que la droite $t[B] - [Z]$ coupe le bord du cône nef en des coordonnées irrationnelles.

Proposition 7.2.6. *Il existe une courbe Z contenue dans S telle que la droite $\{t[B] - [Z] \mid t \in \mathbb{R}\}$ dans $\mathrm{N}^1(S)$ coupe $\mathrm{Nef}(S)$ pour t irrationnel.*

Démonstration. Grâce à la proposition 7.2.4, dès qu'on a une classe ample, on a une courbe lisse dedans. Considérons (a, b, c) un triplet d'entiers tels que $a > 0$, $a^2 > b^2 + c^2$ et $\sqrt{b^2 + c^2} \notin \mathbb{Q}$ — par exemple, $(9, 1, 1)$ convient. Il existe alors une courbe lisse Z tel que $[Z] = (a, b, c)$.

La droite $[tB - Z]$ coupe la surface définie par $\{q = 0\}$ aux deux points vérifiant $(t - a)^2 = b^2 + c^2$ *i.e* $t = a \pm \sqrt{b^2 + c^2}$. Comme le cône nef est l'ensemble des points de $\{q = 0\}$ de première coordonnée positive, le point d'intersection avec le cône nef est le point $[t_0 B - Z]$ avec $t_0 = a + \sqrt{b^2 + c^2}$.

□

Posons alors $\lambda = a + \sqrt{b^2 + c^2}$.

Proposition 7.2.7. *On a $t_{nef} = t_{psef} = \lambda^{-1}$*

Démonstration. Pour l et k des entiers :

- $lB - kZ$ est ample $\iff \frac{l}{k} > \lambda$
- $lB - kZ$ n'est pas nef dès que $\frac{l}{k} < \lambda$.

On en déduit alors $t_{nef} = \lambda^{-1}$. Comme le cône nef et le cône psef coïncident, on a le résultat.

□

Remarque 7.2.8. Il suffit alors de choisir une courbe lisse Z (qui existe) telle que $[Z] = (a, b, c)$, avec $a > 0$, $a^2 > b^2 + c^2$ et $\sqrt{b^2 + c^2} \notin \mathbb{Q}$. Comme dans [Kur03], nous choisiront $(a, b, c) = (9, 1, 1)$. Ainsi, pour la suite, $\lambda = 9 + \sqrt{2}$.

7.3 Le contre-exemple

Soit $X = \mathcal{B}l_0(\mathbb{C}^4)$. Le diviseur exceptionnel $\mathbb{P}$ de X est isomorphe à $\mathbb{P}^3$ et donc contient S qui contient Z. Soit alors $X' = \mathcal{B}l_Z(X)$ et notons E le diviseur exceptionnel de X'.

$$\begin{array}{ccccc} E & & F & & X' = \mathcal{B}l_Z(X) \\ | & & \wr & & \downarrow \mu \\ Z & \subset & \mathbb{P} & \subset & X = \mathcal{B}l_0(\mathbb{C}^4) \\ & & | & & \downarrow \rho \\ & & 0 & \in & \mathbb{C}^4 \end{array}$$

Posons $\pi := \rho \circ \mu : X' \to \mathbb{C}^4$.

Proposition 7.3.1. *le diviseur $-E$ n'admet pas de π-décomposition de Zariski.*

Démonstration. Remarquons d'abord que $t_{nef} = t_{psef} = \lambda^{-1}$. Par ailleurs, en gardant les mêmes notations qu'au chapitre précédent, comme $S \equiv 4A$, on a $t_S = 1/4$, donc $t_S > t_{psef} = \lambda^{-1}$ (car $\lambda > 4$). On peut donc appliquer le théorème 6.5.10 et les propositions qui suivent. On obtient déjà $s_{nef} = \lambda^{-1}$ et $s_{psef} = 1/4$.

Comme à la proposition 6.5.15, on considère $X'' = \mathcal{B}l_{\tilde{S}}(X')$, on note E_S le diviseur exceptionnel de l'éclatement, E' la transformée stricte de E et F' la transformée stricte de F.

$$\begin{array}{ccccccc} E' & ; & E_S & ; & F' & \subset & X'' = \mathcal{B}l_{\tilde{S}}(X') \\ \wr & & | & & \wr & & \downarrow \\ E & ; & \tilde{S} & \subset & F & \subset & X' = \mathcal{B}l_Z(X) \\ | & & \wr & & \wr & & \downarrow \mu \\ Z & \subset & S & \subset & \mathbb{P} & \subset & X = \mathcal{B}l_0(\mathbb{C}^4) \\ & & & & | & & \downarrow \rho \\ & & & & 0 & \in & \mathbb{C}^4 \end{array}$$

On se place alors sur le complexe simplicial défini sur X'' par E_S, E', et F'. On utilise alors la proposition 6.5.15 qui nous donne le calcul de $\varphi_{\mathrm{ord}_Z}(v)$ en fonction de $x = v(F'), y = v(E'), z = v(E_S)$. En dehors du plan $\{x = 0\}$, on a une rupture de pente définie par $\{x = (\lambda + 1)z\}$. Or, cette rupture de pente n'est pas rationnelle.

En effet, elle contient le point $(1, 1, \frac{1}{\lambda+1})$ avec deux coordonnées rationnelles et une irrationnelle. La pente ne peut donc pas être définie par une équation rationnelle. Ainsi, φ_{ord_Z} n'est pas PL.

Puis, grâce à la discussion suivant la proposition 6.4.1, on en déduit que $v \mapsto v\|-E\|_\pi$ n'est pas PL, puis que $-E$ n'admet pas de π-décomposition de Zariski.

$\square$

Ainsi, en utilisant les outils valuatifs développés dans la deuxième partie de cette thèse, en utilisant les calculs du chapitre précédent, et en appliquant tout cela à la construction de Cutkosky, on a bien trouvé un diviseur qui n'admet pas de décomposition de Zariski relative.

Quatrième partie

Annexes

Chapitre 8

La décomposition de Zariski sur les surfaces

Dans ce chapitre, nous rappelons la preuve originale de Zariski démontrant l'existence et l'unicité de la décomposition de Zariski sur les surfaces projectives lisses. Comme nous allons le voir, ce résultat découle de manipulations d'algèbre linéaire.

Soit $\mathbb{K}$ un corps ordonné (par exemple un sous-corps de $\mathbb{R}$) et E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ avec une forme bilinéare symétrique $\langle\cdot|\cdot\rangle$.

Supposons qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ telle que $\langle e_i|e_j\rangle \geq 0$ pour tout $i, j \in \{1, \cdots, n\}, i \neq j$. On identifie alors E à $\mathbb{Q}^n$ et les vecteurs à leurs coordonnées dans $\mathcal{B}$ sous forme de vecteur colonne.

Posons $M = (\langle e_i|e_j\rangle)_{i,j\in\{1,\cdots,n\}}$ la matrice d'intersection de $\langle\cdot|\cdot\rangle$. On a alors :

$$\langle x|y\rangle = {}^tXMY. \tag{8.1}$$

Définition 8.1. On dit qu'un vecteur x est effectif si toutes ses coordonnées sont positives *i.e* $X \geq 0$. Notons $\mathrm{Eff}(E)$ l'ensemble des vecteurs effectifs.

Définition 8.2. On dit qu'un vecteur y est nef si $\langle y|x\rangle \geq 0$ pour tout vecteur x effectif. C'est équivalent à avoir $\langle y|e_i\rangle \geq 0$ pour tout $e_i \in \mathcal{B}$ *i.e* $MY \geq 0$.

Notons $\mathrm{Nef}(E)$ l'ensemble des vecteurs nef. Si M est inversible, $\mathrm{Nef}(E) = M^{-1}\,\mathrm{Eff}(E)$. Si F est un sous-espace vectoriel de E engendré par des éléments de $\mathcal{B}$, on dit que y est nef selon F si $\langle y|x\rangle \geq 0$ pour tout $x \in F$ effectif. Tout élément nef est évidemment nef selon F.

Lemme 8.3. *Si $y \in F$ est effectif et nef selon F, alors il est nef.*

Démonstration. S'il est effectif, alors l'intersection sera positive avec les éléments de la base de E qui ne sont pas dans F. Puis par linéarité, il sera nef selon le complémentaire de F engendré par les éléments de la base de E qui ne sont pas dans F. Comme il est également nef selon F, par linéarité encore, il sera nef selon tout E. □

Remarque 8.4. Grâce au lemme précédent, on n'a pas besoin de se restreindre à E de dimension finie.

Théorème 8.5. *Pour tout vecteur effectif $x \in E$, il existe une unique décomposition*

$$x = p + n \tag{8.2}$$

telle que :

(i) p est nef.

(ii) n est effectif.

(iii) $\langle p|e_i\rangle = 0$ pour tout e_i dans le support de n.

(iv) La matrice $M|_n = (\langle e_i|e_j\rangle)_{e_i,e_j\in\mathcal{B}\cap supp(n)}$ est définie négative.

De plus, p est automatiquement effectif.

p est la partie positive, et n la partie négative.

Démonstration. La preuve qu'on va donner est due à Zariski et exposée dans [BCK12], et elle nous intéresse car le mécanisme — l'algorithme — de la preuve suggère une approche pour la recherche d'une décomposition de Zariski dans le cas général, ce qui sera illustré avec le contre-exemple dû à Nakayama. L'idée est de construire la partie négative par étape. On va appeler sous-espaces spéciaux les espaces engendrés par des éléments de la base, et on dit qu'un tel espace est défini négatif si c'est le cas de la matrice d'intersection sur les éléments de la base engendrant l'espace. On va chercher à construire par étape un sous-espace spécial défini négatif le plus grand possible.

La preuve repose sur les trois lemmes suivants :

Lemme 8.6. *Soit $N = \mathbf{Vect}(e_{i_1}, \cdots, e_{i_k})$ un sous-espace spécial défini négatif. Supposons qu'il contienne un vecteur n tel que $\langle n|e_{i_l}\rangle \leq 0$ pour $l \in \{1, \cdots, k\}$. Alors n est effectif.*

Lemme 8.7. *Soit x un vecteur effectif, et N le sous-espace spécial engendré par le support de x. Supposons que N soit défini négatif. Alors, pour tout vecteur p, si p est orthogonal à N et $x - p$ est dans N, alors p est effectif.*

Lemme 8.8. *Soit $N \subset N'$ deux sous-espaces spéciaux avec N défini négatif. Écrivons $N = \mathbf{Vect}(e_{i_1}, \cdots, e_{i_k})$ et $N' = \mathbf{Vect}(e_{i_1}, \cdots, e_{i_k}, \cdots, e_{i_l})$. Supposons qu'il existe un vecteur effectif x vérifiant :*

(i) $\langle x|n\rangle \leq 0$ *pour tout* $n \in N$
(ii) $\langle x|n\rangle < 0$ *pour tout* $n \in N' \setminus N$
Alors N' *est aussi défini négatif.*

Démonstration. D'abord le premier lemme : soit n un vecteur vérifiant $\langle n|e_{i_l}\rangle \leq 0$ pour $l \in \{1, \cdots, k\}$. Écrivons-le dans $\mathcal{B}$, et séparons d'un côté les vecteurs avec un coefficient positif et les vecteurs avec un coefficient négatif. On obtient une décomposition $n = q - r$ avec $q, r \in N$ effectifs et de support disjoint. Alors $\langle q|r\rangle \geq 0$. Ainsi, on a :

$$\langle r|r\rangle \geq \langle r|r\rangle - \langle q|r\rangle = -\langle n|r\rangle \tag{8.3}$$

qui est positif car r est effectif et engendré par la base de N. Comme N est défini négatif, alors nécessairement $r = 0$ d'où n est effectif.

Ensuite, le deuxième lemme : Soit F l'espace vectoriel engendré par le support de n, et soit p avec $v - p \in N$ et $\langle p|e\rangle = 0$ pour tout élément de la base de N. Considérons M le complémentaire de N engendré par le reste de $\mathcal{B}$ et décomposons v et p selon ces deux espaces : $v = v_N + v_M$ et $p = p_N + p_M$. Comme v est effectif, v_N et v_M le sont aussi. Or, $v - p = (v_N - p_N) + (v_M - p_M)$ est dans N. Cela implique $v_M = p_M$ et les coefficients de p sont positifs pour tous les vecteurs de $\mathcal{B}$ qui ne sont pas dans N. Décomposons maintenant p_N comme précédemment : $p_N = q - r$ avec $q, r \in N$, effectifs et de support disjoint. Soit e un élément du support de r. On écrit :

$$0 = \langle p|e\rangle = \langle q|e\rangle - \langle r|e\rangle + \langle v_M|e\rangle.$$

$\langle v_M|e\rangle$ est positif car e n'est pas dans le support de v_M et v_M est effectif. De même, $\langle q|e\rangle$ est positif. Ainsi, par linéarité et par effectivité de r, $\langle v_M|r\rangle$ et $\langle q|r\rangle$ sont positifs. D'où, pour que $\langle p|r\rangle$ soit nul (et il l'est, par linéarité), il faut que $\langle r|r\rangle$ soit positif. Or, comme N est défini négatif, on a alors nécessairement $\langle r|r\rangle = 0$ puis $r = 0$. Enfin, pour le troisième lemme, plus technique, on se référera à [BCK12, Lem. 5.4, p.11].

□

Maintenant, la preuve de Zariski : Soit x un vecteur effectif. S'il est nef, la décomposition $x = x + 0$ nous donne sa décomposition de Zariski. Sinon, il existe des éléments e_i de $\mathcal{B}$ tels que $\langle x|e_i\rangle$ est strictement négatif. Soit $N_1 = \mathbf{Vect}(e_{i_1}, \cdots, e_{i_{k_1}})$ l'espace spécial engendré par tous ces éléments (l'espace non-nef de x). En appliquant le lemme 3 à $\{0\} \subset N_1$, on voit que N_1 est défini négatif, donc la matrice $M|_{N_1}$ est inversible. Il existe donc une unique solution n_1 dans N au système d'équation $\langle n_1|e_{i_l}\rangle = \langle x|e_{i_l}\rangle$ (pour $l \in \{1, \cdots, k\}$). D'après le lemme 2, n_1 est effectif. Posons

alors $p_1 = x - n_1$ qui est effectif d'après le lemme 2. Si p_1 est nef, on a trouvé notre décomposition de Zariski $x = p + n_1$. Sinon, on continue.

Déjà, remarquons que $\langle p_1 | e_i \rangle = 0$ pour tout élément de la base de N_1. On considère l'ensemble des éléments de la base dont l'intersection avec p_1 est strictement négative. Soit N_2' l'espace non-nef de p_1 et posons $N_2 = N_1 \cup N_2'$. L'intersection $N_1 \subset N_2$ vérifie les conditions de lemme 3. N_2 est donc défini négatif. On trouve alors $n_2 \in N_2$ effectif vérifiant $p_2 = p_1 - n_2$ effectif également. Si p_2 est nef, alors $x = p_2 + (n_1 + n_2)$ nous fournit une décomposition de Zariski. Sinon, on continue.

En remarquant que $\langle p_k | e_i \rangle = 0$ pour tout les éléments engendrant N_k, et qu'on a une inclusion stricte $\{0\} \subset N_1 \subset N_2 \subset \cdots \subset N_k$, le processus s'arrête nécessairement après un certain rang k_0, et on a : $x = p + n$ avec $p = p_{k_0}$ et $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_{k_0}$.

□

Définition 8.9. On dit que deux vecteurs x et y sont numériquement équivalents si on a, pour tout vecteur z, $\langle x | z \rangle = \langle y | z \rangle$.

Proposition 8.10.

(i) Si deux vecteurs effectifs sont numériquement équivalents, leurs parties négatives sont égales.

(ii) Si on a un vecteur x numériquement équivalent à un vecteur effectif, alors on a une décomposition de Zariski à condition de ne pas supposer p effectif.

Démonstration. On écrit $v = p + n$ et $v' = p' + n'$ avec v et v' numériquement équivalents. Alors, $v' - n$ est numériquement équivalent à p. Ainsi, $v' - n$ est nef, et toutes les conditions de la décomposition de Zariski sont vérifiées pour $v' = (v' - n) + n$. Ainsi, $v' - n = p' = v' - n'$ d'où $n = n'$.

Ensuite, soit $w = v + t$ avec v effectif et t numériquement trivial. Soit $v = q + n$ la décomposition de Zariski de v. En posant $p = q + t$, on remarque que p et n satisfont les conditions de la décomposition de Zariski. Réciproquement, si $w = p + n$ une décomposition de Zariski, alors $v = (p - t) + n$ vérifie les conditions de la décomposition de Zariski, ce qui prouve l'unicité. □

Remarque 8.11.

— Ici, on n'a plus nécessairement p effectif.

— Si on considère l'espace vectoriel quotient de E par la relation d'équivalence numérique, on remarque qu'on peut définir la partie négative de la décomposition de Zariski pour les classes d'équivalence.

On peut à présent démontrer le résultat de Zariski :

Théorème 8.12. *Soit D un $\mathbb{K}$-diviseur effectif sur une surface X lisse et projective. Alors, il existe une* unique *décomposition de D en $\mathbb{K}$-diviseurs effectifs P et N :*

$$D = P + N \tag{8.4}$$

tel que

(i) P est nef.

(ii) N est soit nul, soit sa matrice d'intersection est définie négative.

(iii) $P \cdot C = 0$ pour tout C composante irréductible de N.

Démonstration. Comme on est en dimension 2, les diviseurs premiers sont des courbes irréductibles, et l'intersection de deux courbes (irréductibles) distinctes est positive (c'est le cardinal de l'intersection). On a donc que l'intersection entre un diviseur et une courbe irréductible hors de son support est automatiquement positive, donc un diviseur effectif est nef si et seulement si l'intersection avec les éléments de son support est positive.

On considère alors le $\mathbb{K}$-espace vectoriel E engendré par les courbes irréductibles avec ces mêmes courbes comme base. Un vecteur de E est nef si et seulement s'il est nef comme diviseur, idem pour effectif. On peut donc appliquer le travail précédent et obtenir alors l'existence de P et N vecteur de E vérifiant toutes les conditions souhaitées. □

Remarque 8.13. La preuve précédente repose sur le fait qu'en dimension 2, les notions de courbe et de diviseur se confondent. De plus, la notion de nef est facilement garantie car le lieu de base d'un diviseur en dimension 2 ne peut être que des courbes et des points. Tout cela devient faux en dimension supérieure.

Chapitre 9

Contre-exemple de Nakayama

Dans ce chapitre, nous présentons la preuve de Nakayama de l'existence d'un diviseur sans décomposition de Zariski.

9.1 Correspondance de Legendre

Plaçons nous dans le cas d'un réseau N de dimension n (on a donc $N \simeq \mathbb{Z}^n$ et $N_{\mathbb{R}} := N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^n$). On définit $M := N^\vee$ comme l'espace des formes linéaires de N dans $\mathbb{Z}$. En posant $M_{\mathbb{R}} = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, on remarque que $M_{\mathbb{R}}$ est l'espace des formes linéaires de $N_{\mathbb{R}}$ dans $\mathbb{R}$. On a donc aussi $M_{\mathbb{R}} \simeq \mathbb{R}^n$.

À toute fonction f continue et homogène sur $N_{\mathbb{R}}$, on peut associer le convexe compact $K(f) := \{m \in M_{\mathbb{R}} \mid m \geq f\}$. La convexité est triviale, la compacité découle de la continuité de f.

À tout sous-ensemble convexe compact K de $M_{\mathbb{R}}$, on peut associer la fonction support $h_K := \inf_{m \in K} m$, bien définie par la compacité de K. On remarque que h_k est convexe comme le sup de fonctions convexes (car linéaires).

Proposition 9.1.1. *Soit $f : N_{\mathbb{R}} \mapsto \mathbb{R}$, f continue et homogène. On a :*

$$h_{K(f)} = \mathsf{conv}(f) \tag{9.1}$$

en notant $\mathsf{conv}(f)$ l'enveloppe convexe de f.

Corollaire 9.1.2. *Les ensembles $\mathcal{HC}_{onv}(N_{\mathbb{R}}) := \{f : N_{\mathbb{R}} \mapsto \mathbb{R} \mid f$ convexe, homogène$\}$ et $\mathcal{K}(M_{\mathbb{R}}) := \{K \subset M_{\mathbb{R}} \mid K$ convexe, compact$\}$ sont en correspondance bijective, avec :*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{HC}_{onv}(N_{\mathbb{R}}) & \longrightarrow & \mathcal{K}(M_{\mathbb{R}}) \\ f & \longmapsto & K(f) = \{m \in M_{\mathbb{R}} \mid m \geq f\} \\ h_K = \inf\limits_{m \in K} m & \leftarrow\!\shortmid & K. \end{array}$$

De plus, la correspondance se précise dans le cas des fonctions linéaires par morceau :

Proposition 9.1.3. *Si $f : N_{\mathbb{R}} \mapsto \mathbb{R}$ est continue et linéaire par morceau, alors $K(f)$ est un polytope.*

Par ailleurs, si P est un polytope de $M_{\mathbb{R}}$, alors h_P est linéaire par morceaux et s'écrit comme le maximum des sommets de P

Corollaire 9.1.4. *L'ensemble $\mathcal{HC}_{onv}(N_{\mathbb{R}}) \cap \mathcal{L}_m(N_{\mathbb{R}}, \mathbb{R})$ des fonctions convexes et linéaires par morceaux est en correspondance bijective avec $\mathcal{P}_{oly}(M_{\mathbb{R}})$, l'ensemble des polytopes de $M_{\mathbb{R}}$.*

9.2 Suite d'éclatements et décomposition de Zariski

C'est dans le lieu non-nef que peut se trouver l'obstruction à l'existence de la décomposition de Zariski. L'obstruction est le fait que $P(D)$ soit potentiellement non-nef, *i.e* qu'il existe des courbes irréductibles C telles que $P(D) \cdot C < 0$. Comme tous les diviseurs du lieu non-nef de D sont absents du lieu non-nef de $P(D) = D - N(D)$, on cherche donc à se débarrasser des variétés de codimension au moins 2 contenues dans le lieu non-nef.

Si X est une surface, les variétés de codimension au moins deux sont les points, donc on a aisément l'existence de la décomposition de Zariski (voir chapitre 2). Si X est de dimension supérieure, on fait un éclatement sur une variété du lieu non-nef. Dans l'éclatement, la variété devient un diviseur du lieu non-nef de $\mu^* D$, le tiré-en-arrière de D, qui se soustrait de $P(\mu^* D)$, puis on recommence tant qu'il y a des variétés dans le lieu non-nef de $P(\mu^* D)$.

La proposition suivante montre que si on éclate à chaque fois des sous-variétés de codimension 2 et qu'une décomposition de Zariski existe, on l'atteint au bout d'un nombre fini de telles opérations :

Proposition 9.2.1. *Soit $\cdots X^{[n+1]} \xrightarrow[\mu_{n+1}]{} X^{[n]} \to \cdots X^{[1]} \to X^{[0]} = X$ une suite infinie d'éclatements, avec pour centre $V_n \in X^{[n]}$ des variétés non-singulières de codimension 2. Soit $E_{n+1} = \mu_{n+1}(V_n)$. Supposons de plus qu'il existe une suite de diviseurs D_n de $X^{[n]}$ vérifiant :*

1. $\mu_{n+1}(V_{n+1}) = V_n$
2. $\mathrm{ord}_{V_n}(D_n) := \mathrm{ord}_{E_{n+1}}\left(\mu_{n+1}^*(D_n)\right) > 0$
3. $D_{n+1} = \mu_{n+1}^*(D_n) - \mathrm{ord}_{V_n}(D_n) E_{n+1}$

Alors D_0 n'admet pas de décomposition de Zariski.

Démonstration. [Nak04, Lem. 2.11, p.143]. □

9.3 Les variétés de Nakayama

Une variété de Nakayama est un variété torique relative. Elles seront définies et construites dans la suite de la section.

9.3.1 Les B-réseaux

Définition : Un B-réseau est la donnée de :
- Une variété abélienne B. On notera $\mathcal{I}_{nv}\mathcal{S}_h(B)$ le monoïde des faisceaux inversibles de B.
- Un réseau N de dimension n avec $M := N^\vee$.
- Un morphisme de monoïde de M vers $\mathcal{I}_{nv}\mathcal{S}_h(B)$.

Exemple 9.3.1. Soit B une variété projective complexe, D_1 et D_2 deux diviseurs de B et $N = \mathbf{Z}^2$, $M = \mathbf{Z}e_1^* \oplus \mathbf{Z}e_2^*$. On considère le morphisme ϕ :

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & \mathcal{I}_{nv}\mathcal{S}_h(B) \\ m = (m_1; m_2) & \longmapsto & \mathcal{O}_B(D_1)^{m_1} \oplus \mathcal{O}_B(D_2)^{m_2}. \end{array}$$

La donnée (B, N, ϕ) définit un B-réseau.

9.3.2 La structure relativement torique

Soit $(B, N, \mathcal{L})$ un B-réseau. Par commodité, on notera $\mathcal{L}^m$ (avec $m \in M$) plutôt que $\mathcal{L}(m)$.

Pour un sous-ensemble $\mathcal{A} \subset M$, on pose $\mathcal{L}[\mathcal{A}] := \bigoplus_{m \in \mathcal{A}} \mathcal{L}^m$. Si un tel faisceau a une structure de $\mathcal{O}_B$-module, il n'a pas de structure d'algèbre car le produit n'est pas stable a priori. Mais il est dans le cas suivant :

Soit σ un cône de N. On pose $\sigma^\vee := \{m \in M \mid m \text{ positif sur } \sigma\}$. On a alors $\mathcal{L}[\sigma^\vee \cap M] = \bigoplus_{m \in \sigma^\vee \cap M} \mathcal{L}^m$. Soit U un ouvert de B et $f, g \in \mathcal{L}[\sigma^\vee \cap M](U) := \bigoplus_{m \in \sigma^\vee \cap M} (\mathcal{L}^m)|_U$. f et g s'écrivent comme somme d'éléments dont chacun appartient à un certain $(\mathcal{L}^m)|_U$, pour $m \in M$. Soit alors $h_1 \in (\mathcal{L}^{m_1})|_U$ et $h_2 \in (\mathcal{L}^{m_2})|_U$, avec $m_1, m_2 \in \sigma^\vee$. On a alors :

$$h_1 \cdot h_2 = h_1 \otimes h_2 \in (\mathcal{L}^{m_1})|_U \otimes_{\mathcal{O}_B(U)} (\mathcal{L}^{m_2})|_U = (\mathcal{L}^{m_1+m_2})|_U.$$

Or, comme σ est un cône, $\sigma^\vee$ est un cône, d'où $m_1 + m_2 \in \sigma^\vee$ *i.e* $h_1 \cdot h_2 \in \mathcal{L}[\sigma^\vee \cap M](U)$ ce qui prouve la stabilité par produit. $\mathcal{L}[\sigma^\vee \cap M]$ a donc une structure d'$\mathcal{O}_B$-algèbre.

Construction de $X_{\mathcal{L}}(\sigma)$: Étant donné un B-réseau $(B, N, \mathcal{L})$ et un cône σ sur N, on définit la variété de Nakayama associée à σ de manière locale. Comme M est de dimension finie, on peut recouvrir B par des trivialisations locales communes à tous les $\mathcal{L}^m, \forall m \in M$; quitte à recouvrir encore chacun de ces ouverts, on peut les supposer également affine sur B.

Pour de tels ouverts U, on définit la variété $X_{\mathcal{L}}(\sigma)$ au-dessus de U comme le spectre relatif de $\mathcal{L}[\sigma^\vee \cap M](U)$ sur U :

$$X_{\mathcal{L}}(\sigma)(U) := \mathrm{Spec}_U \mathcal{L}[\sigma^\vee \cap M](U) = \mathrm{Spec}_{\mathcal{O}_B(U)} \mathcal{L}[\sigma^\vee \cap M](U). \tag{9.2}$$

Si U et V s'intersectent, les propriétés de restrictions sur B induisent deux flèches surjectives :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\sigma^\vee \cap M](U) &\twoheadrightarrow \mathcal{L}[\sigma^\vee \cap M](U \cap V) \\ \mathcal{L}[\sigma^\vee \cap M](V) &\twoheadrightarrow \mathcal{L}[\sigma^\vee \cap M](U \cap V) \end{aligned}$$

qui elles-mêmes induisent deux flèches injectives :

$$\begin{aligned} X_{\mathcal{L}}(\sigma)(U \cap V) &\hookrightarrow X_{\mathcal{L}}(\sigma)(U) \\ X_{\mathcal{L}}(\sigma)(U \cap V) &\hookrightarrow X_{\mathcal{L}}(\sigma)(V) \end{aligned}$$

qui permettent de tout recoller et de former $X_{\mathcal{L}}(\sigma)$ (qu'on notera X s'il n'y a pas d'ambiguité). On a bien le faisceau structurel voulu :

$$\mathcal{O}_X(U) = \mathcal{O}_{X_{\mathcal{L}}(\sigma)}(U) = \mathcal{L}[\sigma^\vee \cap M](U). \tag{9.3}$$

La structure torique : Soit τ une face de σ. On a alors $\sigma^\vee \subset \tau^\vee$ puis $\mathcal{L}[\sigma^\vee \cap M] \subset \mathcal{L}[\tau^\vee \cap M]$. Ainsi, $X_{\mathcal{L}}(\tau)$ s'injecte dans $X_{\mathcal{L}}(\sigma)$. Par ailleurs, comme $\tau^\vee = \sigma^\vee \cup \{l \in M_{\mathbf{R}} \mid l_{|\tau} \geq 0\}$, on a :

$$\mathcal{L}[\tau^\vee \cap M] \quad = \quad \mathcal{L}[\sigma^\vee \cap M] \oplus \bigoplus_{\substack{m \in M \setminus \sigma^\vee \\ m_{|\tau} \geq 0}} \mathcal{L}^m \tag{9.4}$$

Ainsi, pour tout ouvert $V \subset B$ suffisamment petit, $\mathcal{L}[\tau^\vee \cap M](V)$ est une $\mathcal{O}_B(V)$-localisation de $\mathcal{L}[\sigma^\vee \cap M](V)$ (avec compatibilité aux restrictions) et $X_{\mathcal{L}}(\tau)(V)$ est donc isomorphe à un ouvert $U_\tau(V)$ de $X_{\mathcal{L}}(\sigma)(V)$.

On peut donc, à partir d'un éventail Δ de N, construire par recollement $X_{\mathcal{L}}(\Delta)$.

Remarque 9.3.2. Comme il y une flèche injective $\mathcal{O}_B \hookrightarrow \mathcal{O}_X$, on a une flèche surjective $p : X \twoheadrightarrow B$ *i.e* X est un B-schéma. Soit $b \in B$. Calculons la fibre au-dessus de b :

$$\mathcal{O}_{X,p^{-1}(b)} = \varprojlim_{U \ni b} \mathcal{L}[\sigma^\vee \cap M](U) = \bigoplus_{m \in \sigma^\vee \cap M} \mathcal{L}_b^m \simeq \bigoplus_{m \in \sigma^\vee \cap M} \Bbbk(b) \cdot \mathfrak{q}^m \tag{9.5}$$

où $\Bbbk(b) = \Bbbk$ est le corps résiduel de b sur B et q^m est un générateur de $\mathcal{L}^m$. Comme — quitte à normaliser les $\mathfrak{q}^m$ — on a $\mathfrak{q}^m \cdot \mathfrak{q}^{m'} = \mathfrak{q}^{m+m'}$, on reconnait donc :

$$\mathcal{O}_{X,p^{-1}(b)} = \Bbbk[\sigma^\vee \cap M] \tag{9.6}$$

ce qui donne pour la fibre X_b :

$$X_b = \operatorname{Spec}_{\Bbbk} \Bbbk[\sigma^\vee \cap M] = X_{\Bbbk}(\sigma) \tag{9.7}$$

i.e la $\Bbbk$-variété torique associé à σ. Les flèches entre $X_{\mathcal{L}}(\tau)(V)$ et $X_{\mathcal{L}}(\sigma)(V)$ deviennent au-dessus de b les flèches entre $X_{\Bbbk}(\tau)$ et $X_{\Bbbk}(\sigma)$. Ainsi, sur chaque fibre, on retrouve la **même** structure torique.

Exemple 9.3.3. L'affinisation : Reprenons notre exemple à la sous-section précédente : pour D_1 et D_2 deux diviseurs de B, on pose $\mathcal{L}^m = \mathcal{O}_B(D_1)^{m_1} \oplus \mathcal{O}_B(D_2)^{m_2}$ qu'on écrira additivement : $m_1\mathcal{O}_B(D_1) \oplus m_2\mathcal{O}_B(D_2)$. On notera alors $\mathcal{L} = e_1\mathcal{O}_B(D_1) \oplus e_2\mathcal{O}_B(D_2)$ car on aura $\mathcal{L}^m = m(e_1)\mathcal{O}_B(D_1) \oplus m(e_2)\mathcal{O}_B(D_2)$.

Prenons $\sigma = (\mathbf{R}_+)^2$. On a donc $\sigma^\vee = \mathbf{R}_+e_1 \oplus \mathbf{R}_+e_2$ puis $\Bbbk[\sigma^\vee \cap M] = \Bbbk[X_1, X_2]$. Localement, si on regarde $X_{\mathcal{L}}(\sigma)$ au-dessus d'un ouvert affine $U = \operatorname{Spec} R$ trivialisant les fibrés en droite, on obtient $\operatorname{Spec} R[X_1, X_2] = \mathbb{A}^2_U$. Par contre, à moins d'avoir les fibrés triviaux, on n'a pas *a priori* $X_{\mathcal{L}}(\sigma) = \mathbb{A}^2_B$, même pour B affine. Plus précisement, l'obstruction à avoir $X_{\mathcal{L}}(\sigma) = \mathbb{A}^2_B$ est exactement l'obstruction à la trivialisation globale des fibrés sur tout B.

En fait, on a :

$$X_{\mathcal{L}}(\sigma) = \mathbb{A}\Big(\mathcal{O}_B(D_1) \oplus \mathcal{O}_B(D_2)\Big) := \operatorname{Spec}\Big(\mathsf{Sym}\big(\mathcal{O}_B(D_1) \oplus \mathcal{O}_B(D_2)\big)\Big). \tag{9.8}$$

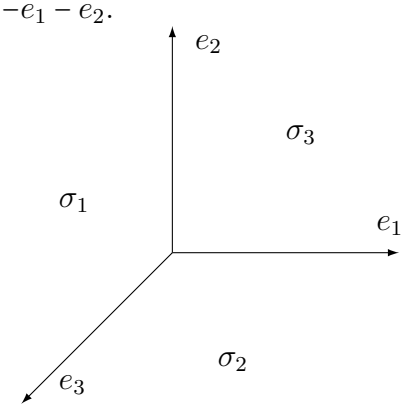
Plus généralement, l'"affinisé" d'un faisceau cohérent scindé possède une structure naturelle de variété de Nakayama en prenant pour structure torique la construction affine classique.

Exemple 9.3.4. La projectivisation : Prenons une nouvelle fois D_1 et D_2 deux diviseurs de B, et $\mathcal{L} = e_1\mathcal{O}_B(D_1) \oplus e_2\mathcal{O}_B(D_2)$. Mais cette fois, on considère l'éventail Σ

composé des cônes suivants :

$$\sigma_1 = \mathbf{R}_+ e_2 + \mathbf{R}_+ e_3$$
$$\sigma_2 = \mathbf{R}_+ e_3 + \mathbf{R}_+ e_1$$
$$\sigma_3 = \mathbf{R}_+ e_1 + \mathbf{R}_+ e_2$$

où $e_3 = -e_1 - e_2$.



On reconnait la construction de $\mathbb{P}^2$ comme variété torique. En considérant $X_{\mathcal{L}}(\Delta)$ au-dessus d'un ouvert affine U trivialisant les deux fibrés en droite, on obtient $\mathbb{P}^2_U$. On a le même problème que précédemment quant à la possibilité d'écrire "$X_{\mathcal{L}}(\Delta) = \mathbb{P}^2_B$". Néanmoins, si on pose $\mathcal{E} = \mathcal{O}_B(D_1) \oplus \mathcal{O}_B(D_2) \oplus \mathcal{O}_B$ on a :

$$X_{\mathcal{L}}(\Delta) = \mathbb{P}(\mathcal{E}) := \mathsf{Proj}\big(\mathsf{Sym}(\mathcal{E})\big) \tag{9.9}$$

En fait, le projectivisé d'un faisceau cohérent scindé a une structure naturelle de variété de Nakayama. Il suffit d'appliquer la même méthode que précedemment, quitte à normaliser par le fibré en droites final.

9.3.3 Quelques propriétés des variétés de Nakayama

Soit $(B, N, \mathcal{L})$ un B-réseau et $X := X_{\mathcal{L}}(\Sigma)$ la variété de Nakayama associée à l'éventail Σ de N. Notons $p : X \twoheadrightarrow B$.

Pour tout sommet $v \in \mathrm{Ver}(\Sigma)$, on a $\mathbb{V}(\mathbb{R}_+ v)$ un diviseur irréductible torique sur chaque fibre au-dessus de B par la théorie des variétés toriques. Par recollement, on obtient un diviseur irréductible que nous noterons Γ_v.

Pour toute fonction h sur Σ, on peut définir un diviseur dit torique en posant :

$$D_{h,\Sigma} := \sum_{v \in \mathrm{Ver}(\Sigma)} h(v)\Gamma_v.$$

Tout diviseur de X est la somme d'un diviseur vertical et d'un diviseur horizontal torique. Plus précisément :

Proposition 9.3.5. *Soit $\mathcal{D}$ un $\mathbb{R}$-diviseur de X. Il existe un $\mathbb{R}$-diviseur Δ de B et h une fonction continue de $N_{\mathbb{R}}$ et linéaire par morceau sur Σ tels que :*

$$\mathcal{D} = p^*(\Delta) - D_{h,\Sigma}. \tag{9.10}$$

Démonstration. [Nak04, Lem. 2.3(2), p. 129] □

On en déduit alors :

Corollaire 9.3.6. *Si Γ est un diviseur irréductible de X, alors :*
- *Soit Γ provient d'un diviseur irréductible E de B : $\Gamma = p^*(E)$.*
- *Soit Γ est fibre à fibre un diviseur torique irréductible, donc issu d'un sommet v de Σ : $\Gamma = \Gamma_v$.*

Soit $\mathcal{D}$ un diviseur de X avec $\mathcal{D} = p^*(\Delta) + D_{h,\Sigma}$. On pose alors :

$$\mathcal{C}_{psef}(\Delta) := \{m \in M_{\mathbb{R}} \mid \Delta + \mathcal{L}^m \text{ est psef sur B}\} \tag{9.11}$$

et aussi :

$$\mathcal{C}_{psef}(\Delta, h) := \mathcal{C}_{psef}(\Delta) \cap K(h) = \{m \geq h \mid \Delta + \mathcal{L}^m \text{ est psef sur B}\}. \tag{9.12}$$

Proposition 9.3.7. *Si $\mathcal{D} = p^*(\Delta) - D_{h,\Sigma}$ est pseudo-effectif, les ordres d'annulation asymptotique de $\mathcal{D}$ vérifient les relations suivantes :*
- *Si Γ est irréductible du type $p^*(E)$, alors :*

$$\mathrm{ord}_\Gamma \|\mathcal{D}\| = \inf_{m \in \mathcal{C}_{psef}(\Delta,h)} \{\mathrm{ord}_E \|\Delta + \mathcal{L}^m\|\}. \tag{9.13}$$

- *Si $\Gamma = \Gamma_v$, alors :*

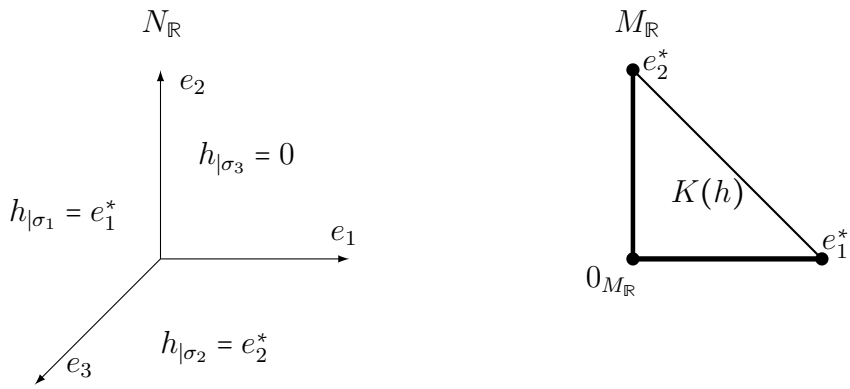
$$\mathrm{ord}_{\Gamma_v} \|\mathcal{D}\| = \inf_{m \in \mathcal{C}_{psef}(\Delta,h)} \{m(v) - h(v)\} = h_{\mathcal{C}_{psef}(\Delta,h)}(v) - h(v). \tag{9.14}$$

Démonstration. [Nak04, Lem. 2.4(3), p. 130] □

Posons $\Omega = \mathcal{C}_{Psef}(\Delta, h)$ et soit σ_j un cône de Σ. Sur chaque fibre, on peut considérer le point $x_{\sigma_j} = \mathbb{V}(\sigma_j)$; par recollement, on obtient un fermé $\mathbb{V}(\sigma_j, \mathcal{L})$.

L'éclatement X' de X en $\mathbb{V}(\sigma_j, \mathcal{L})$ correspond sur chaque fibre à l'éclatement de x_{σ_j}. D'après la théorie des variétés toriques, par recollement, cela revient à rajouter le segment v_j à Σ dans notre variété de Nakayama. De plus, le diviseur exceptionnel est Γ_{v_j}.

On peut alors caractériser le lieu non-nef grâce à la proposition suivante :



Proposition 9.3.8. *Les propositions suivantes sont équivalentes :*
(i) $\mathbb{V}(\sigma_j, \mathcal{L})$ *est dans le lieu non-nef.*
(ii) $\mathrm{ord}_{\Gamma_{v_j}} \|\mu^*(\mathcal{D})\| > 0$ *où* μ *est défini par* $\mu : X' \to X$.
(iii) $h_\Omega(v_j) - h(v_j) > 0$.
(iv) $h_\Omega > h$ *sur* σ_j.

9.4 Le contre-exemple de Nakayama

On se place ici sur la variété de Nakayama suivante : Soit B une variété, D_1 et D_2 deux diviseurs **amples** de B, le réseau $\mathbb{Z}^2$ et le morphisme $\mathcal{L} = e_1\mathcal{O}_B(D_1) \oplus e_2\mathcal{O}_B(D_2)$.

On considère X le projectivisé $\mathbb{P}\big(\mathcal{O}_B(D_1) \oplus \mathcal{O}_B(D_2) \oplus \mathcal{O}_B\big)$ avec la structure torique projective (voir exemple 9.3.4).

Soit $h : N_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \inf\big(e_1^*(x); e_2^*(x); 0\big)$. Les valeurs prises par h sont représentées sur la figure suivante.

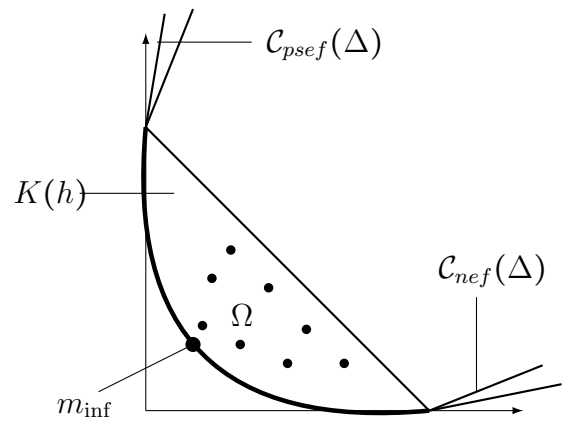
Soit maintenant Δ un diviseur de B, **vérifiant** $\Delta + D_1$ **et** $\Delta + D_2$ **amples**. De même que précédemment, on considère le cône pseudo-effectif (respectivement le cône nef) autour de Δ :

$$\mathcal{C}_{psef}(\Delta) := \{m \in M_{\mathbb{R}} \mid \Delta + m_1 D_1 + m_2 D_2 \text{ est psef sur B}\} \tag{9.15}$$

$$\mathcal{C}_{nef}(\Delta) := \{m \in M_{\mathbb{R}} \mid \Delta + m_1 D_1 + m_2 D_2 \text{ est nef sur B}\}. \tag{9.16}$$

Soit $\mathcal{D}$ le diviseur dont la partie horizontale vaut Δ et dont la partie verticale (torique) vaut $-D_{h,\Sigma}$ (qu'on notera simplement $-D_h$ s'il n'y a pas d'ambiguïté) :

$$\mathcal{D} := p^*(\Delta) - D_h. \tag{9.17}$$



Théorème 9.4.1 (Nakayama)**.** *Supposons qu'on a :*

— $\mathcal{C}_{psef}(\Delta) \cap K(h) = \mathcal{C}_{nef}(\Delta) \cap K(h)$ *(qu'on notera* Ω*).*

— $\alpha := \inf\{m_1 + m_2 \mid m = (m_1, m_2) \in \Omega\}$ *est strictement positive et est atteint en un unique point* $m_{\inf} \in \Omega$*.*

— Ω *n'est pas localement polyhédral en* $m_{\inf}$ *: pour tout* $(x, y) \in N_{\mathbb{R}}$*, si* $m_{\inf}\big((x, y)\big) = \min\{m\big((x, y)\big) \mid m \in \Omega\}$ *alors c'est l'**unique** minimum de* $\{m\big((x, y)\big) \mid m \in \Omega\}$*.*

Alors $\mathcal{D}$ *n'admet pas de décomposition de Zariski.*

Démonstration. Considérons $h_\Omega(\cdot) := \inf_{m \in \Omega} m(\cdot)$. h_Ω est concave comme l'inf de fonctions concaves (car linéaire), et comme $\Omega \subset K(h)$, $h_\Omega \geq h_{K(h)} = h$; par ailleurs, comme Ω n'est pas un polytope (car un polytope est localement polyhédral en chacun des points de sa bordure), h_Ω ne peut être linéaire par morceaux.

Calculons $h_\Omega(e_1)$, $h_\Omega(e_2)$ et $h_\Omega(e_3)$. On a :

$$\begin{aligned} h_\Omega(e_1) &= h_\Omega\big((1,0)\big) \\ &= \inf\{m\big((1,0)\big) \mid m \in \Omega\} \\ &= \inf\{m_1 \mid m \in \Omega\} \\ &= \inf\{m_1 \in \mathbb{R} \mid \exists m_2, \Delta + m_1 D_1 + m_2 D_2 \text{ est psef sur B}\}. \end{aligned}$$

Or $\Delta + 0 \cdot D_1 + 1 \cdot D_2$ est ample, donc pseudo-effectif. Ainsi $h_\Omega(e_1) \leq 0$, et comme $\Omega \subset (\mathbb{R}_+)^2$ (ou comme $h(e_1) = 0$), on a donc $h_\Omega(e_1) = 0$. De même, en remarquant

que $\Delta + 1 \cdot D_1 + 0 \cdot D_2$ est ample donc pseudo-effectif, on a $h_\Omega(e_2) = 0$. Maintenant $h_\Omega(e_3)$:

$$\begin{aligned} h_\Omega(e_3) &= h_\Omega\big((-1,-1)\big) \\ &= \inf\{-m_1 - m_2 \mid m \in \Omega\} \\ &= -\sup\{m_1 + m_2 \mid m \in \Omega\}. \end{aligned}$$

Comme $\Omega \subset K(h)$, nécessairement $\sup\{m_1 + m_2 \mid m \in \Omega\} \leq 1$. Or, comme $(1,0) \in \Omega$, $\sup\{m_1 + m_2 \mid m \in \Omega\} = 1$ puis $h_\Omega(e_3) = -1$.

Calculons maintenant h_Ω sur $\sigma_1 = \{(x,y) \in N_\mathbb{R} \mid x \leq y \leq 0\}$. Soit $(x,y) \in \sigma_1$. Comme $h_{|\sigma_1} = e_1^*$, $h\big((x,y)\big) = x$ puis $h_\Omega\big((x,y)\big) \geq x$. Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned} h_\Omega\big((x,y)\big) &= \inf\{x \cdot m_1 + y \cdot m_2 \mid m \in \Omega\} \\ &= -\sup\{(-x) \cdot m_1 + (-y) \cdot m_2 \mid m \in \Omega\} \\ &\leq -\big((-x) \cdot 1 + (-y) \cdot 0\big) = x \end{aligned}$$

car $(1,0) \in \Omega$. Cela nous donne :

$$(h_\Omega)_{|\sigma_1} = h_{|\sigma_1} = e_1^*. \tag{9.18}$$

De même, en remarquant que $(0,1) \in \Omega$, on obtient $(h_\Omega)_{|\sigma_2} = h_{|\sigma_2} = e_2^*$. Par contre, $(h_\Omega)_{|\sigma_3} \neq h_{|\sigma_3}$. En effet, on a $h_\Omega \geq m_{\inf}$, or $m_{\inf}\big((1,1)\big) = (m_{\inf})_1 + (m_{\inf})_2 > 0 = h\big((1,1)\big)$.

Récapitulons :

Première conclusion : $\mathcal{D}$ est nef en codim 1 : Comme $\mathcal{C}_{psef} \cap K(h) = \Omega$ est non vide, on a que $\mathcal{D}$ est pseudo-effectif. On peut alors aisément calculer les coefficients de $N(\mathcal{D})$. Si E est un diviseur irréductible de B, on a :

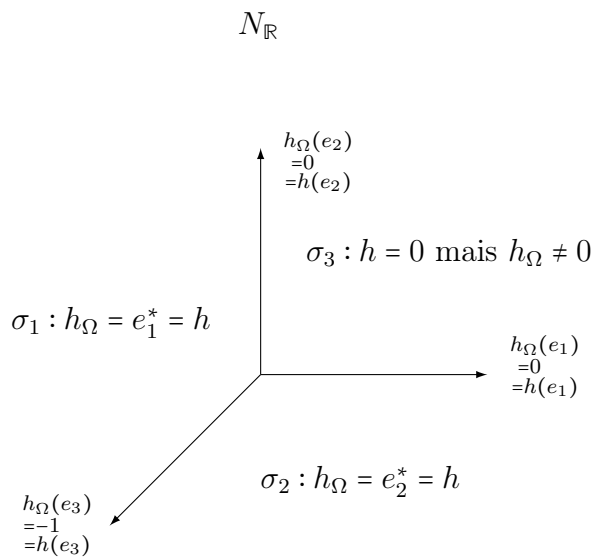
$$\mathrm{ord}_{p^{-1}(E)}\|\mathcal{D}\| = \min\{\mathrm{ord}_E\|\Delta + \mathcal{L}^m\| \mid m \in \Omega\}. \tag{9.19}$$

Or $\Delta + D_1$ est ample puis $N(\Delta + D_1) = 0$ d'où $\mathrm{ord}_E\|\Delta + D_1\| = 0$. Comme $(1,0) \in \Omega$ et que les ordres d'annulation asymptotique sont positifs, on a $\mathrm{ord}_{p^{-1}(E)}\|\mathcal{D}\| = 0$ pour tout E diviseur irréductible de B. Il ne reste plus que les diviseurs toriques :

$$N(\mathcal{D}) = \sum_{v \in \Sigma} \mathrm{ord}_{\Gamma_v}\| - D_h\| \cdot \Gamma_v \tag{9.20}$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \big(h_\Omega(e_i) - h(e_i)\big) \cdot \Gamma_{e_i} \tag{9.21}$$

$$= 0 \tag{9.22}$$



d'où $\mathcal{D}$ est nef en codimension 1.

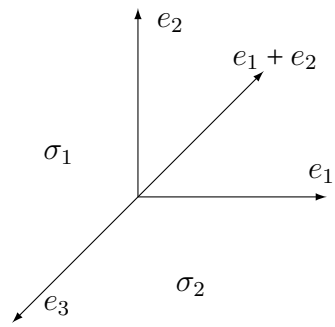
Maintenant, calculons le lieu non-nef de $\mathcal{D}$. On cherche l'ensemble $\mathcal{P}$ des points p de $N_{\mathbb{R}}$ vérifiant : $h_\Omega(p) > h(p)$. On voit déjà que $\mathcal{P} \subset \sigma_3$. Par ailleurs, comme $h_\Omega\big((1,1)\big) > h\big((1,1)\big)$, on doit avoir $h_\Omega > h$ sur tout σ_3 par concavité. Cela nous donne $\mathcal{P} = \sigma_3$ puis $\mathrm{ord}_{x_{\sigma_3}}\|\mathcal{D}\| > 0$. On a donc :

$$\mathrm{NNef}(\mathcal{D}) = \mathbb{V}(\sigma_3, \mathcal{L}) = x_{\sigma_3}. \tag{9.23}$$

Si h_Ω était linéaire par morceaux, on aurait aisément une décomposition de Zariski de $\mathcal{D}$ sur un modèle dominant X. En complétant Σ à l'aide d'éclatements toriques, h_Ω serait linéaire sur chacun des cônes de $N_{\mathbb{R}}$. On pourrait alors écrire $\mu^*(\mathcal{D}) = p^*\Delta + D_{h_\Omega} + D_{h-h_\Omega}$. Or h_Ω n'est pas linéaire par morceaux.

L'idée de la preuve est la suivante : nous allons essayer, par des éclatements toriques successifs, fabriquer une suite d'application continue sur $N_{\mathbb{R}}$ et linéaire sur chaque cône tendant vers h_Ω, sans jamais l'atteindre car h_Ω n'est pas linéaire par morceau.

Soit $X^{[1]}$ l'éclatons X le long de $\mathbb{V}(\sigma_3, \mathcal{L})$. En se plaçant au-dessus d'un ouvert affine trivialisant, la théorie des variétés toriques nous dit que cela revient à ajouter le segment $(e_1 + e_2)\mathbb{R}_+$ à la structure torique. Comme on fait cela partout, après recollement, on obtient pour $X^{[1]}$ la variété de Nakayama suivante : on a $\mathcal{L} = e_1\mathcal{O}_B(D_1) \oplus e_2\mathcal{O}_B(D_2)$ et on considère l'éventail $\Sigma^{[1]}$ donné par les vecteurs $e_1, e_2, e_3, -e_3 = e_1 + e_2$ (voir figure suivante).



Posons $p_1 : X^{[1]} \to B$ et $\mu_1 : X^{[1]} \to X$. On a la diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} X^{[1]} \arrow[rr, "\mu_1"] \arrow[dr, "p_1"'] & & X \arrow[dl, "p"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

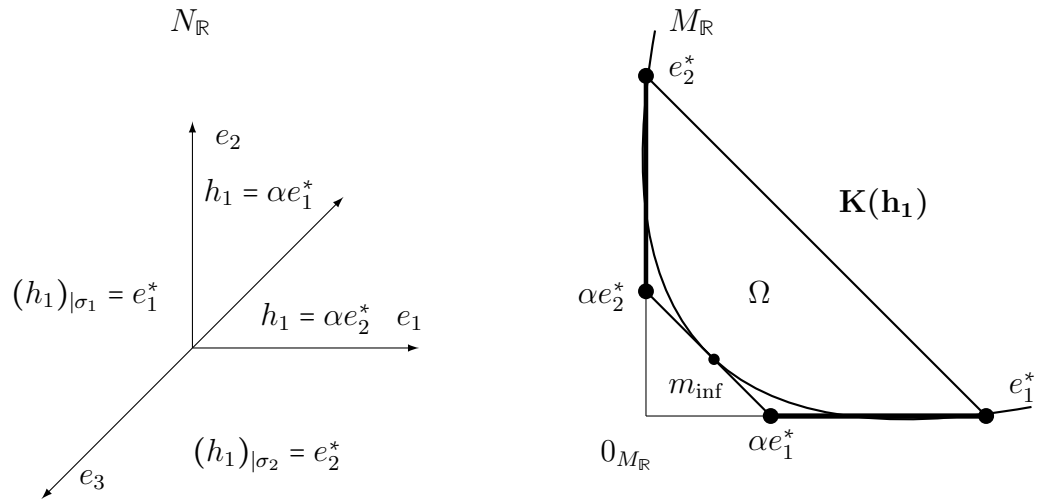
Le diviseur exceptionnel s'écrit alors $\Gamma_{e_1+e_2}$. Calculons :

$$\begin{aligned} \mathrm{ord}_{\Gamma_{e_1+e_2}} \|\mu_1^*(\mathcal{D})\| &= \mathrm{ord}_{\Gamma_{e_1+e_2}} \|\mu_1^*(\Delta) + \mu_1^*(D_{h,\Sigma})\| && (9.24) \\ &= \mathrm{ord}_{\Gamma_{e_1+e_2}} \|p_1^*(\Delta) + D_{h,\Sigma^{[1]}}\| && (9.25) \end{aligned}$$

On voit que $\Omega\big(\mu_1^*(\mathcal{D})\big) = \Omega(\mathcal{D}) \neq \varnothing$, d'où $\mu_1^*(\mathcal{D})$ est pseudo-effectif. Ainsi :

$$\begin{aligned} \mathrm{ord}_{\Gamma_{e_1+e_2}} \|\mu_1^*(\mathcal{D})\| &= h_\Omega(e_1+e_2) - h(e_1+e_2) && (9.26) \\ &= h_\Omega(e_1+e_2) && (9.27) \\ &= \inf\{m_1+m_2 \mid (m_1,m_2) \in \Omega\} && (9.28) \\ &= \alpha && (9.29) \end{aligned}$$

On construit alors h_1 de façon à avoir $h_1(v) = h_\Omega(v)$ pour tout $v \in \mathbf{Ver}(\Sigma^{[1]})$: on pose $h_1 = \inf\big(e_1^*, e_2^*, \alpha e_1^*, \alpha e_2^*\big)$



Posons $\mathcal{D}_1 := p_1^*(\Delta) - D_{h_1}$. On a donc :

$$\begin{aligned} P\big(\mu_1^*(\mathcal{D})\big) &= \mu_1^*(\mathcal{D}) - N\big(\mu_1^*(\mathcal{D})\big) && (9.30)\\ &= p_1^*(\Delta) - D_{h,\Sigma^{[1]}} - \alpha\Gamma_{e_1+e_2} && (9.31)\\ &= p_1^*(\Delta) + \Big(\sum_{i=1}^{3} -h(e_i)\Gamma_{e_i}\Big) - h_\Omega(e_1+e_2)\Gamma_{e_1+e_2} && (9.32)\\ &= p_1^*(\Delta) - D_{h_1} = \mathcal{D}_1 && (9.33) \end{aligned}$$

car $h_1(e_i) = h(e_i), \forall i \in \{1,2,3\}$ et $h_1(e_1+e_2) = h_\Omega(e_1+e_2)$. Regardons $N(\mathcal{D}_1)$. La base étant inchangée, les coefficients de $N(\cdot)$ correspondant à des diviseurs provenant de la base sont nuls. On a donc :

$$N(\mathcal{D}_1) = \sum_{v\in\mathbf{Ver}(\Sigma^{[1]})} \big(h_\Omega(v) - h_1(v)\big)\Gamma_v = 0. \tag{9.34}$$

En utilisant la non-polyhédralité au voisinage de $m_{\inf}$, on va rajouter des segments tangents à Ω en se rapprochant de $m_{\inf}$ sans jamais l'atteindre.

Posons $\Omega^+ := \{(m_1,m_2) \in \Omega \mid m_2 \geq (m_{\inf})_2\}$ et $\Omega^- := \{(m_1,m_2) \in \Omega \mid m_2 \leq (m_{\inf})_2\}$. Si les deux étaient localement polyhédral en $m_{\inf}$, Ω le serait également (cela se vérifie aisément). Supposons, par exemple, que Ω^+ n'est pas localement polyhédral en $m_{\inf}$.

Par concavité, on a déjà $h_1 \leq h_\Omega$. En $2e_1 + e_2$, l'inégalité va être stricte : en effet, si $h_1(2e_1+e_2) = h_\Omega(2e_1+e_2)$ alors par concavité, h_1 et h_Ω seraient égales sur le cône

$\sigma_+^1 := \mathbb{R}_+(e_1+e_2)+\mathbb{R}_+e_1$, puis Ω contiendrait le segment $[m_{\inf}, \alpha e_2^*]$ ce qui contredirait la non-polyhédralité de Ω^+. Posons alors $h_\Omega(2e_1+e_2) = \alpha_2$.

De même que précédemment, on a alors $\mathrm{ord}_{x_{\sigma_1^+}}\|\mathcal{D}_1\| > 0$ puis $x_{\sigma_1^+} = \mathbb{V}(\sigma_+^1, \mathcal{L})$, composante connexe du lieu non-nef de $\mathcal{D}_1$ dans $X^{[1]}$. On obtient alors $X^{[2]}$ en éclatant le long de $\mathbb{V}(\sigma_+^1, \mathcal{L})$.

On obtient alors $\mu_2 : X^{[2]} \to X^{[1]}$ et $p_2 : X^{[2]} \to B$ formant le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
X^{[2]} \arrow[r, "\mu_2"] \arrow[drr, "p_2"'] & X^{[1]} \arrow[r, "\mu_1"] \arrow[dr, "p_1"] & X \arrow[d, "p"] \\
 & & B
\end{tikzcd}$$

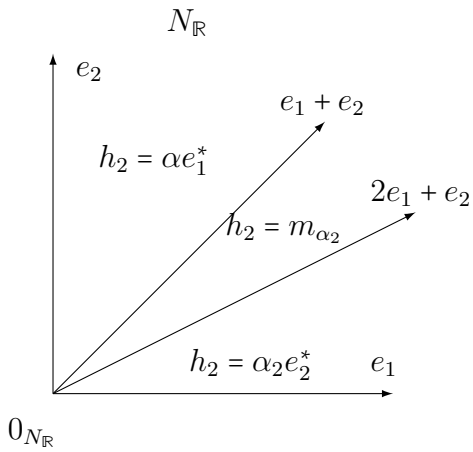
Posons $\widehat{\mu_2} := \mu_2 \circ \mu_1$.

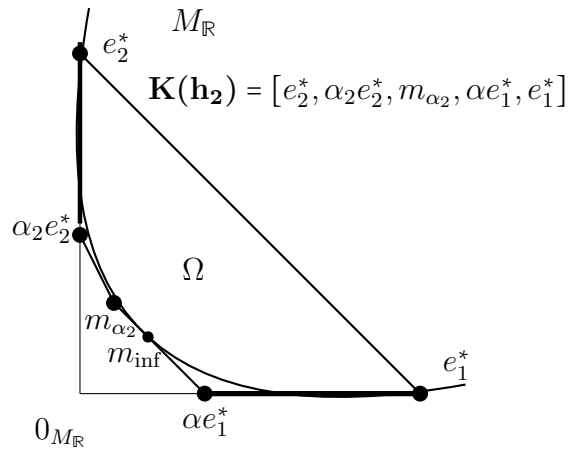
La structure torique $\Sigma^{[1]}$ devient $\Sigma^{[2]}$ définie par :

$$\mathbf{Ver}\left(\Sigma^{[2]}\right) = \Sigma^{[1]} \cup \{2e_1+e_2\}$$

et le diviseur exceptionnel s'écrit $\Gamma_{2e_1+e_2}$.

En posant $h_2 = \inf\left(e_1^*, e_2^*, \alpha e_1^*, m_{\alpha_2}, e_2^*\right)$ où m_{α_2} est définie comme la forme linéaire valant α en e_1+e_2 et α_2 en $2e_1+e_2$. On obtient alors $h_2(v) = h_\Omega(v), \forall v \in \mathbf{Ver}\left(\Sigma^{[2]}\right)$.





De même que précédemment, on a :

$$P\big(\mu_2^*(\mathcal{D}_1)\big) = p_2^*(\Delta) - \Big(\sum_{v \in \mathbf{Ver}(\Sigma^{[2]})} h_2(v)\Gamma_v\Big) = p_2^*(\Delta) - D_{h_2} =: \mathcal{D}_2$$

en utilisant $h_1(v) = h_2(v), \forall v \in \mathbf{Ver}(\Sigma^{[1]})$ et $h_2(2e_1 + e_2) = h_\Omega(2e_1 + e_1)$. On obtient aussi :

$$N(\mathcal{D}_2) = \sum_{v \in \mathbf{Ver}(\Sigma^{[2]})} \big(h_\Omega(v) - h_2(v)\big)\Gamma_v = 0. \tag{9.35}$$

On va, en itérant le procédé, construire une suite de modèle dominant qui mènera à la non-existence de la décomposition de Zariski.

Posons $v_j := je_1 + (j-1)e_2$ et $\sigma_+^j := \mathbb{R}_+(e_1+e_2) + \mathbb{R}_+\big(je_1 + (j-1)e_2\big) = \mathbb{R}_+(e_1+e_2) + \mathbb{R}_+ v_j$. Supposons qu'on ait une suite d'éclatements :

$$\begin{tikzcd}
X^{[n-1]} \arrow[r] \arrow[drrr, "p_{n-1}"'] & \cdots \arrow[r] & X^{[1]} \arrow[r, "\mu_1"] \arrow[drr, "p_1"] & X^{[0]} = X \arrow[d, "p"] \\
 & & & B
\end{tikzcd}$$

Avec $X^{[i]} = \mathcal{B}\mathfrak{l}_{\sigma_+^{i-1},\mathcal{L}}\big(X^{[i-1]}\big)$, $\mu_i : X^{[i]} \to X^{[i-1]}$ et $\widehat{\mu_i} := \mu_i \circ \mu_{i-1} \circ \cdots \circ \mu_2 \circ \mu_1 : X^{[i]} \to X$. Chacun des $X^{[i]}$ est une variété de Nakayama avec la même base B et le même morphisme $\mathcal{L} := e_1\mathcal{O}_B(D_1) \oplus e_2\mathcal{O}_B(D_2)$. La structure torique est donnée par $\Sigma^{[i]}$, vérifiant pour $i \geq 2$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Ver}(\Sigma^{[i]}) &= \{e_1, e_2, e_3, e_1+e_2, 2e_1+e_2, 3e_1+2e_2, \cdots, ie_1+(i-1)e_2\} \\
&= \{e_1 = v_1, e_2, e_3, -e_3, v_2, v_3, \cdots, v_i\} \\
&= \mathbf{Ver}(\Sigma^{[i-1]}) \cup \{ie_1+(i-1)e_2\} \quad = \quad \mathbf{Ver}(\Sigma^{[i-1]}) \cup \{v_i\}.
\end{aligned}$$

Le diviseur exceptionnel de $X^{[i]}$ s'écrit donc $\Gamma_{ie_1+(i-1)e_2} = \Gamma_{v_i}$.

On a une suite de fonction concave (continue) $h_0, h_1, \cdots, h_{n-1}$ vérifiant :

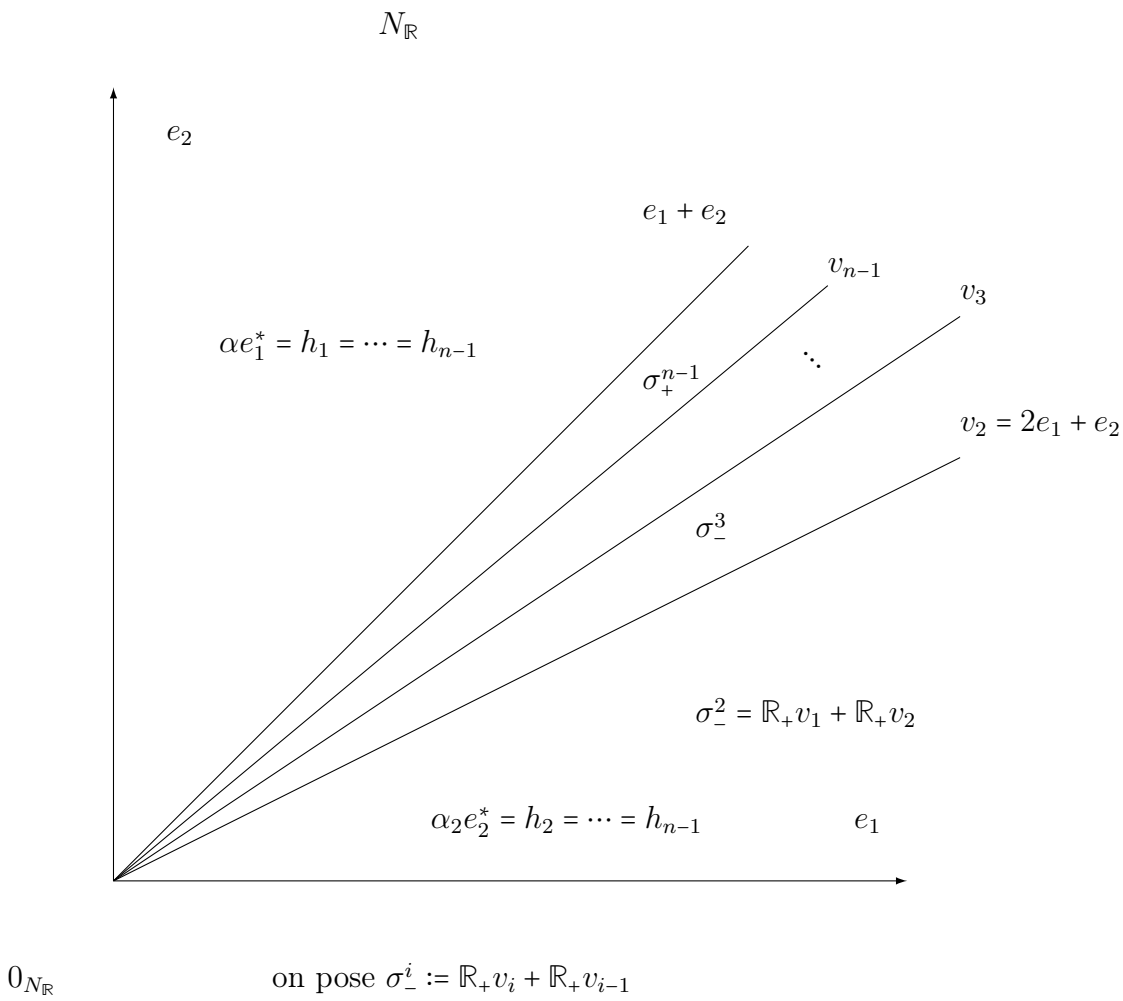
$$h = h_0 \leq h_1 \leq \cdots \leq h_{n-1} \leq h_\Omega \tag{9.36}$$

et : $\forall i \in \{2, \cdots, n-1\}$

1. h_{i-1} est linéaire sur chaque cône de $\Sigma^{[i-1]}$.

2. $h_{i-1}(v) = h_\Omega(v) \quad \forall v \in \mathbf{Ver}(\Sigma^{[i-1]})$.

3. $h_{i-1}(v_i) < h_\Omega(v_i)$ (on pose alors $\alpha_i := h_\Omega(v_i)$).



Par concavité, on a $h_i = \cdots = h_{n-1}$ sur $\sigma_-^i := \mathbb{R}_+ v_i + \mathbb{R}_+ v_{i-1}$.

Dans chaque $X^{[i]}, i \leq n-1$, on a un diviseur pseudo-effectif $\mathcal{D}_i$ vérifiant :

$$\mathcal{D}_i = p_i^*(\Delta) - D_{h_i} = P\big(\mu_i^*(\mathcal{D}_{i-1})\big) \tag{9.37}$$

avec :

$$N(\mathcal{D}_i) = \sum_{v \in \mathbf{Ver}(\Sigma^{[i]})} \big(h_\Omega(v) - h_i(v)\big)\Gamma_v = 0. \tag{9.38}$$

Prouvons l'hérédité. Sur $\overset{\circ}{\sigma}{}_+^{n-1}$, h_Ω doit être strictement supérieure à h_{n-1} : si ce n'était pas le cas, on aurait par concavité $h_\Omega = h_{n-1}$ sur $\overset{\circ}{\sigma}{}_+^{n-1}$ (prendre chaque segment entre $\mathbb{R}_+ v_{n-1}$ et $\mathbb{R}_+(e_1 + e_2)$ et regarder les graphes de h_Ω et h_{n-1} dessus). En notant m_{n-1} la forme linéaire égale à h_n et h_Ω sur $\overset{\circ}{\sigma}{}_+^{n-1}$, on aurait alors le segment $[m_{n-1}, m_{\inf}]$ dans la bordure de Ω, ce qui contredirait la non-polyhédralité de Ω^+ au voisinage de $m_{\inf}$.

On a donc $h_\Omega > h_{n-1}$ sur $\overset{\circ}{\sigma}{}_+^{n-1}$, puis $x_{\sigma_+^{n-1}}$ est un point de base numérique de $\mathcal{D}_{n-1}$.

Éclatons $X^{[n-1]}$ en $x_{\sigma_+^{n-1}}$. On pose $X^{[n]} := \mathcal{B}\mathfrak{l}_{x_{\sigma_+^{n-1}}}(X^{[n-1]})$. On considère $\mu_n : X^{[n]} \to X^{[n-1]}$ et on pose $p_n = p_{n-1} \circ \mu_n$. On obtient le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
X^{[n]} \arrow[r] \arrow[drrr, "p_n"'] & \cdots \arrow[r] & X^{[1]} \arrow[r, "\mu_1"] \arrow[drr, "p_1"] & X^{[0]} = X \arrow[d, "p"] \\
 & & & B
\end{tikzcd}$$

D'après la théorie des variétés toriques, $X^{[n]}$ est une variété de Nakayama de base B, avec pour structure torique $\Sigma^{[n]}$ définie par :

$$\mathbf{Ver}(\Sigma^{[n]}) = \mathbf{Ver}(\Sigma^{[n-1]}) \cup \{ne_1 + (n-1)e_2\} = \mathbf{Ver}(\Sigma^{[n-1]}) \cup \{v_n\}. \tag{9.39}$$

On définit h_n comme la fonction continue et linéaire sur chaque cône de $\Sigma^{[n]}$ vérifiant $h_n(v) = h_\Omega(v), \forall v \in \mathbf{Ver}(\Sigma^{[n]})$. Comme h_Ω est concave, h_n l'est également (cela se vérifie sur chaque ligne), et par linéarité, on va avoir $h_n \geq h_{n-1}$ sur chaque cône de $\Sigma^{[n]}$, donc sur $N_\mathbb{R}$.

Posons $\mathcal{D}_n := p_n^*(\Delta) - D_{h_n}$. On a :

$$\begin{aligned}
P\big(\mu_n^*(\mathcal{D}_{n-1})\big) &= \mu_n^*(\mathcal{D}_{n-1}) - N\big(\mu_n^*(\mathcal{D}_{n-1})\big) \\
&= p_n^*(\Delta) - D_{h,\Sigma^{[n]}} - \sum_{v\in\mathbf{Ver}(\Sigma^{[n]})} \big(h_\Omega(v) - h(v)\big)\Gamma_v \\
&= p_n^*(\Delta) - \Big(\sum_{v\in\{e_1,e_2,e_3\}} h(v)\Big) - \Big(\sum_{v\in\mathbf{Ver}(\Sigma^{[n]})\smallsetminus\{e_1,e_2,e_3\}} h_\Omega(v)\Big) \\
&= p_n^*(\Delta) - \Big(\sum_{v\in\mathbf{Ver}(\Sigma^{[n]})} h_n(v)\Big) \\
&= p_n^*(\Delta) - D_{h_n,\Sigma^{[n]}} \\
&= \mathcal{D}_n.
\end{aligned}$$

Puis :

$$N(\mathcal{D}_n) = \sum_{v\in\mathbf{Ver}(\Sigma^{[n]})} \big(h_\Omega(v) - h_n(v)\big)\Gamma_v = 0. \tag{9.40}$$

On a prouvé l'hérédité.

On se retrouve alors dans la situation suivante : On a une suite infinie de modèle dominant :

$$\cdots \longrightarrow X^{[n]} \longrightarrow X^{[n-1]} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X^{[1]} \longrightarrow X^{[0]} \tag{9.41}$$

Où $X^{[n]} \longrightarrow X^{[n-1]}$ est l'éclatement le long de

$$V_n := \mathbb{V}\Big(\mathbb{R}_+(e_1+e_2) + \mathbb{R}_+\big(ne_1 + (n-1)e_2\big), \mathcal{L}\Big) = \mathbb{V}(\sigma_+^n, \mathcal{L})$$

qui est de codimension 2. On a également par construction $\mu_n(V_{n+1}) = V_n$, $\mathrm{ord}_{V_n}(\mathcal{D}_{n-1}) > 0$ et $\mathcal{D}_n = P(\mu_n^*\mathcal{D}_{n-1}) = \mu_n^*\mathcal{D}_{n-1} - \mathrm{ord}_{V_n}(\mathcal{D}_{n-1})\Gamma_{v_n}$. On se retrouve précisément dans les conditions de la proposition 9.2.1. On peut donc l'appliquer et en déduire qu'il n'y a pas de décomposition de Zariski pour $\mathcal{D}$.

□

Bibliographie

[BBP13] Sébastien Boucksom, Amaël Broustet, and Gianluca Pacienza. Uniruledness of stable base loci of adjoint linear systems via Mori theory. *Mathematische Zeitschrift*, 275 :499 – 507, 2013.

[BCK12] Thomas Bauer, Mirel Caibăr, and Gary Kennedy. Zariski decomposition : A new (old) chapter of linear algebra. *The American Mathematical Monthly*, 119(1) :25–41, 2012.

[CEL01] Steven Dale Cutkosky, Lawrence Ein, and Robert Lazarsfeld. Positivity and complexity of ideal sheaves. *Mathematische Annalen*, 321 :213–234, 2001.

[CLD12] A. Chambert-Loir and A. Ducros. Formes différentielles réelles et courants sur les espaces de Berkovich. arXiv :1204.6277, 2012.

[Cut00] Steven Dale Cutkosky. Irrational asymptotic behaviour of Castelnuovo–Mumford regularity. *J. Reine Angew. Math.*, 522 :93–103, 2000.

[dFEM13] Tommaso de Fernex, Lawrence Ein, and Mircea Mustaţă. Vanishing theorems and singularities in birational geometry. 2013.

[ELM+05] Lawrence Ein, Robert Lazarsfeld, Mircea Mustata, Michael Nakayame, and Mihnea Popa. Asymptotic invariants of line bundles. *Pure and Applied Mathematics Quarterly*, 1(2), 2005.

[ELM+06] Lawrence Ein, Robert Lazarsfeld, Mircea Mustata, Michael Nakayame, and Mihnea Popa. Asymptotic invariants of base loci. *Annales de l'Institut Fourier*, 56(6) :1701–1734, 2006.

[ELS03] Lawrence Ein, Robert Lazarsfeld, and Karen E. Smith. Uniform approximation of abhyankar valuation ideals in smooth function fields. *American Journal of Mathematics*, 125(2) :409–440, 2003.

[Fuj79] Takao Fujita. On Zariski problem. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, 55(3) :106–110, 1979.

[Ful98] William Fulton. *Intersection Theory.* Springer, 1998.

[GD61] A. Grothendieck and Dieudonné. *Éléments de géométrie algébrique : II*, volume 8. IHÉS, 1961.

[GM19] Walter Gubler and Florent Martin. On Zhang's semipositive metrics. 24 :331–372, 2019.

[Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry.* Number 52 in Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1977.

[Huy16] Daniel Huybrechts. *Lectures on K3 surfaces*, volume 158. Cambridge University Press, 2016.

[JM12] Mattias Jonsson and Mircea Mustaţă. Valuations and asymptotic invariants for sequences of ideals. *Annales de l'institut Fourier*, 62(6) :2145–2209, 2012.

[KKMSD73] G. Kempf, F. Knudsen, D. Mumford, and B. Saint-Donat. *Toroidal Embeddings 1.* Number 339 in Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, 1973.

[KM13] A. Küronya and C. Maclean. Zariski decomposition of b-divisors. *Mathematische Zeitschrift*, 273 :427–436, 2013.

[Kur03] Alex Kuronya. A divisorial valuation with irrational volume. *Journal of Algebra*, 262 :413–423, 2003.

[Laz04] Robert Lazarsfeld. *Positivity in algebraic geometry.* Springer-Verlag, 2004.

[Les16] John Lesieutre. A pathology of asymptotic multiplicity in the relative setting. *Mathematical Research Letters*, 23(5) :1433 – 1451, 2016.

[LJT08] M. Lejeune-Jalabert and B. Teissier. Cloture intégrale des idéaux et équisingularité, avec 7 compléments. *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, XVII(4) :781–859, 2008.

[LN59] S. Lang and A. Neron. Rational points of abelian varieties over function fields. *American Journal of Mathematics*, 81(1) :95–118, 1959.

[Mor84] David R. Morrison. On K3 surfaces with large Picard number. *Inventiones mathematicae*, 75 :105–122, 1984.

[Nak04] Noburu Nakayama. *Zariski-decomposition and Abundance*, volume 14. The Mathematical Society of Japan, 2004.

[Pro03] Yu. G. Prokhorov. On the Zariski decomposition problem. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 240 :37–65, 2003.

[Ste18] Matt Stevenson. Abhyankar and quasi-monomial valuations. In *Student Commutative Algebra Seminar at the University of Michigan in October 2017*, 2018.

[Zar62] Oscar Zariski. The theorem of Riemann-Roch for high multiples of an effective divisor on an algebraic surface. *Ann. of Math.*, 76 :560–615, 1962.