Université Pierre et Marie Curie

École Doctorale de Sciences Mathématiques de Paris Centre

Thèse de doctorat

Discipline : Mathématiques

présentée par

Mounir Hajli

Théorie spectrale pour certaines métriques singulières et géométrie d'Arakelov

---

dirigée par Vincent Maillot

Soutenue le 12 décembre 2012 devant le jury composé de :

M. Nicolas Bergeron	Université Paris 6
M. José Ignacio Burgos Gil	Instituto de Ciencias Mathemáticas
M. Xiaonan Ma	Université Paris 7
M. Vincent Maillot	CNRS-IMJ
M. Amilcar Pacheco	Universidade Federal de Rio de Janeiro
M. Damian Rössler	CNRS-Université Paul Sabatier

au vu des rapports de :

José Ignacio Burgos Gil	Instituto de Ciencias Mathemáticas, Espagne
Kai Köhler	Universität Düsseldorf, Allemagne

Institut de Mathématiques de Jussieu
4, place Jussieu
75 005 Paris

École doctorale Paris centre Case 188
4 place Jussieu
75 252 Paris cedex 05

Cette thèse est dédiée à mes parents, Mohammed et Fatima,

Remerciements

Je tiens d'abord à exprimer ma gratitude envers mon directeur de thèse, Vincent Maillot, d'avoir accepté de diriger ma thèse, pour sa confiance, et sa patience tout au long ce travail. Pendant ces 5 ans, il a su me guider par ses nombreuses critiques et questions, tout en me laissant une grande liberté. Je le remercie aussi d'avoir toujours été là pour résoudre mes problèmes administratifs. Je lui en suis très profondément reconnaissant.

José Ignacio Burgos Gil et Kai Köhler ont accepté de rapporter ma thèse. Ce fut pour moi un plaisir de les avoir rencontrer et de discuter avec eux. Je les remercie chaleureusement pour les remarques, les suggestions et l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail. Je remercie Nicolas Bergeron, Xiaonan Ma, Amilcar Pacheco et Damian Rössler qui me font l'honneur de participer au jury.

Je tiens à remercier Gerard Freixas I Montplet de m'avoir consacrer son temps pour m'expliquer quelques points techniques de la géométrie d'Arakelov. Je remercie tous les mathématiciens avec qui j'ai eu des discussions mathématiques. Je tiens notamment à citer José Ignacio Burgos Gil, Antoine Ducros, Shu Kawaguchi, Kai Köhler, Xiaonan Ma, Atsushi Moriwaki, Ken-Ichi Yoshikawa. Je voudrais profiter de cette occasion pour remercier également Patrick Polo.

J'ai effectué ma thèse à l'Institut de Mathématiques de Jussieu, et je remercie Gilles Godefroy, Corentin Lacombe et Jean-François Venuti pour l'aide qu'ils m'ont apportée dans mes démarches administratives.

Je remercie Jungkai Chen pour son aide et son accueil chaleureux au sein du NCTS (Taipei), ainsi que Jheng-Jie Chen, et sans oublier James K. Lan.

Je tiens à remercier tous les doctorants avec qui j'ai eu des discussions mathématiques. Je tiens notamment à citer Ahmed Moussaoui, Luc Deleaval, Hussein Mourtada et Mounir Nisse. J'adresse un merci particulier à Dimitri Ara avec qui j'ai tant échangé ces 5 dernières années, pour les très longues discussions mathématiques et non mathématiques. Merci *Mon Ami* !

Je remercie enfin ma famille pour sa compréhension et son soutien constant.

Résumé

Résumé

Dans cette thèse on s'intéresse à l'extension de la notion de la torsion analytique holomorphe (dans le cadre de la géométrie d'Arakelov) à des fibrés en droites intégrables sur une surface de Riemann compacte.

Nous proposons deux approches différentes : La première utilise une méthode d'approximation via la formule des anomalies de Bismut, Gillet et Soulé. La seconde nécessite l'introduction de la notion d'opérateur Laplacien singulier généralisant ainsi la notion classique de Laplacien.

Nous appliquons ces deux approches aux fibrés en droites $\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ munis de leur métrique canonique et nous établissons, par des calculs directs, que ces deux approches permettent de définir la même notion de torsion analytique dans le cas des métriques canoniques.

Nous proposons ensuite une théorie spectrale générale qui autorise ces métriques particulières et qui généralise ainsi la théorie classique pour les fibrés en droites sur les surfaces de Riemann compactes munis de métriques $\mathcal{C}^\infty$. Comme application, nous donnons une nouvelle preuve pour les précédents résultats, obtenus par des calculs directs.

Mots-clés Géométrie d'Arakelov, Torsion analytique holomorphe, Métriques intégrables, Métriques canoniques, surface de Riemann compacte, fonction Zêta.

Table des matières

Introduction **11**
0.1 Motivation 11
0.2 Principaux résultats obtenus 12

1 Spectre du Laplacien singulier associé aux métriques canoniques sur $\mathbb{P}^1$ **21**
1.1 Introduction 21
1.2 L'opérateur de Laplace-Beltrami canonique sur $\mathbb{P}^1$ 23
1.3 Le Laplacien canonique de $\mathcal{O}(m)$ pour $m \geq 1$ 35
1.4 Annexe 67

2 Sur la fonction Zêta associée au Laplacien singulier $\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}$ **75**
2.1 Introduction 75
2.2 La torsion analytique holomorphe généralisée sur $\mathbb{P}^1$ 77
2.3 Régularisation de familles de fonctions Zêta 85
2.4 Annexe 122

3 Sur la théorie spectrale des métriques intégrables sur une surface de Riemann compacte **127**
3.1 Introduction 127
3.2 Sur les métriques intégrables sur $\mathbb{P}^1$ 132
3.3 Le Laplacien généralisé sur une surface de Riemann compacte 145
3.4 Variation de la métrique sur E 160
3.5 Variation de la métrique sur TX 185
3.6 Les opérateurs compacts, un rappel 196
3.7 Appendice 200

Bibliographie **209**

Introduction

0.1 Motivation

Cette thèse s'inscrit dans le cadre de la géométrie d'Arakelov et des fibrés en droites intégrables. Plus précisément, l'objectif principal était la construction d'une théorie de la torsion analytique holomorphe pour les métriques intégrables sur les fibrés en droites sur une surface de Riemann compacte.

Dans le cadre de la géométrie d'Arakelov classique, telle que développée par Gillet-Soulé et Bismut, les métriques hermitiennes considérées sont toujours supposées de classe $\mathcal{C}^\infty$. Ceci est par exemple nécessaire, si l'on veut définir la partie spectrale entrant dans la formulation du théorème de Riemann-Roch Arithmétique, voir [GS92]. Malheureusement ces hypothèses sur les métriques sont quelques fois trop restrictives. Par exemple, métriques canoniques sur les variétés toriques sont continues mais pas nécessairement $\mathcal{C}^\infty$.

Rappelons que la géométrie des variétés toriques est liée à la géométrie des polytopes. Les théorèmes les plus importants de la géométrie algébrique, par exemple la formule de Riemann-Roch, peuvent être ainsi réalisés explicitement sur ces variétés. Un nombre important de résultats de la géométrie algébrique des variétés toriques possèdent leurs analogues en géométrie arithmétique.

Après une première approche due à Zhang, voir [Zha95]. En s'appuyant sur les travaux de Bedford-Taylor, Maillot généralise la géométrie d'Arakelov aux métriques intégrables, avec comme application aux variétés toriques lisses et aux métriques canoniques, voir [Mai00]. Plus tard Burgos, Sombra et Philippon démontrent, entre autres choses, une formule pour le degré arithmétique pour un fibré en droites admissible en termes de la géométrie convexe, voir [BGPS11]. À ce point, on ne dispose pas d'un analogue de théorème de Riemann Roch Arithmétique pour les métriques canoniques sur une variété torique. En fait, à la suite des travaux de Bismut, Gillet et Soulé, il est clair que la majeure difficulté consiste à définir pour ces métriques une notion de torsion analytique holomorphe.

Notre contribution dans cette thèse consiste à construire une théorie de la torsion analytique holomorphe pour les fibrés en droites intégrables sur les surfaces de Riemann compactes. Pour ce faire, nous proposons deux approches à priori complètement différentes :

La première approche consiste à approximer les métriques intégrables par des métriques $\mathcal{C}^\infty$ et d' utiliser la formule des anomalies de Bismut, Gillet et Soulé pour étudier la variation de la torsion analytique. Nous définissons alors la torsion analytique pour une métrique intégrable comme étant une limite d'une suite de torsions analytiques attachées à des métriques $\mathcal{C}^\infty$.

Dans la seconde approche, plus directe, nous généralisons la notion d'opérateur Laplacien classique en construisant un opérateur Laplacien singulier satisfaisant certaines propriétés naturelles. Comme application, nous calculons explicitement le spectre d'un nouveau opérateur Laplacien sur $\mathbb{P}^1$ associé aux métriques canoniques. Afin d'étudier ce spectre, nous généralisons une technique de régularisation de produits infinis, introduite par Voros, dans [Vor87]. Cela va nous permettre d'établir une formule

explicite pour le déterminant régularisé de cet opérateur. Nous constatons que les deux approches (approximation par la formule des anomalies et la théorie généralisée du Laplacien classique) donnent le même résultat.

Nous développons ensuite une théorie spectrale générale (sur les courbes et pour des métriques intégrables convenables, par exemple les métriques canoniques sur $\mathbb{P}^1$) qui étend la théorie classique. Cette dernière approche explique pourquoi les méthodes précédentes donnaient le même résultat.

0.2 Principaux résultats obtenus

Cette thèse est constituée de trois parties. Dans la première partie on introduit un nouveau opérateur Laplacien singulier associé au fibré en droites hermitien $\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty$ sur $\mathbb{P}^1$ munis de leur métrique canonique, on détermine explicitement son spectre ainsi que les vecteurs propres. La deuxième partie est dédiée à la généralisation, par approximation, de la notion de la torsion analytique holomorphe sur $\mathbb{P}^1$ et au calcul du déterminant régularisé du Laplacien singulier associé aux métriques canoniques sur $\mathbb{P}^1$. Dans le dernière partie, on introduit une classe de métriques continues sur les fibrés en droites sur une surface de Riemann compacte qu'on appellera métriques 1-intégrables et on étend la théorie spectrale des opérateurs Laplaciens associés aux métriques de classe $\mathcal{C}^\infty$ à l'ensemble des fibrés en droites munis de ces métriques. Cette dernière théorie explique les résultats obtenus dans la première et la deuxième parties.

Partie 1 : Dans cette partie, on s'intéresse à une classe de métriques sur les fibrés en droites sur $\mathbb{P}^1$ appelées métriques canoniques. Ce sont des métriques continues mais pas $\mathcal{C}^\infty$ en général, déterminées uniquement par la structure combinatoire de $\mathbb{P}^1$ vu comme variété torique. On sait que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ la métrique canonique sur $\mathcal{O}(m)$ est donnée par l'expression

$$\|s\|_\infty(x) = \frac{|s(x)|}{\max(|x_0|, |x_1|)^m}$$

où $x = [x_0 : x_1] \in \mathbb{P}^1$ et s est une section locale de $\mathcal{O}(m)$ autour de x.

Il n'est pas clair à priori si la théorie de [BGV04] peut être étendue à ce type de métriques. Nous montrons dans cet article qu'on peut encore leurs associer un opérateur Laplacien singulier qu'on notera par $\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}$. Nous prouvons que cet opérateur possède encore un spectre discret noté $\mathrm{Spec}(\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty})$ que nous calculons explicitement. On notera que $\mathrm{Spec}(\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty})$ est discret, infini et positif.

On munit $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ l'espace projectif complexe de dimension 1 de la métrique associée à la forme volume singulière suivante

$$\omega_\infty = \frac{i}{2\pi} \frac{dz \wedge d\overline{z}}{\max(1, |z|)^4}$$

et on note $\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty$ le fibré en droites $\mathcal{O}(m)$ muni de sa métrique canonique, avec $m \geq 0$.

Soit $n \in \mathbb{Z}$ et J_n la fonction de Bessel d'ordre n. On commence dans un premier temps, par étudier $\Delta_{\overline{\mathcal{O}}_\infty}$. Grâce à la structure torique de $\mathbb{P}^1$ on relie le spectre de $\Delta_{\overline{\mathcal{O}}_\infty}$ à celui de deux problèmes avec conditions aux bords classiques. Notre premier résultat s'énonce comme suit :

Théorème 0.2.1 (cf. Théorème (1.2.7))**.** *Pour tout $m \in \mathbb{Z}$ et tout $k \geq 1$ il existe des fonctions continues $\varphi^-_{(m,k)}$ et $\varphi^+_{(m,k)}$ sur $\mathbb{P}^1$ telles que $\forall\, f \in A^{0,0}(\mathbb{P}^1)$*

$$(\varphi^-_{(m,k)}, \Delta_{\overline{\mathcal{O}}_\infty} f)_{L^2,\infty} = \frac{j^2_{m,k}}{4}(\varphi^-_{(m,k)}, f)_{L^2,\infty},$$

$$(\varphi^+_{(m,k)}, \Delta_{\overline{\mathcal{O}}_\infty} f)_{L^2,\infty} = \frac{j'^2_{m,k}}{4}(\varphi^+_{(m,k)}, f)_{L^2,\infty},$$

où $j_{(m,k)}$ (resp. $j'_{(m,k)}$) est le k-ème zéro positif de J_n (resp. de J'_n), et que

$$\mathrm{Spec}(\Delta_{\overline{\mathcal{O}}_\infty}) = \Big\{0\Big\} \bigcup \Big\{ \frac{j^2_{m,k}}{4}, \frac{j'^2_{n,l}}{4} \,\Big|\, n, m \in \mathbb{N}, \quad k, l \geq 1 \Big\},$$

Les valeurs propres $\frac{j^2_{m,k}}{4}$ et $\frac{j'^2_{n,l}}{4}$ pour $n > 0$ et $m > 0$ sont de multiplicité 2 et cette multiplicité vaut 1 pour les valeurs propres $\frac{j^2_{0,l}}{4}$ et $\frac{j'^2_{0,l}}{4}$.

Le cas de $\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}$ est ensuite traité d'une manière analogue. On commence par résoudre deux problèmes spectraux définis sur chaque composante connexe de $\mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{S}^1$, les solutions retenues ou admissibles pour notre problème seront un recollement des solutions des deux cotés de $\mathbb{S}^1$ satisfaisant à une condition de régularité le long de cette barrière. Le point délicat ici est de prouver que cet ensemble de solutions ainsi construites est total. Pour cela, on adapte et étend les techniques de la théorie des séries de Fourier-Bessel, cf. [Wat44, §.18], à notre situation, tout en développant en parallèle dans la section (1.3.1) les objets analogues à la théorie des séries de Fourier-Bessel. Plus précisément on introduit une classe de fonctions L_n, pour $n \in \mathbb{Z}$ qui joueront le rôle des fonctions de Bessel dans notre situation.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on introduit les ensembles suivants :

$$Z_n := \Big\{ \lambda \in \mathbb{C} \,\Big|\, \frac{d}{dr}(r^{-m} J_n(r) J_{n-m}(r))_{|\lambda} = 0 \Big\}.$$

Théorème 0.2.2 (cf. Théorème (1.3.6) et Théorème (1.3.7))**.** *On a, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$*

$$\mathrm{Spec}(\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}) = \Big\{0\Big\} \bigcup \Big\{ \frac{\lambda^2}{4} \,\Big|\, \exists n \in \mathbb{N},\ \lambda \in Z_n \Big\}.$$

Si m est pair, alors la multiplicité de $\frac{\lambda^2}{4}$ est 2 si $\lambda \in Z_n$ avec $n \geq m+1$ ou $0 \leq n \leq \frac{m}{2} - 1$ et de multiplicité 1 si $\lambda \in Z_{\frac{m}{2}}$. Lorsque m est impair, alors $\frac{\lambda^2}{4}$ est de multiplicité 2 si $n \geq m+1$, égale à 1 si $0 \leq n \leq m$.

Ce calcul nous servira dans un autre article pour le calcul du déterminant régularisé de la fonction Zêta associée au spectre du Laplacien singulier $\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}$.

Partie 2 : La torsion analytique est un ingrédient fondamental de la géométrie d'Arakelov. Dans le cas de fibré en droites trivial sur l'espace projectif muni de la métrique de Fubini-Study, Ikeda et Taniguchi déterminent explicitement le spectre du Laplacien associé à ces métriques, voir [IT78]. En se basant sur leurs résultats, Gillet, Soulé et Zagier calculent explicitement la torsion analytique dans ce cas [GS91]. Gillet et Soulé utilisent ce calcul pour démontrer leur théorème de Riemann-Roch arithmétique pour le fibré en droites trivial sur l'espace projectif muni de la métrique de Fubini-Study, voir [GS91, Théorème 2.1.1].

Un des objectifs de cette partie est de proposer une alternative aux calculs de Gillet, Soulé et Zagier en étudiant le spectre du Laplacien $\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}$ associé aux métriques canoniques sur $\mathbb{P}^1$.

Cette partie est constituée de deux parties logiquement indépendantes :

Dans la section (2.2), on étend la notion de la torsion analytique holomorphe aux fibrés en droites munis de métriques admissibles sur $\mathbb{P}^1$. Notre idée consiste en premier temps à approximer une métrique admissible par une suite de métriques positives de classe $\mathcal{C}^\infty$ et d'étudier la variation de la torsion analytique associée à cette suite, moyennant la formule des anomalies. On peut aussi considérer une suite de métriques positives de classe $\mathcal{C}^\infty$ qui converge uniformément vers une métrique admissible sur $T\mathbb{P}^1$ et d'étudier le comportement de la torsion analytique dans ce cas. Plus précisément, nous établissons le théorème suivant, voir (2.2.5) :

Théorème 0.2.3. *On munit $T\mathbb{P}^1$ d'une métrique intégrable, qu'on note par $h_{\infty,\mathbb{P}^1}$. Soit $\overline{L}_\infty := (L, h_{\infty,L})$ un fibré en droites admissible sur $\mathbb{P}^1$.*

On considère $(h_{n,L})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(h_{n,\mathbb{P}^1})_{n\in\mathbb{N}}$, deux suites de métriques L et $T\mathbb{P}^1$ respectivement vérifiant :

1. *Il existe H_1 et H_2 deux fibrés en droites sur $\mathbb{P}^1$ et deux suites de métriques $(h_{n,1})$ et $(h_{n,2})$ de métriques positives de classe $\mathcal{C}^\infty$ qui convergent uniformément vers deux métriques $h_{\infty,1,\mathbb{P}^1}$ et $h_{\infty,2,\mathbb{P}^1}$ respectivement sur H_1 et H_2 telles que*

$$T\mathbb{P}^1 = H_1 \otimes H_2^{-1},$$

$$h_{\infty,\mathbb{P}^1} = h_{\infty,1} \otimes h_{\infty,2}^{-1},$$

et

$$h_{n,\mathbb{P}^1} = h_{n,1} \otimes h_{n,2}^{-1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

2. *$(h_{n,L})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de métriques positives de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur L qui converge uniformément vers $h_{\infty,L}$.*

On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n' \in \mathbb{N}$:

$$\Big((T\mathbb{P}^1, h_{n,T\mathbb{P}^1}); (L, h_{n',L})\Big)$$

la torsion analytique holomorphe de Ray-Singer associée à $\Big((T\mathbb{P}^1, h_{n,T\mathbb{P}^1}); (L, h_{n',L})\Big)$.
Alors la suite double[1] *suivante :*

$$\Big(T\Big((T\mathbb{P}^1, h_{n,T\mathbb{P}^1}); (L, h_{n',L})\Big)\Big)_{n\in\mathbb{N},\, n'\in\mathbb{N}}$$

converge vers une limite finie qui ne dépend pas du choix des suites ci-dessus.

et nous introduisons la définition suivante :

Définition 0.2.4. *On note cette limite par*

$$T_g\Big((T\mathbb{P}^1, h_{\infty,\mathbb{P}^1}); (L, h_{\infty,L})\Big),$$

1. Dans ce texte, on fera la convention suivante : On dira qu'une suite double $(x_{n,n'})_{n\in\mathbb{N},n'\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite l, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $|x_{n,n'} - l| < \varepsilon$ pour $n, n' > A$.

et on l'appelle la torsion analytique généralisée. On définit aussi

$$h_{Q,g} := h_{L^2,g} \exp\Big(T_g((T\mathbb{P}^1, h_{\infty,\mathbb{P}^1}); (L, h_{\infty,L})\Big)$$

qu'on appelle la métrique de Quillen généralisée.

Nous nous intéresserons ensuite à une classe de métriques admissibles non nécessairement $\mathcal{C}^\infty$ à savoir les métriques canoniques sur $\mathbb{P}^1$. Ces dernières ont la particularité d'être déterminées uniquement par la combinatoire de $\mathbb{P}^1$, vue comme variété torique. Nous appliquerons la théorie développée ci-dessus pour calculer $T_g(\overline{T\mathbb{P}^1}_\infty; \overline{\mathcal{O}(m)}_\infty)$; la valeur de la torsion analytique généralisée associée à $\overline{T\mathbb{P}^1}_\infty$ et $\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty$ munis de leur métriques canoniques. On obtient :

$$T_g(\overline{T\mathbb{P}^1}_\infty; \overline{\mathcal{O}(m)}_\infty) = 4\zeta'_{\mathbb{Q}}(-1) - \frac{1}{6} - \log \frac{(m+2)^{m+1}}{\big((m+1)!\big)^2} \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

La section (2.3) constitue une approche directe pour définir une torsion analytique holomorphe associée à $(\overline{T\mathbb{P}^1}_\infty; \overline{\mathcal{O}(m)}_\infty)$. Rappelons que dans [Haja], nous avons calculé explicitement le spectre de $\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}$. Il est donc naturel d'associer à ce spectre une fonction $\zeta_{\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}}$, qu'on appellera la fonction Zêta associée à l'opérateur singulier $\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}$. Afin d'étudier cette fonction Zêta, nous introduisons la notion de familles de fonctions Zêta, voir (2.3.2), et nous généralisons la théorie de Voros à cette classe de fonctions Zêta en démontrant le théorème (2.3.6) qui généralise ceux de [Vor87] et de [Spr05]. Grâce à la théorie développée dans cet article, nous sommes capables d'établir que $\zeta_{\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}}$ est prolongeable analytiquement au voisinage de zéro. De plus, nous calculons explicitement $\zeta'_{\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}}(0)$ et nous obtenons :

$$\zeta'_{\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}}(0) = 4\zeta'_{\mathbb{Q}}(-1) - \frac{1}{6} - \log \frac{(m+2)^{m+1}}{((m+1)!)^2} \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Nous obtenons l'égalité remarquable suivante :

$$T_g(\overline{T\mathbb{P}^1}_\infty; \overline{\mathcal{O}(m)}_\infty) = \zeta'_{\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}}(0) \quad \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

Partie 3 : Rappelons qu'un fibré en droites hermitien (E, h_E) sur une variété projective complexe non-singulière, est dit admissible si h_E est limite uniforme d'une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de métriques $\mathcal{C}^\infty$ et positives. On dit qu'il est intégrable si h_E est quotient de deux métriques admissibles.

Dans cette partie, on s'intéresse à une sous-classe de métriques intégrables sur les fibrés en droites sur une surface de Riemann compacte. Nous introduisons la notion de métrique 1-intégrable en considérant la définition suivante :

Définition 0.2.5. *Soit (X, ω) une surface de Riemann compacte et ω_X une forme de Kähler. Soit $\overline{E} = (E, h_\infty)$ un fibré en droites intégrable sur X.*

On dit que (E, h_∞) est 1-intégrable s'il existe une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de métriques de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur E qui converge uniformément vers h_∞ vérifiant que :

1. *Il existe $\overline{E}_1$ et $\overline{E}_2$ deux fibrés en droites admissibles tels que $\overline{E} = \overline{E}_1 \otimes \overline{E}_2^{-1}$ et deux suites $(h_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(h_{2,n})_{n\in\mathbb{N}}$ de métriques positives de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur E_1 respectivement sur E_2 telles que $(h_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ respectivement $(h_{2,n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $h_{1,\infty}$ respectivement vers $h_{2,\infty}$ et que*
$$h_n = h_{1,n} \otimes h_{2,n}^{-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$
ou il existe h', une métrique positive de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $h_n \otimes h'$ est positive, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big\|\frac{h_n}{h_{n-1}}-1\Big\|_{\sup}^{\frac{1}{2}}<\infty,$$

3.
$$\sup_{n\in\mathbb{N}_{\geq 1}}\Big\|h_X\Big(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial z}\log\frac{h_n}{h_{n-1}}\Big\|_{\sup}<\infty. \tag{1}$$

Le principal résultat du paragraphe (3.2) est une condition suffisante pour qu'une métrique vérifie (3.2), c'est l'objet du théorème suivant :

Théorème 0.2.6 (cf. théorème (3.2.12))**.** *Soit h une métrique intégrable sur un fibré en droites L sur $\mathbb{P}^1$. On suppose que h_∞ est invariante par l'action de $\mathbb{S}^1$ et qu'il existe $S\in\mathcal{S}$ tel que h soit de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{P}^1\setminus S$. Si $h_\infty=h_{1,\infty}\otimes h_{2,\infty}^{-1}$ avec $h_{1,\infty}$ et $h_{2,\infty}$ sont deux métriques admissibles, alors pour tout choix de suite $(h_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ (resp. $(h_{2,n})_{n\in\mathbb{N}}$) de métriques positives de classe $\mathcal{C}^\infty$ convergeant uniformément vers $h_{1,\infty}$ (resp. $h_{2,\infty}$), il existe $(h_{n,\rho})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de métriques de classe $\mathcal{C}^\infty$ qui converge uniformément vers h_∞ telle que*

1.
$$\Big\|\log\frac{h_{n,\rho}}{h_{n-1,\rho}}\Big\|_{\sup}\leq\Big\|\log\frac{h_n}{h_{n-1}}\Big\|_{\sup} \tag{2}$$

2. Il existe $M>0$ tel que
$$\Big\|h_{\mathbb{P}^1}\Big(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial z}\Big(\log\frac{h_{\rho,n}}{h_{\rho,n-1}}\Big)\Big\|_{\sup}\leq M\quad\forall n\in\mathbb{N}_{\geq 1}. \tag{3}$$

3. Il existe h', une métrique positive de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $h_{\rho,n}\otimes h'$ est positive pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Avec les notations de la définition (3.2.13), nous montrons qu'il existe des métriques 1-intégrables continues mais non $\mathcal{C}^\infty$, c'est l'objet du théorème (3.2.15). Notons que nos résultats s'étendent à toute métrique ayant cette propriété.

Soit (X,h_X) une surface de Riemann compacte où h_X est une métrique hermitienne continue. Au paragraphe (3.3.1), on rappelle la construction du Laplacien dans le cas classique agissant sur $A^{(0,0)}(X,E)$. Soit $\overline{E}_\infty=(E,h_{E,\infty})$ un fibré en droites intégrable sur X, nous montrons qu'on peut associer à $h_{E,\infty}$ un opérateur linéaire qui agit qui agit sur $A^{(0,0)}(X,E)$ et étend la notion de Laplacien pour les métriques $\mathcal{C}^\infty$. On l'appellera l'opérateur Laplacien associé à $h_{E,\infty}$ et on le note par $\Delta_{\overline{E}_\infty}$. Plus précisément, on établit le résultat suivant, voir (3.3.6) :

Théorème 0.2.7. *Soit (X,h_X) une surface de Riemann compacte avec h_X une métrique hermitienne continue. Soit $\overline{E}_\infty=(E,h_{E,\infty})$ un fibré en droites intégrable. On note par $\overline{A^{0,0}(X,E)}_\infty$ le complété de $A^{0,0}(X,E)$ pour la métrique L^2_∞ induite par h_X et $h_{E,\infty}$.*

Pour toute décomposition de $\overline{E}_\infty=\overline{E}_{1,\infty}\otimes\overline{E}_{2,\infty}^{-1}$ en fibrés admissibles $\overline{E}_{1,\infty}$ et $\overline{E}_{2,\infty}$, et pour tout choix de suites $(h_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ (resp. $(h_{2,n})_{n\in\mathbb{N}}$) de métriques positives $\mathcal{C}^\infty$ sur $\overline{E}_{1,\infty}$ (resp. sur $\overline{E}_{2,\infty}$) qui converge uniformément vers $h_{1,\infty}$ (resp. $h_{2,\infty}$), pour tout $\xi\in A^{0,0}(X,E)$, et si l'on pose $\overline{E}_n:=\overline{E}_{1,n}\otimes\overline{E}_{2,n}^{-1}$. Alors la suite $(\Delta_{\overline{E}_n}\xi)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, pour la norme L^2_∞, lorsque $n\mapsto\infty$ vers une limite $\Delta_{\overline{E}_\infty}\xi$ dans $\overline{A^{0,0}(X,E)}_\infty$. Cette limite ne dépend par du choix de la décomposition ni de celui de la suite.

On a

1. $\Delta_{\overline{E}_\infty}$ est un opérateur linéaire de $A^{0,0}(X,E)$ vers $\overline{A^{0,0}(X,E)}_\infty$.

2.

$$\begin{aligned}(\Delta_{\overline{E}_\infty}(f\otimes\sigma), g\otimes\tau)_{L^2,\infty} &= (f\otimes\sigma, \Delta_{\overline{E}_\infty}(g\otimes\tau))_{L^2,\infty}\\ &= \frac{i}{2\pi}\int_X h_{E,\infty}(\sigma,\tau)\frac{\partial f}{\partial\overline{z}}\frac{\partial\overline{g}}{\partial z}\,dz\wedge d\overline{z}.\end{aligned} \tag{4}$$

$\forall f, g \in A^{0,0}(X)$ et σ, τ deux sections locales holomorphes de E tels que $f\otimes\sigma$ et $g\otimes\tau$ soient dans $A^{(0,0)}(X,E)$. En particulier,

$$(\Delta_{\overline{E}_\infty}\xi, \xi')_{L^2,\infty} = (\xi, \Delta_{\overline{E}_\infty}\xi')_{L^2,\infty},$$

$\forall \xi, \xi' \in A^{(0,0)}(X,E)$.

3.

$$(\Delta_{\overline{E}_\infty}\xi, \xi)_{L^2,\infty} \geq 0 \quad \forall\, \xi \in A^{0,0}(X,E).$$

Si l'on choisit convenablement $(h_n)_n$ une suite de métriques de classe $\mathcal{C}^\infty$ qui converge uniformément vers h_∞, alors nous sommes capables de relier $e^{-t\Delta_{\overline{E}_\infty}}$ à $(e^{-t\Delta_{\overline{E}_n}})_{n\in\mathbb{N}}$; la suite de noyaux de Chaleur associés à $(h_n)_n$. En fait, si $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les deux conditions suivantes :

1. $$\sup_{n\in\mathbb{N}}\left\| h_X\Big(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial z}\log\frac{h_{n+1}}{h_n}\right\|_{\sup} < \infty$$

   où $\{\frac{\partial}{\partial z}\}$ est une base locale de TX. Rappelons que $\left| h_X\Big(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial z}\log\frac{h_{n+1}}{h_n}\right|$ ne dépend pas du choix de la base locale.

2. $$\sum_{n=1}^{\infty}\left\|\frac{h_n}{h_{n-1}} - 1\right\|_{\sup}^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Alors, nous montrons le théorème suivant, voir (3.4.8) :

Théorème 0.2.8. *On a,*

$$(e^{-t\Delta_{\overline{E}_n}})_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow[n\mapsto\infty]{} e^{-t\Delta_{\overline{E}_\infty}}.$$

dans l'espace des opérateurs bornés sur le complété de $A^{(0,0)}(X,E)$ pour la métrique L^2_∞.

Après nous montrons que $\Delta_{\overline{E}_\infty}$ possède un spectre discret, infini et positif. L'étape suivante est l'étude de l'opérateur $P^\infty e^{-t\Delta_{L,\infty}}$, où P^∞ est la projection orthogonale à $\ker\Delta_{E,\infty}$ pour L^2_∞. Nous montrons qu'il est nucléaire, on peut alors introduire la fonction Thêta associée en posant :

$$\theta_\infty(t) := \mathrm{Tr}\big(P^\infty e^{-t\Delta_{E,\infty}}\big) \quad \forall\, t > 0,$$

Nous montrons qu'on a convergence simple de :

$$(\theta_n(t))_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow[n\mapsto\infty]{} \theta_\infty(t) \quad \forall\, t > 0,$$

où θ_n est la fonction Thêta associée à Δ_{E,h_n}.

Ces résultats sont regroupés dans le théorème suivant, voir (3.4.16) pour la preuve :

Théorème 0.2.9. *Pour tout $t > 0$, $e^{-t\Delta_{E,\infty}}$ est un opérateur nucléaire. On a*

$$\lim_{u\mapsto\infty} \theta_u(t) = \theta_\infty(t).$$

La fonction Zêta ζ_∞ définit par :

$$\zeta_\infty(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \theta_\infty(t) t^{s-1} dt,$$

est holomorphe sur $\mathrm{Re}(s) > 1$ *et*

$$\zeta_\infty(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{\infty,k}^s} \quad \forall\, \mathrm{Re}(s) > 1.$$

admet un prolongement analytique au voisinage de 0 et on a

$$\zeta'_\infty(0) = \lim_{u\mapsto\infty} \zeta'_u(0).$$

avec ζ_u est la fonction Zêta associée à $\Delta_{E,u}$.

On notera qu'afin de démontrer ce théorème on a besoin d'une borne inférieure positive non nulle pour la suite $(\lambda_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}$, où $\lambda_{1,n}$ est la première valeur propre non nulle de $\Delta_{\overline{E}_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. L'existence de cette borne sera déduit de la proposition suivante, qu'on établit dans (3.7.17) :

Proposition 0.2.10. *Soit (X, h_X) une surface de Riemann compacte et E un fibré en droites holomorphe. Soit $h_{E,\infty}$ une métrique hermitienne continue sur L. Soit $(h_n)_n$ une suite de métriques hermitiennes $\mathcal{C}^\infty$ sur L qui converge uniformément vers h_∞. Alors il existe une constante $\alpha \neq 0$ telle que*

$$\alpha \leq \frac{\lambda_{1,q}}{\lambda_{1,p}} \leq \frac{1}{\alpha}, \quad \forall\, 1 \ll p \leq q.$$

On termine en montrant que la suite des métriques de Quillen $(\|\cdot\|_{Q,h_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite et que cette dernière est représentée par la métrique $\|\cdot\|_{Q,h_\infty} = \|\cdot\|_{L^2,\infty} \exp(\zeta'_\infty(0))$.

Les paragraphes (3.3.2) et (3.3.3) sont consacrés à l'extension de la notion du Laplacien généralisé aux cas des métriques intégrables sur les fibrés en droites holomorphes sur une surface de Riemann compacte. On propose deux approches différentes, dans la première nous montrons que pour tout choix $(h_n)_n$ de suites de métriques positives $\mathcal{C}^\infty$ qui converge uniformément vers une métrique admissible h_∞, la suite d'opérateurs Δ_{E,h_n} converge fortement pour la métrique L^2 vers un opérateur qu'on notera par $\Delta_{\overline{E}_\infty}$, voir le théorème (3.3.6). Lorsque $X = \mathbb{P}^1$, le théorème (3.3.16) décrit la deuxième approche qui consiste à définir directement l'opérateur Δ_{E,h_∞} par une formule qui étend l'expression locale du Laplacien dans le cas $\mathcal{C}^\infty$ en montrant que le coefficients de ce dernier ont encore un sens dans le cas de $h_{E,\infty}$.

On termine, par prouver que les deux approches définissent le même opérateur, qu'on appellera le Laplacien associé à $h_{E,\infty}$.

Dans la partie (3.5), on étudie la variation de la métrique sur TX. On considère une métrique intégrable sur TX, qu'on lui associe un opérateur Laplacien noté $\Delta_{X,\infty}$. on montre qu'il admet un noyau de chaleur $e^{-t\Delta_{X,\infty}}$ qui peut être approché par une suite de noyaux de chaleur $\left(e^{-t\Delta_{X,n}}\right)_n$ de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Le (3.6) constitue une annexe regroupant quelques résultats techniques utiles, on y trouve un rappel sur les opérateurs bornés, compacts et nucléaires sur un espace de Hilbert. En combinant plusieurs résultats on établit dans (3.4), que

$$e^{-t\Delta_{E,h_\infty}}, \quad t > 0$$

est un opérateur nucléaire, en d'autres termes nous établissons que

$$\theta_\infty(t) := \sum_{k\geq 1} e^{-t\lambda_{\infty,k}} < \infty$$

où $\{\lambda_{\infty,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ sont les valeurs propres de Δ_{E,h_∞} comptées avec multiplicités. Si l'on note par

$$\zeta_\infty(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1}\theta_\infty(t)dt, \quad s \in \mathbb{C},$$

alors nous montrons notre principal résultat de ce paragraphe :

$$\lim_{n\in\mathbb{N}} \zeta_n'(0) = \zeta_\infty'(0)$$

est la limite est finie.

Cela explique nos précédents calculs et le fait que

$$T_g((\mathbb{P}^1, \omega_\infty); \overline{\mathcal{O}(m)}_\infty) = \zeta'_{\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}}(0)$$

où le terme à gauche est obtenu comme limite de $\zeta_n'(0)$.

L'appendice (3.7) regroupe quelques lemmes et résultats qui seront utilisés tout au long de cette thèse , par exemple on établit un lemme technique qui nous permet de construire à partir d'une famille discrète ou une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de métriques hermitiennes, une famille à paramètre continu $u \in [1, \infty[$ qui interpole $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aux points entiers et qui varie de façon $\mathcal{C}^\infty$ en fonction u. Ce lemme sera utilisé pour étudier en particulier la variation des $e^{-t\Delta_{L,h_n}}$ en fonction de n en utilisant la formule de Duhamel pour $\frac{\partial}{\partial u} e^{-t\Delta_u}$.

Chapitre 1

Spectre du Laplacien singulier associé aux métriques canoniques sur $\mathbb{P}^1$

On détermine le spectre ainsi que les vecteurs propres du Laplacien singulier associé au fibré en droites hermitien $\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty$ muni de leur métrique canonique sur $\mathbb{P}^1$.

1.1 Introduction

Soit (X, h_X) une variété kählerienne compacte de dimension n et $\overline{E} := (E, h_E)$ un fibré hermitien muni d'une métrique de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur X. Pour $p, q = 0, 1, \ldots, n$, on note $\Omega^{(p,q)}(X, E)$ (resp. $A^{(p,q)}(X, E)$) le fibré vectoriel des $(p, q)-$formes de classe $\mathcal{C}^\infty$ à coefficients dans E (resp. l'espace des sections globales de $\Omega^{(p,q)}(X, E)$). La métrique de h_X sur $T^{(1,0)}X$ induit par dualité une métrique hermitienne $\Omega^{(1,0)}X$ et par conjugaison une métrique sur $\Omega^{(0,1)}(X)$. En prenant les différents produits extérieurs de cette métrique et en les tensorisant avec la métrique de E, on construit un produit hermitien ponctuel $(s(x), t(x))$ pour deux sections de $A^{(0,q)}(X, E) = A^{(0,q)}(X) \otimes_{\mathcal{C}^\infty(X)} A^{(0,0)}(X, E)$. Soit ω_0 la forme de Kähler normalisée, donnée dans chaque carte locale (z_α) sur X par

$$\omega_0 = \frac{i}{2\pi} \sum_{\alpha,\beta} h\Big(\frac{\partial}{\partial z_\alpha}, \frac{\partial}{\partial z_\beta}\Big) dz_\alpha \wedge d\overline{z}_\beta.$$

Le produit scalaire L^2 de deux sections $s, t \in A^{(0,q)}(X, E)$ est défini par la formule

$$(s, t)_{L^2} = \int_X (s(x), t(x)) \frac{\omega_0^n}{n!}.$$

On dispose du complexe suivant appelé complexe de Dolbeault :

$$0 \longrightarrow A^{(0,0)}(X, E) \xrightarrow{\overline{\partial}_E^0} A^{(0,1)}(X, E) \xrightarrow{\overline{\partial}_E^1} \ldots \xrightarrow{\overline{\partial}_E^{n-1}} A^{(0,n)}(X, E) \longrightarrow 0.$$

L'opérateur $\overline{\partial}_E$ admet un adjoint pour la métrique L^2, c'est à dire un opérateur

$$\overline{\partial}_E^* : A^{(0,q+1)}(X, E) \longrightarrow A^{(0,q)}(X, E)$$

qui vérifie

$$(s, \overline{\partial}_E^* t)_{L^2} = (\overline{\partial}_E s, t)_{L^2}$$

pour tout $s \in A^{(0,q)}(X, E)$ et $t \in A^{(0,q+1)}(X, E)$. Pour $q = 0, \ldots, n$, l'opérateur $\Delta_{\overline{E}}^q = \overline{\partial}_E^{q-1} \overline{\partial}_E^{q*} + \overline{\partial}_E^{q+1*} \overline{\partial}_E^q$ sur $A^{(0,q)}(X, E)$ est appelé l'opérateur Laplacien. On sait, voir par exemple [BGV04], que

$\Delta^q_{\overline{E}}$ est un opérateur positif et qu'il admet un spectre positif discret et infini, et que les vecteurs propres associés sont dans $A^{0,q}(X,E)$.

Il y a peu de cas pour les quels on sait calculer explicitement le spectre de $\Delta^*_{\overline{E}}$. Lorsque $\mathbb{P}^n$, l'espace projectif complexe de dimension n, est muni de la métrique de Fubini-Study, Ikeda et Taniguchi étudient dans [IT78] le Laplacien Δ^q agissant sur l'espace des $(0,q)$-formes $\mathcal{C}^\infty$ à coefficients dans le fibré en droites trivial pour $q=0,\dots,n$. Ils utilisent la compatibilité entre la structure $\mathbb{P}^n$ vu comme variété riemannienne homogène et la métrique de Fubini-Study pour calculer les valeurs propres de Δ^q, voir [IT78, théorème 5.2].

Dans ce texte, on s'intéresse à une classe de métriques sur les fibrés en droites sur $\mathbb{P}^1$, appelées les métriques canoniques. Ce sont des métriques continues mais pas $\mathcal{C}^\infty$ en général, déterminées uniquement par la structure combinatoire de $\mathbb{P}^1$, vu comme variété torique. On sait que pour tout $m\in\mathbb{N}^*$ la métrique canonique sur $\mathcal{O}(m)$ est donnée par l'expression

$$\|s\|_\infty(x)=\frac{|s(x)|}{\max(|x_0|,|x_1|)^m}$$

où $x=[x_0:x_1]\in\mathbb{P}^1$ et s est une section locale de $\mathcal{O}(m)$ autour de x.

Il n'est pas clair à priori si la théorie de [BGV04] peut être étendue à ce type de métriques. Nous montrons dans cet article qu'on peut encore leurs associer un opérateur Laplacien singulier qu'on notera par $\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}$. Nous prouvons qu'il possède encore un spectre noté $\mathrm{Spec}(\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty})$ que nous calculons explicitement. On notera que $\mathrm{Spec}(\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty})$ est discret, infini et positif.

On munit $\mathbb{P}^1$ l'espace projectif complexe de dimension 1 de la métrique associée à la forme volume singulière suivante

$$\omega_\infty=\frac{i}{2\pi}\frac{dz\wedge d\overline{z}}{\max(1,|z|)^4}$$

et $\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty$ le fibré en droites $\mathcal{O}(m)$ muni de sa métrique canonique, avec $m\geq 0$.

Soit $n\in\mathbb{Z}$ et J_n la fonction de Bessel d'ordre n. On commence dans un premier temps, par étudier $\Delta_{\overline{\mathcal{O}}_\infty}$. Grâce à la structure torique de $\mathbb{P}^1$ on fait le lien entre le spectre de $\Delta_{\overline{\mathcal{O}}_\infty}$ et celui de deux problèmes avec conditions aux bords classiques. Notre premier résultat s'énonce comme suit :

Théorème 1.1.1 (cf. Théorème (1.2.7)). *Pour tout $m\in\mathbb{Z}$ et tout $k\geq 1$ il existe des fonctions continues $\varphi^-_{(m,k)}$ et $\varphi^+_{(m,k)}$ sur $\mathbb{P}^1$ telles que $\forall\, f\in A^{0,0}(\mathbb{P}^1)$*

$$(\varphi^-_{(m,k)},\Delta_{\overline{\mathcal{O}}_\infty}f)_{L^2,\infty}=\frac{j^2_{m,k}}{4}(\varphi^-_{(m,k)},f)_{L^2,\infty},$$

$$(\varphi^+_{(m,k)},\Delta_{\overline{\mathcal{O}}_\infty}f)_{L^2,\infty}=\frac{j'^2_{m,k}}{4}(\varphi^+_{(m,k)},f)_{L^2,\infty},$$

où $j_{(m,k)}$ (resp. $j'_{(m,k)}$) est le k-ème zéro positif de J_n (resp. de J'_n), et que

$$\mathrm{Spec}(\Delta_{\overline{\mathcal{O}}_\infty})=\Big\{0\Big\}\bigcup\Big\{\frac{j^2_{m,k}}{4},\frac{j'^2_{n,l}}{4}\,\Big|\,n,m\in\mathbb{N},\quad k,l\geq 1\Big\},$$

Les valeurs propres $\frac{j^2_{m,k}}{4}$ et $\frac{j'^2_{n,l}}{4}$ pour $n>0$ et $m>0$ sont de multiplicité 2 et cette multiplicité vaut 1 pour les valeurs propres $\frac{j^2_{0,l}}{4}$ et $\frac{j'^2_{0,l}}{4}$.

Le cas de $\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}$ est ensuite traité d'une manière analogue. On commence par résoudre deux problèmes spectraux définis sur chaque composante connexe de $\mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{S}^1$, les solutions retenues ou admissibles pour notre problème seront un recollement des solutions des deux cotés de $\mathbb{S}^1$ satisfaisant à une condition de régularité le long de cette barrière. Le point délicat ici est de prouver que cet ensemble de solutions ainsi construites est total. Pour cela, on adapte et étend les techniques de la théorie des séries de Fourier-Bessel, cf. [Wat44, §.18] à notre situation, tout en développant en parallèle dans la section (1.3.1) les objets analogues à la théorie des séries de Fourier-Bessel. Plus précisément on introduit une classe de fonctions L_n, pour $n \in \mathbb{Z}$ qui joueront le rôle des fonctions de Bessel dans notre situation.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on introduit les ensembles suivants :

$$Z_n := \Big\{\lambda \in \mathbb{C} \,\Big|\, \frac{d}{dr}(r^{-m} J_n(r) J_{n-m}(r))_{|\lambda} = 0\Big\}.$$

Théorème 1.1.2 (cf. Théorème (1.3.6) et Théorème (1.3.7))**.** *On a, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$*

$$\mathrm{Spec}(\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}) = \Big\{0\Big\} \bigcup \Big\{\frac{\lambda^2}{4} \,\Big|\, \exists n \in \mathbb{N},\ \lambda \in Z_n\Big\}.$$

Si m est pair, alors la multiplicité de $\frac{\lambda^2}{4}$ est 2 si $\lambda \in Z_n$ avec $n \geq m+1$ ou $0 \leq n \leq \frac{m}{2} - 1$ et de multiplicité 1 si $\lambda \in Z_{\frac{m}{2}}$. Lorsque m est impair, alors $\frac{\lambda^2}{4}$ est de multiplicité 2 si $n \geq m+1$, égale à 1 si $0 \leq n \leq m$.

Ce calcul nous servira dans un autre article pour le calcul du déterminant régularisé de la fonction Zêta associée au spectre du Laplacien singulier $\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}$.

1.2 L'opérateur de Laplace-Beltrami canonique sur $\mathbb{P}^1$

1.2.1 L'opérateur de Laplace-Beltrami sur une surface de Riemann compacte

Soit (X, h_X) une surface de Riemann compacte avec h_X une métrique hermitienne de classe $\mathcal{C}^\infty$. On note par Δ_X le Laplacien associé à la donnée $\big((X, h_X); \overline{\mathcal{O}}_0\big)$, avec $\overline{\mathcal{O}_0}$ est le fibré en droites trivial muni d'une métrique triviale. Δ_X est appelé classiquement l'opérateur de Laplace-Beltrami.

On rappelle qu'un fibré en droites hermitien $\overline{L}$ sur une variété complexe compacte est dit intégrable s'il existe $\overline{L_1}$ et $\overline{L_2}$ deux fibrés en droites hermitiens dont les métriques sont limites uniformes de métriques positives de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur X et que $\overline{L} = \overline{L_1} \otimes \overline{L_2}^{-1}$.

Dans ce paragraphe on étend la construction du Laplacien Δ_X au cas des métriques intégrables sur TX. Lorsque h_X est $\mathcal{C}^\infty$ on sait que le Laplacien associé à cette métrique est donné localement par la formule suivante :

$$\Delta_X \beta = -h_X\Big(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-1} \frac{\partial^2 \beta}{\partial z \partial \overline{z}}, \quad \forall\, \beta \in A^{0,0}(X).$$

où $\{\frac{\partial}{\partial z}\}$ est une base locale de TX. On peut consulter [Jos06, définition 2.3.1 et définition 2.3.3].

Soit (X, h_X) une surface de Riemann compacte munie d'une métrique hermitienne intégrable h_X. Si h_X est continue, alors on va montrer qu'on peut associer à cette métrique un Laplacien Δ_X, en posant

$$\Delta_X = \overline{\partial}^{1*}_{\mathcal{O}} \overline{\partial}^{0}_{\mathcal{O}},$$

et on montre que

$$\Delta_X \beta = -h_X\Big(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-1} \frac{\partial^2 \beta}{\partial z \partial \overline{z}}, \quad \forall\, \beta \in A^{0,0}(X)$$

pour toute base locale $\{\frac{\partial}{\partial z}\}$ de TX. Afin d'étendre cette notion il suffit de vérifier que $\overline{\partial}_{\mathcal{O}}$ admet un adjoint pour la métrique L^2. Pour cela, on va rappeler la construction de l'opérateur Laplacien et on montrera que cette dernière ne dépend pas de la régularité de h_X.

Soit donc h_X une métrique hermitienne continue. On note par ω_X la forme de volume normalisée associée à h_X.

On dispose d'un isomorphisme naturel entre $\Omega^{1,0}(X)$ et $\Omega^{1,0}(X)^*$ donné par

$$\alpha \in \Omega_x^{0,1}(X) \longmapsto \Big(\beta \in \Omega_x^{0,1} \mapsto (\beta,\alpha)_x\Big) \in \Omega_x^{0,1}(X)^*, \forall\, x \in X.$$

Comme ω_X trivialise $\Omega^{1,1}(X)$ alors cette forme induit un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\Omega_x^{0,1}(X), \Omega_x^{1,1}(X)) \simeq \Omega_x^{1,0}(X), \forall\, x \in X.$$

Il existe donc pour $\alpha \in \Omega^{0,1}(X)$ fixé, un élément $\alpha' \in \Omega^{1,0}(X)$ tel que

$$\beta_x \wedge \alpha'_x = (\beta,\alpha)_x \omega_x, \forall\, \beta \in \Omega_x^{0,1}(X).$$

On note par $*$ l'application qui envoie α sur α'. Explicitons $*$: Soient β et α deux éléments de $\Omega^{0,1}(X)$, par une partition d'unité on peut supposer que $\beta = bd\overline{z}$ et $\alpha = ad\overline{z}$ où a et b sont deux fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur X, on a $(\beta,\alpha)_x = \frac{b(x)\overline{a(x)}}{h(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z})(x)}$ donc $(\beta,\alpha)_x\omega_x = b(x)\overline{a(x)}\frac{i}{2\pi}dz \wedge d\overline{z} = b(x)d\overline{z} \wedge (-\frac{i}{2\pi}\overline{a(x)}dz)$. On en déduit que

$$\begin{aligned} * : \Omega^{0,1}(X) &\longrightarrow \Omega^{1,0}(X) \\ \alpha &\longmapsto -\frac{i}{2\pi}\overline{\alpha}. \end{aligned}$$

D'un autre coté, on dispose d'un isomorphisme entre $\Omega^{0,0}(X)$ et $\Omega^{1,1}(X)$ qu'on notera aussi par $*$ tel que $*(g) = \overline{g}\omega$, $\forall\, g \in \Omega^{0,0}(X)$ et qui vérifie

$$(g,g')\omega = g \wedge *(g'), \forall\, g, g' \in \Omega^{0,0}(X).$$

Si l'on pose $\overline{\partial}_{\mathcal{O}}^{q*} = (-1)^q *^{-1} \overline{\partial}_{A^{1,0}(X)} *$ pour $q = 0, 1$, alors on vérifie que

$$\overline{\partial}_{\mathcal{O}}^{0*} s = 0,$$

et

$$(s, \overline{\partial}_{\mathcal{O}}^{*1} t)_{L^2} = (\overline{\partial}_{\mathcal{O}} s, t)_{L^2}$$

pour tout $s \in A^{0,0}(X)$ et $t \in A^{(0,1)}(X)$.

On définit le Laplacien associé à la métrique h_X en posant que

$$\Delta_X = \overline{\partial}_1 \overline{\partial}_0^* + \overline{\partial}_1^* \overline{\partial}_0.$$

On montre que Δ_X vérifie

$$(\Delta_X \alpha, \beta)_{L^2} = (\alpha, \Delta_X \beta)_{L^2}, \quad \forall\, \alpha, \beta \in A^{0,0}(X).$$

Montrons que

$$\Delta_X\beta = -h_X\Big(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-1}\frac{\partial^2\beta}{\partial z\partial\overline{z}} \quad \forall\,\beta\in A^{0,0}(X). \tag{1.1}$$

On a

$$\begin{aligned}
(\alpha,\Delta_X\beta)\omega_X &= (\alpha,(\overline{\partial}_1\overline{\partial}_0^*+\overline{\partial}_1^*\overline{\partial}_0)\beta)\omega_X\\
&= (\alpha,\overline{\partial}_1\overline{\partial}_0^*\beta)\omega_X+(\alpha,\overline{\partial}_1^*\overline{\partial}_0\beta)\omega_X\\
&= (\alpha,\overline{\partial}*^{-1}\overline{\partial}((\overline{\beta}\omega)))\omega_X+(\alpha,\overline{\partial}_1^*\overline{\partial}_0\beta)\omega_X\\
&= 0+(\alpha,\overline{\partial}_1^*\overline{\partial}_0\beta)\omega_X\\
&= -\alpha\wedge(\overline{\partial}_{\Omega^{1,0}(X)}*\overline{\partial}\beta)\\
&= \frac{i}{2\pi}\alpha\wedge(\overline{\partial}_{\Omega^{1,0}(X)}\frac{\partial\overline{\beta}}{\partial z}dz)\\
&= \frac{i}{2\pi}\alpha\wedge\frac{\partial^2\overline{\beta}}{\partial\overline{z}\partial z}(d\overline{z}\wedge dz)\\
&= \alpha\wedge(-\frac{\partial^2\overline{\beta}}{\partial\overline{z}\partial z})\frac{i}{2\pi}dz\wedge d\overline{z}\\
&= \alpha\wedge\Big(-h_X\Big(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-1}\frac{\partial^2\overline{\beta}}{\partial\overline{z}\partial z}\Big)\omega_X\\
&= \alpha\wedge\Big(*(-h_X\Big(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-1}\frac{\partial^2\beta}{\partial z\partial\overline{z}})\Big)\\
&= \alpha\wedge*(\Delta_X\beta).
\end{aligned}$$

On déduit que

$$\Delta_X\beta = -h_X\Big(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-1}\frac{\partial^2\beta}{\partial z\partial\overline{z}} \quad \forall\,\beta\in A^{0,0}(X). \tag{1.2}$$

Rappelons que, sur une variété riemannienne (X,g) de dimension réelle 2, le Laplacien Δ_g s'exprime en coordonnées locales par la formule suivante :

$$\Delta_g = \frac{1}{\sqrt{g}}\Big(\partial_x(\sqrt{g}g^{xx}\partial_x)+\partial_x(\sqrt{g}g^{xy}\partial_x)+\partial_y(\sqrt{g}g^{\theta x}\partial_y)+\partial_y(\sqrt{g}g^{yy}\partial_y)\Big).$$

où (x,y) est un système de coordonnées locales, voir par exemple [Jos06, (2.1.13) p.92].

Si l'on considère $]0,2\pi[\times\mathbb{R}^{+*}$ muni de la métrique :

$$g=(dr)^2+r^2(d\theta)^2,$$

alors $\sqrt{g}=r, g^{rr}=1$, $g^{r\theta}=0$, $g^{\theta r}=0$ et $g^{\theta\theta}=\frac{1}{r^2}$. Par suite

$$\Delta_{r,\theta}=\partial_r^2+\frac{1}{r}\partial_r+\frac{1}{r^2}\partial_\theta^2.$$

Sur $\mathbb{R}^{+*}\times\mathbb{S}^1$ muni de la métrique $g=dr^2+r^2d\theta$ on considère le changement de variables suivant :

$$s:=\frac{1}{r},\quad \theta:=\theta.$$

On cherche à exprimer $\Delta_{s,\theta}$, le Laplacien sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{S}^1$ muni de la métrique $g' := ds^2 + s^2 d\theta^2$, en fonction de $\Delta_{r,\theta}$. Montrons que

$$\Delta_{r,\theta} = s^4 \Delta_{s,\theta}. \tag{1.3}$$

Soit donc f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et de support compact sur $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{S}^1$ et on pose $g : (s,\theta) \mapsto g(s,\theta) := f(\frac{1}{s},\theta)$. On a

$$\frac{\partial g}{\partial s}(s) = -\frac{1}{s^2}\frac{\partial f}{\partial r}(\frac{1}{s}), \quad \frac{\partial^2 g}{\partial s^2}(s) = \frac{2}{s^3}\frac{\partial f}{\partial r}(\frac{1}{s}) + \frac{1}{s^4}\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}(\frac{1}{s}) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(s,\theta) = \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}(\frac{1}{s},\theta),$$

alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}(r,\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}(r,\theta) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}(r,\theta) = s^4\frac{\partial^2 g}{\partial s^2}(s,\theta) + s^3\frac{\partial g}{\partial s}(s,\theta) + s^2\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(s,\theta).$$

En d'autres termes, on a montré que

$$\Delta_{r,\theta} f = s^4 \Delta_{s,\theta} g. \tag{1.4}$$

1.2.2 Le spectre du Laplacien canonique sur $\mathbb{P}^1$

Comme $\mathrm{T}\mathbb{P}^1 \simeq \mathcal{O}(2)$, on munit $\mathbb{P}^1$ de la métrique canonique de $\mathcal{O}(2)$ et on note

$$\omega_\infty = \frac{i}{2\pi}\frac{dz \wedge d\overline{z}}{\max(1,|z|^2)^2},$$

la forme volume normalisée associée.

On dispose de deux métriques sur $A^{0,0}(\mathbb{P}^1)$:

$$\|u\|_{\sup} := \sup_{x\in\mathbb{P}^1} |u(x)|,$$

et la métrique L^2 définie par le produit hermitien suivant :

$$(u,v)_{L^2,\infty} := \int_{x\in\mathbb{P}^1} u(x)\overline{v(x)}\omega_\infty,$$

pour $u, v \in A^{0,0}(\mathbb{P}^1)$.

On note par H_0 le complété hilbertien de $A^{0,0}(\mathbb{P}^1)$ pour la métrique $\|\cdot\|_{L^2,\infty}$, c'est un espace de Hilbert, par construction.

On rappelle qu'un ensemble $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs orthogonaux deux à deux dans $\mathcal{H}$, un espace hilbertien, est dit total si et seulement si l'ensemble S formé des combinaisons linéaires finies $\sum_{k=1}^n a_k\varphi_k$ des φ_k est dense dans $\mathcal{H}$.

Proposition 1.2.1. *Une suite orthogonale $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de vecteurs d'un espace de Hilbert H est totale si et seulement si le vecteur nul est l'unique vecteur orthogonal à tous les ϕ_j.*

Démonstration. Voir par exemple [BR89, théorème 12, p.366]. □

Proposition 1.2.2. *Soit H un espace de Hilbert avec produit hermitien noté $(\cdot,\cdot)$.*

Soit $\Delta : D \subset H \longrightarrow H$ un opérateur linéaire, où D est un sous-espace linéaire dense de H. Soit $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une base orthonormale de H, et on suppose qu'il existe $0 \leq \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots$ une suite croissante de réels positifs tels que :

$$(\phi_k, \Delta\psi) = \lambda_k(\phi_k, \psi) \quad \forall\, \psi \in D,\ \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

On pose $H_2 := \{\psi = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\phi_k \in H | a_k \in \mathbb{C},\ \forall k \in \mathbb{C}, \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^2 |a_k|^2 < \infty\}$ et soit Q l'opérateur linéaire défini sur H_2 en posant :

$$Q(\psi) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k a_k \phi_k,$$

pour $\psi = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\phi_k \in H_2$.

Si $D \subset H_2$, alors Q est une extension maximale autoadjointe de Δ dans H.

Démonstration. Vérifions d'abord que Q est une extension de Δ, soit $\psi \in D$ et montrons que $Q(\psi) = \Delta(\psi)$. Il existe deux suites de nombres complexes $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telles que $\psi = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\phi_k$ et $\Delta\psi = \sum_{k=0}^{\infty} b_k\phi_k$. Donc, $\overline{b_k} = (\phi_k, \Delta\psi) = \lambda_k(\phi_k, \psi) = \lambda_k\overline{a_k}$, par suite $\Delta\psi = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k a_k \psi_k = Q(\psi)$.

Maintenant, soit $T : D' \subset H \longrightarrow H$ est un opérateur linéaire autoadjoint qui étend Q (c'est à dire $H_2 \subset D'$ et $T_{|D} = \Delta$). Soit $\psi \in D'$, il existe deux suites de nombres complexes $(a_k)_{k\in_N}$ et $(b_k)_{k\in_N}$ telles que $\psi = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\phi_k$ et $T\psi = \sum_{k\in\mathbb{N}} b_k\phi_k$. Comme T est autoadjoint, alors $(Tw, \psi) = (w, T\psi)$ pour tout $w \in D'$. En particulier, $(T\psi_k, \psi) = (\psi_k, T\psi)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On en tire que $\lambda_k\overline{a_k} = \overline{b_k}$. Par suite, $\sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_k^2|a_k|^2 = \sum_{k\in\mathbb{N}} |b_k|^2 < \infty$, donc $\psi \in H_2$. On a montré que $D' = H_2$.

□

Définition 1.2.3. *On appelle Laplacien canonique l'opérateur de Laplace-Beltrami associé à $(\mathbb{P}^1, \omega_\infty)$ et au fibré trivial tel que introduit dans le premier paragraphe. On le note par $\Delta_{\overline{\mathcal{O}}_\infty}$.*

Pour tout $f, g \in A^{(0,0)}(\mathbb{P}^1)$, on a

$$\Delta_{\overline{\mathcal{O}}_\infty} f = -\max(1, |z|^4)\frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}} f \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

$$(\Delta_{\overline{\mathcal{O}}_\infty} f, g)_{L^2,\infty} = (f, \Delta_{\overline{\mathcal{O}}_\infty} g)_{L^2,\infty},$$

et

$$\|\Delta_{\overline{\mathcal{O}}_\infty} f\|^2_{L^2,\infty} = \frac{i}{2\pi}\int_{\mathbb{C}} \max(1, |z|^4)\Big|\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \overline{z}}\Big|^2 dz \wedge d\overline{z}.$$

Comme f est $\mathcal{C}^\infty$, alors $\|\Delta_{\overline{\mathcal{O}}_\infty} f\|_{L^2,\infty} < \infty$. Par suite, $\Delta_{\overline{\mathcal{O}}_\infty}$ est un opérateur de $A^{(0,0)}(\mathbb{P}^1)$ vers H_0.

On note par $D_{\max}$ la fermeture pour l'ensemble $\{f \in A^{(0,0)}(\mathbb{P}^1) \,|\, \|\Delta_{\overline{\mathcal{O}}_\infty} f\|_{L^2,\infty} < \infty\}$ dans H_0, appelé domaine maximal de définition de $\Delta_{\overline{\mathcal{O}}_\infty}$. On a, $A^{(0,0)}(\mathbb{P}^1) \subset D_{\max}$.

On se propose dans la suite de déterminer le spectre de $\Delta_{\overline{\mathcal{O}}_\infty}$ qu'on notera par $\mathrm{Spec}(\Delta_{\overline{\mathcal{O}}_\infty})$. On va adopter la définition fonctionnelle pour parler d'un vecteur propre, c'est à dire que λ appartient à $\mathrm{Spec}(\Delta_{\overline{\mathcal{O}}_\infty})$ s'il existe $\varphi \in \mathcal{H}^{0,0}$, tel que

$$(\varphi, \Delta_{\overline{\mathcal{O}}_\infty} f)_{L^2,\infty} = \lambda(\varphi, f)_{L^2,\infty}, \quad \forall\, f \in A^{0,0}(\mathbb{P}^1). \tag{1.5}$$

Dans ce cas, on montre qu'il existe Q, une extension maximale autoadjointe de $\Delta_{\overline{\mathcal{O}}_\infty}$ dans H_0. C'est une application de la proposition (1.2.2), avec $H = H_0$, $\Delta = \Delta_{\overline{\mathcal{O}}_\infty}$ et $D = A^{(0,0)}(\mathbb{P}^1)$, il suffit juste de vérifier que $A^{(0,0)}(\mathbb{P}^1) \subset H_2$. On déduit que

$$D_{\max} = H_2.$$

Remarque 1.2.4. Il est important de noter que lorsque la métrique sur X, ici $\mathbb{P}^1$, est de classe $\mathcal{C}^\infty$ alors on démontre un résultat de régularité pour les vecteurs propres, en fait on prouve qu'ils sont des fonctions $\mathcal{C}^\infty$, voir [GH94, Ch. 6]. Comme on verra dans la suite, les vecteurs propres de $\Delta_{\overline{\mathcal{O}}_\infty}$ sont des fonctions continues mais non $\mathcal{C}^\infty$.

On va introduire deux sous-espaces remarquables dans H_0 et on remarquera que la restriction de $\Delta_{\overline{\mathcal{O}}_\infty}$ et son étude sur chacun de ces sous-espaces se traduit en un problème classique bien connu de la théorie des problèmes avec conditions aux bords, à savoir le problème $\mathcal{D}$ (resp. $\mathcal{N}$). Par un procédé de recollement, on exhibe des vecteurs propres au sens de (1.5) pour cet opérateur et en utilisant les résultat du la section (1.4.3) on conclut que ce sont les uniques vecteurs propres.

On pose

$$E_+ := \{u \in A^{0,0}(\mathbb{P}^1) \,|\, u(r,\theta) - u(\frac{1}{r},\theta) = 0\},$$

et

$$E_- := \{u \in A^{0,0}(\mathbb{P}^1) \,|\, u(r,\theta) + u(\frac{1}{r},\theta) = 0\}.$$

Ce sont deux sous $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de $A^{0,0}(\mathbb{P}^1)$. Remarquons que les fonctions constantes, qui sont bien dans $\mathcal{H}^{0,0}$, sont des vecteurs propres pour $\Delta_{\overline{\mathcal{O}}_\infty}$ associés à la valeur propre 0, et qu'elles appartiennent à E_+.

On note par $\overline{E}_+$ et $\overline{E}_-$ les complétés de E_+ et E_- pour la métrique $\|\cdot\|_{L^2,\infty}$.

Proposition 1.2.5. *On a*

$$\mathcal{H}^{0,0} = \overline{E}_+ \overset{\perp}{\bigoplus} \overline{E}_-$$

Démonstration. Commençons par montrer que

$$A^{0,0}(\mathbb{P}^1) = E_+ \overset{\perp}{\bigoplus} E_-.$$

Soient $u \in E_+$ et $v \in E_-$, on a

$$\begin{aligned}
(u,v)_{L^2,\infty} &= \int_{\mathbb{P}^1} u(x)\overline{v(x)}\omega_\infty \\
&= \frac{i}{2\pi}\int_{\mathbb{C}} u(z)\overline{v(z)}\frac{dz\wedge d\overline{z}}{\max(1,|z|^4)} \\
&= \frac{i}{2\pi}\Big(\int_{|z|\le 1} u(z)\overline{v(z)}dz\wedge d\overline{z} + \int_{|z|\ge 1} u(z)\overline{v(z)}\frac{dz\wedge d\overline{z}}{|z|^4}\Big) \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{r\le 1,\theta\in[0,2\pi]} u(r,\theta)\overline{v(r,\theta)}rdrd\theta + \frac{1}{\pi}\int_{r\ge 1,\theta\in[0,2\pi]} u(r,\theta)\overline{v(r,\theta)}\frac{rdrd\theta}{r^4}
\end{aligned}$$

Si l'on pose $s = \frac{1}{r}$ dans la seconde intégrale, alors

$$\frac{1}{\pi}\int_{r\ge 1,\theta\in[0,2\pi]} u(r,\theta)\overline{v(r,\theta)}\frac{rdrd\theta}{r^4} = \int_{s\le 1,\theta\in[0,2\pi]} u(\frac{1}{s},\theta)\overline{v(\frac{1}{s},\theta)}sdsd\theta$$

Par hypothèses sur u et v on trouve que

$$\begin{aligned}(u,v)_{L^2,\infty} &= \frac{1}{\pi}\int_{r\leq 1,\theta\in[0,2\pi]} u(r,\theta)\overline{v(r,\theta)}rdrd\theta - \frac{1}{\pi}\int_{s\leq 1,\theta\in[0,2\pi]} u(s,\theta)\overline{v(s,\theta)}sdsd\theta \\ &= 0\end{aligned}$$

Donc E_+ et E_- sont orthogonaux par rapport au produit scalaire $(\cdot,\cdot)_{L^2,\infty}$.

Si $w \in A^{0,0}(\mathbb{P}^1)$, on note par w_+ (resp. w_-) l'élément de E_+ (resp. de E_-) défini par $w_+(r,\theta) = \frac{1}{2}w(r,\theta) + \frac{1}{2}w(\frac{1}{r},\theta)$ (resp. $w_-(r,\theta) = \frac{1}{2}w(r,\theta) - \frac{1}{2}w(\frac{1}{r},\theta)$). On vérifie que

$$w = w_+ + w_-.$$

Soit maintenant $u \in \mathcal{H}^{0,0}$ alors il existe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions dans $A^{0,0}(\mathbb{P})$ telle que

$$\|u_n - u\|_{L^2,\infty} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_{+,n}(r,\theta) := \frac{1}{2}u_n(r,\theta) + \frac{1}{2}u_n(\frac{1}{r},\theta) \quad \text{et} \quad u_{-,n}(r,\theta) := \frac{1}{2}u_n(r,\theta) - \frac{1}{2}u_n(\frac{1}{r},\theta),$$

alors

$$\|u_{+,n} - u_{+,m}\|_{L^2,\infty} \leq \|u_n - u_m\|_{L^2,\infty} \quad \text{et} \quad \|u_{-,n} - u_{-,m}\|_{L^2,\infty} \leq \|u_n - u_m\|_{L^2,\infty} \quad \forall\, n,m \in \mathbb{N},$$

d'où on déduit que $(u_{+,n})_{n\in\mathbb{N}}$ (resp. $(u_{-,n})_{n\in\mathbb{N}}$) admet une limite dans $\mathcal{H}^{0,0}$ qu'on notera par u_+ (resp. u_-) qui appartient à $\overline{E}^+$ (resp. $\overline{E}^-$) car $\overline{E}^+$ et $\overline{E}^-$ sont fermés par construction. Comme la limite est unique, alors on a

$$u = u_+ + u_-.$$

□

Fixons $m \in \mathbb{Z}$, $k \geq 1$ et $l \geq 1$. Avec les notations de la section (1.4.2), on pose

$$\psi^-_{(m,k)}(r) = J_m(j_{m,k}r) \quad \text{et} \quad \psi^+_{(m,k)}(r) = J_m(j'_{m,l}r).$$

Ces deux fonctions vérifient les conditions du (1.36) donc on peut leur associer les fonctions $\varphi^\pm_{1,(m,k)}$ et $\varphi^\pm_{2,(m,k)}$ comme dans (1.37). Par conséquent, $\varphi^\pm_{1,(m,k)}$ et $\varphi^\pm_{2,(m,k)}$ vérifient le lemme (1.4.2).

On pose alors,

$$\varphi^-_{(m,k)}(z) := \begin{cases} \varphi^-_{1,(m,k)}(z) & \text{si } |z| \leq 1 \\ \varphi^-_{2,(m,k)}(z) & \text{si } |z| > 1, \end{cases}$$

et

$$\varphi^+_{(m,k)}(z) := \begin{cases} \varphi^+_{1,(m,k)}(z) & \text{si } |z| \leq 1 \\ \varphi^+_{2,(m,k)}(z) & \text{si } |z| > 1. \end{cases}$$

Proposition 1.2.6. *Pour tout $m \in \mathbb{Z}$ et tout $k \geq 1$, on a*

$$\varphi^-_{(m,k)} \in \overline{E}^- \quad \textit{et} \quad \varphi^+_{(m,k)} \in \overline{E}^+.$$

Démonstration. Commençons par vérifier que $\mathcal{H}^{0,0}$ contient les fonctions continues. Soit donc u une fonction continue sur $\mathbb{P}^1$. Par le théorème de Stone-Weierstrass, on peut approximer u par une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ pour la norme $\|\cdot\|_{\sup}$ sur $\mathbb{P}^1$ et comme on a

$$\|v\|^2_{L^2,\infty} \leq (\int_{\mathbb{P}^1} \omega_\infty)\|v\|^2_{\sup}$$

pour toute fonction continue v sur $\mathbb{P}^1$, on conclut que $\mathcal{H}^{0,0}$ contient les fonctions continues.

Montrons que $\varphi^+_{(m,k)} \in \mathcal{H}^{0,0}$ (resp. $\varphi^-_{(m,k)} \in \mathcal{H}^{0,0}$), pour cela il suffit de montrer qu'elle est continue sur $\mathbb{P}^1$. Par hypothèses et par construction, cette fonction est continue sur $\mathbb{P}^1 \setminus \{0,\infty\}$.

Si $m \neq 0$. Au voisinage de zéro, on a $|\varphi^\pm_{(m,k)}(z)| = O(r^m)$ et en ∞, $|\varphi^\pm_{(m,k)}(z)| = O(\frac{1}{r^m})$, (rappelons que J_m est d'ordre m en zéro), voir (1.40).

Si $m = 0$, $\varphi^-_{(0,k)}(z) = J_0(j_{0,k}|z|)$ au voisinage de zéro, $\varphi^-_{(0,k)}(z) = J_0(j_{0,k}\frac{1}{|z|})$ au voisinage de ∞, de même on a $\varphi^+_{(0,k)}(z) = J_0(c_{0,k}|z|)$ au voisinage de zéro, $\varphi^+_{(0,k)}(z) = J_0(c_{0,k}\frac{1}{|z|})$ au voisinage de ∞.

Par suite, $\varphi^\pm_{(m,k)}$ est continue sur $\mathbb{P}^1$ donc c'est un élément de $\mathcal{H}^{0,0}$.

Par construction, on vérifie que

$$\varphi^+_{(m,k)}(\frac{1}{r},\theta) = \varphi^+_{(m,k)}(r,\theta) \text{ et } \quad \varphi^-_{(m,k)}(\frac{1}{r},\theta) = -\varphi^-_{(m,k)}(r,\theta) \quad \forall\, r>0, \forall\, \theta \in \mathbb{R}.$$

On conclut que

$$\varphi^+_{(m,k)} \in \overline{E}^+,$$

et

$$\varphi^-_{(m,k)} \in \overline{E}^-.$$

□

Théorème 1.2.7. *Pour tout $m \in \mathbb{Z}$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a*

$$(\varphi^-_{(m,k)}, \Delta_{\overline{\mathcal{O}}_\infty} f)_{L^2,\infty} = \frac{j^2_{m,k}}{4}(\varphi^-_{(m,k)}, f)_{L^2,\infty}, \quad \forall\, f \in A^{0,0}(\mathbb{P}^1), \tag{1.6}$$

$$(\varphi^+_{(m,k)}, \Delta_{\overline{\mathcal{O}}_\infty} f)_{L^2,\infty} = \frac{j'^2_{m,k}}{4}(\varphi^+_{(m,k)}, f)_{L^2,\infty}, \quad \forall\, f \in A^{0,0}(\mathbb{P}^1) \tag{1.7}$$

et

$$\mathrm{Spec}(\Delta_{\overline{\mathcal{O}}_\infty}) = \Big\{0\Big\} \bigcup \Big\{\frac{j^2_{m,k}}{4}, \frac{j'^2_{n,l}}{4} \,\Big|\, n,m \in \mathbb{N}, \quad k,l \geq 1\Big\},$$

où $\frac{j^2_{n,k}}{4}$ (resp. $\frac{j'^2_{n,k}}{4}$) est de multiplicité 2 si $n > 0$, et de multiplicité 1 quand $n = 0$.

Démonstration. Fixons quelques notations : On pose $z := \frac{x_1}{x_0}$ sur $\mathbb{C}$, on note par Δ_0 ou $\Delta_{r,\theta}$ est l'opérateur de Laplace-Beltrami sur $\mathbb{R}^2$ écrit respectivement en coordonnées cartésiennes et polaires ; $\Delta_0 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ et $\Delta_{r,\theta} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$, avec $x = \mathrm{Re}(z)$, $y = \mathrm{Im}(z)$ et $z = |z|e^{i\theta} = re^{i\theta}$.

Rappelons que $d^c = \frac{1}{4\pi i}(\partial - \overline{\partial})$, donc

$$dd^c = \frac{1}{2\pi i}\frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}} dz \wedge d\overline{z}, \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}} = \frac{1}{4}(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}) = \frac{1}{4}\Delta_0.$$

L'idée de la preuve de (1.6) et de (1.7) consiste en premier temps à utiliser les résultats de l'annexe (1.4.1) appliqués aux fonctions $\varphi^+_{(m,k)}$ et $\varphi^-_{(m,k)}$ pour prouver que

$$(\varphi^+_{(m,k)}, \Delta_{\overline{\mathcal{O}}_\infty} f)_{L^2,\infty} = (\Delta_{\overline{\mathcal{O}}_\infty}\varphi^+_{(m,k)}, f)_{L^2,\infty}, \quad (\varphi^-_{(m,k)}, \Delta_{\overline{\mathcal{O}}_\infty} f)_{L^2,\infty} = (\Delta_{\overline{\mathcal{O}}_\infty}\varphi^-_{(m,k)}, f)_{L^2,\infty},$$

$\forall\, f \in A^{(0,0)}(\mathbb{P}^1)$, où $\Delta_{\overline{\mathcal{O}}_\infty}\varphi^\pm_{(m,k)}$ est par définition la fonction définie en tout point $z \in \mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{S}^1$ par

$$-\max(1, |z|^4)\frac{\partial^2 \varphi^\pm_{(m,k)}}{\partial z \partial \overline{z}}(z),$$

et de conclure en montrant que sur $\mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{S}^1$ on a

$$\Delta_{\overline{\mathcal{O}}_\infty}\varphi^\pm_{(m,k)} = \frac{\lambda^2_\pm}{4}\varphi^\pm_{(m,k)}.$$

où $\lambda^2_- := j^2_{(m,k)}$ et $\lambda^2_+ := j'^2_{(m,k)}$. (Notons qu'ici l'égalité est au sens des fonctions).

Soit $f \in A^{0,0}(X)$, on a

$$\begin{aligned}
(\varphi^\pm_{(m,k)}, \Delta_{\overline{\mathcal{O}}_\infty} f)_{L^2,\infty} &= -\int_{\mathbb{C}} \varphi \frac{\partial^2 \overline{f}}{\partial \overline{z}\partial z}\frac{i}{2\pi} dz \wedge d\overline{z} \quad \text{par} \quad (1.2)\\
&= \int_{\mathbb{C}} \varphi^\pm_{(m,k)} dd^c \overline{f}\\
&= \int_{|z|\le 1} \varphi^\pm_{1,(m,k)} dd^c\overline{f} + \int_{|z|\ge 1} \varphi^\pm_{2,(m,k)} dd^c \overline{f}\\
&= \int_{|z|\le 1} \overline{f} dd^c \varphi^\pm_{1,(m,k)} + \int_{|z|\ge 1} \overline{f} dd^c \varphi^\pm_{2,(m,k)} \quad \text{par} \quad (1.4.3)\\
&= (\Delta_{\overline{\mathcal{O}}_\infty}\varphi^\pm_{(m,k)}, f)_{L^2,\infty}.
\end{aligned}$$

Avec les notations du début de la démonstration, on a :

Sur $\{|z| \le 1\}$:

$$-\Delta_0 \varphi^-_{1,(m,k)} = j^2_{m,k}\varphi^-_{1,(m,k)} \quad \text{et} \quad -\Delta_0\varphi^+_{1,(m,k)} = j'^2_{m,k}\varphi^+_{1,(m,k)} \quad \text{par (1.4.5).} \tag{1.8}$$

Si l'on pose sur $\{|z| \ge 1\}$ $s := \frac{1}{r}$ et $\widetilde{\varphi}^\pm_{2,(m,k)}(s,\theta) := \widetilde{\varphi}^\pm_{2,(m,k)}(\frac{1}{s},\theta)$, alors par (1.3) on a

$$-\Delta_{r,\theta}\varphi^-_{2,(m,k)} = -s^4\Delta_{s,\theta}\widetilde{\varphi}^-_{2,(m,k)} \quad \text{et} \quad -\Delta_{r,\theta}\varphi^+_{2,(m,k)} = -s^4\Delta_{s,\theta}\widetilde{\varphi}^+_{2,(m,k)}$$

Mais par construction, on a

$$\widetilde{\varphi}^\pm_{2,(m,k)}(s,\theta) = \pm\varphi^\pm_{1,(m,k)}(s,\theta), \quad \forall\, 0 \le s \le 1,$$

qui nous donne que

$$\begin{aligned}
-\Delta_{r,\theta}\varphi^-_{2,(m,k)} &= +s^4\Delta_{s,\theta}\varphi^-_{1,(m,k)}\\
&= -j^2_{m,k}s^4\varphi^-_{1,(m,k)}(s,\theta) \quad \text{par} \quad (1.4.5),\\
&= j^2_{m,k}\frac{1}{r^4}\varphi^-_{2,(m,k)}(r,\theta),
\end{aligned} \tag{1.9}$$

et

$$\begin{aligned}
-\Delta_{r,\theta}\varphi^{+}_{2,(m,k)} &= -s^4\Delta_{s,\theta}\varphi^{+}_{1,(m,k)} \\
&= j'^2_{m,k}s^4\varphi^{+}_{1,(m,k)}(s,\theta) \quad \text{par} \quad (1.4.5), \\
&= j'^2_{m,k}\frac{1}{r^4}\varphi^{+}_{2,(m,k)}(r,\theta)
\end{aligned} \tag{1.10}$$

On a par conséquent

$$\begin{aligned}
(\Delta_{\overline{\mathcal{O}}_\infty}\varphi^{\pm}_{(m,k)}, f)_{L^2,\infty} &= \frac{i}{2\pi}\int_{|z|\leq 1}\overline{f}\frac{\partial^2}{\partial z\partial\overline{z}}\varphi^{\pm}_{1,(m,k)}dz\wedge d\overline{z} + \frac{i}{2\pi}\int_{|z|\geq 1}\overline{f}\frac{\partial^2}{\partial z\partial\overline{z}}\varphi^{\pm}_{2,(m,k)}dz\wedge d\overline{z} \\
&= -\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1\overline{f}\Delta_{r,\theta}\varphi^{\pm}_{1,(m,k)}rdrd\theta + -\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_1^{\infty}\overline{f}\Delta_{s,\theta}\varphi^{\pm}_{2,(m,k)}sdsd\theta \\
&= -\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1\overline{f}\Delta_{r,\theta}\varphi^{\pm}_{1,(m,k)}rdrd\theta - \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_1^{\infty}\overline{f}\Delta_{s,\theta}\varphi^{\pm}_{2,(m,k)}sdsd\theta \\
&= \frac{\lambda^2_\pm}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1\overline{f}\varphi^{\pm}_{1,(m,k)}rdrd\theta - \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_1^{\infty}\overline{f}r^4\Delta_{r,\theta}\varphi^{\pm}_{1,(m,k)}\frac{dr}{r^3}d\theta \quad \text{par } (1.8) \\
&= \frac{\lambda^2_\pm}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1\overline{f}\varphi^{\pm}_{1,(m,k)}rdrd\theta + \frac{\lambda^2}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1\overline{f}r^4\varphi^{\pm}_{1,(m,k)}\frac{dr}{r^3}d\theta \quad \text{par } (1.9), (1.10) \\
&= \frac{\lambda^2_\pm}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1\overline{f}\varphi^{\pm}_{1,(m,k)}rdrd\theta + \frac{\lambda^2}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_1^{\infty}\overline{f}\frac{1}{s^4}\varphi^{\pm}_{2,(m,k)}sdsd\theta \quad \text{par } (1.9), (1.10) \\
&= \frac{\lambda^2_\pm}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\overline{f}\varphi^{\pm}_{(m,k)}\frac{1}{\max(1,r^4)}rdrd\theta \\
&= \frac{\lambda^2_\pm}{4}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\overline{f}\varphi^{\pm}_{(m,k)}\frac{1}{\max(1,r^4)}\frac{1}{\pi}rdrd\theta \\
&= \frac{\lambda^2_\pm}{4}\int_{\mathbb{C}}\overline{f}\varphi^{\pm}_{(m,k)}\frac{i}{2\pi}\frac{1}{\max(1,|z|^4)}dz\wedge d\overline{z} \\
&= \frac{\lambda^2_\pm}{4}\int_{\mathbb{C}}\overline{f}\varphi^{\pm}_{(m,k)}\frac{i}{2\pi}h_{\mathbb{P}^1,\infty}dz\wedge d\overline{z} \\
&= \frac{\lambda^2_\pm}{4}\int_{\mathbb{C}}\overline{f}\varphi^{\pm}_{(m,k)}\omega_\infty \\
&= \frac{\lambda^2_\pm}{4}(\varphi^{\pm}_{(m,k)}, f)_{L^2,\infty}.
\end{aligned}$$

Récapitulons, on a montré que

$$(\varphi^{-}_{(m,k)}, \Delta_{\overline{\mathcal{O}}_\infty}f)_{L^2,\infty} = \frac{j^2_{m,k}}{4}(\varphi^{-}_{m,k}, f)_{L^2,\infty},$$

et

$$(\varphi^{+}_{(m,k)}, \Delta_{\overline{\mathcal{O}}_\infty}f)_{L^2,\infty} = \frac{j'^2_{m,k}}{4}(\varphi^{+}_{m,k}, f)_{L^2,\infty}.$$

$\forall\, f \in A^{0,0}(\mathbb{P}^1)$.

Donc

$$\Big\{0\Big\}\bigcup\Big\{\frac{j^2_{m,k}}{4}, \frac{j'^2_{n,l}}{4}\,\Big|\, n,m\in\mathbb{Z}, \quad k,l\geq 1\Big\} \subset \mathrm{Spec}(\Delta_{\overline{\mathcal{O}}_\infty}).$$

Montrons l'inclusion inverse, pour cela, on va montrer que l'ensemble

$$\Big\{1, \varphi^-_{(m,k)}, \varphi^+_{(m,k)} \,|\, m \in \mathbb{Z},\, k \geq 1\Big\},$$

est total, où 1 est la fonction constante sur $\mathbb{P}^1$ égale à 1.

Commençons par vérifier que c'est une suite orthogonale ; par (1.2.5) et (1.2.6)

$$(\varphi^+_{(m,k)}, \varphi^-_{(m',k')})_{L^2,\infty} = 0, \quad \forall\, m, m' \in \mathbb{Z},\ \forall\, k, k' \in \mathbb{N}.$$

Pour montrer

$$(1, \varphi^+_{(m,k)})_{L^2,\infty} = (1, \varphi^-_{(m,k)})_{L^2,\infty} \quad \forall\, m \in \mathbb{Z}, \forall\, k \in \mathbb{N},$$

il suffit d'utiliser (1.6) et (1.7) avec $f = 1$.

Il reste donc à vérifier que $(\varphi^\pm_{(m,k)}, \varphi^\pm_{(m',k')})_{L^2,\infty} = 0$ pour tous $\forall\, m \neq m' \in \mathbb{Z}$ ou $k \neq k' \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}
(\varphi^\pm_{(m,k)}, \varphi^\pm_{(m',k')})_{L^2,\infty} &= \int_{\mathbb{C}} \varphi^\pm_{(m,k)}(z)\overline{\varphi^\pm_{(m',k')}(z)}\frac{i}{2\pi}\frac{dz \wedge d\overline{z}}{\max(1, |z|^4)} \\
&= \frac{i}{2\pi}\Big(\int_{|z|\leq 1} \varphi^\pm_{1,(m,k)}(z)\overline{\varphi^\pm_{1,(m',k')}(z)}dz \wedge d\overline{z} + \int_{|z|\geq 1} \varphi^\pm_{2,(m,k)}(z)\overline{\varphi^\pm_{2,(m',k')}(z)}\frac{dz \wedge d\overline{z}}{|z|^4}\Big) \\
&= 2\int_{r\leq 1, \theta\in[0,2\pi]} e^{im\theta} J_m(\lambda_{\pm,(m,k)} r) e^{-im'\theta} J_{m'}(\lambda_{\pm,(m',k')} r) r dr d\theta \\
&+ \int_{s\geq 1, \theta\in[0,2\pi]} e^{im\theta} J_m(\lambda_{\pm,(m,k)} \frac{1}{s}) e^{-im'\theta} J_{m'}(\lambda_{\pm,(m',k')} \frac{1}{s}) \frac{2s ds}{s^4} d\theta \\
&= 4\int_{r\leq 1, \theta\in[0,2\pi]} e^{i(m-m)'\theta} J_m(\lambda_{\pm,(m,k)} r) J_{m'}(\lambda_{\pm,(m',k')} r) r dr d\theta \\
&= 4\delta_{m,m'} \int_{r\leq 1} J_m(\lambda_{\pm,(m,k)} r) J_{m'}(\lambda_{\pm,(m',k')} r) r dr \\
&= 4\delta_{m,m'}\delta_{k,k'} \int_{r\leq 1} J_m(\lambda_{\pm,(m,k)} r)^2 r dr.
\end{aligned}$$

la dernière égalité résulte de l'identité (1.22) ou voir, par exemple, [WW62, (18., 19.) p.381].

Donc, on a montré que $\Big\{1, \varphi^+_{(m,k)},\, \varphi^-_{(m,k)} \,|\, m \in \mathbb{Z},\, k \geq 1\Big\}$ est une famille orthogonale pour le produit hermitien $(,)_{L^2,\infty}$.

On pose

$$V^- := \overline{Vect_{\mathbb{C}}\{\varphi^-_{m,k} \,|\, m \in \mathbb{Z}, k \geq 1\}},$$

et

$$V^+ := \overline{Vect_{\mathbb{C}}\{1,\, \varphi^+_{m,k} \,|\, m \in \mathbb{Z}, k \geq 1\}},$$

(où la barre désigne la complétion hilbertienne dans H_0).

On se propose de montrer

$$E^- \subset V^- \text{ et } \quad E^+ \subset V^+.$$

On considère l'application de restriction suivante, induite par l'inclusion $D \subset \mathbb{P}^1$:

$$\begin{aligned}
p : A^{(0,0)}(\mathbb{P}^1) &\longrightarrow \mathcal{C}^2(D) \\
u &\longrightarrow u_{|_D}.
\end{aligned}$$

Par construction de E^+ et E^-, on trouve que

$$p(E^-) \subset \{v \in \mathcal{C}^2(D) \,|\, v(1,\theta) = 0, \, \forall\, \theta \in [0, 2\pi]\},$$

et

$$p(E^+) \subset \{v \in \mathcal{C}^2(D) \,|\, \frac{\partial v}{\partial r}(1,\theta) = 0, \, \forall\, \theta \in [0, 2\pi]\}.$$

En d'autres termes, les éléments de $p(E^+)$ (resp. de $p(E^-)$) vérifient la condition de Dirichlet (resp. de Neumann) sur D. On va utiliser la discussion du paragraphe (1.4.3) pour montrer que

$$E^- \subset V^-.$$

Soit $u \in E^-$, alors $u_{|_D}$ vérifie la condition de Dirichlet. Par (1.4.3) $u_{|_D}$ sur D se décompose comme suit : il existe des coefficients d_λ indexés par $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ telles que

$$u_{|_D} = \sum_{(m,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*} d_{m,k} \varphi^-_{1(m,k)_{|_D}},$$

dans $L^2(D)$: l'espace des fonctions carrées intégrables pour la mesure $rdrd\theta$.

Montrons que l'égalité ci-dessus reste valable sur $\mathbb{P}^1$ entier. Il suffit de la vérifier sur $\{|z| \geq 1\}$. Soit $r \geq 1$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{(m,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*} d_{m,k} \varphi^-_{(m,k)}(r,\theta) &= - \sum_{(m,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*} d_{m,k} \varphi^-_{(m,k)}(\frac{1}{r},\theta) \\
&= -u(\frac{1}{r},\theta) \\
&= u(r,\theta).
\end{aligned}$$

Par suite

$$E^- \subset V^-.$$

Montrons que

$$E^+ \subset V^+.$$

Soit $v \in E^+$, on considère sa restriction à D, il existe des constantes réelles $e_{d,k}$ telles que

$$v = e_{0,0} + \sum_{(m,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*} e_{m,k} \varphi^+_{1,(m,k)}$$

sur $L^2(D)$. Il reste à vérifier cette égalité sur $\{|z| \geq 1\}$. Soit $r \geq 1$, on a

$$\begin{aligned}
e_{0,0} + \sum_{(m,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*} e_{m,k} \varphi^+_{(m,k)}(r,\theta) &= e_{0,0} + \sum_{(m,k)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*} e_{m,k} \varphi^+_{(m,k)}(\frac{1}{r},\theta) \\
&= u(\frac{1}{r},\theta) \\
&= u(r,\theta)
\end{aligned}$$

et donc,

$$E^+ \subset V^+.$$

De (1.2.5) et d'après ce qu'on vient de montrer on a

$$H_0 = \overline{V^+ \oplus V^-}.$$

Par (1.2.1) on déduit que l'ensemble

$$\Big\{1, \varphi^{\pm}_{(m,k)} \,|\, m \in \mathbb{Z},\, k \geq 1\Big\},$$

(où 1 est la fonction constante égale à 1) est un système total dans H_0 muni de la métrique L^2_∞.

On a donc montré que

$$\mathrm{Spec}(\Delta_{\overline{\mathcal{O}}_\infty}) = \Big\{0\Big\} \cup \Big\{\frac{j^2_{m,k}}{4}, \frac{j'^2_{n,l}}{4} \,\Big|\, n, m \in \mathbb{Z} \,\mathrm{et}\, k, l \geq 1\Big\}.$$

□

1.3 Le Laplacien canonique de $\mathcal{O}(m)$ pour $m \geq 1$

Soit f un élément de $A^{0,0}(\mathbb{P}^1)$. Comme $\{1, \varphi^{\pm}_{(m,k)} \,|\, m \in \mathbb{Z}, k \geq 1\}$ est complet, alors f se décompose dans le complété de $A^{0,0}(\mathbb{P}^1)$ comme suit :

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}_n e^{in\theta}, \tag{1.11}$$

où $(\widehat{f}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sont des fonctions sur $\mathbb{P}^1$ invariantes par $\mathbb{S}^1$.

On suppose qu'il existe un opérateur D, agissant sur $A^{(0,0)}(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(m))$ et une métrique L^2 tels que :

1. Si f et g sont de fonctions intégrables sur $\mathbb{P}^1$ invariantes par $\mathbb{S}^1$ et $l, l' \in \mathbb{Z}$ on a

   $$(f(r)e^{il\theta}, g(r)e^{il'\theta})_{L^2} = 0,$$

   si $l \neq l'$.
2. D autoadjoint pour ce produit $(\cdot,\cdot)_{L^2}$.
3. pour toute fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ radiale g et tout $l \in \mathbb{Z}$ et $k' \in \{0, 1, \ldots, m\}$:

   $$D\Big(g(r)e^{il\theta} \otimes z^{k'}\Big) = G(r)e^{il\theta} \otimes z^{k'}. \tag{1.12}$$

   dans le completé de $A^{(0,0)}(X, \mathbb{P}^1)$ pour L^2, où G une fonction radiale sur $\mathbb{P}^1$.

Si v est un vecteur propre associé à une valeur propre qu'on note λ, alors on peut supposer que $v = f \otimes 1$ où f est une fonction sur $\mathbb{P}^1$. En effet, il existe $f_0, f_1, \ldots, f_m \in A^{0,0}(\mathbb{P}^1)$ telles que $v = \sum_{k=0}^m f_k \otimes z^k$, alors si l'on pose $f := \sum_{k=0}^m f_k z^k$ alors on vérifie que $D(f \otimes 1) = \lambda(f \otimes 1)$.

Par ce qui précède, $f_1, \ldots, f_m$ peut s'écrire sous la forme (1.11), on peut donc écrie f sous la forme (1.11). Dans la suite, on va montrer que f peut s'écrire sous la forme $f_1(r)f_2(\theta)$.

Soit donc $f \otimes z^k$ un vecteur propre associé à la valeur propre λ, on a

$$(f \otimes z^k, D(g_l \otimes z^{k'}))_{L^2} = \lambda (f \otimes z^k, g_l \otimes z^{k'})_{L^2}, \tag{1.13}$$

pour toute fonction de la forme $g_l = g e^{il\theta}$ telle que g est radiale, de classe $\mathcal{C}^\infty$ et pour tout $l \in \mathbb{Z}$ et $k' \in \{0, 1, \ldots, m\}$.

Comme f se décompose sous la forme suivante $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}_n e^{in\theta}$ et par la remarque (1.12), (3.43) devient

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} (\widehat{f}_n e^{in\theta} \otimes z^k, G_l(r) e^{il\theta} \otimes z^{k'})_{L^2} = \lambda \sum_{n\in\mathbb{Z}} (\widehat{f}_n e^{in\theta} \otimes z^k, g_l(r) e^{il\theta} \otimes z^{k'})_{L^2}.$$

Il en découle que

$$(\widehat{f}_{k'-k+l} e^{i(k'-k+l)\theta} \otimes z^k, G_l(r) e^{il\theta} \otimes z^{k'})_{L^2} = \lambda (\widehat{f}_{k'-k+l} e^{i(k'-k+l)\theta} \otimes z^k, g(r) e^{il\theta} \otimes z^{k'})_{L^2},$$

c'est à dire

$$(\widehat{f}_{k'-k+l} e^{i(k'-k+l)\theta} \otimes z^k, D(g_l \otimes z^{k'}))_{L^2,\infty} = \lambda (\widehat{f}_{k'-k+l} e^{i(k'-k+l)\theta} \otimes z^k, g_l \otimes z^{k'})_{L^2}.$$

On en déduit que

$$\widehat{f}_{k'-k+l}(r) e^{i(k'-k+l)\theta} \otimes z^k,$$

est un vecteur propre associé à la valeur propre λ.

Soit $(\mathbb{P}^1, \omega_\infty)$ l'espace $\mathbb{P}^1$ muni de la métrique canonique et $\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty = (\mathcal{O}(m), h_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty})$ muni de sa métrique canonique. On munit $A^{(0,0)}(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(m))$ de la métrique L^2_∞. Rappelons qu'elle est donnée par :

$$(f \otimes \sigma, g \otimes \tau)_{L^2,\infty} = \int_{\mathbb{P}^1} f \overline{g}\, h_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}(\sigma, \tau) \omega_\infty,$$

pour tous $f, g \in A^{(0,0)}(\mathbb{P}^1)$ et $\sigma, \tau \in H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(m))$, et on note par $\overline{A^{(0,0)}(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(m))}_{L^2,\infty}$ le completé de $A^{(0,0)}(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(m))$ pour cette métrique.

On va définir un opérateur linéaire sur $A^{(0,0)}(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(m))$ à valeurs dans $\overline{A^{(0,0)}(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(m))}_{L^2,\infty}$ associé aux métriques canoniques, qui étend la définition du Laplacien classique. Soit $f \in A^{(0,0)}(\mathbb{P}^1)$ et $k \in \{0, \ldots, m\}$. On a $h_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}(z^k, z^k)(z) = \frac{|z|^{2k}}{\max(1,|z|)^{2m}}$, $\forall z \in \mathbb{C}$, alors cette fonction est invariante par $\mathbb{S}^1$, $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux et ses dérivées sont bornées localement. On pose, alors

$$\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}(f \otimes z^k) = -h_{\overline{T\mathbb{P}^1}_\infty}(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z})^{-1} h_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}(z^k, z^k)^{-1} \frac{\partial}{\partial z}\Big(h_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}(z^k, z^k) \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\Big) \otimes z^k,$$

si $z \in \mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{S}^1$, et sur $\mathbb{S}^1$ on pose

$$\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}(f \otimes z^k) = -h_{\overline{T\mathbb{P}^1}_\infty}(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z})^{-1} \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \overline{z}} \otimes z^k - h_{\overline{T\mathbb{P}^1}_\infty}(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z})^{-1} \frac{k}{2z} \otimes z^k.$$

Montrons que $\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}(f \otimes z^k) \in \overline{A^{(0,0)}(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(m))}_{L^2,\infty}$, c'est à dire $\|\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}(f \otimes z^k)\|_{L^2,\infty} < \infty$.

On a,

$$\begin{aligned}
\|\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}(f\otimes z^k)\|^2_{L^2,\infty} &= \frac{i}{2\pi}\int_{\mathbb{P}^1\setminus\mathbb{S}^1} h_{\overline{T\mathbb{P}^1}_\infty}(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z})^{-1} h_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}(z^k,z^k)^{-1}\Big|\frac{\partial}{\partial z}\Big(h_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}(z^k,z^k)\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\Big)\Big|^2 dz\wedge d\overline{z}\\
&= \frac{i}{2\pi}\int_{\mathbb{P}^1\setminus\mathbb{S}^1} \max(1,|z|^4)\max(|z|^{-2k},|z|^{2m-2k})\Big|\frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{|z|^{2k}}{\max(1,|z|^{2m})}\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\Big)\Big|^2 dz\wedge d\overline{z}\\
&= \frac{i}{2\pi}\int_{|z|<1} |z|^{-2k}\Big|\frac{\partial}{\partial z}\Big(|z|^{2k}\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\Big)\Big|^2 dz\wedge d\overline{z}\\
&+ \frac{i}{2\pi}\int_{|z|>1} |z|^{4+2m-2k}\Big|\frac{\partial}{\partial z}\Big(|z|^{2k-2m}\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\Big)\Big|^2 dz\wedge d\overline{z}.
\end{aligned}$$

Comme f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{P}^1$, alors on vérifie que $\Big|\frac{\partial}{\partial z}\Big(|z|^{2k}\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\Big)\Big|^2 = O(|z|^{2k-1})$ au voisinage de $z=0$, donc

$$\int_{|z|<1} |z|^{-2k}\Big|\frac{\partial}{\partial z}\Big(|z|^{2k}\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\Big)\Big|^2 dz\wedge d\overline{z} \leq \frac{i}{2\pi}\int_{|z|<1} O(|z|^{-1})dz\wedge d\overline{z} < \infty,$$

En faisant le changement de variables $y=\frac{1}{z}$ dans la deuxième intégrale, on conclut avec le même raisonnement que

$$\frac{i}{2\pi}\int_{|z|>1} |z|^{4+2m-2k}\Big|\frac{\partial}{\partial z}\Big(|z|^{2k-2m}\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\Big)\Big|^2 dz\wedge d\overline{z} < \infty.$$

Donc,

$$\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}(f\otimes z^k) \in \overline{A^{(0,0)}(\mathbb{P}^1,\mathcal{O}(m))}_{L^2,\infty}, \tag{1.14}$$

pour tout $f\in A^{(0,0)}(\mathbb{P}^1)$ et $k=0,\dots,m$.

Définition-Proposition 1.3.1. *On appelle l'opérateur linéaire ainsi défini, le Laplacien canonique associé à $(\mathbb{P}^1,\omega_\infty)$ et au fibré en droites hermitien $\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty$ muni de sa métrique canonique, et on le note par $\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}$. On a,*

$$(\xi,\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}\eta)_{L^2,\infty} = (\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}\xi,\eta)_{L^2,\infty}$$

pour tous $\xi,\eta\in A^{(0,0)}(\mathbb{P}^1,\mathcal{O}(m))$.

On considère

$$D_{\max} := \overline{\{\xi\in A^{(0,0)}(\mathbb{P}^1,\mathcal{O}(m)) \mid \|\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}\xi\|_{L^2,\infty}<\infty\}}$$

c'est à dire la fermeture de l'ensemble $\{\xi\in A^{(0,0)}(\mathbb{P}^1,\mathcal{O}(m)) \mid \|\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}\xi\|_{L^2,\infty}<\infty\}$ dans $\overline{A^{(0,0)}(\mathbb{P}^1,\mathcal{O}(m))}_{L^2,\infty}$, on l'appelle domaine maximal de définition de $\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}}$.

D'après (1.14), on a

$$A^{(0,0)}(\mathbb{P}^1,\mathcal{O}(m)) \subset D_{\max}.$$

en particulier, $D_{\max}$ est un sous espace vectoriel dense dans $\overline{A^{(0,0)}(\mathbb{P}^1,\mathcal{O}(m))}_{L^2,\infty}$.

1.3.1 Sur le Spectre de $\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}$. (I)

Dans ce paragraphe on introduit une famille de fonctions $(L_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ et on expliquera le lien entre cette famille avec l'étude de l'opérateur $\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}$. Le résultat fondamental du ce paragraphe montre comment ces fonctions génèrent des valeurs propres ainsi que les vecteurs propres associés, par exemple

on va établir une relation entre la norme L^2 d'un vecteur propre et la dérivée de L_n, ce dernier point est fondamental pour la suite.

Soit m un entier positif non nul.

Définition 1.3.2. *Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on considère L_n, la fonction définie par :*

$$L_n(z) = -z^m \frac{d}{dz}(z^{-m} J_n(z) J_{n-m}(z)), \quad \forall\, z \in C,$$

et on pose

$$Z_n := \Big\{\lambda \in \mathbb{C}^* \,\Big|\, L_n(\lambda) = 0\Big\}. \tag{1.15}$$

On la suite on étudie les propriétés de L_n et de Z_n. Par exemple, on va montrer que Z_n est un sous-ensemble infini et discret de $\mathbb{R}^*$, la preuve sera donnée en deux étapes.

Lemme 1.3.3. *Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, L_n est une fonction analytique sur $\mathbb{C}$ entier qui vérifie les propriétés suivantes :*

$$L_n(z) = J_{n+1}(z) J_{n-m}(z) - J_n(r) J_{n-m-1}(z), \quad \forall\, z \in \mathbb{C}, \tag{1.16}$$

$$L_{-n}(z) = (-1)^m L_{n+m}(z), \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}, \forall\, z \in \mathbb{C}, \tag{1.17}$$

$$L_n(-z) = (-1)^{m+1} L_n(z), \quad \forall\, z \in \mathbb{C}, \tag{1.18}$$

et on a pour z assez petit,

$$L_n(z) = -\frac{z^{2n-m-1}}{2^{2n-m-1} n!(n-m-1)!} + o(z^{2n-m-1}) + o(z^{2n-m-1}), \quad si\, n \geq m+1, \tag{1.19}$$

et

$$L_n(z) = (-1)^{m+n} \frac{m+2}{(m-n+1)!(n+1)!} z^{m+1} + o(z^{m+1}), \quad si\, 0 \leq n \leq m. \tag{1.20}$$

En particulier, Z_n est un sous-ensemble infini et discret de $\mathbb{C}^*$ et on a

1. $$Z_{-n} = Z_{n+m},$$

2. $$Z_n \cap \{\lambda \in \mathbb{R} |\, J_{n-m}(\lambda) = 0\} = \emptyset.$$

Démonstration. Comme $J_{-p} = (-1)^p J_p$, $\forall\, p \in \mathbb{Z}$ et que $J_{|p|}$ est une fonction analytique sur $\mathbb{C}$ d'ordre $|p|$ en zéro, alors $z \mapsto z^{-m} J_n(z) J_{n-m}(z)$ est une fonction analytique sur $\mathbb{C}$ d'ordre $|n| + |n-m| - m$ en zéro donc L_n est analytique sur $\mathbb{C}$ avec un zéro d'ordre au moins m en $z = 0$.

On déduit que Z_n est non vide. Si, par l'absurde, Z_n admet un point d'accumulation alors L_n doit s'annuler sur $\mathbb{C}$ (car analytique), par suite il existe c une constante réelle telle que $J_n(z) J_{n-m}(z) = cz^m$, $\forall\, z \in \mathbb{C}$. Or d'après [Wat44, 7.21, p.199], on sait que pour ν fixé, $J_\nu(r) \to 0$ quand $r (\in \mathbb{R}) \to +\infty$, donc on doit avoir $c = 0$ ce qui est impossible.

On sait que les fonctions de Bessel d'ordre supérieur à $\frac{1}{2}$ ont une infinité de zéros et qui sont en plus tous réels, voir par exemple [Wat44, § 15], donc on peut affirmer à l'aide du théorème de accroissements finis, que la fonction $\frac{d}{dz}(z^{-m} J_n(z) J_{n-m}(z))$ restreinte à $\mathbb{R}^*$ s'annule entre deux zéros de J_n (resp. de J_{n-m}) donc, Z_n est infini.

En utilisant les relations de récurrences des fonctions de Bessel, on montre pour tout $z \in \mathbb{C}^*$:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}(z^{-m}J_n(z)J_{n-m}(z)) &= \frac{d}{dz}(z^{-m}J_n(z)z^{n-m}J_{n-m}(z)) \\
&= \frac{d}{dz}(z^{-n}J_n(z))z^{n-m}J_{n-m}(z) + z^{-n}J_n(z)\frac{d}{dz}(z^{n-m}J_{n-m}(z)) \\
&= -z^{-n}J_{n+1}(z)z^{n-m}J_{n-m}(z) + z^{-n}J_n(z)z^{n-m}J_{n-m-1}(z), \quad \text{par (2.40) et (2.44)} \\
&= -z^{-m}J_{n+1}(z)J_{n-m}(z) + z^{-m}J_n(z)J_{n-m-1}(z).
\end{aligned}$$

Par suite,

$$L_n(z) = J_{n+1}(z)J_{n-m}(z) - J_n(z)J_{n-m-1}(z), \quad \forall\, z \in \mathbb{C}, \forall\, n \in \mathbb{Z}.$$

De cette identité, on a pour tout $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}
L_{-n}(z) &= J_{(-n)+1}(z)J_{(-n)-m}(z) - J_{(-n)}(z)J_{(-n)-m-1}(z) \\
&= (-1)^{m+1}J_{n-1}(z)J_{n+m}(z) - (-1)^{m+1}J_n(z)J_{n+m+1}(z) \quad \text{car } J_{-p} = (-1)^p J_p \\
&= (-1)^m\Big(J_{(n+m)+1}(z)J_{(n+m)-m}(z) - J_{(n+m)}(z)J_{(n+m)-m-1}(z)\Big) \\
&= (-1)^m L_{n+m}(z).
\end{aligned}$$

Rappelons que $J_p(-z) = (-1)^p J_p(z)$, $\forall\, z \in \mathbb{C}$ et p un entier. On a donc a

$$z(\in \mathbb{C}^*) \mapsto z^{-m}J_n(z)J_{n-m}(z)$$

est une fonction paire. Vue l'expression de L_n, on conclut que

$$L_n(-z) = (-1)^{m+1}L_n(z), \quad \forall\, z \in \mathbb{C},$$

et cela pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Maintenant évaluons l'ordre de L_n en $z = 0$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$. Rappelons qu'une fonction de Bessel J_p, avec $p \geq 0$ admet un développement analytique au voisinage de zéro donné par la formule :

$$J_p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(\frac{1}{2}z)^{p+2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(p+k+1)},$$

pour z assez petit. En particulier, pour z proche de zéro, on a

$$J_p(z) = \frac{1}{2^p p!}z^p + o(z^p).$$

Donc lorsque $n \geq m+1$ on peut écrire, en utilisant les identités précédentes, que pour z assez petit :

$$\begin{aligned}
L_n(z) &= J_{n+1}(z)J_{n-m}(z) - J_n(z)J_{n-(m+1)}(z) \\
&= \frac{z^{2n-m+1}}{2^{2n-m+1}(n+1)!(n-m)!} - \frac{z^{2n-m-1}}{2^{2n-m-1}n!(n-m-1)!} + o(z^{2n-m-1}) \\
&= -\frac{z^{2n-m-1}}{2^{2n-m-1}n!(n-m-1)!} + o(z^{2n-m-1}).
\end{aligned}$$

Si $0 \leq n \leq m$. Comme $L_n(z) = J_{n+1}(z)J_{n-m}(z) - J_n(z)J_{n-m-1}(z)$, et puisque $J_{-p} = (-1)^p J_p$ alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ et en particulier pour z assez petit on aura

$$\begin{aligned}
L_n(z) &= (-1)^{m-n} J_{n+1}(z)J_{m-n}(z) - (-1)^{m+1-n} J_n(z)J_{m+1-n}(z) \\
&= (-1)^{m-n}\big(J_n(z)J_{m+1-n}(z) - J_{n+1}(z)J_{m-n}(z)\big) \\
&= (-1)^{m+n}\Big(\frac{z^{m+1}}{2^{m+1}n!(m+2-v)!} + \frac{z^{m+1}}{2^{m+1}(n+1)!(m+1-v)!} + o(z^{m+1})\Big) \\
&= (-1)^{m+n}\frac{m+2}{(m-n+1)!(n+1)!}z^{m+1} + o(z^{m+1}).
\end{aligned}$$

Montrons par l'absurde que

$$Z_n \cap \{\lambda \in \mathbb{C} |\, J_{n-m}(\lambda) = 0\} = \emptyset.$$

(Notons que $\{\lambda \in \mathbb{C} |\, J_{n-m}(\lambda) = 0\} = \{\lambda \in \mathbb{R} |\, J_{n-m}(\lambda) = 0\}$. En fait, on sait que les zéros de J_p sont réels lorsque $|p| \in \mathbb{N}$).

Soit donc λ un élément de $Z_n \cap \{\lambda \in \mathbb{C} |\, J_{n-m}(\lambda) = 0\}$, alors on aura

$$0 = L_n(\lambda) = J_{n+1}(\lambda)J_{n-m}(\lambda) - J_n(\lambda)J_{n-m-1}(\lambda) = -J_n(\lambda)J_{n-m-1}(\lambda),$$

donc,

$$J_n(\lambda)J_{n-m-1}(\lambda) = 0.$$

D'après [Wat44, § 15.22], J_ν et $J_{\nu+1}$ n'ont pas de zéros non nuls communs, lorsque $\nu > -1$. Donc on a nécessairement

$$J_n(\lambda) = 0.\,^{1}$$

Montrons que cela est impossible, pour cela on va montrer que si $\nu > 1$ alors les dérivées supérieures de J_ν s'écrivent en fonction de J_ν et J'_ν, plus précisément on montre par récurrence que pour tout $k \geq 2$, il existe P_k et Q_k deux fractions rationnelles avec au plus un pôle en zéro, telles que

$$J_\nu^{(k)}(z) = P_k(z)J_\nu(z) + Q_k(z)J'_\nu(z), \quad \forall\, z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Pour $k = 2$, c'est une conséquence de l'équation de Bessel cf. (1.41) et on a $P_2(z) = -(1 - \frac{\nu^2}{z^2})$ et $Q_2(z) = -\frac{1}{z}$.

On sait que

$$\frac{d}{dz}(z^{-\nu}J_\nu(z)) = -z^{-\nu}J_{\nu+1}(z), \quad \forall\, z \in \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

donc

$$\frac{d}{dz}\Big(z^{-1}\frac{d}{dz}(z^{-\nu}J_\nu(z))\Big) = \frac{d}{dz}(z^{-(\nu+1)}J_{\nu+1}(z)) = z^{-\nu-1}J_{\nu+2}(z),$$

et on montre par récurrence que

$$\frac{d}{dz}\Big(z^{-1}\frac{d}{dz}\Big(z^{-1}\frac{d}{dz}\cdots\Big(z^{-1}\frac{d}{dz}(z^{-\nu}J_\nu(z))\Big)\Big) = (-1)^k z^{-\nu-k+1}J_{\nu+k}(z).$$

Donc si l'on prend $\nu = n - m$ et $k = m$, alors d'après ce qui précède il existe P et Q deux fractions rationnelles avec un éventuel pôle en zéro telles que

$$P(z)J_{n-m}(z) + Q(z)J'_{n-m}(z) = J_n(z), \quad \forall\, z \neq 0.$$

1. Notons que $|n - m - 1| \in \mathbb{N}$, donc on peut supposer que $n - m - 1 \geq -1$. l'autre cas se traite de la même manière en utilisant la formule $J_{-p} = (-1)^p J_p$.

Or on sait (par hypothèse) que $J_{n-m}(\lambda) = 0$ et $J_n(\lambda) = 0$ donc

$$J'_{n-m}(\lambda) = 0,$$

ce qui impossible car les zéros non nuls des fonctions de Bessel sont simples.

□

Dans la suite on construit à partir de la famille $(Z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une famille $\{\varphi_{n,\lambda} \,|\, n \in \mathbb{Z},\ \lambda \in Z_n\}$ d'éléments de $\overline{A^{0,0}(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(m))}_{L^2,\infty}$ orthogonale pour le produit L^2_∞.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $\lambda \in Z_n$,

$$f_{n,\lambda}(r,\theta) = \begin{cases} J_n(\lambda r)\exp(in\theta) & \text{si } 0 \leq r \leq 1,\ \forall\,\theta, \\ \frac{J_n(\lambda)}{J_{n-m}(\lambda)} r^m J_{n-m}(\frac{\lambda}{r})\exp(in\theta) & \text{si } r > 1,\ \forall\,\theta, \end{cases} \tag{1.21}$$

et on pose

$$\varphi_{n,\lambda} = f_{n,\lambda} \otimes 1.$$

où 1 désigne la section globale 1 de $\mathcal{O}(m)$.

On note par τ_n l'extension à $\overline{A^{0,0}(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(m))}_{L^2,\infty}$ de l'opérateur défini sur $A^{0,0}(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(m))$ par linéarité par

$$\tau_n(f \otimes z^k) := \tau_n(f) \otimes z^{m-k}, \quad \forall\, f \in A^{(0,0)}(\mathbb{P}^1),\ k = 0, \ldots, m,$$

avec $\tau_n(f)$ est par définition la fonction donnée par $\tau_n(f)(r,\theta) = f(\frac{1}{r},\theta)e^{i2(n+k)\theta}$. On vérifie que

$$\tau_n(f \otimes z^k) = \tau_n(f z^k \otimes 1).$$

Théorème 1.3.4. *On a*

1.

$$\varphi_{n,\lambda} \in \overline{A^{0,0}(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(m))}_{L^2,\infty}, \quad \forall\, n \in \mathbb{Z},\ \lambda \in Z_n,$$

2.

$$\|\varphi_{n,\lambda}\|^2_{L^2,\infty} = \frac{J_n(\lambda)^2}{2}\Big(\frac{J'_n(\lambda)^2}{J_n(\lambda)^2} + \frac{J'_{n-m}(\lambda)^2}{J_{n-m}(\lambda)^2}\Big) + \frac{J_n(\lambda)^2}{2}\Big(2 - \frac{(n-m)^2 + n^2}{\lambda^2}\Big).$$

3.

$$(\varphi_{n,\lambda}, \varphi_{n',\lambda'})_{L^2,\infty} = \delta_{n,n'}\delta_{\lambda,\lambda'}(\varphi_{n,\lambda}, \varphi_{n,\lambda})_{L^2,\infty}, \quad \forall\, n, n' \in \mathbb{Z},\ \forall\, \lambda \in Z_n,\ \lambda' \in Z_{n'}\,{}^2.$$

4.

$$(\xi, \varphi_{-n,\lambda})_{L^2,\infty} = (-1)^n \frac{J_{n-m}(\lambda)}{J_n(\lambda)}(\tau_n(\xi), \varphi_{n+m,\lambda})_{L^2,\infty}, \quad \forall\, \xi \in A^{(0,0)}(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(m)).$$

5. Z_n est un sous-ensemble discret et infini de $\mathbb{R}^*$.

Afin d'établir le théorème, on rappelle une formule clé classique de la théorie des fonctions de Bessel, à savoir l'identité suivante :

$$\int_0^1 x J_n(ax)^2 dx = \frac{1}{2}(J'_n(a)^2 + (1 - \frac{n^2}{a^2})J_n(a)^2), \quad \forall\, a \neq 0.$$

2. $\delta_{*,*'}$ par définition égale à 0 si $* \neq *'$, 1 sinon.

Comme cette formule sera utilisé à plusieurs endroits dans notre texte, on en rappellera la démonstration. Cette formule est une conséquence de la formule suivante :

$$\frac{d}{dx}\big(axJ_n(bx)J_n'(ax) - bxJ_n(ax)J_n'(bx)\big) = (a^2-b^2)xJ_n(ax)J_n(bx), \quad \forall\, x \neq 0.$$

où a et b sont deux réels non nuls quelconques et n un entier (en général un réel). Commençons d'abord par l'établir. on va noter par f_a (resp. f_b) la fonction qui à x associe $J_n(ax)$ (resp. à x associe $J_n(bx)$), pour tout $x \in \mathbb{C}$. On a f_a est une solution de l'équation différentielle linéaire suivante :

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}(x\frac{dy}{dx}) + (a^2 - \frac{n^2}{x^2})y = 0, \quad \forall\, x \neq 0.$$

même chose pour f_b qui est une solution de l'équation :

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}(x\frac{dy}{dx}) + (b^2 - \frac{n^2}{x^2})y = 0, \quad \forall\, x \neq 0.$$

Vérifions cela. On a J_n vérifie l'équation suivante :

$$J_n''(x) + \frac{1}{x}J_n'(x) + (1 - \frac{n^2}{x^2})J_n(x) = 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{C}\setminus\{0\}.$$

On remplace x par ax et on obtient

$$\frac{f_a''(x)}{a^2} + \frac{f_a'(x)}{a^2x} + (1 - \frac{n^2}{(ax)^2})f_a(x) = 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{C}\setminus\{0\},$$

ce qui est équivalent à

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}(x\frac{d}{dx}f_a(x)) + (a^2 - \frac{n^2}{x^2})f_a(x) = 0, \quad \forall\, x \in \mathbb{C}\setminus\{0\}.$$

En multipliant la première équation par f_b et la deuxième par f_a et en soustrayant les deux, on obtient

$$f_b(x)\frac{d}{dx}(xf_a'(x)) - f_a(x)\frac{d}{dx}(xf_b'(x)) = (a^2-b^2)xf_a(x)f_b(x), \quad \forall\, x \neq 0.,$$

ce qui donne que

$$\frac{d}{dx}\big(xf_b(x)f_a'(x) - xf_a(x)f_b'(x)\big) = (a^2-b^2)xf_a(x)f_b(x), \quad \forall\, x \neq 0.$$

c'est à dire

$$\frac{d}{dx}\big(axJ_n(bx)J_n'(ax) - bxJ_n(ax)J_n'(bx)\big) = (a^2-b^2)xJ_n(ax)J_n(bx), \quad \forall\, x \neq 0. \tag{1.22}$$

En particulier, on a, pour $a \neq b$

$$\begin{aligned}\int_0^1 xJ_n(ax)J_n(bx)dx &= \frac{1}{b^2-a^2}\Big(aJ_n(b)J_n'(a) - bJ_n(a)J_n'(b)\Big)\\ &= \frac{1}{a+b}\Big(-a\frac{J_n(b)-J_n(a)}{b-a}J_n'(a) + J_n(a)J_n'(b) + aJ_n(a)\frac{J_n'(b)-J_n'(a)}{b-a}\Big).\end{aligned} \tag{1.23}$$

En faisant tendre b vers a, on obtient

$$\int_0^1 xJ_n(ax)^2dx = \frac{1}{2a}\Big(-aJ_n'(a)^2 + J_n(a)J_n'(a) + aJ_n(a)J_n''(a)\Big),$$

mais comme J_n vérifie l'équation de Bessel, alors

$$\int_0^1 xJ_n(ax)^2dx = \frac{1}{2}(J_n'(a)^2 + (1-\frac{n^2}{a^2})J_n(a)^2). \tag{1.24}$$

On commence maintenant la preuve du théorème (1.3.4) :

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{Z}$ et $\lambda \in Z_n$. Calculons la norme de $\varphi_{n,\lambda}$:

$$\begin{aligned}
\|\varphi_{n,\lambda}\|^2_{L^2,\infty} &= \int_{x\in\mathbb{P}^1} |f_{n,\lambda}(x)|^2 h_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}(1,1)(x)\omega_\infty \\
&= \int_{\mathbb{R}^+} |f_{n,\lambda}(r,\theta)| \frac{1}{\max(1,|r|^{2m})} \frac{rdr}{\max(1,|r|^4)} \\
&= \int_0^1 J_n(\lambda r)^2 rdr + \frac{J_n(\lambda)^2}{J_{n-m}(\lambda)^2}\int_1^\infty J_{n-m}(\frac{\lambda}{r})^2\frac{rdr}{r^4} \\
&= \int_0^1 J_n(\lambda r)^2 rdr + \frac{J_n(\lambda)^2}{J_{n-m}(\lambda)^2}\int_0^1 J_{n-m}(\lambda r)^2 rdr \\
&= \frac{1}{2}\Big(J_n'(\lambda)^2 + (1-\frac{n^2}{\lambda^2})J_n(\lambda)^2\Big) + \frac{J_n(\lambda)^2}{J_{n-m}(\lambda)^2}\Big(J_{n-m}'(\lambda)^2 + (1-\frac{(n-m)^2}{\lambda^2})J_{n-m}(\lambda)^2\Big) \quad \text{par (2.29)} \\
&= \frac{J_n(\lambda)^2}{2}\Big(\frac{J_n'(\lambda)^2}{J_n(\lambda)^2} + \frac{J_{n-m}'(\lambda)^2}{J_{n-m}(\lambda)^2}\Big) + \frac{J_n(\lambda)^2}{2}\Big(2 - \frac{(n-m)^2+n^2}{\lambda^2}\Big).
\end{aligned}$$

donc,

$$\|\varphi_{n,\lambda}\|^2_{L^2,\infty} < \infty,$$

par suite $\varphi_{n,\lambda} \in \overline{A^{0,0}(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(m))}_{L^2,\infty}$.

Soient $n, n' \in \mathbb{Z}$, $\lambda \in Z_n$ et $\lambda' \in Z_{n'}$. On a

$$\begin{aligned}
(\varphi_{n,\lambda}, \varphi_{n',\lambda'})_{L^2,\infty} &= \int_{\mathbb{P}^1} f_{n,\lambda}\overline{f_{n',\lambda'}}\|1\|^2_\infty\omega_\infty \\
&= \delta_{n,n'}\int_{r\leq 1} J_n(\lambda r)J_n(\lambda' r)rdr + \delta_{n,n'}\int_{r\geq 1}\frac{J_n(\lambda)J_n(\lambda')}{J_{n-m}(\lambda)J_{n-m}(\lambda')}J_{n-m}(\frac{\lambda}{r})J_{n-m}(\frac{\lambda'}{r})\frac{rdr}{r^4} \\
&= \delta_{n,n'}\int_{r\leq 1} J_n(\lambda r)J_n(\lambda' r)rdr + \delta_{n,n'}\int_{r\leq 1}\frac{J_n(\lambda)J_n(\lambda')}{J_{n-m}(\lambda)J_{n-m}(\lambda')}J_{n-m}(\lambda r)J_{n-m}(\lambda r)rdr
\end{aligned}$$

Si $\lambda \neq \lambda'$, on a d'après (1.23) :

$$\begin{aligned}
(\varphi_{n,\lambda}, \varphi_{n',\lambda'})_{L^2,\infty} &= \frac{1}{\lambda'^2-\lambda^2}\Big(\lambda J_n(\lambda')J_n'(\lambda) - \lambda' J_n(\lambda)J_n'(\lambda')\Big) \\
&+ \frac{1}{\lambda'^2-\lambda^2}\frac{J_n(\lambda)J_n(\lambda')}{J_{n-m}(\lambda)J_{n-m}(\lambda')}\Big(\lambda J_{n-m}(\lambda')J_{n-m}'(\lambda) - \lambda' J_{n-m}(\lambda)J_{n-m}'(\lambda')\Big) \quad \text{si } \lambda \neq \lambda' \\
&= \frac{1}{\lambda'^2-\lambda^2}\frac{\lambda J_n(\lambda')}{J_{n-m}(\lambda)}\Big(J_n'(\lambda)J_{n-m}(\lambda) + J_n(\lambda)J_{n-m}'(\lambda)\Big) \\
&- \frac{1}{\lambda'^2-\lambda^2}\frac{\lambda' J_n(\lambda)}{J_{n-m}(\lambda')}\Big(J_n'(\lambda')J_{n-m}(\lambda') + J_n(\lambda')J_{n-m}'(\lambda')\Big) \\
&= \frac{1}{\lambda'^2-\lambda^2}\frac{\lambda J_n(\lambda')}{J_{n-m}(\lambda)}\frac{m}{\lambda}J_n(\lambda)J_{n-m}(\lambda) - \frac{1}{\lambda'^2-\lambda^2}\frac{\lambda' J_n(\lambda)}{J_{n-m}(\lambda')}\frac{m}{\lambda'}J_n(\lambda')J_{n-m}(\lambda') \\
&= \frac{mJ_n(\lambda')J_n(\lambda)}{\lambda'^2-\lambda^2}(1-1) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

(On a utilisé l'égalité suivante $J_n'(\lambda)J_{n-m}(\lambda) + J_n(\lambda)J_{n-m}'(\lambda) = \frac{m}{\lambda}J_n(\lambda)J_{n-m}(\lambda)$ qui résulte du fait $\lambda \in Z_n$).

Montrons que

$$(\xi, \varphi_{-n,\lambda})_{L^2,\infty} = (-1)^n \frac{J_{n-m}(\lambda)}{J_n(\lambda)} (\tau_n(\xi), \varphi_{n+m,\lambda})_{L^2,\infty}, \quad \forall\, \xi \in A^{(0,0)}(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(m)).$$

Comme $\mathcal{O}(m)$ est engendré par ses sections globales alors on peut supposer que $\xi = f \otimes z^k$, où $f \in A^{(0,0)}(\mathbb{P}^1)$ et $k \in \{0, 1, \ldots, m\}$. On a d'une part :

$$\begin{aligned}
(f \otimes z^k, \varphi_{-n,\lambda})_{L^2,\infty} &= \int_{x\in\mathbb{P}^1} f(x)\overline{f_{n,\lambda}(x)} h_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}(z^k, 1)\omega_\infty \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^1 r^k \Big(\int_0^{2\pi} f(r,\theta)e^{i(k+n)\theta}d\theta\Big) J_{-n}(\lambda r) r dr \\
&+ \frac{1}{2\pi}\frac{J_{-n}(\lambda)}{J_{-n-m}(\lambda)}\int_1^\infty r^{k-m}\Big(\int_0^{2\pi} f(r,\theta)e^{i(k+n)\theta}d\theta\Big) J_{-n-m}(\frac{\lambda}{r})\frac{rdr}{r^4} \\
&= (-1)^n\frac{1}{2\pi}\int_0^1 r^k \Big(\int_0^{2\pi} f(r,\theta)e^{i(k+n)\theta}d\theta\Big) J_n(\lambda r) r dr \\
&+ (-1)^n\frac{1}{2\pi}\frac{J_n(\lambda)}{J_{n+m}(\lambda)}\int_1^\infty r^{k-m}\Big(\int_0^{2\pi} f(r,\theta)e^{i(k+n)\theta}d\theta\Big) J_{n+m}(\frac{\lambda}{r})\frac{rdr}{r^4} \\
&= (-1)^n\frac{1}{2\pi}\frac{J_n(\lambda)}{J_{n+m}(\lambda)}\Bigg[\int_1^\infty r^{k-m}\Big(\int_0^{2\pi} f(r,\theta)e^{i(k+n)\theta}d\theta\Big) J_{n+m}(\frac{\lambda}{r})\frac{rdr}{r^4} \\
&+ \frac{J_{n+m}(\lambda)}{J_n(\lambda)}\int_0^1 r^k\Big(\int_0^{2\pi} f(r,\theta)e^{i(k+n)\theta}d\theta\Big) J_n(\lambda r) r dr\Bigg] \\
&= (-1)^n\frac{J_n(\lambda)}{J_{n+m}(\lambda)}\Bigg[\int_0^1\Big(\int_0^{2\pi} f(\frac{1}{r},\theta)e^{i(n+k)\theta}d\theta\Big) r^{m-k} J_{n+m}(\lambda r) r dr \\
&+ \frac{J_{n+m}(\lambda)}{J_n(\lambda)}\int_1^\infty\Big(\int_0^{2\pi} f(r,\theta)e^{i(k+n)\theta}d\theta\Big)(r^m J_n(\lambda r))\frac{r^{m-k}}{r^{2m}}\frac{rdr}{r^4}\Bigg],
\end{aligned}$$

D'autres part, on a

$$\begin{aligned}
(\tau_n(f\otimes z^k), \varphi_{n+m,\lambda})_{L^2,\infty} &= \int_0^1\Big(\int_0^{2\pi} f(\frac{1}{r},\theta)e^{i\big(2(n+k)+(m-k)-(n+m)\big)\theta}d\theta\Big) J_{n+m}(\lambda r) r^{m-k} r dr \\
&+ \frac{J_{n+m}(\lambda)}{J_n(\lambda)}\int_1^\infty\Big(\int_0^{2\pi} f(\frac{1}{r},\theta)e^{i\big(2(n+k)+(m-k)-(n+m)\big)\theta}d\theta\Big) r^m J_n(\frac{\lambda}{r})\frac{r^{m-k}}{r^{2m}}\frac{rdr}{r^4} \\
&= \int_0^1\Big(\int_0^{2\pi} f(\frac{1}{r},\theta)e^{i(n+k)\theta}d\theta\Big) J_{n+m}(\lambda r) r^{m-k} r dr \\
&+ \frac{J_{n+m}(\lambda)}{J_n(\lambda)}\int_1^\infty\Big(\int_0^{2\pi} f(\frac{1}{r},\theta)e^{i(n+k)\theta}d\theta\Big) r^m J_n(\frac{\lambda}{r})\frac{1}{r^k}\frac{rdr}{r^4},
\end{aligned}$$

On déduit que

$$(f\otimes z^k, \varphi_{-n,\lambda})_{L^2,\infty} = (-1)^n\frac{J_{n-m}(\lambda)}{J_n(\lambda)}(\tau_n(f\otimes z^k), \varphi_{n+m,\lambda})_{L^2,\infty}.$$

On a déjà montré que Z_n est discret et infini. Montrons que $Z_n \subset \mathbb{R}$. On procède par l'absurde : Soit $\lambda \in Z_n$ et supposons que $\overline{\lambda} \neq \lambda$. On a $L_n(\overline{\lambda}) = \overline{L_n(\lambda)} = 0$, (puisque L_n est une fonction analytique à coefficients réels). Si l'on note par $f_{n,\overline{\lambda}}$ la fonction définie par

$$f_{n,\overline{\lambda}} = \begin{cases} J_n(\overline{\lambda}r)\exp(in\theta) & \text{si } r \leq 1, \\ \frac{J_n(\overline{\lambda})}{J_{n-m}(\overline{\lambda})} r^m J_{n-m}(\frac{\overline{\lambda}}{r})\exp(in\theta) & \text{si } r > 1, \end{cases}$$

et on pose

$$\varphi_{n,\overline{\lambda}} = f_{n,\overline{\lambda}} \otimes 1,$$

alors on a

$$\begin{aligned}
(\varphi_{n,\lambda}, \varphi_{n,\overline{\lambda}})_{L^2,\infty} &= \int_{\mathbb{P}^1} f_{n,\lambda}\overline{f_{n,\overline{\lambda}}}\|1\|_\infty^2 \omega_\infty \\
&= \int_{r\leq 1} J_n(\lambda r)J_n(\overline{\lambda}r)rdr + \int_{r\geq 1} \frac{J_n(\lambda)J_n(\overline{\lambda})}{J_{n-m}(\lambda)J_{n-m}(\overline{\lambda})} J_{n-m}(\frac{\lambda}{r})J_{n-m}(\frac{\overline{\lambda}}{r})\frac{rdr}{r^4} \\
&= \int_{r\leq 1} J_n(\lambda r)J_n(\overline{\lambda}r)rdr + \int_{r\leq 1} \frac{J_n(\lambda)J_n(\overline{\lambda})}{J_{n-m}(\lambda)J_{n-m}(\overline{\lambda})} J_{n-m}(\lambda r)J_{n-m}(\overline{\lambda}r)rdr \\
&= \frac{1}{\overline{\lambda}^2 - \lambda^2}\Big(\lambda J_n(\overline{\lambda})J_n'(\lambda) - \overline{\lambda}J_n(\lambda)J_n'(\overline{\lambda})\Big) \\
&+ \frac{1}{\overline{\lambda}^2 - \lambda^2}\frac{J_n(\lambda)J_n(\overline{\lambda})}{J_{n-m}(\lambda)J_{n-m}(\overline{\lambda})}\Big(\lambda J_{n-m}(\overline{\lambda})J_{n-m}'(\lambda) - \overline{\lambda}J_{n-m}(\lambda)J_{n-m}'(\overline{\lambda})\Big) \\
&= \frac{1}{\overline{\lambda}^2 - \lambda^2}\frac{\lambda J_n(\overline{\lambda})}{J_{n-m}(\lambda)}\Big(J_n'(\lambda)J_{n-m}(\lambda) + J_n(\lambda)J_{n-m}'(\lambda)\Big) \\
&- \frac{1}{\overline{\lambda}^2 - \lambda^2}\frac{\overline{\lambda}J_n(\lambda)}{J_{n-m}(\overline{\lambda})}\Big(J_n'(\overline{\lambda})J_{n-m}(\overline{\lambda}) + J_n(\overline{\lambda})J_{n-m}'(\overline{\lambda})\Big) \\
&= \frac{1}{\overline{\lambda}^2 - \lambda^2}\frac{\lambda J_n(\overline{\lambda})}{J_{n-m}(\lambda)}\frac{m}{\lambda}J_n(\lambda)J_{n-m}(\lambda) - \frac{1}{\overline{\lambda}^2 - \lambda^2}\frac{\overline{\lambda}J_n(\lambda)}{J_{n-m}(\overline{\lambda})}\frac{m}{\overline{\lambda}}J_n(\lambda)J_{n-m}(\overline{\lambda}) \\
&= \frac{mJ_n(\overline{\lambda})J_n(\lambda)}{\overline{\lambda}^2 - \lambda^2}(1-1) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Notons que la deuxième égalité nous donne que $(\varphi_{n,\lambda}, \varphi_{n,\overline{\lambda}})_{L^2,\infty}$ est un réel strictement positif (puisque c'est une somme de deux intégrales positives non nulles et que $\lambda \neq 0$ par hypothèse). Cela aboutit à une contradiction. On conclut que

$$\overline{\lambda} = \lambda.$$

□

Le théorème suivant sera utilisé de manière crucial dans l'étude du spectre du Laplacien $\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}$:

Théorème 1.3.5. *Soit $\nu \in \mathbb{Z}$ et $\lambda \in Z_\nu$, alors λ est un zéro simple de L_ν et on a*

$$L_\nu'(\lambda) = 2\frac{J_{\nu-m}(\lambda)}{J_\nu(\lambda)}(\varphi_{\nu,\lambda}, \varphi_{\nu,\lambda})_{L^2,\infty}.$$

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, et on pose

$$K_\nu(z) = \frac{d}{dz}(z^{-m}J_{\nu-m}(z)J_\nu(z)).$$

donc, $L_\nu(z) = -z^m K_\nu(z)$, $\forall\, z \in \mathbb{C}^*$. On a

$$K'_\nu(z) = m(m+1)z^{-m-2}J_{\nu-m}(z)J_\nu(z) - 2mz^{-m-1}\frac{d}{dz}\big(J_{\nu-m}(z)J_\nu(z)\big) + z^{-m}\frac{d^2}{dz^2}\big(J_{\nu-m}(z)J_\nu(z)\big),$$

et

$$\frac{d^2}{dz^2}\big(J_{\nu-m}(z)J_\nu(z)\big) = J''_\nu(z)J_{\nu-m}(z) + 2J'_\nu(z)J'_{\nu-m}(z) + J_\nu(z)J''_{\nu-m}(z).$$

Mais comme $J''_\nu(z) + \frac{1}{z}J'_\nu(z) + (1 - \frac{\nu^2}{z^2})J_\nu(z) = 0$, $\forall\, z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, alors on déduit que

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dz^2}\big(J_{\nu-m}(z)J_\nu(z)\big) = &-\frac{1}{z}\big(J'_\nu(z)J_{\nu-m}(z) + J'_{\nu-m}(z)J_\nu(z)\big) - \big(2 - \frac{(\nu-m)^2+\nu^2}{z^2}\big)J_{\nu-m}(z)J_\nu(z)\\ &+ 2J'_\nu(z)J'_{\nu-m}(z).\end{aligned}$$

En remplaçant dans K'_ν, on obtient que

$$\begin{aligned}K'_\nu(z) = z^{-m-2}\Big(&\big(2m^2 + 2(\nu-m)^2 + (2(\nu-m)+1)m - 2z^2\big)J_{\nu-m}(z)J_\nu(z)\\ &- (2m+1)zJ'_\nu(z)J_{\nu-m}(z) - (2m+1)zJ_\nu(z)J'_{\nu-m}(z) + 2z^2J'_{\nu-m}(z)J'_\nu(z)\Big), \quad \forall\, z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}.\end{aligned}$$

Si $\lambda \in Z_\nu$, alors

$$\lambda\big(J_{\nu-m}(\lambda)J'_n(\lambda) + J_\nu(\lambda)J'_{\nu-m}(\lambda)\big) = mJ_\nu(\lambda)J_{\nu-m}(\lambda).$$

(on a utilisé $\frac{d}{dz}(z^{-m}J_\nu(z)J_{\nu-m}(z)) = -mz^{-m-1}J_\nu(z)J_{\nu-m}(z) + z^{-m}J'_\nu(z)J_{\nu-m}(z) + z^mJ_\nu(z)J'_{n-m}(z))$, donc,

$$K'_\nu(\lambda) = \lambda^{-m-2}\Big(2(\nu m - \lambda^2)J_{\nu-m}(\lambda)J_\nu(\lambda) + 2\lambda^2J'_{\nu-m}(\lambda)J'_\nu(\lambda)\Big).$$

On peut déduire aussi de $\lambda \in Z_\nu$ que

$$\frac{J'_\nu(\lambda)^2}{J_\nu(\lambda)^2} + \frac{J'_{\nu-m}(\lambda)^2}{J_{\nu-m}(\lambda)^2} + \frac{J'_\nu(\lambda)J'_{\nu-m}(\lambda)}{J_\nu(\lambda)J_{\nu-m}(\lambda)} = \left(\frac{J'_\nu(\lambda)}{J_\nu(\lambda)} + \frac{J'_{\nu-m}(\lambda)}{J_{\nu-m}(\lambda)}\right)^2 = \frac{m^2}{\lambda^2}.$$

Cela nous permet d'écrire que

$$\begin{aligned}K'_\nu(\lambda) &= \lambda^{-m-2}\Big(2(\nu m - \lambda^2)J_{\nu-m}(\lambda)J_\nu(\lambda) + 2\lambda^2J'_{\nu-m}(\lambda)J'_\nu(\lambda)\Big)\\ &= \lambda^{-m}J_{\nu-m}(\lambda)J_\nu(\lambda)\left(2\Big(\frac{(\nu-m)^2+(\nu-m)m}{\lambda^2} - 1\Big) + 2\frac{J'_\nu(\lambda)J'_{\nu-m}(\lambda)}{J_\nu(\lambda)J_{\nu-m}(\lambda)}\right)\\ &= \lambda^{-m}J_{\nu-m}(\lambda)J_\nu(\lambda)\left(2\Big(\frac{(\nu-m)^2+(\nu-m)m}{\lambda^2} - 1\Big) + \frac{m^2}{\lambda^2} - \frac{J'_\nu(\lambda)^2}{J_\nu(\lambda)^2} - \frac{J'_{\nu-m}(\lambda)^2}{J_{\nu-m}(\lambda)^2}\right)\\ &= \lambda^{-m}J_{\nu-m}(\lambda)J_\nu(\lambda)\left(-\frac{J'_\nu(\lambda)^2}{J_\nu(\lambda)^2} - \frac{J'_{\nu-m}(\lambda)^2}{J_{\nu-m}(\lambda)^2} + \Big(\frac{(\nu-m)^2+\nu^2}{\lambda^2} - 2\Big)\right)\end{aligned}$$

Or on a déjà montré que

$$(\varphi_\lambda, \varphi_\lambda)_{L^2,\infty} = \frac{J_\nu(\lambda)^2}{2}\Big(\frac{J'_\nu(\lambda)^2}{J_\nu(\lambda)^2} + \frac{J'_{\nu-m}(\lambda)^2}{J_{\nu-m}(\lambda)^2}\Big) + \frac{J_\nu(\lambda)^2}{2}\Big(2 - \frac{(\nu-m)^2+\nu^2}{\lambda^2}\Big).$$

donc,

$$K'_\nu(\lambda) = -2\lambda^{-m}\frac{J_{\nu-m}(\lambda)}{J_\nu(\lambda)}(\varphi_\lambda, \varphi_\lambda)_{L^2,\infty}.$$

Par suite,

$$L'_\nu(\lambda) = -m\lambda^{m-1}K_\nu(\lambda) - \lambda^m K'_\nu(\lambda) = -\lambda^m K'_\nu(\lambda) = 2\frac{J_{\nu-m}(\lambda)}{J_\nu(\lambda)}(\varphi_\lambda, \varphi_\lambda)_{L^2,\infty}.$$

Montrons maintenant que λ est un zéro simple de L_ν. On a montré dans (1.3.3) que

$$Z_\nu \cap \{z \in \mathbb{C} \mid J_{\nu-m}(z) = 0\} = \emptyset,$$

Vue la formule précédente, on a

$$L'_\nu(\lambda) \neq 0.$$

□

Dans ce théorème on montre comment les fonctions L_n génèrent des vecteurs propres pour le Laplacien $\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}$.

Théorème 1.3.6. *Soit $m \in \mathbb{N}^*$, on a pour tout $n \in \mathbb{Z}$, et $\lambda \in Z_n$ fixé :*

$$(\varphi_{n,\lambda}, \Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}\xi)_{L^2,\infty} = \frac{\lambda^2}{4}(\varphi_{n,\lambda}, \xi)_{L^2,\infty}, \quad \forall\, \xi \in A^{(0,0)}(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(m)).$$

et

$$(\varphi_{-n+m,\lambda}, \Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}\xi)_{L^2,\infty} = \frac{\lambda^2}{4}(\varphi_{-n+m,\lambda}, \xi)_{L^2,\infty}, \quad \forall\, \xi \in A^{(0,0)}(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(m)).$$ [3]

En d'autres termes,

$$\Big\{0\Big\} \bigcup \Big\{\frac{\lambda^2}{4} \Big| \exists n \in \mathbb{N},\, \lambda \in Z_n\Big\} \subset \mathrm{Spec}(\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}).$$

et on a,

1. *Si m est pair, alors la multiplicité de $\frac{\lambda^2}{4}$ est supérieure à 2 si $\lambda \in Z_n$ telle que $n \geq m+1$ ou $0 \leq n \leq \frac{m}{2} - 1$ et de multiplicité 1 si $\lambda \in Z_{\frac{m}{2}}$.*
2. *Si m est impair, alors $\frac{\lambda^2}{4}$ est de multiplicité supérieure 2 si $n \geq m+1$, $\geq$ à 1 si $0 \leq n \leq m$.*

Démonstration. Commençons d'abord par observer que $\varphi_{n,\lambda}$ et $\varphi_{-n+m,\lambda}$ sont linéairement dépendants si et seulement si m est pair et que $n = \frac{m}{2}$. En effet, d'après (1.21), ces deux vecteurs sont liés s'il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que

$$J_n(\lambda r)e^{in\theta} = cJ_{-n+m}(\lambda r)e^{i(-n+m)\theta},$$
$$\text{et } \frac{J_n(\lambda)}{J_{n-m}(\lambda)}J_{n-m}(\lambda r)e^{in\theta} = c\frac{J_{-n+m}(\lambda)}{J_{-n}(\lambda)}J_{-n}(\lambda r)e^{i(-n+m)\theta} \quad \forall\, 0 < r < 1,\ \forall\, \theta \in [0, 2\pi].$$

Donc,

$$J_n(\lambda r) = (-1)^{m-n}cJ_{n-m}(\lambda r)e^{i(-2n+m)\theta}, \text{et}$$
$$J_{n-m}(\lambda r) = (-1)^{n-m}c\frac{J_{n-m}(\lambda)^2}{J_n(\lambda)^2}J_n(\lambda r)e^{i(-2n+m)\theta},$$

pour tout $0 < r < 1$ et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. On déduit que cela n'est possible que si m est pair et que $n = \frac{m}{2}$.

3. Notons que la deuxième égalité est bien définie, puisqu'on a montré dans (1.3.3) que $Z_n = Z_{-n+m}$.

Pour montrer que $\varphi_{n,\lambda}$ est une vecteur propre on aura besoin de l'expression locale de $\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}$ sur $\mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{S}^1$: Soit $f \in A^{0,0}(\mathbb{P}^1)$ et $k \in \{0, \dots, m\}$, on a sur $\{|z| < 1\}$,

$$\begin{aligned}\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}(f \otimes z^k) &= -|z|^{-2k}\frac{\partial}{\partial z}(|z|^{2k}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}f) \otimes z^k \\ &= -z^{-k}\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}(z^k f)) \otimes z^k \\ &= -z^{-k}\frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}}(z^k f) \otimes z^k.\end{aligned} \tag{1.25}$$

et sur $\{|z| > 1\}$,

$$\begin{aligned}\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}(f \otimes z^k) &= -|z|^{2m-2k+4}\frac{\partial}{\partial z}(|z|^{2k-2m}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}f) \otimes z^k \\ &= -\frac{|z|^4}{z^{k-m}}\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}(\frac{f}{z^{m-k}})) \otimes z^k \\ &= -\frac{|z|^4}{z^{k-m}}\frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}}(\frac{f}{z^{m-k}}) \otimes z^k.\end{aligned} \tag{1.26}$$

Soit v un vecteur propre associé à une valeur propre de $\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}$. Par la discussion précédente on peut supposer que v est de la forme $f_\lambda \otimes z^k$, avec f_λ une fonction à variables séparées et $k \in \{0, \dots, m\}$. Pour déterminer, les vecteurs propres et les valeurs propres de ce Laplacien, on suppose en premier temps que f_λ est continue sur $\mathbb{P}^1$ et que ses restrictions aux ouverts $\{|z| \leq 1\}$ et $\{|z| \geq 1\}$ sont des fonctions prolongeable de façon $\mathcal{C}^2$ aux voisinages de ces fermés, dans le but d'appliquer les techniques de l'annexe (1.4.1).

Fixons $n \in \mathbb{Z}$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}^* \setminus \{x |\, J_{n-m}(x) = 0\}$. Par (1.25) et (1.26), on suppose que f_λ, qu'on notera dans la suite par $\widetilde{f}_{n,\lambda}$, s'écrit sous la forme suivante :

$$\widetilde{f}_{n,\lambda}(r,\theta) := \begin{cases} f_{n,\lambda,-}(r,\theta) := r^{-k}J_n(\lambda r)e^{i(n-k)\theta} & \text{si } r \leq 1, \\ f_{n,\lambda,+}(r,\theta) := \frac{J_n(\lambda)}{J_{n-m}(\lambda)}r^{m-k}J_{n-m}(\frac{\lambda}{r})e^{i(n-k)\theta} & \text{si } r > 1. \end{cases} \tag{1.27}$$

De (1.25) et (1.26), on vérifie que

$$\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}(\widetilde{f}_{n,\lambda} \otimes z^k) = \frac{\lambda^2}{4}\widetilde{f}_{n,\lambda} \otimes z^k,$$

sur $\mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{S}^1$.

On va montrer que $\lambda \in Z_n$ si et seulement si

$$(\widetilde{f}_{n,\lambda} \otimes z^k, \Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}\xi)_\infty = \frac{\lambda^2}{4}(\widetilde{f}_{n,\lambda} \otimes z^k, \xi)_\infty, \quad \forall \xi \in A^{0,0}(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(m)).$$

(dans ce cas, on vérifie que $\widetilde{f}_{n,\lambda} \otimes z^k = f_{n,\lambda} \otimes 1$) Rappelons qu'on a montré que $Z_n \cap \{x |\, J_{n-m}(x) = 0\} = \emptyset$.

On a

$$
\begin{aligned}
(\widetilde{f}_{n,\lambda} \otimes z^k, \Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}(g \otimes z^l))_{L^2,\infty} &= -\int_{|z|\leq 1} \widetilde{f}_{n,\lambda} \overline{z}^{-l} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}} (\overline{z}^l \overline{g}) z^k \overline{z}^l dz \wedge d\overline{z} \\
&- \int_{|z|\geq 1} \widetilde{f}_{n,\lambda} \overline{z}^{m-l} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}} (\frac{\overline{g}}{\overline{z}^{m-l}}) z^{k-m} \overline{z}^{l-m} dz \wedge d\overline{z} \\
&= -\int_{|z|\leq 1} \widetilde{f}_{n,\lambda} z^k \frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}} (\overline{z}^l \overline{g}) dz \wedge d\overline{z} - \int_{|z|\geq 1} \widetilde{f}_{n,\lambda} z^{k-m} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}} (\frac{\overline{g}}{\overline{z}^{m-l}}) dz \wedge d\overline{z}
\end{aligned}
$$

On a, par la formule de Green,

$$
\begin{aligned}
-\int_{|z|\leq 1} \widetilde{f}_{n,\lambda} z^k \frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}} (\overline{z}^l \overline{g}) dz \wedge d\overline{z} &= -\int_{|z|\leq 1} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}} (z^k \widetilde{f}_{n,\lambda}) \overline{z}^l \overline{g} dz \wedge d\overline{z} - \int_{|z|=1} z^k \widetilde{f}_{n,\lambda} d^c(\overline{z}^l \overline{g}) \\
&+ \int_{|z|=1} d^c(z^k f_{k,n}) \overline{z}^l \overline{g} \\
&= -\int_{|z|\leq 1} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}} (z^k \widetilde{f}_{n,\lambda}) \overline{z}^l \overline{g} dz \wedge d\overline{z} - \int_{|z|=1} z^k \widetilde{f}_{n,\lambda} d^c(\overline{z}^l \overline{g}) \\
&+ \int_{|z|=1} k z^k \overline{z}^l \widetilde{f}_{n,\lambda} \overline{g} \frac{dz}{z} + \int_{|z|=1} d^c(\widetilde{f}_{n,\lambda}) z^k \overline{z}^l \overline{g}
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
-\int_{|z|\geq 1} \widetilde{f}_{n,\lambda} z^{k-m} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}} (\frac{\overline{g}}{\overline{z}^{m-l}}) dz \wedge d\overline{z} &= \\
&- \int_{|z|\geq 1} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}} (\frac{\widetilde{f}_{n,\lambda}}{z^{m-k}}) \frac{\overline{g}}{\overline{z}^{m-l}} dz \wedge d\overline{z} + \int_{|z|=1} \frac{\widetilde{f}_{n,\lambda}}{z^{m-k}} d^c(\frac{\overline{g}}{\overline{z}^{m-l}}) \\
&- \int_{|z|=1} d^c(\frac{\widetilde{f}_{n,\lambda}}{z^{m-k}}) \frac{\overline{g}}{\overline{z}^{m-l}} \\
&= -\int_{|z|\geq 1} \frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}} (\frac{\widetilde{f}_{n,\lambda}}{z^{m-k}}) \frac{\overline{g}}{\overline{z}^{m-l}} dz \wedge d\overline{z} + \int_{|z|=1} \widetilde{f}_{n,\lambda} z^k d^c(\overline{z}^l \overline{g}) \\
&+ m \int_{|z|=1} z^k \overline{z}^l \widetilde{f}_{n,\lambda} \overline{g} \frac{d\overline{z}}{\overline{z}} + (m-k) \int_{|z|=1} z^k \overline{z}^l \widetilde{f}_{n,\lambda} \overline{z}^l \overline{g} \frac{dz}{z} \\
&- \int_{|z|=1} d^c(\widetilde{f}_{n,\lambda}) z^k \overline{z}^l \overline{g}
\end{aligned}
$$

Rappelons que sur $\mathbb{S}^1$,

$$
\frac{dz}{z} = -\frac{d\overline{z}}{\overline{z}}
$$

En regroupant tout cela, et après des simplifications évidentes, il vient que

$$\begin{aligned}
&(\widetilde{f}_{n,\lambda}\otimes z^k,\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}(g\otimes z^l))_{L^2,\infty}=\\
&\quad-\int_{|z|\leq 1}\frac{\partial^2}{\partial z\partial\overline{z}}(z^k\widetilde{f}_{n,\lambda})\overline{z}^l\overline{g}dz\wedge d\overline{z}-\int_{|z|\geq 1}\frac{\partial^2}{\partial z\partial\overline{z}}(\frac{\widetilde{f}_{n,\lambda}}{z^{m-k}})\frac{\overline{g}}{\overline{z}^{m-l}}dz\wedge d\overline{z}\\
&\quad+\int_{|z|=1}d^c(\widetilde{f}_{n,\lambda})z^k\overline{z}^l\overline{g}-\int_{|z|=1}d^c(\widetilde{f}_{n,\lambda})z^k\overline{z}^l\overline{g}\\
&\quad=\lambda^2\int_{|z|\leq 1}z^k\widetilde{f}_{n,\lambda}\overline{z}^l\overline{g}dz\wedge d\overline{z}+\lambda^2\int_{|z|\geq 1}\frac{\widetilde{f}_{n,\lambda}}{z^{m-k}|z|^4}\frac{\overline{g}}{\overline{z}^{m-l}}dz\wedge d\overline{z}\\
&\quad+\int_{|z|=1}d^c(f_{n,\lambda,-})z^k\overline{z}^l\overline{g}-\int_{|z|=1}d^c(f_{n,\lambda,+})z^k\overline{z}^l\overline{g}\\
&\quad=\lambda^2(\widetilde{f}_{n,\lambda}\otimes z^k,g\otimes z^l)_{L^2,\infty}+\int_{|z|=1}(d^c(f_{n,\lambda,-})-d^c(f_{n,\lambda,+}))z^k\overline{z}^l\overline{g}
\end{aligned}$$

Donc pour que $\frac{\lambda^2}{4}\in\mathrm{Spec}(\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty})$ il suffit que

$$d^c(f_{n,\lambda,-})=d^c(f_{n,\lambda,+}),$$

sur $\mathbb{S}^1$.

Pour simplifier les notations on pose

$$\psi_-(r)=r^{-k}J_n(\lambda r),\qquad\text{et}\qquad\psi_+(r)=\frac{J_n(\lambda)}{J_{n-m}(\lambda)}r^{m-k}J_{n-m}(\frac{\lambda}{r})$$

Si $z\neq 0$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_{n,\lambda,-}}{\partial z}(z)&=\frac{\partial}{\partial z}((\frac{z}{|z|})^{n-k})\psi_-(|z|)+(\frac{z}{|z|})^{n-k}\frac{\partial|z|}{\partial z}\frac{\partial\psi_-}{\partial r}(|z|)\\
&=\frac{\partial}{\partial z}((\frac{z}{|z|})^{n-k})\psi_-(|z|)+(\frac{z}{|z|})^{n-k}\frac{\overline{z}}{2|z|}\frac{\partial\psi_-}{\partial r}(|z|).
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_{n,\lambda,-}}{\partial\overline{z}}(z)&=\overline{\frac{\partial\overline{(f_{n,\lambda,-})}}{\partial z}}\\
&=\frac{\partial}{\partial\overline{z}}((\frac{z}{|z|})^{n-k})\psi_-(|z|)+(\frac{z}{|z|})^{n-k}\frac{z}{2|z|}\frac{\partial\psi_-}{\partial r}(|z|).
\end{aligned}$$

Sur $\mathbb{S}^1$, on a donc

$$\begin{aligned}
d^cf_{n,\lambda,-}&=\frac{\partial}{\partial z}((\frac{z}{|z|})^{n-k})\psi_-(1)dz-\frac{\partial}{\partial\overline{z}}((\frac{z}{|z|})^{n-k})\psi_-(1)d\overline{z}\\
&\quad+(\frac{z}{|z|})^{n-k}\frac{\overline{z}}{2|z|}\frac{\partial\psi_-}{\partial r}(1)dz-(\frac{z}{|z|})^{n-k}\frac{z}{2|z|}\frac{\partial\psi_-}{\partial r}(1)d\overline{z}
\end{aligned}$$

Un calcul direct donne

$$\frac{\partial}{\partial z}((\frac{z}{|z|})^{n-k})dz-\frac{\partial}{\partial\overline{z}}((\frac{z}{|z|})^{n-k})d\overline{z}=0$$

sur $\mathbb{S}^1$.

Par suite

$$\begin{aligned} d^c f_{n,\lambda,-} &= (\frac{z}{|z|})^{n-k} \frac{\overline{z}}{2|z|} \frac{\partial \psi_-}{\partial r}(1) dz - (\frac{z}{|z|})^{n-k} \frac{z}{2|z|} \frac{\partial \psi_-}{\partial r}(1) d\overline{z} \\ &= \frac{1}{4\pi} z^{n-k+1} \frac{\partial \psi_-}{\partial r}(1) d\theta \end{aligned}$$

$\forall\, z \neq 0$

$$\frac{\partial f_{n,\lambda,+}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(\frac{z}{|z|})^{n-k} \cdot \psi_+(\frac{1}{|z|}) + (\frac{z}{|z|})^{n-k} \frac{\overline{z}}{2|z|} \frac{\partial \psi_+}{\partial r}(|z|).$$

et

$$\frac{\partial f_{n,\lambda,+}}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial}{\partial \overline{z}}(\frac{z}{|z|})^{n-k} \cdot \psi_+(\frac{1}{|z|}) + (\frac{z}{|z|})^{n-k} \frac{z}{2|z|} \frac{\partial \psi_+}{\partial r}(|z|).$$

On trouvera par un calcul analogue au précédent :

$$d^c f_{n,\lambda,+} = \frac{1}{4\pi} z^{n-k+1} \frac{\partial \psi_+}{\partial r}(1) d\theta$$

Montrons que $\lambda \in Z_n$ si et seulement si $d^c f_{k,n,+} = d^c f_{k,n,-}$ sur $\mathbb{S}^1$, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_+}{\partial r}(1) &= \frac{J_n(\lambda)}{J_{n-m}(\lambda)} \frac{d}{dr}(r^{m-k} J_{n-m}(\frac{\lambda}{r}))_{|r=1} \\ &= \frac{J_n(\lambda)}{J_{n-m}(\lambda)}((m-k) J_{n-m}(\lambda) - \lambda J_{n-m}(\lambda) \\ &= (m-k) J_n(\lambda) - \lambda \frac{J'_{n-m}(\lambda)}{J_{n-m}(\lambda)} J_n(\lambda) \end{aligned}$$

et

$$\frac{\partial \psi_-}{\partial r}(1) = -k J_n(\lambda) + \lambda J'_n(\lambda).$$

donc $\frac{\partial \psi_+}{\partial r}(1) = \frac{\partial \psi_-}{\partial r}(1)$ si et seulement si $(m-k) J_n(\lambda) - \lambda \frac{J'_{n-m}(\lambda)}{J_{n-m}(\lambda)} J_n(\lambda) = -k J_n(\lambda) + \lambda J'_n(\lambda)$ ce qui est équivalent à $m J_n(\lambda) J_{n-m}(\lambda) - \lambda J'_{n-m}(\lambda) J_n(\lambda) = \lambda J'_n(\lambda) J_{n-m}(\lambda)$ qui n'est autre que le fait que $\lambda \in Z_n$.

On a donc montré que $\lambda \in Z_n$ si et seulement si

$$(\widetilde{f}_{n,\lambda} \otimes z^k, \Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty} \xi)_\infty = \frac{\lambda^2}{4} (\widetilde{f}_{n,\lambda} \otimes z^k, \xi)_\infty, \quad \forall\, \xi \in A^{0,0}(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(m)).$$

Comme on l'a noté, si $\lambda \in Z_n$ alors

$$\widetilde{f}_{n,\lambda} \otimes z^k = f_{n,\lambda} \otimes 1,$$

qui n'est par définition autre que l'élément

$$\varphi_{n,\lambda}.$$

□

1.3.2 Sur le Spectre de $\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}$. (II)

Dans ce paragraphe on se propose de prouver que les valeurs propres de $\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}$ calculés dans (1.3.6) sont les uniques valeurs propres possibles, en d'autres termes on a

$$\mathrm{Spec}(\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}) = \Big\{0\Big\} \bigcup \Big\{\frac{\lambda^2}{4} \Big| \exists \nu \in \mathbb{N},\ \lambda \in Z_\nu\Big\}.$$

Puisqu'on a explicité les vecteur propres non nuls associés à chacune des valeurs propres du théorème, alors une manière de démontrer le résultat ci-dessus est de prouver que la famille suivante

$$\Big\{1 \otimes 1, 1 \otimes z, \dots, 1 \otimes z^m\Big\} \bigcup \Big\{\varphi_{\nu,\lambda} \Big| \nu \in \mathbb{Z}, \lambda \in Z_n\Big\},$$

est une base hilbertienne pour le complété de $A^{(0,0)}(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(m))$ pour la norme $\|\cdot\|_{L^2,\infty}$. Par exemple, on doit montrer que pour toute fonction f vérifiant $\|f \otimes 1\|_{L^2,\infty} < \infty$, alors on a

$$f \otimes 1 = \sum_{k=0}^{m} a_k (1 \otimes z^k) + \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \sum_{\lambda \in Z_\nu} a_{\nu,\lambda} (\varphi_{\nu,\lambda} \otimes 1),$$

dans $\overline{A^{(0,0)}(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(m))}_{L^2,\infty}$, où

$$a_k = \frac{(f \otimes 1, 1 \otimes z^k)_{L^2,\infty}}{\|1 \otimes z^k\|^2_{L^2,\infty}}, \quad k = 0, 1, \dots, m.$$

et

$$a_{\nu,\lambda} = \frac{(f \otimes 1, \varphi_{\nu,\lambda} \otimes 1)_{L^2,\infty}}{\|\varphi_{\nu,\lambda} \otimes 1\|^2_{L^2,\infty}}, \quad \forall\, \nu \in \mathbb{Z},\ \lambda \in Z_\nu.$$

On les appellera coefficients associés à f. Une autre manière équivalente pour montrer que cette famille est une base hilbertienne est de montrer que 0 est l'unique élément de $\overline{A^{(0,0)}(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(m))}_{L^2,\infty}$ orthogonal à cette famille, voir (1.2.1). Plus précisément on doit montrer que si

$$a_k = a_{\nu,\lambda} = 0,\ \forall\, k \in \{0, 1, \dots, m\},\ \forall\, \nu \in \mathbb{Z},\ \forall\, \lambda \in Z_n,$$

alors

$$f \otimes 1 = 0,$$

dans $\overline{A^{(0,0)}(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(m))}_{L^2,\infty}$.

Il est donc naturel de commencer par étudier le terme suivant :

$$(f \otimes 1, \varphi_{\nu,\lambda} \otimes 1)_{L^2,\infty}.$$

On a, $\forall\, \nu \in \mathbb{Z}$ et $\lambda \in Z_\nu$:

$$\begin{aligned}
(f \otimes 1, \varphi_{\nu,\lambda} \otimes 1)_{L^2,\infty} &= \int_0^1 \Big(\int_0^{2\pi} f(r,\theta) e^{-i\nu\theta} d\theta\Big) J_\nu(\lambda r) r dr \\
&\quad + \frac{J_\nu(\lambda)}{J_{\nu-m}(\lambda)} \int_1^\infty \Big(\int_0^{2\pi} f(r,\theta) e^{-i\nu\theta} d\theta\Big) J_{\nu-m}\Big(\frac{\lambda}{r}\Big) \frac{r dr}{r^{4+m}} \\
&= (f_\nu \otimes 1, \varphi_{\nu,\lambda} \otimes 1)_{L^2,\infty},
\end{aligned}$$

où on a noté par f_ν la fonction définie presque partout par $f_\nu(r,\theta) := e^{i\nu\theta} \int_0^{2\pi} f(r,\theta) e^{-i\nu\theta} d\theta$.

Cela nous amène à fixer le paramètre ν et de montrer le résultat suivant : Si pour tout $\lambda \in Z_\nu$

$$(f_\nu \otimes 1, \varphi_{\nu,\lambda} \otimes 1)_{L^2,\infty} = 0,$$

alors

$$f_\nu \otimes 1 = 0.$$

En effet, cela est équivalent à notre problème du départ puisque

$$(f_\nu \otimes 1, \varphi_{\nu',\lambda'} \otimes 1)_{L^2,\infty} = 0, \quad \text{si } \nu \neq \nu'.$$

et qu'on a la correspondance bijective suivante :

$$f \mapsto (f_\nu)_{\nu \in \mathbb{Z}}$$

(qui n'est autre qu'une conséquence de la théorie des séries de Fourier).

En gardant les mêmes notations ci-dessus, alors notre principal résultat de ce paragraphe est le théorème suivant :

Théorème 1.3.7. *Soit $\nu \in \mathbb{Z}$, on a*

1. *Si $\nu \leq -1$ ou $\nu \geq m+1$, alors il existe deux suites de réels $(l_{\nu,k})_{k\geq 1}$ et $(l'_{\nu,k})_{k\geq 1}$*

$$\sum_{k=1}^{\infty} l'_{\nu,k} \frac{(f_\nu \otimes 1, \varphi_{\nu,k})_{L^2}}{2\|\varphi_{\nu,k}\|^2_{L^2,\infty}} = \int_0^1 (x^{2p+2m-\nu+1} - x^{2q+2m-\nu+1}) f_\nu(\frac{1}{x}) dx$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} l_{\nu,k} \frac{(f_\nu \otimes 1, \varphi_{\nu,k})_{L^2}}{2\|\varphi_{\nu,k}\|^2_{L^2,\infty}} = \int_0^1 (x^{2p+\nu+1} - x^{2q+\nu+1}) f_\nu(x) dx.$$

2. *Si $0 \leq \nu \leq m$, alors il existe b_ν et b'_ν deux constantes réelles et deux suites de réels $(l_{\nu,k})_{k\geq 1}$ et $(l'_{\nu,k})_{k\geq 1}$*

$$b_\nu (f_\nu \otimes 1, 1 \otimes z^\nu)_{L^2,\infty} = \sum_{k=1}^{\infty} l'_{\nu,k} \frac{(f_\nu \otimes 1, \varphi_{\nu,k})_{L^2}}{2\|\varphi_{\nu,k}\|^2_{L^2,\infty}} - \int_0^1 (x^{2p+2m-\nu+1} - x^{2q+2m-\nu+1}) f_\nu(\frac{1}{x}) dx$$
$$b'_\nu (f_\nu \otimes 1, 1 \otimes z^\nu)_{L^2,\infty} = \sum_{k=1}^{\infty} l_{\nu,k} \frac{(f_\nu \otimes 1, \varphi_{\nu,k})_{L^2}}{2\|\varphi_{\nu,k}\|^2_{L^2,\infty}} - \int_0^1 (x^{2p+\nu+1} - x^{2q+\nu+1}) f_\nu(x) dx.$$

Ce théorème va nous permettre de montrer que

$$\Big\{1 \otimes 1, 1 \otimes z, \ldots, 1 \otimes z^m\Big\} \bigcup \Big\{\varphi_{\nu,\lambda} \,\Big|\, \nu \in \mathbb{Z}, \lambda \in Z_n\Big\},$$

est totale, En effet, si

$$(f \otimes 1, z^k \otimes 1)_{L^2,\infty} = (f \otimes 1, \varphi_{\nu,\lambda})_{L^2,\infty} = 0, \quad \forall\, k = 0, 1, \ldots, m, \ \forall\, \nu \in \mathbb{Z}, \forall\, \lambda \in Z_\nu,$$

alors par ce théorème on déduit que :

$$\int_0^1 (x^{2p+2m-\nu+1} - x^{2q+2m-\nu+1}) f_\nu(\frac{1}{x}) dx = \int_0^1 (x^{2p+\nu+1} - x^{2q+\nu+1}) f_\nu(x) dx = 0, \quad \forall\, \nu \in \mathbb{Z}.$$

et cela pour tous p et q assez grand (pour ν fixé). Un théorème classique d'analyse nous permet de conclure que les deux fonctions définies presque partout sur $[0,1]$: $x \mapsto f_\nu(\frac{1}{x})$ et $x \mapsto f_\nu(x)$ sont nulles presque partout pour tout $\nu \in \mathbb{Z}$. Par conséquent

$$f \otimes 1 = 0,$$

dans $\overline{A^{(0,0)}(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(m))}_{L^2,\infty}$.

Afin de démontrer ce résultat, l'idée est d'utiliser la théorie des séries de Fourier-Bessel et de l'adapter à notre situation. On commence donc par faire un rappel sur cette théorie et de revoir quelques techniques employées.

Les fonctions de Bessel jouent un rôle analogue à celui des fonctions trigonométriques dans la théorie des séries de Fourier. Dans cette première partie on va rappeler la théorie des séries de Fourier-Bessel et on énoncera le résultat principal de cette théorie à savoir une condition suffisante pour qu'une fonction f admet un développement en série en fonctions de Bessel. On suivra la présentation faite dans [Wat44, § 18].

Soit ν un réel supérieur à $\frac{1}{2}$. On appelle série de fonctions de Bessel la fonction qui à tout x réel associe la somme, lorsqu'elle converge, suivante :

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k J_\nu(j_k x),$$

où $(a_k)_{k\geq 1}$ est une suite de constantes indépendante de x et $(j_k)_{k\geq 1}$ est la suite des zéros de J_ν ordonnée par ordre croissant. Si les coefficients de cette série sont données par

$$a_k = \frac{2}{J_{\nu+1}(j_k)^2} \int_0^1 f(t) J_\nu(j_k t) t dt,$$

alors cette série est dite la série de Fourier-Bessel associée à $f(x)$. Si, en plus, cette série converge vers $f(x)$ en tout point de l'intervalle ouvert $]0,1[$ alors on parle du développement de Fourier-Bessel de f.

On peut aussi étudier les séries

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k J_\nu(\lambda_k x),$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ sont les zéros positifs non nuls de

$$z \mapsto z J'_\nu(z) + H J_\nu(z)$$

appelé la série de Dini des fonctions de Bessel.

Si b_k sont données par la formule suivante :

$$((\lambda_k^2 - \nu^2) + \lambda_k^2 J_\nu'^2(\lambda_k)) b_k = 2\lambda_k^2 \int_0^1 f(t) J_\nu(\lambda_k t) t dt,$$

alors on dit que c'est la série de Dini associée à $f(x)$.

Notons que Watson étudie le développement de fonctions en série de Fourier-Bessel et affirme dans [Wat44, p. 582] que le cas général des développements en séries de Dini se traite de la même manière. Par analogie avec la théorie des séries de Fourier, il donne une condition suffisante pour l'existence du développement en série de Fourier-Bessel qu'on énoncera dans la suite et on en rappellera l'idée de la preuve.

Rappelons qu'une fonction réelle f sur un intervalle $[a,b]$ est dite à variation bornée si

$$V_a^b(f) := \sup_{\sigma \in \mathcal{S}([a,b])} V(f,\sigma) < \infty$$

où $\mathcal{S}([a,b])$ est l'ensemble des subdivisions de $[a,b]$ de la forme $\sigma = (x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b)$ et $V(f,\sigma) = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|$.

D'après Watson, on dispose de quatre résultats majeurs sur la théorie des séries de Fourier-Bessel, à savoir une condition suffisante pour la convergence simple en un point intérieur de $[0,1]$, la convergence uniforme sur un sous-intervalle fermé propre de $]0,1[$, le comportement de la série de Fourier-Bessel aux voisinages de 0 (resp. de 1) et enfin l'unicité du développement en série de Fourier-Bessel. Ce dernier point s'interprète en langage moderne en disant que les fonctions de Bessel forment une une famille totale dans un espace hilbertien qu'on précisera dans la suite. Notre démarche pour ... sera d'utiliser les idées développées dans [Wat44, § 18], les étendre et de combiner ces quatre points pour conclure.

Rappelons donc les principaux résultats de la théorie des séries de Fourier Bessel.

Le résultat suivant nous fournit une condition suffisante pour la convergence simple de la série de Fourier-Bessel :

Proposition 1.3.8. *Soit f une fonction définie sur $[0,1]$ et on suppose que $\int_0^1 |f(t)| t^{\frac{1}{2}} dt$ converge. Soit*

$$a_k := \frac{2}{J_{\nu+1}^2(j_k)} \int_0^1 f(t) J_\nu(j_k t) t dt,$$

avec $\nu \geq -\frac{1}{2}$.

Soit $x \in]a,b[$ avec $0 < a < b < 1$ et tel que f soit à variation bornée sur $[a,b]$ alors la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k J_\nu(j_k x),$$

est convergente, de somme égale à $\frac{1}{2}\big(\lim_{y \mapsto x^+} f(y) + \lim_{y \mapsto x^-} f(y)\big)$ [4].

Démonstration. Voir [Wat44, § 18.24]. □

En gardant les mêmes hypothèses et si l'on suppose en plus que f est continue sur $[a,b]$ alors on a convergence uniforme ; précisément on a le résultat suivant

Proposition 1.3.9. *Si f est continue et vérifie les hypothèses de la proposition précédente, alors la série de Fourier-Bessel associée à f converge uniformément vers f sur l'intervalle $[a+\delta, b-\delta]$, où δ est un réel positif non nul arbitraire.*

Démonstration. Voir [Wat44, § 18.25]. □

Il est clair que les sommes partielles de la série de Fourier-Bessel associée à une fonction f continue, s'annulent en $x = 1$. Il est donc nécessaire de supposer que $\lim_{x \mapsto 1^-} f(x) = 0$ si l'on veut garantir la convergence uniforme de la série de Fourier-Bessel. Or on montre dans [Wat44, § 18.26] que la continuité de f sur $[a,1]$, avec $a \geq 0$ et la condition $f(1) = 0$ suffissent pour assurer la convergence uniforme sur un intervalle de la forme $[a+\delta, 1]$ avec $\delta > 0$.

Le dernier résultat fondamental de la théorie des séries de Fourier-Bessel exposée dans [Wat44, § 18] est l'unicité du développement en série de Fourier-Bessel. On montre dans [Wat44, § 18.6], sous

4. Comme f est à variation bornée alors on peut montrer par l'absurde que f admet une limite à droite et à gauche de x

la condition de la convergence absolue de $\int_0^1 t^{\frac{1}{2}} f(t)dt$, que f est nulle si et seulement si tous les coefficients de la série de Fourier-Bessel associée à f sont nuls.

L'idée clé de la preuve de la proposition (1.3.8) passe par l'étude de la suite de fonctions

$$(x,t) \mapsto T_n(t,x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2J_\nu(j_k x)J_\nu(j_k t)}{J_{\nu+1}(j_k)^2}$$

puisqu'on vérifie que

$$\sum_{k=1}^{n} a_k J_\nu(j_k x) = \int_0^1 f(t)T_n(t,x)tdt.$$

En fait, on montre que les T_n jouent le même rôle que

$$(x,t) \mapsto \frac{\sin\big((n+\frac{1}{2})(x-t)\big)}{\sin(x-t)}, \quad x \neq t$$

pour la théorie des séries de Fourier.

Il est commode d'exprimer T_n comme l'intégrale sur le contour d'un rectangle contenant seulement les $j_1, \ldots, j_n$ d'une fonction auxiliaire qui soit méromorphe ayant pour uniques pôles les zéros de J_ν et un comportement asymptotique adéquat. Ce dernier point nous permettra d'étudier T_n pour n assez grand et d'en déduire la proposition précédente (1.3.8).

On va rappeler quelques points techniques du [Wat44, § 18] afin de les adapter et les appliquer ultérieurement à notre situation. Dans les pages pp. 583-584, pour tous $0 < t \neq x < 1$, on introduit la fonction g donnée par

$$g(w) = \frac{2w}{t^2 - x^2}\big(tJ_\nu(xw)J_{\nu+1}(tw) - xJ_\nu(tw)J_{\nu+1}(xw)\big), \quad \forall\, w \in \mathbb{C},$$

et on montre que le résidu de

$$w \mapsto \frac{g(w)}{wJ_\nu(w)^2},$$

en j_k est égal à

$$2\frac{J_\nu(xj_k)J_\nu(tj_k)}{J_{\nu+1}(j_k)^2}.$$

Vérifions cela. On commence par noter que le résidu de $w \mapsto \frac{g(w)}{wJ_\nu(w)^2}$ en j_k est $\frac{g'(j_k)}{j_k J_\nu'^2(j_k)}$. Cela résulte du fait suivant : Si φ_1 et φ_2 sont deux fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$ alors si λ est un zéro simple de φ_2 alors on peut montrer à l'aide d'un développement limité convenable au voisinage de λ que

$$\mathrm{Res}_j\Big(w \mapsto \frac{\varphi_1(w)}{w\varphi_2^2(w)}\Big) = \Big(\frac{\varphi_1'(j)}{j\varphi_2'(j)^2} - \frac{\varphi_1(j)}{\varphi_2'(j)^2}\big(1 + j\frac{\varphi_2''(j)}{\varphi_2'(j)}\big)\Big).$$

Mais on a ici $J_\nu(j) = 0$ et J_ν vérifie $J_\nu''(z) + \frac{1}{z}J_\nu'(z) + (1 - \frac{\nu^2}{z^2})J_\nu(z) = 0$, donc $1 + j\frac{J_\nu'(j)}{J_\nu''(j)} = 0$.

D'un autre coté, on a $\forall\, w \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dw}\big(wJ_\nu(xw)J_{\nu+1}(tw)\big) &= \frac{d}{dw}\big((xw)^{-\nu}J_\nu(tw)(tw)^{\nu+1}J_{\nu+1}(tw)\big)\frac{x^\nu}{t^{\nu+1}} \\
&= -\frac{x^{\nu+1}}{t^{\nu+1}}(xw)^{-\nu}J_{\nu+1}(xw)(tw)^{\nu+1}J_{\nu+1}(tw) + \frac{x^\nu}{t^\nu}(xw)^{-\nu}J_\nu(xw)(tw)^{\nu+1}J_\nu(tw) \quad \text{par (2.40) et (2.44)} \\
&= -xwJ_{\nu+1}(xw)J_{\nu+1}(tw) + twJ_\nu(xw)J_\nu(tw),
\end{aligned}$$

et par symétrie, on en déduit que

$$\frac{d}{dw}(wJ_\nu(tw)J_{\nu+1}(xw)) = -twJ_{\nu+1}(tw)J_{\nu+1}(xw) + xwJ_\nu(tw)J_\nu(xw), \quad \forall\, w \in \mathbb{C}.$$

En regroupant tout cela on obtient :

$$g'(w) = 2wJ_\nu(xw)J_\nu(tw), \quad \forall\, w \in \mathbb{C}.$$

On conclut que le résidu de $w \mapsto \frac{g(w)}{wJ_\nu(w)^2}$ en j_k est

$$2\frac{J_\nu(xj_k)J_\nu(tj_k)}{J_{\nu+1}(j_k)^2}.$$

On considère maintenant le rectangle de sommets iB, $-iB$, $A_n + iB$ et $A_n - iB$ où $B > 0$ et A_n est un réel tel que $j_n < A_n < j_{n+1}$. Remarquons enfin que $w \mapsto \frac{g(w)}{wJ_\nu(w)^2}$ est d'ordre 1 en $w = 0$ (on le vérifie en utilisant (1.40)). Donc par cette discussion on peut affirmer que l'intégrale de $w \mapsto \frac{g(w)}{wJ_\nu(w)^2}$ le long de ce contour est égale à $T_n(t, x)$.

La suite utilise de manière cruciale les propriétés asymptotiques des fonctions de Bessel. En fait, le développement asymptotique des fonctions de Bessel, voir [Wat44, § 7.21], nous permet d'assurer que l'intégrale sur les cotés inférieurs et supérieurs du rectangle s'annulent si B tends vers l'infini, aussi puisque les intégrands sont impairs et sans singularités sur $[-Bi, Bi]$ donc leur intégrale sur ce segment est nulle. On conclut qu'on a

$$T_n(t, x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{A_n-\infty i}^{A_n+\infty i} \frac{g(w)}{wJ_\nu(w)^2}dw, \quad \forall\ 0 < x + t < 2,\ x \neq t.$$

En utilisant les deux inégalités suivantes :

$$\left|J_\nu(\theta w)\right| \leq c_1\frac{\exp(|Im(\theta w)|)}{\sqrt{|\theta w|}}, \quad \left|J_\nu(w)\right| \geq c_2\frac{\exp(|Im(w)|)}{\sqrt{|w|}}, \tag{1.28}$$

(ils découlent de l'expression du développement asymptotique donnée dans [Wat44, § 7.21]), avec θ est un réel positif non nul fixé, on déduit la plupart des inégalités énoncées dans la suite.

Fixons $\nu \in \mathbb{Z}$. Comme Z_ν est un sous-ensemble discret de $\mathbb{R}^*$ alors on peut ordonner l'ensemble $\{\frac{\lambda^2}{4} \mid \lambda \in Z_\nu\}$ et on note par $\frac{\lambda^2}{4}$ la $k-$ème valeur de cet ensemble pour l'ordre croissant. On pose φ_k la fonction sur $\mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} J_n(\lambda_k x) & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{J_n(\lambda_k)}{J_{n-m}(\lambda_k)}x^m J_{n-m}(\frac{\lambda_k}{x}) & \text{si } x > 1. \end{cases} \tag{1.29}$$

Soit f une fonction sur $\mathbb{R}$ et considère la somme partielle suivante :

$$S_n(x) := \sum_{k=1}^{n} \frac{(\varphi_k, f)_{L^2,\infty}}{\|\varphi_k\|^2_{L^2,\infty}}\varphi_k(x),\ x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}^*,$$

où on a confondu φ_k avec φ_{ν,λ_k} et f avec $fe^{i\nu\theta} \otimes 1$.

On pose pour tous $0 < t < 1$ et $0 < x < 1$:

$$\begin{aligned}
\kappa_n^+(t,x) &:= \sum_{k=1}^{n} \frac{J_\nu(t\lambda_k)J_\nu(x\lambda_k)}{2\|\varphi_k\|^2_{L^2,\infty}},\\
\kappa_n^-(t,x) &:= \sum_{k=1}^{n} \frac{J_\nu(\lambda_k)}{J_{\nu-m}(\lambda_k)}\frac{J_\nu(x\lambda_k)J_{\nu-m}(\lambda_k t)}{\|\varphi_k\|^2_{L^2,\infty}},\\
\tau_n^+(t,x) &:= \sum_{k=1}^{n} \frac{J_\nu(\lambda_k)^2}{J_{\nu-m}(\lambda_k)^2}\frac{J_{\nu-m}(t\lambda_k)J_{\nu-m}(x\lambda_k)}{\|\varphi_k\|^2_{L^2,\infty}},\\
\tau_n^-(t,x) &:= \sum_{k=1}^{n} \frac{J_\nu(\lambda_k)}{J_{\nu-m}(\lambda_k)}\frac{J_{\nu-m}(\lambda_k x)J_\nu(\lambda_k t)}{\|\varphi_k\|^2_{L^2,\infty}}.
\end{aligned}$$

On vérifie que

$$S_n(x) = \int_0^1 f(t)\kappa_n^+(t,x)tdt + \int_1^\infty \frac{f(t)}{t^m}\kappa_n^-(\frac{1}{t},x)\frac{tdt}{t^4}, \quad \text{si } 0 \le x \le 1,$$

et

$$S_n(x) = \int_0^1 f(t)x^m\tau_n^-(t,\frac{1}{x})tdt + \int_1^\infty \frac{f(t)}{t^m}x^m\tau_n^-(\frac{1}{t},\frac{1}{x})\frac{tdt}{t^4}, \quad \text{si } x \ge 1,$$

Donc, il est naturel d'étudier les fonctions $\kappa_n^+, \kappa_n^-, \tau_n^+$ et τ_n^-. Pour cela on va introduire les quatres fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$ suivantes :

$$\begin{aligned}
t_{+,\nu}(w) &= \frac{J_\nu(tw)J_\nu(xw)J_{\nu-m}(w)}{J_\nu(w)L_\nu(w)},\\
t_{-,\nu}(w) &= \frac{J_\nu(xw)J_{\nu-m}(wt)}{L_\nu(w)},\\
s_{+,\nu}(w) &= \frac{J_\nu(w)}{J_{\nu-m}(w)}\frac{J_{\nu-m}(xw)J_{\nu-m}(tw)}{L_\nu(w)},\\
s_{-,\nu}(w) &= \frac{J_{\nu-m}(xw)J_\nu(tw)}{L_\nu(w)}.
\end{aligned}$$

où $0 < t < 1$ et $0 < x < 1$.

On note par A_n un réel compris strictement entre λ_n et λ_{n+1} [5]. On a le théorème suivant :

Théorème 1.3.10. *Soit $\nu \in \mathbb{Z}$.*

Si $\nu \le -1$ ou $\nu \ge m+1$, alors on a pour $n \gg 1$

$$\begin{aligned}
\frac{i}{2\pi}\int_{A_n-\infty i}^{A_n+\infty i} t_{+,\nu}(w)dw &= \kappa_n^+(t,x) - \sum_{\substack{\alpha|J_\nu(\alpha)=0\\ 0<\alpha<A_n}} \frac{J_\nu(t\alpha)J_\nu(x\alpha)}{J_{\nu+1}(\alpha)^2},\\
\frac{i}{2\pi}\int_{A_n-\infty i}^{A_n+\infty i} t_{-,\nu}(w)dw &= \kappa_n^-(t,x),\\
\frac{i}{2\pi}\int_{A_n-\infty i}^{A_n+\infty i} s_{+,\nu}(w)dw &= \tau_n^+(t,x) - \sum_{\substack{\gamma|J_{\nu-m}(\alpha)=0\\ 0<\gamma<A_n}} \frac{J_{\nu-m}(t\gamma)J_{\nu-m}(x\gamma)}{J_{\nu-m+1}(\gamma)^2},\\
\frac{i}{2\pi}\int_{A_n-\infty i}^{A_n+\infty i} s_{-,\nu}(w)dw &= \tau_n^-(t,x).
\end{aligned}$$

5. On a noté par $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ les zéros positifs de L_ν ordonnés par ordre croissant.

Si $0 \leq \nu \leq m$, *on a pour* $n \gg 1$

$$\frac{i}{2\pi}\int_{A_n-\infty i}^{A_n+\infty i} t_{+,\nu}(w)dw = -2\frac{(m-\nu+1)(\nu+1)}{(m+2)}t^\nu x^\nu + \kappa_n^+(t,x) - \sum_{\substack{\alpha|J_\nu(\alpha)=0\\ 0<\alpha<A_n}} \frac{J_\nu(t\alpha)J_\nu(x\alpha)}{J_{\nu+1}(\alpha)^2},$$

$$\frac{i}{2\pi}\int_{A_n-\infty i}^{A_n+\infty i} t_{-,\nu}(w)dw = -2\frac{(m-\nu+1)(\nu+1)}{(m+2)}t^{m-\nu} x^\nu + \kappa_n^-(t,x),$$

$$\frac{i}{2\pi}\int_{A_n-\infty i}^{A_n+\infty i} s_{+,\nu}(w)dw = -2\frac{(m-\nu+1)(\nu+1)}{(m+2)}t^{m-\nu} x^{m-\nu} + \tau_n^+(t,x) - \sum_{\substack{\alpha|J_\nu(\alpha)=0\\ 0<\alpha<A_n}} \frac{J_{\nu-m}(t\gamma)J_{\nu-m}(x\gamma)}{J_{\nu-m+1}(\gamma)^2},$$

$$\frac{i}{2\pi}\int_{A_n-\infty i}^{A_n+\infty i} s_{-,\nu}(w)dw = -2\frac{(m-\nu+1)(\nu+1)}{(m+2)}t^{\nu} x^{m-\nu} + \tau_n^-(t,x).$$

Comme dans [Wat44, § 18], afin de démontrer ce théorème on commence par calculer les résidus des fonctions $t_{+,\nu}, t_{-,\nu}, s_{+,\nu}$ et $s_{-,\nu}$ aux pôles respectifs et représentera $\kappa^+(t,x), \kappa^-(t,x), \tau^+(t,x)$ et $\tau^-(t,x)$ comme intégrales des quatre premières fonctions le long d'un rectangle. Pour pouvoir retrouver les formules du théorème, on aura besoin des estimations sur L_ν du type :

$$|L_\nu(\theta w)| \leq \frac{c_\nu}{(\theta|w|)}\exp(2\theta|Im(w)|), \quad |L_\nu(w)| \geq \frac{c'_\nu}{|w|}\exp(2|Im(w)|), \tag{1.30}$$

avec c_ν et c'_ν deux constantes réelles positives non nulles et w appartient à un ouvert contenant la droite verticale d'abscisse A_n (avec $0 < \theta < 1$), or on va montrer que cela résulte du lemme suivant :

Lemme 1.3.11. *On note par* I_ν *la fonction de Bessel modifiée d'ordre* ν *et on pose*

$$G_\nu(z) := I_{\nu+1}(z)I_{\nu-m}(z) + I_\nu(z)I_{\nu-m-1}(z), \quad \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

alors on a

$$G_{-\nu}(z) = G_{m+\nu}(z), \quad \forall\, \nu \in \mathbb{Z},$$
$$G_n(z) = \frac{1}{i^{2\nu-m-1}}L_\nu(iz), \forall\, z \in \mathbb{C} \tag{1.31}$$

Pour z *assez large avec* $|\arg(z)| < \frac{\pi}{2}.$, *on a*

$$G_{\nu+m}(z) = \frac{e^{2z}}{2\pi z}\Big(1 - \frac{4n^2+2m^2+4nm+2m+1}{2z} + O(\frac{1}{z^2})\Big) \quad si\, \nu \in \mathbb{N}^*, \tag{1.32}$$

et

$$G_\nu(z) = \frac{e^{2z}}{2\pi z}\Big(2 - \frac{2n^2+m^2-2nm+m}{z} + O(\frac{1}{z^2})\Big) \quad si\, 0 \leq \nu \leq m \tag{1.33}$$

Démonstration. Cela découle directement des propriétés des fonctions de Bessel, en effet, 1) résulte de la définition de I_n et on a

$$\begin{aligned} G_n(z) &= I_{n+1}(z)I_{n-m}(z) + I_n(z)I_{n-m-1}(z) \\ &= I_{-n-1}(z)I_{-n+m}(z) + I_{-n}(z)I_{-n+m+1}(z), \quad [\text{AS92}, 9.6.6] \\ &= I_{(m-n)+1}(z)I_{(m-n)-m}(z) + I_{(m-n)}(z)I_{(m-n)-m-1}(z) \\ &= G_{m-n}(z). \end{aligned}$$

D'après cf. [AS92, 9.7.1], on a pour z assez grand avec ($|\arg(z)| < \frac{\pi}{2}$) :

$$I_n(z) = \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}(1 - \frac{4n^2-1}{8z} + O(\frac{1}{z^2})) \tag{1.34}$$

pour $n \in \mathbb{Z}$ fixé. Dans si $\nu \in\in \mathbb{N}$ alors on vérifie en utilisant ce développement que

$$G_{\nu+m}(z) = \frac{e^{2z}}{2\pi z}\Big(1 - \frac{4n^2+2m^2+4nm+2m+1}{2z} + O(\frac{1}{z^2})\Big).$$

Par contre lorsque $0 \leq \nu \leq m$, on écrit

$$G_\nu(z) = I_{\nu+1}(z)I_{m-\nu} + I_\nu(z)I_{m+1-\nu}(z),$$

(on a utilisé le fait suivant : $I_{-n} = I_n$) après on remplace par le développement de I_n et on vérifie que

$$G_\nu(z) = \frac{e^{2z}}{2\pi z}\Big(2 - \frac{2n^2+m^2-2nm+m}{z} + O(\frac{1}{z^2})\Big).$$

□

Maintenant on peut déduire les estimations (1.30) en utilisant (1.31), (1.32), (1.33) et l'égalité :

$$L_\nu(-z) = (-1)^{m+1}L_\nu(z) \quad \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

Soit donc φ_λ un vecteur propre de $\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}$. On a introduit L_ν la fonction sur $\mathbb{C}$ définie par

$$L_\nu(z) = -z^m \frac{d}{dz}\big(z^{-m}J_{\nu-m}(z)J_\nu(z)\big), \quad \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

et on a montré dans (1.3.5) la relation suivante

$$L'_\nu(\lambda) = 2\frac{J_{\nu-m}(\lambda)}{J_\nu(\lambda)}(\varphi_\lambda, \varphi_\lambda)_{L^2,\infty}, \quad \forall\, \lambda \in Z_\nu\ \forall\, \nu \in Z.$$

On note par λ un zéro de L_ν (c'est à dire un élément de Z_ν) et par α un zéro non nul de J_ν. On sait qu'ils sont simples. On va dresser la liste de tous les résidus possibles des fonctions $t_{+,\nu}$, $t_{-,\nu}$, $s_{+,\nu}$ et $s_{-,\nu}$ en leurs éventuels pôles en fonction de ν :

On a pour tout $\nu \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_\lambda(t_{+,\nu}) &= \frac{J_\nu(t\lambda)J_\nu(x\lambda)J_{\nu-m}(\lambda)}{J_\nu(\lambda)L'_\nu(\lambda)} = \frac{J_\nu(t\lambda)J_\nu(x\lambda)}{2\|\varphi_\lambda\|^2_{L^2,\infty}},\\
\mathrm{Res}_\alpha(t_{+,\nu}) &= \frac{J_\nu(x\alpha)J_\nu(t\alpha)J_{\nu-m}(\alpha)}{J'_\nu(\alpha)L_\nu(\alpha)} = -\frac{J_\nu(t\alpha)J_\nu(x\alpha)}{J'_\nu(\alpha)^2}, \quad \text{où } \alpha \,|\, J_\nu(\alpha) = 0,\\
\mathrm{Res}_\lambda(t_{-,\nu}) &= \frac{J_\nu(x\lambda)J_{\nu-m}(t\lambda)}{L'_\nu(\lambda)} = \frac{J_\nu(\lambda)}{J_{\nu-m}(\lambda)}\frac{J_\nu(x\lambda)J_{\nu-m}(\lambda t)}{\|\varphi_\lambda\|^2_{L^2,\infty}},\\
\mathrm{Res}_\lambda(s_{+,\nu}) &= \frac{J_\nu(\lambda)}{J_{\nu-m}(\lambda)}\frac{J_{\nu-m}(t\lambda)J_{\nu-m}(x\lambda)}{L'_\nu(\lambda)} = \frac{J_\nu(\lambda)^2}{J_{\nu-m}(\lambda)^2}\frac{J_{\nu-m}(t\lambda)J_{\nu-m}(x\lambda)}{\|\varphi_\lambda\|^2_{L^2,\infty}}\\
\mathrm{Res}_\gamma(s_{+,\nu}) &= -\frac{J_\nu(\gamma)}{J'_{\nu-m}(\gamma)^2}\frac{J_{\nu-m}(t\gamma)J_{\nu-m}(x\gamma)}{J_\nu(\gamma)} = -\frac{J_{\nu-m}(t\gamma)J_{\nu-m}(x\gamma)}{J_{\nu-m+1}(\gamma)^2}, \quad \text{où } \gamma \,|\, J_{\nu-m}(\gamma) = 0,\\
\mathrm{Res}_\lambda(s_{-,\nu}) &= \frac{J_\nu(\lambda)}{J_{\nu-m}(\lambda)}\frac{J_{\nu-m}(\lambda x)J_\nu(\lambda t)}{L'_\nu(w)} = \frac{J_\nu(\lambda)}{J_{\nu-m}(\lambda)}\frac{J_{\nu-m}(\lambda x)J_\nu(\lambda t)}{\|\varphi_\lambda\|^2_{L^2,\infty}}.
\end{aligned}$$

Rappelons qu'on a utilisé le fait que les zéros non nuls d'une fonction de Bessel sont simples ainsi que les deux égalités suivantes $L_\nu(\alpha) = -J_{\nu-m}(\alpha)J'_\nu(\alpha)$ et $L_\nu(\gamma) = -J_\nu(\gamma)J'_{\nu-m}(\gamma))$.

Par contre ces fonctions ci-dessus peuvent, en fonction de ν, avoir un pôle en zéro. En se rappelant que J_p est d'ordre $|p|$ en zéro et en utilisant lemme (1.3.3) on peut calculer explicitement l'ordre de ces fonctions en $w = 0$ en fonction de ν. En effet, lorsque $\nu \leq -1$ ou $\nu \geq m+1$ alors on a (on se ramène au cas $\nu \geq 1$ par (1.17))

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ord}_0(t_{+,\nu}) &= (2\nu + \nu + m) - (\nu + 2\nu + m - 1) = 1,\\
\mathrm{Ord}_0(t_{-,\nu}) &= (2\nu + \nu + m) - (2\nu + m - 1) = 1,\\
\mathrm{Ord}_0(s_{+,\nu}) &= 1\\
\mathrm{Ord}_0(s_{-,\nu}) &= 1.
\end{aligned}$$

Dans l'autre situation c'est à dire $0 \leq \nu \leq m$, on montre que ces quatres fonctions sont d'ordre -1 en $w = 0$ pour cela on va calculer leur résidu en $w = 0$. Les calculs suivants découlent directement des propriètés des fonctions de Bessel (précisement la formule (1.40)) et celles de L_ν établies dans (1.3.3), on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_0(t_{+,\nu}) &= 2\frac{(m-\nu+1)(\nu+1)}{(m+2)} t^\nu x^\nu,\\
\mathrm{Res}_0(t_{-,\nu}) &= 2\frac{(m-\nu+1)(\nu+1)}{(m+2)} t^{m-\nu} x^\nu,\\
\mathrm{Res}_0(s_{+,\nu}) &= 2\frac{(m-\nu+1)(\nu+1)}{(m+2)} t^{m-\nu} x^{m-\nu},\\
\mathrm{Res}_0(s_{-,\nu}) &= 2\frac{(m-\nu+1)(\nu+1)}{(m+2)} t^\nu x^{m-\nu}.
\end{aligned}$$

Maintenant on se propose de démontrer les égalités du théorème.

Commençons par exemple par $t_{+,\nu}$ (avec ν un entier quelconque). Comme dans [Wat44, § 18.21], soit A_n un réel positif strictement compris entre λ_n et λ_{n+1} deux zéros consécutifs de L_ν. On considère le rectangle de sommets Bi, $-Bi$, $A_n + iB$ et $A_n - iB$ avec $B > 0$. On a l'intégrale de $t_{+,\nu}$ le long de ce rectangle qu'on a déformé dans un voisinage assez petit de $w = 0$ en un demi-cercle est égale à

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{J_{\nu+m}(t\lambda_k) J_{\nu+m}(x\lambda_k)}{2\|\varphi_k\|^2_{L^2,\infty}} - \sum_{\substack{\alpha | J_{\nu+m}(\alpha)=0 \\ 0<\alpha<A_n}} \frac{J_{\nu+m}(t\alpha) J_{\nu+m}(x\alpha)}{J_{\nu+m+1}(\alpha)^2}.$$

On a montré qu'il existe deux constantes réelles c_ν et c'_ν telles que

$$|L_\nu(\theta w)| \leq \frac{c_\nu}{(\theta|w|)} \exp(2\theta|Im(w)|), \quad |L_\nu(w)| \geq \frac{c'_\nu}{|w|} \exp(2|Im(w)|),$$

où w est dans un domaine ouvert contenant la droite verticale qui passe par $A_n - \infty i$ et $A_n + \infty i$. notons que ces deux inégalités sont semblables aux (1.28). En posant $w = u + iv$ avec $u, v \in \mathbb{R}$ et en prenant $t, x > 0$ avec $0 < t + x < 2$ on obtient, en utilisant les deux dernières inégalités et (1.28) :

$$\begin{aligned}
|t_{+,\nu}(w)| &= \Big|\frac{J_{\nu+m}(tw) J_{\nu+m}(xw) J_\nu(w)}{J_{\nu+m}(w) L_\nu(w)}\Big|\\
&\leq \frac{c_{+,\nu}}{\sqrt{tx}} \exp(-(2-(t+x))|v|),
\end{aligned} \tag{1.35}$$

pour tout w dans un voisinage ouvert de la droite verticale d'abscisse A_n (avec $c_{+,\nu}$ une constante réelle). Par conséquent

$$\lim_{B\mapsto\infty}\int_{-Bi}^{A_n-Bi} t_{+,\nu}(w)dw = \lim_{B\mapsto\infty}\int_{Bi}^{A_n+Bi} t_{+,\nu}(w)dw = 0$$

Quant à la contribution de $t_{+,\nu}$ sur le segment $[-Bi, Bi]$ on va utiliser le fait que $t_{+,\nu}$ est une fonction impaire (cela résulte de la relation (1.18) et le fait suivant : $J_p(-z) = (-1)^p J_p(z),\ \forall\, p \in \mathbb{N}, \forall\, z \in \mathbb{C}$). Cela implique que l'intégrale le long du segment $[-Bi, (-B+\varepsilon)i] \cup C_\varepsilon \cup [i(B-\varepsilon), iB]$ [6] est donnée par $\mathrm{Res}_0(t_{+,\nu})$. En combinant tout cela, on obtient

$$\frac{i}{2\pi i}\int_{A_n-\infty i}^{A_n+\infty i} t_{+,\nu}(w)dw = -\mathrm{Res}_0(t_{+,\nu}) + \sum_{k=1}^{n}\frac{J_{\nu+m}(t\lambda_k)J_{\nu+m}(x\lambda_k)}{2\|\varphi_k\|^2_{L^2,\infty}} - \sum_{\substack{\alpha|J_{\nu+m}(\alpha)=0\\ 0<\alpha<A_n}}\frac{J_{\nu+m}(t\alpha)J_{\nu+m}(x\alpha)}{J_{\nu+m+1}(\alpha)^2}.$$

Ce qui termine la preuve du théorème pour les formules en $t_{+,\nu}$ pour $\nu \in \mathbb{Z}$ quelconque.

De la même manière on peut établir qu'il existe des constantes réelles $c_{-,\nu}, d_{+,\nu}$ et $d_{-,\nu}$ telles que :

$$\begin{aligned}
|t_{-,\nu}(w)| &\le \frac{c_{-,\nu}}{\sqrt{tx}}\exp(-(2-(t+x))|v|),\\
|s_{+,\nu}(w)| &\le \frac{d_{+,\nu}}{\sqrt{tx}}\exp(-(2-(t+x))|v|),\\
|s_{-,\nu}(w)| &\le \frac{d_{-,\nu}}{\sqrt{tx}}\exp(-(2-(t+x))|v|),
\end{aligned}$$

valables pour tout w dans un domaine contenant la droite verticale d'abscisse A_n et on suit le même raisonnement pour trouver les formules restantes. Ce qui termine la preuve du théorème.

Lemme 1.3.12. *Soit $n \in \mathbb{N}$, et $k \in \mathbb{N}$. Si $\frac{k-2}{4} \in \mathbb{N}$ alors il existe des réels $b_{1,k}, \dots, b_{\frac{k-2}{4},k}$ tels que*

$$\int_0^1 t^{k+1+n}J_n(tw)dt = \frac{J_{n+1}(w)}{w} - k\frac{J_{n+2}(w)}{w^2} + \sum_{i=1}^{\frac{k-2}{4}} b_{i,k}\frac{J_{n+i+2}(w)}{w^{i+2}}, \quad \forall\, w \in \mathbb{C}^*.$$

Démonstration. La preuve de ce lemme se fait par récurrence en utilisant la formule suivante

$$\frac{d}{dz}(z^pJ_p(z)) = z^pJ_{p-1}(z), \quad \forall\, z \in \mathbb{C},\ \forall\, p \in \mathbb{Z}.$$

En effet, on a par une intégration par parties : [7]

$$\begin{aligned}
\int_0^w t^{k+n+1}J_n(t)dt &= \left[t^{k+n+1}J_{n+1}(t)\right]_0^w - k\int_0^w t^{k+n}J_{n+1}(t)dt\\
&= w^{k+n+1}J_{n+1}(w) - k\left[t^{k+n}J_{n+2}(t)\right]_0^w + k(k-2)\int_0^w t^{k+n-1}J_{n+2}(t)dt\\
&= w^{k+n+1}J_{n+1}(w) - kw^{k+n}J_{n+2}(w)\\
&+ k(k-2)\left[t^{k+n-1}J_{n+3}(t)\right]_0^w - k(k-2)(k-4)\int_0^w t^{k+n-2}J_{n+3}(t)dt\\
&= w^{k+n+1}J_{n+1}(w) + \sum_{i=0}^{p}(-1)^{i+1}k(k-2)(k-4)\cdots(k-2i)w^{k+n-i}J_{n+i+2}(w)\\
&+ (-1)^{p+1}k(k-2)\cdots(k-2(i+1))\int_0^w t^{k+n-p-1}J_{n+p+2}(t)dt.
\end{aligned}$$

6. C_δ est le demi-cercle à gauche de l'axe imaginaire de centre 0 et rayon $B-\delta$, avec $0<\delta\ll 1$.
7. Le signe $\int_0^w$ signifie l'intégration le long du segment $[0, w]$ dans le plan complexe.

On s'arrête lorsque $(k+n-p-1)-1 = n+p+2$, c'est à dire lorsque $p = \frac{k-4}{2}$. On termine la preuve en notant que

$$\int_0^1 t^{k+n+1} J_n(tw)dt = \frac{1}{w^{k+n+2}} \int_0^w t^{k+n+1} J_n(t)dt.$$

□

Corollaire 1.3.13. *Soient p et q deux entiers positifs supérieurs à 2. Il existe des constantes réelles $c_1, c_2, \ldots, c_{\max(p-2,q-2)}$ telles que*

$$\int_0^1 (t^{2p+n+1} - t^{2q+n+1}) J_n(tw)dt = 2\frac{q-p}{w^2} J_{n+2}(w) + \sum_{i=1}^{\max(p-2,q-2)} c_i \frac{J_{n+i+2}(w)}{w^{i+2}}.$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du lemme précédent. □

Théorème 1.3.14. *Soit $\nu \in \mathbb{Z}$. Si $\nu \leq -1$ ou $\nu \geq m+1$ alors il existe des constantes réelles l_k et l'_k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ telles que pour tout $x \in [0,1]$:*

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} l_k x^{\frac{1}{2}} \frac{J_\nu(x\lambda_k)}{2\|\varphi_k\|^2_{L^2,\infty}} &= x^{2p+\nu+1} - x^{2q+\nu+1} \\
\sum_{k=1}^{\infty} l'_k x^{\frac{1}{2}} \frac{J_\nu(x\lambda_k)}{2\|\varphi_k\|^2_{L^2,\infty}} &= 0, \\
\sum_{k=1}^{\infty} l'_k \frac{J_\nu(\lambda_k)}{J_{\nu-m}(\lambda_k)} x^{\frac{1}{2}} \frac{J_{\nu-m}(x\lambda_k)}{\|\varphi_k\|^2_{L^2,\infty}} &= x^{2p+\nu-m+\frac{1}{2}} - x^{2q+\nu-m+\frac{1}{2}}, \\
\sum_{k=1}^{\infty} l_k \frac{J_\nu(\lambda_k)}{J_{\nu-m}(\lambda_k)} x^{\frac{1}{2}} \frac{J_{\nu-m}(x\lambda_k)}{\|\varphi_k\|^2_{L^2,\infty}} &= 0,
\end{aligned}$$

avec convergence uniforme sur $[0,1]$.

Soit $\nu \in \mathbb{Z}$. On choisit p et q supérieurs à $|\nu|$. Par le corollaire précédent il existe des constantes réelles $c_{i,\nu}$ telles que pour tout w dans un ouvert ne contenant pas les pôles d'aucune des quatres fonctions, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (t^{2p+\nu+1} - t^{2q+\nu+1}) t_{+,\nu}(w)dt &= \int_0^1 (t^{2p+\nu+1} - t^{2q+\nu+1}) J_\nu(tw)dt \frac{J_\nu(xw)J_{\nu-m}(w)}{J_\nu(w)L_\nu(w)}, \\
&= 2\frac{q-p}{w^2} J_{\nu+2}(w) \frac{J_\nu(xw)J_{\nu-m}(w)}{J_\nu(w)L_\nu(w)} + \sum_{i=1}^{\max(p-2,q-2)} c_{i,\nu} \frac{J_{n+i+2}(w)}{w^{i+2}} \frac{J_\nu(xw)J_{\nu-m}(w)}{J_\nu(w)L_\nu(w)}
\end{aligned}$$

Or on a $\forall\, i \geq 0$ et en utilisant (1.30) :

$$\begin{aligned}
\left| \int_{A_n - i\infty}^{A_n + i\infty} \frac{J_{n+i+2}(w)}{w^{i+2}} \frac{J_\nu(xw)J_{\nu-m}(w)}{J_\nu(w)L_\nu(w)} dw \right| &\leq \int_{A_n - i\infty}^{A_n - i\infty} \frac{c_{\nu,++}}{\sqrt{x}|w|^{i+2}} \exp(-(1-x)|v|)|dw| \\
&\leq \frac{c_{\nu,++}}{\sqrt{x}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(A_n^2 + v^2)} dv, \quad \text{puisque}\, 0 < x < 1 \\
&= \frac{\pi c_{\nu,++}}{\sqrt{x} A_n}.
\end{aligned}$$

Par suite, il existe une constante C_ν telle que

$$\left|\int_{A_n-i\infty}^{A_n+i\infty}\int_0^1 (t^{2p+\nu+1}-t^{2q+\nu+1})t_{+,\nu}(w)dt\right| \leq \frac{C_\nu}{\sqrt{x}A_n}, \quad \forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ x\in]0,1[.$$

Pour $x\in]0,1[$ fixé, on a $t_{+,\nu}$ vue comme une fonction en t et w est intégrable d'après (1.35). Par conséquent

$$\int_{A_n-i\infty}^{A_n+i\infty}\int_0^1 (t^{2p+\nu+1}-t^{2q+\nu+1})t_{+,\nu}(w)dt = \int_0^1 (t^{2p+\nu+1}-t^{2q+\nu+1})\int_{A_n-i\infty}^{A_n+i\infty} t_{+,\nu}(w)dt.$$

En utilisant les formules du théorème (1.3.10), on obtient en faisant tendre n vers l'infini et en multipliant par $x^{\frac{1}{2}}$:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^1 (t^{2p+\nu+1}-t^{2q+\nu+1})J_\nu(t\lambda_k)dt\frac{x^{\frac{1}{2}}J_\nu(x\lambda_k)}{2\|\varphi_k\|^2_{L^2,\infty}} = \sum_{\substack{\alpha|J_\nu(\alpha)=0\\ 0<\alpha}}\int_0^1 (t^{2p+\nu+1}-t^{2q+\nu+1})J_\nu(t\alpha)dt\frac{x^{\frac{1}{2}}J_\nu(x\alpha)}{J_{\nu+1}(\alpha)^2},$$

lorsque $\nu\leq -1$ ou $\nu\geq m+1$. Or le terme à droite n'est autre que $x^{2p+\nu+1}-x^{2q+\nu+1}$, en plus cette somme converge uniformément vers $x\mapsto x^{2p+\nu+1}-x^{2q+\nu+1}$ sur $[0,1]$. En effet, d'une part comme $x\mapsto x^{2p+\nu+\frac{1}{2}}-x^{2p+\nu+\frac{1}{2}}$ est dérivable sur $]0,1]$ et s'annule en $x=1$ alors d'après [Wat44, § 18.26] son développement en série de Fourier-Bessel converge uniformément vers cette fonction sur un intervalle de la forme $[1-\delta,1]$, d'autre part, le résultat du (voir premier paragraphe du) [Wat44, p. 617] nous fournit la convergence sur $[0,1-\delta]$, avec δ positif arbitraire. Notons par $l_k=\int_0^1(t^{2p+\nu+1}-t^{2q+\nu+1})J_\nu(t\lambda_k)dt$ On a donc,

$$\sum_{k=1}^{\infty} l_k x^{\frac{1}{2}}\frac{J_\nu(x\lambda_k)}{2\|\varphi_k\|^2_{L^2,\infty}} = x^{2p+\nu+1}-x^{2q+\nu+1}, \quad \forall\, x\in[0,1].$$

De même pour $t_{-,\nu}$, en utilisant le même raisonnement, on obtient la convergence de la somme suivante sur $[0,1]$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} l'_k x^{\frac{1}{2}}\frac{J_\nu(x\lambda_k)}{2\|\varphi_k\|^2_{L^2,\infty}} = 0, \quad \forall\, x\in[0,1].$$

On montre aussi que

$$\begin{aligned}\int_0^1 (t^{2p+\nu+1}-t^{2q+\nu+1})s_{+,\nu}(w)dt &= \int_0^1 (t^{2p+\nu-m+1}-t^{2q+\nu-m+1})J_{\nu-m}(tw)dt\frac{J_\nu(w)}{J_{\nu-m}(w)}\frac{J_{\nu-m}(xw)J_{\nu-m}(w)}{J_{\nu-m}(w)L_\nu(w)},\\ &= 2\frac{q-p}{w^2}J_{\nu-m+2}(w)\frac{J_\nu(w)}{J_{\nu-m}(w)}\frac{J_{\nu-m}(xw)J_{\nu-m}(w)}{J_{\nu-m}(w)L_\nu(w)}\\ &+ \sum_{i=1}^{\max(p-2,q-2)} c_{i,\nu-m}\frac{J_{n+i+2}(w)}{w^{i+2}}\frac{J_\nu(w)}{J_{\nu-m}(w)}\frac{J_{\nu-m}(xw)J_{\nu-m}(w)}{J_{\nu-m}(w)L_\nu(w)}.\end{aligned}$$

Et comme avant, on peut trouver $C_{\nu-m}$ une constante réelle telle que

$$\left|\int_{A_n-i\infty}^{A_n+i\infty}\int_0^1 (t^{2p+\nu-m+1}-t^{2q+\nu-m+1})s_{+,\nu}(w)dt\right| \leq \frac{C_{\nu-m}}{\sqrt{x}A_n}, \quad \forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ x\in]0,1[.$$

et d'après (1.3.10), on aura

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{J_\nu(\lambda_k)}{J_{\nu-m}(\lambda_k)} \int_0^1 (t^{2p+\nu-m+1} - t^{2q+\nu-m+1}) J_{\nu-m}(t\lambda_k) dt \frac{J_\nu(\lambda_k)}{J_{\nu-m}(\lambda_k)} \frac{J_{\nu-m}(x\lambda_k)}{\|\varphi_k\|^2_{L^2,\infty}} \\ = \sum_{\substack{\gamma | J_{\nu-m}(\alpha)=0 \\ 0<\gamma}} \int_0^1 (t^{2p+\nu-m+1} - t^{2q+\nu-m+1}) J_{\nu-m}(t\gamma) dt \frac{J_{\nu-m}(x\gamma)}{J_{\nu-m+1}(\gamma)^2} \\ = x^{2p+\nu-m} - x^{2q+\nu-m}, \quad \forall\, x \in]0,1[.\end{aligned}$$

Quand on multiplie par $x^{\frac{1}{2}}$, on obtient par le même argument que pour $t_{+,\nu}$ que la somme suivante converge uniformément vers $x^{2p+\nu-m+\frac{1}{2}} - x^{2q+\nu-m+\frac{1}{2}}$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} l'_k \frac{J_\nu(\lambda_k)}{J_{\nu-m}(\lambda_k)} x^{\frac{1}{2}} \frac{J_{\nu-m}(x\lambda_k)}{\|\varphi_k\|^2_{L^2,\infty}} = x^{2p+\nu-m+\frac{1}{2}} - x^{2q+\nu-m+\frac{1}{2}}, \quad \forall\, x \in]0,1[.$$

où $l'_k = \frac{J_\nu(\lambda_k)}{J_{\nu-m}(\lambda_k)} \int_0^1 (t^{2p+m-\nu+1} - t^{2q+m-\nu+1}) J_\nu(t\lambda_k) dt$.

Quant à $s_{-,\nu}$, on montre que

$$\sum_{k=1}^{\infty} l_k \frac{J_\nu(\lambda_k)}{J_{\nu-m}(\lambda_k)} \frac{J_{\nu-m}(x\lambda_k)}{\|\varphi_k\|^2_{L^2,\infty}} = 0, \quad \forall\, x \in]0,1[.$$

Si l'on pose

$$\begin{aligned} P^-_{(p,q)}(z) = P^+_{(p,q)}(z) = (|z|^{2p+\nu} - |z|^{2q+\nu}) e^{i\nu\theta}, \quad \text{si } |z| \leq 1, \\ -P^+_{(p,q)}(z) = P^+_{(p,q)}(z) = (|z|^{-2p+\nu} - |z|^{-2q+\nu}) e^{i\nu\theta}, \quad \text{si } |z| \geq 1 \end{aligned}$$

alors on a

$$\begin{aligned}(P^\pm_{(p,q)} \otimes 1, \varphi_{\nu,\lambda})_{L^2} &= \int_0^1 (t^{2p+\nu+1} - t^{2q+\nu+1}) J_\nu(\lambda t) dt \pm \frac{J_\nu(\lambda)}{J_{\nu-m}(\lambda)} \int_1^\infty (t^{-2p+\nu} - t^{-2q+\nu}) \frac{1}{t^m} J_{\nu-m}(\frac{\lambda}{t}) \frac{tdt}{t^4} \\ &= \int_0^1 (t^{2p+\nu+1} - t^{2q+\nu+1}) J_\nu(\lambda t) dt \pm \frac{J_\nu(\lambda)}{J_{\nu-m}(\lambda)} \int_0^1 (t^{2p+m-\nu+1} - t^{2q+m-\nu+1}) J_{\nu-m}(\lambda t) t dt \\ &= l_k \pm l'_k\end{aligned}$$

Donc, on a montré que

$$\min(|z|^{\frac{1}{2}}, |z|^{-\frac{1}{2}}) P^\pm_{(p,q)} \otimes 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(P^\pm_{(p,q)} \otimes 1, \varphi_{\nu,\lambda})_{L^2}}{\|\varphi_k\|^2_{L^2}} \min(|z|^{\frac{1}{2}}, |z|^{-\frac{1}{2}}) \varphi_k,$$

où la somme converge uniformément sur $\mathbb{P}^1$.

Théorème 1.3.15. *Soit ν un entier fixé compris entre 0 et m. Il existe b^+_ν et b^-_ν deux réels et deux suites de réels $(a^+_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ et $(a^-_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ tels que $\forall\, x \in [0,1]$*

$$\begin{aligned} b^+_\nu x^{\nu+\frac{1}{2}} &= \sum_{k=1}^{\infty} a^-_k x^{\frac{1}{2}} \frac{J_\nu(\lambda_k x)}{\|\varphi_k\|^2} - (x^{2p+\nu+\frac{1}{2}} - x^{2q+\nu+\frac{1}{2}}), \\ b^+_\nu x^{m-\nu+\frac{1}{2}} &= \sum_{k=1}^{\infty} a^+_k x^{\frac{1}{2}} \frac{J_\nu(\lambda_k)}{J_{\nu-m}(\lambda_k)} \frac{J_{\nu-m}(\lambda_k x)}{\|\varphi_k\|^2} - (x^{2p+(m-\nu)+\frac{1}{2}} - x^{2q+(m-\nu)+\frac{1}{2}}), \end{aligned}$$

et

$$b_\nu^- x^{\nu+\frac{1}{2}} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- x^{\frac{1}{2}} \frac{J_\nu(\lambda_k x)}{\|\varphi_k\|^2} - \big(x^{2p+\nu+\frac{1}{2}} - x^{2q+\nu+\frac{1}{2}}\big),$$

$$b_\nu^- x^{m-\nu+\frac{1}{2}} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- x^{\frac{1}{2}} \frac{J_\nu(\lambda_k)}{J_{\nu-m}(\lambda_k)} \frac{J_{\nu-m}(\lambda_k x)}{\|\varphi_k\|^2} + \big(x^{2p+(m-\nu)+\frac{1}{2}} - x^{2q+(m-\nu)+\frac{1}{2}}\big),$$

En plus, on a convergence uniforme de ces sommes sur $[0,1]$ *entier.*

Démonstration. Lorsque $0 \leq \nu \leq m$, en utilisant le même raisonnement et le théorème (1.3.10), on trouve :

$$2\frac{(\nu+1)(m-\nu+1)(q-p)}{(m+2)(p+\nu+1)(q+\nu+1)} x^{\nu+\frac{1}{2}} = \sum_{k=1}^{\infty} l_k x^{\frac{1}{2}} \frac{J_\nu(x\lambda_k)}{2\|\varphi_k\|^2_{L^2,\infty}} - \big(x^{2p+\nu+\frac{1}{2}} - x^{2q+\nu+\frac{1}{2}}\big),$$

$$2\frac{(\nu+1)(m-\nu+1)(q-p)}{(m+2)(p+m-\nu+1)(q+m-\nu+1)} x^{\nu+\frac{1}{2}} = \sum_{k=1}^{\infty} l'_k x^{\frac{1}{2}} \frac{J_\nu(x\lambda_k)}{2\|\varphi_k\|^2_{L^2,\infty}},$$

$$2\frac{(\nu+1)(m-\nu+1)(q-p)}{(m+2)(p+\nu+1)(q+\nu+1)} x^{m-\nu+\frac{1}{2}} = \sum_{k=1}^{\infty} l_k x^{\frac{1}{2}} \frac{J_\nu(\lambda_k)}{J_{\nu-m}(\lambda_k)} \frac{J_{\nu-m}(x\lambda_k)}{2\|\varphi_k\|^2_{L^2,\infty}},$$

$$2\frac{(\nu+1)(m-\nu+1)(q-p)}{(m+2)(p+m-\nu+1)(q+m-\nu+1)} x^{m-\nu+\frac{1}{2}} = \sum_{k=1}^{\infty} l'_k x^{\frac{1}{2}} \frac{J_\nu(\lambda_k)}{J_{\nu-m}(\lambda_k)} \frac{J_{\nu-m}(x\lambda_k)}{2\|\varphi_k\|^2_{L^2,\infty}} - \big(x^{2p+m-\nu+\frac{1}{2}} - x^{2q+m-\nu+\frac{1}{2}}\big),$$

dont toutes ses sommes convergent uniformément sur $[0,1]$.

On pose $b_\nu = 2\frac{(\nu+1)(m-\nu+1)(q-p)}{(m+2)(p+\nu+1)(q+\nu+1)}$, $\forall\, \nu \in \mathbb{Z}$.

Soit f une fonction sur $\mathbb{R}$, telle que

$$\int_0^1 |f(x)|^2 x dx + \int_0^1 x^{2m} |f(\frac{1}{x})|^2 x dx < \infty$$

On a des égalités ci-dessus :

$$b_\nu \int_0^1 x^{\nu+1} f(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} l_k \frac{\int_0^1 f(x) J_\nu(x\lambda_k) x dx}{2\|\varphi_k\|^2_{L^2,\infty}} - \int_0^1 \big(x^{2p+\nu+1} - x^{2q+\nu+1}\big) f(x) dx,$$

$$b_{m-\nu} \int_0^1 x^{\nu+1} f(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} l'_k \frac{\int_0^1 f(x) J_\nu(x\lambda_k) x dx}{2\|\varphi_k\|^2_{L^2,\infty}},$$

$$b_\nu \int_0^1 x^{2m-\nu+1} f(\frac{1}{x}) dx = \sum_{k=1}^{\infty} l_k \frac{J_\nu(\lambda_k)}{J_{\nu-m}(\lambda_k)} \frac{\int_0^1 x^m f(\frac{1}{x}) J_{\nu-m}(x\lambda_k) x dx}{2\|\varphi_k\|^2_{L^2,\infty}},$$

$$b_{m-\nu} \int_0^1 x^{2m-\nu+1} f(\frac{1}{x}) dx = \sum_{k=1}^{\infty} l'_k \frac{J_\nu(\lambda_k)}{J_{\nu-m}(\lambda_k)} \frac{\int_0^1 x^m f(\frac{1}{x}) J_{\nu-m}(x\lambda_k) x dx}{2\|\varphi_k\|^2_{L^2,\infty}} - \int_0^1 \big(x^{2p+2m-\nu+1} - x^{2q+2m-\nu+1}\big) f(\frac{1}{x}) dx,$$

Donc :

$$b_{m-\nu}\Big(\int_0^1 x^{\nu+1} f(x) dx + \int_0^1 x^{2m-\nu+1} f(\frac{1}{x}) dx\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} l'_k \frac{(f e^{i\nu\theta} \otimes 1, \varphi_k)_{L^2}}{2\|\varphi_k\|^2_{L^2,\infty}} - \int_0^1 \big(x^{2p+2m-\nu+1} - x^{2q+2m-\nu+1}\big) f(\frac{1}{x}) dx,$$

et

$$b_\nu\Big(\int_0^1 x^{\nu+1}f(x)dx+\int_0^1 x^{2m-\nu+1}f(\frac{1}{x})dx\Big)=\sum_{k=1}^{\infty} l_k\frac{(fe^{i\nu\theta}\otimes 1,\varphi_k)_{L^2}}{2\|\varphi_k\|^2_{L^2,\infty}}-\int_0^1(x^{2p+\nu+1}-x^{2q+\nu+1})f(x)dx,$$

Or

$$(fe^{i\nu\theta}\otimes 1, 1\otimes z^\nu)=\int_0^1 x^{\nu+1}f(x)dx+\int_0^1 x^{2m-\nu+1}f(x)dx$$

Donc,

$$(fe^{i\nu\theta}\otimes 1, 1\otimes z^\nu)=\sum_{k=1}^{\infty} l'_k\frac{(fe^{i\nu\theta}\otimes 1,\varphi_k)_{L^2}}{2\|\varphi_k\|^2_{L^2,\infty}}-\int_0^1(x^{2p+2m-\nu+1}-x^{2q+2m-\nu+1})f(\frac{1}{x})dx$$
$$(fe^{i\nu\theta}\otimes 1, 1\otimes z^\nu)=\sum_{k=1}^{\infty} l_k\frac{(fe^{i\nu\theta}\otimes 1,\varphi_k)_{L^2}}{2\|\varphi_k\|^2_{L^2,\infty}}-\int_0^1(x^{2p+\nu+1}-x^{2q+\nu+1})f(x)dx,$$

□

1.4 Annexe

1.4.1 Un résultat de recollement

Dans ce texte on va rencontrer une classe de fonctions continues φ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{P}^1\setminus\mathbb{S}^1$ telles que il existe φ_1 (resp. φ_2) une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un voisinage ouvert de $\{|z|\leq 1\}$ (resp. de $\{|z|\geq 1\}$) avec $\varphi=\varphi_{1|_{\{|z|\leq 1\}}}$ (resp. $\varphi=\varphi_{2|_{\{|z|\geq 1\}}}$) sur $\{|z|\leq 1\}$ (resp. sur $\{|z|\geq 1\}$). Si φ_1 et φ_2 vérifient des conditions supplémentaires qu'on explicitera dans la suite, alors on va montrer que

$$d^c\varphi_1=d^c\varphi_2$$

sur $\mathbb{S}^1$, c'est l'objet du lemme (1.4.2). On en déduira, voir (1.4.3), que

$$\int_{\mathbb{P}^1}\varphi dd^c f=\int_{\mathbb{P}^1} f dd^c\varphi,\quad \forall\, f\in A^{0,0}(X).$$

(ici $dd^c\varphi$ est par définition la forme définie presque partout par $dd^c\varphi_1$ sur $\{|z|<1\}$ et par $dd^c\varphi_2$ sur $|z|>1$).

Notons que si φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{P}^1$, on a par le théorème de Stokes

$$\int_{\mathbb{P}^1}\varphi dd^c f=\int_{\mathbb{P}^1} f dd^c\varphi,\quad \forall\, f\in A^{0,0}(X).$$

On rappelle le résultat suivant :

Proposition 1.4.1. (*Formule de Green*) *Soit X une variété complexe de dimension d et $A\subset X$ un ouvert relativement compact tel que $\overline{A}$ soit une sous-variété réelle à coins de X. Soient f et g deux formes différentielles de classes $\mathcal{C}^2$ au voisinage de $\overline{A}$ de bidegrés (p,p) et (q,q) telles que $p+q=d-1$. On a :*

$$\int_A(fdd^cg-gdd^cf)=\int_{\partial A}(fd^cg-gd^cf)$$

Démonstration. Voir par exemple [Dem]. □

On considère ψ^- et ψ^+ deux fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}^+$ de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} &\bullet \quad \psi^-(1) = \lim_{r\mapsto+\infty} \psi^-(r) = 0, \\ &\bullet \quad \frac{\partial\psi^+}{\partial r}(1) = \lim_{r\mapsto+\infty} \psi^+(r) = 0. \end{aligned} \tag{1.36}$$

Soit $m \in \mathbb{Z}$. On pose sur $\mathbb{C}^*$:

$$\begin{aligned} &\varphi^-_{1,(m)}(z) := (\frac{z}{|z|})^m \psi^-(|z|), \quad \varphi^-_{2,(m)}(z) := -(\frac{z}{|z|})^m \psi^-(\frac{1}{|z|}) \\ &\varphi^+_{1,(m)}(z) := (\frac{z}{|z|})^m \psi^+(|z|) \quad \text{et} \ \ \varphi^+_{2,(m)}(z) := (\frac{z}{|z|})^m \psi^+(\frac{1}{|z|}). \end{aligned} \tag{1.37}$$

Par hypothèses, ces quatre fonctions sont de classes $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{C}^*$, telles que leurs dérivées premières et secondes sont bornées au voisinage de zéro.

Lemme 1.4.2. *Sur $\mathbb{S}^1$, on a*

$$d^c\varphi^-_{1,(m)} = d^c\varphi^-_{2,(m)}, \tag{1.38}$$

et

$$d^c\varphi^+_{1,(m)} = d^c\varphi^+_{2,(m)}. \tag{1.39}$$

Démonstration. 1. Montrons (1.38). On a $\forall\, z \neq 0$

$$\frac{\partial\varphi^-_{1,(m)}}{\partial z}(z) = \frac{\partial}{\partial z}((\frac{z}{|z|})^m)\psi^-(|z|) + (\frac{z}{|z|})^m \frac{\partial|z|}{\partial z}\frac{\partial\psi^-}{\partial r}(|z|),$$

mais comme on a $\frac{\partial|z|}{\partial z} = \frac{\overline{z}}{2|z|}$ puisque $\frac{\partial|z|^2}{\partial z} = \overline{z}$ alors

$$\frac{\partial\varphi^-_{1,(m)}}{\partial z}(z) = \frac{\partial}{\partial z}((\frac{z}{|z|})^m)\psi^-(|z|) + (\frac{z}{|z|})^m \frac{\overline{z}}{2|z|}\frac{\partial\psi^-}{\partial r}(|z|).$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi^-_{1,(m)}}{\partial\overline{z}}(z) &= \overline{\frac{\partial(\overline{\varphi^-_{1,(m)}})}{\partial z}} \\ &= \frac{\partial}{\partial\overline{z}}((\frac{z}{|z|})^m)\psi^-(|z|) + (\frac{z}{|z|})^m \frac{z}{2|z|}\frac{\partial\psi^-}{\partial r}(|z|). \end{aligned}$$

Mais comme on a supposé que $\psi(1) = 0$ alors sur $\mathbb{S}^1$ on a

$$\begin{aligned} d^c\varphi^-_{1,(m)} &= \frac{\partial - \overline{\partial}}{4\pi i}(\varphi^-_{1,(m)}) \\ &= \frac{1}{8\pi i}\frac{\partial\psi^-}{\partial r}(1)z^m(\overline{z}dz - zd\overline{z}). \end{aligned}$$

On a $\forall\, z \neq 0$

$$\frac{\partial\varphi^-_{2,(m)}}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z}(\frac{z}{|z|})^m \cdot \psi^-(\frac{1}{|z|}) + (\frac{z}{|z|})^m \frac{\overline{z}}{2|z|^3}\frac{\partial\psi^-}{\partial r}(\frac{1}{|z|}).$$

et

$$\frac{\partial \varphi^-_{2,(m)}}{\partial \overline{z}} = \overline{\frac{\partial \overline{(\varphi^-_{2,(m)})}}{\partial z}}$$
$$= -\frac{\partial}{\partial \overline{z}}(\frac{z}{|z|})^m \cdot \psi^-(\frac{1}{|z|}) + (\frac{\overline{z}}{|z|})^m \frac{z}{2|z|^3}\frac{\partial \psi^-}{\partial r}(\frac{1}{|z|}).$$

On déduit que sur $\mathbb{S}^1$

$$d^c\varphi^-_{2,(m)} = \frac{1}{8\pi i}\frac{\partial \psi^-}{\partial r}(1)z^m(\overline{z}dz - zd\overline{z}).$$

On conclut que sur $\mathbb{S}^1$

$$d^c\varphi^-_{1,(m)} = d^c\varphi^-_{2,(m)}.$$

2. Montrons (1.39). On a $\forall\, z \neq 0$

$$\frac{\partial \varphi^+_{1,(m)}}{\partial z}(z) = \frac{\partial}{\partial z}((\frac{z}{|z|})^m)\psi^+(|z|) + (\frac{z}{|z|})^m \frac{\partial |z|}{\partial z}\frac{\partial \psi^+}{\partial r}(|z|)$$
$$= \frac{\partial}{\partial z}((\frac{z}{|z|})^m)\psi^+(|z|) + (\frac{z}{|z|})^m \frac{\overline{z}}{2|z|}\frac{\partial \psi^+}{\partial r}(|z|).$$

et

$$\frac{\partial \varphi^+_{1,(m)}}{\partial \overline{z}}(z) = \overline{\frac{\partial \overline{(\varphi^+_{1,(m)})}}{\partial z}}$$
$$= \frac{\partial}{\partial \overline{z}}((\frac{z}{|z|})^m)\psi^+(|z|) + (\frac{z}{|z|})^m \frac{z}{2|z|}\frac{\partial \psi^+}{\partial r}(|z|).$$

Mais comme on a supposé que $\frac{\partial \psi}{\partial r}(1) = 0$ alors sur $\mathbb{S}^1$ on a

$$d^c\varphi^+_{1,(m)} = \frac{\partial - \overline{\partial}}{4\pi i}(\varphi^+_{1,(m)})$$
$$= \frac{1}{8\pi i}\frac{\partial}{\partial z}((\frac{z}{|z|})^m)\psi^+(1)dz - \frac{\partial}{\partial \overline{z}}((\frac{\overline{z}}{|z|})^m)\psi^+(1)d\overline{z}.$$

On a $\forall\, z \neq 0$

$$\frac{\partial \varphi^+_{2,(m)}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(\frac{z}{|z|})^m \cdot \psi^+(\frac{1}{|z|}) - (\frac{z}{|z|})^m \frac{\overline{z}}{2|z|^3}\frac{\partial \psi^+}{\partial r}(\frac{1}{|z|}).$$

et

$$\frac{\partial \varphi^+_{2,(m)}}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial}{\partial \overline{z}}(\frac{z}{|z|})^m \cdot \psi^+(\frac{1}{|z|}) - (\frac{z}{|z|})^m \frac{z}{2|z|^3}\frac{\partial \psi^+}{\partial r}(\frac{1}{|z|}).$$

On déduit que sur $\mathbb{S}^1$

$$d^c\varphi^+_{2,(m)} = \frac{\partial - \overline{\partial}}{4\pi i}(\varphi^+_{1,(m)})$$
$$= \frac{1}{8\pi i}\frac{\partial}{\partial z}(\frac{z}{|z|})^m \cdot \psi^+(1)dz - \frac{\partial}{\partial \overline{z}}(\frac{z}{|z|})^m \cdot \psi^+(1)d\overline{z}.$$

On conclut que sur $\mathbb{S}^1$

$$d^c\varphi^+_{1,(m)} = d^c\varphi^+_{2,(m)}.$$

□

Corollaire 1.4.3. *On a*

$$\int_{|z|\leq 1} dd^c f\cdot\varphi^-_{1,(m)} + \int_{|z|\geq 1} dd^c f\cdot\varphi^-_{2,(m)} = \int_{|z|\leq 1} dd^c\varphi^-_{1,(m)}\cdot f + \int_{|z|\geq 1} dd^c\varphi^-_{2,(m)}\cdot f,$$

et

$$\int_{|z|\leq 1} dd^c f\cdot\varphi^+_{1,(m)} + \int_{|z|\geq 1} dd^c f\cdot\varphi^+_{2,(m)} = \int_{|z|\leq 1} dd^c\varphi^+_{1,(m)}\cdot f + \int_{|z|\geq 1} dd^c\varphi^+_{2,(m)}\cdot f,$$

$\forall\, f\in A^{0,0}(\mathbb{P}^1)$.

Démonstration. Soit $f\in A^{0,0}(\mathbb{P}^1)$. Soit $0<\varepsilon\ll 1$, d'après (1.4.1) on a

$$\begin{aligned}\int_{\varepsilon<|z|<1} dd^c f\cdot\varphi^\pm_{1,(m)} + \int_{|z|>1} dd^c f\cdot\varphi^\pm_{2,(m)} &= \int_{\varepsilon<|z|<1} f\cdot dd^c\varphi^\pm_{1,(m)} + \int_{|z|>1} f\cdot dd^c\varphi^\pm_{2,(m)}\\ &- \int_{|z|=1} f d^c\varphi^\pm_{1,(m)} + \int_{|z|=1}\varphi^\pm_{1,(m)} d^c f + \int_{|z|=1} f d^c\varphi^\pm_{1,(m)} - \int_{|z|=1}\varphi^\pm_{2,(m)} d^c f\\ &+ \int_{|z|=\varepsilon} f d^c\varphi^\pm_{1,(m)} - \int_{|z|=\varepsilon}\varphi^\pm_{1,(m)} d^c f - \int_{|z|=\varepsilon} f d^c\varphi^\pm_{1,(m)} + \int_{|z|=\varepsilon}\varphi^\pm_{2,(m)} d^c f.\end{aligned}$$

On sait que les fonctions $\varphi^\pm_{1,(m)}$ et $\varphi^\pm_{2,(m)}$ ainsi que leurs dérivées premières et secondes sont bornées au voisinage de zéro, donc peut faire tendre ε vers zéro dans l'égalité ci-dessus, mais comme $\varphi^\pm_{1,(m)}{}_{|_{\mathbb{S}^1}} = \varphi^\pm_{2,(m)}{}_{|_{\mathbb{S}^1}}$ et d'après (1.4.2), on trouve que

$$\int_{|z|<1} dd^c f\cdot\varphi^\pm_{1,(m)} + \int_{|z|>1} dd^c f\cdot\varphi^\pm_{2,(m)} = \int_{|z|<1} f\cdot dd^c\varphi^\pm_{1,(m)} + \int_{|z|>1} f\cdot dd^c\varphi^\pm_{2,(m)}.$$

Puisque toutes les fonctions considérées sont des restrictions de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de $\mathbb{S}^1$, alors

$$\int_{|z|\leq 1} dd^c f\cdot\varphi^\pm_{1,(m)} + \int_{|z|\geq 1} dd^c f\cdot\varphi^\pm_{2,(m)} = \int_{|z|\leq 1} dd^c\varphi^\pm_{1,(m)}\cdot f + \int_{|z|\geq 1} dd^c\varphi^\pm_{2,(m)}\cdot f.$$

□

1.4.2 Rappels sur la théorie des fonctions de Bessel

Dans cette introduction à la théorie des fonctions de Bessel, la principale référence sera le chapitre 17 du [WW62], on s'intéressera à une sous-classe de fonctions de Bessel à savoir les fonctions de Bessel d'ordre un entier.

Pour tout $z\in\mathbb{C}$ fixé, la fonction :

$$t\mapsto e^{\frac{1}{2}z(t-\frac{1}{t})},\quad t\neq 0,$$

admet un développement en série de Laurent en t. Soit $n\in\mathbb{Z}$. Par définition, la fonction de Bessel d'ordre n est la fonction qui à tout $z\in\mathbb{C}$, associe le coefficient de t^n dans ce développement, on le note par $J_n(z)$.

Enonçons quelques propriétés de la fonction J_n :

- J_n est une fonction analytique sur $\mathbb{C}$ telle que $J_{-n} = (-1)^n J_n$ et

$$J_n(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (\frac{1}{2}z)^{n+2r}}{\Gamma(r+1)\Gamma(n+r+1)}, \quad \text{si} \quad n \in \mathbb{N} \tag{1.40}$$

- J_n est une solution de l'équation différentielle linéaire suivante :

$$\frac{d^2y}{d^2z} + \frac{1}{z}\frac{dy}{dz} + (1 - \frac{n^2}{z^2})y = 0 \tag{1.41}$$

On a les relations de récurrence suivantes :

- $$\frac{d}{dz}(z^{-n}J_n(z)) = -z^{-n}J_{n+1}(z). \tag{1.42}$$
- $$J_n'(z) = \frac{n}{z}J_n(z) - J_{n+1}(z) \tag{1.43}$$
- $$J_n'(z) = \frac{1}{2}(J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z)) \tag{1.44}$$
- $$J_n'(z) = J_{n-1}(z) - \frac{n}{z}J_n(z) \tag{1.45}$$
- $$\frac{d}{dz}(z^n J_n(z)) = z^n J_{n-1}(z) \tag{1.46}$$
- Les zéros de J_n sont réels.

Soient $Z_m = \{j_{m,1} < j_{m,2} < \ldots\}$ l'ensemble des zéros positifs non nuls de J_m ordonnés par ordre croissant, voir par exemple [Wat44, § 15]. Soient $D_m := \{c_{m,1} < c_{m,2} < \ldots\}$ les zéros positifs non nuls de J_m' ordonnés par ordre croissant. Comme les zéros de J_m sont simples, voir par exemple [Wat44, § 15.21], alors

$$Z_m \cap D_m = \emptyset. \tag{1.47}$$

Proposition 1.4.4. *Soit $\nu \in \mathbb{N}$, on note par $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ les zéros positifs non nuls de la fonction :*

$$z \mapsto z^{-\nu}\big(zJ_\nu'(z) + HJ_\nu(z)\big),$$

On pose pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, v_k la fonction définie sur $[0,1]$ comme suit :

$$v_k(r) = J_\nu(\lambda_k r), \quad \forall\, r \in [0,1].$$

Soit $L^2(0,1)$ le complété de l'espace vectoriel des fonctions f intégrables sur $[0,1]$, pour la norme $\|f\| := \int_0^1 |f(x)|^2 r dr < \infty$. On note par $L^1(0,1)_H$ le sous-espace de $L^1(0,1)$, qui est complété des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ qui vérifient

$$f'(1) + Hf(1) = 0.$$

Alors, la famille des fonctions $(v_k)_{k\geq 1}$ forme une famille totale dans $L^1(0,1)_H$.

Démonstration. On utilise [Wat44, § 18.6] en remarquant qu'on a toujours $\int_0^1 |f(t)|\sqrt{t}dt \leq (\int_0^1 |f(t)|^2 t dt)^{\frac{1}{2}}$. On peut aussi consulter [WW62, p.381]. □

On rappelle le lemme suivant, qui sera utilisé plusieurs fois dans la suite :

Lemme 1.4.5. *Soit λ un réel positif non nul, on pose $\phi(r,\theta) = J_m(\lambda r)e^{im\theta}$ alors*

$$-\Delta_0\phi = \lambda^2\phi.$$

Démonstration. Pour simplifier les notations on note $J(r) := J_m(\lambda r)$ et $\Theta(\theta) := e^{im\theta}$. On a

$$J'(r) = \lambda J'_m(\lambda r), \quad J''(r) = \lambda^2 J''_m(\lambda r),$$

donc

$$J''(r) + \frac{1}{r}J'(r) - \frac{m^2}{r^2}J(r) = \lambda^2\Big(J''_m(\lambda r) + \frac{1}{\lambda r}J'_m(\lambda r) - \frac{m^2}{(\lambda r)^2}J_m(\lambda r)\Big).$$

De (1.41), on a

$$J''(r) + \frac{1}{r}J'(r) - \frac{m^2}{r^2}J(r) = -\lambda^2 J(r),$$

et on vérifie que

$$\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = -m^2.$$

En regroupant tout cela, on a l'équation suivante :

$$\frac{\partial^2 J}{\partial r^2}(r)\Theta(\theta) + \frac{1}{r}\frac{\partial J}{\partial r}(r)\Theta(\theta) + \frac{1}{r^2}J(r)\frac{\partial^2\Theta}{\partial\theta^2}(\theta) = -\lambda^2 J(r)\Theta(\theta)$$

ce qui est équivalent à

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = -\lambda^2\phi$$

en d'autres termes :

$$-\Delta_0\phi = \lambda^2\phi.$$

□

1.4.3 Deux problèmes avec conditions aux bords classiques sur le disque unité

Dans ce paragraphe on rappelle deux problèmes avec conditions aux bords classiques sur le disque unité qu'on appellera dans la suite : problème $\mathcal{D}$ et problème $\mathcal{N}$. Ils joueront un rôle important dans l'étude du spectre de $\Delta_{\overline{\mathcal{O}}_\infty}$. En effet, on va expliquer dans le paragraphe suivant pourquoi notre problème se traduit en ces deux problèmes.

Soit H un réel fixé. On munit $D \simeq [0,1]\times[0,2\pi]$ de la métrique euclidienne, et on rappelle que

$$-\Delta_0 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}$$

est l'opérateur de Laplace-Beltrami associé à cette métrique écrit en coordonnées polaires. On note par $\mathcal{C}^2(D)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur D.

Les problèmes qu'on va rappeler en détails dans la suite sont des cas particuliers de ce qu'on appelle classiquement un problème avec condition mixte sur le bord du disque D. Cela consiste à résoudre le problème de nature spectral suivant :

$$\begin{cases} -\Delta_0 u & = \alpha u, \quad u \in \mathcal{C}^2(D) \\ \frac{\partial u}{\partial r}(1,\theta) + Hu(1,\theta) & = 0, \quad \forall\,\theta \in [0,2\pi] \end{cases} \tag{1.48}$$

c'est à dire déterminer l'ensemble des constantes réelles α, appelées valeurs propres, telles qu'il existe $u \in C^2(D)$ non nulle qui soit un vecteur propre pour $-\Delta_0$ associé à α et ajusté à la condition sur le bord.

Dans cette famille de problèmes, on distingue deux cas extrêmes : le cas $H = \infty$ (c'est à dire $u(1, \theta) = 0$), on parle alors de la condition de Dirichlet et l'appellera problème $\mathcal{D}$ et le cas $H = 0$, il s'agit d'une condition classiquement connu sous le nom de condition de Neumann, on l'appellera dans la suite problème $\mathcal{N}$. Ces problèmes sont largement étudiés dans la littérature et ils sont complètement résolus en terme de la théorie des fonctions de Bessel. On peut consulter le livre [BR89] pour une étude plus détaillée de ce sujet.

En gardant les mêmes notations, on montre que les valeurs propres non nulles du problème $\mathcal{D}$ sont les réels positifs $j^2_{\nu,k}$, avec $\nu \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{N}^*$, avec les fonctions $J_\nu(j_{\nu,k}r)e^{i\nu\theta}$ comme vecteurs propres associés. En plus, on peut vérifier que la famille formée par ces vecteurs propres et les fonctions constantes (vecteurs propres associés à la valeur propre nulle) forme une un système total dans l'espace des fonctions vérifiant la condition de Dirichlet sur D, voir par exemple (1.4.4) avec $H = \infty$ et [BR89, §11].

Quant au problème $\mathcal{N}$, on montre que son spectre est constitué de 0 et des ${j'}^2_{\nu,k}$ avec $\nu \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{N}^*$ avec des vecteurs propres de la forme $J_\nu({j'}_{\nu,k}r)e^{i\nu\theta}$. On a aussi que la famille constituée des vecteurs propres forme un système complet pour l'ensemble des fonctions vérifiant la condition de Neumann sur D, voir par exemple (1.4.4) avec $H = 0$ et [BR89, §11].

Chapitre 2

Sur la fonction Zêta associée au Laplacien singulier $\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}$

On calcule le déterminant régularisé du Laplacien singulier associé aux métriques canoniques sur $\mathbb{P}^1$.

2.1 Introduction

Soit (X, h_X) une variété kählerienne compacte et h_X une métrique hermitienne de classe $\mathcal{C}^\infty$. Soit (L, h) un fibré en droites holomorphe muni d'une métrique hermitienne h de classe $\mathcal{C}^\infty$. Dans [RS73], *Ray* et *Singer* associent à la donnée $\big((TX, h_X); (L, h)\big)$ un réel appelé la torsion analytique holomorphe, qu'on note par $T\big((TX, h_X); \overline{L}\big)$ est définie par un procédé de régularisation du produit infini des valeurs propres non nuls du Laplacien $\Delta^q_{\overline{L}}$ agissant sur $A^{(0,q)}(X, L)$ pour $q = 0, 1, \ldots, \dim_{\mathbb{C}}(X)$. Si l'on note par $\alpha_{q,1} \leq \alpha_{q,2} \leq \ldots$ les valeurs propres non nulles de $\Delta^q_{\overline{L}}$ comptées avec multiplicité, et par

$$\zeta_{\Delta^q_{\overline{L}}}(s) = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{\alpha^s_{q,k}},$$

la fonction Zêta associé, on montre par des méthodes de la théorie du noyau de la chaleur, voir [BGV04], que $\zeta_{\Delta_{\overline{L}}}$ converge pour $\mathrm{Re}(s) > 1$ avec un pôle en $s = 1$ et s'étend en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ entier et qu'elle est holomorphe au voisinage de $s = 0$, voir [BGV04, § 9.6]. On pose alors

$$T\big((TX, h_X); \overline{L}\big) = \sum_{q=0}^{n} (-1)^{q+1} q \zeta'_{\Delta^q_{\overline{L}}}(0).$$

Dans [Vor87], Voros étudie la notion du produit régularisé associée à une suite abstraite de réels $\{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ qui vérifie les hypothèses suivantes :

1. La suite $\{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante et non bornée.
2. La fonction $\theta(t) := \sum_{k=1}^{\infty} e^{-t\alpha_k}$ converge pour tout $t > 0$ et elle admet un développement en série de Laurent pour t assez petit de la forme suivante :

$$\theta(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{i_n} t^{i_n}$$

avec $\{i_n\}_{n\geq 0}$ une suite de réels croissante non bornée et telle que $i_0 < 0$.

Alors si l'on pose

$$Z(s,a) := \sum_{k\geq 1} \frac{1}{(\alpha_k + a)^s} \quad \text{pour } \mathrm{Re}(s) \gg 1,$$

appelée la fonction Zêta généralisée, voir [Vor87, p. 444], on vérifie qu'elle s'étend en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ et elle est holomorphe en zéro. On définit donc, le produit régularisé des réels $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ plus généralement celui de $\alpha_1 - \alpha, \alpha_2 - \alpha, \ldots$ (pour tout $\alpha \leq 0$) comme étant le réel :

$$D(\alpha) := \exp(-\zeta'(0, -\alpha))$$

D'après Voros, on appelle $D(0)$ le déterminant régularisé de la suite $\{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Lorsque $\{\alpha_k\}_{k\geq 1}$ sont les valeurs propres d'un opérateur Laplacien alors, par définition, on vérifie que le déterminant régularisé correspond à l'exponentielle de la torsion analytique de Ray-Singer. Voros montre aussi un résultat important qui décrit explicitement le comportement asymptotique de $\log D$ pour $\alpha \mapsto -\infty$ en fonction des $\{c_{i_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, voir [Vor87, p. 448 (5.1)]. Réciproquement, si l'on donne une fonction Δ dont tous ses zéros sont positifs et admettant un développement asymptotique du même type, alors on montre que ζ, la fonction zêta associée à ces zéros s'étend en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ et elle est holomorphe au voisinage de zéro, en plus on montre que $\zeta(0)$ et $\zeta'(0)$ se déduisent du développement asymptotique du $\log \Delta$.

La torsion analytique est un ingrédient fondamental de la géométrie d'Arakelov. Dans le cas de fibré en droites trivial sur l'espace projectif muni de la métrique de Fubini-Study, Ikeda et Taniguchi déterminent explicitement le spectre du Laplacien associé à ces métriques, voir [IT78]. En se basant sur leurs résultats, Gillet, Soulé et Zagier calculent explicitement la torsion analytique dans ce cas [GS91]. Gillet et Soulé utilisent ce calcul pour démontrer leur théorème de Riemann-Roch arithmétique pour le fibré en droites trivial sur l'espace projectif muni de la métrique de Fubini-Study, voir [GS91, Théorème 2.1.1].

Un des objectifs de cet article est de proposer une alternative aux calculs de Gillet, Soulé et Zagier en étudiant le spectre du Laplacien $\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}$ associé aux métriques canoniques sur $\mathbb{P}^1$,

Ce texte est constitué de deux parties logiquement indépendantes :

Dans la section (2.2), on étend la notion de la torsion analytique holomorphe aux fibrés en droites munis de métriques admissibles sur $\mathbb{P}^1$. Rappelons qu'une métrique est dite admissible si elle est limite uniforme d'une suite de métriques positives et de classe $\mathcal{C}^\infty$. Notons qu'une métrique admissible peut être singulière, dans ce cas la théorie de noyau de chaleur développée dans [BGV04] n'est plus valable et donc on ne peut pas associer directement une torsion analytique à ce genre de métrique. Notre idée consiste en premier temps à approximer une métrique admissible par une suite de métriques positives de classe $\mathcal{C}^\infty$ et d'étudier la variation de la torsion analytique associée à cette suite, moyennant la formule des anomalies. On peut aussi considérer une suite de métriques positives de classe $\mathcal{C}^\infty$ qui converge uniformément vers une métrique admissible sur $T\mathbb{P}^1$ et d'étudier le comportement de la torsion analytique dans ce cas. En résumé, lorsque $\overline{L}$ et $\overline{T\mathbb{P}^1}$ sont munis de métriques admissibles, nous établissons qu'on peut étendre la notion de torsion analytique à cette situation, voir théorème (2.2.5), qu'on appellera torsion analytique holomorphe généralisée associée à $\overline{L}$ et $\overline{T\mathbb{P}^1}$ et on la notera par $T_g(\overline{T\mathbb{P}^1}; \overline{L})$. Nous nous intéresserons ensuite à une classe de métriques admissibles non nécessairement $\mathcal{C}^\infty$ à savoir les métriques canoniques sur $\mathbb{P}^1$. Ces dernières ont la particularité d'être déterminées uniquement par la combinatoire de $\mathbb{P}^1$, vue comme variété torique. Nous appliquerons la théorie developpée ci-dessus pour calculer $T_g(\overline{T\mathbb{P}^1}_\infty; \overline{\mathcal{O}(m)}_\infty)$; la valeur de la torsion analytique généralisée

associée à $\overline{T\mathbb{P}^1}_\infty$ et $\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty$ munis de leur métriques canoniques. On obtient :

$$T_g(\overline{T\mathbb{P}^1}_\infty;\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty) = 4\zeta'_{\mathbb{Q}}(-1) - \frac{1}{6} - \log\frac{(m+2)^{m+1}}{\left((m+1)!\right)^2} \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

La section (2.3) constitue une approche directe pour définir une torsion analytique associée $(\overline{T\mathbb{P}^1}_\infty;\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty)$. Rappelons que dans [Haja], nous avons calculé explicitement le spectre de $\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}$. Il est donc naturel d'associer à ce spectre une fonction $\zeta_{\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}}$, qu'on appellera la fonction Zêta associée à l'opérateur singulier $\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}$. Afin d'étudier cette fonction Zêta, nous introduisons la notion de familles de fonctions Zêta, voir (2.3.2), et nous généralisons la théorie de Voros à cette classe de fonctions Zêta en démontrant le théorème (2.3.6) qui généralise ceux de [Vor87] et de [Spr05]. Grâce à la théorie développée dans cet article, nous sommes capables d'établir que $\zeta_{\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}}$ est prolongeable analytiquement au voisinage de zéro. De plus, nous calculons explicitement $\zeta'_{\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}}(0)$ et nous obtenons :

$$\zeta'_{\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}}(0) = 4\zeta'_{\mathbb{Q}}(-1) - \frac{1}{6} - \log\frac{(m+2)^{m+1}}{((m+1)!)^2} \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Rappelons que lorsqu'on considère des métriques $\mathcal{C}^\infty$ sur $T\mathbb{P}^1$ et sur $\mathcal{O}(m)$, alors par définition :

$$T(\overline{T\mathbb{P}^1};\overline{\mathcal{O}(m)}) = \zeta'_{\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}}}(0) \quad \forall\, m \in \mathbb{N}$$

A priori la théorie classique du noyau de chaleur ne permet pas de déduire une relation entre la torsion analytique généralisée $T_g(\overline{T\mathbb{P}^1}_\infty;\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty)$ et le déterminant régularisé canonique $\zeta'_{\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}}(0)$. Mais d'après nos calculs, nous avons montré que les deux différentes approches montrent que ces deux réels sont égaux, c'est à dire :

$$T_g(\overline{T\mathbb{P}^1}_\infty;\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty) = \zeta'_{\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}}(0) \quad \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

2.2 La torsion analytique holomorphe généralisée sur $\mathbb{P}^1$

Le but de ce paragraphe est d'étendre la notion de torsion analytique holomorphe aux fibrés en droites munis d'une métrique admissible sur $\mathbb{P}^1$.

2.2.1 Métriques admissibles

Soit X une variété complexe analytique et $\overline{L} = (L, \|\cdot\|)$ un fibré en droites hermitien muni d'une métrique continue sur L.

Définition 2.2.1. *On appelle premier courant de Chern de $\overline{L}$ et on note $c_1(\overline{L}) \in D^{(1,1)}(X)$ le courant défini localement par l'égalité :*

$$c_1(\overline{L}) = dd^c(-\log\|s\|^2),$$

où s est une section holomorphe locale et ne s'annulant pas du fibré L.

Définition 2.2.2. *La métrique $\|\cdot\|$ est dite positive si $c_1(L, \|\cdot\|) \geq 0$.*

Définition 2.2.3. *La métrique $\|\cdot\|$ est dite admissible s'il existe une famille $(\|\cdot\|_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de métriques positives de classe $\mathcal{C}^\infty$ convergeant uniformément vers $\|\cdot\|$ sur L. On appelle fibré admissible sur X un fibré en droites holomorphe muni d'une métrique admissible sur X.*

On dira que $\overline{L}$ est un fibré en droites intégrable s'il existe $\overline{L}_1$ et $\overline{L}_2$ admissibles tels que

$$\overline{L} = \overline{L}_1 \otimes \overline{L}_2^{-1}.$$

Exemple 2.2.4. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note par $\mathcal{O}(1)$ le fibré de Serre sur $\mathbb{P}^n$ et on le munit de la métrique définie pour toute section méromorphe de $\mathcal{O}(1)$ par :*

$$\|s(x)\|_\infty = \frac{|s(x)|}{\max(|x_0|, \dots, |x_n|)}.$$

Cette métrique est admissible.

En fait, c'est un cas particulier d'un résultat plus général combinant la construction Batyrev et Tschinkel sur une variété torique projective et la construction de Zhang. Dans la première construction permet d'associer canoniquement à tout fibré en droites sur une variété torique projective complexe une métrique continue notée $\|\cdot\|_{BT}$ et déterminée uniquement par la combinatoire de la variété, voir [Mai00, proposition 3.3.1] et [Mai00, proposition 3.4.1]. L'approche de Zhang est moins directe, elle utilise un endomorphisme équivariant (correspondant à la multiplication par p, un entier supérieur à 2) afin de construire par récurrence une suite de métriques qui converge uniformément vers une limite notée $\|\cdot\|_{Zh,p}$ et qui, en plus, ne dépend pas du choix de la métrique de départ, voir [Zha95] ainsi que [Mai00, théorème 3.3.3]. Mais d'après [Mai00, théorème 3.3.5] on montre que

$$\|\cdot\|_{BT} = \|\cdot\|_{Zh,p}.$$

Que l'on appelle la métrique canonique associée à L. Notons que lorsque L n'est pas trivial, alors cette métrique n'est pas $\mathcal{C}^\infty$.

2.2.2 La métrique de Quillen et la torsion analytique holomorphe, un rappel

Commençons tout d'abord par faire des rappels sur la métrique de Quillen. Soit (X, ω_X) une variété compacte kählerienne et $\overline{E}$ un fibré vectoriel muni d'une métrique hermtienne $\mathcal{C}^\infty$. Ces données définissent un produit hermitien L^2, sur $A^{(0,q)}(X, E)$ pour $q = 0, 1 \dots, \dim_{\mathbb{C}}(X)$.

Soit Δ_q l'opérateur Laplacien agissant sur $A^{(0,q)}(X, E)$ et $\mathcal{H}^{(0,q)} = \ker \Delta_q$ l'ensemble des formes harmoniques. On note par

$$\zeta_q(X, E, s) = \sum_{n \in \mathbb{N}_{\geq 1}} \frac{1}{\lambda_{q,n}^s}$$

la fonction Zêta associée au spectre de Δ_q, cette série converge absolument sur $\mathrm{Re}(s) > \dim_{\mathbb{C}}(X)$ et admet un prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}$ entier et son prolongement est holomorphe en $s = 0$. D'après Ray et Singer [RS73] on définit la torsion analytique comme étant le réel :

$$T\Big((X, \omega_X); \overline{E}\Big) = \sum_{q \in \mathbb{N}} (-1)^{q+1}\, q\, \zeta_q'(X, E, 0).$$

On considère l'espace vectoriel complexe de dimension 1 suivant :

$$\lambda(E) = \otimes_{q \geq 0} \det\big(H^q(X, E)\big)^{(-1)^q},$$

où $H^q(X, E)$ est le q-éme groupe de cohomologie de X à coefficients dans E. Comme $H^q(X, E)$ est canoniquement isomorphe à $\ker(\Delta_q)$, le produit hermitien L^2 induit une métrique h_{L^2} sur $\lambda(E)$. Dans [Qui85], Quillen définit la métrique h_Q sur $\lambda(E)$ par la formule :

$$h_Q = h_{L^2} \exp\Big(T\Big((X, \omega_X); \overline{E}\Big)\Big).$$

Le résultat suivant permet d'étendre, par approximation, la notion de torsion analytique holomorphe aux fibrés en droites intégrables sur $\mathbb{P}^1$.

Théorème 2.2.5. *On munit $T\mathbb{P}^1$ d'une métrique intégrable, qu'on note par $h_{\infty,\mathbb{P}^1}$. Soit $\overline{L}_\infty := (L, h_{\infty,L})$ un fibré en droites admissible sur $\mathbb{P}^1$.*

On considère $(h_{n,L})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(h_{n,\mathbb{P}^1})_{n\in\mathbb{N}}$, deux suites de métriques L et $T\mathbb{P}^1$ respectivement vérifiant :

1. *Il existe H_1 et H_2 deux fibrés en droites sur $\mathbb{P}^1$ et deux suites de métriques $(h_{n,1})$ et $(h_{n,2})$ de métriques positives de classe $\mathcal{C}^\infty$ qui convergent uniformément vers deux métriques $h_{\infty,1,\mathbb{P}^1}$ et $h_{\infty,2,\mathbb{P}^1}$ respectivement sur H_1 et H_2 telles que*

$$T\mathbb{P}^1 = H_1 \otimes H_2^{-1},$$

$$h_{\infty,\mathbb{P}^1} = h_{\infty,1} \otimes h_{\infty,2}^{-1},$$

et

$$h_{n,\mathbb{P}^1} = h_{n,1} \otimes h_{n,2}^{-1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

2. *$(h_{n,L})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de métriques positives de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur L qui converge uniformément vers $h_{\infty,L}$.*

On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n' \in \mathbb{N}$:

$$\Big((T\mathbb{P}^1, h_{n,T\mathbb{P}^1}); (L, h_{n',L})\Big)$$

la torsion analytique holomorphe de Ray-Singer associée à $\Big((T\mathbb{P}^1, h_{n,T\mathbb{P}^1}); (L, h_{n',L})\Big)$.
Alors la suite double[1] *suivante :*

$$\Big(T\Big((T\mathbb{P}^1, h_{n,T\mathbb{P}^1}); (L, h_{n',L})\Big)\Big)_{n\in\mathbb{N},\, n'\in\mathbb{N}}$$

converge vers une limite finie qui ne dépend pas du choix des suites ci-dessus.

Démonstration. On considère $(h_{n,\mathbb{P}^1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(h_{n,L})_{n\in\mathbb{N}}$ comme dans le théorème.

On fixe la notation suivante :

$$h_{Q,\overline{T\mathbb{P}^1},\overline{L}},$$

la métrique de Quillen associée à la donnée $\Big(\overline{T\mathbb{P}^1}; \overline{L}\Big)$ où toutes les métriques sont $\mathcal{C}^\infty$.

Par les formules des anomalies [BGS88, théorèmes 0.1, 0.2] on a pour tout $k, k' \in \mathbb{N}$ et $j, j' \in \mathbb{N}$:

$$\log h_{Q,\overline{T\mathbb{P}^1}_k;\overline{L}_j} - \log h_{Q,\overline{T\mathbb{P}^1}_k;\overline{L}_{j'}} = \int_{\mathbb{P}^1} \widetilde{ch}(L, h_j, h_{j'})\mathrm{Td}(\overline{T\mathbb{P}^1}_k)$$

et

$$\log h_{Q,\overline{T\mathbb{P}^1}_k;\overline{L}_j} - \log h_{Q,\overline{T\mathbb{P}^1}_{k'};\overline{L}_j} = \int_{\mathbb{P}^1} ch(\overline{L}_j)\widetilde{\mathrm{Td}}(T\mathbb{P}^1, h_k, h_{k'}).$$

1. Dans ce texte, on fera la convention suivante : On dira qu'une suite double $(x_{n,n'})_{n\in\mathbb{N},n'\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite l, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $|x_{n,n'} - l| < \varepsilon$ pour $n, n' > A$.

On montre que, voir (2.4.1) :

$$\widetilde{ch}(L, h_j, h_{j'}) = -\log\Big(\frac{h_j}{h_{j'}}\Big) - \frac{1}{2}\log\Big(\frac{h_j}{h_{j'}}\Big)\Big(c_1(\overline{L}_j) + c_1(\overline{L}_{j'})\Big),$$

et

$$\widetilde{\mathrm{Td}}(T\mathbb{P}^1, h_k, h_{k'}) = -\frac{1}{2}\log\Big(\frac{h_k}{h_{k'}}\Big) - \frac{1}{12}\log\Big(\frac{h_k}{h_{k'}}\Big)\Big(c_1(\overline{T\mathbb{P}^1}_k) + c_1(\overline{T\mathbb{P}^1}_{k'})\Big).$$

modulo $\operatorname{Im}\overline{\partial} + \operatorname{Im}\partial$.

Comme

$$\overline{T\mathbb{P}^1}_k = \overline{H_1}_k \otimes \overline{H_2}_k^{-1} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$$

et que $\overline{H_1}_k = (H_1, h_{k,1})$ et $\overline{H_2}_k = (H_2, h_{k,2})$ sont positifs. Par les formules précédentes on peut écrire que :

$$\begin{aligned}
\Big|\log h_{Q,\overline{T\mathbb{P}^1}_k;\overline{L}_j} - \log h_{Q,\overline{T\mathbb{P}^1}_k;\overline{L}_{j'}}\Big| &= \Big|\int_{\mathbb{P}^1}\Big(-\log\frac{h_j}{h_{j'}} - \frac{1}{2}\log\frac{h_j}{h_{j'}}(c_1(\overline{L}_j) + c_1(\overline{L}_{j'}))\Big)Td(\overline{H_1}_k \otimes \overline{H_2}_k^{-1})\Big| \\
&= \Big|\int_{\mathbb{P}^1} -\frac{1}{2}\log\frac{h_j}{h_{j'}}\Big(c_1(\overline{H_1}_k) - c_1(\overline{H_2}_k)\Big) - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{P}^1}\log\frac{h_j}{h_{j'}}(c_1(\overline{L}_j) + c_1(\overline{L}_{j'}))\Big)\Big| \\
&\leq \frac{1}{2}\Big\|\log\Big(\frac{h_{j,L}}{h_{j',L}}\Big)\Big\|_{\sup}\int_{\mathbb{P}^1}\Big(c_1(\overline{H_1}_k) + c_1(\overline{H_2}_k) + c_1(\overline{L}_j) + c_1(\overline{L}_{j'})\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big\|\log\Big(\frac{h_{j,L}}{h_{j',L}}\Big)\Big\|_{\sup}\int_{\mathbb{P}^1}\Big(c_1(H_1) + c_1(H_2) + 2c_1(L)\Big).
\end{aligned}$$

Donc, on a trouvé une constante M qui ne dépend pas de k telle que

$$\Big|\log h_{Q,\overline{T\mathbb{P}^1}_k;\overline{L}_j} - \log h_{Q,\overline{T\mathbb{P}^1}_k;\overline{L}_{j'}}\Big| \leq M\Big\|\log\Big(\frac{h_{j,L}}{h_{j',L}}\Big)\Big\|_{\sup} \quad \forall\, j, j' \in \mathbb{N}.$$

On a aussi,

$$\begin{aligned}
\Big|\log h_{Q,\overline{T\mathbb{P}^1}_k;\overline{L}_j} - \log h_{Q,\overline{T\mathbb{P}^1}_{k'};\overline{L}_j}\Big| &= \Big|\int_{\mathbb{P}^1} ch(\overline{L}_j)\Big(-\frac{1}{2}\log\frac{h_k}{h_{k'}} - \frac{1}{12}\log\frac{h_k}{h_{k'}}\Big(c_1(\overline{T\mathbb{P}^1}_k) + c_1(\overline{T\mathbb{P}^1}_{k'})\Big)\Big)\Big| \\
&= \Big|\frac{1}{2}\int_{\mathbb{P}^1}\log\frac{h_k}{h_{k'}}c_1(\overline{L}_j) - \frac{1}{12}\int_{\mathbb{P}^1}\log\frac{h_k}{h_{k'}}\Big(c_1(\overline{H_1}_k) + c_1(\overline{H_1}_{k'}) - c_1(\overline{H_2}_k) + c_1(\overline{H_2}_{k'})\Big)\Big) \\
&\leq \frac{1}{2}\Big\|\log\Big(\frac{h_{k,\mathbb{P}^1}}{h_{k',\mathbb{P}^1}}\Big)\Big\|_{\sup}\int_{\mathbb{P}^1} c_1(\overline{L}_j) \\
&+ \frac{1}{12}\Big\|\log\Big(\frac{h_{k,\mathbb{P}^1}}{h_{k',\mathbb{P}^1}}\Big)\Big\|_{\sup}\int_{\mathbb{P}^1}\Big(c_1(\overline{H_1}_k) + c_1(\overline{H_1}_{k'}) + c_1(\overline{H_2}_k) + c_1(\overline{H_2}_{k'})\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big\|\log\Big(\frac{h_{k,\mathbb{P}^1}}{h_{k',\mathbb{P}^1}}\Big)\Big\|_{\sup}\int_{\mathbb{P}^1} c_1(L) + \frac{1}{6}\Big\|\log\Big(\frac{h_{k,\mathbb{P}^1}}{h_{k',\mathbb{P}^1}}\Big)\Big\|_{\sup}\int_{\mathbb{P}^1}\Big(c_1(H_1) + c_1(H_2)\Big) \\
&\leq \Big\|\log\Big(\frac{h_{k,\mathbb{P}^1}}{h_{k',\mathbb{P}^1}}\Big)\Big\|_{\sup}\int_{\mathbb{P}^1}\Big(c_1(L) + c_1(H_1) + c_1(H_2)\Big) \\
&\leq \Big\|\log\Big(\frac{h_{k,1}}{h_{k',1}}\Big)\Big\|_{\sup}\Big\|\log\Big(\frac{h_{k,2}}{h_{k',2}}\Big)\Big\|_{\sup}\int_{\mathbb{P}^1}\Big(c_1(L) + c_1(H_1) + c_1(H_2)\Big)
\end{aligned}$$

On a trouvé M', une constante qui ne dépend pas de j telle que

$$\left|\log h_{Q,\overline{T\mathbb{P}^1}_k;\overline{L}_j}-\log h_{Q,\overline{T\mathbb{P}^1}_{k'};\overline{L}_j}\right| \leq M'\left\|\log\left(\frac{h_{k,\mathbb{P}^1}}{h_{k',\mathbb{P}^1}}\right)\right\|_{\sup} \leq M'\left\|\log\left(\frac{h_{k,1}}{h_{k',1}}\right)\right\|_{\sup}\left\|\log\left(\frac{h_{k,2}}{h_{k',2}}\right)\right\|_{\sup} \quad \forall\, k,k'\in\mathbb{N}.$$

Par suite, il existe M'' une constante réelle telle que

$$\left|\log h_{Q,\overline{T\mathbb{P}^1}_k;\overline{L}_j}-\log h_{Q,\overline{T\mathbb{P}^1}_{k'};\overline{L}_{j'}}\right| \leq M''\left(\left\|\log\left(\frac{h_{j,L}}{h_{j',L}}\right)\right\|_{\sup}+\left\|\log\left(\frac{h_{k,1}}{h_{k',1}}\right)\right\|_{\sup}\left\|\log\left(\frac{h_{k,2}}{h_{k',2}}\right)\right\|\right) \quad \forall\, j,j',k,k'\in\mathbb{N}.$$

Puisque, par hypothèse, $(h_{j,L})_{j\in\mathbb{N}}$ (resp. $(h_{k,1})_{k\in\mathbb{N}}$, resp. $(h_{k,2})_{k\in\mathbb{N}}$) converge uniformément vers $h_{\infty,L}$ (resp. vers $h_{\infty,1}$, resp. $h_{\infty,2}$), alors la suite double,

$$\left(\log h_{Q,\overline{T\mathbb{P}^1}_k;\overline{L}_j}\right)_{j,k\in\mathbb{N}},$$

converge vers une limite finie lorsque $k\mapsto\infty$ et $j\mapsto\infty$, qui ne dépend pas du choix des suites.

Comme $\overline{L}_\infty$ est un fibré en droites admissible sur $\mathbb{P}^1$, il existe $m\in\mathbb{N}$ tel que $L=\mathcal{O}(m)$. Donc pour tout $k\in\mathbb{N}$ et $j\in\mathbb{N}$

$$h_{L^2,\overline{T\mathbb{P}^1}_k,\overline{L}_j}=\det\big((z^l,z^{l'})_{L^2,k,j}\big)_{0\leq l,l'\leq m},$$

où $(\cdot,\cdot)_{L^2,k,j}$ est la métrique L^2 induite par $\overline{T\mathbb{P}^1}_k$ et $\overline{L}_j$ et les $1,z^1,\ldots,z^m$ sont les sections globales de L.

Pour tous $l,l'=0,1,\ldots,m$, la suite double

$$(z^l,z^{l'})_{L^2,k,j}=\int_{\mathbb{P}^1}h_{j,L}(z^l,z^{l'})\omega_{k,\mathbb{P}^1},$$

converge vers $(z^l,z^{l'})_{L^2,\infty,\infty}=\int_{\mathbb{P}^1}h_{\infty,L}(z^l,z^{l'})\omega_{\infty,\mathbb{P}^1}$, où $(\cdot,\cdot)_{L^2,\infty,\infty}$ désigne le produit scalaire L^2 induit par $h_{\infty,\mathbb{P}^1}$ et $h_{\infty,L}$. Par conséquent la suite de matrices

$$\left(\big((z^l,z^{l'})_{L^2,k,j}\big)_{0\leq l,l'\leq m}\right)_{k,j\in\mathbb{N}}$$

converge vers $\big((z^l,z^{l'})_{L^2,\infty,\infty}\big)_{0\leq l,l'\leq m}$ pour une norme matricielle arbitraire. Par des arguments de l'algèbre linéaire, on conclut que

$$\left(\det\big((z^l,z^{l'})_{L^2,k,j}\big)_{0\leq l,l'\leq m}\right)_{k,j\in\mathbb{N}}\xrightarrow[k,j\mapsto\infty]{}\det\big((z^l,z^{l'})_{L^2,\infty,\infty}\big)_{0\leq l,l'\leq m},$$

c'est à dire

$$\left(h_{L^2,\overline{T\mathbb{P}^1}_k,\overline{L}_j}\right)_{k,j\in\mathbb{N}}\xrightarrow[k,j\mapsto\infty]{}h_{L^2,\overline{T\mathbb{P}^1}_\infty,\overline{L}_\infty}.$$

On a donc montré que la suite double suivante :

$$\left(T\Big((T\mathbb{P}^1,h_{k,T\mathbb{P}^1});(L,h_{j,L})\Big)\right)_{k\in\mathbb{N},\,j\in\mathbb{N}},$$

converge vers une limite finie. □

Définition 2.2.6. *On note cette limite par*

$$T_g\Big((T\mathbb{P}^1,h_{\infty,\mathbb{P}^1});(L,h_{\infty,L})\Big),$$

et on l'appelle la torsion analytique généralisée. On définit aussi

$$h_{Q,g} := h_{L^2,g} \exp\Big(T_g((T\mathbb{P}^1, h_{\infty,\mathbb{P}^1}); (L, h_{\infty,L})\Big)$$

qu'on appelle la métrique de Quillen généralisée.

On note par $[x_0 : x_1]$ les coordonnées homogènes de $\mathbb{P}^1$ avec $z = \frac{x_1}{x_0}$ lorsque $x_0 \neq 0$. On munit $\mathbb{P}^1$ de la métrique singulière suivante :

$$\omega_\infty = \frac{1}{2\pi i} \frac{dz \wedge d\overline{z}}{\max(1, |z|^4)},$$

et pour tout $m \geq 0$, le fibré en droites $\mathcal{O}(m)$ sera muni de sa métrique canonique :

$$h_\infty(s, s)(z) = \frac{|s(z)|^2}{\max(1, |z|)^{2m}},$$

où s est une section holomorphe locale de $\mathcal{O}(m)$. On montre que ces deux métriques sont admissibles, voir par exemple [Zha95].

On note par $h_{Q,(\overline{T\mathbb{P}^1}_\infty; \overline{\mathcal{O}(m)}_\infty)}$ la métrique de Quillen généralisée associée à $(\overline{T\mathbb{P}^1}_\infty; \overline{\mathcal{O}(m)}_\infty)$. On a

Proposition 2.2.7. *On a pour tout $m \in \mathbb{N}$,*

$$h_{Q,(\overline{T\mathbb{P}^1}_\infty; \overline{\mathcal{O}(m)}_\infty)} = \exp(4\zeta'_{\mathbb{Q}}(-1) - \frac{1}{6}),$$

et

$$T_g(\overline{T\mathbb{P}^1}_\infty; \overline{\mathcal{O}(m)}_\infty) = 4\zeta'_{\mathbb{Q}}(-1) - \frac{1}{6} - \log \frac{(m+2)^{m+1}}{((m+1)!)^2}.$$

Démonstration. On considère sur $\mathbb{P}^1$ les deux métriques suivantes :

$$\omega_{FS} = \frac{i}{2\pi} \frac{dz \wedge d\overline{z}}{(1 + |z|^2)^2}, \quad \text{et} \quad \omega_\infty = \frac{i}{2\pi} \frac{dz \wedge d\overline{z}}{\max(1, |z|^2)^2}.$$

Par (2.2.5) et les formules des anomalies [BGS88, théorèmes 0.1, 0.2] on peut écrire que

$$\log h_{Q,\overline{T\mathbb{P}^1}_{FS}; \overline{\mathcal{O}(m)}_\infty} - \log h_{Q,\overline{T\mathbb{P}^1}_{FS}; \overline{\mathcal{O}(m)}_{FS}} = \int_{\mathbb{P}^1} \widetilde{ch}(\mathcal{O}(m), h_{FS}^{\otimes m}, h_\infty^{\otimes m}) \mathrm{Td}(\overline{T\mathbb{P}^1}_{FS})$$

et

$$\log h_{Q,\overline{T\mathbb{P}^1}_\infty; \overline{\mathcal{O}(m)}_\infty} - \log h_{Q,\overline{T\mathbb{P}^1}_{FS}; \overline{\mathcal{O}(m)}_\infty} = \int_{\mathbb{P}^1} ch(\overline{\mathcal{O}(m)}) \widetilde{\mathrm{Td}}(T\mathbb{P}^1, h_{FS}, h_\infty)$$

On a

$$\widetilde{ch}(\mathcal{O}(m), h_{FS}^{\otimes m}, h_\infty^{\otimes m}) = -m \log\Big(\frac{h_{FS}}{h_\infty}\Big) - \frac{m^2}{2} \log\Big(\frac{h_{FS}}{h_\infty}\Big)\Big(c_1(\overline{\mathcal{O}(1)}_\infty) + c_1(\overline{\mathcal{O}(1)}_{FS})\Big),$$

et

$$\widetilde{\mathrm{Td}}(T\mathbb{P}^1, h_{FS}^2, h_\infty^2) = -\frac{m}{2} \log\Big(\frac{h_{FS}^2}{h_\infty^2}\Big) - \frac{1}{12} \log\Big(\frac{h_{FS}^2}{h_\infty^2}\Big)\Big(c_1(\overline{\mathcal{O}(2)}_\infty) + c_1(\overline{\mathcal{O}(2)}_{FS})\Big).$$

ce sont deux formes différentielles généralisées au sens de [Mai00, § 4.3], modulo $\mathrm{Im}\overline{\partial} + \mathrm{Im}\partial$.

Rappelons le résultat suivant :

Proposition 2.2.8. *Soit $\overline{L}$ un fibré en droites sur X une variété torique lisse de dimension d muni de sa métrique canonique ; pour tout fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur X, on a :*

$$\int_X f c_1(\overline{L})^d = \deg(L) \int_{S_N^+} f d\mu^+$$

Démonstration. C'est un cas particulier du [Mai00, Corollaire 6.3.5]. □

Par la précédente proposition,

$$\begin{aligned} -\int_{\mathbb{P}^1} \log\Big(\frac{h_{FS}^2}{h_\infty^2}\Big) c_1(\overline{\mathcal{O}(2)}_\infty) &= \frac{\deg(\mathcal{O}(2))}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log\Big(\frac{h_\infty}{h_{FS}}\Big)(e^{i\theta}) d\theta \\ &= \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log\Big(\frac{(1+|e^{i\theta}|^2)^2}{\max(1,|e^{i\theta}|^2)}\Big) d\theta \\ &= 2\log 4. \end{aligned} \tag{2.1}$$

On a,

$$\begin{aligned} -\int_{\mathbb{P}^1} \log\Big(\frac{h_{FS}^2}{h_\infty^2}\Big) c_1(\overline{\mathcal{O}(2)}_{FS}) &= \frac{4i}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \log\Big(\frac{(1+|z|^2}{\max(1,|z|^2)}\Big) \frac{dz \wedge d\overline{z}}{(1+|z|^2)^2} \\ &= 4 \int_0^{+\infty} \log\Big(\frac{1+r^2}{\max(1,r^2)}\Big) \frac{r dr}{(1+r^2)^2} \\ &= 4 \int_0^{+\infty} \log\Big(\frac{1+u}{\max(1,u)}\Big) \frac{du}{(1+u)^2} \\ &= 4(1-\log 2). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Si l'on note par $[\cdots]^{(0)}$ la partie de degré 0 dans $\oplus_{k\geq 0} \widetilde{\mathcal{D}^{k,k}}(\mathbb{P}^1)$: l'anneau gradué des courants de degré (k,k) modulo $Im\,\partial + Im\,\overline{\partial}$, alors

$$\begin{aligned} \Big[\int_{\mathbb{P}^1} \widetilde{ch}(\mathcal{O}(m), h_{FS}^{\otimes m}, h_\infty^{\otimes m}) \mathrm{Td}(\overline{T\mathbb{P}^1}_{FS})\Big]^{(0)} &= \Big[\int_{\mathbb{P}^1} \widetilde{ch}(\mathcal{O}(m), h_{FS}^{\otimes m}, h_\infty^{\otimes m})(1 + c_1(\overline{\mathcal{O}(1)}_{FS}))\Big]^{(0)} \\ &= \Big[\int_{\mathbb{P}^1} \widetilde{ch}(\mathcal{O}(m), h_{FS}^{\otimes m}, h_\infty^{\otimes m})\Big]^{(0)} + m \int_{\mathbb{P}^1} \Big(-\log \frac{h_{FS}}{h_\infty}\Big) c_1(\overline{\mathcal{O}(1)}_{FS}) \\ &= -\frac{m^2}{2} \int_{\mathbb{P}^1} \log \frac{h_{FS}}{h_\infty} \Big(c_1(\overline{\mathcal{O}(1)}_\infty) + c_1(\overline{\mathcal{O}(1)}_{FS})\Big) + m \int_{\mathbb{P}^1} \Big(-\log \frac{h_{FS}}{h_\infty}\Big) c_1(\overline{\mathcal{O}(1)}_{FS}) \\ &= \frac{m^2}{2}(\log 2 + (1-\log 2)) + m(1-\log 2) \quad \text{par (2.1) et (2.2)} \\ &= \frac{m^2}{2} + (1-\log 2)m, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \Big[\int_{\mathbb{P}^1} ch(\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty) \widetilde{\mathrm{Td}}(T\mathbb{P}^1, h_{FS}, h_\infty)\Big]^{(0)} &= \Big[\int_{\mathbb{P}^1} \Big(1 + m c_1(\overline{\mathcal{O}(1)}_\infty)\Big) \widetilde{\mathrm{Td}}(T\mathbb{P}^1, h_{FS}, h_\infty)\Big]^{(0)} \\ &= \Big[\int_{\mathbb{P}^1} \widetilde{\mathrm{Td}}(T\mathbb{P}^1, h_{FS}, h_\infty)\Big]^{(0)} - \frac{1}{2} m \int_{\mathbb{P}^1} \Big(\log \frac{h_{FS}}{h_\infty}\Big) c_1(\overline{\mathcal{O}(1)}_\infty) \\ &= -\frac{1}{12} \int_{\mathbb{P}^1} \log \frac{h_{FS}}{h_\infty} \Big(c_1(\overline{\mathcal{O}(1)}_\infty + c_1(\overline{\mathcal{O}(1)}_{FS})\Big) - \frac{1}{2} m \int_{\mathbb{P}^1} \Big(\log \frac{h_{FS}}{h_\infty}\Big) c_1(\overline{\mathcal{O}(1)}_\infty) \\ &= \frac{1}{3} + m \log 2 \quad \text{par (2.1) et (2.2).} \end{aligned}$$

En regroupant tout cela, on obtient

$$\log h_{Q,\overline{T\mathbb{P}^1}_\infty;\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty} - \log h_{Q,\overline{T\mathbb{P}^1}_{FS};\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty} = \Big(\frac{m^2}{2} + (1-\log 2)m\Big) + \Big(\frac{1}{3} + m\log 2\Big) = \frac{m^2}{2} + m + \frac{1}{3}. \quad (2.3)$$

Rappelons que pour calculer $h_{Q,\overline{T\mathbb{P}^1}_{FS};\overline{\mathcal{O}(m)}_{FS}}$; la métrique de Quillen associée à l'espace projectif $\mathbb{P}^N$ muni de la métrique de Fubini-Study et $\overline{\mathcal{O}(m)}_{FS}$, l'idée consiste à utiliser $T(\overline{T\mathbb{P}^N}_{FS};\overline{\mathcal{O}}_0)$ qui est déterminé dans [GS91], et d'appliquer la formule des immersions de Bismut-Lebeau, (voir [**?**]) appliquée à l'inclusion naturelle : $i : \mathbb{P}^{N-1} \longrightarrow \mathbb{P}^N$ et à la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(m) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(m+1) \longrightarrow i_*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(m) \longrightarrow 0.$$

Par récurrence, on établit que :

$$-\log h_{Q,\overline{T\mathbb{P}^1}_{FS};\overline{\mathcal{O}(m)}_{FS}} = \frac{m^2}{2} + m + \frac{1}{2} - 4\zeta'_{\mathbb{Q}}(-1) \quad \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

Donc, en utilisant (2.3), on obtient :

$$\begin{aligned} -\log h_{Q,\overline{T\mathbb{P}^1}_\infty;\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty} &= -\Big(\frac{m^2}{2} + m + \frac{1}{3}\Big) + \frac{m^2}{2} + m + \frac{1}{2} - 4\zeta'_{\mathbb{Q}}(-1) \\ &= \frac{1}{6} - 4\zeta'_{\mathbb{Q}}(-1). \end{aligned}$$

Si l'on note par $h_{L^2,\infty,\infty}$ le L^2-norme naturelle sur $\lambda(\mathcal{O}(m))$ définie par les métriques canoniques de $T\mathbb{P}^1$ et $\mathcal{O}(m)$, on a

$$h_{L^2,\infty,\infty} = \prod_{k=0}^{m} (z^k, z^k)_{\infty,\infty}, \quad (2.4)$$

où $(z^k, z^k)_{\infty,\infty} = \int_{\mathbb{P}^1} h_\infty(z^k, z^k)\omega_\infty$. On a pour tout $0 \le k \le m$,

$$\begin{aligned} (z^k, z^k)_{\infty,\infty} &= \int_{\mathbb{P}^1} h_\infty(z^k, z^k)\omega_\infty \\ &= \int_{\mathbb{C}} \frac{|z|^{2k}}{\max(1,|z|)^{2m}} \frac{dz \wedge d\overline{z}}{2\pi i \max(1,|z|^4)} \\ &= \int_0^\infty \frac{r^{2k}}{\max(1,r)^{2m+4}} 2r dr \\ &= \int_0^\infty \frac{r^k}{\max(1,r)^{m+2}} dr \\ &= \int_0^1 r^k dr + \int_1^\infty \frac{r^k}{r^{m+2}} dr \\ &= \frac{1}{k+1} + \frac{1}{m+1-k} \\ &= \frac{m+2}{(k+1)(m+1-k)}. \end{aligned}$$

Par suite,

$$h_{L^2,\infty,\infty} = \frac{(m+2)^{m+1}}{\big((m+1)!\big)^2}. \quad (2.5)$$

On obtient donc,

$$T_g(\overline{T\mathbb{P}^1}_\infty; \overline{\mathcal{O}(m)}_\infty) = 4\zeta'_{\mathbb{Q}}(-1) - \frac{1}{6} - \log \frac{(m+2)^{m+1}}{((m+1)!)^2} \quad \forall\, m \in \mathbb{N}.$$

□

2.3 Régularisation de familles de fonctions Zêta

Nos principaux résultats dans cette section sont les théorèmes (2.3.2) et (2.3.6). Dans le premier nous démontrons un résultat proche de [Spr05, lemme. 1]. Précisément, nous allons établir un énoncé plus précis et plus général donnant une condition suffisante pour qu'une fonction Zêta admette une représentation intégrale. Le théorème (2.3.6) est un résultat concernant la notion de famille de fonctions Zêta régularisable qu'on développera dans la suite.

2.3.1 Sur la régularisation des produits infinis d'après Voros

Dans cette première partie on rappelle les principaux résultats de Voros autour de la notion du produit régularisé.

Soit $\Lambda : 0 < \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots$ une suite croissante non bornée de nombres réels positifs. La fonction *Thêta* attachée à cette suite est définie comme suit :

$$\theta_\Lambda(t) := \sum_{n\geq 1} e^{-\alpha_n t}.$$

On suppose que θ_Λ vérifie les deux hypothèses suivantes :

$\Theta 1$: $\theta_\Lambda(t)$ converges pour tout $t > 0$.

$\Theta 2$: θ_Λ admet, pour t assez petit, un developpement en série de Laurent :

$$\theta_\Lambda(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_{i_n} t^{i_n}, \quad \text{quand } t \mapsto 0$$

avec $\{i_n\}$ une suite croissante non bornée de nombres réels, et que $i_0 < 0$. On a nécessairement $c_{i_0} \neq 0$.

alors la fonction zêta associée à la suite Λ :

$$\zeta_\Lambda(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\alpha_n^s}$$

vérifie

$$\zeta_\Lambda(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \theta_\Lambda(t) t^{s-1} dt$$

converge pour $\mathrm{Re}(s) > -i_0$ avec un pôle en $s = -i_0$, admet une continuation méromorphe au plan complexe entier qui est sans pôle en $s = 0$, avec $\zeta(0) = c_0$, voir par exemple [Sou92, Théorème 1]. Dans ce cas, on pose la définition suivante :

Définition 2.3.1. *Sous ces hypothèses, on appelle produit régularisé et on le note $\alpha_1\alpha_2\dots$ la quantité suivante :*

$$e^{-\zeta'_\Lambda(0)}.$$

Si α est un réel négatif, alors la suite $0 < -\alpha + \alpha_1 \leq -\alpha + \alpha_2 \leq \dots$, vérifie $\Theta 1$ et $\Theta 2$, donc on peut considérer le produit régularisé $(\alpha_1 - \alpha)(\alpha_2 - \alpha)\cdots$ comme étant $D(\alpha) := \exp(-Z'(0, -\alpha))$, où $Z(s, -\alpha) := \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{(-\alpha+\lambda_k)^s}$. D fonction peut être définie pour tout nombre complexe, d'après [Vor87] c'est l'unique fonction holomorphe en la variable α ayant $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ pour uniques zéros (comptés avec multiplicités), bornée par $\exp(a + b|\alpha|^N)$ où a, b et N des constantes. On montre dans [Vor87, p.448] que D admet au voisinage de $-\infty$, un développement asymptotique de la forme :

$$-\log D(\alpha) \sim_{\alpha\to-\infty} \sum_{i_n\neq -m} c_{i_n}\Gamma(i_n)(-\alpha)^{-i_n} - \sum_{m=0}^{[\mu]} c_{-m}\Big(\log(-\alpha) - \sum_{r=1}^{m} r^{-1}\Big)\frac{\alpha^m}{m!}\,^{2} \tag{2.6}$$

2. $[\cdot]$ désigne la partie entière.

μ est, par définition, le réel positif $-i_0$.

Supposons que $\mu \neq 1$. Par le théorème de factorisation de Weierstrass, voir par exemple [Hil62, p. 195], la fonction holomorphe D se factorise en :

$$D(\alpha) = e^{P(\alpha)}\Delta(\alpha)$$

où P est un polynôme de degré $\leq [\mu]$, et Δ est de la forme

$$\Delta(\alpha) = \prod_{k=1}^{\infty}(1 - \frac{\alpha}{\alpha_k})\exp(\frac{\alpha}{\alpha_k} + \frac{\alpha^2}{2\alpha_k} + \ldots + \frac{\alpha^{[\mu]}}{[\mu]\alpha_{[\mu]}}), \quad \text{si} \quad \mu > 1$$

et

$$\Delta(\alpha) = \prod_{k=1}^{\infty}(1 - \frac{\alpha}{\alpha_k}), \quad \text{si} \quad \mu < 1.$$

L'expression de P est donnée par [Vor87, (4.12)].

Le développement asymptotique ci-dessus est une conséquence de la régularisation des zéros de la fonction considérée, ce qui suppose à priori qu'on dispose d'informations sur ces zéros c'est à dire connaître le comportement de la fonction θ au voisinage de zéro. Mais, il existe certaines fonctions analytiques qui possèdent un développement asymptotique du même type mais obtenus par une autre procédure, par exemple Γ^{-1}, l'inverse de la fonction Gamma et son analogue la G-fonction de Barnes, se déduit de la formule de Binet pour la première fonction, voir [WW62, 12.31] et de l'expression intégrale de $\log\Gamma$, voir [Bar00, § 14]. Une autre classe d'exemples est donnée par les fonctions de Bessel, qui ont la particularité d'avoir des zéros non explicites. Hankel utilise dans [Han69] une représentation intégrale pour en extraire un développement asymptotique.

Soit Δ une fonction analytique non constante sur $\mathbb{C}$ dont tous ses zéros non nuls sont positifs. On suppose de plus que Δ admet un développement asymptotique au voisinage de $-\infty$ de la forme suivante :

$$-\log\Delta(\alpha) \sim_{\alpha\mapsto-\infty} \sum_{j\in\mathcal{J}} c_j(-\alpha)^{-j}\log(-\alpha)^{k_j} + a\log(-\alpha) + b + d\alpha, \tag{2.7}$$

où $\mathcal{J}$ est un ensemble discret minoré, on pose $j_0 = \inf\mathcal{J}$ qu on suppose < 0, a, b, d, c_j sont des réels et $k_j \in \{0, 1\}$ pour tout $j \in \mathcal{J}$.

Si l'on se donne p, une fonction analytique ayant que des zéros positifs non nuls qu'on note par $a_1 \leq a_2 \leq \ldots$ et on suppose que p admet un développement asymptotique de la forme :

$$\log p(z) = dz^\kappa + a\log z^2 + b + \frac{b_{-1}}{z} + \frac{b_{-2}}{z^2} + O(\frac{1}{z^3}), \quad \forall |z| \gg 1,\ 0 < |\arg(z)| < \pi.$$

Alors on peut se demander quelle est la relation entre le développement asymptotique de p et celui du Δ ? Le résultat suivant décrit cette relation et étend en même temps [Spr05, corollaire 1].

Théorème 2.3.2. *Soit $(a_j)_{j\geq 1}$ une suite strictement croissante de réels. On suppose que*

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{a_j^2} < \infty,$$

alors la fonction p définie par :

$$p(z) = \prod_{j=1}^{\infty}\Big(1 - \frac{z^2}{a_j^2}\Big) \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

est analytique sur $\mathbb{C}$. Si l'on suppose en plus que

$$\log p(z) = dz^{\kappa} + a\log z^2 + b + \frac{b_{-1}}{z} + \frac{b_{-2}}{z^2} + O\Big(\frac{1}{z^3}\Big) \quad \forall\, |z| \gg 1,\ 0 < |\arg(z)| < \pi.$$

avec $\kappa \in \mathbb{N}$, d, a, b, b_{-1} et b_{-2} sont des réels. Alors,

$$\zeta(s) := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{a_j^{2s}} = \frac{s^2}{\Gamma(s+1)} \int_0^{\infty} \frac{t^{s-1}}{2\pi i} \int_{\Lambda_c} \frac{e^{-z^2 t}}{z} \log p(z) dz,$$

pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$, avec un pôle en $s = 1$, elle est prolongeable analytiquement au voisinage de $s = 0$ et on a :

$$\zeta(0) = -a,\ \zeta'(0) = -b. \tag{2.8}$$

où $\Lambda_c = \Big\{z \in \mathbb{C} \,|\, |\arg(z-c)| = \frac{\pi}{8}\Big\}$.

Démonstration. Supposons que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{a_j^2} < \infty,$$

alors par le théorème de factorisation de Weierstrass, la fonction $z \mapsto \prod_{j=1}^{\infty}(1 - \frac{z}{\alpha_j^2})$ est analytique sur $\mathbb{C}$ et par conséquent p est analytique sur $\mathbb{C}$.

On vérifie par l'absurde que

$$\inf_{z \in \Lambda_c,\, k \in \mathbb{N}^*} \frac{|\alpha_k^2 - z^2|}{\alpha_k^2} \neq 0.$$

On en déduit que la suite $\Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z^2 - \alpha_k^2}\Big)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge normalement sur un voisinage ouvert de Λ_c, donc

$$\int_{\Lambda_c} e^{-z^2 t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - a_k^2} dz = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\Lambda_c} e^{-z^2 t} \frac{2z}{z^2 - a_k^2} dz = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-a_k^2 t}.$$

Soit $R > 0$ et on pose $\Lambda_{c,R} = \Big\{z \in \mathbb{C} \,|\, |\arg(z-c)| = \frac{\pi}{8},\ |z| \leq R\Big\}$. On a

$$\begin{aligned}\int_{\Lambda_{c,R}} e^{-z^2 t} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - \alpha_k^2} dz &= \int_{\Lambda_{c,R}} e^{-z^2 t} \frac{d}{dz} \log p(z) dz \\ &= \Big[-e^{-z^2 t} \log p(z)\Big]_{z_R}^{z'_R} + \int_{\Delta_{c,R}} z t e^{-z^2 t} \log p(z) dz\end{aligned}$$

où $\{z_R, z'_R\} = \Lambda_{c,R} \cap \{|z| = R\}$ choisis tels que $\mathrm{Im}(z'_R) > 0$.

On déduit à l'aide du développement asymptotique de $\log p$ que

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\alpha_k^2 t} = \lim_{R \mapsto \infty} \int_{\Lambda_{c,R}} z t e^{-z^2 t} \log p(z) dz = \int_{\Lambda_c} z t e^{-z^2 t} \log p(z) dz.$$

La suite de la preuve sera une application du théorème (2.3.6). En effet, si considère la famille $(G_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}^*}$ définie comme suit : $G_1(z) = \prod_{k=1}^{\infty}(1+\frac{z^2}{\alpha_{1,k}^2}) = p(iz)$ et $G_\nu(z) = \prod_{k=1}^{\infty}(1+\frac{z^2}{\alpha_{\nu,k}^2})$ avec la convention $\alpha_{\nu,k} = \infty$ si $\nu \geq 2$ et $k \geq 1$, alors cette famille est régularisable, voir la définition (2.3.4).

□

Remarque 2.3.3. On note par $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. On pose $\Delta(z) := \prod_{p\in\mathcal{P}}(1-\frac{z}{p^t})$ $\forall z \in \mathbb{C}$, avec $t > 2$. Par le théorème de factorisation de Weierstrass, Δ est une fonction analytique sur $\mathbb{C}$, remarquons que $\Delta(1) = \zeta_{\mathbb{Q}}(t)^{-1}$. Si par l'absurde cette fonction admet un développement asymptotique du type (2.7), alors la fonction Zêta associée :

$$\zeta_t(s) := \sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{p^{ts}}$$

admet un prolongement analytique en $s = 0$, ce qui n'est pas le cas, puisqu'on montre dans [LW20] que l'axe imaginaire est une frontière naturelle pour la fonction Zêta $\zeta(s) := \sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{p^s}$.

2.3.2 Régularisation de familles de fonctions Zêta

Dans ce paragraphe nous allons étendre une méthode de régularisation de familles de fonctions Zêta, introduite en premier dans [Spr05].

On considère une famille $(G_\nu)_{\nu\in\Omega}$ une famille de fonctions analytiques sur $\mathbb{C}$ indexé par Ω, un sous ensemble infini de $\mathbb{R}$ discret ou connexe. Par exemple solutions d'une équation différentielle dont les coefficients dépendent de ν, comme l'équation de Legendre :

$$\frac{d}{dz}\Big[(1-z^2)\frac{dG_\nu}{dz}\Big] + \nu(\nu+1)G_\nu = 0,$$

Un autre exemple, celui des fonctions de Bessel modifiées, solutions de l'équation :

$$\frac{d^2G_\nu}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dG_\nu}{dz} - \Big(1+\frac{\nu^2}{z^2}\Big)G_\nu = 0.$$

Pour les applications, on va se restreindre aux fonctions G_ν qui s'écrivent sous la forme

$$G_\nu(z) = l_\nu z^{e_\nu}\prod_{k=1}^{\infty}(1+\frac{z^2}{\lambda_{\nu,k}^2}) \quad \forall\, \nu\in\Omega,$$

avec $l_\nu, e_\nu \in \mathbb{R}$ et $\lambda_{\nu,k} \in \mathbb{R}, \forall\, k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ ordonnés comme suit : $\lambda_{\nu,1}^2 \leq \lambda_{\nu,2}^2 \leq \dots$

On pose

$$p_\nu(z) := \frac{G_\nu(iz)}{l_\nu z^{e_\nu}} = \prod_{k\geq 1}^{\infty}\Big(1-\frac{z^2}{\lambda_{\nu,k}^2}\Big) \quad \forall\, \nu\in\Omega,$$

On dispose donc d'une famille de fonctions zêta indexée par Ω :

$$\zeta_\nu(s) := \sum_{k\geq 1}\frac{1}{\lambda_{\nu,k}^{2s}} \quad \forall\, \mathrm{Re}(s) > 1,\ \nu\in\Omega.$$

On souhaite étudier la fonction suivante :

$$\zeta_\Omega(s) := \sum_{\nu\in\Omega}\sum_{k\geq 1}\frac{1}{\lambda_{\nu,k}^{2s}} = \sum_{\nu\in\Omega}\zeta_\nu(s),$$

lorsque Ω est discret et

$$\zeta_\Omega(s) = \int_\Omega \zeta_\nu(s) d\nu,$$

si Ω est un intervalle.

Il est donc naturel d'imposer des conditions qui prennent en compte le nouveau paramètre ν, afin d'assurer que ζ_Ω possède les propriétés communes à toute fonction Zêta, à savoir convergence pour $\mathrm{Re}(s) \gg 1$, prolongement holomorphe au voisinage de zéro...

On introduit alors la définition suivante :

Définition 2.3.4. *On dit que la famille $\{\zeta_\nu,\, \nu \in \Omega\}$ est régularisable si :*

1. $$c := \inf_{\nu \in \Omega \cap [1,\infty[} \left(\frac{\lambda_{\nu,1}^2}{\nu^2} \right) \neq 0. \tag{2.9}$$

2. *Une représentation intégrale de ζ_ν, $\forall\, \nu \in \Omega$:*

$$\zeta_\nu(s) = \frac{s^2}{\Gamma(s+1)} \int_0^\infty t^{s-1} \int_{\Lambda_{c_\nu}} \frac{e^{-z^2 t}}{z} \log\Big(\frac{G_\nu(iz)}{l_\nu z^{e_\nu}} \Big) dz, \quad \forall \nu \in \Omega,$$

   avec c_ν est un réel dans $]0, \lambda_{\nu,1}[$.

3. *Pour tout $\nu \in \Omega$, il existe $\widetilde{d}_\nu, \widetilde{a}_\nu, \widetilde{b}_\nu$ et $\widetilde{c}_\nu$ des réels tels que*

$$-\log\left(\frac{G_\nu(z)}{l_\nu z^{e_\nu}} \right) = \widetilde{d}_\nu z + \widetilde{a}_\nu \log(z^2) + \widetilde{b}_\nu + \frac{\widetilde{c}_\nu}{z} + O\Big(\frac{1}{z^2}\Big),$$

   pour $|z| \gg 1$ et $|\arg(z)| < \frac{\pi}{2}$ [3]. On suppose en plus que a_ν est un polynôme en ν pour $\nu \gg 1$. [4].

4. *Il existe r, w, ρ et $\eta(\nu, \cdot)$ quatre fonctions continues sur $|\arg(z)| < \frac{\pi}{2}$ telles que*

$$G_\nu(\nu z) = \alpha_\nu\, \rho(z)\, \exp(e'_\nu r(z)) \left(1 + \frac{1}{\nu} w(z) + \frac{1}{\nu^2} \eta(\nu, z) \right) \quad \nu \gg 1,$$

   avec $\alpha_\nu, e'_\nu \in \mathbb{R}$.

   (a) *$\rho(0) = 1$ et $\log \rho(z) = \alpha z + \beta \log(z) + \mu + O(\frac{1}{z})$ pour $|z| \gg 1$ avec α, β et μ sont deux réels.*

   (b) *w est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \Big(\{ict, t \geq 1\} \cup \{-ict, t \geq 1\} \Big)$ et $w(z) = O(\frac{1}{z^\kappa})$ pour $|z| \gg 1$ pour un certain $\kappa \geq 1$.*

   (c) *$r(z) = z + O(\frac{1}{z})$ pour $|z| \gg 1$ et $r(z) = \log(z) + o(1)$ pour $0 < |z| \ll 1$. [5]*

   (d) *$\eta(\nu, z)$ uniformément borné en z pour $n \gg 1$ et que $\eta(\nu, z) = O(\frac{1}{z})$ quand $|z| \gg 1$ pour ν fixé.*

Pour simplifier on suppose dans la suite que Ω est discret, avec $+\infty$ comme unique point d'accumulation pour $\Omega \cup \{+\infty\}$.

3. Remarquons que les zéros de G_ν sont situés sur l axe des imaginaires purs
4. On a pris une détermination holomorphe du logarithme ; en effet : Si $z^2 \in -\mathbb{R}$, alors $\arg(z) = \pm\frac{\pi}{2}[\pi]$
5. Par exemple si $r(z) = \sqrt{1+z^2} + \log \frac{z}{1+\sqrt{1+z^2}}$ alors $r(z) = z + O(\frac{1}{z})$ pour $|z| \gg 1$.

Pour $s \in \mathbb{C}$ fixé, on pose

$$A(s) := \sum_{\nu\in\Omega} \frac{a_\nu}{\nu^{2s}}, \quad B(s) := \sum_{\nu\in\Omega} \frac{b_\nu}{\nu^{2s}}, \quad P(s) := \sum_{\nu\in\Omega} \frac{w(0)}{\nu^{2s+1}},$$
$$\text{et} \quad F(s) := \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{2\pi i} \int_{\Lambda_c} \frac{e^{-z^2}}{z} w(z)dz.$$

où a_ν (resp. b_ν) est par définition le coefficient de $\log(z^2)$ (resp. le terme constant) dans le développement asymptotique de $-\log \frac{G_\nu(\nu z)}{l_\nu(\nu z)^{e_\nu}}$, c'est à dire

$$-\log\Big(\frac{G_\nu(\nu z)}{l_\nu(\nu z)^{e_\nu}}\Big) = \widetilde{d}_\nu \nu z + a_\nu \log(z^2) + b_\nu + \frac{\widetilde{c}_\nu}{\nu z} + O(\frac{1}{z^2}) \quad \forall\, |z| \gg 1.$$

On vérifie que

$$a_\nu = \widetilde{a}_\nu, \quad b_\nu = \widetilde{b}_\nu + 2\widetilde{a}_\nu \log \nu.$$

Lemme 2.3.5. *On a*

$$P(s) - B(s)$$

est fini en un voisinage ouvert de $s = 0$, en plus cette fonction est analytique au voisinage de $s = 0$.

Démonstration. Soit z, tel que $|\arg(z)| < \frac{\pi}{2}$. Si $\nu \gg 1$ alors on a par hypothèse,

$$\log G_\nu(\nu z) = \log \alpha_\nu - \log \rho(z) + e'_\nu r(z) + \log\Big(1 + \frac{w(z)}{\nu} + \frac{1}{\nu^2}\eta(\nu, z)\Big).$$

On peut prendre z grand, et en fixant ν

$$\begin{aligned}\log G_\nu(\nu z) &= \log \alpha_\nu - \alpha z - \beta \log(z) + O(\frac{1}{z}) + e'_\nu(z + O(\frac{1}{z})) + \frac{w(z)}{\nu} + \frac{1}{\nu^2}\eta(\nu, z)\\ &= (e'_\nu - \alpha)z - \beta \log z + \log \alpha_\nu + O(\frac{1}{z}),\end{aligned}$$

En le comparant au développement asymptotique de G_ν pour $|z| \gg 1$ c'est à dire à

$$\log G_\nu(\nu z) = -(\widetilde{d}_\nu \nu)z + \big(e_\nu - 2a_\nu\big) \log z + \log(l_\nu \nu^{e_\nu}) - b_\nu + O(\frac{1}{z}),$$

on obtient pour $\nu \gg 1$:

$$e'_\nu - \alpha = -d_\nu \nu, \quad -\beta = e_\nu - 2a_\nu, \quad \log \alpha_\nu = \log(l_\nu \nu^{e_\nu}) - b_\nu. \tag{2.10}$$

Au voisinage de $y = 0$, on a

$$\lim_{y\mapsto 0} \frac{G_\nu(\nu y)}{\exp(e'_\nu r(y))} = \lim_{y\mapsto 0} \frac{l_\nu \nu^{e_\nu} y^{e_\nu} + o(y^{e_\nu})}{y^{e'_\nu}} = \alpha_\nu\Big(1 + \frac{w(0)}{\nu} + \frac{1}{\nu^2}\eta(\nu, 0)\Big),$$

on en déduit que pour $\nu \gg 1$:

$$e_\nu = e'_\nu,$$
$$\log(l_\nu \nu^{e_\nu}) - \log \alpha_\nu = \log\Big(1 + \frac{w(0)}{\nu} + \frac{1}{\nu^2}\eta(\nu, 0)\Big).$$

Par suite,

$$b_\nu = \log\Big(1 + \frac{w(0)}{\nu} + \frac{1}{\nu^2}\eta(\nu, 0)\Big) = \frac{w(0)}{\nu} + O(\frac{1}{\nu^2}) \quad \forall \nu \gg 1.$$

donc,

$$b_\nu - \frac{w(0)}{\nu} = O\Big(\frac{1}{\nu^2}\Big), \tag{2.11}$$

alors la série $P - B$ converge normalement et cela pour tout s assez petit. On conclut que $P - B$ est une fonction analytique au voisinage de $s = 0$.

□

Pour les applications, on va supposer que $\Omega = \mathbb{N}^*$. Par hypothèses, a_n est un polynôme en n et d'après (2.10), e_n l'est aussi, soit d son degré. On pose :

$$\zeta_n(s) = \sum_{k\geq 1} \frac{1}{\lambda_{n,k}^{2s}} \ \forall\, n \in \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad \zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \zeta_n(s) \quad s \in \mathbb{C}.$$

Théorème 2.3.6. *On considère $\{G_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ une famille de fonctions analytiques non nulles sur $\mathbb{C}$ vérifiant les hypothèses de la définition précédente.*

Alors pour tout s tel que $\mathrm{Re}(s) > 1$, la fonction suivante :

$$T(z,s) := -\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{2s}} \log\Big(\frac{G_n(inz)}{l_n(nz)^{e_n}}\Big).$$

est analytique sur un voisinage ouvert de $\Lambda_c = \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, |\arg(\lambda - c)| = \frac{\pi}{8}\}$ et on a la représentation intégrale suivante pour ζ :

$$\zeta(s) = \frac{s^2}{\Gamma(s+1)} \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{2\pi i} \int_{\Lambda_c} \frac{e^{-z^2 t}}{z} T(z,s)\,dz\,dt,$$

qui converge pour $\mathrm{Re}(s) > \frac{d+1}{2}$, avec un pôle en $s = 1$ et admet un prolongement holomorphe au voisinage de $s = 0$, et

$$\begin{aligned}\zeta(s) = {} & \frac{s}{\Gamma(s+1)}\big[\gamma A(s) - \frac{1}{s}A(s) + P(s) - B(s)\big] + \frac{s^2}{\Gamma(s+1)}\zeta_{\mathbb{Q}}(2s+1)F(s) \\ & + \frac{s^2}{\Gamma(s+1)} h(s).\end{aligned}$$

pour $|s| \ll 1$ avec h une fonction analytique au voisinage $s = 0$.

Démonstration. Commençons par noter qu'on a formellement :

$$T(z,s) = \log\Big(\prod_{n=1}^\infty \prod_{k=1}^\infty (1 - \frac{n^2 z^2}{\lambda_{n,k}^2})^{\frac{1}{n^{2s}}}\Big).$$

Par hypothèse, il existe $N \gg 1$ tel que

$$\begin{aligned}T(z,s) &= -\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n^{2s}} \log\Big(\frac{G_n(inz)}{l_n(inz)^{e_n}}\Big) - \Big(\sum_{n=N}^\infty \frac{\log \alpha_n - \log(l_n n^{e_n})}{n^{2s}} + \frac{\log \rho(iz)}{n^{2s}} + \frac{e_n r(iz)}{n^{2s}} + \frac{w(iz)}{n^{2s+1}} + \mathrm{O}_z\Big(\frac{1}{n^{2+2s}}\Big)\Big) \\ &= -\sum_{1\leq n\leq N-1} \frac{1}{n^{2s}} \log\Big(\frac{G_n(inz)}{l_n(inz)^{e_n}}\Big) - \Big(\sum_{n=N}^\infty -\frac{b_n}{n^{2s}} + \frac{1}{n^{2s}}\log\rho(iz) + \frac{e_n}{n^{2s}} r(iz) + \frac{w(iz)}{n^{2s+1}} + \mathrm{O}_z\Big(\frac{1}{n^{2+2s}}\Big)\Big) \\ &= -\sum_{1\leq n\leq N-1} \frac{1}{n^{2s}} \log\Big(\frac{G_n(inz)}{l_n(inz)^{e_n}}\Big) - \Big(\sum_{n=N}^\infty \Big(\frac{w(iz)}{n^{2s+1}} - \frac{b_n}{n^{2s}}\Big) + \frac{1}{n^{2s}}\log\rho(iz) + \frac{e_n}{n^{2s}} r(iz) + \mathrm{O}_z\Big(\frac{1}{n^{2+2s}}\Big)\Big) \\ &= -\sum_{1\leq n\leq N-1} \frac{1}{n^{2s}} \log\Big(\frac{G_n(inz)}{l_n(inz)^{e_n}}\Big) - \Big(\sum_{n=N}^\infty \Big(\frac{w(iz) - w(0)}{n^{2s+1}} + O(\frac{1}{n^{2s+2}})\Big) + \frac{1}{n^{2s}}\log\rho(iz) + \frac{e_n}{n^{2s}} r(iz) \\ &\quad + \mathrm{O}_z\Big(\frac{1}{n^{2+2s}}\Big)\Big) \quad \text{par (3.5).}\end{aligned}$$

(où $\mathrm{O}_z(\frac{1}{n^{2+2s}})$ est une fonction bornée en z uniformément en n). Ce qui donne que

$$T(z,s)+\sum_{1\leq n\leq N-1}\frac{1}{n^{2s}}\log\Big(\frac{G_n(inz)}{l_n z^{e_n}}\Big)=-\sum_{n=N}^{\infty}\Big(\frac{w(iz)-w(0)}{n^{2s+1}}+\frac{1}{n^{2s}}\log\rho(iz)+\frac{e_n}{n^{2s}}r(iz)+\frac{w(iz)}{n^{2s}}+\mathrm{O}_z\Big(\frac{1}{n^{2+2s}}\Big)\Big), \tag{2.12}$$

pour tout z dans un voisinage ouvert de Λ_c. Comme la suite $\big(\frac{e_n}{n^{2s}}\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est équivalente à $\big(\frac{1}{n^{2s-d}}\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on déduit que sur tout ensemble borné en z, $T(z,s)$ converge normalement pour tout $\mathrm{Re}(s)>\frac{d+1}{2}$.

On a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, ζ_n admet une représentation intégrale (voir (2.3.2)) :

$$\zeta_n(s)=\frac{s^2}{\Gamma(s+1)}\int_0^\infty t^{s-1}\int_{\Lambda_{c_n}}\frac{e^{-z^2t}}{z}\log\frac{G_n(iz)}{l_n z^{e_n}}dzdt\quad\forall\, n\in\mathbb{N}^*,$$

où c_n est un réel quelconque dans $]0,\lambda_{n,1}[$. On peut écrire

$$\begin{aligned}\zeta_n(s)&=\frac{s^2}{\Gamma(s+1)}\int_0^\infty t^{s-1}\int_{\frac{1}{n}\Lambda_{c_n}}\frac{e^{-n^2z^2t}}{z}\log\frac{G_n(inz)}{l_n z^{e_n}}dzdt\\&=\frac{1}{n^{2s}}\frac{s^2}{\Gamma(s+1)}\int_0^\infty t^{s-1}\int_{\frac{1}{n}\Lambda_{c_n}}\frac{e^{-z^2t}}{z}\log\frac{G_n(inz)}{l_n z^{e_n}}dzdt.\end{aligned}$$

En utilisant l'holomorphie de $\log p_n$ loin de l'axe réel (voir (2.3.2)), on obtient :

$$\sum_{k\geq1}\frac{1}{\lambda_{n,k}^{2s}}=\frac{s^2}{\Gamma(s+1)}\int_0^\infty t^{s-1}\int_{\Lambda_{c_n}}\frac{e^{-z^2t}}{z}\frac{1}{n^{2s}}\log\frac{G_n(inz)}{l_n z^{e_n}}dzdt,$$

(rappelons que $\Lambda_{c_n}=\{z\,|\,|\arg(z-c_n)|=\frac{\pi}{8}\}$).

D'après (3.7.13), on a

$$\sum_{k\geq1}\frac{1}{\lambda_{n,k}^{2s}}=\frac{s^2}{\Gamma(s+1)}\int_0^\infty t^{s-1}\int_{\Lambda_c}\frac{e^{-z^2t}}{z}\frac{1}{n^{2s}}\log\frac{G_n(inz)}{l_n z^{e_n}}dzdt,\quad\forall n\in\mathbb{N}^*. \tag{2.13}$$

On se propose de montrer que ζ admet une représentation intégrale en fonction de T. Vue l'expression (2.12), il suffit d'étudier les fonctions en s suivantes :

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty t^{s-1}\int_{\Lambda_c}\Big|\frac{e^{-z^2t}}{z}r(iz)dz\Big|dt,\\&\int_0^\infty t^{s-1}\int_{\Lambda_c}\Big|\frac{e^{-z^2t}}{z}\log\rho(iz)dz\Big|dt,\\&\int_0^\infty t^{s-1}\int_{\Lambda_c}\Big|\frac{e^{-z^2t}}{z}w(iz)dz\Big|dt,\\&\int_0^\infty t^{s-1}\int_{\Lambda_c}\Big|\frac{e^{-z^2t}}{z}\mathrm{O}_z(\frac{1}{n^2})dz\Big|dt.\end{aligned}$$

La dernière fonction est bornée pour tout $\mathrm{Re}(s)\geq\frac{d+1}{2}$, puisque par hypothèse $\mathrm{O}_z(\frac{1}{n^2})$ est bornée en z uniformément en $n\gg1$. Notons il suffit d'étudier la première fonction. En effet, par hypothèses, on peut trouver c_1 et c_2 deux constantes telles que

$$|w(z)|\leq c_1|r(z)|,\quad|\log\rho(z)|\leq c_2|r(z)|\quad\forall|z|\gg1.$$

On note par $\Lambda_{c,\geq R} = \Lambda_c \cap \{|z| \geq R\}$ et $\Lambda_{c,\leq R} = \Lambda_c \cap \{|z| \leq R\}$ et soit $s > \frac{1}{2}$ fixé.

Rappelons que $r(z) = O(|z|)$ pour $|z| \gg 1$, alors pour $R \gg 1$ il existe $C > 0$ tel que

$$\begin{aligned}\int_0^1 t^{s-1} \int_{\Lambda_{c,\geq R}} \Big|\frac{e^{-tz^2}}{z} r(iz) dz dt\Big| &\leq C \int_0^1 t^{s-1} \int_{v\geq R} e^{-t\mu v^2} dv dt \\ &= C \int_0^1 t^{s-1-\frac{1}{2}} \int_{v\geq \sqrt{t}R} e^{-\mu v^2} dv dt \\ &\leq C \int_0^1 t^{s-1-\frac{1}{2}} \int_0^\infty e^{-\mu v^2} dv dt \\ &\leq \frac{C'}{s-\frac{1}{2}}, \quad \text{où } C' \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \int_{\Lambda_{c,\geq R}} t^{s-1} \Big|\frac{e^{-tz^2}}{z} r(iz) dz\Big| dt &\leq \int_{v\geq R} \int_1^\infty t^{s-1} e^{-t\mu v^2} dv dt \\ &= \int_{v\geq R} \frac{1}{\mu^{2s} v^{2s}} \int_{\mu v^2}^\infty t^{s-1} e^{-t} dt dv \\ &\leq \frac{\Gamma(s)}{s-\frac{1}{2}} \frac{1}{R^{2s-1}},\end{aligned}$$

par suite,

$$\int_0^\infty \int_{\Lambda_{c,\geq R}} t^{s-1} \frac{e^{-tz^2}}{z} r(iz) dz dt = O\Big(\frac{1}{\mathrm{Re}(s)-\frac{1}{2}}\Big) + O\Big(\frac{\Gamma(\mathrm{Re}(s))}{\mathrm{Re}(s)-\frac{1}{2}} \frac{1}{R^{2\mathrm{Re}(s)-1}}\Big) \quad \forall \mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}.$$

Sur $\Lambda_{c,\leq R}$, la fonction r est bornée puisque continue, donc

$$\begin{aligned}\int_0^\infty t^{s-1} \int_{\Lambda_{c,\leq R}} \Big|\frac{e^{-tz^2}}{z} r(iz) dz dt\Big| &\leq C \int_0^\infty t^{s-1} \int_{c\leq v\leq R} e^{-t\mu v^2} dv dt \\ &= C(R-c) \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t\mu c^2} dt \\ &= \frac{C(R-c)}{(\mu c)^s} \Gamma(s).\end{aligned}$$

On conclut

$$\int_0^\infty t^{s-1} \int_{\Lambda_c} \Big|\frac{e^{-tz^2}}{z} r(iz) dz dt\Big| = O\Big(\frac{\Gamma(\mathrm{Re}(s))}{(\mu c)^{\mathrm{Re}(s)}}\Big) + O\Big(\frac{1}{\mathrm{Re}(s)-\frac{1}{2}}\Big) \quad \forall \mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}.$$

On montre les mêmes inégalités pour w et $\log \rho$.

Rappelons que d est le degré du polynôme e_n. On conclut que pour tout $0 < \tau \ll 1$ et U un ouvert borné en s vérifiant $\mathrm{Re}(s) > \frac{d+1}{2} + \tau, \forall s \in U$, il existe une constante M telle que $\forall s \in U$

$$\Big|\int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{2\pi i} \int_{\Lambda_c} \frac{e^{-z^2 t}}{-z} \Big(\sum_{n=N}^\infty \frac{w(iz)-w(0)}{n^{2s+1}} + \frac{1}{n^{2s}} \log \rho(iz) + \frac{e_n r_n(iz)}{n^{2s}} + \frac{w(iz)}{n^{2s}} + \mathrm{O}_z\Big(\frac{1}{n^{2+2s}}\Big)\Big) dz dt\Big| \leq$$

$$\int_0^\infty \frac{t^{\mathrm{Re}(s)-1}}{2\pi i} \int_{\Lambda_c} \Big|\frac{e^{-z^2 t}}{-z} \Big(\sum_{n=N}^\infty \frac{w(iz)-w(0))}{n^{2\mathrm{Re}(s)+1}} + \frac{1}{n^{2\mathrm{Re}(s)}} \log \rho(iz) + \frac{e_n r_n(iz)}{n^{2\mathrm{Re}(s)}} + \frac{w(iz)}{n^{2\mathrm{Re}(s)}} + \mathrm{O}_{\sqrt{z}}\Big(\frac{1}{n^{2+2\mathrm{Re}(s)}}\Big)\Big) dz\Big| dt \leq$$

$$M\Big(\sum_{n\geq N}\frac{1}{n^{2\mathrm{Re}(s)+1}}+\frac{1}{n^{2\mathrm{Re}(s)-d}}+\frac{1}{n^{2\mathrm{Re}(s)}}+O\Big(\frac{1}{n^{2\mathrm{Re}(s)+2}}\Big)\Big).$$

A partir de cela et de (2.12), on obtient

$$\begin{aligned}
&\Big|\frac{s^2}{\Gamma(s+1)}\int_0^\infty\frac{t^{s-1}}{2\pi i}\int_{\Lambda_c}\frac{e^{-z^2t}}{-z}\Big(T(z,s)+\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n^{2s}}\log\frac{G_n(inz)}{l_nz^{e_n}}\Big)dzdt\Big|\\
&=\Big|\frac{s^2}{\Gamma(s+1)}\int_0^\infty\frac{t^{s-1}}{2\pi i}\int_{\Lambda_c}\frac{e^{-z^2t}}{-z}T(z,s)dzdt+\sum_{n=1}^{N-1}\frac{s^2}{\Gamma(s+1)}\int_0^\infty\frac{t^{s-1}}{2\pi i}\int_{\Lambda_c}\frac{e^{-z^2t}}{-z}\frac{1}{n^{2s}}\log\frac{G_n(inz)}{l_nz^{e_n}}dzdt\Big|\\
&=\Big|\frac{s^2}{\Gamma(s+1)}\int_0^\infty\frac{t^{s-1}}{2\pi i}\int_{\Lambda_c}\frac{e^{-z^2t}}{-z}T(z,s)dzdt-\sum_{n=1}^{N-1}\zeta_n(s)\Big|\quad\text{d'après (2.13)}\\
&\leq M\Big(\sum_{n\geq N}\frac{1}{n^{2\mathrm{Re}(s)+1}}+\frac{1}{n^{2\mathrm{Re}(s)-d}}+\frac{1}{n^{2\mathrm{Re}(s)}}+O(\frac{1}{n^{2\mathrm{Re}(s)+2}})\Big)dt,
\end{aligned}$$

C'est à dire, on a montré qu'il existe $E(N,s)$ une fonction en s et $N\gg 1$ qui converge normalement vers 0 uniformément sur tout ouvert de la forme $\{\mathrm{Re}(s)>\frac{d+1}{2}+\varepsilon\}$ et ε un réel positif non nul quelconque, telle que

$$\frac{s^2}{\Gamma(s+1)}\int_0^\infty\frac{t^{s-1}}{2\pi i}\int_{\Lambda_c}\frac{e^{-z^2t}}{-z}T(z,s)dzdt=\sum_{n=1}^{N-1}\zeta_n(s)+E(N,s)\quad\forall N\gg 1\,\forall\,\mathrm{Re}(s)>\frac{d+1}{2}.$$

Récapitulons, on a prouvé que :

1. $$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_{n,k}^{2s}}=\frac{s^2}{\Gamma(s+1)}\int_0^\infty\frac{t^{s-1}}{2\pi i}\int_{\Lambda_c}\frac{e^{-z^2t}}{-z}T(z,s)dzdt\quad\forall\,\mathrm{Re}(s)>\frac{d+1}{2},$$
2. ζ est holomorphe sur $\mathrm{Re}(s)>\frac{d+1}{2}$, en effet cela découle de la dernière inégalité qui montre que $\left(\sum_{n=1}^N\zeta_n\right)_{N\in\mathbb{N}^*}$ converge normalement vers ζ sur tout ouvert de la forme $\{s\in\mathbb{C}\,|\,\mathrm{Re}(s)>\frac{d+1}{2}+\varepsilon\}$, avec $\varepsilon>0$ et que ζ_n est holomorphe sur $\{s\in\mathbb{C}\,|\,\mathrm{Re}(s)>\frac{1}{2}\}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.
3. ζ a un pôle en $s=\frac{d+1}{2}$.

On se propose maintenant d'étudier la fonction ζ au voisinage de $s=0$. On va scinder l'intégrale par rapport t en deux intervalles $]0,\varepsilon[$ et $]\varepsilon,\infty[$ où $\varepsilon>0$.

On pose,

$$q_n(z,s)=-\frac{1}{n^{2s}}\log p_n(nz)-\frac{1}{n^{2s+1}}w(z).$$

et

$$P(z,s)=\sum_{n=1}^{\infty}q_n(z,s).$$

Rappelons qu'on a posé $p_n(z)=\frac{G_n(iz)}{l_n(nz)^{e_n}}$. On a

$$\int_{\Lambda_{-c}}\frac{e^{-z^2t}}{-z}q_n(z,s)dz=\int_{C_c}\frac{e^{-z^2t}}{-z}q_n(z,s)dz+\int_{\Lambda_c}\frac{e^{-z^2t}}{-z}q_n(z,s)dz,$$

où $\Lambda_{-c} := \{\lambda \in \mathbb{C} \,|\, |\arg(\lambda + c)| = \varepsilon\}$ et C_c est le cercle centré en zéro de rayon inférieur à c). Cela résulte de l'holomorphie de $z \mapsto \log G_n(iz)$ sur un ouvert qui ne contient pas $]-\infty, -c] \cup [c, \infty[$. Par Cauchy, on obtient

$$\int_{C_c} \frac{e^{-z^2 t}}{-z} q_n(z,s)dz = q(0,s) = \frac{w(0)}{n^{2s+1}}.$$

On a

$$\begin{aligned}\int_{\Lambda_{-c}} \frac{e^{-z^2 t}}{z} \log p_n(nz)dz &= \int_{\sqrt{t}\Lambda_{-c}} \frac{e^{-z^2}}{z} \log p_n\Big(\frac{nz}{\sqrt{t}}\Big)dz \\ &= \int_{\Lambda_{-c}} \frac{e^{-z^2}}{z} \log p_n\Big(\frac{nz}{\sqrt{t}}\Big)dz.\end{aligned}$$

la deuxième égalité résulte du fait que $\log p_n$ est holomorphe sur l'ensemble connexe de bord $\Lambda_{-c} \cup \sqrt{t}\Lambda_{-c}$ avec $0 < t < 1$.

Fixons $n \geq 1$. On décompose $\Lambda_{-c} := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |\arg(z + c)| = \varepsilon\}$ en deux ensembles $\Lambda_{-c}^+ = (\mathbb{R} + i\mathbb{R}^+) \cap \Lambda_{-c}$ et $\Lambda_{-c}^- = (\mathbb{R} + i\mathbb{R}^-) \cap \Lambda_{-c}$, donc si $z \in \Lambda_{-c}^+$ alors $\varepsilon - \frac{\pi}{2} < \arg(e^{-i\frac{\pi}{2}} z) < \frac{\pi}{2}$ et si $z \in \Lambda_{-c}^-$ on aura $-\frac{\pi}{2} < \arg(e^{i\frac{\pi}{2}} z) < -\varepsilon - \frac{\pi}{2}$, donc sur chaque branche, le développement asymptotique de $\log G_n$ est valable.

On choisit $\varepsilon \ll 1$ tel que pour tout $0 < t \leq \varepsilon$ on a $\frac{|z|}{|\sqrt{t}|} \gg 1$ pour tout $z \in \Lambda_{-c}$, dans ce cas on peut utiliser le développement asymptotique de G_n et obtenir que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda_{-c}} \frac{e^{-z^2}}{-z} \log p_n\Big(\frac{nz}{\sqrt{t}}\Big)dz &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda_{-c}} \frac{e^{-z^2}}{-z} \log\Big(\frac{G_n(\frac{e^{-i\frac{\pi}{2}}nz}{\sqrt{t}})}{l_n(\frac{nz}{\sqrt{t}})^{e_n}}\Big)dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda_{-c}^+} \frac{e^{-z^2}}{-z} \log\Big(\frac{G(\frac{e^{-i\frac{\pi}{2}}nz}{\sqrt{t}})}{l_n(\frac{nz}{\sqrt{t}})^{e_n}}\Big)dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda_{-c}^-} \frac{e^{-z^2}}{z} \log\Big(\frac{G(\frac{e^{+i\frac{\pi}{2}}nz}{\sqrt{t}})}{l_n(\frac{nz}{\sqrt{t}})^{e_n}}\Big)dz \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda_{-c}} \frac{e^{-z^2}}{z}\Big(\frac{niz}{\sqrt{t}} + a_n \log((\frac{iz}{\sqrt{t}})^2) + b_n + \frac{c_n\sqrt{t}}{iz} + O(\frac{t}{(nz)^2})\Big)dz \\ &= 0 + \frac{a_n}{2\pi i}\int_{\Lambda_{-c}} \frac{e^{-z^2}}{z} \log(-z^2) - \frac{a_n}{2\pi i}\int_{\Lambda_{-c}} \frac{e^{-z^2}}{z} \log(t) \\ &+ \frac{b_n}{2\pi i}\int_{\Lambda_{-c}} \frac{e^{-z^2}}{z}dz + \frac{c_n\sqrt{t}}{2\pi i}\int_{\Lambda_{-c}} \frac{e^{-z^2}}{z^2}dz + \int_{\Lambda_{-c}} \frac{e^{-z^2}}{z} O\Big(\frac{t}{n^2 z^2}\Big)dz \\ &= -\gamma a_n - \log(t)a_n + b_n + 0 + O\Big(\frac{t}{n^2}\Big).\end{aligned}$$

où on a utilisé que $\frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda_{-c}} \frac{e^{-z^2}}{z}dz = 1$, $\frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda_{-c}} \frac{e^{-z^2}}{z^2}dz = 0$ et que $\frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda_{-c}} \frac{e^{-z^2}}{z} \log(-z^2)dz = -\gamma$. La dernière intégrale se calcule en dérivant par rapport à a l'identité suivante :

$$\frac{1}{\Gamma(a)} = -\frac{1}{2\pi i}\int_D \frac{ze^{-z^2}}{(-z^2)^a}dz, \quad \forall a \in \mathbb{C},$$

sachant que

$$-\Gamma'(1) = \gamma, \quad \text{la constante d'Euler},$$

avec D est un contour qui entoure strictement la demi-droite positive. On peut montrer cette formule en suivant la preuve de la représentation intégrale de l'inverse de la fonction Gamma, voir par

exemple [WW62, § 12.22].

En regroupant tout cela, on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^\varepsilon \frac{t^{s-1}}{2\pi i}\int_{\Lambda_c}\frac{e^{-z^2t}}{-z}\log p_n(nz)dzdt &= -\gamma a_n\int_0^\varepsilon t^{s-1}dt - a_n\int_0^\varepsilon t^{s-1}\log(t)dt + b_n\int_0^\varepsilon t^{s-1}dt + \int_0^\varepsilon t^{s-1}O(\frac{t}{n^2})dt\\ &= -\frac{\gamma}{s}\varepsilon^s a_n - \frac{\varepsilon^s\log\varepsilon}{s}a_n + \frac{1}{s^2}\varepsilon^s a_n + \frac{1}{s}\varepsilon^s b_n + \int_0^\varepsilon t^s O(\frac{1}{n^2})dt\\ &= -\frac{\gamma}{s}a_n + \frac{1}{s}b_n + \frac{1}{s^2}a_n + \Big(\gamma\frac{1-\varepsilon^s}{s}a_n - \frac{s\varepsilon^s\log\varepsilon - \varepsilon^s+1}{s^2}a_n + \frac{\varepsilon^s-1}{s}b_n + \int_0^\varepsilon t^s O(\frac{1}{n^2})dt\Big).\end{aligned}$$

On vérifie que :

$$\int_0^\varepsilon \frac{t^{s-1}}{2\pi i}\int_{C_c}\frac{e^{-z^2t}}{-z}q_n(z,s)dz = q(0,s) = \frac{w(0)\varepsilon^s}{sn^{2s+1}} = \frac{w(0)}{sn^{2s+1}} + (\varepsilon^s-1)\frac{w(0)}{sn^{2s+1}}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned}\int_0^\varepsilon \frac{t^{s-1}}{2\pi i}\int_{\Lambda_c}\frac{e^{-z^2t}}{-z}q_n(z,s)dzdt &= \frac{\gamma}{s}\frac{a_n}{n^{2s}} + \frac{w(0)}{sn^{2s+1}} - \frac{b_n}{sn^{2s}} - \frac{1}{s^2}a_n\\ &- \Big(\gamma\frac{1-\varepsilon^s}{s}\frac{a_n}{n^{2s}} - \frac{s\varepsilon^s\log\varepsilon-\varepsilon^s+1}{s^2}\frac{a_n}{n^{2s}} + \frac{1}{n^{2s}}\frac{\varepsilon^s-1}{s}(b_n - \frac{w(0)}{n}) + \int_0^\varepsilon t^s O(\frac{1}{n^{2s+2}})dt\Big).\end{aligned}$$

On note par les mêmes notations les prolongements analytiques de A et $P-B$ sur la bande $0<\mathrm{Re}(s)<\frac{d+1}{2}$, donc

$$\begin{aligned}\frac{s^2}{\Gamma(s+1)}\int_0^\varepsilon \frac{t^{s-1}}{2\pi i}\int_{\Lambda_c}\frac{e^{-z^2t}}{-z}P(z,s)dzdt &= \frac{s}{\Gamma(s+1)}\Big(\gamma A(s) - B(s) + P(s) - \frac{1}{s}A(s)\Big)\\ &+ \frac{s^2}{\Gamma(s+1)}\Bigg(\gamma\frac{1-\varepsilon^s}{s}A(s) - \frac{s\varepsilon^s\log\varepsilon-\varepsilon^s+1}{s^2}A(s) + s(\varepsilon^s-1)\big(B(s)-P(s)\big)\\ &+ \int_0^\varepsilon t^s O(\zeta_{\mathbb{Q}}(2s+2))dt\Bigg)\end{aligned}$$

On pose g, la fonction suivante :

$$g(s) = \gamma\frac{1-\varepsilon^s}{s}A(s) - \frac{s\varepsilon^s\log\varepsilon-\varepsilon^s+1}{s^2}A(s) + s(\varepsilon^s-1)\big(B(s)-P(s)\big) + \int_0^\varepsilon t^s O(\zeta_{\mathbb{Q}}(2s+2))dt,$$

alors g est analytique en un voisinage ouvert de $s=0$, puisqu'on sait d'après (2.3.5) que $P-B$ est analytique en 0 et que A l'est aussi (par hypothèses sur les coefficients a_n) et on montre par exemple à l'aide d'un développement limité que $s\mapsto\frac{1-\varepsilon^s}{s}$ et $s\mapsto\frac{s\varepsilon^s\log\varepsilon-\varepsilon^s+1}{s^2}$ sont analytique sur $\mathbb{C}$, pour $s\mapsto\int_0^\varepsilon t^s O(\zeta_{\mathbb{Q}}(2s+2))dt$ il suffit de remarquer que c'est une limite d'une suite de fonctions analytiques pour la convergence normale au voisinage de $s=0$.

On écrit donc,

$$\frac{s^2}{\Gamma(s+1)}\int_0^{\varepsilon}\frac{t^{s-1}}{2\pi i}\int_{\Lambda_c}\frac{e^{-z^2t}}{-z}P(z,s)dzdt=\frac{s}{\Gamma(s+1)}\Big(\gamma A(s)-B(s)+P(s)-\frac{1}{s}A(s)\Big)+\frac{s^2}{\Gamma(s+1)}g(s),$$

on conlcut que cette fonction se prolonge en une fonction holomorphe au voisinage de $s=0$.

Montrons maintenant que le terme suivant se prolonge en une fonction analytique en s au voisinage de $s=0$:

$$\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{t^{s-1}}{2\pi i}\int_{\Lambda_c}\frac{e^{-z^2t}}{-z}P(z,s)dzdt,$$

il suffit d'étudier

$$\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{t^{s-1}}{2\pi i}\int_{\Lambda_c}\frac{e^{-z^2t}}{z}\sum_{n\geq N}\frac{1}{n^{2s}}\log\Big(\frac{G_n(inz)}{l_n(nz)^n}\Big),$$

pour $N\gg 1$, puisque la somme partielle peut être étudier par la théorie de [Vor87].

Par définition de $P(z,s)$ et par les propriétés des G_n, on a pour tout $\mathrm{Re}(s)>1$

$$P(z,s)=\sum_{n=1}^{N}q_n(z,s)-\left(\sum_{n=N}^{\infty}O\Big(\frac{1}{n^{2s+2}}\Big)+\frac{1}{n^{2s}}\log\rho(iz)+\frac{e_n}{n^{2s}}r(iz)+\frac{1}{n^{2s}}\mathrm{O}_z\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right)$$

où $\eta(n,iz)=\mathrm{O}_z(\frac{1}{n^2})$ est par hypothèse bornée en z uniformément en $n>N$. On doit étudier les séries de termes généraux suivants :

$$\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{t^{s-1}}{2\pi i}\int_{\Lambda_c}\frac{e^{-z^2t}}{z}\frac{r(iz)}{n^{2s-d}}dz,$$
$$\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{t^{s-1}}{2\pi i}\int_{\Lambda_c}\frac{e^{-z^2t}}{z}\frac{\log\rho(iz)}{n^{2s}}dz,$$
$$\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{t^{s-1}}{2\pi i}\int_{\Lambda_c}\frac{e^{-z^2t}}{z}\frac{\eta(n,iz)}{n^{2s+2}}dz.$$

On déduit directement que la série de terme général : $\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{t^{s-1}}{2\pi i}\int_{\Lambda_c}\frac{e^{-z^2t}}{z}\frac{\eta(n,iz)}{n^{2s+2}}dz$ est normalement convergente sur un voisinage de $s=0$. Pour les deux termes restants il suffit d'étudier le premier terme. On note par $\zeta_{\mathbb{Q}}(2s-1)$ le prolongement analytique de cette $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2s-1}}$ au voisinage de 0.

Soit s dans un voisinage de 0 et on considère

$$\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{t^{s-1}}{2\pi i}\int_{\Lambda_c}\frac{e^{-z^2t}}{z}r(iz)\Big(\zeta_{\mathbb{Q}}(2s-1)-\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n^{2s+1}}\Big)dzdt,$$

On conclut que c'est une fonction analytique en utilisant l'inégalité suivante valable sur une voisingae de $s=0$:

$$\begin{aligned}\int_{\varepsilon}^{\infty}\int_{\Lambda_{c,\geq R}}\Big|t^{s-1}\frac{e^{-tz^2}}{z}r(iz)dz\Big|dt&\leq\int_{v\geq R}\int_{\varepsilon}^{\infty}t^{\mathrm{Re}(s)-1}e^{-t\mu v^2}dvdt\\&=\int_{v\geq R}\frac{1}{\mu^{2\mathrm{Re}(s)}v^{2\mathrm{Re}(s)}}\int_{\varepsilon\mu v^2}^{\infty}t^{\mathrm{Re}(s)-1}e^{-t}dtdv<\infty.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\int_\varepsilon^\infty \frac{t^{s-1}}{2\pi i}\int_{\Lambda_c}\frac{e^{-z^2t}}{-z}P(z,s)dzdt$$

est analytique au voisinage de $s=0$.

Etudions maintenant la fonction suivante :

$$F(s)=\frac{s^2}{\Gamma(s+1)}\zeta_{\mathbb{Q}}(2s+1)\int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{2\pi i}\int_{\Lambda_c}\frac{e^{-z^2t}}{z}w(iz)dzdt,$$

au voisinage de $s=0$. On a

$$\begin{aligned}F(s)&=\frac{s^2}{\Gamma(s+1)}\zeta_{\mathbb{Q}}(2s+1)\int_0^\infty t^{s-1}\int_{\Lambda_c}\frac{e^{-z^2t}}{z}w(iz)dzdt\\&=\frac{s^2}{\Gamma(s+1)}\zeta_{\mathbb{Q}}(2s+1)\int_{\Lambda_c}\frac{\Gamma(s)}{z^{2s+1}}w(iz)dz\\&=\frac{s}{\Gamma(s+1)}\zeta_{\mathbb{Q}}(2s+1)\int_{\Lambda_c}\frac{\Gamma(s+1)}{z^{2s+1}}w(iz)dz.\end{aligned}$$

puisque on a supposé que $w(z)=O(\frac{1}{z})$ pour $|z|\gg 1$. Toujours avec cet argument et le fait que $\zeta_{\mathbb{Q}}(2s+1)=\frac{1}{2s}+\gamma+o(1)$ pour $|s|\ll 1$, on conclut que F s'étend analytiquement au voisinage de $s=0$.

On pose maintenant :

$$h(s)=g(s)+\int_\varepsilon^\infty \frac{t^{s-1}}{2\pi i}\int_{\Lambda_c}\frac{e^{-z^2t}}{-z}P(z,s)dzdt$$

alors h est analytique au voisinage de $s=0$, et

$$\begin{aligned}\zeta(s)=&\frac{s}{\Gamma(s+1)}\left[\gamma A(s)-\frac{1}{s}A(s)+P(s)-B(s)\right]+\frac{s^2}{\Gamma(s+1)}\zeta_{\mathbb{Q}}(2s+1)F(s)\\&+\frac{s^2}{\Gamma(s+1)}h(s),\end{aligned}$$

c'est à dire que ζ est prolongeable analytiquement au voisinage de $s=0$, ce qui termine la preuve du théorème.

□

Remarque 2.3.7. lorsque $w(z)$ est un polynôme en q avec $q=\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$ alors le calcul de cette intégrale se ramène à ce genre d'intégrales bien connu, $\forall a>0$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda_c}\frac{e^{-z^2t}}{-z}(q(iz))^a dz&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda_c}\frac{e^{-z^2t}}{-z}\frac{1}{(1-z^2)^a}dz\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda_c}\frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda}\frac{1}{(1-\lambda)^a}d\lambda\\&=-\frac{1}{2\pi i}e^{-t}\int_{\Lambda_c-1}\frac{e^{-ut}}{1+u}\frac{1}{(-u)^a}d\lambda\\&=\frac{1}{\pi}\sin(\pi a)\Gamma(1-a)\Gamma(a,t).\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{2\pi i}\int_{\Lambda_c}\frac{e^{-z^2t}}{-z}\frac{1}{(1+(iz)^2)^a}d\lambda &= \frac{1}{\pi}\sin(\pi a)\Gamma(1-a)\int_0^\infty t^{s-1}\Gamma(a,t)dt\\ &= \frac{1}{\pi}\sin(\pi a)\Gamma(1-a)\int_0^\infty\int_t^\infty u^{a-1}e^{-u}du\\ &= \frac{1}{\pi}\sin(\pi a)\Gamma(1-a)\Big(\Big[\frac{1}{s}t^s\int_t^\infty u^{a-1}e^{-u}du\Big]_0^\infty+\frac{1}{s}\int_0^\infty t^{s+a-1}e^{-t}dt\Big)\\ &= \frac{1}{\pi s}\sin(\pi a)\Gamma(1-a)\Gamma(s+a).\end{aligned}$$

Remarque 2.3.8. La fonction $\theta(t,s) := \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{2s}}\theta_n(t)$ a joué le rôle de fonction thêta associée à la famille $\{\lambda_{n,k}^2 \mid k,n\geq 1\}$, mais on peut se demander si la fonction

$$\theta(t) := \sum_{n\geq 1}\sum_{k\geq 1} e^{-\lambda_{n,k}^2 t}$$

est une fonction Thêta au sens de [Vor87] ? On en donnera une réponse partielle : on va montrer sous une condition supplémentaire que

$$\lim_{t\mapsto 0} t\theta(t) < \infty.$$

On suppose donc que $\lambda_{n,1}^2 < \lambda_{n+1,1}^2 < \lambda_{n,2}^2 < \lambda_{n+1,2}^2 < \ldots$, $\forall n\geq 1$, (ce qui est par exemple le cas pour les zéros de fonctions de Bessel ainsi que les dérivées premières et secondes) ce qui nous donne que

$$\widetilde{\theta}_{n+1}(t) \leq \widetilde{\theta}_n(t) \leq \widetilde{\theta}_1(t) < \infty, \quad \forall t>0$$

Cette dernière inégalité est conséquence du développement asymptotique de G_1.

Si $t>\varepsilon>0$, alors

$$\widetilde{\theta}_n(t) = \sum_{k\geq 1} e^{-\lambda_{n,k}^2(t-\varepsilon)-\lambda_{n,k}^2\varepsilon} \leq \widetilde{\theta}_n(\varepsilon)e^{-n^2c(t-\varepsilon)} \quad \forall n\geq 1$$

par suite

$$\theta(t) \leq \widetilde{\theta}_1(\varepsilon)\sum_{n\geq 1} e^{-n^2c(t-\varepsilon)} = \widetilde{\theta}_1(\varepsilon)\Theta\big(c(t-\varepsilon)\big) \quad \forall\,\varepsilon>0 \quad \forall\, t>\varepsilon.$$

où $\Theta(t) := \sum_{n\geq 1} e^{-n^2t}$ est la fonction thêta habituelle qui converge pour tout $t>0$ voir par exemple [Sou92, p. 96]. On en déduit que $\widetilde{\theta}(t)$ est fini, $\forall t>0$. Si l'on prend $\varepsilon=\frac{t}{2}$, comme $\sqrt{t}\widetilde{\theta}_1(t)$ et $\sqrt{t}\Theta(t)$ convergent vers une limite finie lorsque t tend vers 0, alors par l'inégalité précédente on obtient que

$$\limsup_{t\mapsto 0} t\theta(t),$$

est fini.

2.3.3 Application : régularisation de la fonction zêta de $\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}$

Cette section est consacrée à l'étude d'une nouvelle classe de fonctions Zêta associées à des opérateurs Laplaciens singuliers, en utilisant les résultats précédents on va montrer que ces fonctions Zêta possèdent des propriétés analogues aux fonctions Zêta classiques des opérateurs Laplaciens associées

à des métriques de classes $\mathcal{C}^\infty$.

Soit (X, h_X) une variété kählerienne et (E, h_E) un fibré holomorphe hermitien. Si l'on suppose que h_X et h_E sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ alors on sait que l'opérateur $\Delta^\bullet_{\overline{E}}$, agissant sur $A^{0,\bullet}(X, E)$, admet un spectre infini et discret et possède un noyau de chaleur qu'on note par $e^{-t\Delta_{\overline{E}}}$, avec $t > 0$, voir [BGV04, Définition 2.15]. En plus $e^{-t\Delta_{\overline{E}}}$ admet une trace au sens de [BGV04, § 2.6] et que la fonction Zêta associée à ce spectre s'écrit comme la transformée de Mellin de cette trace. On sait que cette trace possède un développement par prolongement analytique en série de Laurent pour t petit, voir [BGV04, p. 91] cela permet de prouver que la fonction Zêta s'étend méromorphiquement au plan complexe et qu'elle est holomorphe en zéro, voir [BGV04, 9.35].

Dans notre cas, c'est à dire $\Big((T\mathbb{P}^1, h_\infty); \overline{\mathcal{O}(m)}_\infty\Big)$, les métriques considérées sont singulières. On ne peut pas donc appliquer la théorie classique pour affirmer que $\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}$ possède un spectre discret infini. Même si l'on arrive à déterminer le spectre, par un autre moyen, on ne peut pas utiliser cette théorie pour étudier la fonction Zêta associée quant au calcul explicite du déterminant régularisé cela reste une tâche délicate, voir par exemple les calculs du [GS91].

Dans un précédent texte, on a étudié le spectre du Laplacien singulier :

$$\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}, \forall m \in \mathbb{N},$$

et on a montré que ses valeurs propres et vecteurs propres sont décrits par une famille de fonctions analytiques $(L_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Ces fonctions ont été définies comme suit :

$$L_n(z) = -z^m \frac{d}{dz}\Big(z^{-m} J_n(z) J_{n-m}(z)\Big) \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

et on a introduit l'ensemble suivant

$$Z_n := \Big\{\lambda \in \mathbb{C} \,\big|\, L_n(\lambda) = 0\Big\}. \tag{2.14}$$

Alors, on a montré dans [Haja] :

Lemme 2.3.9. *$\forall n \in \mathbb{Z}$, l'ensemble Z_n est un sous-ensemble infini et discret de $\mathbb{R}^*$,*

$$Z_n \cap \{z \in \mathbb{R} |\, J_{n-m}(z) = 0\} = \emptyset,$$

et

$$L_n(z) = -J_n(z) J_{n-m-1}(z) + J_{n+1}(z) J_{n-m}(z), \quad \forall z \in \mathbb{C}. \tag{2.15}$$

Théorème 2.3.10. *Soit $n \in \mathbb{Z}$ et $\lambda \in Z_n$, alors λ est un zéro simple de L_n et on a*

$$L_n'(\lambda) = 2\frac{J_{n-m}(\lambda)}{J_n(\lambda)} (\varphi_{n,\lambda}, \varphi_{n,\lambda})_{L^2,\infty}.$$

où $\varphi_{n,\lambda}$ est un vecteur propre associé à λ.

Théorème 2.3.11. *On a, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$*

$$\mathrm{Spec}(\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}) = \Big\{0\Big\} \bigcup \Big\{\frac{\lambda^2}{4} \Big| \exists n \in \mathbb{N},\, \lambda \in Z_n\Big\}.$$

- *Si m est pair, alors la multiplicité de $\frac{\lambda^2}{4}$ est 2 si $\lambda \in Z_n$ avec $n \geq m+1$ ou $0 \leq n \leq \frac{m}{2} - 1$ et de multiplicité 1 si $\lambda \in Z_{\frac{m}{2}}$.*

– *Lorsque m est impair, alors $\frac{\lambda^2}{4}$ est de multiplicité 2 si $n \geq m+1$, égale à 1 si $0 \leq n \leq m$.*

Lorsque $m = 0$, on avait montré

Théorème 2.3.12.

$$\mathrm{Spec}(\Delta_{\overline{\mathcal{O}}_\infty}) = \Big\{0\Big\} \bigcup \Big\{ \frac{j_{m,k}^2}{4}, \frac{j_{n,l}'^2}{4} \Big| n, m \in \mathbb{N}, \quad k, l \geq 1 \Big\},$$

avec $\frac{j_{n,k}^2}{4}$ (resp. $\frac{j_{n,k}'^2}{4}$) est de multiplicité 2 si $n > 0$, et de multiplicité 1 quand $n = 0$, où $j_{*,*}$ (resp. $j'_{*,*}$) est un zéro positif de J_*(resp. J'_*).

Il est donc naturel d'associer à ce spectre une fonction Zêta et d'en étudier les propriétés. On introduit donc la définition suivante :

Définition 2.3.13. *Soit m un entier positif. On pose*

$$\zeta_{\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}}(s) := \sum_{\alpha \in \mathrm{Spec}(\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}) \setminus \{0\}} \frac{1}{\alpha^s}, \quad \forall s \in \mathbb{C},$$

où chaque valeur propre est comptée avec sa multiplicité. On appelle $\zeta_{\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}}$ la fonction zêta associée à l'opérateur singulier $\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}$.

Le principal résultat de ce paragraphe est le théorème résultat ci-dessous. On distinguera deux cas : le cas $m = 0$ et celui lorsque $m \geq 1$. En fait, on peut éviter cela et supposer que $m \geq 0$, mais on préfère cette séparation de cas par souci de clarté.

Théorème 2.3.14. *Pour tout $m \geq 0$, la fonction $\zeta_{\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}}$ converge pour tout $\mathrm{Re}(s) > 1$, avec un pôle en 1 et admet un prolongement analytique au voisinage de $s = 0$, de plus, on a*

$$\zeta_{\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}}(0) = -\frac{2}{3} - \frac{m}{2},$$ [6]

et

$$\zeta'_{\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}}(0) = 4\zeta'_{\mathbb{Q}}(-1) - \frac{1}{6} - \log \frac{(m+2)^{m+1}}{(m+1)!^2} = T_g(\overline{T\mathbb{P}^1}_\infty, \overline{\mathcal{O}(m)}_\infty).$$

Démonstration. La démonstration est une application du théorème (2.3.6). On commencera par le cas $m = 0$ qui est relativement facile à traiter.

Régularisation de la fonction zêta $\zeta_{\Delta_{\overline{\mathcal{O}}_\infty}}$

On pose

$$\zeta_0(s) = \zeta_{\mathcal{D}}(s) + \zeta_{\mathcal{N}}(s),$$

avec

$$\zeta_{\mathcal{D}}(s) = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{j_{0,k}^{2s}} + \sum_{n \geq 1} \sum_{k \geq 1} \frac{2}{j_{n,k}^{2s}} \quad \text{et} \quad \zeta_{\mathcal{N}}(s) = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{j'^{2s}_{0,k}} + \sum_{n \geq 1} \sum_{k \geq 1} \frac{2}{j'^{2s}_{n,k}},$$ [7]

6. Il est important de noter que d'après la théorie classique de [BGV04] la quantité $\zeta_{\Delta_{\overline{L}}}(0)$ est un invariant qui ne dépend pas de la métrique $\mathcal{C}^\infty$ sur L. On vérifie qu'ici cette valeur correspond bien à la valeur de cet invariant.

7. On a choisit les lettres $\mathcal{D}$ et $\mathcal{N}$ pour rappeler que ces objets sont liés aux deux problèmes avec condition aux bords classiques : de *Dirichlet* et de *Neumann*.

Alors, voir (2.3.13)

$$\zeta_{\Delta_{\overline{\mathcal{O}}_\infty}}(s) = 4^s \zeta_0(s).$$

On va montrer que

$$\zeta_0(0) = -\frac{2}{3}, \quad \zeta_0'(0) = 4\zeta_{\mathbb{Q}}'(-1) - \frac{1}{6} + \frac{1}{3}\log 2.$$

ce qui donnera le résultat cherché c'est à dire que $\zeta_{\Delta_{\overline{\mathcal{O}}_\infty}}(0) = -\frac{2}{3}$ et $\zeta'_{\Delta_{\overline{\mathcal{O}}_\infty}}(0) = 4\zeta_{\mathbb{Q}}'(-1) - \frac{1}{6} - \log 2$.

D'après les calculs [Spr05, corollaire. 1], on a

$$\zeta_{\mathcal{D}}(0) = \frac{1}{6}, \quad \zeta_{\mathcal{D}}'(0) = 2\zeta_{\mathbb{Q}}'(-1) + \frac{1}{2}\log 2\pi + \frac{5}{12}. \tag{2.16}$$

Il suffit d'étudier $\zeta_{\mathcal{N}}$. On considère $\{I_n' \,|\, n \geq 1\}$ et la fonction zêta associée :

$$z_{\mathcal{N}}(s) = \sum_{n\geq 1}\sum_{k\geq 1} \frac{1}{j'^{2s}_{n,k}}. \tag{2.17}$$

Avec les notations de la proposition (2.3.6), on considère

$$p_{\mathcal{N},n}(z) = -\log\Big(\frac{I_n'(nz)}{\frac{1}{2^n\Gamma(n)}(nz)^{n-1}}\Big),$$

Par (2.51), (2.53) et (2.3.19), la famille $\{I_n' \,|\, n \geq 1\}$ vérifie les conditions de théorème (2.3.6). Par un simple calcul, on trouve que :

$$a_{\mathcal{N},n} := \frac{1}{2}(n - \frac{1}{2}),\ b_{\mathcal{N},n} := \frac{1}{2}\log 2\pi + (n - \frac{1}{2})\log n - n\log 2 - \log\Gamma(n), \text{ et } w(z) = V_1(z).$$

Par suite

$$\begin{aligned} A_{\mathcal{N}}(s) &:= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{\mathcal{N},n}}{n^{2s}} \\ &= \frac{1}{2}\zeta_{\mathbb{Q}}(2s-1) - \frac{1}{4}\zeta_{\mathbb{Q}}(2s), \end{aligned}$$

(en particulier, $A_{\mathcal{N}}'(0) = \zeta_{\mathbb{Q}}'(-1) - \frac{1}{2}\zeta_{\mathbb{Q}}'(0) = \zeta_{\mathbb{Q}}'(-1) + \frac{1}{4}\log(2\pi)$) voir par exemple,[Sou92, pp. 94-95].

$$\begin{aligned} B_{\mathcal{N}}(s) &:= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{\mathcal{N},n}}{n^{2s}} \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log\Gamma(n)}{n^{2s}} + \frac{1}{2}\log(2\pi)\zeta_{\mathbb{Q}}(2s) - \log(2)\zeta_{\mathbb{Q}}(2s-1) - \zeta_{\mathbb{Q}}'(2s-1) + \frac{1}{2}\zeta_{\mathbb{Q}}'(2s), \end{aligned}$$

et

$$P_{\mathcal{N}}(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2s}} w(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2s}} V_1(0) = -\frac{1}{12}\zeta_{\mathbb{Q}}(2s+1)$$

(on a $V_1(0) = -\frac{1}{12}$).

La proposition (2.3.6) affirme que $P_{\mathcal{N}} - B_{\mathcal{N}}$ est prolongeable en une fonction analytique en un voisinage ouvert de $s = 0$, on va en donner une autre preuve plus directe et on calculera sa valeur en $s = 0$. On pose

$$\eta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log\Gamma(n)}{n^{2s}} - \frac{1}{12}\zeta_{\mathbb{Q}}(2s+1), \tag{2.18}$$

alors

$$\begin{aligned}-B_{\mathcal{N}}(s)+P_{\mathcal{N}}(s)&=\eta(s)-\frac{1}{2}\log(2\pi)\zeta_{\mathbb{Q}}(2s)\\&\quad+\log(2)\zeta_{\mathbb{Q}}(2s-1)+\zeta'_{\mathbb{Q}}(2s-1)-\frac{1}{2}\zeta'_{\mathbb{Q}}(2s)\quad\forall\,\mathrm{Re}(s)>1.\end{aligned}\tag{2.19}$$

A l'exception de η, on déduit par la théorie classique de la fonction Zêta de Riemann que les termes de l'égalité ci-dessus sont prolongeables analytiquement en un voisinage ouvert de $s=0$. Montrons que η l'est aussi. On a

Lemme 2.3.15. *La fonction η définie par*

$$\eta(s):=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log\Gamma(n)}{n^{2s}}-\frac{1}{12}\zeta_{\mathbb{Q}}(2s+1),$$

converge pour $\mathrm{Re}(s)>1$ *et admet un continuation holomorphe au voisinage de 0 et*

$$\eta(0)=\zeta'_{\mathbb{Q}}(-1)-\frac{\gamma}{12}-\frac{1}{4}\log(2\pi).$$

Démonstration. D'après [GR00, 8.343.2] :

$$\log\Gamma(z)=z\log z-z-\frac{1}{2}\log z+\frac{1}{2}\log 2\pi+\frac{1}{12z}+R_2(z),\quad \mathrm{Re}(z)>0,\tag{2.20}$$

avec

$$|R_2(z)|<\frac{|B_4|}{12|z|^3\cos^3(\frac{1}{2}\arg(z))}\quad \mathrm{Re}(z)>0.$$

Donc lorsque $z=n$ est un entier on a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|R_2(n)|}{n^{2s}}\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|B_4|}{12n^{3+2s}}=|B_4|\zeta_{\mathbb{Q}}(2s+3).\tag{2.21}$$

Par cette estimation et par les propriétés classiques des séries de Bertrand, on a

$$\begin{aligned}\eta(s)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log\Gamma(n)}{n^{2s}}-\frac{1}{12n^{2s+1}}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n^{2s-1}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2s-1}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\frac{\log n}{n^{2s}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\frac{\log 2\pi}{n^{2s}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{R_2(n)}{n^{2s}}\\&=-\zeta'_{\mathbb{Q}}(2s-1)-\zeta_{\mathbb{Q}}(2s-1)+\frac{1}{2}\zeta'_{\mathbb{Q}}(2s)+\frac{1}{2}\log(2\pi)\zeta_{\mathbb{Q}}(2s)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{R_2(n)}{n^{2s}},\end{aligned}$$

qui converge pour Re(s) >1 avec un pôle en 1.

On a $\zeta'_{\mathbb{Q}}(2s-1)$, $\zeta_{\mathbb{Q}}(2s-1)$, $\zeta'_{\mathbb{Q}}(2s)$ et $\zeta_{\mathbb{Q}}(2s)$ admettent des prolongements analytiques au voisinage de $s=0$ et par à l'estimation (2.21) on conclut que η admet un prolongement analytique au voisinage de $s=0$. On notera par la même notation η le prolongement de η au voisinage de 0.
On a donc

$$\eta(0)=-\zeta'_{\mathbb{Q}}(-1)-\zeta_{\mathbb{Q}}(-1)+\frac{1}{2}\zeta'_{\mathbb{Q}}(0)+\frac{1}{2}\log(2\pi)\zeta_{\mathbb{Q}}(0)+\sum_{n=1}^{\infty}R_2(n).$$

Calculons

$$\sum_{n=1}^{\infty}R_2(n)$$

On aura besoin des identités suivantes :

1.
$$\gamma = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \log N + o(1) \tag{2.22}$$

2.
$$\log(\prod_{n=1}^{N-1} n^{-n}) = \sum_{n=1}^{N} \log\Gamma(n) - N\log\Gamma(N) \tag{2.23}$$

3.
$$\log A = \lim_{n\to+\infty} \log(1^1 \cdot 2^2 \cdot N^N) - (\frac{N^2}{2} + \frac{N}{2} + \frac{1}{12})\log N + \frac{N^2}{4}, \tag{2.24}$$

et
$$\log A = -\zeta'(-1) + \frac{1}{12} \tag{2.25}$$

où A est la constante de *Kinkelin*, voir [Vor87, p.461-462].

4.
$$\log\Gamma(N) = (N - \frac{1}{2})\log N - N + \frac{1}{2}\log(2\pi) + \frac{1}{12N} + \mathrm{o}(\frac{1}{N^2})$$

voir [GR00, p.895].

A l'aide de ces dernières formules, on montre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} R_2(n) = 2\zeta'_{\mathbb{Q}}(-1) - \frac{1}{12} - \frac{\gamma}{12} + \frac{1}{4}\log(2\pi).$$

En effet, soit $N \geq 2$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} R_2(n) &= \sum_{n=1}^{N}\Big(\log\Gamma(n) - n\log(n) + n + \frac{1}{2}\log n - \log\sqrt{2\pi}\Big) - \frac{\gamma}{12} - \frac{\log N}{12} + o(1) \text{ par } (2.20), (2.22)\\
&= \sum_{n=1}^{N}\log\Gamma(n) - \sum_{n=1}^{N} n\log n + \frac{N(N+1)}{2} + \frac{1}{2}(\log\Gamma(N) + \log N) - N\log\sqrt{2\pi}\\
&- \frac{\gamma}{12} - \frac{\log N}{12} + o(1)\\
&= \sum_{n=1}^{N}\log\Gamma(n) + \log(\prod_{n=1}^{N-1} n^{-n}) - N\log N + \frac{N(N+1)}{2} + \frac{1}{2}\log\Gamma(N)\\
&- N\log\sqrt{2\pi} - \frac{\gamma}{12} + \frac{5}{12}\log N + o(1)\\
&= 2\log(\prod_{n=1}^{N} n^{-n}) - N\log N - N\log\Gamma(N) + \frac{N(N+1)}{2} + \frac{1}{2}\log\Gamma(N) - N\log\sqrt{2\pi}\\
&- \frac{\gamma}{12} + \frac{5}{12}\log(N) + o(1), \text{ par } (2.23)\\
&= -2\log A - (N^2 + N + \frac{1}{6})\log N + \frac{N^2}{2} + N\log N + N\log\Gamma(N)\\
&+ \frac{N(N+1)}{2} + \frac{1}{2}\log\Gamma(N) - N\log\sqrt{2\pi} - \frac{\gamma}{12} + \frac{5}{12}\log(N) + o(1), \text{ par } (2.24)\\
&= -2\log A - (N^2 + N + \frac{1}{6})\log N + \frac{N^2}{2} + N\log N + N(N - \frac{1}{2})\log N - N^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{2}\log(2\pi)N+\frac{1}{12}+\frac{N^2+N}{2}+\frac{1}{2}(N-\frac{1}{2})\log N-\frac{N}{2}+\frac{1}{4}\log(2\pi)-N\log(\sqrt{2\pi})\\
&+\frac{\gamma}{12}+\frac{5}{12}\log N+\mathrm{o}(\frac{1}{N^2})+o(1),\ \text{par (2.20)}\\
&=-2\log A+\frac{1}{12}-\frac{\gamma}{12}+\frac{1}{4}\log(2\pi)+o(1)\\
&=2\zeta'(-1)-\frac{1}{12}-\frac{\gamma}{12}+\frac{1}{4}\log(2\pi)+o(1),\ \text{par (2.25)}.
\end{aligned}
$$

On en déduit la valeur de η en zéro :

$$
\begin{aligned}
\eta(0)&=2\zeta'_{\mathbb{Q}}(-1)-\frac{1}{12}-\frac{\gamma}{12}+\frac{1}{4}\log(2\pi)\\
&-\zeta'_{\mathbb{Q}}(-1)-\zeta_{\mathbb{Q}}(-1)+\frac{1}{2}\zeta'_{\mathbb{Q}}(0)+\frac{1}{2}\log(2\pi)\zeta_{\mathbb{Q}}(0)\\
&=\zeta'_{\mathbb{Q}}(-1)-\frac{\gamma}{12}-\frac{1}{4}\log(2\pi)
\end{aligned}
\tag{2.26}
$$

□

On en déduit que

$$
\begin{aligned}
\lim_{s\mapsto 0}(-B_{\mathcal{N}}(s)+P_{\mathcal{N}}(s))&=\eta(0)-\frac{1}{2}\log(2\pi)\zeta_{\mathbb{Q}}(0)+\log(2)\zeta_{\mathbb{Q}}(-1)+\zeta'_{\mathbb{Q}}(-1)-\frac{1}{2}\zeta'_{\mathbb{Q}}(0)\\
&=2\zeta'_{\mathbb{Q}}(-1)-\frac{\gamma}{12}+\frac{1}{4}\log(2\pi)-\frac{1}{12}\log 2.
\end{aligned}
$$

On pose, voir les notations avant (2.3.6) :

$$
F_{\mathcal{N}}(s):=-\frac{s^2}{\Gamma(s+1)}\zeta_{\mathbb{Q}}(2s+1)\int_0^\infty\frac{t^{s-1}}{2\pi i}\int_{\Lambda_c}\frac{e^{-z^2t}}{-z}V_1(iz)dzdt,\quad \mathrm{Re}(s)>1,
$$

et on montre le lemme suivant,

Lemme 2.3.16. *On a*

$$
F_{\mathcal{N}}(s)=\frac{1}{\Gamma(s+1)}\Big(\frac{1}{2}+\gamma s+so(1)\Big)\frac{\Gamma(s+\frac{1}{2})}{12\sqrt{\pi}}(1-7s),
$$

pour tout $|s|\ll 1$ *et on a*

$$
F_{\mathcal{N}}(0)=\frac{1}{24}\quad \textit{et}\quad F'_{\mathcal{N}}(0)=\frac{1}{12}\Big(\gamma-\log 2-\frac{7}{2}\Big).
$$

Démonstration. Soit $\mathrm{Re}(s) > 1$, on a

$$\begin{aligned}
F_{\mathcal{N}}(s) &= \frac{s^2}{\Gamma(s+1)}\zeta_{\mathbb{Q}}(2s+1)\Big(\frac{3}{8}\int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{2\pi i}\int_{\Lambda_c}\frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda}\frac{1}{(1-\lambda)^{\frac{1}{2}}}d\lambda dt \\
&- \frac{7}{24}\int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{2\pi i}\int_{\Lambda_c}\frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda}\frac{1}{(1-\lambda)^{\frac{3}{2}}}d\lambda dt\Big) \\
&= \frac{s^2}{\Gamma(s+1)}\zeta_{\mathbb{Q}}(2s+1)\Big(\frac{3}{8}\int_0^\infty t^{s-1}\frac{1}{\pi}\sin(\pi\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2},t)dt \\
&- \frac{7}{24}\int_0^\infty t^{s-1}\frac{1}{\pi}\sin(\pi\frac{3}{2})\Gamma(-\frac{1}{2})\Gamma(\frac{3}{2},t)dt\Big) \\
&= \frac{s^2}{\Gamma(s+1)}\zeta_{\mathbb{Q}}(2s+1)\Big(\frac{3}{8\sqrt{\pi}}\frac{1}{s}\Gamma(s+\frac{1}{2}) - \frac{7}{12\sqrt{\pi}}\frac{1}{s}\Gamma(s+\frac{3}{2})\Big) \\
&= \frac{s}{\Gamma(s+1)}\zeta_{\mathbb{Q}}(2s+1)\Big(\frac{3}{8\sqrt{\pi}} - \frac{7}{12\sqrt{\pi}}(s+\frac{1}{2})\Big)\Gamma(s+\frac{1}{2}) \\
&= \frac{1}{\Gamma(s+1)}\Big(\frac{1}{2}+\gamma s + so(1)\Big)\frac{\Gamma(s+\frac{1}{2})}{12\sqrt{\pi}}(1-7s).
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_{\Lambda_c}\frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda}\frac{1}{(1-\lambda)^a}d\lambda &= -\frac{1}{2\pi i}e^{-t}\int_{\Lambda_c-1}\frac{e^{-ut}}{1+u}\frac{1}{(-u)^a}du \\
&= \frac{1}{\pi}\sin(\pi a)\Gamma(1-a)\Gamma(a,t),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty t^{s-1}\Gamma(a,t)dt &= \Big[\frac{t^s}{s}\Gamma(a,t)\Big]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{t^s}{s}e^{-t}t^{a-1}dt \\
&= \frac{1}{s}\Gamma(a+s).
\end{aligned}$$

avec $\Gamma(a,t)$ est la fonction Gamma incomplète. (Pour montrer cette formule, on suit la méthode pour la représentation de l'inverse de Γ comme une intégrale le long d'un contour, voir [WW62, 12.22] et on utilise la formule de [GR00, 8.353.3])).

On conclut que $F_{\mathcal{N}}$ est analytique en un voisinage ouvert de $s = 0$, et on a

$$F_{\mathcal{N}}(0) = \frac{1}{24}.$$

Soit $s \neq 0$, on a

$$\begin{aligned}
F'_{\mathcal{N}}(s) = &- \frac{\Gamma'(s+1)}{\Gamma(s+1)^2}\Big(\frac{1}{2}+\gamma s + so(1)\Big)\frac{\Gamma(s+\frac{1}{2})}{12\sqrt{\pi}}(1-7s) \\
&+ \frac{1}{\Gamma(s+1)}\Big(\gamma + o(1) + so'(1)\Big)\frac{\Gamma(s+\frac{1}{2})}{12\sqrt{\pi}}(1-7s) \\
&+ \frac{1}{\Gamma(s+1)}\Big(\frac{1}{2}+\gamma s + so(1)\Big)\frac{\Gamma'(s+1)}{12\sqrt{\pi}}(1-7s) \\
&+ \frac{1}{\Gamma(s+1)}\Big(\frac{1}{2}+\gamma s + so(1)\Big)\frac{\Gamma(s+1)}{12\sqrt{\pi}}(-7).
\end{aligned}$$

Rappelons, voir par exemple [GR00, 8.366.1, 8.366.2], que

$$\Gamma'(1) = -\gamma, \quad \frac{1}{2}\frac{\Gamma'(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} = -\log 2 - \frac{\gamma}{2},$$

Par suite

$$F'_{\mathcal{N}}(0) = \frac{1}{12}(\gamma - \log 2 - \frac{7}{2}).$$

□

D'après (2.3.6), la fonction $z_{\mathcal{N}}$ (voir (2.17)) s'écrit au voisinage de $s = 0$ sous la forme suivante :

$$z_{\mathcal{N}}(s) = \frac{s}{\Gamma(s+1)}\Big(\gamma A_{\mathcal{N}}(s) - B_{\mathcal{N}}(s) - \frac{1}{s}A_{\mathcal{N}}(s) + P_{\mathcal{N}}(s)\Big) + F_{\mathcal{N}}(s) + s^2 g(s),$$

où g est une fonction analytique au voisinage zéro. Par les calculs précédents, on obtient :

$$\begin{aligned} z_{\mathcal{N}}(0) &= -A_{\mathcal{N}}(0) + F_{\mathcal{N}}(0) \\ &= -\frac{1}{2}\zeta_{\mathbb{Q}}(-1) + \frac{1}{4}\zeta_{\mathbb{Q}}(0) + \frac{1}{24} \\ &= \frac{1}{24} - \frac{1}{8} + \frac{1}{24} \\ &= -\frac{1}{24}. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} z'_{\mathcal{N}}(s) = \frac{1}{\Gamma(s+1)}\Big(&\gamma A_{\mathcal{N}}(s) - B_{\mathcal{N}}(s) - \frac{1}{s}A_{\mathcal{N}}(s) + P_{\mathcal{N}}(s) + \gamma s A'_{\mathcal{N}}(s) - sB'_{\mathcal{N}}(s) + \frac{1}{s}A_{\mathcal{N}}(s) \\ &- A'(s) + sP'(s)\Big) - \frac{\Gamma'(s+1)}{\Gamma(s+1)^2}s\big(\gamma A_{\mathcal{N}}(s) - B_{\mathcal{N}}(s) - \frac{1}{s}A_{\mathcal{N}}(s) + P_{\mathcal{N}}(s)\big) \\ &+ F'_{\mathcal{N}}(s) + \frac{d}{ds}(s^2 g(s)), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} z'_{\mathcal{N}}(0) &= -A'_{\mathcal{N}}(0) + \lim_{s\mapsto 0}(-B_{\mathcal{N}}(s) + P_{\mathcal{N}}(s)) + \lim_{s\mapsto 0} s(-B'_{\mathcal{N}}(s) + P'_{\mathcal{N}}(s)) + \frac{1}{12}(\gamma - \log 2 - \frac{7}{2}) \\ &= -\zeta'_{\mathbb{Q}}(-1) - \frac{1}{4}\log(2\pi) + 2\zeta'_{\mathbb{Q}}(-1) - \frac{\gamma}{12} + \frac{1}{4}\log(2\pi) - \frac{1}{6}\log 2 + \frac{1}{12}(\gamma - \log 2 - \frac{7}{2}) \\ &= \zeta'_{\mathbb{Q}}(-1) - \frac{1}{6}\log 2 - \frac{7}{24}. \end{aligned}$$

Rappelons que

$$\zeta_{\mathcal{N}}(s) = 2z_{\mathcal{N}}(s) + \sum_{k\geq 1}\frac{1}{j'^{2s}_{0,k}}.$$

Si l'on pose $\zeta_{J'_0}(s) = \sum_{k\geq 1}\frac{1}{j'^{2s}_{0,k}}$ alors la contribution de J'_0 vaut

$$\zeta_{J'_0}(0) = -\frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2}) = -\frac{3}{4}, \quad \zeta'_{J'_0}(0) = \frac{1}{2}\log 2 - \frac{1}{2}\log\pi.$$

(C'est une application de (2.8), sachant que $I'_0(z) = \frac{z}{4} + o(z)$, pour $|z| \ll 1$ et $I'_0(z) = \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}(1 + O(\frac{1}{z}))$ si $|z| \gg 1$).

On obtient :

$$\zeta_{\mathcal{N}}(0) = -(2)\frac{1}{24} - \frac{3}{4} = -\frac{5}{6},$$

et

$$\begin{aligned}\zeta'_{\mathcal{N}}(0) &= 2z'_N(0) + (\frac{1}{2}\log 2 - \frac{1}{2}\log \pi)\\ &= 2\zeta'_{\mathbb{Q}}(-1) + \frac{1}{6}\log 2 - \frac{1}{2}\log \pi - \frac{7}{12}.\end{aligned}$$

On conclut que, voir (2.16)

$$\zeta_0(0) = -\frac{2}{3}, \quad \zeta'_0(0) = 4\zeta'_{\mathbb{Q}}(-1) - \frac{1}{6} + \frac{1}{3}\log 2.$$

Ce qui termine la preuve du résultat cherché.

□

Régularisation de la fonction zêta $\zeta_{\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}}$ pour $m \geq 1$

Ce paragraphe est consacré à l'étude et au calcul explicite du déterminant régularisé de la fonction Zêta :

$$\zeta_{\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}}, \quad \forall m \geq 1.$$

L'idée de la démonstration du théorème (2.3.14) consiste en premier temps à introduire une suite de fonctions analytiques $(G_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ qui vérifie les hypothèses du (2.3.2) et d'établir, tenant compte des notations de (2.3.2) et du théorème (2.3.11), que :

$$\zeta_{\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}} = 4^s z_m(s),$$

où

$$\begin{aligned} z_m(s) &= 2\sum_{n\geq 1}\zeta_{G_{n+m}}(s) + 2\sum_{k=0}^{\frac{m}{2}-1}\zeta_{G_k}(s) + \zeta_{G_{\frac{m}{2}}}(s), && \text{si } m \text{ pair},\\ z_m(s) &= 2\sum_{n\geq 1}\zeta_{G_{n+m}}(s) + 2\sum_{k=0}^{\frac{m-1}{2}}\zeta_{G_k}(s), && \text{si } m \text{ impair}.\end{aligned}$$

Puis de démontrer que $\left(\zeta_{G_{n+m}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une famille régularisable, voir définition (2.3.4) et d'appliquer ensuite le théorème (2.3.6) pour conclure.

On introduit, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la fonction suivante

$$G_n(z) := I_{n+1}(z)I_{n-m}(z) + I_n(z)I_{n-m-1}(z) \quad \forall\, z \in \mathbb{C}.$$

où I_* désigne la fonction de Bessel modifiée d'ordre $*$.

Etablissons d'abord la formule précédente reliant $\zeta_{\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}}$ et z_m. Cela résulte de la définition $\zeta_{\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}}$ et de celle z_m et du lemme suivant :

Lemme 2.3.17. *On a*

1. *Pour tout* $n \in \mathbb{Z}$,
$$G_n(z) = \frac{1}{i^{2n-m-1}} L_n(iz) \quad \forall\, z \in \mathbb{C}$$
et donc, $\{z \in \mathbb{C} \,|\, G_n(iz) = 0\} = Z_n$ *(voir* (2.3.9)*).*
2. $$G_n(z) = G_{m-n}(z)q \quad \forall\, z \in \mathbb{C}, \tag{2.27}$$
3. $$G_n(-z) = (-1)^{m+1} G_n(z) \quad \forall\, z \in \mathbb{C}. \tag{2.28}$$
4. *Si* $n \geq m+1$,
$$G_n(z) = \frac{z^{2n-m-1}}{2^{2n-m-1}\Gamma(n+1)\Gamma(n-m)} + o(z^{2n-m-1}) \quad |z| \ll 1.$$

Démonstration. Cela découle directement des propriétés des fonctions de Bessel. En effet, 1) résulte de la définition de I_n et on a
$$\begin{aligned} G_n(z) &= I_{n+1}(z)I_{n-m}(z) + I_n(z)I_{n-m-1}(z) \\ &= I_{-n-1}(z)I_{-n+m}(z) + I_{-n}(z)I_{-n+m+1}(z), \quad [\text{AS92}, 9.6.6] \\ &= I_{(m-n)+1}(z)I_{(m-n)-m}(z) + I_{(m-n)}(z)I_{(m-n)-m-1}(z) \\ &= G_{m-n}(z). \end{aligned}$$

□

Avec les notations du paragraphe (2.3.2), on considère la famille de fonctions Zêta suivante
$$\{\zeta_{\widetilde{G}_n} \,|\, n \geq 1\},$$
où $\widetilde{G}_n := G_{n+m}$.

On se propose d'étudier la fonction
$$\zeta_{\geq m+1}(s) := \sum_{n \geq 1} \zeta_{\widetilde{G}_n}.$$
Plus précisément, on va montrer que $\{\zeta_{G_{n+m}} \,|\, n \geq 1\}$ est régularisable, voir définition (2.3.4), et on déterminera les valeurs $\zeta_{\geq m+1}(0)$ et $\zeta'_{\geq m+1}(0)$ ce qui nous permettra de compléter la démonstration de (2.3.14).

Commençons par montrer que cette famille de fonctions vérifie les hypothèses de la définition (2.3.4). C'est à dire, on doit vérifier que
$$p_n(z) := \frac{\widetilde{G}_n(iz)}{l_n z^{e_n}} = \prod_{k \geq 1}^{\infty} \Big(1 - \frac{z^2}{\lambda_{n,k}^2}\Big) \quad \forall\, z \in \mathbb{C},$$
en plus des conditions de la définition (2.3.4) où l_n, e_n, a_n, b_n, w, r seront calculés explicitement (Notons que l_n et e_n sont déjà donnés dans le lemme précédent).

Montrons le premier point, c'est à dire que
$$\widetilde{G}_n(iz) = l_n z^{e_n} \prod_{k \geq 1}^{\infty} \Big(1 - \frac{z^2}{\lambda_{n+m,k}^2}\Big),$$

Il suffit, par le théorème de factorisation de Weierstrass, de montrer que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{n,k}^2} < \infty \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

On va montrer que c'est une conséquence de

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{j_{n,k}^2} < \infty \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{j_{n+m,k}^2} < \infty,$$

où $j_{*,k}$ désigne le k-ème zéro positif de la fonction Bessel J_* (Rappelons que la convergence de ces sommes est un résultat classique de la théorie des fonctions de Bessel, voir [Wat44, § 15]).

Pour cela, on a besoin du lemme technique suivant :

Lemme 2.3.18. *Soient f et g deux fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^1$ définies sur un intervalle ouvert non vide I tel que $0 \notin I$.*

On suppose que les zéros de f et g sont simples (c'est à dire, si $f(\alpha) = 0$ alors $f'(\alpha) \neq 0$). Notons par $Z(f)$ (resp. $Z(g)$) l'ensemble des zéros de f (resp. de g) sur I et suppose en plus que

$$Z(f) \cap Z(g) = \emptyset.$$

Soit $m \in \mathbb{N}$ et on pose

$$L(x) = x^m \frac{d}{dx}\big(x^{-m} f(x) g(x)\big) \quad \forall\, x \in I.$$

Si $\lambda_1 < \lambda_2$ sont deux zéros consécutifs de L alors

$$\mathrm{Card}\Big(]\lambda_1, \lambda_2[\cap \big(Z(f) \cup Z(g)\big)\Big) \leq 1.$$

Démonstration. Commençons par remarquer que L s'annule entre deux éléments de $Z(f) \cup Z(g)$ et que $Z(L) \cap \big(Z(f) \cup Z(g)\big) = \emptyset$.

Supposons qu'il existe $\alpha \in \big(Z(f) \cup Z(g)\big) \cap]\lambda_1, \lambda_2[$ qui soit minimal pour cette propriété et que $f(\alpha) = 0$. Supposons par l'absurde qu'il existe $\beta \in Z(g)$ tel que $\lambda_1 < \alpha < \beta < \lambda_2$ minimal pour cette propriété, donc g est de signe constant sur $[\lambda_1, \beta]$. On a

$$\begin{aligned} L(\alpha) &= -m\alpha^{-1} f(\alpha) g(\alpha) + f'(\alpha) g(\alpha) + f(\alpha) g'(\alpha) = f'(\alpha) g(\alpha), \\ L(\beta) &= -m\alpha^{-1} f(\beta) g(\beta) + f'(\beta) g(\beta) + f(\beta) g'(\beta) = g'(\beta) f(\beta), \end{aligned}$$

Comme L est de signe constant sur $]\lambda_1, \lambda_2[$ (puisque continue), alors

$$f'(\alpha) g(\alpha) g'(\beta) f(\beta) > 0,$$

ce qui est impossible puisqu'on montre que

$$\begin{aligned} f'(\alpha) f(\beta) &= \lim_{x \mapsto 0^+} \frac{f(\alpha + x) f(\beta)}{x} > 0, \\ g'(\beta) g(\alpha) &= \lim_{x \mapsto 0^+} \frac{g(\beta - x) g(\alpha)}{-x} < 0. \end{aligned}$$

On conclut que soit $\lambda_1 < \alpha < \lambda_2 < \beta$ ou bien il existe $\alpha' \in Z(f)$ tel que $\lambda_1 < \alpha < \alpha' < \lambda_2$. Si l'on est dans la dernière situation, on obtient comme avant :

$$f'(\alpha)g(\alpha)f'(\alpha')g(\alpha') > 0,$$

Puisque g est de signe constant sur $[\alpha, \alpha']$ alors

$$f'(\alpha)f'(\alpha') > 0,$$

ce qui impossible puisque

$$f'(\alpha)f'(\alpha') = \lim_{x \mapsto 0^+} \frac{f(\alpha + x)f(\alpha' - x)}{-x^2} < 0.$$

□

On va appliquer ce lemme à $f = J_n$ et $g = J_{n+m}$, dans ce cas

$$L = -L_{n+m}.$$

On obtient donc avec les notations introduites avant :

$$\mathrm{Card}\Big([\lambda_{n+m,k}, \lambda_{n+m,k+1}] \cap (Z(J_n) \cup Z(J_{n+m}))\Big) \leq 1, \quad \forall k \geq 1.$$

Mais d'après (2.3.10) on a

$$L'_{n+m}(\lambda) = \frac{J_n(\lambda)}{J_{n+m}(\lambda)} \|\varphi_\lambda\|^2, \quad \forall \lambda \in Z_{n+m}.$$

qui donne que

$$0 > L'_{n+m}(\lambda_{n+m,k})L'_{n+m}(\lambda_{n+m,k+1}) = \frac{J_{n+m}(\lambda_{n+m,k})}{J_n(\lambda_{n+m,k})} \frac{J_{n+m}(\lambda_{n+m,k+1})}{J_n(\lambda_{n+m,k+1})} \|\varphi_{\lambda_{n+m,k+1}}\|^2 \|\varphi_{\lambda_{n+m,k+1}}\|^2.$$

(l'inégalité à droite résulte du fait que L_{n+m} est $\mathcal{C}^1$ et de signe constant sur $]\lambda_{n+m,k}, \lambda_{n+m,k+1}[$).

Par suite

$$\mathrm{Card}\Big([\lambda_{n+m,k}, \lambda_{n+m,k+1}] \cap (Z(J_n) \cup Z(J_{n+m}))\Big) = 1 \quad \forall\, k \geq 1.$$

Maintenant on peut montrer que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{n,k}^2} < \infty,$$

En posant

$$\widetilde{\lambda}_{n,k} := \max\Big\{(Z(J_n) \cup Z(J_{n+m})) \cap [0, \lambda_{n,k}]\Big\} \quad \forall\, k \in \mathbb{N},$$

alors, par le lemme précédent, on a

$$\widetilde{\lambda}_{n,k} < \lambda_{n,k} < \widetilde{\lambda}_{n,k+1} < \lambda_{n,k+1} \quad \forall\, k \geq 1.$$

et

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\widetilde{\lambda}_{n,k}^2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{j_{n,k}^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{j_{n+m,k}^2}.$$

Or le terme de droite dans cette inégalité est fini, voir [Wat44, §. 15]. On conclut que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{n,k}^2} < \infty \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}.$$

Vérifions maintenant (3.7.13). On note par $\lambda_{n+m,1}$ la première valeur positive non nulle de Z_{n+m}, montrons que

$$\inf_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\lambda_{n+m,1}^2}{n^2} \neq 0.$$

Montrons d'abord le lemme suivant :

Lemme 2.3.19. *Soit a un réel non nul. On a*

$$\int_0^1 xJ_n(ax)^2 dx = \frac{1}{2}(J_n'(a)^2 + (1 - \frac{n^2}{a^2})J_n(a)^2)$$

en particulier, soit $n \neq 0$, si l'on note par $j_{n,1}$ (resp. $j_{n,1}'$) le premier zéro positif non nul de J_n (resp. de J_n') alors on a

$$j_{n,1} > j_{n,1}' > n.$$

Démonstration. Soit b un réel non nul, on a

$$\begin{aligned}\int_0^1 xJ_n(ax)J_n(bx)dx &= \frac{1}{b^2-a^2}(aJ_n(b)J_n'(a) - bJ_n(a)J_n'(b)) \\ &= \frac{1}{a+b}\Big(a\frac{J_n(b)-J_n(a)}{b-a}J_n'(a) + J_n(a)J_n'(b) - aJ_n(a)\frac{J_n'(b)-J_n'(a)}{b-a}\Big).\end{aligned}$$

La première égalité résulte de l'équation de Bessel, ou consulter [Wat44, § 5.11 (8)]. En faisant tendre b vers a, on obtient :

$$\int_0^1 xJ_n(ax)^2 dx = \frac{1}{2a}(-aJ_n'(a)^2 + J_n(a)J_n'(a) + aJ_n(a)J_n''(a)),$$

mais comme J_n vérifie l'équation de Bessel, alors

$$\int_0^1 xJ_n(ax)^2 dx = \frac{1}{2}\Big(J_n'(a)^2 + (1 - \frac{n^2}{a^2})J_n(a)^2\Big). \tag{2.29}$$

Si $J_n'(a) = 0$ alors on a de la formule précédente, $|a| > n$. En particulier $j_{n,1}' > n$. Par définition $j_{n,1} > 0$ et $J_n(j_{n,1}) = 0$, par suite J_n' s'annule sur l'intervalle ouvert $]0, j_{n,1}[$ par le théorème des accroissements finis, ce qui termine la preuve du lemme. □

Soit $\lambda > 0$, on pose

$$f_{n,\lambda}(r) = \begin{cases} J_{n+m}(\lambda r) & \text{si } r \leq 1, \\ \frac{J_{n+m}(\lambda)}{J_n(\lambda)} r^m J_n(\frac{\lambda}{r}) & \text{si } r > 1, \end{cases} \tag{2.30}$$

Proposition 2.3.20. *Avec les notations précédentes,*

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{n,\lambda} := \int_0^\infty |f_{n,\lambda}(r)|^2 \frac{rdr}{\max(1,r)^{m+4}} &= \frac{1}{2}\Big(J_{n+m}'(\lambda)^2 + (1 - \frac{(n+m)^2}{\lambda^2})J_{n+m}(\lambda)^2\Big) \\ &\quad + \frac{J_{n+m}(\lambda)^2}{2J_n(\lambda)^2}(J_n'(\lambda)^2 + (1 - \frac{n^2}{\lambda^2})J_n(\lambda)^2),\end{aligned}$$

et on a

$$\lambda_{n+m,1}^2 \geq n^2 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}\int_0^\infty |f_{n,i}(r)|^2 \frac{rdr}{\max(1,r)^{m+4}} &= \int_0^1 |f_{n,i}(r)|^2 rdr + \int_1^\infty |f_{n,i}(r)|^2 \frac{rdr}{r^{m+4}} \\ &= \int_0^1 J_{n+m}(\lambda r)^2 rdr + \Big(\frac{J_{n+m}(\lambda)}{J_n(\lambda)}\Big)^2 \int_1^\infty J_n\Big(\frac{\lambda}{r}\Big)^2 d\Big(\frac{1}{r^3}\Big).\end{aligned}$$

En utilisant (2.29), on montre la première assertion.

Comme Z_{n+m} est symétrique, il suffit de montrer que $\inf Z_{n+m} \cap \mathbb{R}^+ > n$.

Si $\lambda \in Z_{n+m} \cap \mathbb{R}^+$, alors

$$-\frac{m}{\lambda} + \frac{J'_{n+m}(\lambda)}{J_{n+m}(\lambda)} + \frac{J'_n(\lambda)}{J_n(\lambda)} = 0 \tag{2.31}$$

puisque $\frac{d}{dr}(r^{-m} J_{n+m}(r) J_n(r))_{|\lambda} = 0$, voir (2.14) et que $\frac{d}{dr}(r^{-m} J_n(r) J_{n-m}(r)) = -mr^{-m-1} J_{n+m}(r) J_n(r) + r^{-m}(J'_{n+m}(r) J_n(r) + J_{n+m}(r) J'_n(r))$.

Supposons par l'absurde que $\lambda < n$. On a $J_{n+m}(0) = J_n(0) = 0$ et puisque J_n et J_{n+m} sont analytiques sur $\mathbb{C}$ alors il existe $0 < \varepsilon \ll 1$ tel que $J_n J'_n > 0$ et $J_{n+m} J'_{n+m} > 0$ sur $]0, \varepsilon[$ et par conséquent J_n^2 et J_{n+m}^2 sont croissantes sur $[0, \varepsilon[$, mais d'après (2.3.19), $J_n J'_n$ et $J_{n+m} J'_{n+m}$ sont de signe constant sur $]0, \min(n[$ donc on peut prendre $\varepsilon \geq n$.

Comme on a $\lambda < \min(|n+m|, |n|) \leq \varepsilon$, alors

$$\begin{aligned}\frac{m^2}{\lambda^2} &= \Big(\frac{J'_n(\lambda)}{J_n(\lambda)} + \frac{J'_{n+m}(\lambda)}{J_{n+m}(\lambda)}\Big)^2 \quad \text{par} \quad (2.31) \\ &\geq \Big(\frac{J'_n(\lambda)}{J_n(\lambda)}\Big)^2 + \Big(\frac{J'_{n+m}(\lambda)}{J_{n+m}(\lambda)}\Big)^2.\end{aligned}$$

Cela donne

$$\begin{aligned}0 &< \frac{\mathcal{I}_{n,i}}{J_{n+m}(\lambda)^2} \\ &= \frac{1}{2}\Big(\frac{J'_{n+m}(\lambda)^2}{J_{n+m}(\lambda)^2} + \Big(1 - \frac{(n+m)^2}{\lambda^2}\Big)\Big) + \frac{1}{2}\Big(\frac{J'_n(\lambda)}{J_n(\lambda)^2} + \Big(1 - \frac{n^2}{\lambda^2}\Big)\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\frac{J'_{n+m}(\lambda)^2}{J_{n+m}(\lambda)^2} + \frac{J'_n(\lambda)}{J_n(\lambda)^2}\Big) + 1 - \frac{(n+m)^2 + n^2}{2\lambda^2} \\ &\leq \frac{1}{2}\Big(\frac{J'_{n+m}(\lambda)}{J_{n+m}(\lambda)} + \frac{J'_n(\lambda)}{J_n(\lambda)}\Big)^2 + 1 - \frac{(n+m)^2 + n^2}{2\lambda^2} \\ &= \frac{m^2}{2\lambda^2} + 1 - \frac{n^2 + (n+m)^2}{2\lambda^2} \\ &= \frac{-n^2 - nm}{\lambda^2} + 1\end{aligned}$$

donc,

$$\lambda^2 > n^2 + nm = n(n+m).$$

Ce qui est impossible puisque $\lambda < n$ et $m \geq 0$. □

On conclut que

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{\lambda^2_{n+m,1}}{n^2} \geq 1.$$

Proposition 2.3.21. *On a pour tout* $|z| \gg 1$ *avec* $|\arg(z)| < \frac{\pi}{2}$,

$$\widetilde{G}_n(z) = G_{n+m}(z) = \frac{e^{2z}}{2\pi z}\Big(1 - \frac{4n^2+2m^2+4nm+2m+1}{2z} + O(\frac{1}{z^2})\Big), \tag{2.32}$$

Démonstration. C'est une conséquence de la formule (2.50). □

Proposition 2.3.22. *On a pour tout* $|\arg(z)| < \frac{\pi}{2}$, *et* $n \gg 1$

$$\widetilde{G}_n(nz) = G_{n+m}(nz) = \frac{e^{(2n+m-1)\eta(z)}}{2\pi n(1+z^2)^{\frac{1}{2}}}\Big(e^{2(\eta(z)-z\eta'(z))}+1\Big)\Big(1+\frac{1}{n}w_m(z)+\frac{1}{n^2}\eta_m(z,n)\Big),$$

avec $w_m(z) = -\frac{1}{4}(2m^2+2m+1)\frac{1}{(1+z^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{12}\frac{1}{(1+z^2)^{\frac{3}{2}}}$ *et* η_m *une fonction bornée uniformément en* n.

Donc, on obtient avec les notations du (2.3.4) :

$$\begin{aligned} r(z) &= \eta(z) = \sqrt{1+z^2} + \log\frac{z}{1+\sqrt{1+z^2}}, \\ \rho(z) &= \frac{1}{(1+z^2)^{\frac{1}{2}}}\Big(e^{2(\eta(z)-z\eta'(z))}+1\Big), \\ w(z) &= w_m(z). \end{aligned}$$

et on vérifie à l'aide de developpements limités convenables que

$$\begin{aligned} \eta(z) &= \log(z) + O(1) \quad \text{pour } |z| \ll 1, \\ \eta(z) &= z + O(\frac{1}{z}) \quad \text{pour } |z| \gg 1, \\ \eta(z) - z\eta'(z) &= \log(z) \quad \text{pour } |z| \ll 1 \\ \eta(z) - z\eta'(z) &= z + 1 + O(\frac{1}{z}) \quad \text{pour } |z| \gg 1 \\ \rho(0) &= 1 \\ \log\rho(z) &= 2z - \log z + 2 + O(\frac{1}{z}) \quad \text{pour } |z| \gg 1. \end{aligned}$$

La preuve de cette proposition sera faite en deux étapes ; on commence par montrer les résulats suivants :

Lemme 2.3.23. *Soit* $n > 0$ *et* l *un entier fixé. Il existe des fonctions* $v_{1,l}, v_{2,l}, \ldots$ *telles que pour* n *grand et* $|\arg(z)| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, ε *assez petit :*

$$I_n((n+l)z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\frac{e^{n\eta(z)}}{(1+z^2)^{\frac{1}{4}}}e^{lz\eta'(z)}\Big(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{v_{k,l}(z)}{n^k}\Big) \tag{2.33}$$

avec $v_{1,l}(z) = u_1(z) + zl(1+z^2)^{\frac{1}{4}}\frac{\partial}{\partial z}(\frac{1}{(1+z^2)^{\frac{1}{4}}}) + \frac{l^2z^2}{2}\eta''(z)$.

Démonstration. Dans [AS92, 9.7.7], on a

$$I_n(nz) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \frac{e^{n\eta(z)}}{(1+z^2)^{\frac{1}{4}}} \Big(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k(z)}{n^k}\Big) \tag{2.34}$$

pour tout z vérifiant $|\arg(z)| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$.

On cherche à établir une formule analogue pour $I_n((n+l)z)$ pour $n \gg 1$ et l un entier fixé, c'est à dire montrer qu'il existe des fonctions continues $v_{l,1}, v_{l,2}, \ldots$ telles que

$$I_n((n+l)z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \frac{e^{n\eta(z)}}{(1+z^2)^{\frac{1}{4}}} e^{lz\eta'(z)} \Big(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_{k,l}(z)}{n^k}\Big)$$

Pour simplifier les notations, on notera par O(1) une fonction en n bornée uniformément en z.

Soit $n \gg 1$.

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|\arg(z)| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, remarquons que $\arg((1+\frac{l}{n})z) = \arg(z)$, donc de (2.34) on tire

$$\begin{aligned}
&I_n\big((n+l)z\big) = I_n\big(n(1+\frac{l}{n})z\big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \frac{e^{n\eta((1+\frac{l}{n})z)}}{(1+((1+\frac{l}{n})z)^2)^{\frac{1}{4}}} \Big(1 + \frac{1}{n} u_1((1+\frac{l}{n})^2 z) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{u_k((1+\frac{l}{n})z)}{n^k}\Big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} e^{n(\eta(z) + \frac{lz}{n}\eta'(z) + \frac{z^2 l^2}{2n^2}\eta''(z) + o(\frac{1}{n^2}))} \Big(\frac{1}{(1+z^2)^{\frac{1}{4}}} + \frac{lz}{n}\frac{\partial}{\partial z}(\frac{1}{(1+z^2)^{\frac{1}{4}}}) + \frac{1}{(n+l)^2} O(1)\Big) \\
&\Big(1 + \frac{1}{n}\Big(u_1(z) + \frac{l}{n}\frac{\partial}{\partial z} u_1(z) + \frac{1}{n^2}\mathrm{O}(1)\Big) + \frac{1}{n^2}\mathrm{O}(1)\Big) \\
&= \frac{e^{n\eta(z)}}{\sqrt{2\pi n}} e^{lz\eta'(z)} \Big(1 + \frac{l^2 z^2}{2n}\eta''(z) + \frac{1}{n^2}\mathrm{O}(1)\Big)\Big(\frac{1}{(1+z^2)^{\frac{1}{4}}} + \frac{lz}{n}\frac{\partial}{\partial z}(\frac{1}{(1+z^2)^{\frac{1}{4}}}) + \frac{1}{(n+l)^2} O(1)\Big) \\
&\Big(1 + \frac{1}{n}\Big(u_1(z) + \frac{l}{n}\frac{\partial}{\partial z} u_1(z) + \frac{1}{n^2}\mathrm{O}(1)\Big) + \frac{1}{n^2}\mathrm{O}(1)\Big) \\
&= \frac{e^{n\eta(z)}}{\sqrt{2\pi n}} e^{lz\eta'(z)} \Big(\frac{1}{(1+z^2)^{\frac{1}{4}}} + \frac{1}{n}\Big(\frac{u_1(z)}{(1+z^2)^{\frac{1}{4}}} + zl\frac{\partial}{\partial z}(\frac{1}{(1+z^2)^{\frac{1}{4}}}) + \frac{l^2 z^2}{2}\frac{\eta''(z)}{(1+z^2)^{\frac{1}{4}}}\Big) + \frac{1}{n^2}\mathrm{O}(1)\Big)
\end{aligned}$$

En posant

$$v_{1,l}(z) = u_1(z) + zl(1+z^2)^{\frac{1}{4}} \frac{\partial}{\partial z}(\frac{1}{(1+z^2)^{\frac{1}{4}}}) + \frac{l^2 z^2}{2}\eta''(z)$$

on trouve la formule cherchée. □

Corollaire 2.3.24. *Soient l et l' deux entiers fixés. On a*

$$I_{n-l}(nz) I_{n-l'}(nz) = \frac{e^{2n\eta(z)}}{2\pi n(1+z^2)^{\frac{1}{2}}} e^{-(l+l')(\eta(z) - z\eta'(z))} \Big(1 + \frac{1}{n}(v_{1,l}(z) + v_{1,l'}(z) + \frac{l+l'}{2}) + \frac{1}{n^2}\mathrm{O}(1)\Big) \tag{2.35}$$

Démonstration. On a pour $n \gg 1$

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-l}} = 1 + \frac{l}{2n} + \frac{1}{n^2}\mathrm{O}(1),$$

et par ce qui précède, on a

$$\begin{aligned}
I_{n-l}(nz) &= I_{n-l}\big(((n-l)+l)z\big)\\
&= \frac{e^{(n-l)\eta(z)}}{\sqrt{2\pi(n-l)}(1+z^2)^{\frac14}} e^{zl\eta'(z)}\Big(1+\frac{1}{n-l}v_{1,l}(z)+\frac{1}{(n-l)^2}\mathrm{O}(1)\Big)\\
&= \frac{e^{(n-l)\eta(z)}}{\sqrt{2\pi n}(1+z^2)^{\frac14}} e^{zl\eta'(z)}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-l}}\Big(1+\frac{1}{n}v_{1,l}(z)+\frac{1}{n^2}\mathrm{O}(1)\Big)\\
&= \frac{e^{(n-l)\eta(z)}}{\sqrt{2\pi n}(1+z^2)^{\frac14}} e^{zl\eta'(z)}\Big(1+\frac{l}{2n}+\frac{1}{n^2}\mathrm{O}(1)\Big)\Big(1+\frac{1}{n}v_{1,l}(z)+\frac{1}{n^2}\mathrm{O}(1)\Big)\\
&= \frac{e^{(n-l)\eta(z)}}{\sqrt{2\pi n}(1+z^2)^{\frac14}} e^{zl\eta'(z)}\Big(1+\frac{1}{n}\Big(v_{1,l}(z)+\frac{l}{2}\Big)+\frac{1}{n^2}\mathrm{O}(1)\Big).
\end{aligned}$$

Si l'on prend un autre entier l' alors on déduit directement de la dernière formule que

$$I_{n-l}(nz)I_{n-l'}(nz) = \frac{e^{2n\eta(z)}}{2\pi n(1+z^2)^{\frac12}} e^{-(l+l')(\eta(z)-z\eta'(z))}\Big(1+\frac{1}{n}(v_{1,l}(z)+v_{1,l'}(z)+\frac{l+l'}{2})+\frac{1}{n^2}\mathrm{O}(1)\Big). \tag{2.36}$$

□

On pose

$$w_{l,l'}(z) := v_{1,l}(z)+v_{1,l'}(z)+\frac{l+l'}{2}.$$

De (2.35), on a

$$I_{n+m+1}(nz)I_n(nz) = \frac{e^{2n\eta(z)}}{2\pi n(1+z^2)^{\frac12}} e^{(m+1)(\eta(z)-z\eta'(z))}\Big(1+\frac{1}{n}\Big(v_{1,-(m+1)}+v_{1,0}-\frac{m+1}{2}\Big)+\mathrm{O}(\frac{1}{n^2})\Big)$$

et

$$I_{n+m}(nz)I_{n-1}(nz) = \frac{e^{2n\eta(z)}}{2\pi n(1+z^2)^{\frac12}} e^{(m-1)(\eta(z)-z\eta'(z))}\Big(1+\frac{1}{n}\Big(v_{1,-m}+v_{1,1}-\frac{m-1}{2}\Big)+\mathrm{O}(\frac{1}{n^2})\Big)$$

donc

$$\begin{aligned}
G_{n+m}(nz) &= \frac{e^{2n\eta(z)}}{2\pi n(1+z^2)^{\frac12}} e^{(m+1)(\eta(z)-z\eta'(z))}\Big(1+e^{-2(\eta(z)-z\eta'(z))}+\frac{1}{n}\Big(v_{1,-(m+1)}+v_{1,0}-\frac{m+1}{2}\Big)\\
&+\frac{e^{-2(\eta(z)-z\eta'(z))}}{n}(v_{1,-m}+v_{1,1}-\frac{m+1}{2})+\mathrm{O}(\frac{1}{n^2})\Big)\\
&= \frac{e^{2n\eta(z)}}{2\pi n(1+z^2)^{\frac12}} e^{(m+1)(\eta(z)-z\eta'(z))}(1+e^{-2(\eta(z)-z\eta'(z)})\Big(1+\\
&\frac{1}{n}\Big(\frac{v_{1,-(m+1)}(z)+v_{1,0}(z)-\frac{m+1}{2}+(v_{1,-(m+1)}(z)+v_{1,0}(z)-\frac{m-1}{2})e^{-2(\eta(z)-z\eta'(z))}}{1+e^{-2(\eta(z)-z\eta'(z))}}\Big)+\mathrm{O}(\frac{1}{n^2})\Big)
\end{aligned}$$

Rappelons que

$$v_{1,l}(z) = u_1(z)+lz(1+z^2)^{\frac14}\frac{\partial}{\partial z}(\frac{1}{(1+z^2)^{\frac14}})+\frac{l^2z^2}{2}\eta''(z).$$

avec $u_1(z) = \frac{1}{8(1+z^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{5}{24(1+z^2)^{\frac{3}{2}}}$.
Si l'on pose

$$p := \frac{1}{(1+z^2)^{\frac{1}{2}}},$$

on trouve que

$$\frac{v_{1,-(m+1)}(z) + v_{1,0}(z) - \frac{m+1}{2} + (v_{1,-(m+1)}(z) + v_{1,0}(z) - \frac{m-1}{2})e^{-2(\eta(z)-z\eta'(z))}}{1+e^{-2(\eta(z)-z\eta'(z))}} =$$
$$= -\frac{1}{4}(2m^2+2m+1)p + \frac{1}{12}p^3,$$

qu'on notera par w_m, ce qui termine la preuve de la proposition (2.3.22).

Remarque 2.3.25. Si l'on prend $m = 0$, c'est à dire le cas correspondant au fibré trivial, on retrouve bien le résultat précédemment calculé.

Remarque 2.3.26.

$$w_0(z) = V_1(z) + U_1(z),$$

voir notations (2.52) et (2.53).

On considère la fonction zêta suivante :

$$\zeta_{\geq m+1} := \sum_{n\geq 1} \sum_{\lambda \in Z_{n+m}} \frac{1}{\lambda^{2s}},$$

Rappelons que c'est la fonction zêta associée à la famille $\{G_{n+m} |\ n \geq 1\}$. Avec les notations du théorème (2.3.6) et en utilisant les développement asymptotiques (2.50), on a pour tout $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} p_{m,n}(z) &:= -\log G_{n+m}(nz) + (2n+m-1)\log(nz) - (2n+m-1)\log 2 - \log\Gamma(n) \\ &\quad - \log\Gamma(n+m+1) + \frac{w_m(z)}{n} \\ &= -2nz + \log(\pi nz) + (2n+m-1)\log(nz) - (2n+m-1)\log 2 - \log\Gamma(n) \\ &\quad - \log\Gamma(n+m+1) + \mathrm{O}(\frac{1}{z}) \quad \text{par (2.32).} \end{aligned}$$

Par suite

$$a_{m,n} = n + \frac{m}{2},$$

et

$$b_{m,n} := -\log\Gamma(n+m+1) - \log\Gamma(n) + (2n+m)\log n - (2n+m-1)\log 2 + \log\pi.$$

Donc

$$A_m(s) = \zeta_{\mathbb{Q}}(2s-1) + \frac{m}{2}\zeta_{\mathbb{Q}}(2s),$$

et

$$\begin{aligned}
B_m(s) &= -\sum_{n\geq 1}\Big(\frac{\Gamma(n+m+1)}{n^{2s}}+\frac{\log\Gamma(n)}{n^{2s}}\Big)+2\sum_{n\geq 1}\frac{\log n}{n^{2s-1}}+m\sum_{n\geq 1}\frac{\log n}{n^{2s}}-2\log 2\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{2s-1}}\\
&-(m-1)\log 2\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{2s}}+\log\pi\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{2s}}\\
&=-\sum_{n\geq 1}\frac{\log[(n+m)(n+m-1)\cdots n]}{n^{2s}}-2\sum_{n\geq 1}\frac{\log\Gamma(n)}{n^{2s}}-2\zeta'_{\mathbb{Q}}(2s-1)-m\zeta'_{\mathbb{Q}}(2s)\\
&-2\log 2\,\zeta_{\mathbb{Q}}(2s-1)-(m-1)\log 2\,\zeta_{\mathbb{Q}}(2s)+\log\pi\,\zeta_{\mathbb{Q}}(2s)\\
&=-\sum_{n\geq 1}\sum_{k=1}^{m}\frac{\log(n+k)}{n^{2s}}-2\sum_{n\geq 1}\frac{\log\Gamma(n)}{n^{2s}}-2\zeta'_{\mathbb{Q}}(2s-1)-(m-1)\zeta'_{\mathbb{Q}}(2s)-2\log 2\,\zeta_{\mathbb{Q}}(2s-1)\\
&-(m-1)\log 2\,\zeta_{\mathbb{Q}}(2s)+\log\pi\,\zeta_{\mathbb{Q}}(2s).
\end{aligned}$$

et

$$P_m(s)=\sum_{n\geq 1}\frac{w_m(0)}{n^{2s+1}}=-\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{2s+1}}\Big(\frac{m(m+1)}{2}+\frac{1}{6}\Big).$$

et on note par F_m,

$$F_m(s):=\frac{s^2}{\Gamma(s+1)}\zeta_{\mathbb{Q}}(2s+1)\int_0^\infty\frac{t^{s-1}}{2\pi i}\int_{\Lambda_c}\frac{e^{-\lambda t}}{-\lambda}w_m(\lambda)d\lambda dt$$

On montre que

$$F_m(s)=\frac{s^2}{\Gamma(s+1)}\zeta_{\mathbb{Q}}(2s+1)\Big(\frac{2+6m+6m^2}{s}-2\Big)\frac{\Gamma(s+\frac{1}{2})}{12\sqrt{\pi}}\forall\,|s|\ll 1,$$

et que

$$F'_m(0)=\frac{1}{6}\gamma+\frac{1}{2}m(m+1)\gamma-\frac{1}{6}\log 2-\frac{1}{2}m(m+1)\log 2-\frac{1}{12}.$$

On a besoin d'expliciter dans la formule de $\zeta_{\geq m+1}$, la quantité P_m-B_m. C'est l'objet du lemme suivant :

Lemme 2.3.27. *Pour $|s|\ll 1$, on a*

$$\begin{aligned}
(-B_m+P_m)(s)=&\sum_{k=1}^{m}\gamma_k(s)+2\eta(s)-m\zeta'_{\mathbb{Q}}(2s)+2\zeta'_{\mathbb{Q}}(2s-1)+(m-1)\zeta'_{\mathbb{Q}}(2s)\\
&+2\log 2\,\zeta_{\mathbb{Q}}(2s-1)+(m-1)\log 2\,\zeta_{\mathbb{Q}}(2s)-\log\pi\,\zeta_{\mathbb{Q}}(2s),
\end{aligned}$$

avec $\gamma_k(s)=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{2s}}(\log(1+\frac{k}{n})-\frac{k}{n})$, qui est une fonction analytique au voisinage de $s=0$.

Démonstration. Par application du théorème des accroissements finis à la fonction $x\mapsto\log(1+x)-x$ sur $\mathbb{R}^+$ on a

$$\Big|\log(1+\frac{k}{n})-\frac{k}{n}\Big|\leq\frac{k^2}{n^2}\quad\forall\,n\geq 1.$$

Donc la série numérique suivante :

$$\gamma_k(s)=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^{2s}}(\log(1+\frac{k}{n})-\frac{k}{n}),$$

converge pour tout complexe fixé s vérifiant $\mathrm{Re}(s) > -\frac{1}{2}$.

De plus, si s est tel que $|\mathrm{Re}(s)| \leq \frac{1}{4}$ alors

$$\Big| \sum_{n \geq N+1} \frac{1}{n^{2s}} (\log(1+\frac{k}{n}) - \frac{k}{n}) \Big| \leq k^2 \sum_{n \geq N+1} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \quad \forall N \in \mathbb{N}^*,$$

d'où la convergence normale et comme les somme partielles sont continues en s sur $|\mathrm{Re}(s)| < \frac{1}{2}$ alors γ_k est continue et

$$\gamma_k(0) = \sum_{n \geq 1} \log(1+\frac{k}{n}) - \frac{k}{n}$$

On sait que, voir [AS92, 6.1.3],

$$-\log \Gamma(z) = \log z + \gamma z + \sum_{n \geq 1} \log(1+\frac{z}{n}) - \frac{z}{n} \quad \mathrm{Re}(z) > 0,$$

donc

$$\gamma_k(0) = -\log \Gamma(k+1) - \gamma k.$$

On a

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq 1} \sum_{k=1}^{m} \frac{\log(n+k)}{n^{2s}} - \frac{m(m+1)}{2} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{2s+1}} &= \sum_{n \geq 1} \sum_{k=1}^{m} \Big(\frac{\log(n+k)}{n^{2s}} - \frac{k}{n^{2s+1}} \Big) \\
&= \sum_{n \geq 1} \Big(m \frac{\log n}{n^{2s}} + \frac{1}{n^{2s}} \sum_{k=1}^{m} (\log(1+\frac{k}{n}) - \frac{k}{n}) \Big) \\
&= -m\zeta'_{\mathbb{Q}}(2s) + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{2s}} \sum_{k=1}^{m} (\log(1+\frac{k}{n}) - \frac{k}{n}).
\end{aligned}$$

En $s = 0$, la fonction précédente est égale à

$$\begin{aligned}
-m\zeta'_{\mathbb{Q}}(0) + \sum_{k=1}^{m} \sum_{n \geq 1} \Big(\log(1+\frac{k}{n}) - \frac{k}{n} \Big) &= -m\zeta'_{\mathbb{Q}}(0) + \sum_{k=1}^{m} (-\log \Gamma(k) - \log k - \gamma k) \\
&= -m\zeta'_{\mathbb{Q}}(0) - \gamma \frac{m(m+1)}{2} - \sum_{k=1}^{m} \log \Gamma(k+1).
\end{aligned}$$

On déduit que

$$\begin{aligned}
(-B_m + P_m)(s) = &\sum_{n \geq 1} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{n^{2s}} \Big(\log(1+\frac{k}{n}) - \frac{k}{n} \Big) - m\zeta'_{\mathbb{Q}}(2s) + 2 \sum_{n \geq 1} \Big(\frac{\log \Gamma(n)}{n^{2s}} - \frac{1}{n^{2s+1}} \Big) \\
&+ 2\zeta'_{\mathbb{Q}}(2s-1) + (m-1)\zeta'_{\mathbb{Q}}(2s) + 2\log 2\, \zeta_{\mathbb{Q}}(2s-1) + (m-1)\log 2\, \zeta_{\mathbb{Q}}(2s) \\
&- \log \pi\, \zeta_{\mathbb{Q}}(2s) \\
= &\sum_{k=1}^{m} \gamma_k(s) + 2\eta(s) - m\zeta'_{\mathbb{Q}}(2s) + 2\zeta'_{\mathbb{Q}}(2s-1) + (m-1)\zeta'_{\mathbb{Q}}(2s) \\
&+ 2\log 2\, \zeta_{\mathbb{Q}}(2s-1) + (m-1)\log 2\, \zeta_{\mathbb{Q}}(2s) - \log \pi\, \zeta_{\mathbb{Q}}(2s).
\end{aligned}$$

□

On peut donc évaluer les valeurs de $\zeta_{\geq m+1}(0)$ et $\zeta'_{\geq m+1}(0)$. On a

$$\begin{aligned}\zeta_{n\geq m+1}(0) &= -A_m(0) + F_m(0)\\ &= \frac{1}{12} + \frac{m}{4} + \frac{1}{12}(1+3m+3m^2)\\ &= \frac{1}{6} + \frac{m}{2} + \frac{m^2}{4}\end{aligned}$$

et

$$\zeta'_{n\geq m+1}(0) = 2\zeta'_{\mathbb{Q}}(-1) - \sum_{k=1}^{m} \log\Gamma(k+1) + \Big(\frac{1}{6} - \frac{m(m+1)}{2}\Big)\log 2 + \frac{m+1}{2}\log\pi - \frac{1}{12}.$$

Notons par z_m,

$$z_m(s) := \sum_{n\geq 0}\sum_{\lambda\in Z_n} \frac{1}{\lambda^{2s}},$$

(ici les zéros sont comptés avec leurs multiplicités).

Rappelons que

$$\zeta_{\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)_\infty}}}(s) = 4^s z_m(s).$$

Il reste à déterminer la contribution de $\{G_n,\, 0\leq n\leq m\}$:

1. **Si m est pair**. Remarquons que $G_n = G_{n-m}$. On a

$$z_m(s) = 2\zeta_{\geq m+1}(s) + 2\zeta_{0\leq n\leq \frac{m}{2}-1}(s) + \zeta_{\frac{m}{2}}(s),$$

avec

$$\zeta_{0\leq n\leq \frac{m}{2}-1}(s) = \sum_{0\leq n\leq \frac{m}{2}-1}\sum_{\lambda\in Z_n} \frac{1}{\lambda^{2s}},$$

et

$$\zeta_{\frac{m}{2}}(s) = \sum_{\lambda\in Z_{\frac{m}{2}}} \frac{1}{\lambda^{2s}}.$$

En appliquant (2.8), on a

$$\zeta_{0\leq n\leq \frac{m}{2}-1}(0) = -\sum_{0\leq n\leq \frac{m}{2}-1} \frac{m+2}{2},$$

et

$$\begin{aligned}\zeta'_{0\leq n\leq \frac{m}{2}-1}(0) &= -\sum_{0\leq n\leq \frac{m}{2}-1} b_n\\ &= -\sum_{0\leq n\leq \frac{m}{2}-1}\Big(\log\pi - (m+1)\log 2 - \log(n+1)! - \log(m-n+1)!\\ &+ \log(m+2)\Big)\\ &= -\log\pi\frac{m}{2} + \frac{m(m+1)}{2}\log 2 - \frac{m}{2}\log(m+2) + \sum_{0\leq n\leq \frac{m}{2}-1}\Big(\log(n+1)!\\ &+ \log(m-n+1)!\Big)\\ &= -\log\pi\,\frac{m}{2} + \frac{m(m+1)}{2}\log 2 - \frac{m}{2}\log(m+2) + \sum_{0\leq n\leq m, n\neq \frac{m}{2}} \log(n+1)!,\end{aligned}$$

On a aussi,

$$\zeta_{\frac{m}{2}}(0) = \frac{m+2}{2},$$

et

$$\zeta'_{\frac{m}{2}}(0) = \log\pi - (m+1)\log 2 - \log(\frac{m}{2}+1)! - \log(\frac{m}{2}+1)! + \log(m+2).$$

En regroupant tout cela, on obtient :

$$z_m(0) = 2\Big(\frac{1}{6} + \frac{m}{2} + \frac{m^2}{4}\Big) - 2\frac{m(m+2)}{4} - \frac{m+2}{2} = -\frac{2}{3} - \frac{m}{2},$$

et

$$\begin{aligned}
z'_m(0) &= 2\Big(2\zeta'_{\mathbb{Q}}(-1) - \sum_{k=1}^{m}\log\Gamma(k+1) + (\frac{1}{6} - \frac{m(m+1)}{2})\log 2 + \frac{m+1}{2}\log\pi - \frac{1}{12}\Big) \\
&+ 2\Big(-\log\pi\frac{m}{2} + \frac{m(m+1)}{2}\log 2 - \frac{m}{2}\log(m+2) + \sum_{0\le n\le m, n\neq\frac{m}{2}}\log(n+1)!\Big) \\
&- \log\pi + (m+1)\log 2 + \log(\frac{m}{2}+1)! + \log(\frac{m}{2}+1)! - \log(m+2) \\
&= 4\zeta'_{\mathbb{Q}}(-1) + 2\log(m+1)! + \big(m+\frac{4}{3}\big)\log 2 - \frac{1}{6} - (m+1)\log(m+2) \\
&= 4\zeta'_{\mathbb{Q}}(-1) - \frac{1}{6} + \big(m+\frac{4}{3}\big)\log 2 - 2\log\frac{(m+2)^{\frac{m+1}{2}}}{(m+1)!}
\end{aligned}$$

2. **Si m est impair**. On rappelle que :

$$z_m(s) = 2\zeta_{\ge m+1} + 2\zeta_{0\le n\le[\frac{m}{2}]}(s).$$

Il suffit d'étudier la fonction

$$\zeta_{0\le n\le[\frac{m}{2}]}(s) = \sum_{0\le n\le[\frac{m}{2}]}\sum_{\lambda\in Z_n}\frac{1}{\lambda^{2s}},$$

et on vérifie que

$$\zeta_{0\le n\le[\frac{m}{2}]}(0) = -\frac{(m+1)(m+2)}{4},$$

et que

$$\zeta'_{0\le n\le[\frac{m}{2}]}(0) = -\frac{m+1}{2}\log\pi + \frac{(m+1)^2}{2}\log 2 - \frac{1}{2}\log\Big(\frac{(m+2)^{m+1}}{((m+1)!)^2}\Big) + \sum_{k=1}^{m}\log\Gamma(k+1).$$

Donc,

$$\begin{aligned}
z_m(0) &= 2\Big(\frac{1}{6} + \frac{m}{2} + \frac{m^2}{4} - \frac{m^2+3m+2}{4}\Big) \\
&= -\frac{2}{3} - \frac{m}{2},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
z'_m(0) &= 2\zeta'_{n\ge m+1} + 2\zeta'_{0\le n\le[\frac{m}{2}]}(0) \\
&= 4\zeta'_{\mathbb{Q}}(-1) + (\frac{4}{3}+m)\log 2 - \frac{1}{6} - \log\Big(\frac{(m+2)^{m+1}}{((m+1)!)^2}\Big).
\end{aligned}$$

On conclut que pour tout $m \geq 1$ on a :

$$\zeta_{\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)_\infty}}}(0) = z_m(0) = -\frac{2}{3} - \frac{m}{2},$$

et

$$\begin{aligned}
\zeta'_{\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)_\infty}}}(0) &= z'_m(0) + \log 4 z_m(0) \\
&= 4\zeta'_{\mathbb{Q}}(-1) - \frac{1}{6} - 2\log\frac{(m+2)^{\frac{m+1}{2}}}{(m+1)!} + (\frac{4}{3}+m)\log 2 - (\frac{4}{3}+m)\log 2 \\
&= 4\zeta'_{\mathbb{Q}}(-1) - \frac{1}{6} - \log h_{L^2,\infty,\infty} + (\frac{4}{3}+m)\log 2 - (\frac{4}{3}+m)\log 2, \quad \text{voir (2.5)} \\
&= 4\zeta'_{\mathbb{Q}}(-1) - \frac{1}{6} - \log h_{L^2,\infty,\infty},
\end{aligned}$$

qu'on écrit sous la forme

$$\zeta'_{\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)_\infty}}}(0) + \log h_{L^2,\infty,\infty} = 4\zeta'_{\mathbb{Q}}(-1) - \frac{1}{6}. \tag{2.37}$$

Par les notations et les calculs du paragraphe (2.2), on constate que

$$\zeta'_{\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)_\infty}}}(0) = T_g\Big(\overline{T\mathbb{P}^1}_\infty; \overline{\mathcal{O}(m)}_\infty\Big).$$

2.4 Annexe

2.4.1 Sur un calcul de classes de Bott-Chern

Soit X une variété analytique complexe. Pour tout p et q deux entiers positifs, on note par $A^{(p,q)}(X)$ l'ensemble des formes différentielles de degré (p,q) sur X, par $\widetilde{A}^{(p,p)}(X)$ le quotient de $A^{(p,p)}(X)$ par $\partial A^{(p-1,p)}(X) + \overline{\partial} A^{(p,p-1)}(X)$ et on pose

$$\widetilde{A}(X) = \oplus_{p\in\mathbb{N}} \widetilde{A}^{(p,p)}(X).$$

Si $\omega \in \widetilde{A}(X)$, on note pour tout $k \in \mathbb{N}$, $[\omega]^{(k)}$ l'élément de $\widetilde{A}^{(k,k)}(X)$ tel que $\omega = \sum_{k\in\mathbb{N}} [\omega]^{(k)}$.

A toute série formelle symétrique ϕ on peut associer une classe caractéristique encore notée ϕ et une classe secondaire de Bott-Chern $\widetilde{\phi}$ comme dans [GS90b, § 1]. Si $\phi(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k x^k$ est une série formelle en une seule variable x, on a pour tout fibré en droites holomorphe L,

$$\phi(L) = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k c_1(L)^k.$$

Soit $\overline{\mathcal{E}}$ une suite exacte de fibrés en droites hermitiens sur X :

$$\overline{\mathcal{E}} : 0 \longrightarrow (L, h_1) \longrightarrow (L, h_2) \longrightarrow 0,$$

et on note par $\widetilde{\phi}(L, h_1, h_2)$ la classe caractéristique associée. D'après [GS90b, Proposition 1.3.1], on a :

$$\widetilde{\phi}(L, h_1, h_2) = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k\, \widetilde{c}_1^k(L, h_1, h_2).$$

Donc, pour déterminer $\widetilde{\phi}(L, h_1, h_2)$, il suffit de calculer les $\widetilde{c}_1^k(L, h_1, h_2)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. C'est le but de la proposition suivante :

Proposition 2.4.1. *Soit X une variété analytique complexe et L un fibré en droites holomorphe sur X. Si L est muni de deux métriques hermitiennes de classes $\mathcal{C}^\infty$, h_1 et h_2, alors*

$$\widetilde{\mathrm{ch}}(L,h_1,h_2)=\sum_{k\geq 1}-\frac{1}{k!}\log\frac{h_2}{h_1}\Big(dd^c(-\log\frac{h_2}{h_1})\Big)^{k-1}\mathrm{ch}(L,h_1), \tag{2.38}$$

et

$$\widetilde{c_1^k}(L,h_1,h_2)=k!\big[\widetilde{\mathrm{ch}}(L,h_1,h_2)\big]^{(k)}, \tag{2.39}$$

dans $\widetilde{A}(X)$, où f est une fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur X définie localement par $-\log\frac{h_2(s,s)}{h_1(s,s)}$, avec s est une section holomorphe locale de L.

Démonstration. Soit L un fibré en droites holomorphe sur X qu'on munit de deux métriques hermitiennes h_1 et h_2 de classe C^∞. Si h est une autre métrique hermitienne C^∞ sur L, on a :

1. $\widetilde{\mathrm{ch}}(L,h,h)=0$, voir [GS90b, Théorème 1.2.2 (iii)],
2. $\widetilde{\mathrm{ch}}(L,h_1,h_2)=\widetilde{ch}(L,h_1,h)+\widetilde{\mathrm{ch}}(L,h,h_2)$ voir [GS90b, Corollaire 1.3.4],
3. $\widetilde{\mathrm{ch}}(L,h_1,h_2)=\widetilde{\mathrm{ch}}(\mathcal{O},h_1\otimes h_1^{-1},h_2\otimes h_1^{-1})\mathrm{ch}(L,h_1)$, , voir [GS90b, (1.3.5.2)].

Il suffit donc de déterminer $\widetilde{\mathrm{ch}}(\mathcal{O},h_1,h_2)$ avec h_1 est la métrique triviale et h_2 est $\mathcal{C}^\infty$ quelconque sur $\mathcal{O}$.

Sur $X\times\mathbb{P}^1$, on considère le fibré en droites trivial $\mathcal{O}$ muni de la métrique h_ρ définie par la fonction ρf, où f est la fonction qui définit la métrique h_2 (c.à.d $h_2(1,1)=e^f$) et ρ est l'image réciproque par la projection de $X\times\mathbb{P}^1$ sur $\mathbb{P}^1$ d'une fonction positive C^∞ sur $\mathbb{P}^1$ telle que $\rho(0)=1$ et $\rho(\infty)=0$.

Avec ces notations, on a d'après [GS90b] :

$$\widetilde{\mathrm{ch}}(\mathcal{O},h_1,h_2)=-\int_{\mathbb{P}^1}\mathrm{ch}(\mathcal{O},\tilde{h})\log|z|^2$$

dans $\widetilde{A}(X)$. On a

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}(\mathcal{O},\tilde{h})&=\mathrm{ch}\big(dd^c(\log\widetilde{h}(1,1))\\&=\mathrm{ch}\big(dd^c(\rho f)\big)\\&=\sum_{j\in\mathbb{N}}\frac{1}{j!}\big(dd^c(\rho f)\big)^j.\end{aligned}$$

Montrons que :

$$-\int_{\mathbb{P}^1}\mathrm{ch}(\mathcal{O},\tilde{h})\log|z|^2=\sum_{j\in\mathbb{N}}\frac{1}{j!}f(dd^cf)^j.$$

Dans $A(X\times\mathbb{P}^1)=A(X)\otimes A(\mathbb{P}^1)$, on a pour tout $j\in\mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\big(dd^c(\rho f)\big)^j&=\Big(f\,dd^c(\rho)+d^c\rho df+d\rho d^cf+\rho\,dd^cf\Big)^j\\&=\omega_1^j+j((dd^c\rho)f)\omega_1^{j-1}+0,\end{aligned}$$

où on a posé $\omega_1:=d^c\rho df+d\rho d^cf+\rho dd^cf$ et les autres termes sont nuls puisque $\big(dd^c\rho\big)^k=0$ pour $k\geq 2$. Par le même argument, on a

$$\begin{aligned}(f\,dd^c\rho)\omega_1^{j-1}&=f(dd^c\rho)\Big(d^c\rho\,df+d\rho\,d^cf+\rho dd^cf\Big)^{j-1}\\&=f(dd^c\rho)\Big(\rho^{j-1}(dd^cf)^{j-1}+\cdots\Big)\\&=f\rho^{j-1}dd^c\rho\,(dd^cf)^{j-1}+0\\&=(\rho^{j-1}dd^c\rho)f(dd^cf)^{j-1},\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\omega_1^j &= \Big(d^c\rho\, df + d\rho\, d^c f + \rho\, dd^c f\Big)^j \\ &= \rho^j (dd^c f)^j + j\rho^{j-1}(d^c\rho\, df + d\rho\, d^c f)(dd^c f)^{j-1} + j(j-1)\rho^{j-2}\big(d^c\rho df + d\rho d^c f\big)^2 (dd^c f)^{j-2} + 0 \\ &= \rho^j (dd^c f)^j + j(d^c\rho df + d\rho d^c f)(\rho^{j-1}(dd^c f)^{j-1}) - 2j(j-1)\rho^{j-2}(d\rho\, d^c\rho) d^c f\, df (dd^c f)^{j-2}.\end{aligned}$$

Si $\alpha \in A(X \times \mathbb{P}^1)$, on va noter par $\{\alpha\}$ la composante de α contenant $dz \wedge d^c z$ (où z une coordonnée locale sur $\mathbb{P}^1$). On a donc,

$$\{\omega_1^j\} = -2j(j-1)\rho^{j-2} d\rho\, d^c\rho\, d^c f\, df (dd^c f)^{j-2}.$$

Par suite,

$$\begin{aligned}\{(dd^c(\rho f))^j\} &= j(\rho^{j-1} dd^c\rho) f (dd^c f)^{j-1} - 2j(j-1)\rho^{j-2}(d\rho d^c\rho) d^c f df (dd^c f)^{j-2} \\ &= j\rho^{j-1} dd^c\rho\, f (dd^c f)^{j-1} + 2j(j-1)\rho^{j-1}\, d\rho\, d^c\rho \Big(d(f d^c f) - f dd^c f\Big)(dd^c f)^{j-2} \\ &= \rho^{j-1}\Big(j\, dd^c\rho - 2j(j-1) d\rho\, d^c\rho\Big) f (dd^c f)^{j-1} + 2j(j-1)\rho^{j-1}\, d\rho\, d^c\rho\, d(f d^c f)(dd^c f)^{j-2} \\ &= \alpha_j(z) f (dd^c f)^{j-1} + \beta_j(z) d(f d^c f)(dd^c f)^{j-2}\end{aligned}$$

avec $\alpha_j := \rho^{j-1}\Big(j\, dd^c\rho - 2j(j-1) d\rho\, d^c\rho\Big)$ et $\beta_j := 2j(j-1)\rho^{j-1}\, d\rho\, d^c\rho$ sont deux formes différentielle de degré maximal sur $\mathbb{P}^1$.

Donc, on a dans $\widetilde{A}(X)$,

$$\begin{aligned}\tilde{\mathrm{ch}}(\mathcal{O}, h_1, h_2) &= -\int_{\mathbb{P}^1} \mathrm{ch}(dd^c(\rho f)) \log|z|^2 \\ &= -\sum_{j\geq 1} \frac{1}{j!}\Big(\int_{\mathbb{P}^1} \alpha_j(z) \log|z|^2\Big) f (dd^c f)^{j-1} - \sum_{j\geq 1} \frac{1}{j!}\Big(\int_{\mathbb{P}^1} \beta_j(z) \log|z|^2\Big) d(f d^c f)(dd^c f)^{j-2} \\ &= \sum_{j\geq 1} \frac{1}{j!} f (dd^c f)^{j-1}.\end{aligned}$$

On a donc montré que :

$$\begin{aligned}\widetilde{ch}(L, h_1, h_2) &= \widetilde{ch}(\mathcal{O}, h_1 \otimes h_1^{-1}, h_2 \otimes h_1^{-1}) ch(L, h_1) \\ &= \sum_{j\geq 1} \frac{1}{j!}\Big(-\log\frac{h_2}{h_1}\Big)\Big(dd^c(-\log\frac{h_2}{h_1})\Big)^{j-1} ch(L, h_1).\end{aligned}$$

□

2.4.2 Un rappel sur la théorie des fonctions de Bessel

Dans cette introduction à la théorie des fonctions de Bessel, la principale référence est le chapitre 17 du [WW62]. On s'intéressera à une sous-classe de fonctions de Bessel à savoir les fonctions de Bessel d'ordre un entier.

Pour tout z fixé, la fonction

$$t \mapsto e^{\frac{1}{2}z(t-\frac{1}{t})}, \quad t \neq 0$$

admet un développement en une série de Laurent en t. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Par définition la fonction de Bessel d'ordre n est la fonction qui pour tout $z \in \mathbb{C}$ associe $J_n(z)$ le coefficient de t^n dans ce développement.

- J_n est une fonction analytique sur $\mathbb{C}$ telle que $J_{-n} = (-1)^n J_n$ et

$$J_n(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (\frac{1}{2}z)^{n+2r}}{\Gamma(r+1)\Gamma(n+r+1)} \quad \forall\, z \in \mathbb{C} \quad \text{si} \quad n \in \mathbb{N}.$$

- J_n est une solution de l'équation différentielle linéaire suivante :

$$\frac{d^2y}{d^2z} + \frac{1}{z}\frac{dy}{dz} + (1 - \frac{n^2}{z^2})y = 0$$

Relations de récurrence : On a pour tout $z \in \mathbb{C}$

- $$\frac{d}{dz}(z^{-n}J_n(z)) = -z^{-n}J_{n+1}(z), \tag{2.40}$$
- $$J_n'(z) = \frac{n}{z}J_n(z) - J_{n+1}(z), \tag{2.41}$$
- $$J_n'(z) = \frac{1}{2}(J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z)), \tag{2.42}$$
- $$J_n'(z) = J_{n-1}(z) - \frac{n}{z}J_n(z), \tag{2.43}$$
- $$\frac{d}{dz}(z^n J_n(z)) = z^n J_{n-1}(z), \tag{2.44}$$
- Les fonctions de Bessel modifiées d'ordre entier sont les fonctions I_n données par

$$I_n(z) := i^{-n}J_n(iz) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2}z)^{n+2r}}{\Gamma(r+1)\Gamma(n+r+1)} \quad \forall\, z \in \mathbb{C},$$

On a

- $$I_n(z) = \frac{1}{2^n\Gamma(n+1)}z^n + o(z^n), \quad |z| \ll 1, \tag{2.45}$$
- $$I_{n-1}(z) - I_{n+1}(z) = \frac{2n}{z}I_n(z), \tag{2.46}$$
- $$\frac{d}{dz}(z^n I_n(z)) = z^n I_{n-1}(z), \tag{2.47}$$
- $$\frac{d}{dz}(z^{-n}I_n(z)) = z^{-n}I_{n+1}(z), \tag{2.48}$$
- $$\frac{d^2I_n(z)}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dI_n(z)}{dz} - (1 + \frac{n^2}{z^2})I_n(z) = 0. \tag{2.49}$$
- $$I_n(z) = \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}\Big(1 - \frac{4n^2-1}{8z} + O(\frac{1}{z^2})\Big), \tag{2.50}$$

avec $(|\arg(z)| < \frac{\pi}{2})$, cf. [AS92, 9.7.1].

- $$I_n'(z) = \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}(1 - \frac{4n^2+3}{8z} + O(\frac{1}{z^2})), \tag{2.51}$$

avec $(|\arg(z)| < \frac{\pi}{2})$, cf. [AS92, 9.7.3].

- $$I_n(nz) = \frac{1}{(1+\eta_{k,1}(n,\infty))}\frac{e^{n\xi(z)}}{(2\pi n)^{\frac{1}{2}}(1+z^2)^{\frac{1}{4}}}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{n^i}U_i(z), \tag{2.52}$$

  $\forall z$ vérifiant $\arg(z) \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, $0 < \varepsilon \ll 1$, voir [Olv74, 7.18 p.378] ou [AS92, 9.7.7]. Une estimation d'erreur est donnée par la formule [Olv74, 7.14, p. 377].

- $$I_n'(nz) = \frac{(1+z^2)^{\frac{1}{4}}}{1+\eta_{2,1}(n,\infty)}\frac{e^{n\xi(z)}}{(2\pi n)^{\frac{1}{2}}z}\Big(1+\frac{1}{n}V_1+\frac{1}{n^2}(V_2-U_2)+\kappa_{2,1}(n,z)-\frac{z^2p^3}{2n}\eta_{2,1}(n,z)\Big), \tag{2.53}$$

  où
  $$V_1(z) = -\frac{3}{8}\frac{1}{(1+z^2)^{\frac{1}{2}}}+\frac{7}{24}\frac{1}{(1+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \tag{2.54}$$

  voir [AS92, 9.7.9] ou [Olv74, ex 7.2 p.378].

Chapitre 3

Sur la théorie spectrale des métriques intégrables sur une surface de Riemann compacte

Dans ce texte, on introduit une classe de métriques continues sur les fibrés en droites sur une surface de Riemann compacte qu'on appellera métriques 1-intégrables et on étend la théorie spectrale des opérateurs Laplaciens associés aux métriques de classe $\mathcal{C}^\infty$ à l'ensemble des fibrés en droites munis de ces métriques.

Comme application, on retrouve l'égalité suivante :

$$\zeta'_{\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}}(0) = T_g\big((\mathbb{P}^1, \omega_\infty); \overline{\mathcal{O}(m)}_\infty\big),$$

obtenue par des calculs directs dans [Hajb].

3.1 Introduction

3.1.1 Principaux résultats

En Géométrie d'Arakelov, developpée par Gillet-Soulé et Bismut, les métriques hermitiennes sont supposées de classe $\mathcal{C}^\infty$. Cela est nécessaire, par exemple, afin de définir les parties de nature spectrale entrant dans la formulation du théorème de Riemann Roch Arithmétique, voir [GS92]. Or, il s'avère que ces suppositions sont très restrictives. Un exemple de bonnes métriques, sont les métriques canoniques sur les variétés toriques qui sont continues mais pas nécessairement $\mathcal{C}^\infty$, voir [Zha95], [Mai00] pour la construction de ce genre de métriques.

Après une première approche due à Zhang, voir [Zha95]. Maillot introduit une Géométrie d'Arakelov qui tient en compte des métriques admissibles et intégrables, voir [Mai00]. Dans ce texte on complète cette théorie, au moins pour les surfaces de Riemann compactes, en construisant une théorie spectrale associée à ces métriques intégrables qui généralise la théorie classique. Ce qui nous permettra de définir une théorie de torsion analytique holomorphe dans ce cas.

Rappelons qu'un fibré en droites hermitien (E, h_E) sur une variété projective complexe non-singulière, est dit admissible si h_E est limite uniforme d'une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de métriques $\mathcal{C}^\infty$ et positives. On dit qu'il est intégrable si h_E est quotient de deux métriques admissibles, voir (3.7.1).

Soit (X, h_X) une surface de Riemann compacte où h_X est une métrique hermitienne continue. Au paragraphe (3.3.1), on rappelle la construction du Laplacien dans le cas classique agissant sur $A^{(0,0)}(X, E)$. Soit $\overline{E}_\infty = (E, h_{E,\infty})$ un fibré en droites intégrable sur X, nous montrons qu'on peut associer à $h_{E,\infty}$ un opérateur linéaire qui agit qui agit sur $A^{(0,0)}(X, E)$ et étend la notion de Laplacien pour les métriques $\mathcal{C}^\infty$. On l'appellera l'opérateur Laplacien associé à $h_{E,\infty}$ et on le note par $\Delta_{\overline{E}_\infty}$. Plus précisement, on établit le résulat suivant, voir (3.3.6) :

Théorème 3.1.1. *Soit (X, h_X) une surface de Riemann compacte avec h_X une métrique hermitienne continue. Soit $\overline{E}_\infty = (E, h_{E,\infty})$ un fibré en droites intégrable. On note par $\overline{A^{0,0}(X, E)}_\infty$ le complété de $A^{0,0}(X, E)$ pour la métrique L^2_∞ induite par h_X et $h_{E,\infty}$.*

Pour toute décomposition de $\overline{E}_\infty = \overline{E}_{1,\infty} \otimes \overline{E}^{-1}_{2,\infty}$ en fibrés admissibles $\overline{E}_{1,\infty}$ et $\overline{E}_{2,\infty}$, et pour tout choix de suites $(h_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ (resp. $(h_{2,n})_{n\in\mathbb{N}}$) de métriques positives $\mathcal{C}^\infty$ sur $\overline{E}_{1,\infty}$ (resp. sur $\overline{E}_{2,\infty}$) qui converge uniformément vers $h_{1,\infty}$ (resp. $h_{2,\infty}$), pour tout $\xi \in A^{0,0}(X, E)$, et si l'on pose $\overline{E}_n := \overline{E}_{1,n} \otimes \overline{E}^{-1}_{2,n}$. Alors la suite $(\Delta_{\overline{E}_n}\xi)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, pour la norme L^2_∞, lorsque $n \mapsto \infty$ vers une limite $\Delta_{\overline{E}_\infty}\xi$ dans $\overline{A^{0,0}(X, E)}_\infty$. Cette limite ne dépend par du choix de la décomposition ni de celui de la suite.

On a

1. *$\Delta_{\overline{E}_\infty}$ est un opérateur linéaire de $A^{0,0}(X, E)$ vers $\overline{A^{0,0}(X, E)}_\infty$.*
2.
$$\begin{aligned}(\Delta_{\overline{E}_\infty}(f \otimes \sigma), g \otimes \tau)_{L^2,\infty} &= (f \otimes \sigma, \Delta_{\overline{E}_\infty}(g \otimes \tau))_{L^2,\infty} \\ &= \frac{i}{2\pi}\int_X h_{E,\infty}(\sigma, \tau)\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\frac{\partial \overline{g}}{\partial z}\, dz \wedge d\overline{z}.\end{aligned} \tag{3.1}$$

   $\forall f, g \in A^{0,0}(X)$ et σ, τ deux sections locales holomorphes de E tels que $f \otimes \sigma$ et $g \otimes \tau$ soient dans $A^{(0,0)}(X, E)$. En particulier,
$$(\Delta_{\overline{E}_\infty}\xi, \xi')_{L^2,\infty} = (\xi, \Delta_{\overline{E}_\infty}\xi')_{L^2,\infty},$$
   $\forall \xi, \xi' \in A^{(0,0)}(X, E)$.
3.
$$(\Delta_{\overline{E}_\infty}\xi, \xi)_{L^2,\infty} \geq 0 \quad \forall\, \xi \in A^{0,0}(X, E).$$

Si l'on choisit convenablement $(h_n)_n$ une suite de métriques de classe $\mathcal{C}^\infty$ qui converge uniformément vers h_∞, alors nous sommes capables de relier $e^{-t\Delta_{\overline{E}_\infty}}$ à $(e^{-t\Delta_{\overline{E}_n}})_{n\in\mathbb{N}}$; la suite de noyaux de Chaleur associés à $(h_n)_n$. En fait, si $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les deux conditions suivantes :

1.
$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\left\| h_X\Big(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial z}\log\frac{h_{n+1}}{h_n}\right\|_{\sup} < \infty$$
   où $\{\frac{\partial}{\partial z}\}$ est une base locale de TX. Rappelons que $\left| h_X\Big(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial z}\log\frac{h_{n+1}}{h_n}\right|$ ne dépend pas du choix de la base locale.
2.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\|\frac{h_n}{h_{n-1}} - 1\right\|^{\frac{1}{2}}_{\sup} < \infty.$$

Alors, nous montrons le théorème suivant, voir (3.4.8) :

Théorème 3.1.2. *On a,*

$$\left(e^{-t\Delta_{\overline{E}_n}}\right)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow[n\mapsto\infty]{} e^{-t\Delta_{\overline{E}_\infty}}.$$

dans l'espace des opérateurs bornés sur le complété de $A^{(0,0)}(X,E)$ pour la métrique L^2_∞.

Après nous montrons que $\Delta_{\overline{E}_\infty}$ possède un spectre discret, infini et positif. L'étape suivante est l'étude de l'opérateur $P^\infty e^{-t\Delta_{L,\infty}}$, où P^∞ est la projection orthogonale à $\ker\Delta_{E,\infty}$ pour L^2_∞. Nous montrons qu'il est nucléaire, on peut alors introduire la fonction Thêta associée en posant :

$$\theta_\infty(t) := \mathrm{Tr}\big(P^\infty e^{-t\Delta_{E,\infty}}\big) \quad \forall\, t>0,$$

Nous montrons qu'on a convergence simple de :

$$\big(\theta_n(t)\big)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow[n\mapsto\infty]{} \theta_\infty(t) \quad \forall\, t>0,$$

où θ_n est la fonction Thêta associée à Δ_{E,h_n}.

Ces résultats sont regroupés dans le théorème suivant, voir (3.4.16) pour la preuve :

Théorème 3.1.3. *Pour tout $t>0$, $e^{-t\Delta_{E,\infty}}$ est un opérateur nucléaire. On a*

$$\lim_{u\mapsto\infty}\theta_u(t) = \theta_\infty(t).$$

La fonction Zêta ζ_∞ définit par :

$$\zeta_\infty(s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \theta_\infty(t)t^{s-1}dt,$$

est holomorphe sur $\mathrm{Re}(s)>1$ *et*

$$\zeta_\infty(s) = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\lambda^s_{\infty,k}} \quad \forall\, \mathrm{Re}(s)>1.$$

admet un prolongement analytique au voisinage de 0 et on a

$$\zeta'_\infty(0) = \lim_{u\mapsto\infty}\zeta'_u(0).$$

avec ζ_u est la fonction Zêta associée à $\Delta_{E,u}$.

On notera qu'afin de démontrer ce théorème on aura besoin d'une borne inférieure positive non nulle pour la suite $(\lambda_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}$, où $\lambda_{1,n}$ est la première valeur propre non nulle de $\Delta_{\overline{E}_n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. L'existence de cette borne sera déduit de la proposition suivante, qu'on établit dans (3.7.17) :

Proposition 3.1.4. *Soit (X,h_X) une surface de Riemann compacte et E un fibré en droites holomorphe. Soit $h_{E,\infty}$ une métrique hermitienne continue sur L. Soit $(h_n)_n$ une suite de métriques hermitiennes $\mathcal{C}^\infty$ sur L qui converge uniformément vers h_∞. Alors il existe une constante $\alpha\neq 0$ telle que*

$$\alpha \le \frac{\lambda_{1,q}}{\lambda_{1,p}} \le \frac{1}{\alpha}, \quad \forall\, 1\ll p\le q.$$

On termine par montrer que la suite des métriques de Quillen $(\|\cdot\|_{Q,h_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite et que cette dernière est représentée par la métrique $\|\cdot\|_{Q,h_\infty} = \|\cdot\|_{L^2,\infty}\exp(\zeta'_\infty(0))$.

3.1.2 Organisation de l'article

Dans le chapitre (3.2), nous introduisons la notion de métrique 1-intégrable. On considère alors la définition suivante :

Définition 3.1.5. *Soit (X, ω) une surface de Riemann compacte et ω_X une forme de Kähler. Soit $\overline{E} = (E, h_\infty)$ un fibré en droites intégrable sur X.*

On dit que (E, h_∞) est 1-intégrable s'il existe une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de métriques de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur E qui converge uniformément vers h_∞ vérifiant que :

1. *Il existe $\overline{E}_1$ et $\overline{E}_2$ deux fibrés en droites admissibles tels que $\overline{E} = \overline{E}_1 \otimes \overline{E}_2^{-1}$ et deux suites $(h_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(h_{2,n})_{n\in\mathbb{N}}$ de métriques positives de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur E_1 respectivement sur E_2 telles que $(h_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ respectivement $(h_{2,n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $h_{1,\infty}$ respectivement vers $h_{2,\infty}$ et que*
$$h_n = h_{1,n} \otimes h_{2,n}^{-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$
ou il existe h', une métrique positive de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $h_n \otimes h'$ est positive, $\forall n \in \mathbb{N}$.
2. $$\sum_{n=1}^{\infty} \Big\| \frac{h_n}{h_{n-1}} - 1 \Big\|_{\sup}^{\frac{1}{2}} < \infty,$$
3. $$\sup_{n\in\mathbb{N}_{\geq 1}} \Big\| h_X\Big(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial z} \log \frac{h_n}{h_{n-1}} \Big\|_{\sup} < \infty. \tag{3.2}$$

Les principaux résultats du chapitre (3.2) concernant cette nouvelle notion de métriques sont les théorèmes (3.2.5) et (3.2.12). Nous commençons tout d'abord par remarquer que
$$\Big(\Big| h_X\Big(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial z} \log \frac{h_n}{h_{n-1}} \Big| \Big)_{n\in\mathbb{N}}$$
est une suite de fonctions bien définies sur X et qu'elle est L^2-bornée. On notera à l'aide d'exemples que la convergence uniforme n'est pas suffisante pour garantir (3.2). Nous établissons que toute métrique continue avec des conditions de régularités faibles sur un fibré en droites sur une surface de Riemann compacte X est intégrable, c'est l'objet du théorème (3.2.5) ; L'idée clé est le fait que toute métrique positive est admissible.

Dans la proposition (3.2.8), on y trouve une large classe d'exemples de suites de métriques sur $\mathcal{O}(m)$ sur $\mathbb{P}^1$ vérifiant (3.2) et on notera qu'on peut avoir aussi $\lim_{n\in\mathbb{N}} \Big\| h_X\Big(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial z} \log \frac{h_n}{h_{n-1}} \Big\|_{\sup} = 0$.

Afin de répondre, partiellement, à la question (3.2), on se restreint à la classe des métriques intégrables invariantes par l'action de $\mathbb{S}^1$, par exemple les métriques canoniques sur $\mathbb{P}^1$. Notons que les résultats énoncés ici, sont tous vérifiés par les métriques canoniques sur $\mathbb{P}^1$. Dans la proposition (3.2.11), on s'intéresse à des métriques d'origine dynamique. L'observation des différents exemples nous amène à introduire la classe des métriques intégrables invariantes par $\mathbb{S}^1$ qui sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{P}^1 \setminus S$ où S est un compact de $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, \infty\}$, par exemple la métrique $\frac{|\cdot|}{\max(|x_0|,|x_1|)}$ est intégrable, invariante par $\mathbb{S}^1$ et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{P}^1 \setminus \{|z| = 1\}$. Le principal résultat de ce paragraphe est le théorème (3.2.12), où on montre que (3.2) est vérifiée si h_∞ est intégrable, invariante par $\mathbb{S}^1$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{P}^1 \setminus S$ avec S un compact de $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, \infty\}$.

D'après le théorème (3.2.12), il est naturel d'introduire la définition suivante : Soit X une surface de Riemann compacte et $h_{E,\infty}$ une métrique admissible sur E, un fibré en droites sur X. On dit que

$h_{E,\infty}$ est "1-admissible" s'il existe une suite de métriques positives de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur L qui converge uniformément vers $h_{E,\infty}$ telle que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}^*}\left\| h\Big(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial z}\log\frac{h_n}{h_{n-1}}\right\|_{\sup}<\infty,$$

(où $\{\frac{\partial}{\partial z}\}$ est une base holomorphe locale de TX) et

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\|\frac{h_n}{h_{n-1}}-1\right\|^{\frac{1}{2}}<\infty.$$

et plus généralement, $h_{E,\infty}$ sera dite "1-intégrable" s'il existe $h_{1,\infty}$ et $h_{2,\infty}$ deux métriques "1-admissibles" telles que

$$h_{E,\infty}=h_{1,\infty}\otimes h_{2,\infty}^{-1}.$$

Avec les notations de la définition (3.2.13), on montre qu'il existe des métriques 1-intégrables continues mais non $\mathcal{C}^\infty$, c'est l'objet du théorème (3.2.15). Notons que nos résultats s'étendent à toute métrique ayant cette propriété.

Remarquons que (3.2.5), nous fournit une large classe d'exemples d'application pour la théorie développée dans le texte.

Les paragraphes (3.3.2) et (3.3.3) sont consacrés à l'extension de la notion du Laplacien généralisé aux cas des métriques intégrables sur les fibrés en droites holomorphes sur une surface de Riemann compacte. On propose deux approches différentes, dans la première nous montrons que pour tout choix $(h_n)_n$ de suites de métriques positives $\mathcal{C}^\infty$ qui converge uniformément vers une métrique admissible h_∞, la suite d'opérateurs Δ_{E,h_n} converge fortement pour la métrique L^2 vers un opérateur qu'on notera par $\Delta_{\overline{E}_\infty}$, voir le théorème (3.3.6). Lorsque $X=\mathbb{P}^1$, le théorème (3.3.16) décrit la deuxième approche qui consiste à définir directement l'opérateur Δ_{E,h_∞} par une formule qui étend l'expression locale du Laplacien dans le cas $\mathcal{C}^\infty$ en montrant que le coefficients de ce dernier ont encore un sens dans le cas de $h_{E,\infty}$.

On termine, par prouver que les deux approches définissent le même opérateur, qu'on appellera le Laplacien associé à $h_{E,\infty}$.

Dans le chapitre (3.5), on étudie la variation de la métrique sur TX. On considère une métrique intégrable sur TX, qu'on lui associe un opérateur Laplacien noté $\Delta_{X,\infty}$. on montre qu'il admet un noyau de chaleur $e^{-t\Delta_{X,\infty}}$ qui peut être approché par une suite de noyaus de chaleur $\left(e^{-t\Delta_{X,n}}\right)_n$ de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Le (3.6) constitue une annexe regroupant quelques résultats techniques utiles, on y trouve un rappel sur les opérateurs bornés, compacts et nucléaires sur un espace de Hilbert. En combinant plusieurs résultats on établit dans (3.4), que

$$e^{-t\Delta_{E,h_\infty}},\quad t>0$$

est un opérateur nucléaire, en d'autres termes nous établissons que

$$\theta_\infty(t):=\sum_{k\geq 1}e^{-t\lambda_{\infty,k}}<\infty$$

où $\{\lambda_{\infty,k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ sont les valeurs propres de Δ_{E,h_∞} comptées avec multiplicités. Si l'on note par

$$\zeta_\infty(s)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}\theta_\infty(t)dt,\quad s\in\mathbb{C},$$

alors nous montrons notre principal résultat de ce paragraphe :

$$\lim_{n\in\mathbb{N}} \zeta_n'(0) = \zeta_\infty'(0)$$

est la limite est finie.

Cela explique nos précédents calculs et le fait que

$$T_g((\mathbb{P}^1, \omega_\infty); \overline{\mathcal{O}(m)}_\infty) = \zeta'_{\Delta_{\overline{\mathcal{O}(m)}_\infty}}(0)$$

où le terme à gauche est obtenu comme limite de $\zeta_n'(0)$.

L'appendice (3.7) regroupe quelques lemmes et résultats qui seront utilisés tout au long de cet article, par exemple on établit un lemme technique qui nous permet de construire à partir d'une famille discrète ou une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de métriques hermitiennes, une famille à paramètre continu $u \in [1, \infty[$ qui interpole $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aux points entiers et qui varie de façon $\mathcal{C}^\infty$ en fonction u. Ce lemme sera utilisé pour étudier en particulier la variation des $e^{-t\Delta_{L,h_n}}$ en fonction de n en utilisant la formule de Duhamel pour $\frac{\partial}{\partial u} e^{-t\Delta_u}$.

3.2 Sur les métriques intégrables sur $\mathbb{P}^1$

Dans ce paragraphe, on s'intéresse au problème suivant : Etant donnée une métrique h_∞ admissible, plus généralement intégrable (voir (3.7.1) pour la définition), existe-il une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de métriques hermitiennes positives de classe $\mathcal{C}^\infty$ qui converge uniformément vers h_∞ telle que :

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \Big\| h_X(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z})^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial z} \log \frac{h_n}{h_{n-1}} \Big\|_{\sup} < \infty \tag{3.3}$$

Si l'on fixe une métrique L^2 sur $A^{0,0}(\mathbb{P}^1)$, alors la suite $\Big(\Big| h_X(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z})^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial z} \log \frac{h_n}{h_{n-1}} \Big| \Big)_{n\in\mathbb{N}}$ est L^2-bornée, en effet on a

$$\begin{aligned}
\Big\| h_X(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z})^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial z} \log \frac{h_n}{h_{n-1}} \Big\|_{L^2}^2 &= \int_X \Big| h_X(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z})^{\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial z} (\log \frac{h_n}{h_{n-1}}) \Big|^2 \omega_X \\
&= \int_X \Big| \frac{\partial}{\partial z} (\log \frac{h_n}{h_{n-1}}) \Big|^2 \omega_X \\
&= \int_X \log \frac{h_n}{h_{n-1}} (c_1(L, h_n) - c_1(L, h_{n-1})) \\
&\leq \int_X \log \frac{h_n}{h_{n-1}} c_1(L, h_n) + \int_X \log \frac{h_n}{h_{n-1}} c_1(L, h_{n-1}) \\
&\leq 2\deg(L) \Big\| \log \frac{h_n}{h_{n-1}} \Big\|_{\sup}.
\end{aligned}$$

(on a utilisé la positivité de $c_1(L, h_n)$).

On remarque qu'en général, le fait que $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers h_∞ n'implique pas nécessairement la propriété (3.3), en effet, si l'on considère par exemple le polynôme $P(z) = z^2 - 2$, et on pose h_n la métrique hermitienne sur $\mathcal{O}(1)$, définie comme suit :

$$\| \cdot \|_n := \frac{| \cdot |}{(1 + |P^{(n)}(z)|^2)^{\frac{1}{2^{n+1}}}} \text{ [1]}$$

1. où $P^{(n+1)}(z) = P(P^{(n)}(z))$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

alors on montrera que $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de métriques hermitiennes positives de classe $\mathcal{C}^\infty$ qui converge uniformément vers une métrique continue qu'on note par h_∞ cf. [Zha95]. Mais, comme

$$\frac{\partial}{\partial z}\log h_n(z) = \frac{1}{2^n}\frac{(\frac{\partial}{\partial z}P^{(n)}(z))\overline{P^{(n)}(z)}}{1+|P^{(n)}(z)|^2} = \frac{(\prod_{k=0}^{n-1}P^{(k)}(z))\overline{P^{(n)}(z)}}{1+|P^{(n)}(z)|^2}$$

et puisque $P(2)=2$, alors

$$\frac{\partial}{\partial z}\log h_n(2) = \frac{2^{n+1}}{5}.$$

Par suite,

$$\Big|h_\infty(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z})^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial z}\log\frac{h_n}{h_{n-1}}\Big|(2) = \frac{4}{5}2^n \quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Il est naturel de s'intéresser aux métriques intégrables singulières, puisqu'on les métriques qui sont $\mathcal{C}^\infty$ vérifient automatiquement la question ci-dessus. On commence par étudier une classe de métriques associées à des systèmes dynamique sur $\mathbb{P}^1$, on montrera que se sont des métriques intégrables singulières plus précisément on va montrer qu'elles sont toujours de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{P}^1\setminus S$, où S est un compact de $\mathbb{C}$. On en déduira des exemples de métriques vérifiant la condition ci-dessus.

Plus généralement, on démontrera que toute métrique intégrable invariante par l'action de $\mathbb{S}^1$ et qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{P}^1\setminus S$ où S est un compact de $\mathbb{C}^*$, par exemple les métriques canoniques sur les fibrés en droites sur $\mathbb{P}^1$, vérifient la propriété (3.3).

On note par $\mathcal{S}$ l'ensemble des compacts de $\mathbb{P}^1\setminus\{0,\infty\}$, notons que cet ensemble est stable par union finie. Si h_1 (resp. h_2) une métriques continue de classe $\mathcal{C}^\infty$ en dehors S_1 (resp. S_2) avec $S_1,S_2\in\mathcal{S}$ alors $h_1\otimes h_2$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{P}^1\setminus(S_1\cup S_2)$.

Définition 3.2.1. *On note par $\widehat{\mathrm{Pic}}_{int,\mathcal{S}}(\mathbb{P}^1)$ le sous-groupe de $\widehat{\mathrm{Pic}}_{int}(\mathbb{P}^1)$ formé des classes d'isomorphie isométrique des fibrés hermitiens intégrables $\overline{L}=(L,h)$ sur $\mathbb{P}^1$ tels que h soit de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{P}^1\setminus S$ où $S\in\mathcal{S}$.*

$\widehat{\mathrm{Pic}}_{int,\mathcal{S},0}(\mathbb{P}^1)$ le sous-groupe de $\widehat{\mathrm{Pic}}_{int}(\mathbb{P}^1)$ engendré par les métriques de classes $\mathcal{C}^\infty$ et les métriques radiales intégrables qui sont $\mathcal{C}^\infty$ sur le complémentaire d'un élement de $\mathcal{S}$.

On note que $\widehat{\mathrm{Pic}}(\mathbb{P}^1)$ est un sous-groupe de $\widehat{\mathrm{Pic}}_{int,\mathcal{S},0}(\mathbb{P}^1)$

Aussi, on définit $\widehat{CH}^2_{int,\mathcal{S}}(\mathbb{P}^1)$ comme étant le sous-groupe de $\widehat{CH}^2_{int}(\mathbb{P}^1)$ engendré par les éléments de la forme $\alpha\cdot\widehat{c}_1(\overline{L})^q$, où $\alpha\in\widehat{CH}^{2-q}(\mathbb{P}^1)$.

On rappelle le lemme suivant qui sera utile dans la suite :

Lemme 3.2.2. *Soit $[a,b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions réelles convexes différentiables sur $[a,b]$. On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction f sur $[a,b]$, alors pour tout $[\alpha,\beta]\subset]a,b[$ il existe une constante c telle que*

$$|f_n'(x)|\le c, \quad \forall x\in[\alpha,\beta] \quad \forall\, n\in\mathbb{N}.$$

Démonstration. C'est un résultat classique. □

Proposition 3.2.3. *Soit X une variété complexe projective et L un fibré en droites ample sur X. Toute métrique positive sur L est admissible.*

Démonstration. Voir [Mai00, Théorème 4.6.1]. □

Proposition 3.2.4. *Soit X une variété complexe de dimension d et $A \subset X$ un ouvert relativement compact tel que $\overline{A}$ soit une sous-variété réelle à coins de X. Soient f et g deux formes différentielles de classes $\mathcal{C}^2$ au voisinage de $\overline{A}$ de bidegrés (p,p) et (q,q) telles que $p+q=d-1$. On a :*

$$\int_A (f dd^c g - g dd^c f) = \int_{\partial A} (f d^c g - g d^c f)$$

Démonstration. Voir par exemple [Dem]. □

Théorème 3.2.5. *Soit X une surface de Riemann compacte. Soient $A_1 \subsetneq A_2 \subsetneq \ldots \subsetneq A_m \subset X$ m ouverts non vide relativement compacts tels que $\overline{A_1}, \ldots, \overline{A_m}$ soient des sous-variétés réelles à coins de X.*

Soit g une fonction réelle continue sur X. On suppose que pour tout $i \geq 1$, il existe une fonction g_i de classe $\mathcal{C}^2$ sur un voisinage ouvert de $\overline{A_i} \setminus A_{i-1}$, on prend $A_0 = \emptyset$, telles que

$$g_{|\overline{A_i}\setminus A_{i-1}} = g_{i|\overline{A_i}\setminus A_{i-1}} \quad \forall i \geq 1,$$

et

$$d^c g_i = d^c g_{i-1} \quad \text{sur } \partial A_i, \quad \forall i \geq 2.$$

Soit L un fibré en droites sur X et h' une métrique hermitienne de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur L alors la métrique suivante :

$$h_g = h' \exp(g)$$

est intégrable.

Démonstration. Soit $A^{0,0}(X)_+$ le sous-ensemble de $A^{0,0}(X)$ des fonctions positives. On choisit un plongement de X dans un espace projectif et note par $(\mathcal{O}(1)_{|X}, h_{FS})$ la restriction à X de $\overline{\mathcal{O}(1)_{FS}}$ par ce plongement, c'est un fibré en droites strictement positif sur X. Pour montrer la proposition il suffit de montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que le courant

$$dd^c(-\log(h_{FS}^N \otimes h_g)) \geq 0.$$

Comme h' est $\mathcal{C}^\infty$ donc, elle est intégrable, alors il suffit de montrer que la fonctionnelle

$$\varphi \in A^{0,0}(X)_+ \setminus \{0\} \longrightarrow \frac{\left|\int_X g dd^c \varphi\right|}{\int_X \varphi \omega_X},$$

est bornée, où ω_X est une forme volume de classe $\mathcal{C}^\infty$.
On a

$$\begin{aligned}
\int_X g dd^c \varphi &= \sum_{i=1}^m \int_{\overline{A_i}\setminus A_{i-1}} g dd^c \varphi \\
&= \sum_{i=1}^m \int_{\overline{A_i}\setminus A_{i-1}} g_i dd^c \varphi \\
&= \sum_{i=1}^m \int_{\overline{A_i}\setminus A_{i-1}} dd^c g_i \varphi + \int_{\partial \overline{A_i}} (g_i d^c \varphi - \varphi d^c g_i) - \int_{\partial \overline{A_{i-1}}} (g_i d^c \varphi - \varphi d^c g_i) \qquad (3.2.4) \\
&= \sum_{i=1}^m \int_{\overline{A_i}\setminus A_{i-1}} dd^c g_i \varphi + \sum_{i=1}^m \int_{\partial A_i} (g_i - g_{i+1}) d^c \varphi + \int_{\partial A_i} \varphi (d^c g_i - d^c g_{i+1}) \\
&= \sum_{i=1}^m \int_{\overline{A_i}\setminus A_{i-1}} dd^c g_i \varphi
\end{aligned}$$

Soit z une coordonnée holomorphe locale et soit θ un difféomorphisme holomorphe au voisinage de z. Si l'on pose $y := \theta(z)$, alors :

$$h_X\Big(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-1} \frac{\partial^2 g}{\partial z \partial \overline{z}} = h_X\Big(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}\Big)^{-1} \frac{\partial^2 \widetilde{g}}{\partial y \partial \overline{y}},$$

où $\{\frac{\partial}{\partial z}\}$ est une base locale de TX, $\frac{\partial}{\partial y} = \theta_* \frac{\partial}{\partial z}$ et $\widetilde{g}(y) = g(\theta^{-1} y)$.

Par hypothèse sur g et d'après la règle de changement de variables précédente, on a

$$h_X\Big(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-1} \frac{\partial^2 g}{\partial z \partial \overline{z}},$$

est bornée, sur chaque carte de X. Comme X est compacte, alors on conclut qu'il existe deux constantes c, c' telles que

$$c \int_X \varphi\, \omega_X \leq \int_X dd^c g\, \varphi \leq c' \int_X \varphi\, \omega_X \quad \forall\, \varphi \in A^{0,0}(X)_+.$$

Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$N c_1(\overline{\mathcal{O}(1)_{FS}}_{|X}) + c\, \omega_X \geq 0.$$

Par conséquent

$$\int_X N \varphi c_1(\mathcal{O}(1)_{FS_{|X}}) + \log h_g(s,s) dd^c \varphi \geq \int_X \varphi (N c_1(\mathcal{O}(1)_{FS_{|X}}) + c\, \omega_X) \geq 0.$$

On conclut que

$$h_{FS}^{\otimes N} \otimes h_g,$$

est positive, donc admissible par (3.2.3). □

Remarque 3.2.6. Si l'on pose

$$g = \log \frac{h_\infty}{h_{FS}},$$

où h_∞ est la métrique canonique de $\mathcal{O}(1)$, alors g est un exemple de fonctions vérifiant les hypothèses de la proposition.

Remarque 3.2.7. (3.2.5) peut être étendu en dimension supérieure.

Proposition 3.2.8. *Soit m un entier positif non nul. Sur $\mathbb{P}^1$, on munit le fibré en droites $\mathcal{O}(m)$ de la métrique suivante :*

$$h_{\chi,p}(\cdot,\cdot)([x_0 : x_1]) := \frac{|\cdot|^2}{\big(|x_0|^{\chi(p)} + |x_1|^{\chi(p)}\big)^{\frac{m}{\chi(p)}}} \quad \forall\, [x_0 : x_1] \in \mathbb{P}^1,$$

où χ est une fonction réelle croissante définie sur $\mathbb{R}^+$ telle que $\chi(p) \in \mathbb{N}^*$, si $p \in \mathbb{N}^*$. Alors, il existe une constante c_0 telle que

$$\Big\| \frac{h_{\chi,p}}{h_{\chi,p-1}} - 1 \Big\|_{\sup} \leq c_0 \Big(\frac{1}{\chi(p-1)} - \frac{1}{\chi(p)} \Big) \quad \forall\, p \in \mathbb{N}_{\geq 1}. \tag{3.4}$$

En particulier, $(h_{\chi,p})_p$ converge uniformément vers h_∞ ; la métrique canonique de $\mathcal{O}(m)$, et il existe c_1 et c_2 deux constantes non nulles telles que

$$c_1 \Big| 1 - \frac{\chi(p-1)}{\chi(p)} \Big| \leq \Big\| h(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z})^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial z} \log \frac{h_{\chi,p}}{h_{\chi,p-1}} \Big\|_{\sup} \leq c_2 \log \Big(\frac{\chi(p)}{\chi(p-1)} \Big) \quad \forall\, p \in \mathbb{N}_{\geq 1}.$$

Démonstration. Soit $x > 0$, on a

$$\frac{d}{dt}(1+x^{\chi(t)})^{-\frac{1}{\chi(t)}} = \frac{\chi'(t)}{\chi(t)^2}\Big(\frac{\log(1+x^{\chi(t)})}{(1+x^{\chi(t)})^{\frac{1}{\chi(t)}}} - \frac{x^{\chi(t)}\log x^{\chi(t)}}{(1+x^{\chi(t)})^{1+\frac{1}{\chi(t)}}}\Big).$$

Lorsque $0 < x < 1$, on montre que

$$\frac{d}{dt}(1+x^{\chi(t)})^{-\frac{1}{\chi(t)}} \leq (2\log 2 + e^{-1})\frac{\chi'(t)}{\chi(t)^2}.$$

donc, $\forall p \in \mathbb{N}_{\geq 1}$

$$\begin{aligned}\Big|(1+x^{\chi(p)})^{-\frac{1}{\chi(p)}} - (1+x^{\chi(p-1)})^{-\frac{1}{\chi(p-1)}}\Big| &= \Big|\int_{p-1}^{p}\frac{\chi'(t)}{\chi(t)^2}\Big(\frac{\log(1+x^{\chi(t)})}{(1+x^{\chi(t)})^{\frac{1}{\chi(t)}}} - \frac{x^{\chi(t)}\log x^{\chi(t)}}{(1+x^{\chi(t)})^{1+\frac{1}{\chi(t)}}}\Big)dt\Big| \\ &\leq (2\log 2 + e^{-1})\int_{p-1}^{p}\frac{\chi'(t)}{\chi(t)^2}dt \\ &= (2\log 2 + e^{-1})\Big(\frac{1}{\chi(p-1)} - \frac{1}{\chi(p)}\Big).\end{aligned}$$

On obtient alors, pour tout $|z| \leq 1$:

$$\begin{aligned}\Big|\frac{h_{\chi,p}}{h_{\chi,p-1}}(z) - 1\Big| &= \frac{(1+|z|^{\chi(p)})^{\frac{m-1}{\chi(p)}}}{(1+|z|^{\chi(p-1)})^{\frac{m-1}{\chi(p-1)}}}\frac{(1+|z|^{\chi(p)})^{\frac{1}{\chi(p)}}}{(1+|z|^{\chi(p-1)})^{\frac{1}{\chi(p-1)}}} \\ &\leq 2^m\frac{(1+|z|^{\chi(p)})^{\frac{1}{\chi(p)}}}{(1+|z|^{\chi(p-1)})^{\frac{1}{\chi(p-1)}}} \\ &\leq 2^m(2\log 2 + e^{-1})\Big(\frac{1}{\chi(p-1)} - \frac{1}{\chi(p)}\Big)(1+|z|^{\chi(p-1)})^{\frac{1}{\chi(p-1)}} \\ &\leq 2^m 2^{\frac{1}{\chi(p-1)}}(2\log 2 + e^{-1})\Big(\frac{1}{\chi(p-1)} - \frac{1}{\chi(p)}\Big).\end{aligned}$$

Si $|z| > 1$, il suffit de remarquer que $\frac{h_{\chi,p}}{h_{\chi,p-1}}(z) = \frac{h_{\chi,p}}{h_{\chi,p-1}}(\frac{1}{z})$ et de se ramener au cas précédent. On déduit que $(h_{\chi,p})_p$ converge uniformément vers une limite qui n'est autre que h_∞ ; la métrique canonique de $\mathcal{O}(m)$.

On a pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\max(1,|z|)^2\frac{\partial}{\partial z}\log\frac{h_{\chi,p}}{h_{\chi,p-1}}(z) = m\max(1,|z|^2)\frac{1}{z}\Big(\frac{|z|^{\chi(p)}}{1+|z|^{\chi(p)}} - \frac{|z|^{\chi(p-1)}}{1+|z|^{\chi(p-1)}}\Big).$$

Notons que cette quantité est bien définie en $z = 0$, puisque $\chi(k) \geq 1, \forall k \in \mathbb{N}$.

On voit que

$$\Big|\max(1,|z|)^2\frac{\partial}{\partial z}\log\frac{h_{\chi,p}}{h_{\chi,p-1}}(z)\Big| = m\max(1,|z|^2)\frac{1}{z}\Big|\frac{|z|^{\chi(p)}}{1+|z|^{\chi(p)}} - \frac{|z|^{\chi(p-1)}}{1+|z|^{\chi(p-1)}}\Big| \leq 2m \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Montrons qu'il existe deux constantes c_1 et c_2 telles que

$$c_1\Big|1 - \frac{\chi(p-1)}{\chi(p)}\Big| \leq \Big\|h(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z})^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial z}\log\frac{h_{\chi,p}}{h_{\chi,p-1}}\Big\|_{\sup} \leq c\log\Big(\frac{\chi(p)}{\chi(p-1)}\Big) \quad \forall p \in \mathbb{N}_{\geq 1}. \tag{3.5}$$

Pour montrer l'inégalité à droite, cela il suffit de montrer que pour tout $x \in]0,1[$, on a

$$\left|\frac{1}{1+x^{\chi(p)}} - \frac{1}{1+x^{\chi(p-1)}}\right| \leq c_2 x \log\Big(\frac{\chi(p)}{\chi(p-1)}\Big).$$

Fixons x dans $]0,1[$. On a, $\forall p \in \mathbb{N}_{\geq 1}$

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{1+x^{\chi(p)}} - \frac{1}{1+x^{\chi(p-1)}}\right| &= \left|\int_{p-1}^{p} \frac{\chi'(t)}{\chi(t)} \frac{x^{\chi(t)} \log x^{\chi(t)}}{(1+x^{\chi(t)})^2} dt\right| \\ &\leq c_2 x \int_{p-1}^{p} \frac{\chi'(t)}{\chi(t)} dt, \quad c_2 := \sup_{y\in[0,1],\, t>0} \frac{y^{\chi(t)-1}|\log y^{\chi(t)}|}{(1+y^{\chi(t)})^2} \\ &= c_2 x \log \frac{\chi(p)}{\chi(p-1)}.\end{aligned}$$

Montrons maintenant l'inégalité à gauche. On a, pour tout $x \in]0,1[$:

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{1+x^{\frac{\chi(p-1)}{\chi(p)}}} - \frac{1}{1+x}\right| &= \frac{\left|x - x^{\frac{\chi(p-1)}{\chi(p)}}\right|}{(1+x)(1+x^{\frac{\chi(p-1)}{\chi(p)}})} \\ &\geq \frac{1}{4}\left|x - x^{\frac{\chi(p-1)}{\chi(p)}}\right| \\ &= \left|1 - \frac{\chi(p-1)}{\chi(p)}\right| |\log x|\, x^{c_p} \quad \text{où} \quad c_p \in \Big]\frac{\chi(p-1)}{\chi(p)}, 1\Big[\\ &\geq \left|1 - \frac{\chi(p-1)}{\chi(p)}\right| |\log x|\, x,\end{aligned}$$

(le c_p résulte de l'utilisation du théorème des accroissements finis) par suite

$$\begin{aligned}\left\|h(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z})^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial z} \log \frac{h_{\chi,p}}{h_{\chi,p-1}}\right\|_{\sup} &\geq \sup_{|z|\leq 1}\left|h(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z})^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial z} \log \frac{h_{\chi,p}}{h_{\chi,p-1}}(z)\right| \\ &= \sup_{0<x\leq 1} \frac{m}{x}\left|\frac{1}{1+x^{\chi(p)}} - \frac{1}{1+x^{\chi(p-1)}}\right| \\ &\geq m \sup_{0<x\leq 1}\left|\frac{1}{1+x^{\frac{\chi(p-1)}{\chi(p)}}} - \frac{1}{1+x}\right| \\ &\geq m \sup_{0<x\leq 1}\left|1 - \frac{\chi(p-1)}{\chi(p)}\right| |\log x| x \\ &= e^{-1} m \left|1 - \frac{\chi(p-1)}{\chi(p)}\right|.\end{aligned}$$

Si l'on pose

$$l := \limsup_{p\mapsto\infty} \frac{\chi(p-1)}{\chi(p)}.$$

alors

$$\limsup_{p\mapsto\infty}\left\|h(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z})^{\frac{1}{2}} \log \frac{h_{\chi,p}}{h_{\chi,p-1}}\right\|_{\sup} \neq 0.$$

si $l < 1$, (par exemple, $\chi(p) = 2^p$). En effet, on a pour tout z fixé :

$$\limsup_{p\mapsto\infty} \frac{1}{|z|^{\frac{1}{\chi(p)}}}\Big(\frac{1}{1+(|z|^{\frac{1}{\chi(p)}})^{\chi(p)}} - \frac{1}{1+(|z|^{\frac{1}{\chi(p)}})^{\chi(p-1)}}\Big) = \frac{1}{1+|z|} - \frac{1}{1+|z|^l}.$$

Si $l = 1$, alors de (3.5), on déduit que

$$\limsup_{p\mapsto\infty}\Big\|h(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z})^{\frac{1}{2}}\log\frac{h_{\chi,p}}{h_{\chi,p-1}}\Big\|_{\sup}=0.$$

□

Remarque 3.2.9. $\limsup_{p\mapsto\infty}\Big\|h(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z})^{\frac{1}{2}}\log\frac{h_{\chi,p}}{h_{\chi,p-1}}\Big\|_{\sup}\neq 0$, si $\limsup_{p\mapsto\infty}\frac{\chi(p-1)}{\chi(p)}\neq 1$ par exemple pour $\chi(p)=2^p$, et $\limsup_{p\mapsto\infty}\Big\|h(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z})^{\frac{1}{2}}\log\frac{h_{\chi,p}}{h_{\chi,p-1}}\Big\|_{\sup}=0$, si $\limsup_{p\mapsto\infty}\frac{\chi(p-1)}{\chi(p)}=1$ par exemple si $\chi(p)=p$.

Remarque 3.2.10. Lorsque χ est un polynôme, alors il existe une constante $c\neq 0$ telle que

$$\Big\|h(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z})^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial z}\log\frac{h_{\chi,p}}{h_{\chi,p-1}}\Big\|_{\sup}\underset{p\mapsto\infty}{\sim}\frac{c}{p}. \tag{3.6}$$

Proposition 3.2.11. *Soit L un fibré en droites sur $\mathbb{P}^1$, engendré par ses sections globales, et $f:\mathbb{P}^1\to\mathbb{P}^1$ un morphisme de degré d, défini par un polynôme $P(z)=z^d+a_1z^{d-1}+\cdots+a_d$. Le morphisme f induit un isomorphisme de fibrés en droites :*

$$\phi : L^d\to f^*L.$$

On considère $\boldsymbol{h}_1$ une métrique hermitienne positive de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur L, on construit par récurrence une suite $(\boldsymbol{h}_p)_{p\in\mathbb{N}}$ sur L comme suit :

$$\boldsymbol{h}_p:=\left(\phi^*f^*\boldsymbol{h}_{p-1}\right)^{\frac{1}{d}}\quad\forall\, p\in\mathbb{N}_{\geq 1}.$$

Cette suite vérifie les propriétés suivantes :

1. *$(\boldsymbol{h}_p)_{p\in\mathbb{N}0}$ converge uniformément vers une métrique $\boldsymbol{h}_\infty$ continue.*
2. *$\boldsymbol{h}_\infty$ est admissible.*
3. *Il existe J, un sous-ensemble compact de $\mathbb{C}$ d'intérieur vide tel que $\boldsymbol{h}_\infty$ soit de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{P}^1\setminus J$.*
4. *Si $a_d=a_{d-1}=0$ alors $0\notin J$. Dans ce cas, on pose*

$$h_n(\cdot,\cdot)=|\cdot|^2e^{\psi_n}\ \text{ et }\ \ h_\infty(\cdot,\cdot)=|\cdot|^2e^{\psi_\infty},$$

où $\psi_n=\int_{\mathbb{S}^1}\log\boldsymbol{h}_n$, et $\psi_\infty=\int_{\mathbb{S}^1}\log\boldsymbol{h}_\infty$. Alors, on a

(a) h_n est invariante par $\mathbb{S}^1$, positive et de classe $\mathcal{C}^\infty$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

(b) h_∞ est invariante par $\mathbb{S}^1$, positive , de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{P}^1\setminus J$ et non de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de J.

(c) $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers h_∞.

En d'autre termes, $(L,h_\infty)\in\widehat{Pic}_{int,\mathcal{S},0}(\mathbb{P}^1)$.

Démonstration. On a 1) et 2) sont due à [Zha95].

Soit $c_1(L,\mathbf{h}_\infty)$ le courant de Chern associé à $(L,\mathbf{h}_\infty)$, alors on montre dans [FS94], que le support de la puissance maximale de $c_1(L,\mathbf{h}_\infty)$, donc $c_1(L,\mathbf{h}_\infty)$ dans notre cas, coïncide avec l'ensemble de

Julia qu'on note J, c'est un sous-ensemble compact de $\mathbb{C}$ d'intérieur vide, voir [Mil06, Corollaire 4.11].

Montrons que $\mathbf{h}_\infty$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{P}^1 \setminus J$. On pose $u = -\log \mathbf{h}_\infty$, $U := \mathbb{P}^1 \setminus J$ et on note par v le courant $dd^c u$. On a $v_{|_U} = c_1(L, \mathbf{h}_\infty)_{|_U} = 0$, en particulier v est de classe $\mathcal{C}^\infty$. D'après [GS90a, 1.2.1 théorème], il existe u' un courant de degré $(0,0)$ tel que

$$v = dd^c u', \quad \text{et} \quad u'_{|_U} \text{ est } \mathcal{C}^\infty.$$

Comme $dd^c(u - u') = 0$ et puisque $\mathbb{P}^1$ est compact Kähler alors d'après [GS90a, 1.2.2 théorème], il existe ω une forme harmonique, telle que $u - u' = \omega$. Mais $\mathbb{P}^1$ est projectif donc ω est une fonction constante, par suite, $u_{|_U}$ est $\mathcal{C}^\infty$ et donc $\mathbf{h}_\infty$ l'est aussi. Celà termine la preuve du 3).

Avant de démontrer le 4), on note qu'il possible d'avoir $0 \in \mathrm{Supp}(c_1(L, \mathbf{h}_\infty))$, par exemple, si $P(z) = z^2 - 2$ alors on montre que $J = [-2, 2]$, voir [Mil06, lemme 7.1]. Supposons que P est de la forme suivante :

$$P(z) = z^d + a_1 z^{d-1} + \cdots + a_{d-2} z^2,$$

et montrons que dans ce cas, que $\frac{\partial}{\partial z} \log \mathbf{h}_\infty$ est nulle au voisinage de zéro, ce qui est suffisant pour montrer 4). Par continuité, il existe $\eta > 0$ tel que $|P(z)| \leq |z|$ pour tout $|z| < \eta$. Par suite

$$\big|P^{(n)}(z)\big| \leq \frac{\eta}{2} \quad \forall\, |z| < \frac{\eta}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.7}$$

Soit $|z| < \frac{\eta}{2}$, on a

$$\begin{aligned}
\Big|\frac{\partial}{\partial z} \log \mathbf{h}_n(z)\Big| &= \Big|\frac{1}{d^n} \frac{\frac{\partial}{\partial z}\big(P^{(n)}(z)\big)\overline{P^{(n)}(z)}}{1 + |P^{(n)}(z)|^2}\Big| \\
&\leq \frac{\eta}{2d^n}\Big|\frac{\partial}{\partial z}\big(P^{(n)}(z)\big)\Big| \quad \text{par (3.7)} \\
&= \frac{\eta}{2d^n}\Big|\int_{|\xi|=\eta} \frac{P^{(n)}(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi\Big| \\
&\leq \frac{\eta^2}{2d^n}\Big|\int_{|\xi|=\eta} \frac{1}{\big||\xi| - |z|\big|^2} |d\xi|\Big| \quad \text{par (3.7)} \\
&\leq \frac{\eta}{d^n}.
\end{aligned}$$

on a donc, montré que pour tout $|z| < \frac{\eta}{2}$,

$$\Big|\frac{\partial}{\partial z} \log \mathbf{h}_n(z)\Big| \leq \frac{\eta}{d^n}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Par un théorème classique sur la convergence uniforme de suites de dérivées de fonctions différentiables, on déduit que $\log \mathbf{h}_\infty$ est différentiable sur $\{|z| < \frac{\eta}{2}\}$ et $\frac{\partial}{\partial z} \log \mathbf{h}_\infty = 0$ sur $\{|z| < \frac{\eta}{2}\}$. On pose

$$\psi_n := \int_{\mathbb{S}^1} \log \mathbf{h}_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \psi := \int_{\mathbb{S}^1} \log \mathbf{h}_\infty.$$

Donc,

$$h_n(\cdot, \cdot) := |\cdot|^2 e^{\psi_n},$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et elle est radiale par construction. On a $dd^c \log h_n = \int_{\mathbb{S}^1} dd^c \log \mathbf{h}_n$, donc h_n est positive. On vérifie que $\big(h_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $h_\infty(\cdot, \cdot) := |\cdot|^2 e^{\psi_\infty}$ qui est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{P}^1 \setminus J$.

On conclut que $h_\infty \in \mathcal{S}$.

Notons que h_∞ est nécessairement non $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de J ; En effet, supposons que h_∞ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{P}^1$. Puisque J est d'intérieur vide, alors l'adhérence de $\mathbb{P}^1 \setminus J$ est $\mathbb{P}^1$ et par la continuité des dérivées secondes on déduit que $c_1(L, h_\infty) = 0$ au voisinage de J ce qui est impossible.

Notons que ce fait, n'est pas trivial puisqu'on peut trouver une métrique $\mathcal{C}^\infty$ telle que le support de sa première forme de Chern soit un compact de $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, \infty\}$, en considérant par exemple une fonction ψ sur $\mathbb{C}$ telle $\psi = 0$ au voisinage de 0, de classe $\mathcal{C}^\infty$ en un voisinage ouvert de $\mathbb{S}^1$ et $\psi(z) = \log|z|$ si $|z| \gg 1$, alors ψ définie une métrique sur $\mathcal{O}(1)$ (puisque $\psi - \psi_\infty$ est une fonction bornée sur $\mathbb{P}^1$) et montre que le support de sa première forme de Chern est un compact de $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, \infty\}$. □

Théorème 3.2.12. *Soit h une métrique intégrable sur un fibré en droites L sur $\mathbb{P}^1$. On suppose que h_∞ est invariante par l'action de $\mathbb{S}^1$ et qu'il existe $S \in \mathcal{S}$ tel que h soit de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{P}^1 \setminus S$. Si $h_\infty = h_{1,\infty} \otimes h_{2,\infty}^{-1}$ avec $h_{1,\infty}$ et $h_{2,\infty}$ sont deux métriques admissibles, alors pour tout choix de suite $(h_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ (resp. $(h_{2,n})_{n\in\mathbb{N}}$) de métriques positives de classe $\mathcal{C}^\infty$ convergeant uniformément vers $h_{1,\infty}$ (resp. $h_{2,\infty}$), il existe $(h_{n,\rho})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de métriques de classe $\mathcal{C}^\infty$ qui converge uniformément vers h_∞ telle que*

1.
$$\left\|\log \frac{h_{n,\rho}}{h_{n-1,\rho}}\right\|_{\sup} \leq \left\|\log \frac{h_n}{h_{n-1}}\right\|_{\sup} \tag{3.8}$$

2. Il existe $M > 0$ tel que
$$\left\|h_{\mathbb{P}^1}\Big(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial z}\Big(\log \frac{h_{\rho,n}}{h_{\rho,n-1}}\Big)\right\|_{\sup} \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}_{\geq 1}. \tag{3.9}$$

3. Il existe h', une métrique positive de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $h_{\rho,n} \otimes h'$ est positive pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Soit h une métrique intégrable invariante par $\mathbb{S}^1$ et à singularités contenues dans un ensemble S appartenant à $\mathcal{S}$.

Par définition de $\mathcal{S}$, il existe deux réels $0 < r < R$ tels que
$$S \subset \{r < |z| < R\}.$$

Il existe $h_{\infty,1}$ et $h_{\infty,2}$ deux métriques positives telles que $h_\infty = h_{\infty,1} \otimes h_{2,\infty}^{-1}$ et deux suites $(h_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(h_{2,n})_{n\in\mathbb{N}}$ de métriques positives de classe $\mathcal{C}^\infty$ qui converge uniformément vers $h_{1,\infty}$ respectivement vers $h_{2,\infty}$ sur $\mathbb{P}^1$. Biensûr on s'assure que toutes ces métriques sont invariantes par $\mathbb{S}^1$.

On pose $h_n = h_{1,n} \otimes h_{2,n}^{-1}$ $\forall n$, $\psi = \log h_\infty$, $\psi_n = \log h_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit ρ une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{P}^1$ radiale telle que $0 \leq \rho \leq 1$ et vérifie :
$$\rho(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } |z| \leq \frac{r}{2} \\ 0 & r \leq |z| \leq R \\ 1 & |z| \leq 2R. \end{cases}$$

On pose
$$\psi_{n,\rho}(z) := \rho(z)\psi + (1 - \rho(z))\psi_n(z)$$
et
$$h_{n,\rho}(s, s) = |s|^2 e^{\psi_{n,\rho}},$$

pour toute section locale s de L.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$:

$$\log\Big(\frac{h_{n,\rho}}{h_{n-1,\rho}}\Big) = \psi_{n,\rho} - \psi_{n-1,\rho} = (1-\rho(z))\big(\psi_{n-1} - \psi_n\big) = (1-\rho(z))\log\Big(\frac{h_n}{h_\infty}\Big),$$

donc,

$$\Big\|\log\frac{h_{n,\rho}}{h_{n-1,\rho}}\Big\|_{\sup} \leq \Big\|\log\frac{h_n}{h_{n-1}}\Big\|_{\sup} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_{\geq 1}.$$

On a aussi,

$$\log\Big(\frac{h_{n,\rho}}{h_\infty}\Big) = \psi_{n,\rho} - \psi_\infty = (1-\rho(z))\big(\psi_\infty - \psi_n\big) = (1-\rho(z))\log\Big(\frac{h_n}{h_\infty}\Big) \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $h_{n,\rho}$ définit une métrique hermitienne continue sur L, en plus on note que la suite $\big(h_{n,\rho}\big)_n$ converge uniformément vers h_∞. On a $\psi_{n,\rho} = \psi_n$, sur $\{r < |z| < R\}$ et comme ψ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de $\{|z| \leq r\} \cup \{|z| \geq R\}$ alors la métrique $h_{n,\rho}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Commençons par remarquer que

$$h_X\Big(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial z}(\log\frac{h_{n,\rho}}{h_{n-1,\rho}}) = 0,$$

sur $\mathbb{P}^1 \setminus \Big(\{|z| \leq \frac{r}{2}\} \cup \{|z| \geq 2R\}\Big)$.

On pose pour tout $u \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_{n,i}(u) &:= \log h_{n,i}(\exp(-u)) \quad \text{ pour } i = 1, 2,\\
\mathcal{C}_n(u) &:= \mathcal{C}_{n,1}(u) - \mathcal{C}_{n,2}(u) = \big(\log h_n(\exp(-u))\big),\\
\mathcal{C}_{n,\rho}(u) &:= \log h_{n,\rho}(\exp(-u)),\\
\mathcal{C}_\infty(u) &:= \log h_\infty(\exp(-u)).
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_{n,\rho}(u) &:= \rho(\exp(-u))\mathcal{C}_\infty(u) + (1-\rho(\exp(-u)))\mathcal{C}_n(u)\\
&= \widetilde{\rho}(u)\mathcal{C}_\infty(u) + (1-\widetilde{\rho}(u))\mathcal{C}_n(u).
\end{aligned}$$

Donc,

$$\mathcal{C}'_{n,\rho}(u) = \widetilde{\rho}'(u)\big(\mathcal{C}_\infty(u) - \mathcal{C}_n(u)\big) + \widetilde{\rho}(u)\mathcal{C}'_\infty(u) + (1-\widetilde{\rho}(u))\mathcal{C}'_n(u) \quad \forall\, u \in \mathbb{R},$$

Notons que cette quantité est bien définie.

Puisque $\mathcal{C}_{n,i}$ est concave et $\mathcal{C}^\infty$ pour $i = 1, 2$ et $n \in \mathbb{N}$, alors d'après (3.2.2), $\mathcal{C}'_n$ est uniformément bornée sur compact de $\mathbb{R}$. En notant que $\big|\frac{\partial \mathcal{C}_*}{\partial u}\big| = |z|\big|\frac{\partial}{\partial z}\log h_*\big|$ cela permet d'affirmer l'assertion (3.9).

Montrons qu'il existe une métrique positive h' telle que $h_{n,\rho} \otimes h'$ soit positive pour $n >> 1$. Donc, en language de la théorie des fonctions concaves, il suffit de trouver une fonction concave $\mathcal{C}'$ telle que

$$\mathcal{C}''_{n,\rho}(u) + \mathcal{C}''(u) \leq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall u \in \mathbb{R}.$$

Rappelons que

$$\frac{\partial^2}{\partial z \partial \overline{z}}\psi = -\frac{1}{4}\exp(2u)\mathcal{C}''(u),$$

où ψ est $\mathcal{C}^\infty$ qui vérifie $\psi(z) = \psi(|z|)$ et $\mathcal{C}(u) := \psi(\exp(-u)), \forall u \in \mathbb{R}$.

On a

$$\mathcal{C}''_{n,\rho}(u) = \widetilde{\rho}''(u)(\mathcal{C}(u) - \mathcal{C}_n(u)) + 2\widetilde{\rho}'(u)(\mathcal{C}'(u) - \mathcal{C}'_n(u)) + \widetilde{\rho}(u)\mathcal{C}''(u) + (1 - \widetilde{\rho}(u))\mathcal{C}''_n(u) \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

Notons encore que cette quantité est bien définie.

Sur $\{u \leq -\log(2R)\} \cup \{u \geq -\log\frac{r}{2}\} = \{|z| \geq 2R\} \cup \{|z| \leq \frac{r}{2}\}$, on a

$$\mathcal{C}''_{n,\rho}(u) = \mathcal{C}''_\infty(u),$$

Par suite, $\mathcal{C}''_{n,\rho}$ est négative sur cet ensemble.

Sur $\{\frac{r}{2} \leq |z| \leq 2R\} = \{-\log 2R \leq u \leq -\log\frac{r}{2}\} =: K$, K est un compact de $\mathbb{R}$. donc $\mathcal{C}'_n$ est uniformément borné sur K. On voit donc que $\mathcal{C}''_{n,\rho}(u)$ est une somme de deux termes, un terme qui est négatif sur $\mathbb{R}$, et le deuxième est borné uniformément en n sur K.

Si l'on considère par exemple la métrique de Fubini-Study h_{FS} et on pose $\mathcal{C}_{FS}(u) = -\log(1+e^{-2u})$, alors, par un calcul direct, on montre que

$$\mathcal{C}''_{FS}(u) = -\frac{4e^{-2u}}{(1+e^{-2u})^2} \leq \max(\mathcal{C}''_{FS}(a), \mathcal{C}''_{FS}(1), \mathcal{C}''_{FS}(b)) \quad \forall a < u < b.$$

Donc sur K, on aura

$$\mathcal{C}''_{FS}(u) \leq \max\Big(-\frac{16R^2}{(1+4R^2)^2}, -\frac{4e^{-2}}{(1+e^{-2})^2}, -\frac{r^2}{(1+\frac{1}{4}r^2)^2}\Big).$$

Donc, on peut trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\mathcal{C}''_{n,\rho}(u) + N\mathcal{C}''_{FS}(u) \leq 0 \quad \forall u \in \mathbb{R},$$

ce qui veut dire que

$$h_{n,\rho} \otimes h_{FS}^{\otimes N},$$

est positive, donc admissible par (3.2.3). □

Définition 3.2.13. *Soit (X, ω) une surface de Riemann compacte et ω_X une forme de Kähler. Soit $\overline{E} = (E, h_\infty)$ un fibré en droites intégrable sur X.*

On dit que (E, h_∞) est 1-intégrable s'il existe une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de métriques de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur E qui converge uniformément vers h_∞ vérifiant que :

1. *Il existe $\overline{E}_1$ et $\overline{E}_2$ deux fibrés en droites admissibles tels que $\overline{E} = \overline{E}_1 \otimes \overline{E}_2^{-1}$ et deux suites $(h_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(h_{2,n})_{n\in\mathbb{N}}$ de métriques positives de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur E_1 respectivement sur E_2 telles que $(h_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ respectivement $(h_{2,n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $h_{1,\infty}$ respectivement vers $h_{2,\infty}$ et que*

$$h_n = h_{1,n} \otimes h_{2,n}^{-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

ou il existe h', une métrique positive de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $h_n \otimes h'$ est positive, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big\|\frac{h_n}{h_{n-1}}-1\Big\|_{\sup}^{\frac{1}{2}}<\infty,$$

3.
$$\sup_{n\in\mathbb{N}_{\geq 1}}\Big\|h_X\Big(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial z}\log\frac{h_n}{h_{n-1}}\Big\|_{\sup}<\infty.$$

On note par $\widehat{\mathrm{Pic}}_{int,1}(X)$ le sous-ensemble de $\widehat{\mathrm{Pic}}_{int}(X)$ formé par les classes d'isomorphie isométriques des fibrés en droites 1-intégrables.

Proposition 3.2.14. *Soit X une surface de Riemann compacte. On a $\widehat{\mathrm{Pic}}_{int,1}(X)$ est un sous-groupe de $\widehat{\mathrm{Pic}}_{int}(X)$ qui contient $\widehat{\mathrm{Pic}}(X)$.*

Si $X=\mathbb{P}^1$, alors
$$\widehat{\mathrm{Pic}}_{int,\mathcal{S},0}(\mathbb{P}^1)\subset\widehat{\mathrm{Pic}}_{int,1}(\mathbb{P}^1).$$

Démonstration. Soit $(L_1,h_\infty^{(1)})$ et $(L_2,h_\infty^{(2)})$ deux fibrés en droites munis de métriques 1-intégrables. On considère $(h_{n,1}^{(1)})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(h_{n,2}^{(2)})_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites comme dans la définition (3.2.13) associées à $h_\infty^{(1)}$ respectivement à $h_\infty^{(2)}$. On a

$$\begin{aligned}\sup_{n\in\mathbb{N}_{\geq 1}}\Big\|h_X\Big(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial z}\log\Big(\frac{h_n^{(1)}\otimes h_n^{(2)}}{h_{n-1}^{(1)}\otimes h_{n-1}^{(2)}}\Big)\Big\|_{\sup}&\leq\sup_{n\in\mathbb{N}_{\geq 1}}\Big\|h_X\Big(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial z}\log\frac{h_n^{(1)}}{h_{n-1}^{(1)}}\Big\|_{\sup}\\&+\sup_{n\in\mathbb{N}_{\geq 1}}\Big\|h_X\Big(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial z}\log\frac{h_n^{(2)}}{h_{n-1}^{(2)}}\Big\|_{\sup}.\end{aligned}$$

Du lemme (3.2.16), il existe C et C' deux constantes positives telles que pour $n\gg 1$

$$\begin{aligned}\Big\|\Big(\frac{h_n^{(1)}\otimes h_n^{(2)}}{h_{n-1}^{(1)}\otimes h_{n-1}^{(2)}}\Big)-1\Big\|_{\sup}^{\frac{1}{2}}&\leq C\Big\|\log\Big(\frac{h_n^{(1)}\otimes h_n^{(2)}}{h_{n-1}^{(1)}\otimes h_{n-1}^{(2)}}\Big)\Big\|_{\sup}^{\frac{1}{2}}\\&\leq C\Big(\Big\|\log\frac{h_n^{(1)}}{h_{n-1}^{(1)}}\Big\|_{\sup}+\Big\|\log\frac{h_n^{(2)}}{h_{n-1}^{(2)}}\Big\|_{\sup}\Big)^{\frac{1}{2}}\\&\leq C\Big(\Big\|\log\frac{h_n^{(1)}}{h_{n-1}^{(1)}}\Big\|_{\sup}^{\frac{1}{2}}+\Big\|\log\frac{h_n^{(2)}}{h_{n-1}^{(2)}}\Big\|_{\sup}^{\frac{1}{2}}\Big)\\&\leq C'\Big(\Big\|\frac{h_n^{(1)}}{h_{n-1}^{(1)}}-1\Big\|_{\sup}^{\frac{1}{2}}+\Big\|\frac{h_n^{(2)}}{h_{n-1}^{(2)}}-1\Big\|_{\sup}^{\frac{1}{2}}\Big),\end{aligned}$$

ce qui donne,
$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\Big\|\frac{h_n^{(1)}\otimes h_n^{(2)}}{h_{n-1}^{(1)}\otimes h_{n-1}^{(2)}}-1\Big\|_{\sup}^{\frac{1}{2}}<\infty.$$

Donc,
$$(L_1,h^{(1)})\otimes(L_2,h^{(2)})\in\widehat{\mathrm{Pic}}_{int,1}(X).$$

Soit $(L_1^*, h^{(1)*})$ le dual de $(L_1, h^{(1)})$, on a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Big\|\frac{h_n^{(1)*}}{h_{n-1}^{(1)*}}-1\Big\|_{\sup}^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{n=1}^{\infty}\Big\|\frac{h_{n-1}^{(1)}}{h_n^{(1)}}\Big\|_{sup}^{\frac{1}{2}}\Big\|\frac{h_n^{(1)}}{h_{n-1}^{(1)}}-1\Big\|_{\sup}^{\frac{1}{2}}$$
$$\leq \sup_{k\in\mathbb{N}_{\geq 1}}\Big\|\frac{h_{k-1}}{h_k}\Big\|_{sup}^{\frac{1}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\Big\|\frac{h_n^{(1)}}{h_{n-1}^{(1)}}-1\Big\|_{\sup}^{\frac{1}{2}},$$

comme $(h_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $h_\infty^{(1)}$ alors $\sup_{k\in\mathbb{N}_{\geq 1}}\Big\|\frac{h_{k-1}}{h_k}\Big\|_{sup}$ est fini. On conclut que

$$(L_1^*, h^{(1)*}) \in \widehat{\mathrm{Pic}}_{int,1}(X).$$

On a montré donc que $\widehat{\mathrm{Pic}}_{int,1}(X)$ est un sous-groupe de $\widehat{\mathrm{Pic}}_{int}(X)$ D'après le théorème (3.2.12),

$$\widehat{\mathrm{Pic}}_{int,\mathcal{S},0}(\mathbb{P}^1) \subset \widehat{\mathrm{Pic}}_{int,1}(\mathbb{P}^1).$$

□

Théorème 3.2.15. *Soit X une surface de Riemann compacte. On a $\widehat{\mathrm{Pic}}(X)$ est un sous-groupe propre de $\widehat{\mathrm{Pic}}_{int,1}(X)$.*

Démonstration. Soit U une carte locale de X. On peut prendre dans (3.2.5), $X = U$. Par suite, on peut trouver une fonction g continue non $\mathcal{C}^\infty$ sur U vérifiant les hypothèses de ce théorème. Comme U est isomorphe à un ouvert de $\mathbb{C}$, on peut supposer que g est invariant par $\mathbb{S}^1$ par cet isomorphisme sur un ouvert assez petit de U. En recollant convenablement cette fonction, on obtient une fonction continue sur X qui est $\mathcal{C}^\infty$ sur $X \setminus \overline{U}$ et dont sa restriction sur un ouvert de X correspond à g. On considère L un fibré en droites holomorphe sur X et on le munit de le munit de la métrique suivante

$$h_g = h\exp(g),$$

où h est une métrique hermitienne de classe $\mathcal{C}^\infty$. Après on adapte la preuve du théorème (3.2.12), pour montrer que cette métrique est 1-intégrable.

□

Lemme 3.2.16. *Soit X un espace topologique compact. On désigne par $\mathcal{C}^0(X,\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur X à valeurs réelles muni de la norme sup. Soit $\phi \in \mathcal{C}^0(X,\mathbb{R})$ vérifiant $\|\phi-1\|_{\sup} < \varepsilon < \frac{1}{2}$, alors on*

$$\frac{1}{1+2\varepsilon}|\log\phi(x)| \leq \log|\phi(x)-1| \leq \frac{1}{1-2\varepsilon}|\log\phi(x)| \quad \forall\, x \in X.$$

Démonstration. Puisque $\|\phi-1\|_{\sup} < \varepsilon < \frac{1}{2}$ alors $0 < 1-\varepsilon < \phi(x) < 1+\varepsilon$, $\forall\, x \in X$.

Donc, pour tout $x \in X$

$$\log\phi(x) = \log\Big(\phi(x)-1+1\Big)$$
$$= \sum_{l\geq 1}\frac{(-1)^{l+1}}{l}\Big(\phi(x)-1\Big)^l$$
$$= (\phi(x)-1)\Big(1+\sum_{l\geq 2}\frac{(-1)^{l+1}}{l}(\phi(x)-1)^{l-1}\Big),$$

donc

$$\frac{|\log\phi(x)|}{\Big|1+|\sum_{l\geq 2}\frac{(-1)^{l+1}}{l}(\phi(x)-1)^{l-1}|\Big|}\leq\big|\phi(x)-1\big|\leq\frac{\big|\log\phi(x)\big|}{\Big|1-|\sum_{l\geq 2}\frac{(-1)^{l+1}}{l}(\phi(x)-1)^{l-1}|\Big|}\quad\forall\,x\in X.$$

Comme

$$\Big|\sum_{l\geq 2}\frac{(-1)^{l+1}}{l}(\phi(x)-1)^{l-1}\Big|\leq\frac{1}{\varepsilon}\sum_{l\geq 1}\frac{\varepsilon^{l+1}}{l+1}=\frac{1}{\varepsilon}\Big(-\log(1-\varepsilon)-\varepsilon\Big)\leq 2\varepsilon\quad\forall\,x\in X,$$

alors

$$\frac{|\log\phi(x)|}{1+2\varepsilon}\leq\big|\phi(x)-1\big|\leq\frac{\big|\log\phi(x)\big|}{1-2\varepsilon}\quad\forall\,x\in X.$$

□

3.3 Le Laplacien généralisé sur une surface de Riemann compacte

Soit (X,h_X) une surface de Riemann compacte munie d'une métrique continue h_X et $\overline{E}=(E,h_E)$ un fibré hermitien holomorphe. Le but de ce paragraphe est l'extension de la notion du Laplacien généralisé $\Delta_{\overline{E}}$ associé aux métriques $\mathcal{C}^\infty$ aux métriques intégrables h_E sur E et agissant sur $A^{(0,0)}(X,E)$, en fixant h_X qu'on suppose continue.

On commence par rappeler la construction de l'opérateur Laplacien $\Delta_{\overline{E}}$ agissant sur $A^{(0,0)}(X,E)$, où h_E sera $\mathcal{C}^\infty$ et notera que cette construction est valable si h_X est uniquement continue. On en donnera une expression locale. Par approximation et en utilisant la positivité, on montre qu'on peut étendre cette notion aux métriques intégrables h_E sur E, c'est le théorème (3.3.6). Lorsqu'on considère une métrique intégrable invariante par $\mathbb{S}^1$, alors on montre dans (3.3.16) qu'on peut définir directement un opérateur qui étend celui dans le cas $\mathcal{C}^\infty$. On notera à l'aide de l'exemple (3.3.9), que l'intégrabilité est élément important dans cette théorie.

3.3.1 Le Laplacien généralisé associé aux métriques $\mathcal{C}^\infty$ sur E, rappel

Soit h_X une métrique hermitienne continue sur TX, et h_E une métrique hermitienne $\mathcal{C}^\infty$ sur E. Soit ω_0 la forme de Kähler normalisée associée à h_X, donnée dans chaque carte locale sur X par

$$\omega_0=\frac{i}{2\pi}h_X\Big(\frac{\partial}{\partial z_\alpha},\frac{\partial}{\partial z_\alpha}\Big)dz_\alpha\wedge d\overline{z}_\alpha.$$

Cette métrique induit une métrique sur les formes différentielles de type $(0,1)$. En tensorisant par la métrique hermitienne de E, on obtient un produit scalaire ponctuel en $x\in X$: $(s(x),t(x))$ pour deux sections de $A^{0,q}(X,E)=A^{0,q}(X)\otimes_{\mathcal{C}^\infty(X)}A^0(X,E)$, pour $q=0$ ou 1.

Le produit scalaire L^2 de deux sections $s,t\in A^{0,q}(X,E)$ est défini par la formule

$$(s,t)_{L^2}=\int_X(s(x),t(x))\omega_0.$$

L'opérateur de Cauchy-Riemann $\overline{\partial}_E$ agit sur les formes de types $(0,q)$ à valeurs dans E. On obtient le complexe de Dolbeault

$$0 \longrightarrow A^{0,0}(X,E) \xrightarrow{\overline{\partial}_E} A^{0,1}(X,E) \longrightarrow 0$$

Sa cohomologie calcule la cohomologie du faisceau de X à coefficients dans E, cf. par exemple [GH94].

On va rappeler la construction de $\overline{\partial}_E^*$: l'adjoint de $\overline{\partial}_E$. Comme, par exemple, dans [Voi02, §. 5], on considère les deux applications suivantes :

$$*_{0,E} : A^{0,0}(X,E) \longrightarrow A^{1,1}(X,E^*),$$

et

$$*_{1,E} : A^{0,1}(X,E) \longrightarrow A^{1,0}(X,E^*).$$

Ce sont les uniques applications qui vérifient :

$$\big(f(x)\sigma_x\big) \wedge *_{0,E}\big(g(x)\tau_x\big) = \big(\sigma(x),\tau(x)\big)_x \omega_x,$$

et

$$\big(f d\overline{z} \otimes \sigma\big) \wedge \big(*_{1,E}(g d\overline{z} \otimes \tau)\big) = \big(f\, d\overline{z}(x), g\, d\overline{z}(x)\big)_x h_E(\sigma,\tau)\omega_0(x),$$

pour tout $x \in X$ et pour tous $f,g \in A^{0,0}(X)$ et σ,τ deux sections locales de E tels que $f\otimes\sigma$ et $g\otimes\tau$ soient des éléments de $A^{(0,0)}(X,E)$. Notons que pour définir ces deux applications, on n'a pas besoin que h_X soit $\mathcal{C}^\infty$.

On montre que ces morphisme s'écrivent respectivement sur une carte locale, comme suit :

$$*_{0,E}(g\otimes\tau) = \overline{g}\omega_0 \otimes h_E(\cdot,\tau).$$

et

$$*_{1,E}\,(g d\overline{z} \otimes \tau) = -\overline{g} dz \otimes h_E(\cdot,\tau). \tag{3.10}$$

L'opérateur $\overline{\partial}_E$ possède un adjoint pour le produit scalaire L^2 ; c'est à dire une application

$$\overline{\partial}_E^* : A^{0,1}(X,E) \longrightarrow A^{0,0}(X,E)$$

qui vérifie

$$\big(s, \overline{\partial}_E^* t\big)_{L^2} = \big(\overline{\partial}_E s, t\big)_{L^2}.$$

pour tout $s \in A^{0,q}(X,E)$ et $t \in A^{0,q+1}(X,E)$.

L'opérateur $\overline{\partial}_E^* : A^{0,1}(X,E) \longrightarrow A^{0,0}(X,E)$ est, par définition, donné par la formule

$$\overline{\partial}_E^* = -\,*_{0,E}^{-1}\,\overline{\partial}_{K_X\otimes E^*}\,*_{1,E}\,.$$

On note par $\Delta^0_{\overline{E}}$, ou plus simplement $\Delta_{\overline{E}}$, l'opérateur $\overline{\partial}_E^*\overline{\partial}_E$ sur $A^{0,0}(X,E)$, et l' appelle l'opérateur Laplacien généralisé, cf. par exemple [Voi02, §. 5].

Remarque 3.3.1. Remarquons que même si h_X n'est pas $\mathcal{C}^\infty$, alors $\Delta_{\overline{E}} = \overline{\partial}_E^*\overline{\partial}_E$ est bien défini.

Lemme 3.3.2. *Soit E une fibré en droites engendré par ses sections globales et $\{e_1,\dots,e_r\}$ une base de $H^0(X,E)$ sur $\mathbb{C}$, alors*

$$A^{0,0}(X,E) = \sum_{i=1}^{r} A^{0,0}(X)\otimes e_i.$$

Démonstration. Soit $\{e_1, \dots, e_r\}$ une base de $H^0(X, E)$.

On pose $U_i := X \setminus \mathrm{div}(e_i)$, pour $i = 1, \dots, r$. Comme E est engendré par ses sections globales alors

$$X = \bigcup_{i=1}^{r} U_i.$$

Puisque X est compacte, alors il existe une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $(U_i)_{1 \leq i \leq r}$ c'est à dire il existe $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_r$ des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur X telles que :

1. Le support de ρ_i est inclus dans U_i et $0 \leq \rho_i \leq 1$, pour $i = 1, \dots, r$.
2. $\sum_{i=1}^{r} \rho_i(x) = 1$, $\forall x \in X$.

Soit $\xi \in A^{0,0}(X, E)$. Sur U_i pour $i = 1, \dots, r$, la section ξ corresponds, après trivialisation de E par e_i, à une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. En d'autres termes, il existe f_i, une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ définie sur U_i telle que

$$\xi_i = f_i \otimes e_i. \tag{3.11}$$

On a $\rho_i f_i$ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ définie sur X entier.

Vérifions que

$$\sum_{i=1}^{r} (\rho_i f_i) \otimes e_i = \xi.$$

Soit $x \in X$, on pose $I_x := \{i \in \{1, \dots, r\} | \, x \in U_i\}$. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{r} (\rho_i f_i \otimes e_i)(x) &= \sum_{i \in I_x} (\rho_i f_i \otimes e_i)(x) + \sum_{i \in \{1,\dots,r\} \setminus I_x} (\rho_i f_i \otimes e_i)(x) \\
&= \sum_{i \in I_x} \rho_i(x) \xi(x) + 0, \quad \text{par} \quad (3.11) \\
&= (\sum_{i \in I_x} \rho_i(x)) \xi(x) \\
&= (\sum_{i \in I_x} \rho_i(x) + \sum_{i \notin I_x} \rho_i(x)) \xi(x) \\
&= \xi(x).
\end{aligned}$$

Pour la dernière égalité, résulte du fait $1 = \sum_{i=1}^{r} \rho_i(x) = \sum_{i \in I_x} \rho_i(x) + \sum_{i \in \{1,\dots,r\} \setminus I_x} \rho_i(x) = \sum_{i \in I_x} \rho_i(x)$.

□

Lemme 3.3.3. *Soit (X, h_X) une surface de Riemann compacte avec h_X est continue, et (E, h_E) un fibré hermitien avec h_E de classe $\mathcal{C}^\infty$. L'opérateur $\Delta_{\overline{E}}$ est déterminé localement par :*

$$\begin{aligned}
\Delta_{\overline{E}}(f \otimes \sigma) = &= -h_X\Big(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-1} h_E(\sigma, \sigma)^{-1} \frac{\partial}{\partial z}\Big(h_E(\sigma, \sigma) \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\Big) \otimes \sigma \\
&= -h_X\Big(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-1} \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \overline{z}} \otimes \sigma - h_X\Big(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-1} \frac{\partial}{\partial z}(\log h_E(\sigma, \sigma)) \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \otimes \sigma.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

$\forall f \in A^{0,0}(X)$ et σ une section locale holomorphe de E tels que $f \otimes \sigma \in A^{(0,0)}(X, E)$, où $\{\frac{\partial}{\partial z}\}$ est une base locale de TX.

Démonstration. Soient $f \in A^{0,0}(X)$ et σ une section locale holomorphe tels que $f \otimes \sigma \in A^{(0,0)}(X, E)$. On a localement

$$\begin{aligned}
\Delta_{\overline{E}}(f \otimes \sigma) &= \overline{\partial}_E^* \overline{\partial}_E (f \otimes \sigma) \\
&= - *_{0,E}^{-1} \overline{\partial}_{K_X \otimes E^*} *_{1,E} \left(\overline{\partial}_E (f \otimes \sigma)\right) \\
&= - *_{0,E}^{-1} \overline{\partial}_{K_X \otimes E^*} *_{1,E} \Big(\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} d\overline{z} \otimes \sigma\Big) \\
&= - *_{0,E}^{-1} \overline{\partial}_{K_X \otimes E^*} \Big(-\frac{\partial \overline{f}}{\partial z} dz \otimes h_E(\cdot, \sigma)\Big) \\
&= - *_{0,E}^{-1} \overline{\partial}_{K_X \otimes E^*} \Big(-\frac{\partial \overline{f}}{\partial z} dz \otimes \frac{h_E(\sigma, \sigma)}{\sigma^*(\sigma)} \sigma^*\Big) \\
&= - *_{0,E}^{-1} \overline{\partial}_{K_X \otimes E^*} \Big(-\frac{h_E(\sigma, \sigma)}{\sigma^*(\sigma)} \frac{\partial \overline{f}}{\partial z} dz \otimes \sigma^*\Big) \\
&= - *_{0,E}^{-1} \Big(\frac{\partial}{\partial \overline{z}} \Big(-\frac{h_E(\sigma, \sigma)}{\sigma^*(\sigma)} \frac{\partial \overline{f}}{\partial z} dz\Big) \otimes \sigma^*\Big) \\
&= - *_{0,E}^{-1} \Big(\frac{1}{\sigma^*(\sigma)} \frac{\partial}{\partial \overline{z}} \Big(-h_E(\sigma, \sigma) \frac{\partial \overline{f}}{\partial z} dz\Big) \otimes \sigma^*\Big) \qquad \text{puisque } \sigma^*(\sigma) \text{ est holomorphe,} \\
&= - *_{0,E}^{-1} \Big(\frac{\partial}{\partial \overline{z}} \Big(-h_E(\sigma, \sigma) \frac{\partial \overline{f}}{\partial z} dz\Big) \otimes \frac{\sigma^*}{\sigma^*(\sigma)}\Big) \\
&= - *_{0,E}^{-1} \Big(\frac{\partial}{\partial \overline{z}} \Big(-h_E(\sigma, \sigma) \frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}}\Big) d\overline{z} \wedge dz \otimes \frac{1}{h_E(\sigma, \sigma)} h_E(\cdot, \sigma)\Big) \\
&= -h_X\Big(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-1} h_E(\sigma, \sigma)^{-1} \frac{\partial}{\partial z} \Big(h_E(\sigma, \sigma) \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\Big) \otimes \sigma.
\end{aligned}$$

On a donc,

$$\begin{aligned}
\Delta_{\overline{E}}(f \otimes \sigma) &= -h_X\Big(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-1} h_E(\sigma, \sigma)^{-1} \frac{\partial}{\partial z} (h_E(\sigma, \sigma) \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}) \otimes \sigma \\
&= -h_X\Big(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-1} \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \overline{z}} \otimes \sigma - h_X\Big(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-1} \frac{\partial}{\partial z} \log h_E(\sigma, \sigma) \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \otimes \sigma.
\end{aligned}$$

□

Lemme 3.3.4. *Soient σ et τ sont deux sections holomorphes locales de E, f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur X tels que $f \otimes \sigma, g \otimes \tau \in A^{(0,0)}(X, E)$ alors*

$$(\Delta_{\overline{E}}(f \otimes \sigma), g \otimes \tau)_{L^2} = \frac{i}{2\pi} \int_X h_E(\sigma, \tau) \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \frac{\partial \overline{g}}{\partial z} dz \wedge d\overline{z}.$$

Démonstration. Supposons que τ est transverse à σ (c'est à dire $div(\sigma) \cap div(\tau)$ est finie). Il existe localement une fonction holomorphe ϕ telle que $\tau = \phi\sigma$. On suppose que $\sigma = z$, une coordonnée locale. On pose $U_\varepsilon := \{|z| > \varepsilon\}$, avec $0 < \varepsilon \ll 1$

$$\begin{aligned}
(\Delta_{\overline{E}}(f \otimes \sigma), g \otimes \tau)_{L^2} &= -\frac{i}{2\pi} \int_U \frac{\partial}{\partial z} \Big(h(\sigma, \sigma) \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\Big) \frac{h(\sigma, \tau)}{h(\sigma, \sigma)} \overline{g}\, dz \wedge d\overline{z} \\
&= -\frac{i}{2\pi} \int_U \frac{\partial}{\partial z} \Big(h(\sigma, \sigma) \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\Big) \overline{\phi}\, \overline{g}\, dz \wedge d\overline{z} \\
&= -\frac{i}{2\pi} \lim_{\varepsilon \mapsto 0} \int_{U_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial z} \Big(h(\sigma, \sigma) \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\Big) \overline{\phi}\, \overline{g}\, dz \wedge d\overline{z}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{i}{2\pi}\lim_{\varepsilon\mapsto 0}\int_{|z|=\varepsilon} h(\sigma,\sigma)\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\,\overline{\phi}\,\overline{g}\,d\overline{z} + \frac{i}{2\pi}\lim_{\varepsilon\mapsto 0}\int_{U_\varepsilon} h(\sigma,\sigma)\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\,\overline{\phi}\,\frac{\partial \overline{g}}{\partial z}dz\wedge d\overline{z}\\
&= -\frac{i}{2\pi}\lim_{\varepsilon\mapsto 0}\int_{|z|=\varepsilon} h(\sigma,\tau)\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\,\overline{g}\,d\overline{z} + \frac{i}{2\pi}\lim_{\varepsilon\mapsto 0}\int_{U_\varepsilon} h(\sigma,\tau)\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\,\frac{\partial \overline{g}}{\partial z}\,dz\wedge d\overline{z}\\
&= \frac{i}{2\pi}\int_X h(\sigma,\tau)\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\,\frac{\partial \overline{g}}{\partial z}\,dz\wedge d\overline{z}.
\end{aligned}
$$

□

Lemme 3.3.5. *Soient φ et ψ deux fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur X. On a*

$$
\frac{i}{2\pi}\int_X\Big|\frac{\partial\varphi}{\partial\overline{z}}\Big|^2\psi dz\wedge d\overline{z} = -\frac{i}{2\pi}\int_X \varphi\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial\overline{z}}\,\psi\,dz\wedge d\overline{z} + \frac{i}{4\pi}\int_X \varphi^2\frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial\overline{z}}dz\wedge d\overline{z}.
$$

Démonstration. Soient ψ et φ deux fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur X. On a,

$$
\begin{aligned}
\int_X\Big|\frac{\partial\varphi}{\partial\overline{z}}\Big|^2\psi\,dz\wedge d\overline{z} &= \int_X\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial\overline{z}}\Big)\overline{\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial\overline{z}}\Big)}\psi dz\wedge d\overline{z}\\
&= \int_X \frac{\partial\varphi}{\partial\overline{z}}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\psi dz\wedge d\overline{z}\\
&= \int_X \frac{\partial}{\partial z}\Big(\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial\overline{z}}\psi\Big)dz\wedge d\overline{z} - \int_X \varphi\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial\overline{z}}\,\psi\,dz\wedge d\overline{z}\\
&- \int_X \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial\overline{z}}\frac{\partial\psi}{\partial z}dz\wedge d\overline{z}\\
&= -\int_X \varphi\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial\overline{z}}\,\psi\,dz\wedge d\overline{z} - \int_X \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial\overline{z}}\frac{\partial\psi}{\partial z}dz\wedge d\overline{z} \qquad \text{par le théorème de Stokes}\\
&= -\int_X \varphi\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial\overline{z}}\,\psi\,dz\wedge d\overline{z} - \frac{1}{2}\int_X \frac{\partial(\varphi^2)}{\partial\overline{z}}\,\frac{\partial\psi}{\partial z}\,dz\wedge d\overline{z}\\
&= -\int_X \varphi\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial\overline{z}}\,\psi\,dz\wedge d\overline{z} + \frac{1}{2}\int_X \varphi^2\frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial\overline{z}}\,dz\wedge d\overline{z} \qquad \text{par le théorème de Stokes}
\end{aligned}
$$

□

3.3.2 Le Laplacien généralisée associé aux métriques intégrables sur E. (I)

Soit (X, h_X) une surface de Riemann compacte et h_X une métrique hermitienne continue non necessairement $\mathcal{C}^\infty$ sur X, (fixée dans ce paragrahe).

Soit maintenant $\overline{E}_\infty = (E, h_{E,\infty})$ un fibré en droites intégrable. Par définition, il existe une décomposition $\overline{E}_\infty = \overline{E}_{1,\infty}\otimes\overline{E}_{2,\infty}^{-1}$ où $\overline{E}_{1,\infty} = (E_1, h_{1,\infty})$ et $\overline{E}_{2,\infty} = (E_2, h_{2,\infty})$ sont deux fibrés en droites admissibles, c'est à dire qu'il existe $(h_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ (resp. $(h_{2,n})_{n\in\mathbb{N}}$) une suite de métriques $\mathcal{C}^\infty$ et positives qui converge uniformément vers $h_{1,\infty}$ (resp. $h_{2,\infty}$).

Si l'on pose $\overline{E}_n := (E, h_n := h_{1,n}\otimes h_{2,n}^{-1})$, pour tout $n\in\mathbb{N}$. Il est clair que h_n est $\mathcal{C}^\infty$, alors on peut considérer l'opérateur Laplacien $\Delta_{\overline{E}_n}$ construit dans le paragraphe précédent, agissant sur $A^{(0,0)}(X,E)$ et associé à la donnée h_X et h_n.

Le théorème suivant permet d'étudier la suite $(\Delta_{\overline{E}_n})_{n\in\mathbb{N}}$. Cela nous permettra d'associer à $\overline{E}_\infty$, par un procédé d'approximation, un opérateur linéaire qui sera noté $\Delta_{\overline{E}_\infty}$. Cette construction étend la notion d'opérateur Laplacien aux fibrés en droites intégrables.

Théorème 3.3.6. *Soit (X, h_X) une surface de Riemann compacte avec h_X une métrique hermitienne continue. Soit $\overline{E}_\infty = (E, h_{E,\infty})$ un fibré en droites intégrable. On note par $\overline{A^{0,0}(X,E)}_\infty$ le complété de $A^{0,0}(X,E)$ pour la métrique L^2_∞ induite par h_X et $h_{E,\infty}$.*

Pour toute décomposition de $\overline{E}_\infty = \overline{E}_{1,\infty} \otimes \overline{E}_{2,\infty}^{-1}$ en fibrés admissibles $\overline{E}_{1,\infty}$ et $\overline{E}_{2,\infty}$, et pour tout choix de suites $(h_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ (resp. $(h_{2,n})_{n\in\mathbb{N}}$) de métriques positives $\mathcal{C}^\infty$ sur $\overline{E}_{1,\infty}$ (resp. sur $\overline{E}_{2,\infty}$) qui converge uniformément vers $h_{1,\infty}$ (resp. $h_{2,\infty}$), pour tout $\xi \in A^{0,0}(X,E)$, et si l'on pose $\overline{E}_n := \overline{E}_{1,n} \otimes \overline{E}_{2,n}^{-1}$. Alors la suite $(\Delta_{\overline{E}_n}\xi)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, pour la norme L^2_∞, lorsque $n \mapsto \infty$ vers une limite $\Delta_{\overline{E}_\infty}\xi$ dans $\overline{A^{0,0}(X,E)}_\infty$. Cette limite ne dépend par du choix de la décomposition ni de celui de la suite.

On a

1. *$\Delta_{\overline{E}_\infty}$ est un opérateur linéaire de $A^{0,0}(X,E)$ vers $\overline{A^{0,0}(X,E)}_\infty$.*
2.
$$\begin{aligned}(\Delta_{\overline{E}_\infty}(f\otimes\sigma), g\otimes\tau)_{L^2,\infty} &= (f\otimes\sigma, \Delta_{\overline{E}_\infty}(g\otimes\tau))_{L^2,\infty}\\ &= \frac{i}{2\pi}\int_X h_{E,\infty}(\sigma,\tau)\frac{\partial f}{\partial\overline{z}}\frac{\partial\overline{g}}{\partial z}\,dz\wedge d\overline{z}.\end{aligned} \tag{3.13}$$

   $\forall f, g \in A^{0,0}(X)$ et σ, τ deux sections locales holomorphes de E tels que $f\otimes\sigma$ et $g\otimes\tau$ soient dans $A^{(0,0)}(X,E)$. En particulier,
$$(\Delta_{\overline{E}_\infty}\xi, \xi')_{L^2,\infty} = (\xi, \Delta_{\overline{E}_\infty}\xi')_{L^2,\infty},$$
   $\forall \xi, \xi' \in A^{(0,0)}(X,E)$.
3.
$$(\Delta_{\overline{E}_\infty}\xi, \xi)_{L^2,\infty} \geq 0 \quad \forall\, \xi \in A^{0,0}(X,E).$$

Démonstration. On considère une décomposition de $\overline{E}_\infty = \overline{E}_{1,\infty} \otimes \overline{E}_{2,\infty}^{-1}$ en fibrés admissibles $\overline{E}_{1,\infty}$ et $\overline{E}_{2,\infty}$. Soit $(h_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ (resp. $(h_{2,n})_{n\in\mathbb{N}}$) de métriques positives $\mathcal{C}^\infty$ sur $\overline{E}_{1,\infty}$ (resp. sur $\overline{E}_{2,\infty}$) qui converge uniformément vers $h_{1,\infty}$ (resp. $h_{2,\infty}$).

On pose $\overline{E}_n = (E, h_n := h_{1,n} \otimes h_{2,n}^{-1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et on considère $\Delta_{\overline{E}_n}$, l'opérateur Laplacien associé à h_X et $h_{\overline{E}_n}$. D'après (3.12), on a pour tout $p, q \in \mathbb{N}$:

$$\Delta_{\overline{E}_p}(f\otimes\sigma) - \Delta_{\overline{E}_q}(f\otimes\sigma) = h_X\Big(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-1}\frac{\partial\varphi_{p,q}}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial\overline{z}}\otimes\sigma,$$

où $f \in A^{(0,0)}(X)$ et σ est une section locale holomorphe et $\varphi_{p,q} := \log\frac{h_{\overline{E}_q}}{h_{\overline{E}_p}}$, (notons que $\varphi_{p,q}$ ne dépend pas de σ, ni de f).

Fixons une métrique hermitienne h_E de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur E et notons par $(\cdot,\cdot)_{L^2,h_E,h_X}$ le produit hermitien L^2 induit par h_X et h_E sur $A^{0,0}(X,E)$. On a

$$\Big\|\Delta_{\overline{E}_p}(f\otimes\sigma) - \Delta_{\overline{E}_q}(f\otimes\sigma)\Big\|^2_{L^2,h_E,h_X} = \frac{i}{2\pi}\int_X\Big|\frac{\partial\varphi_{p,q}}{\partial z}\Big|^2\Big|\frac{\partial f}{\partial\overline{z}}\Big|^2\frac{h_E(\sigma,\sigma)}{h_X(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z})}dz\wedge d\overline{z}. \tag{3.14}$$

Comme X est compact, on peut supposer que h_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (En effet, si h'_X est une métrique $\mathcal{C}^\infty$ sur TX. On a $\frac{h_X}{h'_X}$ est une fonction continue qui ne s'annule pas sur X, donc les normes $\|\cdot\|_{L_2,h_E,h_X}$ et $\|\cdot\|_{L^2,h_E,h'_X}$ sont équivalentes).

On pose $\psi := |\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}|^2 h_X(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z})^{-1} h_E(\sigma,\sigma)$. Montrons que $\psi \in A^{0,0}(X,\mathbb{R})$, il suffit de montrer que $|\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}|^2 h_X(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z})^{-1}$ est une fonction définie globalement. En effet, soit ϕ un changement de coordonnées locales, on pose $z = \phi(y)$, on a

$$\Big|\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\Big|^2 h_X\Big(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-1} = \Big|\frac{\partial (f\circ\phi)}{\partial \overline{y}}\Big|^2 h_X\Big(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}\Big)^{-1}.$$

On applique maintenant le lemme (3.3.5) et on obtient :

$$\begin{aligned}
\Big\|\Delta_{\overline{E}_p}(f\otimes\sigma) - \Delta_{\overline{E}_q}(f\otimes\sigma)\Big\|^2_{L^2,h_E} &= \frac{i}{2\pi}\int_X \Big|\frac{\partial \varphi_{p,q}}{\partial z}\Big|^2 \Big|\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\Big|^2 \frac{h_E(\sigma,\sigma)}{h_X(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z})} dz\wedge d\overline{z} \\
&= \frac{i}{2\pi}\int_X \Big|\frac{\partial \varphi_{p,q}}{\partial z}\Big|^2 \psi\, dz\wedge d\overline{z} \\
&= -\frac{i}{2\pi}\int_X \varphi_{p,q}\,\frac{\partial^2 \varphi_{p,q}}{\partial z\partial\overline{z}}\,\psi\, dz\wedge d\overline{z} + \frac{i}{4\pi}\int_X \varphi_{p,q}^2\,\frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial\overline{z}}\, dz\wedge d\overline{z} \quad \text{par (3.3.5)} \\
&= -\frac{i}{2\pi}\int_X \log\Big(\frac{h_p}{h_q}\Big)\,\psi\,\big(c_1(E,h_p) - c_1(E,h_q)\big) + \frac{i}{4\pi}\int_X \Big|\log\frac{h_p}{h_q}\Big|^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial\overline{z}}\, dz\wedge d\overline{z}.
\end{aligned}$$

On conclut, par exemple par la théorie de Bedford-Taylor, que

$$\Big\|\Delta_{\overline{E}_p}(f\otimes\sigma) - \Delta_{\overline{E}_q}(f\otimes\sigma)\Big\|^2_{L^2,h_E,h_X} \xrightarrow[p,q\mapsto\infty]{} 0.$$

Par suite,

$$\Big\|\Delta_{\overline{E}_p}(f\otimes\sigma) - \Delta_{\overline{E}_q}(f\otimes\sigma)\Big\|^2_{L^2,h_{E,\infty},h_X} \xrightarrow[p,q\mapsto\infty]{} 0.$$

Donc, on a montré que pour tout $\xi \in A^{(0,0)}(X,E)$, la suite $\big(\Delta_{\overline{E}_p}\xi\big)_{p\in\mathbb{N}}$ converge pour la norme L^2 vers une limite dans $\overline{A^{(0,0)}(X,E)}$, on notera cette limite par $\Delta_{\overline{E}_\infty}\xi$. On vérifie que $\Delta_{\overline{E}_\infty}\xi$ est un opérateur linéaire.

Soient $f\otimes\sigma$ et $g\otimes\tau$ deux éléments de $A^{0,0}(X,E)$. On a

$$\big(\Delta_{\overline{E}_n}(f\otimes\sigma), g\otimes\tau\big)_{L^2,n} = \frac{i}{2\pi}\int_X h_{\overline{E}_n}(\sigma,\tau)\,\frac{\partial f}{\partial\overline{z}}\,\frac{\partial\overline{g}}{\partial z}\, dz\wedge d\overline{z} \quad \text{par (3.3.4)},$$

donc par passage à la limite on déduit (3.13).

En particulier

$$0 \le \big(\Delta_{\overline{E}_n}(f\otimes\sigma), f\otimes\sigma\big)_{L^2,n} = \frac{i}{2\pi}\int_X h_{\overline{E}_n}(\sigma,\sigma)\Big|\frac{\partial f}{\partial\overline{z}}\Big|^2 dz\wedge d\overline{z},$$

donc,

$$\begin{aligned}
\big(\Delta_{\overline{E}_\infty}\xi,\xi\big)_{L^2,\infty} &= \frac{i}{2\pi}\int_X \sum_{k,j} h_{\overline{E}_\infty}(e_k,e_j)\frac{\partial f_k}{\partial\overline{z}}\frac{\partial\overline{f_j}}{\partial z} dz\wedge d\overline{z} \\
&= \frac{i}{2\pi}\int_X h_{\overline{E}_\infty}\Big(\sum_{k=1}^r \frac{\partial f_k}{\partial\overline{z}}\otimes e_k, \sum_{k=1}^r \frac{\partial f_k}{\partial\overline{z}}\otimes e_k\Big)\, dz\wedge d\overline{z} \\
&\ge 0,
\end{aligned}$$

pour tout $\xi \in A^{(0,0)}(X,E)$.

□

Lemme 3.3.7. *Soit $\overline{E} = (E, h_{E,\infty})$ un fibré en droites intégrable sur X, et $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante qui converge uniformément vers $h_{E,\infty}$. On a*

$$(\Delta_{\overline{E}_n}\xi,\xi)_{L^2,n} \leq (\Delta_{\overline{E}_{n+1}}\xi,\xi)_{L^2,n+1} \leq (\Delta_{\overline{E}_\infty}\xi,\xi)_{L^2,\infty},$$

et

$$\ker(\Delta_{\overline{E}_\infty}) \simeq H^0(X,E).$$

Démonstration. L'existence d'une suite croissante qui converge vers h_∞ est assurée par [Mai00, Proposition 4.5.7]. Par (3.3.4), on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
(\Delta_{\overline{E}_n}\xi,\xi)_{L^2,n} &= \frac{i}{2\pi}\int_X \sum_{k,j} \frac{\partial f_k}{\partial \overline{z}}\frac{\partial \overline{f_j}}{\partial z} h_n(e_k,e_j)dz\wedge d\overline{z} \\
&= \frac{i}{2\pi}\int_X h_n\Big(\sum_{k=1}^r \frac{\partial f_k}{\partial \overline{z}}(x)e_k(x), \sum_{k=1}^r \frac{\partial f_k}{\partial \overline{z}}(x)e_k(x)\Big)\, dz\wedge d\overline{z} \\
&\leq \frac{i}{2\pi}\int_X h_{n+1}\Big(\sum_{k=1}^r \frac{\partial f_k}{\partial \overline{z}}(x)e_k(x), \sum_{k=1}^r \frac{\partial f_k}{\partial \overline{z}}(x)e_k(x)\Big)\, dz\wedge d\overline{z} \\
&= \frac{i}{2\pi}\int_X \sum_{k,j} \frac{\partial f_k}{\partial \overline{z}}\frac{\partial \overline{f_j}}{\partial z} h_{n+1}(e_k,e_j)dz\wedge d\overline{z} \\
&= (\Delta_{\overline{E}_{n+1}}\xi,\xi)_{L^2,n+1}.
\end{aligned}$$

Par passage à la limite, on obtient : $(\Delta_{\overline{E}_n}\xi,\xi)_{L^2,n} \leq (\Delta_{\overline{E}_{n+1}}\xi,\xi)_{L^2,n+1} \leq (\Delta_{\overline{E}_\infty}\xi,\xi)_{L^2,\infty}$,. Si $\xi \in \ker(\Delta_{\overline{E}_\infty})$, alors l'inégalité précédente implique que $(\Delta_{\overline{E}_n}\xi,\xi) = 0$, par suite $\xi \in H^0(X,E)$. □

Proposition 3.3.8. *Soit $\overline{L}$ un fibré en droites hermitien de classe $\mathcal{C}^\infty$ engendré par ses sections globales sur une surface de Riemann compacte, alors*

$$\ker(\Delta_{\overline{L}}) = 1\otimes H^0(X,L).$$

(où $1\otimes H^0(X,L)$ est par définition le sous $\mathbb{C}$-espace vectoriel de $A^{(0,0)}(X,E)$ engendré par les éléments de la forme $1\otimes e$ avec $e \in H^0(X,L)$).

Démonstration. D'après [Voi02, théorème 5.25], on sait qu'on a isomorphisme entre les deux $\mathbb{C}-$espaces ci-dessus. On note par $\{e_1,\ldots,e_r\}$ une base sur $\mathbb{C}$ de $H^0(X,L)$. Il suffit de montrer que $\Delta_{\overline{L}}(1\otimes e_i) = 0$ où 1 est la fonction constante sur X égale à 1. Par (3.12), on voit facilement que

$$\Delta_{\overline{L}}(1\otimes e_i) = 0.$$

□

3.3.3 Le Laplacien généralisé associé à une métrique intégrable sur un fibré en droites sur $\mathbb{P}^1$. (II)

Dans ce paragraphe, on suppose que $X = \mathbb{P}^1$, la droite projective complexe. L'action du tore compact $\mathbb{S}^1$, sur $\mathbb{P}^1$ permet de considérer une sous classe de métriques intégrables, à savoir les métriques invariantes par $\mathbb{S}^1$. On expliquera comment on peut construire directement, dans ce cas, un opérateur Laplacien. Plus précisément, si $h_{\overline{E}_\infty}$ est une métrique intégrable invariante par $\mathbb{S}^1$ sur E. on donnera un sens à l'expression suivante :

$$\Delta'_{\overline{E}_\infty}(f\otimes\sigma) = -h_{\mathbb{P}^1}\Big(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-1} h_{\overline{E}_\infty}(\sigma,\sigma)^{-1}\frac{\partial}{\partial z}\Big(h_{\overline{E}_\infty}(\sigma,\sigma)\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\Big)\otimes\sigma.$$

avec $f \otimes \sigma \in A^{(0,0)}(\mathbb{P}^1, E)$.

On terminera ce paragraphe en comparant cette approche avec celle introduite dans le paragraphe précédent.

L'exemple suivant montre l'importance de la notion d'intégrabilité de la métrique dans l'extension de la notion du Laplacien à cette classe de métriques.

Exemple 3.3.9. *Soit $(\mathbb{P}^1, \omega_{FS})$ la droite projective complexe munie de la métrique de Fubini-Study. Soit ϱ une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{P}^1$ égale à 1 au voisinage de $\mathbb{S}^1$ nulle aux voisinages de 0 et ∞. On considère la fonction suivante $\exp\Big(\varrho(z)\sqrt{|1-|z||}\Big)$. Elle définie une métrique hermitienne continue et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{S}^1$ sur le fibré en droites trivial sur $\mathbb{P}^1$ en posant :*

$$h_\varrho(1,1)(z) = \exp\Big(\varrho(z)\sqrt{|1-|z||}\Big) \quad \forall\, z \in \mathbb{P}^1.$$

On considère l'opérateur suivant défini sur $\mathbb{P}^1 \setminus \mathbb{S}^1$ par :

$$\Delta_\varrho(f \otimes 1) := -h_{\mathbb{P}^1}\Big(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-1} h_\varrho(1,1)^{-1} \frac{\partial}{\partial z}\Big(h_\varrho(1,1)\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\Big) \otimes 1 \quad \forall\, f \in A^{(0,0)}(\mathbb{P}^1).$$

Alors Δ_ϱ n'est pas un opérateur à valeurs dans $\overline{A^{(0,0)}(\mathbb{P}^1)}_\varrho$, où on a noté par $\overline{A^{(0,0)}(\mathbb{P}^1)}_\varrho$ le complété de $A^{(0,0)}(\mathbb{P}^1)$ pour la métrique L^2 induite par h_ϱ et ω_{FS}. On va montrer qu'il existe $f \in A^{(0,0)}(\mathbb{P}^1)$ tel que

$$\Delta_\varrho(f \otimes 1) \notin \overline{A^{(0,0)}(\mathbb{P}^1)}_\varrho.$$

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{P}^1$ telle que $f(z) = \overline{z}$ sur un voisinage ouvert de $\mathbb{S}^1$. On a

$$\begin{aligned}
\|\Delta_\varrho f\|_{L^2}^2 &= \frac{i}{2\pi}\int_{\mathbb{P}^1} h_X\Big(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-1} h_\varrho(1,1)^{-1}\Big|\frac{\partial}{\partial z}(h_\varrho(1,1)\frac{\partial f}{\partial \overline{z}})\Big|^2 dz \wedge d\overline{z} \\
&\geq \frac{i}{2\pi}\int_{1+\varepsilon>|z|>1+\varepsilon^2} (1+|z|^2)^2 h_\varrho(1,1)^{-1}\Big|\frac{\partial}{\partial z}(h_\varrho(1,1)\frac{\partial f}{\partial \overline{z}})\Big|^2 dz \wedge d\overline{z} \quad \textit{pour } 0 < \varepsilon \ll 1 \\
&\geq \frac{i}{2\pi}\int_{1+\varepsilon>|z|>1+\varepsilon^2} h_\varrho(1,1)^{-1}\Big|\frac{\partial}{\partial z}(h_\varrho(1,1))\Big|^2 dz \wedge d\overline{z} \\
&\geq \frac{i}{2\pi}\int_{1+\varepsilon>|z|>1+\varepsilon^2} h_\varrho(1,1)\Big|\frac{\partial}{\partial z}(\log h_\varrho(1,1))\Big|^2 dz \wedge d\overline{z} \\
&\geq \frac{i}{2\pi}\int_{1+\varepsilon>|z|>1+\varepsilon^2} \exp\Big(\sqrt{|1-|z||}\Big)\Big|\frac{\partial}{\partial z}\sqrt{|1-|z||}\Big|^2 dz \wedge d\overline{z} \\
&\geq \int_{1+\varepsilon>r>1+\varepsilon^2} \exp\Big(\sqrt{|1-|r||}\Big)\frac{r dr}{4(r-1)} \\
&\geq \exp(\varepsilon^2)(\varepsilon - \varepsilon^2 - \log\varepsilon).
\end{aligned}$$

Donc,

$$\|\Delta_\varrho f\|_{L^2} = \infty.$$

Le résultat suivant sera utilisé dans la suite :

Théorème 3.3.10. *Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^d$, et f une fonction convexe et différentiable sur U. Soient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_{\geq 1}}$ une suite de fonctions convexes et différentiables sur U telle que $\lim\limits_{n\mapsto\infty} f_n(x) = f(x)$ pour tout $x \in U$. Alors*

$$\lim_{n\mapsto\infty} \nabla f_n(x) = \nabla f(x), \quad \forall x \in U.$$

On montre que la suite $(\nabla f_n)_{n\in\mathbb{N}_{\geq 1}}$ converge uniformément vers ∇f sur tout sous ensemble fermé borné et convexe de U.

Démonstration. Voir [Roc70, Théorème 25.7]. □

Soit $\mathbb{P}^1$ la droite projective complexe et on considère l'application suivante :

$$\begin{aligned}\kappa : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{P}^1\\ u &\mapsto \exp(-u).\end{aligned}$$

Dans la proposition suivante on décrit le lien entre les métriques intégrables et invariantes par $\mathbb{S}^1$ sur les fibrés en droites sur $\mathbb{P}^1$ et les fonctions concaves sur $\mathbb{R}$.

Proposition 3.3.11. *Soit h_∞ une métrique intégrable sur un fibré en droites sur $\mathbb{P}^1$. On suppose que h est invariante par $\mathbb{S}^1$ et on pose*

$$\mathcal{C}_\infty(u) := \kappa^*\Big(\log h(1,1)\Big)(u) = \log h(1,1)(\exp(-u)) \quad \forall\, u \in \mathbb{R}.$$

Alors, il existe deux fonctions concaves sur $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ telles que

$$\mathcal{C}(u) = \mathcal{C}_1(u) - \mathcal{C}_2(u) \quad \forall\, u \in \mathbb{R}.$$

La fonction $\log h_\infty(1,1)$ est différentiable presque partout sur $\mathbb{C}$ et si l'on note par $\frac{\partial}{\partial z}\log h_\infty(1,1)$ sa dérivée définie presque partout, alors elle est bornée sur tout compact de $\mathbb{P}^1 \setminus \{0,\infty\}$. En plus, si $(h_{n,1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(h_{2,n})_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de métriques positives $\mathcal{C}^\infty$ qui convergent vers $h_{\infty,1}$ respectivement vers $h_{\infty,2}$ telles que $h_\infty = h_{\infty,1} \otimes h_{\infty,2}^{-1}$ alors la suite

$$\Big(\frac{\partial}{\partial z}\log h_{\infty,1} - \frac{\partial}{\partial z}\log h_{\infty,2}\Big)_{n\in\mathbb{N}} \tag{3.15}$$

est uniformément bornée sur tout compact de $\mathbb{P}^1 \setminus \{0,\infty\}$.

Démonstration. Il suffit de montrer la proposition pour h une métrique admissible. Par définition, il existe $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de métriques positives de classe $\mathcal{C}^\infty$ qui converge uniformément vers h_∞. On pose

$$\mathcal{C}_n(u) := \log h_n(1,1)(\exp(-u)) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}.$$

Alors $(\mathcal{C}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $\mathcal{C}_\infty$, donc pour montrer que $\mathcal{C}_\infty$ est concave, il suffit de montrer que $\mathcal{C}_n$ est concave pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui est une conséquence du lemme (3.3.13).

On rappelle quelques résultats sur les fonctions convexes sur $\mathbb{R}^d$, avec $d \geq 1$. Soit f une fonction convexe sur $\mathbb{R}^d$. On appelle sous-différentielle de f en x l'ensemble (éventuellement vide) suivant

$$(\partial f)(x) := \{v \in \mathbb{R}^d \,|\, f(y) \geq f(x) + (v, y-x),\, \forall y \in \mathbb{R}^d\}$$

où $(\ ,\ )$ est le produit scalaire standard sur $\mathbb{R}^d$. Notons que lorsque f est différentiable alors $(\partial f)(x) = \{(\nabla f)(x)\}$, où $(\nabla f)(x)$ est le gradient de f en x pour la métrique standard de $\mathbb{R}^d$.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions réelles convexes (non nécessairement différentiables) sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, si cette suite converge simplement vers une fonction finie f sur I, alors on montre que f est une fonction convexe sur I et l'ensemble $\{f, f_n\,, n \geq 0\}$ est localement équilipschitzien sur I. Dans notre situation, f_n seront des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, par ce qui précède l'ensemble

$$\{(\partial f)(x),\, (\nabla f_n)(x)\ \forall\, n \geq 0\},$$

est borné au voisinage de x.

Un théorème bien connu dû à Rademacher affirme que toute fonction réelle lipschtizienne sur un ouvert U non vide de $\mathbb{R}^d$ est différentiable presque partout sur U. Ce résultat est valable si l'on considère les fonctions convexes puisqu'elles sont localement lipschitziennes.

On termine la démonstration de la proposition en notant que

$$\Big|\frac{\partial \mathcal{C}_n}{\partial u}\Big| = |z|\Big|\frac{\partial}{\partial z}\log h_n(1,1)\Big| \quad \forall\, z \in \mathbb{C},\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

□

Remarque 3.3.12. Rappelons que la correspondance entre les métriques positives invariantes par $\mathbb{S}^1$ (plus généralement par un tore compact) et les fonctions concaves réelles a été utilisée dans [BGPS11] dans le but d'étudier l'arithmétique des variétés toriques projectives.

Lemme 3.3.13. *Soit ψ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{C}$ vérifiant sur $\mathbb{C}$:*

1. $\psi(z) = \psi(|z|)$,
2. $\frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial\overline{z}} \geq 0$.

Alors, la fonction $\mathcal{C}$ définie par $\mathcal{C}(u) = \psi(\exp(-u))$, $\forall u \in \mathbb{R}$ est concave sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\frac{\partial\psi}{\partial z}(0) = 0. \tag{3.16}$$

Démonstration. On a la fonction $z \mapsto \frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial\overline{z}}$ est continue sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$, donc si l'on fixe $0 < \eta \ll 1$, alors il existe une constante c telle que

$$\Big|\frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial\overline{z}}(z)\Big| \leq c \quad \forall\, |z| \leq \eta,$$

mais $\frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial\overline{z}}(z) = \frac{1}{4r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial\psi}{\partial r})$, par conséquent

$$\Big|\frac{\partial}{\partial r}\Big(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\Big)\Big| \leq 4cr \quad \forall\, 0 < r \leq \eta.$$

Soit $0 < \varepsilon < \eta$, par intégration entre r et ε, on obtient

$$\Big|r\frac{\partial\psi}{\partial r}(r) - \varepsilon\frac{\partial\psi}{\partial r}(\varepsilon)\Big| \leq 2c|r^2 - \varepsilon^2| \quad \forall\, 0 < r \leq \eta$$

Comme ψ est $\mathcal{C}^\infty$, donc on peut faire tendre ε vers 0 et on trouve que

$$\Big|\frac{\partial\psi}{\partial r}(r)\Big| \leq 2cr \quad \forall\, 0 < r \leq \eta,$$

On conclut que

$$\frac{\partial\psi}{\partial z}(0) = 0.$$

On note par $\mathcal{C}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathcal{C}(u) = \psi(\exp(-u))$ $\forall u \in \mathbb{R}$. On va montrer que cette fonction est concave. En effet, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial\overline{z}} &= -\frac{1}{4r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial\psi}{\partial r}), \quad r := |z| \\
&= -\frac{1}{4r^2}r\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial\psi}{\partial r}) \\
&= -\frac{1}{4}\exp(2u)\frac{\partial^2\mathcal{C}}{\partial u^2}, \quad \text{puisque} \quad \frac{\partial\mathcal{C}}{\partial u} = -r\frac{\partial\psi}{\partial r} = -\exp(-u)\frac{\partial\psi}{\partial r},
\end{aligned}$$

donc $\mathcal{C}$ est concave.

□

Exemple 3.3.14. *l'exemple suivant peut être vu comme un contre exemple à l'assertion* (3.3.10).

Soit ρ une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$ vérifiant :

1. $\rho(r) = 0$ *pour* $r >> 1$.
2. $\sup_{r\in\mathbb{R}^+} |\rho(r)| \leq 1$.
3. $\rho'(1) \neq 0$.

Soit $a > 0$. Alors la suite de métriques sur $\mathcal{O}$

$$h_p(1,1)(z) = \exp(-\frac{1}{p^a}\rho(|z|^p), \forall z \in \mathbb{C}.$$

converge uniformément vers la métrique triviale de $\mathcal{O}$, c'est à dire la métrique $h_\infty(1,1) := 1$.

Remarquons que

$$|\frac{\partial}{\partial z}\log h_p(1,1)(z)| = |p^{1-a}\frac{\partial\rho}{\partial r}(|z|^p)|z|^{p-1}\frac{\overline{z}}{2|z|}| = \frac{p^{1-a}}{2}|\frac{\partial\rho}{\partial r}(|z|^p)||z|^{p-1}$$

donc si $|z| = 1$, alors

$$|\frac{\partial}{\partial z}\log h_p(1,1)(z)| = \frac{p^{1-a}}{2}|\frac{\partial\rho}{\partial r}(1)|$$

On a

$$\begin{aligned}
\int_X \widetilde{ch}(\mathcal{O}, h_p, h_\infty) &= \frac{1}{2}\int_X \log h_p(1,1)c_1(\mathcal{O}, h_p) \\
&= \frac{1}{2}\int_X |\frac{\partial}{\partial z}\log h_p(1,1)|^2 dz\wedge d\overline{z} \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{C}} \frac{1}{4}p^{2-2a}|\frac{\partial\rho}{\partial r}(|z|^p)|^2|z|^{2p-2}dz\wedge d\overline{z} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1}{4}p^{2-2a}|\frac{\partial\rho}{\partial r}(r^p)|^2 r^{2p-2}rdr \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1}{4}p^{2-2a}|\theta(r^p)|^2 r^{2p-1}dr, \quad \text{où } \theta(r) := \frac{\partial\rho}{\partial r}(r) \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1}{4}p^{2-2a}|\theta(r)|^2\frac{1}{p}rdr \\
&= \frac{1}{8}p^{1-2a}\int_0^\infty |\theta(r)|^2 rdr.
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
\int_X \widetilde{ch}(\mathcal{O}, h_p, h_q) &= \int_X \widetilde{ch}(\mathcal{O}, h_p, h_\infty) - \widetilde{ch}(\mathcal{O}, h_q, h_\infty), \quad [GS90b, (1.3.4.2)] \\
&= \frac{1}{8}(q^{1-2a} - p^{1-2a})\int_0^\infty |\theta(r)|^2 rdr
\end{aligned}$$

On a donc

$$\Big[\int_X \widetilde{ch}(\mathcal{O}, h_p, h_q) Td(\overline{TX})\Big]^{(0)} = \frac{1}{8}(q^{1-2a} - p^{1-2a}) \int_0^\infty |\theta(r)|^2 r dr + \frac{1}{12}\int_X \log\frac{h_p}{h_q} c_1(\overline{TX})$$
$$= \frac{1}{8}(q^{1-2a} - p^{1-2a}) \int_0^\infty |\theta(r)|^2 r dr + \frac{1}{12}\int_X (\frac{\rho(|z|^q)}{q^a} - \frac{\rho(|z|^p)}{p^a}) c_1(\overline{TX})$$

Si l'on choisit $0 < a < \frac{1}{2}$*, alors cette suite n'est pas de Cauchy.*

Remarque 3.3.15. Dans la proposition (3.3.11), on a montré que (3.15) est bornée sur tout compact de $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, \infty\}$. Le résultat suivant a pour but d'étendre ce résultat aux compacts de $\mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\}$:

Soit $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{C}$ vérifiant

1. $\psi_n \leq \psi_{n+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.
2. ψ_n converge simplement vers une fonction ψ_∞ telle que $z \mapsto \left|\frac{\psi_\infty(z) - \psi_\infty(z)}{z}\right|$ est bornée au voisinage de $z = 0$.
3. $\psi_n(0) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
4. $\psi_n(z) = \psi_n(|z|)$, $\forall\, z \in \mathbb{C}\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.
5. $\frac{\partial^2 \psi_n}{\partial z \partial \overline{z}}(z) \geq 0$, $\forall\, z \in \mathbb{C}$.

Alors, pour tout $p_0 \in \mathbb{N}$ et tout compact K de $\mathbb{C}$ il existe k une constante réelle telle que

$$\left|\frac{\partial \psi_p}{\partial z}(z)\right| \leq k \quad \forall p \geq p_0\ \forall\, z \in K.$$

En effet, soit ε un réel fixé. On pose

$$\mathcal{C}_p(u) = \psi_p(\exp(-u)) \quad \forall\, u \in \mathbb{R}.$$

Par concavité de $\mathcal{C}_p$, on a

$$\mathcal{C}_p(u + \varepsilon) - \mathcal{C}_p(u) \leq \varepsilon \frac{\partial \mathcal{C}_p}{\partial u}(u) \quad \forall\, u \in \mathbb{R}\ \forall\, p \in \mathbb{N},$$

d'où

$$\frac{1}{r}\Big(\psi_p(r\exp(-\varepsilon)) - \psi_p(r)\Big) \leq -\varepsilon \frac{\partial \psi_p}{\partial r}(r) \quad \text{avec } \big(r = \exp(-u)\big).$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\varepsilon \psi_p'(r) &\leq \frac{\psi_p(r)}{r} - \frac{\psi_p(r\exp(-\varepsilon))}{r} \\
&\leq \frac{\psi_\infty(r)}{r} - \frac{\psi_{p_0}(r\exp(-\varepsilon))}{r} \quad \text{pour } \forall\, p \geq p_0 \\
&= \frac{\psi_\infty(r) - \psi_\infty(0)}{r} - \frac{\psi_{p_0}(r\exp(-\varepsilon)) - \psi_{p_0}(0)}{r} \quad \forall p \geq p_0 \\
&\leq \sup_{x\in K}\left|\frac{\psi_\infty(x) - \psi_\infty(0)}{x}\right| + \exp(-\varepsilon) \sup_{x\in K}\left|\frac{\psi_{p_0}(x) - \psi_{p_0}(0)}{x}\right| \quad \text{si } r \in K,\ \forall p \geq p_0.
\end{aligned}$$

avec K un compact non vide de $\mathbb{C}$. Comme ε est arbitraire, on déduit que

$$|\psi_p'(z)| \leq \sup_{x\in K}\left|\frac{\psi_\infty(x) - \psi_\infty(0)}{x}\right| + e \sup_{x\in K}\left|\frac{\psi_{p_0}(x) - \psi_{p_0}(0)}{x}\right| \quad \forall z \in K\ \forall p \geq p_0.$$

Un exemple de ces suites est donné par :

$$\psi_n(z) := \log\Big(1 + |z|^n\Big)^{\frac{1}{n}} \quad \forall\, z \in \mathbb{C}\ \forall\, n \in \mathbb{N}_{\geq 1}.$$

On suppose maintenant que $X = \mathbb{P}^1$ qu'on munit d'une métrique kählerienne et E un fibré en droites sur $\mathbb{P}^1$. Soit $h_{E,\infty}$ une métrique intégrable sur E invariante par l'action de $\mathbb{S}^1$. On va montrer qu'il existe un moyen naturel d'associer à cette classe métriques un opérateur Laplacien étendant la définition classique.

On va montrer, d'abord, que si h_E est une métrique positive invariante par l'action de $\mathbb{S}^1$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur E, alors

$$\Big(\frac{\partial}{\partial z}\log h_E(1,1)\Big)(0) = 0.$$

En effet, si l'on pose $\psi = \log h_E(1,1)$ alors ψ vérifie les hypothèses du (3.3.13). Si l'on note par $\Delta_{E,h}$ le Laplacien généralisé associé alors on a, pour tout $z \in \mathbb{P}^1$, $f \in A^{(0,0)}(\mathbb{P}^1)$ et $\sigma \in H^0(\mathbb{P}^1, E)$:

$$\begin{aligned}\Delta_{E,h}(f\otimes\sigma)(z) = &-h_X\Big(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-1} h_E(\sigma,\sigma)^{-1}\frac{\partial}{\partial z}\Big(h_E(\sigma,\sigma)\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\Big)\otimes\sigma\\ &- h_X\Big(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-1}\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial\overline{z}}\otimes\sigma - h_X\Big(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-1}\Big(h(\sigma,\sigma)^{-1}\frac{\partial}{\partial z}h(\sigma,\sigma)\Big)\otimes\sigma\end{aligned}$$

Or, on a

$$\begin{aligned}\Big(h(\sigma,\sigma)^{-1}\frac{\partial}{\partial z}h(\sigma,\sigma)\Big)\otimes\sigma &= \frac{\frac{\partial}{\partial z}(|\sigma|^2 e^{-\psi})}{|\sigma|^2 e^{-\psi}}\\ &= \frac{\frac{\partial\sigma}{\partial z}\overline{\sigma}e^{-\psi} + |\sigma|^2\frac{\partial}{\partial z}e^{-\psi}}{|\sigma|^2 e^{-\psi}}\otimes\sigma\\ &= \Big(\frac{\frac{\partial}{\partial z}\sigma}{\sigma} + \frac{\frac{\partial}{\partial z}e^{-\psi}}{e^{-\psi}}\Big)\otimes\sigma\\ &= \Big(\frac{\frac{\partial}{\partial z}\sigma}{\sigma} + \frac{\frac{\overline{z}}{2r}\frac{\partial}{\partial r}e^{-\psi(r)}}{e^{-\psi}}\Big)\otimes\sigma\\ &= \Big(\frac{\frac{\partial}{\partial z}\sigma}{\sigma} - \frac{\overline{z}}{2r}\frac{\partial\psi}{\partial r}(r)\Big)\otimes\sigma\\ &= \Big(\frac{\frac{\partial}{\partial z}\sigma}{\sigma} + \frac{\overline{z}}{2r^2}\frac{\partial\mathcal{C}}{\partial u}(u)\Big)\otimes\sigma,\end{aligned}$$

on a posé $\mathcal{C}(u) = \log h(1,1)$. Donc,

$$\Delta_{E,h}(f\otimes\sigma)(z) = -h_X\Big(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-1}\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial\overline{z}}\otimes\sigma - h_X\Big(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-1}\Big(\frac{\frac{\partial}{\partial z}\sigma}{\sigma} + \frac{\overline{z}}{2r^2}\frac{\partial\mathcal{C}}{\partial u}(u)\Big)\otimes\sigma \quad \forall z\neq 0,\ u = -\log|z|,$$

Commençons par supposer que $h_{E,\infty}$ est admissible. On pose

$$\mathcal{C}_\infty(u) := \log h_\infty(1,1)(\exp(-u)) \quad \forall\, u\in\mathbb{R}.$$

On rappelle que $\mathcal{C}_\infty$ est une fonction concave sur $\mathbb{R}$ et on note par $\frac{\partial\mathcal{C}_{d,\infty}}{\partial u}$ sa dérivée à droite, qui est finie. On a alors le résultat suivant :

Théorème 3.3.16. *On pose pour tout $f \in A^{0,0}(\mathbb{P}^1)$ et pour tout $\sigma \in H^0(\mathbb{P}^1, E)$*

$$\Delta'_{\overline{E}_\infty}(f\otimes\sigma)(z) := -h_X\Big(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-1}\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial\overline{z}}\otimes\sigma - h_X\Big(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-1}\Big(\frac{\frac{\partial}{\partial z}\sigma}{\sigma} + \frac{\overline{z}}{2r^2}\frac{\partial\mathcal{C}_{d,\infty}}{\partial u}(u)\Big)\otimes\sigma \quad \forall z\neq 0,\ u = -\log|z|,$$

et

$$\Delta'_{\overline{E}_\infty}(f\otimes\sigma)(0) := -h_X\Big(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-1}\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial\overline{z}}\otimes\sigma - h_X\Big(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-1}\Big(\frac{\frac{\partial}{\partial z}\sigma}{\sigma}\Big)\frac{\partial f}{\partial\overline{z}}\otimes\sigma.^{2}.$$

Alors, on a

1. $\Delta'_{\overline{E}_\infty}$ *est un opérateur linéaire de* $A^{(0,0)}(\mathbb{P}^1,E)$ *vers* $\overline{A^{(0,0)}(\mathbb{P}^1,E)}_\infty$, *en d'autres termes*

$$\Big\|\Delta'_{\overline{E}_\infty}(f\otimes\sigma)\Big\|^2_{L^2,\infty}<\infty.$$

2. $$\Delta'_{\overline{E}_\infty}=\Delta_{\overline{E}_\infty},$$

dans $\overline{A^{0,0}(\mathbb{P}^1,E)}_\infty$.

Démonstration. Soient $f\in A^{0,0}(\mathbb{P}^1)$ et $\sigma\in H^0(\mathbb{P}^1,E)$.

Puisque $\mathcal{C}_\infty$ est différentiable presque partout sur $\mathbb{R}$, alors on a :

$$\begin{aligned}\Delta'_{\overline{E}_\infty}(f\otimes\sigma) &= -h_X\Big(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-1}\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial\overline{z}}\otimes\sigma - h_X\Big(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-1}\log h_\infty(\sigma,\sigma)\frac{\partial f}{\partial\overline{z}}\otimes\sigma, \quad \text{(par définition)}\\ &= -h_X\Big(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-1}h_\infty(\sigma,\sigma)^{-1}\frac{\partial}{\partial z}(h_\infty(\sigma,\sigma)\frac{\partial f}{\partial\overline{z}})\otimes\sigma,\end{aligned}$$

presque partout sur $\mathbb{C}$. Par suite

$$\Big\|\Delta'_{\overline{E}_\infty}(f\otimes\sigma)\Big\|^2_{L^2,\infty}=\frac{i}{2\pi}\int_X h_X\Big(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-1}h_\infty(\sigma,\sigma)^{-1}\Big|\frac{\partial}{\partial z}\Big(h_\infty(\sigma,\sigma)\frac{\partial f}{\partial\overline{z}}\Big)\Big|^2 dz\wedge d\overline{z}$$

Or c'est la limite de $\Big(\|\Delta_{\overline{E}_p}(f\otimes\sigma)\|^2_{L^2,p}\Big)_{p\in\mathbb{N}}$ quand p tend vers ∞, donc

$$\|\Delta'_{\overline{E}_\infty}(f\otimes\sigma)\|^2_{L^2,\infty}<\infty.$$

C'est donc un opérateur linéaire de $A^{0,0}(X,E)$ vers $\overline{A^{0,0}(X,E)}$.

On a

$$\begin{aligned}(\Delta'_{\overline{E}_\infty}(f\otimes\sigma),g\otimes\tau)_{L^2,\infty} &= -\int_X h_\infty(\sigma,\sigma)^{-1}\frac{\partial}{\partial z}(h_\infty(\sigma,\sigma)\frac{\partial f}{\partial\overline{z}})\,\overline{g}\,h_\infty(\sigma,\tau)dz\wedge d\overline{z}\\ &= -\frac{i}{2\pi}\lim_{p\mapsto\infty}\int_X h_p(\sigma,\sigma)^{-1}\frac{\partial}{\partial z}(h_p(\sigma,\sigma)\,\frac{\partial f}{\partial\overline{z}})\,\overline{g}\,h_p(\sigma,\tau)\,dz\wedge d\overline{z}\\ &= \frac{i}{2\pi}\lim_{p\mapsto\infty}\int_X h_p(\sigma,\tau)\,\frac{\partial f}{\partial\overline{z}}\,\frac{\partial\overline{g}}{\partial z}\,dz\wedge d\overline{z}\\ &= \frac{i}{2\pi}\int_X h_{E,\infty}(\sigma,\tau)\,\frac{\partial f}{\partial\overline{z}}\,\frac{\partial\overline{g}}{\partial z}\,dz\wedge d\overline{z}\end{aligned}$$

On en déduit que

$$(\Delta'_{\overline{E}_\infty}\xi,\eta)_{L^2,\infty}=(\xi,\Delta'_{\overline{E}_\infty}\eta)_{L^2,\infty}$$

et

$$(\Delta'_{\overline{E}_\infty}\xi,\xi)_{L^2,\infty}\geq 0,$$

2. Notons que la dernière expression est tout a fait raisonnable, puisqu'on a montré, voir lemme (3.3.13), que $\frac{\partial\psi}{\partial z}(0)=0$ pour une métrique de classe $\mathcal{C}^\infty$ où ψ une fonction qui définie la métrique au voisinage de zéro.

pour tout ξ et η dans $A^{(0,0)}(X,E)$.

De (3.13), on conclut que

$$\Delta_{\overline{E}_\infty} = \Delta'_{\overline{E}_\infty},$$

dans $\overline{A^{0,0}(\mathbb{P}^1,E)}$. □

Définition 3.3.17. *On appelle $\Delta_{\overline{E}_\infty}$ le Laplacien généralisé associé à $h_{E,\infty}$. C'est un opérateur linéaire et positif de $A^{0,0}(\mathbb{P}^1,E)$ à valeurs dans $\overline{A^{0,0}(\mathbb{P}^1,E)}_\infty$.*

3.4 Variation de la métrique sur E

Soit $\overline{E}_\infty := (E, h_{E,\infty})$ un fibré en droites 1-intégrable sur X, une surface de Riemann compacte. Par définition (voir (3.2.13)) il existe $\overline{E}_{1,\infty} := (E_1, h_{1,\infty})$ et $\overline{E}_{2,\infty} := (E_2, h_{2,\infty})$ deux fibrés en droites admissibles sur X tels que $\overline{E}_\infty = \overline{E}_{1,\infty} \otimes \overline{E}_{2,\infty}^{-1}$. Soient $(h_{n,1})_{n\in\mathbb{N}}$ (resp. $(h_{n,2})_{n\in\mathbb{N}}$) une suite de métrique hermitiennes positives de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur E_1 (resp. sur E_2) qui converge uniformément vers $h_{1,\infty}$ (resp. $h_{2,\infty}$) sur X entier. On note par $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de métrique sur E définie par $h_n = h_{n,1} \otimes h_{n,2}^{-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ vérifiant :

1. $$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| h_X\Big(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial z} \log \frac{h_{n+1}}{h_n} \right\|_{\sup} < \infty$$

   où $\{\frac{\partial}{\partial z}\}$ est une base locale de TX. Rappelons que $\left| h_X\Big(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial z} \log \frac{h_{n+1}}{h_n} \right|$ ne dépend pas du choix de la base locale.

2. $$\sum_{n=1}^{\infty} \left\| \frac{h_n}{h_{n-1}} - 1 \right\|_{\sup}^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

On considère l'opérateur Laplacien $\Delta_{\overline{E}_\infty}$ associé à $\overline{E}_\infty$, voir (3.3.6), on a montré qu'il est positif. Afin d'étudier ses propriétés spectrales, on a besoin d'étendre $\Delta_{\overline{E}_\infty}$ en un opérateur autoadjoint. On prend alors, $\Delta_{\overline{E}_\infty,F}$, l'extension de Friedrichs de $\Delta_{\overline{E}_\infty}$. C'est un opérateur autoadjoint qui étend $\Delta_{\overline{E}_\infty}$, (voir [MM07, Appendice C.] pour la construction). Comme $\Delta_{\overline{E}_\infty}$ est positif, alors $\Delta_{\overline{E}_\infty,F}$ l'est aussi. D'après (3.7.3), on peut considérer on peut considérer le semi-groupe associé qu'on note par $e^{-t\Delta_{\overline{E}_\infty}}$.

Dans ce paragraphe, nous établissons la connexion entre $\left(e^{-t\Delta_{E,h_n}}\right)_n$ et $e^{-t\Delta_{E,h_\infty}}$, on va montrer que

$$\left(e^{-t\Delta_{\overline{E}_n}}\right)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow[n\mapsto\infty]{} e^{-t\Delta_{\overline{E}_\infty}}.$$

pour la norme L^2_∞ (induite par $h_{E,\infty}$ et h_X).

Dans la suite, on note par $(h_u)_{u\geq 1}$ la famille associée à la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ construite dans (3.7.1). Pour simplifier, on notera par $\Delta_{E,n}$ (resp. $\Delta_{E,u}$) au lieu de $\Delta_{\overline{E}_n}$ (resp. $\Delta_{\overline{E}_u}$).

Soit $x \in X$ et σ une section locale holomorphe de E non nulle en x. On pose

$$k_\sigma(u)(x') = \left| \frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial}{\partial z} \log h_u(\sigma,\sigma)(x') \right|,$$

pour tout x' dans un voisinage ouvert assez petit de x. Au voisinage de x, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial}{\partial z}\log h_u(\sigma,\sigma) &= \frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial}{\partial z}\log\Big(\rho_{p-1}(u)h_{p-1}(\sigma,\sigma)+(1-\rho_{p-1}(u))h_p(\sigma,\sigma)\Big) \quad \forall u\in[p-1,p]\\
&= \frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial}{\partial z}\log\Big(\rho_{p-1}(u)|\sigma|^2e^{-\psi_{p-1}(z)}+(1-\rho_{p-1}(u))|\sigma|^2e^{-\psi_p(z)}\Big)\\
&= \frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial}{\partial z}\log|\sigma|^2+\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial}{\partial z}\log\Big(\rho_{p-1}(u)e^{-\psi_{p-1}(z)}+(1-\rho_{p-1}(u))e^{-\psi_p(z)}\Big)\\
&= \frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial}{\partial z}\log\Big(\rho_{p-1}(u)e^{-\psi_{p-1}(z)}+(1-\rho_{p-1}(u))e^{-\psi_p(z)}\Big).
\end{aligned}$$

Par conséquent, on peut définir une fonction réelle sur X entier en posant

$$k(u)(x)=k_\sigma(u)(x) \quad \forall x\in X\,\forall\,\sigma\in H^0(X,E) \text{ telle que } \sigma(x)\neq 0.$$

et on pose

$$\pi_E(u):=\sup_{x\in X} h_X\Big(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-\frac{1}{2}}|k(u)(x)|, \quad \forall u\in[1,\infty[.$$

Lemme 3.4.1. *Pour tout $u\geq 1$, on a $h(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z})^{-\frac{1}{2}}|k(u)|$ est une fonction continue sur X. Il existe une constante réelle M_3 telle que*

$$\pi_E(u)\leq M_3, \quad \forall u>1.$$

Démonstration. Soit $x\in X$ et $\{\frac{\partial}{\partial z}\}$ une base locale de TX au voisinage de x. Par définition, il existe σ une section holomorphe locale de E telle que $\sigma(x)\neq 0$ et que dans un voisinage de x :

$$k(u)=k_\sigma(u)=\Big|\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial}{\partial z}\log h_u(\sigma,\sigma)\Big|,$$

donc la continuité de k et par suite celle $h(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z})^{-\frac{1}{2}}k(u)$ au voisinage de x résulte du fait que h_u est $\mathcal{C}^\infty$.

On a dans un voisinage de x :

$$\begin{aligned}
k(u) &= \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial u}(\log h_u(\sigma,\sigma))\\
&= \frac{\partial\rho_{p-1}}{\partial u}\Big(\frac{\frac{\partial}{\partial z}h_p-\frac{\partial}{\partial z}h_{p-1}}{h_u}-\frac{h_p-h_{p-1}}{h_u}\frac{\partial}{\partial z}\log h_u\Big)\\
&= \frac{\partial\rho_{p-1}}{\partial u}\frac{h_p}{h_u}\Big(\frac{\partial}{\partial z}\log\frac{h_p}{h_{p-1}}-\Big(\frac{h_{p-1}}{h_p}-1\Big)\frac{\partial}{\partial z}\log h_{p-1}+\Big(\frac{h_{p-1}}{h_p}-1\Big)\frac{\partial}{\partial z}\log h_u\Big) \quad \text{où } (p-1=[u])\\
&= \frac{\partial\rho_{p-1}}{\partial u}\frac{h_p}{h_u}\Big(\frac{\partial}{\partial z}\log\frac{h_p}{h_{p-1}}-\Big(\frac{h_{p-1}}{h_p}-1\Big)\frac{\partial}{\partial z}\log h_{p-1}+\Big(\frac{h_{p-1}}{h_p}-1\Big)\frac{(1-\rho_{p-1})\frac{\partial}{\partial z}h_{p-1}+\rho_{p-1}\frac{\partial}{\partial z}h_p}{h_u}\Big)\\
&= \frac{\partial\rho_{p-1}}{\partial u}\frac{h_p}{h_u}\Big(\frac{\partial}{\partial z}\log\frac{h_p}{h_{p-1}}-\Big(\frac{h_{p-1}}{h_p}-1\Big)\frac{\partial}{\partial z}\log h_{p-1}\\
&+\Big(\frac{h_{p-1}}{h_p}-1\Big)\frac{h_p}{h_u}((1-\rho_{p-1})\frac{h_{p-1}}{h_p}\frac{\partial}{\partial z}\log h_{p-1}+\rho_{p-1}\frac{\partial}{\partial z}\log h_p)\Big)\\
&= \frac{\partial\rho_{p-1}}{\partial u}\frac{h_p}{h_u}\Big(\frac{\partial}{\partial z}\log\frac{h_p}{h_{p-1}}-\Big(\frac{h_{p-1}}{h_p}-1\Big)\frac{\partial}{\partial z}\log h_{p-1}+(1-\rho_{p-1})\Big(\frac{h_{p-1}}{h_p}-1\Big)\frac{h_{p-1}}{h_u}\frac{\partial}{\partial z}\log h_{p-1}\\
&+\rho_{p-1}\Big(\frac{h_{p-1}}{h_p}-1\Big)\frac{h_p}{h_u}\frac{\partial}{\partial z}\log h_p)\Big)
\end{aligned}$$

$$= \frac{\partial \rho_{p-1}}{\partial u}\frac{h_p^2}{h_u^2}\Big(\frac{\partial}{\partial z}\log\frac{h_p}{h_{p-1}} - \frac{h_u}{h_p}\Big(\frac{h_{p-1}}{h_p}-1\Big)\frac{\partial}{\partial z}\log h_{p-1} + (1-\rho_{p-1})\big(\frac{h_{p-1}}{h_p}-1\big)\frac{h_{p-1}}{h_p}\frac{\partial}{\partial z}\log h_{p-1}$$
$$+ \rho_{p-1}\Big(\frac{h_{p-1}}{h_p}-1\Big)\frac{\partial}{\partial z}\log h_p)\Big).$$

Comme les fonctions ρ_p sont uniformément bornées et que la suite $(h_u)_{u\in[1,\infty[}$ converge uniformément vers h_∞, on peut donc trouver M_1', M_2' et M_3' trois constantes réelles telles que

$$h_X\Big(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-\frac{1}{2}}|k(u)| \leq M_1' h_X\Big(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-\frac{1}{2}}\Big|\frac{\partial}{\partial z}\log\frac{h_p}{h_{p-1}}\Big| + M_2' h_X\Big(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-\frac{1}{2}}\Big|\Big(\frac{h_{p-1}}{h_p}-1\Big)\frac{\partial}{\partial z}\log h_{p-1}\Big|$$
$$+ M_3' h_X\Big(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-\frac{1}{2}}\Big|\Big(\frac{h_{p-1}}{h_p}-1\Big)\frac{\partial}{\partial z}\log h_p\Big|.$$

On a

$$\Big|h_X\Big(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-\frac{1}{2}}\Big(\frac{h_{p-1}}{h_p}-1\Big)\frac{\partial}{\partial z}\log h_p\Big| = \Big|h_X\Big(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-\frac{1}{2}}\Big(\frac{h_{p-1}}{h_p}-1\Big)\Big(\sum_{k=2}^{p}\frac{\partial}{\partial z}\log\frac{h_k}{h_{k-1}} + \frac{\partial}{\partial z}\log h_1\Big)\Big|$$
$$\leq \Big|\frac{h_{p-1}}{h_p}-1\Big|\sum_{k=2}^{p} h_X\Big(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-\frac{1}{2}}\Big|\frac{\partial}{\partial z}\log\frac{h_k}{h_{k-1}}\Big| + h_X\Big(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-\frac{1}{2}}\Big|\frac{\partial}{\partial z}\log h_1\Big|$$
$$\leq (p-1)\sup_{n\in\mathbb{N}^*}\Big\|h_X\Big(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial z}\log\frac{h_n}{h_{n-1}}\Big\|_{\sup}\Big|\frac{h_{p-1}}{h_p}-1\Big|$$
$$+ h_X\Big(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-\frac{1}{2}}\Big|\frac{\partial}{\partial z}\log h_1\Big|\Big|\frac{h_{p-1}}{h_p}-1\Big|,$$

de la même façon, on obtient :

$$\Big|h_X\Big(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-\frac{1}{2}}\Big(\frac{h_{p-1}}{h_p}-1\Big)\frac{\partial}{\partial z}\log h_{p-1}\Big| \leq (p-2)\sup_{n\in\mathbb{N}^*}\Big\|h_X\Big(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial z}\log\frac{h_n}{h_{n-1}}\Big\|_{\sup}\Big|\frac{h_{p-1}}{h_p}-1\Big|$$
$$+ h_X\Big(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-\frac{1}{2}}\Big|\frac{\partial}{\partial z}\log h_1\Big|\Big|\frac{h_{p-1}}{h_p}-1\Big|.$$

Donc, on a

$$h_X\Big(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-\frac{1}{2}}|k(u)| \leq M_1'\sup_{n\in\mathbb{N}^*}\Big\|h_X\Big(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-\frac{1}{2}}\Big|\frac{\partial}{\partial z}\log\frac{h_n}{h_{n-1}}\Big\|_{\sup}$$
$$+ M_2''(2p-3)\Big|\frac{h_{p-1}}{h_p}-1\Big|\sup_{n\in\mathbb{N}^*}\Big\|h_X\Big(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial z}\log\frac{h_n}{h_{n-1}}\Big\|_{\sup}$$
$$+ M_3'' h_X\Big(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-\frac{1}{2}}\Big|\frac{\partial}{\partial z}\log h_1\Big|\Big|\frac{h_{p-1}}{h_p}-1\Big|$$

Puisque $k(u)$ ne dépend pas du choix de la section locale σ et que X est compacte, on peut trouver $(U_j)_{j\in J}$ un recouvrement ouvert fini de X tel que déduire que pour tout $j\in J$, $k(u) = k_{\sigma_j}(u)$ sur U_j et σ_j une section locale non nulle et que

$$\Big|h_X\Big(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial z}\log h_1(s_j,s_j)\Big|,$$

soit bornée sur U_j. Par suite, il existe M_4'', une constante réelle telle que

$$\begin{aligned} h_X\Big(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-\frac{1}{2}}|k(u)| &\leq M_1' \sup_{n\in\mathbb{N}^*}\Big\|h_X\Big(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-\frac{1}{2}}\Big|\frac{\partial}{\partial z}\log\frac{h_n}{h_{n-1}}\Big\|_{\sup} \\ &+ M_2''(2p-3)\Big|\frac{h_{p-1}}{h_p}-1\Big| \sup_{n\in\mathbb{N}^*}\Big\|h_X\Big(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial z}\log\frac{h_n}{h_{n-1}}\Big\|_{\sup} \\ &+ M_4''\Big|\frac{h_{p-1}}{h_p}-1\Big|. \end{aligned}$$

Montrons maintenant le reste du lemme, on a :

$$\begin{aligned} \pi_E(u) &= \sup_{x\in X} h_X\Big(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-\frac{1}{2}}|k(u)| \\ &\leq M_1' \sup_{n\in\mathbb{N}^*}\Big\|h_X\Big(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial z}\log\frac{h_n}{h_{n-1}}\Big\|_{\sup} \\ &+ M_2''(2p-3)\Big\|\frac{h_{p-1}}{h_p}(x)-1\Big\|_{\sup}\sup_{n\in\mathbb{N}^*}\Big\|h_X\Big(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial z}\log\frac{h_n}{h_{n-1}}\Big\|_{\sup} \\ &+ M_4''\Big\|\frac{h_{p-1}}{h_p}(x)-1\Big\|_{\sup}. \end{aligned}$$

Comme $(h_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers h_∞, alors on peut supposer que

$$\sup_{p\in\mathbb{N}^*}\Big(p\Big\|\frac{h_{p-1}}{h_p}-1\Big\|_{\sup}\Big)<\infty.$$

On conclut qu'il existe M_3 une constante réelle telle que

$$\pi_E(u)\leq M_3,\quad \forall u>1.$$

□

Remarque 3.4.2. Par (3.6), on a, il existe $c_4\in\mathbb{R}$ telle que

$$\|\pi_E(u)\|_{\sup}\underset{u\mapsto\infty}{\sim}\frac{c_4}{u}.$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} |h(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z})^{-\frac{1}{2}}k(u)|+|O(\frac{h_{p-1}}{h_p}-1)| &\geq |h(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z})^{-\frac{1}{2}}k(u)-O(\frac{h_{p-1}}{h_p}-1)| \\ &= |\frac{\partial\rho_{p-1}}{\partial u}h(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z})^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial z}\log\frac{h_p}{h_{p-1}}| \\ &\geq \frac{\partial\rho_{p-1}}{\partial u}|h(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z})^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial z}\log\frac{h_p}{h_{p-1}}|, \end{aligned}$$

donc

$$\|h(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z})^{-\frac{1}{2}}k(u)\|_{\sup}+\|O(\frac{h_{p-1}}{h_p}-1)\|_{\sup}\geq\frac{\partial\rho_{p-1}}{\partial u}\|h(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z})^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial z}\log\frac{h_p}{h_{p-1}}\|_{\sup}\underset{p\mapsto\infty}{\sim}\frac{c_4}{p},$$

mais comme $O(\frac{h_{p-1}}{h_p}-1)=O(\frac{1}{p^2})$, alors

$$\limsup_{u\mapsto\infty}\Big(p\|h(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z})^{-\frac{1}{2}}k(u)\|_{\sup}\Big)\geq c_4.$$

Théorème 3.4.3. *On a, pour tout $\xi \in A^{0,0}(X,E)$:*

$$\Big(\frac{\partial \Delta_{E,u}}{\partial u}\xi, \frac{\partial \Delta_{E,u}}{\partial u}\xi\Big)_{L^2,u} \leq \pi_E^2(u)(\Delta_{E,u}\xi,\xi)_{L^2,u} \quad \forall u > 1. \tag{3.17}$$

Démonstration. On a, localement

$$\Delta_{E,u}(f\otimes\sigma) = -h_X\Big(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-1}\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial\overline{z}}\otimes\sigma - h_X\Big(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-1}\frac{\partial}{\partial z}(\log h_u(\sigma,\sigma))\frac{\partial f}{\partial\overline{z}}\otimes\sigma.$$

où $f \in A^{(0,0)}(X)$ et σ est section locale holomorphe non nulle. donc

$$\frac{\partial \Delta_{E,u}}{\partial u}(f\otimes\sigma) = -h_X\Big(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-1}\frac{\partial}{\partial u}\Big(\frac{\partial}{\partial z}\log h_u(\sigma,\sigma)\Big)\frac{\partial f}{\partial\overline{z}}\otimes\sigma.$$

Soit $\xi \in A^{0,0}(X,E)$. Localement, il existe $f_1,\dots,f_r \in A^{0,0}(X)$ et $e_1,e_2,\dots,e_r$ des sections locales holomorphes non nulles de E telles que $\xi = \sum_{i=1}^r f_i\otimes e_i$. On a

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial \Delta_{E,u}}{\partial u}\xi &= -\sum_{i=1}^r \frac{\partial \Delta_{E,u}}{\partial u}(f_i\otimes e_i)\\
&= -h(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z})^{-1}\sum_{i=1}^r\frac{\partial}{\partial u}(\frac{\partial}{\partial z}\log h_u(e_i,e_i))\frac{\partial f_i}{\partial\overline{z}}\otimes e_i\\
&= -h_X\Big(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-1}k(u)\sum_{i=1}^r\frac{\partial f}{\partial\overline{z}}\otimes e_i.
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\Big(\frac{\partial \Delta_{E,u}}{\partial u}\xi, \frac{\partial \Delta_{E,u}}{\partial u}\xi\Big)_{L^2,u} = \frac{i}{2\pi}\int_X h_X\Big(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-1}|k(u)|^2\sum_{kj}\frac{\partial f_k}{\partial\overline{z}}\frac{\partial\overline{f_j}}{\partial z}h_u(e_k,e_j)dz\wedge d\overline{z}.$$

Mais puisque $\sum_{kj}\frac{\partial f_k}{\partial\overline{z}}\frac{\partial\overline{f_j}}{\partial z}h_u(e_k,e_j)\geq 0$, alors

$$\begin{aligned}
\Big(\frac{\partial \Delta_{E,u}}{\partial u}\xi, \frac{\partial \Delta_{E,u}}{\partial u}\xi\Big)_{L^2,u} &= \frac{i}{2\pi}\int_X h_X\Big(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-1}k(u)^2\sum_{kj}\frac{\partial f_k}{\partial\overline{z}}\frac{\partial\overline{f_j}}{\partial z}h_u(e_i,e_j)dz\wedge d\overline{z}\\
&\leq \pi_E^2(u)\int_X\sum_{kj}\frac{\partial f_k}{\partial\overline{z}}\frac{\partial\overline{f_j}}{\partial z}h_u(e_i,e_j)dz\wedge d\overline{z}\\
&= \pi_E^2(u)(\Delta_{E,u}\xi,\xi)_{L^2,u}.
\end{aligned}$$

□

Corollaire 3.4.4. *On a*

$$\Big\|\frac{\partial \Delta_{E,u}}{\partial u}e^{-t\Delta_{E,u}}\Big\|_{L^2,u} \leq \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{t}}\pi_E(u), \quad \forall u > 1, \tag{3.18}$$

pour tout $t > 0$ fixé.

Démonstration. Soit $t > 0$, et $\eta \in A^{0,0}(X, E)$ et on pose $\xi := e^{-t\Delta_{E,u}}\eta$.

De (3.17), on a

$$\Big(\frac{\partial \Delta_{E,u}}{\partial u} e^{-t\Delta_{E,u}}\eta, \frac{\partial \Delta_{E,u}}{\partial u} e^{-t\Delta_{E,u}}\eta\Big)_{L^2,u} \leq \pi_E^2(u)\Big(\Delta_{E,u} e^{-t\Delta_{E,u}}\eta, e^{-t\Delta_{E,u}}\eta\Big)_{L^2,u}. \tag{3.19}$$

Si l'on décompose η suivant $(v_{u,k})_{k\in\mathbb{N}}$, une base orthonormale pour la norme L^2_u, formée par les vecteurs propres de $\Delta_{E,u}$: Il existe $a_{u,0}, a_{u,1}, \ldots$ des réels tels que

$$\eta = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_{u,k} v_{u,k}$$

alors, dans le complété de $A^{(0,0)}(X, E)$ pour L^2_u, on a

$$\Delta_{E,u} e^{-t\Delta_{E,u}}\eta = \sum_{k\geq 1} -\lambda_{u,k} e^{-\lambda_{u,k}t} a_{u,k} v_{u,k} = -\frac{1}{t}\sum_{k\geq 1} -\lambda_{u,k} t e^{-\lambda_{u,k}t} a_{u,k} v_{u,k}.$$

De là, on déduit que

$$\Big\|\Delta_{E,u} e^{-t\Delta_{E,u}}\eta\Big\|^2_{L^2,u} \leq \frac{e^{-1}}{t^2}\sum_{k\geq 1} |a_{u,k}|^2 \leq \frac{c}{t^2}\|\eta\|^2_{L^2,u},$$

donc (3.19) devient

$$\begin{aligned}
\Big\|\frac{\partial \Delta_{E,u}}{\partial u} e^{-t\Delta_{E,u}}\eta\Big\|^2_{L^2,u} &= \Big(\frac{\partial \Delta_{E,u}}{\partial u} e^{-t\Delta_{E,u}}\eta, \frac{\partial \Delta_{E,u}}{\partial u} e^{-t\Delta_{E,u}}\eta\Big)_{L^2,u} \\
&\leq \pi_E^2(u)\big(\Delta_{E,u} e^{-t\Delta_{E,u}}\eta, e^{-t\Delta_{E,u}}\eta\big)_{L^2,u} \\
&\leq \pi_E^2(u)\|\Delta_{E,u} e^{-t\Delta_{E,u}}\eta\|_{L^2,u}\|e^{-t\Delta_{E,u}}\eta\|_{L^2,u}, \quad \text{par l'inégalité de Cauchy-Schwartz} \\
&\leq \frac{e^{-1}}{t}\pi_E^2(u)\|\eta\|^2_{L^2,u}, \quad \text{car } \|e^{-t\Delta_{E,u}}\|_{L^2,u} \leq 1.
\end{aligned}$$

On conclut que

$$\Big\|\frac{\partial \Delta_{E,u}}{\partial u} e^{-t\Delta_{E,u}}\Big\|_{L^2,u} \leq \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{t}}\pi_E(u).$$

□

Proposition 3.4.5. *Si $X = \mathbb{P}^1$ et h_∞ est une métrique de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{O}(m)$ invariante par $\mathbb{S}^1$, alors on peut choisir une sous-suite de $(h_n)_{n\geq 1}$ telle que*

$$\pi_E(u) = O(\frac{1}{2^u}), \quad \forall u >> 1,$$

par conséquent,

$$e^{-t\Delta_{E,u}} \xrightarrow[u\mapsto\infty]{} e^{-t\Delta_{E,\infty}}$$

Démonstration. Comme h_∞ est $\mathcal{C}^\infty$ et invariante par $\mathbb{S}^1$ alors la fonction $f_\infty(u) := \log h_\infty(1,1)(\exp(-u))$ est concave et de classe $\mathcal{C}^\infty$. Par application du (3.3.10), on déduit que $h(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z})^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial z}\log h_n(1,1)$ converge uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}^*$ vers $h(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z})^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial z}\log h_\infty(1,1)$. Par un choix de sous-suite convenable on peut supposer que

$$h(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z})^{-\frac{1}{2}}\Big|\frac{\partial}{\partial z}\log\frac{h_n}{h_{n-1}}\Big| = O(\frac{1}{2^n}),\quad \forall n >> 1.$$

donc,

$$\pi_E(u) = h(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z})^{-\frac{1}{2}}k(u) = O(\frac{1}{2^u})\quad \forall u >> 1.$$

On conclut de (3.4.4) que

$$\Big\|\frac{\partial e^{-t\Delta_{E,u}}}{\partial u}\Big\|_u \leq \frac{\sqrt{t}}{2^u}O(1),\quad \forall u >> 1.$$

□

On introduit la fonction suivante définie sur X donnée au voisinage d'un point x par l'expression :

$$\frac{\partial}{\partial u}\log h_u(\sigma,\sigma)(x),$$

où σ est une section locale holomorphe de E non nulle en x, et on pose

$$\delta_E(u) = \sup_{x\in X}\Big|\frac{\partial}{\partial u}\log h_u(\sigma,\sigma)(x)\Big|.$$

Proposition 3.4.6. *$\forall \xi,\eta \in A^{0,0}(X,E)$,*

$$\Big|\Big(\frac{\partial\Delta_{E,u}}{\partial u}\xi,\xi\Big)_u\Big| \leq 2\delta_E(u)\|\Delta_{E,u}\xi\|_u\|\xi\|_u,$$

et

$$\Big|\Big(\frac{\partial\Delta_{E,u}}{\partial u}\xi,\eta\Big)_u\Big| \leq \delta_E(u)\Big(\|\Delta_{E,u}\xi\|_u^{\frac{1}{2}}\|\Delta_{E,u}\eta\|_u^{\frac{1}{2}}\|\xi\|_u^{\frac{1}{2}}\|\eta\|_u^{\frac{1}{2}} + \|\Delta_{E,u}\xi\|_u\|\eta\|_u\Big). \tag{3.20}$$

Pour tous t_1, t_2 et $t_3 > 0$,

$$\begin{aligned}\Big|\Big(\frac{\partial\Delta_{E,u}}{\partial u}e^{-t_1\Delta_{E,u}}\xi, &e^{-t_2\Delta_{E,u}}\frac{\partial\Delta_{E,u}}{\partial u}e^{-t_3\Delta_{E,u}}\gamma\Big)_u\Big| \\ &\leq \Big(\frac{C^2}{\sqrt{t_3t_2t_1}} + \frac{C}{t_1\sqrt{t_3}}\Big)\pi_E(u)\delta_E(u)\|\xi\|_u\|\gamma\|_u.\end{aligned} \tag{3.21}$$

où C est une constante réelle positive.

Démonstration. Soit $\xi \in A^{0,0}(X,E)$. On a

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u}\Big((\Delta_{E,u}\xi,\xi)_u\Big) &= \frac{\partial}{\partial u}\Big(\int_X h_u(\Delta_{E,u}\xi,\xi)\omega_X\Big) \\ &= \int_X h_u\Big(\frac{\partial\Delta_{E,u}}{\partial u}\xi,\xi\Big)\omega_X + \int_X\Big(\frac{\partial}{\partial u}\log h_u\Big)h_u(\Delta_{E,u}\xi,\xi)\omega_X \\ &= \Big(\frac{\partial\Delta_{E,u}}{\partial u}\xi,\xi\Big)_u + \Big(\Delta_{E,u}\xi,\Big(\frac{\partial}{\partial u}\log h_u\Big)\xi\Big)_u.\end{aligned}$$

notons qu'on a utilisé le fait que $\frac{\partial}{\partial u}\log h_u$ est réelle.
Or

$$(\Delta_{E,u}\xi,\xi)_u = \frac{i}{2\pi}\int_X\sum_{kj}\frac{\partial f_k}{\partial\overline{z}}\frac{\partial\overline{f_j}}{\partial z}h_u(e_k,e_j)\frac{i}{2\pi}dz\wedge d\overline{z},$$

donc

$$\frac{\partial}{\partial u}\Big((\Delta_{E,u}\xi,\xi)_u\Big)=\int_X\Big(\frac{\partial}{\partial u}\log h_u\Big)\sum_{kj}\frac{\partial f_k}{\partial\overline{z}}\frac{\partial\overline{f_j}}{\partial z}h_u(e_k,e_j)\frac{i}{2\pi}dz\wedge d\overline{z}.$$

En regroupant cela, on trouve que

$$\begin{aligned}\Big|\Big(\frac{\partial\Delta_{E,u}}{\partial u}\xi,\xi\Big)_u\Big|&=\Big|\int_X\Big(\frac{\partial}{\partial u}\log h_u\Big)\sum_{kj}\frac{\partial f_k}{\partial\overline{z}}\frac{\partial\overline{f_j}}{\partial z}h_u(e_k,e_j)\frac{i}{2\pi}dz\wedge d\overline{z}-\Big(\Delta_{E,u}\xi,(\frac{\partial}{\partial u}\log h_u)\xi\Big)_u\Big|\\&\le\Big|\int_X(\frac{\partial}{\partial u}\log h_u)\sum_{kj}\frac{\partial f_k}{\partial\overline{z}}\frac{\partial\overline{f_j}}{\partial z}h_u(e_k,e_j)\frac{i}{2\pi}dz\wedge d\overline{z}\Big|+\Big|\Big(\Delta_{E,u}\xi,(\frac{\partial}{\partial u}\log h_u)\xi\Big)_u\Big|\\&\le\delta_E(u)\int_X\Big|\sum_{kj}\frac{\partial f_k}{\partial\overline{z}}\frac{\partial\overline{f_j}}{\partial z}h_u(e_k,e_j)\Big|\frac{1}{2\pi}|dz\wedge d\overline{z}|+\delta_E(u)\|\Delta_{E,u}\xi\|_{L^2,u}\|\xi\|_{L^2,u}\end{aligned}$$

mais $\sum_{kj}\frac{\partial f_k}{\partial\overline{z}}\frac{\partial\overline{f_j}}{\partial z}h_u(e_k,e_j)\ge 0$, on peut écrire la dernière inégalité comme suit

$$\begin{aligned}\Big|\Big(\frac{\partial\Delta_{E,u}}{\partial u}\xi,\xi\Big)_u\Big|&\le\delta_E(u)\int_X\sum_{kj}\frac{\partial f_k}{\partial\overline{z}}\frac{\partial\overline{f_j}}{\partial z}h_u(e_k,e_j)\frac{1}{2\pi}|dz\wedge d\overline{z}|+\delta_E(u)\|\Delta_{E,u}\xi\|_{L^2,u}\|\xi\|_{L^2,u}\\&=\delta_E(u)(\Delta_{E,u}\xi,\xi)_u+\delta_E(u)\|\Delta_{E,u}\xi\|_{L^2,u}\|\xi\|_{L^2,u}\\&\le 2\delta_E(u)\|\Delta_{E,u}\xi\|_{L^2,u}\|\xi\|_{L^2,u}.\end{aligned}$$

De la même façon, on établit que

$$\begin{aligned}\Big|\Big(\frac{\partial\Delta_{E,u}}{\partial u}\xi,\eta\Big)_u\Big|&=\Big|\int_X(\frac{\partial}{\partial u}\log h_u)\sum_{kj}\frac{\partial f_k}{\partial\overline{z}}\frac{\partial\overline{g_j}}{\partial z}h_u(e_k,e_j)\frac{i}{2\pi}dz\wedge d\overline{z}-\Big(\Delta_{E,u}\xi,(\frac{\partial}{\partial u}\log h_u)\eta\Big)_u\Big|\\&\le\int_X\Big|\frac{\partial}{\partial u}\log h_u\Big|\Big|\sum_{kj}\frac{\partial f_k}{\partial\overline{z}}\frac{\partial\overline{g_j}}{\partial z}h_u(e_k,e_j)\Big|\frac{i}{2\pi}dz\wedge d\overline{z}+\Big|\Big(\Delta_{E,u}\xi,(\frac{\partial}{\partial u}\log h_u)\eta\Big)_u\Big|\\&=\int_X\Big|\frac{\partial}{\partial u}\log h_u\Big|\Big|h_u\Big(\sum_{k=1}^r\frac{\partial f_k}{\partial\overline{z}},\sum_{k=1}^r\frac{\partial g_k}{\partial\overline{z}}\Big)\Big|\frac{i}{2\pi}dz\wedge d\overline{z}+\Big|\Big(\Delta_{E,u}\xi,(\frac{\partial}{\partial u}\log h_u)\eta\Big)_u\Big|\\&\le\delta_E(u)\int_X h_u\Big(\sum_{k=1}^r\frac{\partial f_k}{\partial\overline{z}},\sum_{k=1}^r\frac{\partial f_k}{\partial\overline{z}}\Big)^{\frac12}h_u\Big(\sum_{k=1}^r\frac{\partial g_k}{\partial\overline{z}},\sum_{k=1}^r\frac{\partial g_k}{\partial\overline{z}}\Big)^{\frac12}\frac{i}{2\pi}dz\wedge d\overline{z}\\&+\delta_E(u)\|\Delta_{E,u}\xi\|_{L^2,u}\|\eta\|_{L^2,u}\quad\text{On a utilisé }|h_u(v,v')|\le h_u(v,v)^{\frac12}h_u(v',v')^{\frac12}\\&\le\delta_E(u)\Big(\int_X h_u\Big(\sum_{k=1}^r\frac{\partial f_k}{\partial\overline{z}},\sum_{k=1}^r\frac{\partial f_k}{\partial\overline{z}}\Big)dz\wedge d\overline{z}\Big)^{\frac12}\Big(\int_X h_u\Big(\sum_{k=1}^r\frac{\partial g_k}{\partial\overline{z}},\sum_{k=1}^r\frac{\partial g_k}{\partial\overline{z}}\Big)dz\wedge d\overline{z}\Big)^{\frac12}\\&+\delta_E(u)\|\Delta_{E,u}\xi\|_{L^2,u}\|\eta\|_{L^2,u}\quad\text{Par Cauchy-Schwartz}\\&=\delta_E(u)(\Delta_{E,u}\xi,\xi)^{\frac12}(\Delta_{E,u}\eta,\eta)^{\frac12}+\delta_E(u)\|\Delta_{E,u}\xi\|_{L^2,u}\|\eta\|_{L^2,u}\\&\le\delta_E(u)\|\Delta_{E,u}\xi\|_{L^2,u}^{\frac12}\|\Delta_{E,u}\eta\|_{L^2,u}^{\frac12}\|\xi\|_{L^2,u}^{\frac12}\|\eta\|_{L^2,u}^{\frac12}+\delta_E(u)\|\Delta_{E,u}\xi\|_{L^2,u}\|\eta\|_{L^2,u}.\end{aligned}$$

Si l'on pose $\eta=e^{-t\Delta_{E,u}}\frac{\partial\Delta_{E,u}}{\partial u}\gamma$, alors

$$\begin{aligned}\|\Delta_{E,u}\eta\|_{L^2,u}&=\Big\|\Delta_{E,u}e^{-t\Delta_{E,u}}\frac{\partial\Delta_{E,u}}{\partial u}\gamma\Big\|_{L^2,u}\\&=\Big\|\partial_t e^{-t\Delta_{E,u}}\frac{\partial\Delta_{E,u}}{\partial u}\gamma\Big\|_{L^2,u}\\&\le\frac{C}{t}\Big\|\frac{\partial\Delta_{E,u}}{\partial u}\gamma\Big\|_{L^2,u},\quad(\text{puisque }\|\partial_t e^{-t\Delta_{E,u}}v\|\le\frac{C}{t}\|v\|)\end{aligned}$$

donc,

$$\Big\|\Delta_{E,u}e^{-t\Delta_{E,u}}\frac{\partial\Delta_{E,u}}{\partial u}\gamma\Big\|_{L^2,u}\leq\frac{C}{t}\|\frac{\partial\Delta_{E,u}}{\partial u}\gamma\|_{L^2,u}.$$

On a,

$$\begin{aligned}\Big|\big(\frac{\partial\Delta_{E,u}}{\partial u}\xi,e^{-t\Delta_{E,u}}\frac{\partial\Delta_{E,u}}{\partial u}\gamma\big)_u\Big|&\leq\delta_E(u)\|\Delta_{E,u}\xi\|^{\frac12}_{L^2,u}\|\Delta_{E,u}e^{-t\Delta_{E,u}}\frac{\partial\Delta_{E,u}}{\partial u}\gamma\|^{\frac12}_{L^2,u}\|\xi\|^{\frac12}_{L^2,u}\|e^{-t\Delta_{E,u}}\frac{\partial\Delta_{E,u}}{\partial u}\gamma\|^{\frac12}_{L^2,u}\\&+\delta_E(u)\|\Delta_{E,u}\xi\|_{L^2,u}\|e^{-t\Delta_{E,u}}\frac{\partial\Delta_{E,u}}{\partial u}\gamma\|_{L^2,u}\\&\leq\frac{C}{\sqrt{t}}\delta_E(u)\|\Delta_{E,u}\xi\|^{\frac12}_{L^2,u}\|\frac{\partial\Delta_{E,u}}{\partial u}\gamma\|^{\frac12}_{u}\|\xi\|^{\frac12}_{L^2,u}\|e^{-t\Delta_{E,u}}\frac{\partial\Delta_{E,u}}{\partial u}\gamma\|^{\frac12}_{L^2,u}\\&+\delta_E(u)\|\Delta_{E,u}\xi\|_{L^2,u}\|e^{-t\Delta_{E,u}}\frac{\partial\Delta_{E,u}}{\partial u}\gamma\|_{L^2,u}\\&\leq\frac{C}{\sqrt{t}}\delta_E(u)\|\Delta_{E,u}\xi\|^{\frac12}_{L^2,u}\|\xi\|^{\frac12}_{L^2,u}\|\frac{\partial\Delta_{E,u}}{\partial u}\gamma\|_{L^2,u}+\delta_E(u)\|\Delta_{E,u}\xi\|_{L^2,u}\|\frac{\partial\Delta_{E,u}}{\partial u}\gamma\|_{L^2,u}.\end{aligned}$$

On a montré que, voir (3.4.4)

$$\Big\|\frac{\partial\Delta_{E,u}}{\partial u}e^{-t\Delta_{E,u}}\Big\|_{L^2,u}\leq\frac{\pi_E(u)}{\sqrt{t}}.$$

Donc

$$\begin{aligned}\Big|\Big(\frac{\partial\Delta_{E,u}}{\partial u}e^{-t_1\Delta_{E,u}}\xi,e^{-t_2\Delta_{E,u}}\frac{\partial\Delta_{E,u}}{\partial u}e^{-t_3\Delta_{E,u}}\gamma\Big)_u\Big|&\leq\frac{C}{\sqrt{t_2}}\delta_E(u)\|\Delta_{E,u}e^{-t_1\Delta_{E,u}}\xi\|^{\frac12}_{L^2,u}\|e^{-t_1\Delta_{E,u}}\xi\|^{\frac12}_{L^2,u}\|\frac{\partial\Delta_{E,u}}{\partial u}e^{-t_3\Delta_{E,u}}\gamma\|_{L^2,u}\\&+\delta_E(u)\|\Delta_{E,u}e^{-t_1\Delta_{E,u}}\xi\|_{L^2,u}\|\frac{\partial\Delta_{E,u}}{\partial u}e^{-t_3\Delta_{E,u}}\gamma\|_{L^2,u}\\&\leq\frac{C^2\pi_E(u)}{\sqrt{t_3t_2t_1}}\delta_E(u)\|\xi\|_{L^2,u}\|\gamma\|_{L^2,u}+\frac{C\pi_E(u)}{t_1\sqrt{t_3}}\delta_E(u)\|\xi\|_{L^2,u}\|\gamma\|_{L^2,u}.\end{aligned}$$

□

Théorème 3.4.7. *Il existe une constante c telle que*

$$\Big\|\frac{\partial e^{-t\Delta_{E,u}}}{\partial u}\Big\|_{L^2,u}\leq c\sqrt{\delta_E(u)}\sqrt{\pi_E(u)}t^{\frac14},\quad\forall u>1.$$

Démonstration. On a

$$\frac{\partial e^{-t\Delta_{E,u}}}{\partial u}=-\int_0^t e^{-(t-s)\Delta_{E,u}}\frac{\partial\Delta_{E,u}}{\partial u}e^{-s\Delta_{E,u}}ds.$$

Si l'on pose $t_1=s$, $t_2=2(t-s)$ et $t_3=s$ dans (3.21), alors

$$\begin{aligned}\Big\|e^{-(t-s)\Delta_{E,u}}\frac{\partial\Delta_{E,u}}{\partial u}e^{-s\Delta_{E,u}}\xi\Big\|^2_u&=\Big(\frac{\partial\Delta_{E,u}}{\partial u}e^{-s\Delta_{E,u}}\xi,e^{-2(t-s)\Delta_{E,u}}\frac{\partial\Delta_{E,u}}{\partial u}e^{-s\Delta_{E,u}}\xi\Big)_u\\&\leq\frac{C^2\pi_E(u)}{s\sqrt{2(t-s)}}\delta_E(u)\|\xi\|^2_u+\frac{C\pi_E(u)}{s^{\frac32}}\delta_E(u)\|\xi\|^2_u.\end{aligned}$$

Par suite

$$\Big\|e^{-(t-s)\Delta_{E,u}}\frac{\partial\Delta_{E,u}}{\partial u}e^{-s\Delta_{E,u}}\Big\|^2_{L^2,u}\leq\delta_E(u)\pi_E(u)\big(\frac{C^2}{s\sqrt{2(t-s)}}+\frac{C}{s^{\frac32}}\big).$$

et donc

$$\Big\|\frac{\partial e^{-t\Delta_{E,u}}}{\partial u}\Big\|_{L^2,u} \leq \int_0^t \Big\|e^{-(t-s)\Delta_{E,u}}\frac{\partial \Delta_{E,u}}{\partial u}e^{-s\Delta_{E,u}}\Big\|_{L^2,u} ds \leq \sqrt{\delta_E(u)}\sqrt{\pi_E(u)}\int_0^t \Big(\frac{C^2}{s\sqrt{2(t-s)}}+\frac{C}{s^{\frac{3}{2}}}\Big)^{\frac{1}{2}} ds$$

On conclut en remarquant que pour tout $a, b > 0$

$$\begin{aligned}
\int_0^t \Big(\frac{a}{s\sqrt{2(t-s)}}+\frac{b}{s^{\frac{3}{2}}}\Big)^{\frac{1}{2}} ds &\leq \int_0^t \frac{\sqrt{a}}{s^{\frac{1}{2}}2^{\frac{1}{4}}(t-s)^{\frac{1}{4}}} ds + \frac{\sqrt{b}}{s^{\frac{3}{4}}} ds, \quad \text{puisque } |x+y|^{\frac{1}{2}} \leq |x|^{\frac{1}{2}} + |y|^{\frac{1}{2}}, \\
&= 2\sqrt{a}\int_0^{\sqrt{t}} \frac{1}{(t-x^2)^{\frac{1}{4}}} dx + \sqrt{b}t^{\frac{1}{4}} \\
&= 2\sqrt{a}t^{\frac{1}{4}}\int_0^1 \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{1}{4}}} dx + \sqrt{b}t^{\frac{1}{4}} \\
&= 2\sqrt{a}t^{\frac{1}{4}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\theta)}{\sqrt{1-\sin(\theta)^2}} d\theta + \sqrt{b}t^{\frac{1}{4}} \\
&= 2\sqrt{a}t^{\frac{1}{4}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta + \sqrt{b}t^{\frac{1}{4}} \\
&= ct^{\frac{1}{4}}.
\end{aligned}$$

□

Théorème 3.4.8. *On a,*

$$\big(e^{-t\Delta_{E,u}}\big)_u \xrightarrow[u\mapsto\infty]{} e^{-t\Delta_{E,\infty}}.$$

dans l'espace des opérateurs bornés sur le complété de $A^{(0,0)}(X,E)$ pour la métrique L^2_∞.

Démonstration. On a montré dans (3.4.7) que

$$\Big\|\frac{\partial e^{-t\Delta_{E,u}}}{\partial u}\Big\|_{L^2_u} \leq c\sqrt{\delta_E(u)}\sqrt{\pi_E(u)}t^{\frac{1}{4}} \quad \forall\, u > 1. \tag{3.22}$$

On en déduit qu'il existe une constante c_5 telle que

$$\Big\|\frac{\partial e^{-t\Delta_{E,u}}}{\partial u}\Big\|_{L^2_\infty} \leq c_5\sqrt{\delta_E(u)}\sqrt{\pi_E(u)}t^{\frac{1}{4}} \quad \forall\, u > 1.$$

Par (3.4.1), la fonction π_E est bornée. Et on a,

$$\begin{aligned}
\delta_E(v) &= \sup_{x\in X}\Big|\frac{\partial}{\partial v}\log h_v(\sigma,\sigma)\Big| \\
&= \sup_{x\in X}\Big|\frac{\partial \rho_{[v]}}{\partial v}\frac{h_{[v]}-h_{[v]-1}}{h_v}\Big| \\
&= O\Big(\Big\|\frac{h_{[v]+1}}{h_{[v]}}-1\Big\|_{\sup}\Big) \quad \forall\, v \geq 1.
\end{aligned}$$

où $[u]$ est la partie entière de u. Donc il existe une constante M' telle que

$$\begin{aligned}\int_u^{u'} \sqrt{\delta_E(v)}dv &\leq \int_{[u]}^{[u']+1} \sqrt{\delta_E(v)}dv \\ &\leq \sum_{p=[u]}^{[u']} \int_p^{p+1} \sqrt{\delta_E(v)}dv \\ &\leq M' \sum_{p=[u]}^{[u']+1} \Big\| \frac{h_p}{h_{p-1}} - 1 \Big\|_{\sup}^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Comme on a supposé que (voir début de (3.4)) :

$$\sum_{p=0}^{\infty} \Big\| \frac{h_p}{h_{p-1}} - 1 \Big\|_{\sup}^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

alors $\left(e^{-t\Delta_{E,u}}\right)_{u>1}$ converge vers un opérateur qu'on note par L_t pour tout t, L_t est compact pour tout t fixé par (3.6.1) et vérifie

$$(\partial_t + \Delta_{E,\infty})L_t = 0,$$

donc $t \mapsto L_t$ est une solution à l'equation de Chaleur associée au Laplacien $\Delta_{E,\infty}$, par unicité, on conclut que

$$L_t = e^{-t\Delta_{E,\infty}}.$$

□

Remarque 3.4.9. Voir (3.4) pour des exemples de suites de métriques vérifiant

$$\sum_p \Big\| \frac{h_p}{h_{p-1}} - 1 \Big\|_{\sup}^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

on peut prendre par exemple avec les notations de (3.4), $\chi(p) = 2^p$.

Théorème 3.4.10. *L'opérateur $I + \Delta_{E,\infty}$ admet un inverse, noté $(I + \Delta_{E,\infty})^{-1}$, et il est compact.*

Démonstration. On va montrer que

$$\Big\| \frac{\partial}{\partial u}(I + \Delta_{E,u})^{-1} \Big\|_{L^2,u} \leq 8\delta_E(u), \quad \forall u > 1.$$

Soit $\gamma \in A^{0,0}(X, E)$.

$$\frac{\partial}{\partial u}\Big(I + \Delta_{E,u}\Big)^{-1} = -\Big(I + \Delta_{E,u}\Big)^{-1} \frac{\partial \Delta_{E,u}}{\partial u}\Big(I + \Delta_{E,u}\Big)^{-1}.$$

On pose $\xi = (I + \Delta_{E,u})^{-1}\gamma$ et $\eta = (I + \Delta_{E,u})^{-2}\frac{\partial \Delta_{E,u}}{\partial u}(I + \Delta_{E,u})^{-1}\gamma$ dans l'inégalité (3.20), alors

$$\begin{aligned}&\Big|\Big(\frac{\partial \Delta_{E,u}}{\partial u}(I + \Delta_{E,u})^{-1}\gamma, (I + \Delta_{E,u})^{-2}\frac{\partial \Delta_{E,u}}{\partial u}(I + \Delta_{E,u})^{-1}\gamma\Big)_u\Big| = \Big|\Big(\frac{\partial \Delta_{E,u}}{\partial u}\xi, \eta\Big)\Big| \\ &\leq \delta_E(u)\|\Delta_{E,u}(I + \Delta_{E,u})^{-1}\gamma\|_u^{\frac{1}{2}}\|\Delta_{E,u}(I + \Delta_{E,u})^{-2}\frac{\partial \Delta_{E,u}}{\partial u}(I + \Delta_{E,u})^{-1}\gamma\|_u^{\frac{1}{2}}\|(I + \Delta_{E,u})^{-1}\gamma\|_{L^2,u}^{\frac{1}{2}}\|(I + \Delta_{E,u})^{-2}\frac{\partial \Delta_{E,u}}{\partial u}(I + \Delta_{E,u})^{-1}\gamma \\ &+ \delta_E(u)\|\Delta_{E,u}(I + \Delta_{E,u})^{-1}\gamma\|_u\|(I + \Delta_{E,u})^{-2}\frac{\partial \Delta_{E,u}}{\partial u}(I + \Delta_{E,u})^{-1}\gamma\|_{L^2,u} \quad \text{par (3.20)} \\ &\leq 4\delta_E(u)\|\gamma\|_{L^2,u}^{\frac{1}{2}}\|(I + \Delta_{E,u})^{-1}\frac{\partial \Delta_{E,u}}{\partial u}(I + \Delta_{E,u})^{-1}\gamma\|_{L^2,u}^{\frac{1}{2}}\|\gamma\|_{L^2,u}^{\frac{1}{2}}\|(I + \Delta_{E,u})^{-1}\frac{\partial \Delta_{E,u}}{\partial u}(I + \Delta_{E,u})^{-1}\gamma\|_{L^2,u}^{\frac{1}{2}} \\ &+ 4\delta_E(u)\|\gamma\|_{L^2,u}\|(I + \Delta_{E,u})^{-1}\frac{\partial \Delta_{E,u}}{\partial u}(I + \Delta_{E,u})^{-1}\gamma\|_{L^2,u}.\end{aligned}$$

Or $(I+\Delta_{E,u})^{-1}$ est autoadjoint pour la métrique L^2_u, donc

$$\begin{aligned}\Big\|(I+\Delta_{E,u})^{-1}\frac{\partial\Delta_{E,u}}{\partial u}(I+\Delta_{E,u})^{-1}\gamma\Big\|_u^2 &= \Big|\big(\frac{\partial\Delta_{E,u}}{\partial u}(I+\Delta_{E,u})^{-1}\gamma,(I+\Delta_{E,u})^{-2}\frac{\partial\Delta_{E,u}}{\partial u}(I+\Delta_{E,u})^{-1}\gamma\big)_u\Big| \\ &\leq 8\delta_E(u)\|\gamma\|_{L^2,u}\Big\|(I+\Delta_{E,u})^{-1}\frac{\partial\Delta_{E,u}}{\partial u}(I+\Delta_{E,u})^{-1}\gamma\Big\|_{L^2,u} \text{ par l'inégalité ci-dessus.}\end{aligned}$$

Ce qui donne que

$$\Big\|\frac{\partial}{\partial u}(I+\Delta_{E,u})^{-1}\Big\|_{L^2,u} = \Big\|(I+\Delta_{E,u})^{-1}\frac{\partial\Delta_{E,u}}{\partial u}(I+\Delta_{E,u})^{-1}\Big\|_{L^2,u} \leq 8\delta_E(u).$$

Comme les normes $(L^2_u)_{u\in[1,\infty]}$ sont uniformément équivanlentes, il existe une constante c'' telle que la dernière inégalité devient :

$$\Big\|\frac{\partial}{\partial u}(I+\Delta_{E,u})^{-1}\Big\|_{L^2,\infty} \leq 8c''\delta_E(u).$$

donc, si $1<p<q$, on obtient :

$$\Big\|(I+\Delta_{E,p})^{-1}-(I+\Delta_{E,q})^{-1}\Big\|_{L^2,\infty} \leq 8c''\int_p^q \delta_E(v)dv.$$

Or, $\delta_E(v)=O(\|\frac{h_{[v]+1}}{h_{[v]}}-1\|_{\sup})\quad \forall\, v\geq 1.$, donc pour $p,q\gg 1$, on peut trouver des constantes M'' et $M^{(3)}$ telles que

$$\begin{aligned}\Big\|(I+\Delta_{E,p})^{-1}-(I+\Delta_{E,q})^{-1}\Big\|_{L^2,\infty} &\leq M''\sum_p^{q+1}\Big\|\frac{h_p}{h_{p-1}}-1\Big\|_{\sup} \\ &\leq M^{(3)}\sum_p^{q+1}\Big\|\frac{h_p}{h_{p-1}}-1\Big\|_{\sup}^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Par hypothèse, voir début du paragraphe, le dernier terme tend vers zéro lorsque $p,q\mapsto\infty$. Par suite, la suite d'opérateurs compacts $\big((\Delta_{E,p}+I)^{-1}\big)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers un opérateur P, qui est compact par (3.6.1) et qui vérifie $(\Delta_{E,\infty}+I)P=I$. On conclut que $(\Delta_{E,\infty}+I)^{-1}$ existe et il est compact.

Par conséquent, $\Delta_{E,\infty}$ possède un spectre discret infini, c'est une propriété des opérateurs compacts, comme $\Delta_{E,\infty}$ est positif, alors le spectre est minoré par zéro.

□

3.4.1 Trace et fonction Zêta

Dans la suite, on notera par $0\leq\lambda_{\infty,1}\leq\lambda_{\infty,2}\leq\dots$ l'ensemble des valeurs propres de $\Delta_{E,\infty}$ comptées avec multiplicité.

Dans le cas où les métriques h_X sur X et h_E sur E sont de classe $\mathcal{C}^\infty$, alors on a le résultat suivant :

Proposition 3.4.11. *Le noyau de chaleur $e^{-t\Delta}$ d'un opérateur Laplacien sur une variété différentielle compacte, est un opérateur nucléaire, (voir* (3.6.2)*) et on a*

$$\mathrm{Tr}(Pe^{-t\Delta})=\sum_{k\in\mathbb{N}}e^{-\lambda_k t}\quad\forall t>0,$$

où les $\lambda_1\leq\lambda_2\dots$ sont les valeurs propres non nulles de Δ comptées avec multiplicités et P est le projecteur de noyau $\ker\Delta$ *pour la métrique L^2.*

Démonstration. Voir [BGV04, proposition 2.32 p86] et [Sou92]. □

Théorème 3.4.12. *On a*

$$\theta(t) = (4\pi t)^{-1}\mathrm{rg}(E)\mathrm{vol}(X) + O(1)$$

quand $t \to 0$, avec $O(1)$ est une fonction en t bornée au voisinage de 0.

Démonstration. Voir [BGV04, théorème 2.41]. □

Soit $(\Delta_{E,u})_u$ d'une famille $\mathcal{C}^\infty$ de Laplaciens généralisés sur surface de Riemann. On note par θ_u la fonction Thêta associée à $\Delta_{E,u}$, rappelons que si l'on note par $\lambda_{1,u} \leq \lambda_{2,u} \leq \dots$ les valeurs propres non nuls comptées avec multiplicités de $\Delta_{E,u}$, alors en fixant u, on a pour tout k entier, il existe des réels $a_{u,-1}, a_{u,0}, \dots, a_{u,k}$ tels que

$$\theta_u(t) = \sum_{i=-1}^{k} a_{u,i}t^i + O(t^{k+1})$$

pour tout t proche de zéro.

Proposition 3.4.13. *On considère $(h_u)_{u>1}$ une famille de classe $\mathcal{C}^\infty$ de métriques hermitiennes sur E. Alors $a_{0,u}$ et $a_{-1,u}$ sont des fonctions constantes en u.*

Démonstration. D'après (3.4.12),

$$a_{-1,u} = 4\pi\,\mathrm{rg}(E)\,\mathrm{vol}(X),$$

qui ne dépend pas de u.

Pour montrer la deuxième assertion, soit $t \neq 1$ un réel strictement positif et on considère la donnée suivante $\big((TX, th_X); (E, h_u)\big)$. La variation de la métrique de Quillen associée à t est donnée par la formule des anomalies suivante :

$$-\log h_{Q,((TX,th_X);(E,h_u))} + \log h_{Q,((TX,h_X);(E,h_u))} = \int_X ch(E,h_u)\widetilde{Td}(TX, th_X, h_X),$$

voit [BGS88].
On vérifie, en utilisant l'expression locale du Laplacien, que :

$$\Delta_{t,u} := \Delta_{((TX,th_X);(E,h_u))} = t^{-1}\Delta_{((TX,h_X);(E,h_u))} = t^{-1}\Delta_{1,u},$$

alors $\zeta'_{\Delta_{t,u}}(0) = \zeta_{\Delta_{1,u}}(0)\log t + \zeta'_{\Delta_{1,u}}(0)$, où on a noté par $\zeta_{\Delta_{t,u}}$ la fonction Zêta associée à la donnée $\big((TX, th_X); (E, h_u)\big)$. On montre que

$$\widetilde{Td}(TX, th_X, h_X) = \frac{1}{2}\log t + \frac{1}{6}\log t\, c_1(TX, h_X),$$

dans $\oplus_{p\geq 0}\widetilde{A}^{(p,p)}(X)$, voir [GS90b] pour la définition de la classe de Bott-Chern.

Comme $\mathrm{Vol}_{th_X} = t^{\dim X}\mathrm{Vol}_{h_X}$, alors

$$h_{L^2,((TX,th_X);(E,h_u))} = t^{2\dim H^0(X,E)}h_{L^2,((TX,h_X);(E,h_u))}.$$

En regroupant cela dans la formule des anomalies, on obtient que

$$-2\dim H^0(X,E)\log t + \zeta_{\Delta_{1,u}}(0)\log t = \frac{1}{2}\log t\int_X c_1(E,h_u) + \frac{1}{6}\log t\int_X c_1(TX,h_X).$$

On rappelle que $\zeta(0) = a_0$, voir par exemple [Sou92, Théorème. 1], alors

$$a_{0,u} = \frac{1}{2}\int_X c_1(E) + \frac{1}{6}\int_X c_1(TX) + 2\dim H^0(X,E), \quad \forall u. \tag{3.23}$$

□

Définition 3.4.14. *On pose pour tout $t > 0$,*

$$\theta_\infty(t) := \left\| P^\infty e^{-t\Delta_{E,\infty}} \right\|_{1,\infty}{}^{3}.$$

avec P^∞ est la projection orthogonale de noyau $\ker(\Delta_{E,\infty})$ pour la métrique L^2_∞. On l'appelle la fonction Thêta associée à l'opérateur $\Delta_{E,\infty}$.

Lemme 3.4.15. *Pour tout $u \leq \infty$, soit P^u la projection orthogonale à $H^0(X,E)$ pour la métrique L^2_u. On a P^u est un opérateur borné et*

$$\frac{\partial P^u}{\partial u} = O\Big(\Big\| \frac{\partial}{\partial u}\log h_u \Big\|_{\sup}\Big), \quad \forall u < \infty.$$

Démonstration. Soit $\{e_1, \ldots, e_r\}$ une base de $H^0(X,E)$. Soit $1 < u < \infty$. Pour tout $\xi \in A^{0,0}(X,E)$, il existe $a_1^{(u)}(\xi), \ldots, a_r^{(u)}(\xi) \in \mathbb{C}$ tels que

$$P^u\xi = \xi + \sum_{i=1}^r a_i^{(u)}(\xi)(1\otimes e_i),$$

qui sont donnés par

$$\sum_{i=1}^r a_i^{(u)}(\xi)(1\otimes e_i, 1\otimes e_j)_{L^2,u} = -(\xi, 1\otimes e_j)_{L^2,u}$$

On pose $A^{(u)}$ la matrice

$$A^{(u)} = \big((1\otimes e_i, 1\otimes e_j)_{L^2,u}\big)_{1\leq i,j\leq r},$$

et D_u l'opérateur $A^{(0,0)}(X,E) \to \mathbb{C}^r$ défini par $D_u(\xi) = -{}^t\big((\xi, e_1\otimes 1)_{L^2,u}, \ldots, (\xi, e_r\otimes 1)_{L^2,u}\big)$ [4].

Comme $A^{(u)}$ est inversible puisque $\det(A^{(u)}) = \mathrm{Vol}^2_{L^2,u}$, alors

$$\begin{pmatrix} a_1^{(u)}(\xi) \\ \vdots \\ a_r^{(u)}(\xi) \end{pmatrix} = (A^{(u)})^{-1} D_u(\xi) \quad \forall \xi \in A^{(0,0)}(X,E).$$

On a

$$\frac{\partial P^{(u)}}{\partial u}\xi = \sum_{i=1}^r \frac{\partial a_i^{(u)}}{\partial u} 1\otimes e_i.$$

Il suffit de montrer que

$$\frac{\partial}{\partial u}\Big((A^{(u)})^{-1}D_u\Big) = O\Big(\Big\|\frac{\partial}{\partial u}\log h_u\Big\|_{\sup}\Big).$$

3. Voir (3.6.2) pour la définition de la norme $\|\cdot\|_1$.
4. ${}^t(*,\ldots,*)$ désigne la transposée du vecteur ligne $(*,\ldots,*)$

On a

$$\frac{\partial}{\partial u}\Big((A^{(u)})^{-1}D_u\Big) = -(A^{(u)})^{-1}\frac{\partial A^{(u)}}{\partial u}(A^{(u)})^{-1}D_u + (A^{(u)})^{-1}\frac{\partial D_u}{\partial u}.$$

Puisque $(h_u)_u$ converge vers h_∞ uniformément sur X alors on vérifie que $\Big((A^{(u)})^{-1}\Big)_u$ converge vers $(A^{(\infty)})^{-1}$ pour un choix de norme matricielle quelconque, donc $((A^{(u)})^{-1}$ est bornée pour cette norme matricielle.

Soit $\xi, \eta \in A^{(0,0)}(X, E)$, on a

$$\begin{aligned}
\Big|\frac{\partial}{\partial u}\Big(\xi,\eta\Big)_{L^2,u}\Big| &= \Big|\int_X \frac{\partial}{\partial u}h_u\Big(\xi,\eta\Big)\omega_X\Big| \\
&= \Big|\int_X \Big(\frac{\partial}{\partial u}\log h_u\Big)h_u(\xi,\eta)\omega_X\Big| \\
&= \Big|\Big(\xi, (\frac{\partial}{\partial u}\log h_u)\eta\Big)_{L^2,u}\Big| \\
&\leq \Big\|\frac{\partial}{\partial u}\log h_u\Big\|_{\sup}\|\xi\|_{L^2,u}\|\eta\|_{L^2,u}.
\end{aligned}$$

On déduit que

$$\frac{\partial P^u}{\partial u} = O\Big(\Big\|\frac{\partial}{\partial u}\log h_u\Big\|_{\sup}\Big), \quad u \gg 1.$$

□

Théorème 3.4.16. *Pour tout $t > 0$, $e^{-t\Delta_{E,\infty}}$ est un opérateur nucléaire. On a*

$$\lim_{u\mapsto\infty}\theta_u(t) = \theta_\infty(t).$$

La fonction Zêta ζ_∞ définit par :

$$\zeta_\infty(s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \theta_\infty(t)t^{s-1}dt,$$

est holomorphe sur $\mathrm{Re}(s) > 1$ *et*

$$\zeta_\infty(s) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_{\infty,k}^s} \quad \forall\, \mathrm{Re}(s) > 1.$$

admet un prolongement analytique au voisinage de 0 et on a

$$\zeta'_\infty(0) = \lim_{u\mapsto\infty}\zeta'_u(0).$$

avec ζ_u est la fonction Zêta associée à $\Delta_{E,u}$.

Démonstration. Soit R un opérateur de rang inférieur à n, (voir (3.6) pour la définition de $\sigma_n(\cdot)$). Fixons t>0, on a

$$\begin{aligned}
\sigma_n(P^\infty e^{-t\Delta_{E,\infty}})_\infty &\leq \|P^\infty e^{-t\Delta_{E,\infty}} - R\|_{L^2,\infty} \\
&\leq \|P^\infty e^{-t\Delta_{E,\infty}} - P^\infty e^{-t\Delta_{E,u}}\|_{L^2,\infty} + \|P^\infty e^{-t\Delta_{E,u}} - P^u e^{-t\Delta_{E,u}}\|_{L^2,\infty} + \|P^u e^{-t\Delta_{E,u}} - R\|_{L^2,\infty} \\
&\leq \|P^\infty\|_{L^2,\infty}\|e^{-t\Delta_{E,\infty}} - e^{-t\Delta_{E,u}}\|_{L^2,\infty} + \|P^\infty - P^u\|_{L^2,\infty}\|e^{-t\Delta_{E,u}}\|_{L^2,\infty} + \|P^u e^{-t\Delta_{E,u}} - R\|_{L^2,\infty}
\end{aligned}$$

On a alors

$$\sigma_n(P^\infty e^{-t\Delta_{E,\infty}})_\infty \leq \|P^\infty\|_{L^2,\infty}\|e^{-t\Delta_{E,\infty}}-e^{-t\Delta_{E,u}}\|_{L^2,\infty}+\|P^\infty-P^u\|_{L^2,\infty}\|e^{-t\Delta_{E,u}}\|_{L^2,\infty}+\sigma_n(P^u e^{-t\Delta_{E,u}})_\infty,$$

Comme $e^{-t\Delta_{E,u}}$ (resp. P^u) converge pour la norme L^2 vers $e^{-t\Delta_{E,\infty}}$ (resp. vers P^∞) et que la suite $(\|e^{-t\Delta_{E,u}}\|_{L^2,\infty})_u$ est bornée, alors

$$\sigma_n(P^\infty e^{-t\Delta_{E,\infty}})_\infty \leq \liminf_{u\mapsto\infty} \sigma_n(P^u e^{-t\Delta_{E,u}})_\infty. \tag{3.24}$$

Rappelons que

$$\theta_u(t) = \|P^u e^{-t\Delta_u}\|_{1,u}$$

Par (3.6.2), $\|P^u e^{-t\Delta_u}\|_{1,u}$ est la somme des valeurs propres non nulles de $\left((P^u e^{-t\Delta_u})^*(P^u e^{-t\Delta_u})\right)^{\frac{1}{2}}$ comptées avec leur multiplicitées où on a noté par $\left(P^u e^{-t\Delta_u}\right)^*$ l'adjoint de $P^u e^{-t\Delta_u}$ pour la produit $(,)_{L^2_u}$. Vérifions cela : on va montrer que

$$e^{-t\Delta_u *}\left(P^u\right)^* P^u e^{-t\Delta_u} = 0$$

sur $H^0(X,E)$, et

$$e^{-t\Delta_u}\left(P^u\right)^* P^u e^{-t\Delta_u} = e^{-2t\Delta_u}$$

sur l'orthogonal à $H^0(X,E)$ pour la métrique L^2_u.

Puisque $e^{-t\Delta_u}$ laisse stable $H^0(X,E)$ et son orthogonal, alors il nous suffit de vérifier que

$$\left(P^u\right)^* P^u = 0,$$

sur $H^0(X,E)$, ce qui est évident, et

$$\left(P^u\right)^* P^u = id,$$

sur son orthogonal. On peut vérifier que P^u est autoadjoint pour L^2_u.

On a $\left(P^{u*}\xi,\xi'\right)_{L^2_u} = (\xi, P^u\xi')_{L^2_u} = (\xi,\xi')_{L^2_u}$ si ξ' est orthogonal à $H^0(X,E)$, donc $P^{u*}\xi - \xi \in H^0(X,E)$. Si ξ est orthogonal à $H^0(X,E)$ alors

$$\begin{aligned}\left(P^{u*}\xi-\xi, P^{u*}\xi-\xi\right)_{L^2,u} &= \left(\xi, P^u(P^{u*}\xi-\xi)\right)_{L^2,u} - \left(\xi, P^{u*}\xi-\xi\right)_{L^2,u}\\ &= -\left(\xi,0\right)_{L^2,u} + 0\\ &= 0.\end{aligned}$$

donc,

$$P^{u*}\xi = \xi, \quad \forall \xi \in H^0(X,E)^{\perp_u}.$$

Maintenant, si $\xi \in \mathcal{H}$, on sait qu'il existe $\eta \in H^0(X,E)$ tel que

$$P^u\left(e^{-t\Delta_u}\xi\right) = e^{-t\Delta_u}\xi + \eta,$$

par suite,

$$P^{u*}P^u\left(e^{-t\Delta_u}\xi\right) = P^{u*}e^{-t\Delta_u}\xi,$$

On conclut en rappelant que $e^{-t\Delta_u}$ laisse stable $H^0(X,E)$ et son orthogonal pour L^2_u.

On pose, pour tout $u \geq 1$:

$$\theta_{u,\infty}(t) := \|P^u e^{-t\Delta_{E,u}}\|_{1,\infty}.$$

On a pour tout $u, u' > 1$,

$$\begin{aligned}
\left|\theta_{u,\infty}(t) - \theta_{u',\infty}(t)\right| &= \left|\left\|P^u e^{-t\Delta_{E,u}}\right\|_{1,\infty} - \left\|P^{u'} e^{-t\Delta_{E,u'}}\right\|_{1,\infty}\right| \\
&\leq \left\|P^u e^{-t\Delta_{E,u}} - P^{u'} e^{-t\Delta_{E,u'}}\right\|_{1,\infty} \\
&= \left\|\int_u^{u'} \frac{\partial}{\partial v}(P^v e^{-t\Delta_{E,v}})dv\right\|_{1,\infty} \\
&= \left\|\int_u^{u'} \Big(\frac{\partial P^v}{\partial v} e^{-t\Delta_{E,v}} + P^v \frac{\partial}{\partial v}(e^{-t\Delta_{E,v}})\Big)dv\right\|_{1,\infty} \\
&= \left\|\int_u^{u'} \Big(\frac{\partial P^v}{\partial v} P^v e^{-t\Delta_{E,v}} + P^v \frac{\partial}{\partial v}(e^{-t\Delta_{E,v}})\Big)dv\right\|_{1,\infty} \\
&\leq \left\|\int_u^{u'} \frac{\partial P^v}{\partial v} P^v e^{-t\Delta_{E,v}} dv\right\|_{1,\infty} + \left\|\int_u^{u'} P^v\Big(\frac{\partial}{\partial v}(e^{-\frac{t}{2}\Delta_{E,v}})e^{-\frac{t}{2}\Delta_{E,v}} + e^{-\frac{t}{2}\Delta_{E,v}}\frac{\partial}{\partial v}(e^{-\frac{t}{2}\Delta_{E,v}})\Big)dv\right\|_{1,\infty} \\
&= \left\|\int_u^{u'} \frac{\partial P^v}{\partial v} P^v e^{-t\Delta_{E,v}} dv\right\|_{1,\infty} + \left\|\int_u^{u'} \Big(P^v \frac{\partial}{\partial v}(e^{-\frac{t}{2}\Delta_{E,v}})\Big)\Big(P^v e^{-\frac{t}{2}\Delta_{E,v}}\Big) + \Big(P^v e^{-\frac{t}{2}\Delta_{E,v}}\Big)\frac{\partial}{\partial v}(e^{-\frac{t}{2}\Delta_{E,v}})\Big)dv\right\|_{1,\infty} \\
&\leq \int_u^{u'} \left\|\frac{\partial P^v}{\partial v}\right\|_{L^2,\infty} \theta_{v,\infty}(t)dv + 2\int_u^{u'} \left\|\frac{\partial}{\partial v} e^{-\frac{t}{2}\Delta_{E,v}}\right\|_{L^2,\infty} \theta_{v,\infty}(\frac{t}{2})dv \quad \text{par (3.6.8)} \\
&\leq c_7 \int_u^{u'} \frac{1}{2^v}\theta_{v,\infty}(t)dv + c_6 \int_u^{u'} \frac{1}{2^v} t^{\frac{1}{4}} \theta_{v,\infty}(\frac{t}{2})dv \\
&\leq c_8 \frac{1}{2^u} \int_u^{u'} \Big(\theta_{v,\infty}(t) + t^{\frac{1}{4}}\theta_{v,\infty}(\frac{t}{2})\Big)dv.
\end{aligned}$$

On a utilisé les faits suivants $\frac{\partial}{\partial v}(e^{-t\Delta_v})\xi = \frac{\partial}{\partial v}(e^{-t\Delta_v})P^v\xi$ et que $\frac{\partial P^v}{\partial v}P^v = \frac{\partial P^v}{\partial v}Id$. Montrons la première assertion : Soit $\xi \in \mathcal{H}$, il existe $a_0, \ldots, a_r \in \mathbb{C}$ tels que $\xi - P\xi = \sum_i a_i 1 \otimes e_i$, donc

$$\frac{e^{-t\Delta_u} - e^{-t\Delta_{u'}}}{u - u'}\Big(\xi - P^v(\xi)\Big) = \frac{1}{u - u'}\Big(\sum_i a_i(1 \otimes e_i) - a_i(1 \otimes e_i)\Big) = 0 \quad \forall\, u \neq u'.$$

On introduit la fonction $\zeta_{u,\infty}$ définie par :

$$\zeta_{u,\infty}(s) := \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \theta_{u,\infty}(t) t^{s-1} dt, \quad \forall s \in \mathbb{C}.$$

Si l'on pose $B = P^u$ dans (3.39), on obtient

$$\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\theta_{u,\infty}(t) \leq \theta_u(t) \leq \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\theta_{u,\infty}(t), \quad \forall t > 0, \tag{3.25}$$

ce qui donne que

$$\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\zeta_{u,\infty}(s) \leq \zeta_u(s) \leq \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\zeta_{u,\infty}(s), \quad \forall s \in \mathbb{R}. \tag{3.26}$$

Comme $\zeta_u(s)$ est fini pour tout $\mathrm{Re}(s) > 1$ et tout $u \geq 1$, alors $\zeta_{\infty,u}$ existe et fini pour tout $\mathrm{Re}(s) > 1$.

D'après ce qui précède, on a pour tout $Re(s) > 1$:

$$\Big|\int_0^\infty t^{s-1}\theta_{u,\infty}(t)dt - \int_0^\infty t^{s-1}\theta_{u',\infty}(t)dt\Big| \leq c_8 \int_u^{u'} \frac{1}{2^v}\int_0^\infty \Big(t^{\mathrm{Re}(s)-1}\theta_{v,\infty}(t) + t^{\mathrm{Re}(s)+\frac{1}{4}-1}\theta_{v,\infty}(\frac{t}{2})\Big)dtdv.$$

Par suite, pour tout réel $Re(s) > 1$, on a

$$\Big|\zeta_{u,\infty}(s) - \zeta_{u',\infty}(s)\Big| \leq \frac{c_8}{2^u}\int_u^{u'}\Big(\frac{\Gamma(\mathrm{Re}(s))}{|\Gamma(s)|}\zeta_{v,\infty}(\mathrm{Re}(s)) + 2^{\mathrm{Re}(s)+\frac{1}{4}}\frac{\Gamma(\mathrm{Re}(s)+\frac{1}{4})}{|\Gamma(s)|}\zeta_{v,\infty}(\mathrm{Re}(s)+\frac{1}{4})\Big)dv$$

Notons que si l'on multiplie ω_X par $t > 0$, il est possible de supposer que les premières valeurs propres de $\Delta_{E,v}$ sont > 1, donc on aura pour tout $s > 1$:

$$\begin{aligned}\zeta_v(s) - \zeta_v(s+\frac{1}{4}) &= \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\lambda_{v,k}^s} - \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\lambda_{v,k}^{s+\frac{1}{4}}}\\ &\geq \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\lambda_{v,k}^s} - \frac{1}{\lambda_{v,1}^s}\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\lambda_{v,k}^s}\\ &= \Big(1 - \frac{1}{\lambda_{1,v}^{\frac{1}{4}}}\Big)\zeta_v(s).\end{aligned}$$

On conclut de (3.26), qu'on peut avoir

$$\zeta_{v,\infty}(s) \geq \zeta_{v,\infty}(s+\frac{1}{4}), \quad \forall s > 1, \forall v \gg 1.$$

Donc, on obtient

$$\Big|\zeta_{u,\infty}(s) - \zeta_{u',\infty}(s)\Big| \leq \frac{c_8}{2^u}\Big(\frac{\Gamma(\mathrm{Re}(s))}{|\Gamma(s)|} + 2^{\mathrm{Re}(s)+\frac{1}{4}}\frac{\Gamma(\mathrm{Re}(s)+\frac{1}{4})}{|\Gamma(s)|}\Big)\int_u^{u'}\zeta_{v,\infty}(\mathrm{Re}(s))dv,\ \forall\,\mathrm{Re}(s) > 1. \tag{3.27}$$

Maintenant on suppose que $s > 1$. Montrons que pour tout $\forall u, u' \gg 1$ et pour tout $s > 1$:

$$\exp\Big(-\frac{c_8}{\log 2}\Big|\frac{1}{2^u} - \frac{1}{2^{u'}}\Big|\Big(\frac{\Gamma(\mathrm{Re}(s))}{|\Gamma(s)|} + 2^{s+\frac{1}{4}}\frac{\Gamma(s+\frac{1}{4})}{\Gamma(s)}\Big)\Big) \leq \frac{\zeta_{u,\infty}(s)}{\zeta_{u',\infty}(s)} \leq \exp\Big(\frac{c_8}{\log 2}\Big|\frac{1}{2^u} - \frac{1}{2^{u'}}\Big|\Big(\frac{\Gamma(\mathrm{Re}(s))}{|\Gamma(s)|} + 2^{s+\frac{1}{4}}\frac{\Gamma(s+\frac{1}{4})}{\Gamma(s)}\Big)\Big). \tag{3.28}$$

Si $u' \mapsto \zeta_{u',\infty}(s)$ est différentiable pour s fixé, on obtient de (3.27)

$$\Big|\frac{\partial}{\partial u}\zeta_{u,\infty}(s)\Big| \leq \frac{c_8}{2^u}\Big(\frac{\Gamma(\mathrm{Re}(s))}{|\Gamma(s)|} + 2^{\mathrm{Re}(s)+\frac{1}{4}}\frac{\Gamma(\mathrm{Re}(s)+\frac{1}{4})}{|\Gamma(s)|}\Big)\zeta_{u,\infty}(s),$$

par suite

$$\Big|\frac{\partial}{\partial u}\log\zeta_{u,\infty}(s)\Big| \leq \frac{c_8}{2^u}\Big(\frac{\Gamma(\mathrm{Re}(s))}{|\Gamma(s)|} + 2^{s+\frac{1}{4}}\frac{\Gamma(s+\frac{1}{4})}{\Gamma(s)}\Big),$$

et donc,

$$\Big|\log\zeta_{u,\infty}(s) - \log\zeta_{u',\infty}(s)\Big| \leq \frac{c_8}{\log 2}\Big|\frac{1}{2^u} - \frac{1}{2^{u'}}\Big|\Big(\frac{\Gamma(\mathrm{Re}(s))}{|\Gamma(s)|} + 2^{s+\frac{1}{4}}\frac{\Gamma(s+\frac{1}{4})}{\Gamma(s)}\Big) \quad \forall u, u'.$$

Si $u' \mapsto \zeta_{u',\infty}(s)$ n'est pas différentiable, on applique le lemme de Gronwall à la fonction $u' \mapsto \zeta_{u',\infty}(s)$, notons que cette fonction est continue, car localement lipschitzienne, cela résulte de fait que

$v \mapsto \zeta_v(s)$ est continue, de (3.26) et de (3.27).

De (3.26) et (3.28), il existe des constantes réelles positives c_{12} et c_{13} telles que

$$c_{12}\exp\left(-\frac{c_8}{\log 2}\left|\frac{1}{2^u}-\frac{1}{2^{u'}}\right|\left(\frac{\Gamma\big(\mathrm{Re}(s)\big)}{|\Gamma(s)|}+2^{s+\frac{1}{4}}\frac{\Gamma(s+\frac{1}{4})}{\Gamma(s)}\right)\right) \leq \frac{\zeta_u(s)}{\zeta_{u'}(s)} \leq c_{13}\exp\left(\frac{c_8}{\log 2}\left|\frac{1}{2^u}-\frac{1}{2^{u'}}\right|\left(\frac{\Gamma\big(\mathrm{Re}(s)\big)}{|\Gamma(s)|}+2^{s+\frac{1}{4}}\frac{\Gamma(s+\frac{1}{4})}{\Gamma(s)}\right)\right) \tag{3.29}$$

pour tout $u, u' \gg 1$ et $\forall s > 1$.

On sait que ζ_u est holomorphe sur $\mathrm{Re}(s) > 1$. Montrons que (ζ_u) converge uniformément sur tout domaine de la forme $\alpha \leq \mathrm{Re}(s) \leq \beta$, avec $1 < \alpha \leq \beta$, vers une fonction holomorphe sur $\mathrm{Re}(s) > 1$. On établira après que cette limite est ζ_∞.

De (3.25), on a

$$-\frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon}\theta_{\infty,u}(t) \leq \theta_u(t) - \theta_{\infty,u}(t) \leq \frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon}\theta_{u,\infty} \quad \forall t > 0\ \forall u, u' \gg 1$$

d'où on tire,

$$\Big|\theta_u(t) - \theta_{\infty,u}(t)\Big| \leq \frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon}\theta_{u,\infty}(t),$$

Par suite,

$$\Big|\zeta_u(s) - \zeta_{u,\infty}(s)\Big| \leq \frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon}\frac{\Gamma(\mathrm{Re}(s))}{|\Gamma(s)|}\zeta_{u,\infty}(\mathrm{Re}(s)) \quad \forall\, \mathrm{Re}(s) > 1.$$

En utilisant cette inégalité, on obtient :

$$\Big|\zeta_u(s) - \zeta_{u'}(s)\Big| \leq \Big|\zeta_{u,\infty}(s) - \zeta_{u',\infty}(s)\Big| + \frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon}\frac{\Gamma(\mathrm{Re}(s))}{|\Gamma(s)|}\Big(\zeta_{u,\infty}(\mathrm{Re}(s)) + \zeta_{u',\infty}(\mathrm{Re}(s))\Big) \quad \forall \mathrm{Re}(s) > 1\ \forall u, u' \gg 1.$$

Si l'on choisit $1 < \alpha < \beta$. Alors on a déjà montré que la suite $\big(\zeta_{u,\infty}(\mathrm{Re}(s))\big)_u$ est bornée sur $\alpha \leq \mathrm{Re}(s) \leq \beta$ uniformément en u. Donc, on peut trouver une constante K, qui dépend uniquement de α et β telle que

$$\Big|\zeta_u(s) - \zeta_{u'}(s)\Big| \leq \Big|\zeta_{u,\infty}(s) - \zeta_{u',\infty}(s)\Big| + \frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon}K \quad \forall\, \mathrm{Re}(s) > 1\ \forall u, u' \gg 1.$$

donc, $(\zeta_u)_{u\geq 1}$ converge uniformément vers une limite sur $\alpha \leq \mathrm{Re}(s) \leq \beta$, cette limite est nécessairement holomorphe sur $\alpha < \mathrm{Re}(s) < \beta$.

Lemme 3.4.17. *Soit θ une fonction réelle, décroissante et positive. On pose ζ, la fonction définie par*

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}\theta(t)dt,$$

pour $s \in \mathbb{R}$. On a

$$\theta(a) \leq \frac{\Gamma(s+1)}{a^s}\zeta(s), \quad \forall s > a > 0. \tag{3.30}$$

Démonstration. Soit $a > 0$ et $s > a$, on a

$$\begin{aligned}\zeta(s) &= \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \theta(t)t^{s-1}dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^a \theta(t)t^{s-1}dt + \frac{1}{\Gamma(s)}\int_a^\infty \theta(t)t^{s-1}dt \\ &\geq \frac{\theta(a)}{\Gamma(s)}\int_0^a t^{s-1}dt \\ &= \frac{\theta(a)}{\Gamma(s+1)}a^s.\end{aligned}$$

□

Appliquons ce lemme pour montrer que $\theta_u(t)$ est uniformément bornée en u pour tout $t > 0$. De (3.30), on a

$$\theta_u(t) \leq \frac{\Gamma(s+1)}{t^s}\zeta_u(s), \quad \forall s > t > 0.$$

donc, si l'on choisit $s > 1$, alors $\zeta_u(s)$ est fini. En utilisant (3.29), on déduit que pour tout $t > 0$ fixé, $\theta_u(t)$ est uniformément bornée en u. Cela va nous permettre de montrer que $e^{-t\Delta_{E,\infty}}$ est un opérateur nucléaire, mais avant, on rappelle un lemme technique qui nous sera utile :

Lemme 3.4.18. *Soit $\{c_{n,i} : n \in \mathbb{N}, i \in N\}$ une famille de réels positifs, alors on a*

$$\liminf_{n\mapsto\infty}\sum_i c_{n,i} \geq \sum_i \liminf_{n\mapsto\infty} c_{n,i}.$$

Démonstration. Soit N un entier non nul. On a

$$\sum_{i=1}^\infty c_{k,i} \geq \sum_{i=1}^N \inf_{l\geq n} c_{l,i}, \quad \forall n\ \forall k \geq n$$

donc

$$\inf_{k\geq n}\sum_{i=1}^\infty c_{k,i} \geq \sum_{i=1}^N \inf_{l\geq n} c_{l,i}, \quad \forall n$$

ce qui donne

$$\liminf_n \sum_i c_{n,i} \geq \sum_{i=1}^N \liminf_n c_{n,i}.$$

donc,

$$\liminf_n \sum_i c_{n,i} \geq \sum_i \liminf_n c_{n,i}.$$

puisque tous les termes sont positifs. □

On a

$$\begin{aligned}\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\liminf_{u\mapsto\infty}\theta_u(t) &\geq \liminf_{u\mapsto\infty}\theta_{u,\infty}(t) \quad \text{par (3.25)} \\ &= \liminf_{u\mapsto\infty}\sum_{n\geq 1}\sigma_n\big(P^u e^{-t\Delta_{E,u}}\big)_\infty \\ &\geq \sum_{n\geq 1}\liminf_{u\mapsto\infty}\sigma_n\big(P^u e^{-t\Delta_{E,u}}\big)_\infty \quad \text{par (3.4.18)}\end{aligned}$$

$$\geq \sum_{n\geq 1} \sigma_n\big(P^{\infty} e^{-t\Delta_{E,\infty}}\big)_{\infty} \quad \text{par (3.24)}$$
$$= \theta_{\infty}(t).$$

Comme on a montré que $\theta_u(t)$ est bornée pour $t > 0$ fixé, alors

$$\theta_{\infty}(t) < \infty, \quad \forall t > 0.$$

C'est à dire, on a montré que

$$e^{-t\Delta_{E,\infty}},$$

est un opérateur nucléaire.

De (3.39), (3.40) et (3.41) alors

$$\big(\theta_u(t)\big)_u \xrightarrow[u\mapsto\infty]{} \theta_{\infty}(t) \quad \forall t > 0.$$

d'où on déduit que

$$\big(\rho_u(t)\big)_u \xrightarrow[u\mapsto\infty]{} \rho_{\infty}(t) \quad \forall t > 0.$$

Fixons $\varepsilon > 0$, comme $\big(\zeta_u(1+\varepsilon)\big)_{u\geq 1}$ est convergente, on peut trouver une constante réelle c telle que

$$\theta_u(t) \leq \frac{1}{t^{\varepsilon+1}} c, \quad \forall\, 0 < t < 1+\varepsilon,\ \forall u \gg 1.$$

donc,

$$\theta_{\infty}(t) \leq \frac{1}{t^{\varepsilon+1}} c.$$

Soit $\mathrm{Re}(s) > 1+\varepsilon$. On a

$$\zeta_u(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\delta} t^{s-\varepsilon-2}\big(t^{\varepsilon+1}\theta_u(t)\big)dt + \frac{1}{\Gamma(s)} \int_{\delta}^{\infty} t^{s-1}\theta_u(t)dt,\ \forall u \geq 1.$$

Comme $\big(\theta_u\big)_u$ converge simplement vers θ_{∞}, alors par le théorème de convergence dominée de Lebesgue :

$$\zeta_u(s) \xrightarrow[u\mapsto\infty]{} \zeta_{\infty}(s) \quad \forall\, \mathrm{Re}(s) > 1+\varepsilon.$$

Montrons que

$$\zeta_{\infty}(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{\infty,k}^{s}},\ \forall\, \mathrm{Re}(s) > 1.$$

Montrons d'abord que

$$\zeta_{\infty}(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{\infty,k}^{s}},\ \forall\, s > 1.$$

Soit $\delta > 0$, on a pour tout s $> 1+\varepsilon$:

$$\zeta_{\infty}(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\delta} t^{s-1}\theta_{\infty}(t)dt + \int_{\delta}^{\infty} t^{s-1}\theta_{\infty}(t)dt$$
$$= \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\delta} \Big(\theta_{\infty}(t)t^{\varepsilon+1}\Big)t^{s-2-\varepsilon}dt + \int_{\delta}^{\infty} t^{s-1}\theta_{\infty}(t)dt.$$

Comme $\left|\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\delta\Big(\theta_\infty(t)t^{\varepsilon+1}\Big)t^{s-2-\varepsilon}dt\right| \leq \frac{c}{s-1-\varepsilon}\delta^{s-1-\varepsilon}$ et $\theta_\infty(t) \leq \theta_\infty(\delta)e^{-\lambda_{\infty,1}(t-\delta)}$ pour tout $t \geq \delta$, alors

$$\begin{aligned}\zeta_\infty(s) &= O(\delta^{s-1-\varepsilon}) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(s)}\int_\delta^\infty t^{s-1}e^{-\lambda_{\infty,k}t}dt\\ &\leq O(\delta^{s-1-\varepsilon}) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_{\infty,k}^s}\frac{1}{\Gamma(s)}\int_{\lambda_{\infty,k}\delta}^\infty t^{s-1}e^{-t}dt\\ &\leq O(\delta^{s-1-\varepsilon}) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_{\infty,k}^s}.\end{aligned}$$

En remarquant que

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_{\infty,k}^s} = \lim_{N\mapsto\infty}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{\lambda_{\infty,k}^s} \leq \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}\theta_\infty(s)dt.$$

On conclut que

$$\zeta_\infty(s) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_{\infty,k}^s},\ \forall s > 1.$$

Soit $\mathrm{Re}(s) > 1$, on pose

$$\zeta_{N,\infty}(s) := \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty t^{s-1}\Big(\sum_{k=N}^{\infty}e^{-\lambda_{\infty,k}t}\Big)dt,$$

donc

$$\zeta_{N,\infty}(s) = \zeta_\infty(s) - \sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{\lambda_{\infty,k}^s}, \quad \forall\,\mathrm{Re}(s) > 1.$$

On a

$$\big|\zeta_{N,\infty}(s)\big| \leq \Big|\frac{1}{\Gamma(s)}\Big|\int_0^\infty t^{\mathrm{Re}(s)-1}\Big(\sum_{k=N}^{\infty}e^{-\lambda_{\infty,k}t}\Big)dt = \frac{\Gamma(\mathrm{Re}(s))}{|\Gamma(s)|}\Big(\zeta_\infty(\mathrm{Re}(s)) - \sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{\lambda_{\infty,k}^{\mathrm{Re}(s)}}\Big).$$

Le terme à droite tends vers zéro lorsque N se rapproche de l'infini. On conclut que

$$\zeta_\infty(s) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_{\infty,k}^s},\ \forall\,\mathrm{Re}(s) > 1.$$

Soit $\mathrm{Re}(s) > 1$, on a

$$\begin{aligned}\big|\zeta_u(s) - \zeta_{u'}(s)\big| &\leq \big|\zeta_u(s)\big| + \big|\zeta_{u'}(s)\big|\\ &\leq \zeta_u(\mathrm{Re}(s)) + \zeta_{u'}(\mathrm{Re}(s)).\end{aligned}$$

car $\zeta_u(s) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_{u,k}^s}$ lorsque $\mathrm{Re}(s) > 1$.

Soit $\mathrm{Re}(x) > 0$. On pose pour tout $u \geq 1$

$$\widetilde{\theta}_u(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}x^{-s}\Gamma(s)\zeta_u(s)ds,$$

où c est un entier > 1 fixé.

On vérifie que $\widetilde{\theta}_u(x) = \sum_{k\geq 1} e^{-\lambda_{u,k}x}$, $\left|\widetilde{\theta}_u(x)\right| \leq \theta(\mathrm{Re}(x))$, $\widetilde{\theta}_u$ coïncide avec θ_u sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que $\widetilde{\theta}_u(x) = \frac{a_{-1}}{x} + a_0 + \widetilde{\rho}(x)$ pour x assez petit.

On a

$$\begin{aligned}
\left|\widetilde{\theta}_u(x) - \widetilde{\theta}_{u'}(x)\right| &\leq \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left|\Big(x^{-s}\Gamma(s)\zeta_u(s) - x^{-s}\Gamma(s)\zeta_{u'}(s)\Big)\right|ds \\
&\leq \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}|x|^{\mathrm{Re}(s)}|\Gamma(s)|\Big(\zeta_u(\mathrm{Re}(s)) + \zeta_{u'}(\mathrm{Re}(s))\Big)ds \\
&= \frac{1}{2\pi}|x|^{-c}\Big(\zeta_u(c) + \zeta_{u'}(c)\Big)\left(\int_{-1}^{1}|\Gamma(c+it)|dt + \int_{]-\infty,-1]\cup[1,\infty[}|\Gamma(c+it)|dt\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}|x|^{-c}\Big(\zeta_u(c) + \zeta_{u'}(c)\Big)\left(\int_{-1}^{1}|\Gamma(c+it)|dt + \int_{]-\infty,-1]\cup[1,\infty[}\prod_{k=0}^{c-1}\sqrt{k^2+t^2}|\Gamma(it)|dt\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}|x|^{-c}\Big(\zeta_u(c) + \zeta_{u'}(c)\Big)\left(\int_{-1}^{1}|\Gamma(c+it)|dt + \int_{]-\infty,-1]\cup[1,\infty[}\prod_{k=0}^{c-1}\sqrt{k^2+t^2}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{|t|}\sqrt{|\sinh(\pi t)|}}|dt\right) \\
&\quad \text{voir formule [AS92, 6.1.29]}
\end{aligned}$$

on vérifie que la dernière intégrale est convergente. Comme (ζ_u) converge uniformément sur tout domaine de la forme $\delta + 1 \geq \mathrm{Re}(s)$. Alors il existe une constante réelle K qui dépend uniquement de c telle que

$$\left|\widetilde{\theta}_u(x) - \widetilde{\theta}_{u'}(x)\right| \leq K|x|^{-c}, \quad \forall\, \mathrm{Re}(x) > 0.$$

On en déduit que

$$\left|\widetilde{\rho}_u(x) - \widetilde{\rho}_{u'}(x)\right| \leq K|x|^{-c}, \quad \forall\, \mathrm{Re}(x) > 0.$$

Soit $r > 0$ fixé. On note par D la courbe paramétrée par $re^{i\alpha}$, où $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$. Si l'on remplace x par x^2 dans l'inégalité ci-dessus, et qu'on considère k un entier supérieur à 1, alors on a

$$\left|\int_D \frac{\widetilde{\rho}_u(x^2) - \widetilde{\rho}_{u'}(x^2)}{x^{2k}}dx\right| \leq K\int_D |x|^{-2c-2k}dx,$$

qui donne

$$\left|a_{u,k} - a_{u',k}\right| \leq Kr^{-2c-2k},\ \forall u, u'\ \forall k \in \mathbb{N}_{\geq 1},$$

(on a utilisé le fait suivant : $\int_D x^{2(j-k)}dx = \delta_{k,j}\pi$).

Par suite, si l'on considère $0 < t < r$ alors

$$\begin{aligned}
|\rho_u(t^2)| &\leq \sum_{k\geq 1}|a_{u,k}|t^{2k} \\
&\leq \sum_{k\geq 1}|a_{u,k} - a_{u',k}|t^{2k} + \sum_{k=1}^{\infty}|a_{u',k}|t^{2k} \\
&\leq \sum_{k\geq 1}Kr^{-2c}\Big(\frac{t^2}{r^2}\Big)^k + \sum_{k=1}^{\infty}|a_{u',k}|t^{2k}
\end{aligned}$$

$$\leq Kr^{-2c}\frac{t^2}{r^2-t^2}+\sum_{k=1}^{\infty}|a_{u',k}|t^{2k}.$$

En fixant u', on peut trouver une constante K' et un réel $t_0>0$ telle que

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_{u',k}|t^{2k}\leq K'\frac{t^2}{1-t^2}\quad \forall\, t\in[0,t_0].$$

On conclut qu'il existe une constante K'' telle que

$$\big|\rho_u(t)\big|\leq K''t,\quad \forall\, u\gg 1,\ \forall\, 0\leq t\leq \min(\sqrt{r},t_0).$$

Or, on a montré que ρ_u converge simplement vers ρ_∞, donc

$$\big|\rho_\infty(t)\big|\leq K''t,\quad \forall\, 0\leq t\leq \min(\sqrt{r},t_0).$$

en d'autres termes $\rho_\infty(t)=O(t)$. Par conséquent ζ_∞ admet un prolongement analytique au voisinage de $s=0$ avec

$$\zeta'_\infty(0)=\int_1^\infty\frac{\theta_\infty(t)}{t}dt+a_{-1}+a_0+\int_0^1\frac{\rho_\infty(t)}{t}dt.$$

Comme

$$\theta_u(t)\leq\theta_u(1)e^{-\lambda_{u,1}(t-1)}\quad \forall t\geq 1.$$

D'après (3.7.17), on peut trouver une constante $c>0$ telle que $\lambda_{u,1}\geq c$ pour tout $u\geq 1$. Rappelons que $\big(\theta_u(1)\big)_u$ est bornée. Par conséquent, il existe $M>0$ telle que

$$\theta_u(t)\leq Me^{-ct}\quad \forall t\geq 1.$$

Aussi, on a montré que

$$\big|\rho_u(t)\big|\leq K''t,\quad \forall u\gg 1\ \forall\, 0\leq t\leq \min(\sqrt{r},t_0).$$

On déduit à l'aide du théorème de convergence dominée de Lebesgue que

$$\left(\int_0^1\frac{\theta_u(t)}{t}dt\right)_u\xrightarrow[u\mapsto\infty]{}\int_1^\infty\frac{\theta_\infty(t)}{t}dt.$$

et

$$\left(\int_0^1\frac{\rho_u(t)}{t}dt\right)_u\xrightarrow[u\mapsto\infty]{}\int_0^1\frac{\rho_\infty(t)}{t}dt.$$

Par conséquent,

$$\big(\zeta'_u(0)\big)_{u\geq 1}\xrightarrow[u\mapsto\infty]{}\zeta'_\infty(0).$$

En particulier

$$\big(\zeta'_p(0)\big)_{p\in\mathbb{N}}\xrightarrow[p\mapsto\infty]{}\zeta'_\infty(0). \tag{3.31}$$

Rappelons qu'on a montré à l'aide de la formule des anomalies que la suite des métriques de Quillen suivante :

$$\Big(h_{Q,((X,\omega_X);(E,h_p))}\Big)_{p\in\mathbb{N}}$$

converge vers une limite qu'on a noté par $h_{Q,((X,\omega_X);(E,h_\infty))}$.

Montrons que

$$\Big(h_{L^2,((X,\omega_X);(E,h_p))}\Big)_{p\in\mathbb{N}}$$

converge vers $h_{L^2,((X,\omega_X);(E,h_\infty))}$. Pour cela, on a besoin de la proposition suivante :

Proposition 3.4.19. *Soit (X,ω) une surface de Riemann compacte. Soit $\overline{E}=(E,h_E)$ un fibré en droites muni d'une métrique hermitienne $\mathcal{C}^\infty$. On note $K_X=\Omega_X^{(1,0)}$ qu'on munit de la métrique induite par ω et E^* le fibré dual muni de la métrique duale.*

On a

$$\Delta^0_{K_X\otimes E^*}*_{1,E}=-*_{1,E}\Delta^1_E.$$

où on a noté par Δ^*_* l'opérateur Laplacien généralisé agissant sur $A^{(0,*)}(X,*)$. En particulier,

$$\ker(\Delta^1_E)=*_{1,E}^{-1}\Big(H^0(X,K_X\otimes E^*)\Big).$$

Démonstration. Soit $\xi\in A^{(0,1)}(X,E)$. On a

$$\begin{aligned}\Delta_{K_X\otimes E^*}(*_{1,E}\xi)&=\overline{\partial}^*_{K_X\otimes E^*}\overline{\partial}_{K_X\otimes E^*}(*_{1,E}\xi)\\&=*_{1,E}\overline{\partial}_E*_{0,E}^{-1}\overline{\partial}_{K_X\otimes E^*}*_{1,E}\xi\\&=*_{1,E}\overline{\partial}_E\overline{\partial}^*_E\xi\\&=*_{1,E}\Delta^1_E\xi.\end{aligned}$$

Comme $\ker\Delta^0_{K_X\otimes E^*}=H^0(X,K_X\otimes E^*)$, alors

$$\ker\Delta^1_E=*_{1,E}^{-1}\Big(H^0(X,K_X\otimes E^*)\Big).$$

□

Proposition 3.4.20. *Soit $(h_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de métriques hermitiennes continues qui converge uniformément vers h_∞ sur E, un fibré en droites sur une surface de Riemann compacte.*

Alors pour tout $\xi,\xi'\in A^{(0,1)}(X,K_X\otimes E^*)$,

1. $$(*_{1,\overline{E}_p}^{-1}\xi)_{p\in\mathbb{N}}\xrightarrow[p\mapsto\infty]{}*_{1,\overline{E}_\infty}^{-1}\xi,$$

   pour la métrique L^2_q, où $q\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}$.

2. $$\Big((*_{1,\overline{E}_p}^{-1}\xi,*_{1,\overline{E}_p}^{-1}\xi')_{L^2,p}\Big)_{p\in\mathbb{N}}\xrightarrow[p\mapsto\infty]{}(*_{1,\overline{E}_\infty}^{-1}\xi,*_{1,\overline{E}_\infty}^{-1}\xi')_{L^2,\infty}$$

Démonstration. Soit $\xi\in A^{(0,1)}(X,K_X\otimes E^*)$. Comme X est compacte, on peut supposer que $\xi=g\,dz\otimes\tau^*$ avec $g\in A^{(0,0)}(X)$ et τ une section holomorphe locale de E. On a pour tout $p,q\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\left\|*_{1,\overline{E}_p}^{-1}(gdz\otimes\tau^*)-*_{1,\overline{E}_q}^{-1}(gdz\otimes\tau^*)\right\|_{L^2,\infty}&=\left\|\overline{g}\frac{\overline{\tau^*(\tau)}}{h_q(\tau,\tau)}d\overline{z}\otimes\tau-\overline{g}\frac{\overline{\tau^*(\tau)}}{h_p(\tau,\tau)}d\overline{z}\otimes\tau\right\|_{L^2,\infty}\\&=\frac{i}{2\pi}\int_X|g|^2|\tau^*(\tau)|^2\left|\frac{1}{h_p(\tau,\tau)}-\frac{1}{h_q(\tau,\tau)}\right|^2h_\infty(\tau,\tau)dz\wedge d\overline{z}\\&=\frac{i}{2\pi}\int_X|g|^2\left|\frac{h_p^*(\tau^*,\tau^*)-h_q^*(\tau^*,\tau^*)}{h_\infty(\tau^*,\tau^*)}\right|^2h_\infty^*(\tau^*,\tau^*)dz\wedge d\overline{z}.\end{aligned}$$

Donc,

$$\left(*^{-1}_{1,\overline{E}_p}\xi\right)_{p\in\mathbb{N}} \xrightarrow[p\mapsto\infty]{} *^{-1}_{1,\overline{E}_\infty}\xi,$$

pour la norme L^2_∞.

Montrons que,

$$\Big(\left(*^{-1}_{1,\overline{E}_p}\xi, *^{-1}_{1,\overline{E}_p}\xi'\right)_{L^2,p}\Big)_{p\in\mathbb{N}} \xrightarrow[p\mapsto\infty]{} \left(*^{-1}_{1,\overline{E}_\infty}\xi, *^{-1}_{1,\overline{E}_\infty}\xi'\right)_{L^2,\infty}$$

On suppose que $\xi' = f dz\otimes\sigma^*$, on a

$$\begin{aligned}\left(*^{-1}_{1,\overline{E}_p}\xi, *^{-1}_{1,\overline{E}_p}\xi'\right)_{L^2,p} &= \frac{i}{2\pi}\int_X \overline{g}f\,\frac{\overline{\tau^*(\tau)}\sigma^*(\sigma)}{h_p(\tau,\tau)h_p(\sigma,\sigma)}h_p(\tau,\sigma)dz\wedge d\overline{z}\\ &= \frac{i}{2\pi}\int_X \overline{g}f\,h^*_p(\tau^*,\sigma^*)dz\wedge d\overline{z}.\end{aligned}$$

Comme $(h_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers h_∞ sur E, alors $(h^*_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers h^*_∞ sur E^*, donc

$$\Big(\left(*^{-1}_{1,\overline{E}_p}\xi, *^{-1}_{1,\overline{E}_p}\xi'\right)_{L^2,p}\Big)_{p\in\mathbb{N}} \xrightarrow[p\mapsto\infty]{} \left(*^{-1}_{1,\overline{E}_\infty}\xi, *^{-1}_{1,\overline{E}_\infty}\xi'\right)_{L^2,\infty}.$$

□

Comme application, on obtient :

$$\Big(\mathrm{Vol}_{L^2,p}(H^1(X,E))\Big)_{p\in\mathbb{N}} \xrightarrow[p\mapsto\infty]{} \mathrm{Vol}_{L^2,\infty}(H^1(X,E)).$$

On réécrit donc (3.31) sous la forme :

$$T\Big((X,\omega_X);(E,h_\infty)\Big) = \zeta'_\infty(0).$$

□

3.5 Variation de la métrique sur TX

Dans cette partie on étudie les différents objets spectraux associés aux métriques intégrables sur le fibré tangent d'une surface de Riemann compacte. Cette étude est plus simple contrairement au cas de E où on avait besoin de supposer que la métrique de E soit 1-intégrable.

Soit X une surface de Riemann compacte et E un fibré en droites holomorphe sur X. On munit X d'une métrique intégrable $h_{X,\infty}$. Par hypothèse il existe une décomposition de $h_{X,\infty} = h_{1,\infty}\otimes h^{-1}_{2,\infty}$ en métriques admissibles et des suites $(h_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(h_{2,n})_{n\in\mathbb{N}}$ de métriques positives $\mathcal{C}^\infty$ qui convergent uniformément vers $h_{1,\infty}$ respectivement vers $h_{2,\infty}$.

Fixons h_E, une métrique hermitienne $\mathcal{C}^\infty$ sur E.

On pose $h_{X,n} := h_{n,1}\otimes h^{-1}_{2,n}\ \forall\, n\in\mathbb{N}$. On considère la famille $(h_{X,u})_{u>1}$ associée à cette suite comme dans (3.7.1), rappelons que $h_{X,u}$ est une métrique hermitienne sur le fibré TX.

On note par $\omega_{X,u}$ la forme volume normalisée associée et par $\Delta_{X,u}$ le Laplacien généralisé associé à $h_{X,u}$ et à h_E pour tout $u\in]1,\infty[$.

Pour tout $u\in]1,\infty]$, on notera par $L^2_{X,u}$ (resp. $(\cdot,\cdot)_{L^2,u}$) la métrique hermitienne (resp. le produit hermitien) induits par $h_{X,u}$ et h_E sur $A^{(0,0)}(X,E)$.

Définition 3.5.1. *On pose, pour $\xi \in A^{0,0}(X,E)$:*

$$\Delta_{X,\infty}\xi := -\sum_{i=1}^{r} h_{X,\infty}\Big(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-1} h_E(\sigma_i,\sigma_i)^{-1}\frac{\partial}{\partial z}\Big(h_E(\sigma_i,\sigma_i)\frac{\partial f_i}{\partial \overline{z}}\Big)\otimes\sigma_i.$$

où $\xi = \sum_{i=1}^{r} f_i\otimes\sigma_i$ localement et $\{\frac{\partial}{\partial z}\}$ une base locale de TX. On l'appellera l'opérateur Laplacien associé à la métrique $h_{X,\infty}$.

Dans le théorème suivant, on montre que $\Delta_{X,\infty}$ est un opérateur linéaire défini sur $A^{(0,0)}(X,E)$ à valeurs dans $\overline{A^{(0,0)}(X,E)}_{\infty}$, (le completé de $A^{(0,0)}(X,E)$ pour la métrique L^2_{∞}).

Théorème 3.5.2. *Avec les notations précédentes, on a :*

1. $$\lim_{u\mapsto\infty}\|\Delta_{X,u}\xi\|^2_{L^2,u} = \|\Delta_{X,\infty}\xi\|^2_{L^2,\infty} < \infty,$$
2. $$(\Delta_{X,\infty}\xi,\xi')_{L^2,\infty} = (\xi,\Delta_{X,\infty}\xi')_{L^2,\infty},$$
3. $$(\Delta_{X,\infty}\xi,\xi)_{L^2,\infty} \geq 0,$$

pour tout $\xi,\xi'\in A^{0,0}(X,E)$.

Démonstration. Soit $\xi\in A^{(0,0)}(X,E)$, on a pour tout $u>1$:

$$\|\Delta_{X,u}\xi\|^2_{L^2,u} = \int_{x\in X}(\Delta_{X,u}\xi,\Delta_{X,u}\xi)_x\omega_{X,u} = \frac{i}{2\pi}\int_{x\in X}\Big(\Delta_{X,u}\xi,\Delta_{X,u}\xi\Big)_x h_{X,u}\Big(\frac{\partial}{\partial z}(x),\frac{\partial}{\partial z}(x)\Big)_x dz_x\wedge d\overline{z}_x,$$

où $\{\frac{\partial}{\partial z}(x)\}$ est une base locale de TX au voisinage de x.

Si l'on note par U un ouvert dans lequel $\xi=\sum_{i=1}^{r} f_i\otimes\sigma_i$, alors le Laplacien $\Delta_{X,u}$ s'écrit pour tout $x\in U$, :

$$\Delta_{X,u}\xi = -\sum_{i=1}^{r} h_{X,u}\Big(\frac{\partial}{\partial z}(x),\frac{\partial}{\partial z}(x)\Big)^{-1} h_E(\sigma_i,\sigma_i)^{-1}\frac{\partial}{\partial z}{}_x\Big(h_E(\sigma_i,\sigma_i)\frac{\partial f_i}{\partial \overline{z}_x}\Big)\otimes\sigma_i.$$

Pour simplifier les notations, on écrit $\|\sigma\|^2_E = h_E(\sigma,\sigma)$. On a

$$\begin{aligned}
&h_{X,u}\Big(\frac{\partial}{\partial z}(x),\frac{\partial}{\partial z}(x)\Big)_x\Big(\Delta_{X,u}\xi,\Delta_{X,u}\xi\Big)_x\\
&\quad= h_{X,u}\Big(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z}\Big)\Big(\sum_{j=1}^{r} h_{X,u}\Big(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-1}\|\sigma_j\|_E^{-2}\frac{\partial}{\partial z}\Big(\|\sigma_j\|^2_E\frac{\partial f_j}{\partial\overline{z}_x}\Big)\otimes\sigma_j,\sum_{j=1}^{r} h_{X,u}\Big(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-1}\|\sigma_j\|_E^{-2}\frac{\partial}{\partial z}\Big(\|\sigma_j\|^2_E\frac{\partial f_j}{\partial\overline{z}_x}\Big)\otimes\sigma_j\Big)\\
&\quad= h_{X,u}\Big(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z}\Big)_x^{-1}\sum_{k,j}\|\sigma_k\|_E^{-2}\|\sigma_j\|_E^{-2}\frac{\partial}{\partial z}\Big(\|\sigma_k\|^2_E\frac{\partial f_k}{\partial\overline{z}}\Big)\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\Big(\|\sigma_j\|^2_E\frac{\partial\overline{f_j}}{\partial z}\Big)h_E(\sigma_k,\sigma_j)\\
&\quad\leq \frac{h_{X,\infty}\Big(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z}\Big)_x}{h_{X,u}\Big(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z}\Big)_x}h_{X,\infty}\Big(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z}\Big)_x\Big(\Delta_{X,\infty}\xi,\Delta_{X,\infty}\xi\Big)_x,
\end{aligned}$$

On a $x\mapsto h_{X,\infty}\Big(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z}\Big)_x h_{X,u}\Big(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z}\Big)_x^{-1}$ est la restriction sur U d'une fonction globale bornée sur X, rappelons que $(h_{X,u})_u \xrightarrow[u\mapsto\infty]{} h_{X,\infty}$.

Par une partition d'unité, on établit à l'aide du théorème de convergence dominée que :

$$\begin{aligned}
\|\Delta_{X,\infty}\xi\|^2_{L^2,\infty} &= \frac{i}{2\pi}\int_X h_{X,\infty}\Big(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z}\Big)_x\Big(\Delta_{X,\infty}\xi,\Delta_{X,\infty}\xi\Big)_x dz\wedge d\overline{z}\\
&= \frac{i}{2\pi}\int_X h_{X,\infty}\Big(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-1}\sum_{k,j}\|\sigma_k\|_E^{-2}\|\sigma_j\|_E^{-2}\frac{\partial}{\partial z}\Big(\|\sigma_k\|_E^2\frac{\partial f_k}{\partial\overline{z}}\Big)\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\Big(\|\sigma_j\|_E^2\frac{\partial\overline{f_j}}{\partial z}\Big)h_E(\sigma_k,\sigma_j)dz\wedge d\overline{z}\\
&= \frac{i}{2\pi}\int_X \lim_{u\mapsto\infty} h_{X,u}\Big(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-1}\sum_{k,j}\|\sigma_k\|_E^{-2}\|\sigma_j\|_E^{-2}\frac{\partial}{\partial z}\Big(\|\sigma_k\|_E^2\frac{\partial f_k}{\partial\overline{z}}\Big)\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\Big(\|\sigma_j\|_E^2\frac{\partial\overline{f_j}}{\partial z}\Big)h_E(\sigma_k,\sigma_j)dz\wedge d\overline{z}\\
&= \frac{i}{2\pi}\lim_{u\mapsto\infty}\int_X h_{X,u}\Big(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-1}\sum_{k,j}\|\sigma_k\|_E^{-2}\|\sigma_j\|_E^{-2}\frac{\partial}{\partial z}\Big(\|\sigma_k\|_E^2\frac{\partial f_k}{\partial\overline{z}}\Big)\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\Big(\|\sigma_j\|_E^2\frac{\partial\overline{f_j}}{\partial z}\Big)h_E(\sigma_k,\sigma_j)dz\wedge d\overline{z}\\
&= \lim_{u\mapsto\infty}\|\Delta_{X,u}\xi\|^2_{L^2,u}.
\end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned}
(\Delta_{X,\infty}(f\otimes\sigma),g\otimes\tau)_{L^2,\infty} &= \int_X h_E(\sigma,\sigma)^{-1}\frac{\partial}{\partial z}\Big(h_E(\sigma,\sigma)\frac{\partial f}{\partial\overline{z}}\Big)\,\overline{g}\,h_E(\sigma,\tau)dz\wedge d\overline{z}\\
&= \int_X h_E(\sigma,\tau)\frac{\partial f}{\partial\overline{z}}\frac{\partial\overline{g}}{\partial z}dz\wedge d\overline{z},\quad \text{par}\quad (3.3.4)\\
&= (f\otimes\sigma,\Delta_{X,\infty}(g\otimes\tau))_{L^2,\infty}.
\end{aligned}$$

par linéarité, on déduit que

$$(\Delta_{X,\infty}\xi,\xi')_{L^2,\infty} = (\xi,\Delta_{X,\infty}\xi')_{L^2,\infty}$$

pour tout $\xi,\xi'\in A^{(0,0)}(X,E)$. On a

$$\begin{aligned}
(\Delta_{X,\infty}\xi,\xi)_{L^2,\infty} &= \frac{i}{2\pi}\int_X(\Delta_{X,\infty}\xi,\xi)_{L^2,\infty}\omega_{X,\infty}\\
&= \frac{i}{2\pi}\int_X\Big(-\sum_{j=1}^r h_{X,\infty}\Big(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z}\Big)^{-1}h_E(\sigma_j,\sigma_j)^{-1}\frac{\partial}{\partial z}\Big(h_E(\sigma_j,\sigma_j)\frac{\partial f_i}{\partial\overline{z}}\Big)\otimes\sigma_j,\sum_{j=1}^r f_j\otimes\sigma_j\Big)\omega_{X,\infty}\\
&= -\frac{i}{2\pi}\int_X\sum_{j,k=1}^r h_E(\sigma_j,\sigma_j)^{-1}\frac{\partial}{\partial z}\Big(h_E(\sigma_j,\sigma_j)\frac{\partial f_j}{\partial\overline{z}}\Big)\overline{f_k}h_E(\sigma_j,\sigma_k)dz\wedge d\overline{z}\\
&= \frac{i}{2\pi}\int_X\sum_{j,k=1}^r h_E(\sigma_j,\sigma_k)\frac{\partial f_j}{\partial\overline{z}}\frac{\partial\overline{f_k}}{\partial z}dz\wedge d\overline{z},\quad \text{par (3.3.4)}\\
&= \frac{i}{2\pi}\int_X h_E\Big(\sum_{j=1}^r\frac{\partial f_j}{\partial\overline{z}}\otimes\sigma_j,\sum_{j=1}^r\frac{\partial f_j}{\partial\overline{z}}\otimes\sigma_j\Big)dz\wedge d\overline{z}\\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

□

Corollaire 3.5.3. $\Delta_{X,\infty}$ *admet un noyau de chaleur, qu'on note par* $e^{-t\Delta_{X,\infty}}$, $t>0$.

Démonstration. D'après (3.5.2), $\Delta_{X,\infty}$ est un opérateur autoadjoint et positif. Donc de (3.7.3), on déduit que $\Delta_{X,\infty}$ engendre un semi-groupe $e^{-t\Delta_{X,\infty}}$ pour $t>0$.

□

On introduit la fonction suivante :

$$\delta_X(u) := \sup_{x\in X}\Big|\frac{\partial}{\partial u}\Big(\log h_u(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z})^{-1}\Big)(x)\Big|\quad\forall u>1,$$

où $\frac{\partial}{\partial z}$ est une base locale de TX. Notons que δ_X ne dépend pas du choix de la base locale. Comme $h_u = (1-\rho(u))h_{p-1} + \rho(u)h_p$, pour tout $p \in \mathbb{N}^*, \forall u \in [p-1,p]$, alors $\frac{\partial}{\partial u}\log h_u(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z})^{-1} = \rho(u)\frac{h_{p-1}-h_p}{h_u} = \rho(u)\frac{h_p}{h_u}\frac{h_{p-1}-h_p}{h_p}$ qui est une fonction définie sur X entier et puisqu'on a supposé que (h_p) converge uniformément vers h_∞ alors il existe c_1 une constante réelle telle que

$$\delta_X(u) \leq c_1\left|\frac{h_{[u]}-h_{[u]+1}}{h_{[u]+1}}\right| \quad \forall\, u \geq 1, \tag{3.32}$$

où $[u]$ désigne la partie entière de u.

Proposition 3.5.4. *On a*

$$\left\|\frac{\partial \Delta_{X,u}}{\partial u}\xi\right\|_{L^2,u} \leq \delta_X(u)\|\Delta_{X,u}\xi\|_{L^2,u},$$

pour tout $\xi \in A^{0,0}(X,E)$ *et* $u > 1$.

Démonstration. Soit $\xi \in A^{0,0}(X,E)$, On a localement,

$$\Delta_{X,u}(f_i\otimes\sigma_i) = -h_u(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z})^{-1}h(\sigma_i,\sigma_i)^{-1}\frac{\partial}{\partial z}(h(\sigma_i,\sigma_i)\frac{\partial}{\partial z}f_i)\otimes\sigma_i, \quad i=1,\dots,r.$$

où $\xi = \sum_{i=1}^r f_i\otimes\sigma_i$, avec $\frac{\partial}{\partial z}$ est une base locale de TX. Donc

$$\frac{\partial\Delta_{X,u}}{\partial u}(f_i\otimes\sigma_i) = \frac{\partial}{\partial u}(\log h_u(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z})^{-1})\Delta_{X,u}(f_i\otimes\sigma_i),$$

et par suite,

$$\frac{\partial\Delta_{X,u}}{\partial u}\xi = \frac{\partial}{\partial u}(\log h_u(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z})^{-1})\Delta_{X,u}\xi \quad \forall\,\xi\in A^{(0,0)}(X,E).$$

Rappelons que $\frac{\partial}{\partial u}(\log h_u(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z})^{-1})$ est une fonction continue globale sur X qui ne dépend pas du choix de la base.

On a

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial\Delta_{X,u}}{\partial u}\xi,\frac{\partial\Delta_{X,u}}{\partial u}\xi\right)_{L^2,u} &= \int_X\left|\frac{\partial}{\partial u}(\log h_u(\frac{\partial}{\partial z},\frac{\partial}{\partial z})^{-1})\right|^2 h_u(\Delta_{X,u}\xi,\Delta_{X,u}\xi)\omega_{X,u}\\ &\leq |\delta_X(u)|^2\int_X h_u(\Delta_{X,u}\xi,\Delta_{X,u}\xi)\omega_{X,u}\\ &= |\delta_X(u)|^2(\Delta_{X,u}\xi,\Delta_{X,u}\xi)_{L^2,u}.\end{aligned} \tag{3.33}$$

□

Proposition 3.5.5. *L'opérateur* $\Delta_{X,\infty}+I$ *admet un opérateur inverse compact noté* $(\Delta_{X,\infty}+I)^{-1}$.

Démonstration. Commençons par rappeler que si Δ est un opérateur Laplacien associé à des métriques de classe $\mathcal{C}^\infty$ alors $\|(\Delta+I)^{-1}\| \leq 1$.

En effet, on sait que les vecteurs propres de Δ forment une base orthogonale pour le complété de $A^{0,0}(X,E)$ par rapport aux métriques considérées, donc si l'on note par $(v_i)_i$ une base orthonormale formée par des vecteurs propres de Δ, alors $\xi \in \overline{A^{0,0}(X,E)}$ s'écrit sous la forme $\xi = \sum_i a_i v_i$ avec $a_i \in \mathbb{C}$, et on vérifie que

$$\left\|(\Delta+I)^{-1}\xi\right\|^2 = \left\|\sum_i \frac{a_i}{\lambda_i+1}v_i\right\|^2 \leq \sum_i |a_i|^2\|v_i\|^2 = \|\xi\|^2.$$

On a

$$\frac{\partial}{\partial u}(I+\Delta_{X,u})^{-1} = -(I+\Delta_{X,u})^{-1}\frac{\partial \Delta_{X,u}}{\partial u}(I+\Delta_{X,u})^{-1} \quad \forall\, u>1.$$

Soit $\eta \in A^{(0,0)}(X,E)$ et on pose $\xi = (\Delta_{X,u}+I)^{-1}\eta$, on a

$$\begin{aligned}
\Big\|\frac{\partial \Delta_{X,u}}{\partial u}(\Delta_{X,u}+I)^{-1}\eta\Big\|^2_{L^2,u} &= \Big\|\frac{\partial \Delta_{X,u}}{\partial u}\,\xi\Big\|^2_{L^2,u}\\
&\le \big|\delta_X(u)\big|^2(\Delta_{X,u}\xi,\Delta_{X,u}\xi)_{L^2,u} \quad \text{par (3.33)}\\
&= |\delta_X(u)|^2(\Delta_{X,u}(\Delta_{X,u}+I)^{-1}\eta,\Delta_{X,u}(\Delta_{X,u}+I)^{-1}\eta)_{L^2,u}\\
&= |\delta_X(u)|^2\Big(\eta-(\Delta_{X,u}+I)^{-1}\eta,(\Delta_{X,u}+I)^{-1}\eta\Big)_{L^2,u}\\
&\le 2|\delta_X(u)|^2\|\eta\|^2_{L^2,u},
\end{aligned}$$

donc

$$\Big\|\frac{\partial}{\partial u}\Delta_{X,u}\cdot(\Delta_u+I)^{-1}\Big\|^2_{L^2,u} \le 2\big|\delta_X(u)\big|^2 \quad \forall\, u>1.$$

Par suite

$$\Big\|\frac{\partial}{\partial u}(I+\Delta_{X,u})^{-1}\Big\|_{L^2,u} \le \|(\Delta_{X,u}+I)^{-1}\|_{L^2,u}\Big\|\frac{\partial}{\partial u}\Delta_{X,u}\cdot(\Delta_{X,u}+I)^{-1}\Big\|^2_{L^2,u} \le \sqrt{2}|\delta_X(u)| \quad \forall\, u>1.$$

Comme les normes $\{\|\cdot\|_{L^2,\infty},\ \|\cdot\|_{L^2,u},\ u>1\}$ sont uniformément équivalentes, alors il existe une constante c_2 telle que

$$\Big\|\frac{\partial}{\partial u}(I+\Delta_{X,u})^{-1}\Big\|_{L^2,\infty} \le c_2|\delta_X(u)| \quad \forall\, u>1.$$

Il est possible d'avoir $\big|\delta_X(u)\big| = O(\frac{1}{u^2})$, puisqu'on a déjà montré, voir (3.32), que

$$\big|\delta_X(u)\big| \le c_1 \sup_{x\in X}\Big|\frac{h_p}{h_{p-1}}-1\Big| \quad \forall\, u\in[p-1,p],\ p\in\mathbb{N}^*.$$

Par conséquent, on obtient pour $q>p$

$$\begin{aligned}
\Big\|(\Delta_{X,p}+I)^{-1}-(\Delta_{X,q}+I)^{-1}\Big\|_{L^2,\infty} &= \Big\|\int_p^q \frac{\partial}{\partial u}(I+\Delta_{X,u})^{-1}du\Big\|_{L^2,\infty}\\
&\le \int_p^q c_2|\delta_X(u)|du\\
&= \int_p^q O(\frac{1}{u^2})du\\
&= O\Big(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\Big) \quad \forall\, p,q\gg 1.
\end{aligned}$$

Notons que pour tout $p\in\mathbb{N}$, l'opérateur $(I+\Delta_{X,p})^{-1}$ est encore compact dans $\overline{A^{0,0}(X,E)}_\infty$. Par suite, la suite d'opérateurs compacts $\big((\Delta_{X,p}+I)^{-1}\big)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers un opérateur P qui est compact par (3.6.1) et qui vérifie $(\Delta_{X,\infty}+I)P = I$. On conclut que $(\Delta_{X,\infty}+I)^{-1}$ existe et il est compact.

□

Corollaire 3.5.6. *L'opérateur $\Delta_{X,\infty}$ admet un spectre discret positif et non borné.*

Démonstration. L'existence du spectre et sa nature est une propriété des opérateurs compacts, voir par exemple [Lan93, théorème 3.4 p.429]. Pour la positivité du spectre, elle résulte de la positivité de l'opérateur $\Delta_{X,\infty}$. □

Proposition 3.5.7. *Il existe une famille $(h_u)_u$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que*

$$\lim_{u\mapsto\infty} h_u = h_\infty$$

et

$$\left\|\frac{\partial}{\partial u}e^{-t\Delta^u}\right\|_{L^2,\infty} = O(\delta_X(u)) \quad \forall\, u \gg 1.$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u}e^{-t\Delta^u} &= \int_0^t e^{-(t-s)\Delta^u}((\partial_u \log h_u)\Delta^u)e^{-s\Delta^u}ds \quad \text{par (3.44)}\\ &= -\int_0^t e^{-(t-s)\Delta^u}(\partial_u \log h_u)\partial_s e^{-s\Delta^u}ds.\end{aligned}$$

Soit $\xi \in A^{(0,0)}(X,E)$. Fixons $u>0$. Soit $(v_{u,k})_{k\in\mathbb{N}}$ une base orthonormale pour L^2_u formée par des vecteurs propres de $\Delta_{X,u}$. Il existe des réels $a_k, k\in\mathbb{N}$ tels que $\xi = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_{u,k}v_{u,k}$.

On a

$$\begin{aligned}\partial_t e^{-t\Delta_{X,u}}v &= -\sum_{k\in\mathbb{N}} a_{u,k}\lambda_{u,k}e^{-\lambda_{u,k}t}v_{u,k}\\ &= -\frac{1}{t}\sum_i a_{i,u}t\lambda_{i,u}e^{-\lambda_{i,u}t},\end{aligned}$$

Comme $a^2e^{-a} \le 4e^{-2}, \forall a \ge 0$, alors

$$\begin{aligned}\left\|\partial_t e^{-\Delta_{X,u}}v\right\|^2_{L^2,u} &= \frac{1}{t^2}\sum_{k\in\mathbb{N}} a^2_{u,k}(\lambda_{u,k}t)^2e^{-2\lambda_{u,k}t}\\ &\le \frac{e^{-2}}{t^2}\sum_{k\in\mathbb{N}} a^2_{u,k}\\ &= \frac{e^{-2}}{t^2}\|v\|^2_{L^2,u},\end{aligned}$$

donc

$$\left\|\partial_t e^{-t\Delta_{X,u}}\right\|_{L^2,u} \le \frac{e^{-1}}{t} \quad \forall\, t>0.$$

On déduit qu'il existe une constante M indépendante de u telle que

$$\left\|\partial_t e^{-t\Delta_{X,u}}\right\|_{L^2,\infty} \le \frac{M}{t} \quad \forall\, u,\ \forall\, t>0.$$

Fixons $t>0$. On a pour tout $u \gg 1$

$$\begin{aligned}\left\|\int_{\frac{t}{2}}^t e^{-(t-s)\Delta^u}((\partial_u \log h_u))\partial_s e^{-s\Delta^u}ds\right\|_{L^2,\infty} &\le \int_{\frac{t}{2}}^t \left\|e^{-(t-s)\Delta^u}((\partial_u \log h_u))\partial_s e^{-s\Delta^u}\right\|_{L^2,\infty}\\ &\le M'\delta_X(u)\int_{\frac{t}{2}}^t O_u(1)\frac{1}{s}ds\\ &\le M''\delta_X(u)\int_{\frac{t}{2}}^t \frac{1}{s}ds\\ &= M''\delta_X(u)\log 2.\end{aligned}$$

Par une intégration par parties, on a

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{t}{2}} e^{-(t-s)\Delta^u}((\partial_u \log h_u))\partial_s e^{-s\Delta^u} ds \\
&\quad = \Big[e^{-(t-s)\Delta_{X,u}}(\partial_u \log h_u)e^{-s\Delta_{X,u}}\Big]_0^{\frac{t}{2}} - \int_0^{\frac{t}{2}} \partial_s(e^{-(t-s)\Delta_{X,u}})(\partial_u \log h_u)e^{-s\Delta_{X,u}} ds \\
&\quad = e^{-\frac{t}{2}\Delta_{X,u}}(\partial_u \log h_u)e^{-\frac{t}{2}\Delta_{X,u}} - e^{-t\Delta_{X,u}}(\partial_u \log h_u)I - \int_0^{\frac{t}{2}} \partial_s(e^{-(t-s)\Delta^u})(\partial_u \log h_u)e^{-s\Delta^u} ds \\
&\quad = e^{-\frac{t}{2}\Delta_{X,u}}(\partial_u \log h_u)e^{-\frac{t}{2}\Delta_{X,u}} - e^{-t\Delta_{X,u}}(\partial_u \log h_u)I + \int_{\frac{t}{2}}^{t} \partial_s(e^{-s\Delta^u})(\partial_u \log h_u)e^{-(t-s)\Delta^u} ds,
\end{aligned}$$

où I est l'opérateur identité. Il existe donc, une constante $M^{(3)}$ telle que

$$\left\| \int_0^{\frac{t}{2}} e^{-(t-s)\Delta^u}((\partial_u \log h_u))\partial_s e^{-s\Delta^u} ds \right\|_{L^2,\infty} \leq M^{(3)}\delta_X(u).$$

On conclut que

$$\left\| \frac{\partial}{\partial u} e^{-t\Delta_{X,u}} \right\|_{L^2,\infty} = O(\delta_X(u)) \quad \forall\, u \gg 1. \tag{3.34}$$

□

Proposition 3.5.8 (Clé)**.** *On a, pour tout $t > 0$ fixé :*

$$\left(e^{-t\Delta_{X,u}}\right)_u \xrightarrow[u\to+\infty]{} e^{-t\Delta_{X,\infty}},$$

et $e^{-t\Delta_{X,\infty}}$ est un opérateur compact.

Démonstration. Par (3.34) et (3.6.1) la suite $\left(e^{-t\Delta_{X,u}}\right)_u$ converge vers une limite qu'on notera L_t, cet opérateur est compact, par (3.6.1).

On a pour tout $u \gg 1$,

$$\begin{aligned}
(\partial_t + \Delta_{X,\infty})e^{-t\Delta_{X,u}} &= (\partial_t + \frac{h_\infty}{h_u}\Delta_{X,u})e^{-t\Delta_{X,u})} \\
&= (1 - \frac{h_\infty}{h_u})\,\partial_t e^{-t\Delta_{X,u}} \\
&= O(\frac{1}{u})\,\partial_t e^{-t\Delta_{X,u}}.
\end{aligned}$$

Si l'on fixe $t_0 > 0$, on obtient

$$(\partial_t + \Delta_{X,\infty})L_t = 0 \quad \forall\, t \geq t_0.$$

En plus on a $L_t \to I$ quand $t \mapsto 0$. Mais comme $e^{-t\Delta_{X,\infty}}$ vérifie les mêmes conditions et par unicité du noyau de chaleur alors $L_t = e^{-t\Delta_{X,\infty}}$.

□

3.5.1 Trace et fonction Zêta

On considère la métrique $L^2_{X,\infty}$ sur $A^{(0,0)}(X,E)$, (rappelons que $L^2_{X,\infty}$ est induite para $h_{X,\infty}$ et h_E). Si T est un opérateur sur le completé de $A^{(0,0)}(X,E)$ pour cette métrique, on appelle trace de T et on la note par $\mathrm{Tr}(T)$ le réel suivant :

$$\mathrm{Tr}(T) = \sum_{k\geq 0} (T\xi_{k,\infty}, \xi_{k,\infty})_{L^2,\infty},$$

lorsque cette somme converge absolument, où $(\xi_{k,\infty})_{k\in\mathbb{N}}$ est une base orthonormale pour $L^2_{X,\infty}$.

Définition 3.5.9. *On pose*

$$\theta_{X,\infty}(t) := \mathrm{Tr}\big(P^\infty e^{-t\Delta_{X,\infty}}\big) \quad \forall\, t > 0,$$

où P^∞ est la projection orthogonale pour la métrique $L^2_{X,\infty}$ et de noyau $H^0(X,E)$. On l'appelle la fonction Thêta associée à $\Delta_{X,\infty}$.

Proposition 3.5.10. *On a,*

$$\theta_{X,\infty}(t) < \infty \quad \forall t > 0,$$

c'est à dire que $e^{-t\Delta_{X,\infty}}$ est un opérateur nucléaire pour tout $t > 0$.

Démonstration. De (3.37),

$$\Big|\mathrm{Tr}\Big(\big(\Delta_{X,u}+I\big)^{-2}\Big)\Big| \leq \Big\|\big(\Delta_{X,u}+I\big)^{-2}\Big\|_{1,\infty} \quad \forall\, u \geq 1.$$

et de (3.6.10),

$$\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\Big\|\big(\Delta_{X,u}+I\big)^{-2}\Big\|_{1,u} \leq \Big\|\big(\Delta_{X,u}+I\big)^{-2}\Big\|_{1,\infty} \leq \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\Big\|\big(\Delta_{X,u}+I\big)^{-2}\Big\|_{1,u},$$

pour $0 < \varepsilon \ll 1$ et $u \gg 1$. Or

$$\Big\|\big(\Delta_{X,u}+I\big)^{-2}\Big\|_{1,u} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{(\lambda_{u,k}+1)^2} \leq \zeta_{X,u}(2) < \infty \quad \forall\, u \geq 1,$$

où $\zeta_{X,u}$ est la fonction Zêta associée à l'opérateur $\Delta_{X,u}$.

On conclut que $\big(\Delta_{X,u}+I\big)^{-2}$ sont des opérateurs nucléaires pour $L^2_{X,\infty}$, donc $\mathrm{Tr}\big(\big(\Delta_{X,u}+I\big)^{-2}\big)$ est fini.

D'après le théorème de Lidskii, (voir (3.6.7)) et comme $\big(\Delta_{X,u}+I\big)^{-2}$ est un opérateur nucléaire pour L^2_∞, alors $\mathrm{Tr}\big(\big(\Delta_{X,u}+I\big)^{-2}\big)$ est la somme de ses valeurs propres, or elles sont toutes positives, donc

$$\mathrm{Tr}\big(\big(\Delta_{X,u}+I\big)^{-2}\big) = \Big\|\big(\Delta_{X,u}+I\big)^{-2}\Big\|_{1,u}.$$

On a

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u}\big(\Delta_{X,u}+I\big)^{-2} &= -\big(\Delta_{X,u}+I\big)^{-2}\frac{\partial}{\partial u}\big(\Delta_{X,u}+I\big)^{2}\big(\Delta_{X,u}+I\big)^{-2}\\ &= -\big(\Delta_{X,u}+I\big)^{-2}\frac{\partial\Delta_{X,u}}{\partial u}\big(\Delta_{X,u}+I\big)^{-1} - \big(\Delta_{X,u}+I\big)^{-1}\frac{\partial\Delta_{X,u}}{\partial u}\big(\Delta_{X,u}+I\big)^{-2},\end{aligned}$$

donc,

$$\begin{aligned}\Big|\frac{\partial}{\partial u}\mathrm{Tr}_\infty\Big((\Delta_{X,u}+I)^{-2}\Big)\Big| &= \Big|\mathrm{Tr}_\infty\Big((\Delta_{X,u}+I)^{-2}\frac{\partial\Delta_{X,u}}{\partial u}(\Delta_{X,u}+I)^{-1}\Big)+\mathrm{Tr}_\infty\Big((\Delta_{X,u}+I)^{-1}\frac{\partial\Delta_{X,u}}{\partial u}(\Delta_{X,u}+I)^{-2}\Big)\Big| \\ &= 2\Big|\mathrm{Tr}_\infty((\Delta_{X,u}+I)^{-2}\frac{\partial\Delta_{X,u}}{\partial u}(\Delta_{X,u}+I)^{-1}\Big| \quad \text{par (3.36)} \\ &\leq 2\delta_X(u)\Big\|(\Delta_{X,u}+I)^{-2}\Big\|_{1,\infty} \quad \text{par (3.37) et (3.5.4)} \\ &\leq c\,\delta_X(u)\Big\|(\Delta_{X,u}+I)^{-2}\Big\|_{1,u} \quad \text{l'existence de } c \text{ résulte de (3.6.10).}\end{aligned}$$

Si l'on pose $\alpha(u)=\mathrm{Tr}_\infty((\Delta_{X,u}+I)^{-2})$, alors on obtient :

$$\Big|\frac{\partial}{\partial u}\alpha(u)\Big| \leq c\,\delta_X(u)\alpha(u) \quad \forall\, u>1.$$

Donc,

$$\Big|\log\Big(\frac{\alpha(u)}{\alpha(u')}\Big)\Big| \leq c\Big|\int_u^{u'}\delta_X(v)dv\Big| \quad \forall\, u\gg 1.$$

D'après (3.32), on peut trouver une suite $(h_{X,u})_{u\geq 1}$ telle que $\delta_X(u)=O(\frac{1}{u^2})$, donc on aura

$$\Big|\log\Big(\frac{\alpha(u)}{\alpha(u')}\Big)\Big| \leq \Big|\int_u^{u'}O(\frac{1}{v^2})dv\Big| = O(\frac{1}{u}-\frac{1}{u'}) \quad \forall\, u\gg 1,$$

On en déduit que que $u\mapsto\alpha(u)$ est bornée sur un intervalle de la forme $[A,\infty[$, et on choisit $A>1$.

Pour $t>0$ fixé, il existe une constante c_t telle que

$$e^{-ta}\leq\frac{c_t}{(1+a)^2} \quad \forall a>0.$$

Si l'on note par $\theta_{X,u}$ la fonction Thêta associée à $\Delta_{X,u}$, alors

$$\theta_{X,u}(t)=\sum_{k=1}^{\infty}e^{-t\lambda_{u,k}}\leq c_t\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(\lambda_{u,k}+1)^2}=c_t\alpha(u) \quad \forall\, u\geq 1.$$

En particulier, on a cette inégalité pour tout $u\geq A$. Comme $u\mapsto\alpha(u)$ est bornée sur $[A,\infty[$ alors on conclut, par ce qui précède que pour tout $t>0$ fixé, la suite :

$$(\theta_{X,u}(t))_{u\geq A},$$

est bornée.

Pour établir que $e^{-t\Delta_{X,\infty}}$ est un opérateur nucléaire pour tout $t>0$, il suffit, comme dans le cas de E, de montrer qu'il existe $0<\varepsilon\ll 1$ tel que

$$\theta_{X,\infty}(t)\leq\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\liminf_{u\mapsto\infty}\theta_{X,u}(t) \quad \forall\, t>1,$$

cela implique que

$$\theta_{X,\infty}(t)<\infty \quad \forall\, t>0.$$

Il reste donc à montrer qu'il existe $0 < \varepsilon \ll 1$ tel que

$$\theta_{X,\infty}(t) \leq \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \liminf_{u \mapsto \infty} \theta_{X,u}(t) \quad \forall\, t > 1.$$

Soit R un opérateur de rang inférieur à n, (voir (3.6) pour la définition de $\sigma_n(\cdot)$). Fixons t>0, on a

$$\begin{aligned}
\sigma_n(P^\infty e^{-t\Delta_{X,\infty}})_\infty &\leq \left\|P^\infty e^{-t\Delta_{X,\infty}} - R\right\|_{L^2,\infty} \\
&\leq \left\|P^\infty e^{-t\Delta_{X,\infty}} - P^\infty e^{-t\Delta_{X,u}}\right\|_{L^2,\infty} + \left\|P^\infty e^{-t\Delta_{X,u}} - P^u e^{-t\Delta_{X,u}}\right\|_{L^2,\infty} + \left\|P^u e^{-t\Delta_{X,u}} - R\right\|_{L^2,\infty} \\
&\leq \left\|P^\infty\right\|_{L^2} \left\|e^{-t\Delta_{X,\infty}} - e^{-t\Delta_{X,u}}\right\|_{L^2,\infty} + \left\|P^\infty - P^u\right\|_{L^2,\infty} \left\|e^{-t\Delta_{X,u}}\right\|_{L^2,\infty} + \left\|P^u e^{-t\Delta_{X,u}} - R\right\|_{L^2,\infty}.
\end{aligned}$$

On a alors

$$\sigma_n(P^\infty e^{-t\Delta_{X,\infty}})_\infty \leq \left\|P^\infty\right\|_{L^2} \left\|e^{-t\Delta_{X,\infty}} - e^{-t\Delta_{X,u}}\right\|_{L^2,\infty} + \left\|P^\infty - P^u\right\|_{L^2,\infty} \left\|e^{-t\Delta_{X,u}}\right\|_{L^2,\infty} + \sigma_n(P^u e^{-t\Delta_{X,u}})_\infty,$$

Comme $e^{-t\Delta_{X,u}}$ (resp. P^u) converge pour la norme L^2 vers $e^{-t\Delta_{X,\infty}}$ (resp. vers P^∞) et que la suite $(\left\|e^{-t\Delta_{X,u}}\right\|_{L^2,\infty})_u$ est bornée, alors

$$\sigma_n(P^\infty e^{-t\Delta_{X,\infty}})_\infty \leq \liminf_{u \mapsto \infty} \sigma_n(P^u e^{-t\Delta_{X,u}})_\infty. \tag{3.35}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\theta_{X,\infty}(t) &= \mathrm{Tr}(P^\infty e^{-t\Delta_{X,\infty}}) \\
&= \sum_{n \in \mathbb{N}} \sigma_n(P^\infty e^{-t\Delta_{X,\infty}})_\infty \\
&\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \liminf_{u \mapsto \infty} \sigma_n(P^u e^{-t\Delta_{X,u}})_\infty \quad \text{par (3.35)} \\
&\leq \liminf_{u \mapsto \infty} \sum_{n \in \mathbb{N}} \sigma_n(P^u e^{-t\Delta_{X,u}})_\infty \quad \text{par (3.4.18)} \\
&= \liminf_{u \mapsto \infty} \|P^u e^{-t\Delta_{X,u}}\|_{1,\infty} \quad \text{voir la définition (3.6.2).}
\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$, par le corollaire (3.6.10), on a

$$\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \|P^u e^{-t\Delta_{X,u}}\|_{1,\infty} \leq \|P^u e^{-t\Delta_{X,u}}\|_{1,u} \leq \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \|P^u e^{-t\Delta_{X,u}}\|_{1,\infty},$$

pour $u \gg 1$.

Rappelons que

$$\theta_{X,u}(t) = \left\|P^u e^{-t\Delta_{X,u}}\right\|_{1,u}.$$

En combinant tout cela, on obtient :

$$\theta_{X,\infty}(t) \leq \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} \liminf_{u \mapsto \infty} \theta_{X,u}(t).$$

Ce termine la preuve de la proposition. □

Théorème 3.5.11. *On a pour tout $t > 0$ fixé*

$$\big(\theta_{X,u}(t)\big)_{u\geq 1} \xrightarrow[u\mapsto\infty]{} \theta_{X,\infty}(t),$$

$e^{-t\Delta_{X,\infty}}$ est un opérateur nucléaire et on a

$$\zeta_{X,\infty}(s) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{\infty,k}^{s}} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} t^{s-1}\theta_{X,\infty}(t)dt,$$

pour tout $s \in \mathbb{C}$, avec $\mathrm{Re}(s) > 1$, est prolongeable en fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec un pôle en $s = 1$ et holomorphe au voisinage de $s = 0$.

On a

$$\zeta'_{X,\infty}(0) = \int_1^{\infty} \frac{\theta_{X,\infty}(t)}{t}dt + \gamma b_{\infty,-1} - b_{\infty,0} + \int_0^1 \frac{\rho_{X,\infty}(t)}{t}dt = \lim_{u\mapsto\infty} \big(\zeta'_u(0)\big)_{u\geq 1}.$$

Démonstration. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\theta_u(t) = \sum_{i=-1}^{k} b_{u,i}t^i + \rho_u(t)$ avec $\rho_u(t) = O(t^{k+1})$ pour t assez petit.

On sait que

$$b_{u,-1} = 4\pi\,\mathrm{rg}(E)\,\mathrm{Vol}_u(X),$$

et que $b_{u,0}$ est un invariant qui ne dépend pas de u, voir la formule (3.23). Alors,

$$\big(b_{u,i}\big)_{u\geq 1} \xrightarrow[u\to+\infty]{} \text{limite} =: b_{\infty,i} \quad \text{pour } i = -1,\, 0.$$

On pose donc,

$$\rho_{X,\infty}(t) := \theta_{\infty}(t) - \frac{b_{\infty,-1}}{t} - b_{\infty,0} \quad \forall\, t > 0.$$

Comme dans le cas de E, on montre de la même manière que :

$$\begin{aligned} \big(\theta_{X,u}\big)_{u\geq 1} &\xrightarrow[u\mapsto\infty]{} \theta_{X,\infty}(t) \quad \forall\, t > 0, \\ \big(\rho_{X,u}(t)\big)_{u\geq 1} &\xrightarrow[u\mapsto\infty]{} \rho_{X,\infty}(t) \quad \forall\, t > 0, \\ \rho_{X,\infty}(t) &= O(t) \quad \forall\, 0 \leq t \ll 1. \end{aligned}$$

On conclut que $\zeta_{X,\infty}$ est holomorphe sur $\mathrm{Re}(s) > 1$ avec un pôle en $s = 1$ et admet un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ qui est holomorphe au voisinage de $s = 0$.

D'après (3.7.13), il existe une constante non nulle C qui ne dépend pas de $p \in \mathbb{N}$ telle que

$$\lambda_{p,1} \geq C \quad \forall\, p \in \mathbb{N}_{\geq 2},$$

et comme $\theta_{X,u}(t) \leq e^{-\lambda_{u,1}(t-1)}\theta_{X,u}(1)$ pour tout $t \geq 1$ et que $\big(\theta_{X,u}(t)\big)_{u\geq 1}$ est bornée, alors il existe une constante réelle M telle que

$$\theta_{X,p}(t) \leq M\, e^{-Ct} \quad \forall\, p \in \mathbb{N}_{\geq 2}\ \forall\, t \geq 1.$$

Donc, par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on obtient

$$\left(\int_1^{\infty} \theta_{X,p}(t)\frac{dt}{t}\right)_{p\in\mathbb{N}} \xrightarrow[p\to+\infty]{} \int_1^{\infty} \theta_{X,\infty}(t)\frac{dt}{t}.$$

Comme, $\forall u \geq 1$

$$\zeta'_{X,u}(0) = \int_1^\infty \theta_{X,u}(t)\frac{dt}{t} + \gamma b_{u,0} - b_{u,-1} + \int_0^1 \rho_{X,u}(t)\frac{dt}{t},$$

(voir, [Sou92, p. 99]) on déduit que

$$\big(\zeta'_{X,p}(0)\big)_{p\in\mathbb{N}_{\geq 2}} \xrightarrow[p\to+\infty]{} \zeta'_{X,\infty}(0).$$

D'après la proposition (3.4.19), (qui est biensûr valable dans cette situation), on a $\ker \Delta^1_{X,u} = *^{-1}_{1,E}\Big(H^0(X, K_X \otimes E^*)\Big)$, et rappelons que $*_{1,E}$ est donné explicitement dans (3.10), on déduit que $*^{-1}_{1,E}$ ne dépend pas de la métrique sur X, donc de $h_{X,u}$ pour tout $u \geq 1$. Par conséquent la suite de métriques L^2 sur $\lambda(E)$: $\big(h_{L^2,p}\big)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers $h_{L^2,\infty}$.

Ce qui implique que la suite $\big(\|\cdot\|_{Q,p}\big)_{p\in\mathbb{N}}$ des métriques de Quillen associées aux métriques h_p admet une limite quand p tend vers l'infini. Mais rappelons qu'on a montré que suite converge vers limite en utilisant la formule des anomalies et qu'on a noté cette limite par $T_g\big((X,\omega_{X,\infty});\overline{E}\big)$ qu'on a appelé la torsion analytique généralisée associée à la donnée $\big((X,\omega_{X,\infty});\overline{E}\big)$.

Notre résultat s'écrit donc comme suit :

$$\zeta'_{X,\infty}(0) = T_g\big((X,\omega_{X,\infty});\overline{E}\big).$$

□

3.6 Les opérateurs compacts, un rappel

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et $<\cdot,\cdot>$ le produit hermitien (resp. $\|\cdot\|$ la norme) associé. Si $\mathcal{H}'$ est un autre espace de Hilbert, on note par $L(\mathcal{H},\mathcal{H}')$ l'espace des opérateurs linéaires continues de $\mathcal{H}$ vers $\mathcal{H}'$. Lorsque $\mathcal{H}' = \mathcal{H}$, on note $L(\mathcal{H}) = L(\mathcal{H},\mathcal{H})$.

Soit $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ un opérateur linéaire continue. T est dit compact, si l'image de tout borné de $\mathcal{H}$ est relativement compacte dans $\mathcal{H}'$. On dit que T est de rang fini si son image est de dimension finie, en particulier c'est un opérateur compact. La dimension de l'image d'un opérateur de rang fini s'appelle le rang de l'opérateur.

Proposition 3.6.1. *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ l'espace des opérateurs bornés et $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ l'espace des opérateurs compacts. On a, $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ est sous espace fermé de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.*

Démonstration. Voir, par exemple [HL99, proposition 1.4]. □

Soit $T \in L(\mathcal{H})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\sigma_n(T) = \inf\Big\{\|T - R\| :\ R \in L(\mathcal{H}), \mathrm{rg}(R) \leq n\Big\},$$

On sait que T est compact si et seulement si la suite $\big(\sigma_n(T)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, voir [HL99, p. 232]. On suppose dans la suite que T est compact, et on appelle $\sigma_n(T)$ la n-ème valeur singulière de l'opérateur compact T.

On a $P := \big(T^*T\big)^{\frac{1}{2}}$ (où T^* est l'opérateur adjoint de T) est un opérateur autoadjoint et compact ; on note par $\big(\mu_n(T)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ l'ensemble de ses valeurs propres non nulles ordonné en une suite décroissante

et comptées avec leur multiplicités (par définition, la multiplicité de λ une valeur propre non nulle, notée d_λ est la dimension de $\ker(\lambda I - P)$).

On montre que

$$\mu_n(T) = \sigma_n(T) \quad \forall\, n \in \mathbb{N},$$

voir par exemple [HL99, p. 246].

Définition 3.6.2. *Soit T un opérateur compact. Soit $\big(\mu_n(T)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ l'ensemble des valeurs singulières de T ordonné par ordre décroissant. On pose*

$$\|T\|_1 := \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_n(T).$$

si $\|T\|_1 < \infty$ alors T est appelé opérateur nucléaire et $\|T\|_1$ sa norme nucléaire.

On note par $\mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ l'ensemble des opérateurs nucléaires. On a

Proposition 3.6.3. *$\mathcal{C}_1(\mathcal{H})$ est un espace vectoriel et $\|\cdot\|_1$ est une norme sur $\mathcal{C}_1(\mathcal{H})$.*

Démonstration. Voir [Die68, 15.11 problème 7, c]. □

Proposition 3.6.4. *Soit T un opérateur nucléaire. Si $\big(\xi_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthonormale de $\mathcal{H}$, alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} < T\xi_n, \xi_n >$ converge de somme $\|T\|_1$.*

Démonstration. Voir [Die68, 15.11 problème 7, b)]. □

Proposition 3.6.5. *Soit T un opérateur compact, on a*

$$\|T\|_1 = \sup\Big\{\sum_k |< T\xi_k, \eta_k >| \;\Big|\; \{\xi_k\}, \{\eta_k\} \text{ bases hilbertiennes de } \mathcal{H}\Big\},$$

et il existe deux sous-ensembles orthonormés $\{\xi_k\}$ et $\{\eta_k\}$ de $\mathcal{H}$ tels que $< T\xi_k, \eta_k > \geq 0$ pour tout k et $\|T\|_1 = \sum_k < T\xi_k, \eta_k >$.

Démonstration. Voir [Die68, 15.11 problème 7, c)]. □

Proposition 3.6.6. *Soit $\big(\lambda_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de valeurs propres d'un opérateur nucléaire T, comptées avec leur multiplicité. On a*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n| \leq \|T\|_1.$$

Démonstration. Voir [**?**, Théorème 1.15]. □

Proposition 3.6.7. *Soit T un opérateur nucléaire, et soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de ses valeurs propres comptées avec leur multiplicité. Alors, $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n$ converge absolument et on a*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n = \mathrm{Tr}(T).$$

Démonstration. Voir [**?**, (3.2)]. □

Proposition 3.6.8. *Soient A et B deux opérateurs bornés et $T \in \mathcal{C}_1(\mathcal{H})$, alors*

$$\|ATB\|_1 \leq \|A\|\|T\|_1\|B\|.$$

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert séparable. Soit A un opérateur compact sur $\mathcal{H}$ et $(e_i)_i$ une base orthonormale de $\mathcal{H}$. Lorsque $\sum_{i\geq 0}(Ae_i, e_i)$ est absolument convergente pour une base orthonormale $(e_i)_i$, et donc pour toute base orthonormale de $\mathcal{H}$, on appelle cette somme la trace de A et elle est notée $\mathrm{Tr}(A)$.

Si T est nucléaire, alors

$$\|T\|_1 = \mathrm{Tr}\big((T^*T)^{\frac{1}{2}}\big).$$

Si A est un opérateur nucléaire, on a les propriétés suivantes :

- $$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA), \tag{3.36}$$

  si B est borné, cf. [Lan93, TR. 2 p.463].
- $$\big|\mathrm{Tr}(A)\big| \leq \|A\|_1. \tag{3.37}$$

  cf. [Lan93, TR. 7 p.463].
- Si $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'opérateurs sur $\mathcal{H}$ qui converge faiblement vers un opérateur T, (c'est à dire que $\forall v \in \mathcal{H}$, la suite $(T_n v)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers Tv pour la norme de $\mathcal{H}$), alors

  $$\mathrm{Tr}(TA) = \lim_{n\mapsto\infty} \mathrm{Tr}(T_n A).$$

  cf. [Lan93, TR. 8 p.463].

Proposition 3.6.9. *Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert. Soit $(<\cdot,\cdot>_u)_{u\in I}$ une famille de métriques hermtiennes sur $\mathcal{H}$ uniformément équivalentes deux à deux.*

Soit $u_0 \in I$ et $T \in \mathcal{C}_{1,u_0}(\mathcal{H})$ alors

1. *T est un opérateur nucléaire sur $\mathcal{H}$ muni de $<\cdot,\cdot>_u$, pour tout $u \in I$,*
2. *Il existe c_8 et c_9 deux constantes positives non nulles telles que*

$$c_8\|T\|_{1,u'} \leq \|T\|_{1,u} \leq c_9\|T\|_{1,u'} \quad \forall\, u, u' \in I.$$

Démonstration. On commence par rappeler que $L(\mathcal{H})$ est muni de la norme suivante :

$$\|A\| = \sup_{x\in\mathcal{H}\setminus\{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \quad A \in L(\mathcal{H}).$$

Par hypothèse, il existe c'_8, c'_9 deux constantes positives non nulles telles que

$$c'_8\|x\|_{u'} \leq \|x\|_u \leq c'_9\|x\|_{u'} \quad \forall x \in \mathcal{H} \quad \forall\, u, u' \in I.$$

Donc,

$$\frac{c'_8}{c'_9}\frac{\|Tx\|_{u'}}{\|x\|_{u'}} \leq \frac{\|Tx\|_u}{\|x\|_u} \leq \frac{c'_9}{c'_8}\frac{\|Tx\|_{u'}}{\|x\|_{u'}} \quad \forall\, x \neq 0.$$

Par suite,

$$\frac{c'_8}{c'_9}\|T\|_{u'} \leq \|T\|_u \leq \frac{c'_9}{c'_8}\|T\|_{u'}.$$

On en déduit que T est compact pour tout $u \in I$, en effet, si l'on considère F, un fermé borné dans $(\mathcal{H}, <\cdot,\cdot>_u)$ pour un certain $u \in I$, alors par la dernière inégalité, F est borné et fermé pour $<,>_{u_0}$ et comme $T \in \mathcal{C}_{1,u_0}(\mathcal{H})$, donc par définition T est compact dans $(\mathcal{H}, <\cdot,\cdot>_{u_0})$, alors $T(F)$ est relativement compact dans ce dernier espace, en utilisant la même inégalité, on déduit que $T(F)$ est relativement compact dans $(\mathcal{H}, <,>_u)$.

Soit R un opérateur de rang fini inférieur à n, on a

$$\frac{c_8'}{c_9'}\|T-R\|_{u'} \leq \|T-R\|_u \leq \frac{c_9'}{c_8'}\|T-R\|_{u'}.$$

et donc,

$$\frac{c_8'}{c_9'}\sigma_n(T)_{u'} \leq \sigma_n(T)_u \leq \frac{c_9'}{c_8'}\sigma_n(T)_{u'}.$$

et par conséquent

$$\frac{c_8'}{c_9'}\|T\|_{1,u'} \leq \|T\|_{1,u} \leq \frac{c_9'}{c_8'}\|T\|_{1,u'}.$$

□

Corollaire 3.6.10. *Si $(\|\cdot\|_u)_{u\geq 1}$ est une suite de métriques hermitiennes sur $\mathcal{H}$ qui converge uniformément quand u tend vers l'infini vers une métrique hermitienne qu'on note par $\|\cdot\|_\infty$: On suppose que $\forall\varepsilon>0$, il existe $\eta>0$ tel que*

$$(1-\varepsilon)\|\xi\|_{u'} \leq \|\xi\|_u \leq (1+\varepsilon)\|\xi\|_{u'} \quad \forall u,u'>\eta. \tag{3.38}$$

Alors, on a pour tout $0<\varepsilon<1$

$$\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\sigma_n(T)_{u'} \leq \sigma_n(T)_u \leq \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\sigma_n(T)_{u'} \quad \forall T\in L(\mathcal{H}),\ \forall n\in\mathbb{N},\ \forall u,u'>\eta.$$

En particulier,

$$\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\|T\|_{1,u'} \leq \|T\|_{1,u} \leq \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\|T\|_{u'} \quad \forall T\in L(\mathcal{H}), \quad \forall u,u'>\eta.$$

Démonstration. C'est une conséquence de la démonstration de la proposition précédente. □

On considère l'espace préhilbertien $A^{0,0}(X,E)$ muni de la métrique $\|\cdot\|_{L^2,u}$ associée à la métrique de E ; h_u. On sait que $(h_u)_u$ converge uniformément vers une limite h_∞, cela donne que $(\|\cdot\|_{L^2,u})$ converge uniformément vers $\|\cdot\|_{L^2,\infty}$, (plus exactement elle vérifie l'assertion (3.38)).

On prend $T=Be^{-t\Delta_{E,u}}$, où B est un opérateur borné et tel que $t>0$ soit fixé. On a pour $u\gg 1$

$$\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\sigma_n\big(Be^{-t\Delta_{E,u}}\big)_\infty \leq \sigma_n\big(Be^{-t\Delta_{E,u}}\big)_u \leq \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\sigma_n\big(Be^{-t\Delta_{E,u}}\big)_\infty.$$

Par suite,

$$\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\big\|Be^{-t\Delta_{E,u}}\big\|_{1,\infty} \leq \big\|Be^{-t\Delta_{E,u}}\big\|_{1,u} \leq \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\big\|Be^{-t\Delta_{E,u}}\big\|_{1,\infty}. \tag{3.39}$$

On munit $\mathcal{H}$ de la métrique L^2_∞. On a, pour tout $t>0$ fixé

$$\begin{aligned}\big|\big\|Be^{-t\Delta_{E,u}}e^{-t\Delta_{E,\infty}}\big\|_{1,\infty} - \big\|Be^{-2t\Delta_{E,\infty}}\big\|_{1,\infty}\big| &\leq \big\|Be^{-t\Delta_{E,u}}e^{-t\Delta_{E,\infty}} - Be^{-2t\Delta_{E,\infty}}\big\|_{1,\infty}\\ &= \big\|B(e^{-t\Delta_{E,u}} - e^{-t\Delta_{E,\infty}})e^{-t\Delta_{E,\infty}}\big\|_{1,\infty}\\ &\leq \big\|e^{-t\Delta_{E,u}} - e^{-t\Delta_{E,\infty}}\big\|_{L^2,\infty}\big\|Be^{-t\Delta_{E,\infty}}\big\|_{1,\infty}\end{aligned} \tag{3.40}$$

et

$$\begin{aligned}\left|\left\|Be^{-t\Delta_{E,u}}e^{-t\Delta_{E,\infty}}\right\|_{1,\infty}-\left\|Be^{-2t\Delta_{E,u}}\right\|_{1,\infty}\right| &\leq \left\|Be^{-t\Delta_{E,u}}e^{-t\Delta_{E,\infty}}-Be^{-2t\Delta_{E,u}}\right\|_{1,\infty}\\ &\leq \left\|Be^{-t\Delta_{E,u}}(e^{-t\Delta_{E,u}}-e^{-t\Delta_{E,\infty}})\right\|_{1,\infty}\\ &\leq \left\|e^{-t\Delta_{E,u}}-e^{-t\Delta_{E,\infty}}\right\|_{L^2,\infty}\|Be^{-t\Delta_{E,u}}\|_{1,\infty}.\end{aligned} \tag{3.41}$$

3.7 Appendice

Dans ce chapitre on regroupe quelques résultats et lemmes techniques qui seront utilisés dans le texte.

La proposition suivante a pour but de construire à partir d'une suite discrète $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de métriques hermitiennes sur un fibré vectoriel sur une variété riemannienne, une famille de métriques $(h_u)_{u\geq 1}$ à paramètre continue qui varie de façon $\mathcal{C}^\infty$ et qui préserve les propriétés de la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par exemple si $(h_n)_n$ est bornée pour la topologie de convergence uniforme, alors $(h_u)_{u\geq 1}$ l'est aussi. Cela nous sera utile pour étudier les variations infinitésimales des différents objets attachés à ces suites.

Proposition 3.7.1. *Soit X une variété différentielle complexe de dimension quelconque. Soit E un fibré vectoriel holomorphe, par exemple TX.*

On note $\mathcal{M}et(E)$ l'espace des métriques hermitiennes continues (intégrables, de classe $\mathcal{C}^\infty$...) sur E. Soit $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de métriques hermitiennes sur E (non nécessairement de classe $\mathcal{C}^\infty$), alors il existe une famille continue $(H(u))_{u\geq 1}$ vérifiant :

1. *$H(u)$ est une métrique hermitienne sur E, $\forall u$.*
2. *Pour toute section locale s de E, l'application*

$$\begin{aligned}H : [1,\infty[&\longrightarrow \mathbb{R}^+\\ u &\longmapsto H(u)(s,s),\end{aligned}$$

   est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
3. *$H(n) = h_n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.*
4. *Si l'on suppose de plus que $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une métrique h_∞, alors la fonction $u \mapsto H(u)$ converge uniformément vers la fonction constante $u \mapsto h_\infty$ sur $[1,\infty[$.*
5. *Si E est un fibré en droites, alors*

$$\frac{\partial}{\partial u}\log H(u) = \mathrm{O}\Big(\frac{h_{[u]+1}-h_{[u]}}{h_{[u]}}\Big),$$

   sur X, avec $[u]$ est la partie entière de u.

Démonstration. On considère une suite discrète de métriques $(h_p)_{p\geq 2}$.

Pour tout n, soit ρ_n une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$ croissante positive avec

$$\rho_n(x) = \begin{cases} 0, & x \leq n\\ 1, & x \geq n+1\end{cases} \tag{3.42}$$

On peut supposer que $\rho_n(x) = \rho_1(x-n), \forall x \in \mathbb{R}^+$.

On pose $H_1 : [1,\infty[\longrightarrow \mathcal{M}et$; $H_1(u) = h_1$, $\forall u$. Si H_2 est la fonction définie comme suit : $H_2(u) = (1-\rho_1(u))H_1(u)+\rho_1(u)h_2$ alors c'est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ qui vérifie $H_2(1) = H_1(1) = h_1$

et $H_2(2) = h_2$. Par récurrence, on pose $H_k(u) = (1-\rho_{k-1}(u))H_{k-1}(u) + \rho_{k-1}(u)h_k$, et on montre que $H_k(i) = h_i$, pour $i \leq k-1$ et $H_k(k) = h_k$.

On considère $H : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathcal{M}et(E)$ en posant $H(u) = H_n(u)$ si $u \leq n-1$ (notons que $H_{n+1}(u) = H_n(u)$) donc H est bien définie, de classe $\mathcal{C}^\infty$ et on a $H(n) = h_n$.

Supposons que $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers h_∞. On montre par récurrence sur k que

$$H(u) = (1-\rho_{k-1}(u))h_{k-1} + \rho_{k-1}(u)h_k \quad \forall\, u \in [k-1,k]\ \forall k\ \in \mathbb{N}^*. \tag{3.43}$$

Par suite, si s est une section locale de E non nulle sur un ouvert U,

$$\big|H(u)(s,s) - h_\infty(s,s)\big| \leq \big|h_{k-1}(s,s) - h_\infty(s,s)\big| + \big|h_k(s,s) - h_\infty(s,s)\big| \quad \forall\, u \in [k-1,k].$$

Et on a

$$\begin{aligned}
\Big|\frac{\partial}{\partial u}\log H(u)(s,s)\Big| &= \big|h_u(s,s)^{-1}(\partial_u\rho_{k-1})(u)(h_k(s,s) - h_{k-1}(s,s))\big| \\
&= \big|\partial_u\rho_{k-1}(u)\big|\,\Big|\frac{h_k(s,s) - h_{k-1}(s,s)}{h_u(s,s)}\Big| \\
&\leq \big|\partial_u\rho_{k-1}(u)\big|\,\Big|\frac{h_k - h_{k-1}}{\min(h_{k-1},h_k)}\Big| \\
&= \big|\partial_u\rho_{k-1}(u)\big|\,\max\Big(\frac{|h_k - h_{k-1}|}{h_{k-1}}, \frac{|h_k - h_{k-1}|}{h_k}\Big),
\end{aligned}$$

donc, il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\Big|\frac{\partial}{\partial u}\log H(u)\Big| \leq M\frac{|h_{[u]+1} - h_{[u]}|}{h_{[u]}},$$

pour tout $u \geq 1$.

□

Dans la suite, on note par h_u la métrique $H(u)$.

On suivra la définition de [MM07, Appendice, D], pour la définition du noyau de chaleur associé à un laplacien généralisé. Soit donc Δ un laplacien généralisé, on définit l'opérateur de chaleur qu'on note par $e^{-t\Delta}$ en utilisant la théorie des opérateurs. Pour tout $t > 0$, $e^{-t\Delta}$ est un opérateur de $L^2(X,E)$ vers $L^2(X,E)$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ et qui vérifie les propriétés suivantes : pour tout $s \in L^2(X,E)$

$$\begin{aligned}
&\Big(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta\Big)e^{-t\Delta}s = 0, \\
&\lim_{t\mapsto 0} e^{-t\Delta}s = s \quad \text{dans} \quad L^2(X,E).
\end{aligned}$$

On montre que $e^{-t\Delta}$ est unique.

Théorème 3.7.2. *Soit Δ^u une famille de classe $\mathcal{C}^\infty$ de Laplaciens généralisés, alors pour tout $t > 0$, la famille de noyaux de la chaleur $e^{-t\Delta_u}$ définit une famille de classe $\mathcal{C}^\infty$ d'opérateurs sur E. En plus, on a la dérivée de $e^{-t\Delta_u}$ par rapport à u est donnée par la formule du Duhamel*

$$\frac{\partial}{\partial u}e^{-t\Delta^u} = -\int_0^t e^{-(t-s)\Delta^u}(\partial_u\Delta^u)e^{-s\Delta^u}ds. \tag{3.44}$$

Démonstration. Voir [MM07, théorème D.1.6] ou [BGV04, théorème 2.48]. □

On rappelle le théorème suivant qui sera utile dans la suite de l'article :

Théorème 3.7.3. *Soit V un espace de Banach. Si A un opérateur auto-adjoint et positif, alors $-A$ engendre un semi-groupe $P(t) = e^{-tA}$ formé d'opérateurs positifs, auto-adjoints et de norme ≤ 1.*

Démonstration. Voir [Tay11, Proposition 9.4]. □

3.7.1 Les métriques intégrables

Soit X une variété complexe analytique et $\overline{L} = (L, \|\cdot\|)$ un fibré en droites hermitien muni d'une métrique continue sur L.

Définition 3.7.4. *On appelle premier courant de Chern de $\overline{L}$ et on note $c_1(\overline{L}) \in D^{(1,1)}(X)$ le courant défini localement par l'égalité :*

$$c_1(\overline{L}) = dd^c(-\log \|s\|^2),$$

où s est une section holomorphe locale et ne s'annulant pas du fibré L.

Définition 3.7.5. *La métrique $\|\cdot\|$ est dite positive si $c_1(L, \|\cdot\|) \geq 0$.*

Définition 3.7.6. *La métrique $\|\cdot\|$ est dite admissible s'il existe une famille $(\|\cdot\|_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de métriques positives de classe $\mathcal{C}^\infty$ convergeant uniformément vers $\|\cdot\|$ sur L. On appelle fibré admissible sur X un fibré en droites holomorphe muni d'une métrique admissible sur X.*

On dira que $\overline{L}$ est un fibré en droites intégrable s'il existe $\overline{L}_1$ et $\overline{L}_2$ admissibles tels que

$$\overline{L} = \overline{L}_1 \otimes \overline{L}_2^{-1}.$$

Exemple 3.7.7. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note par $\mathcal{O}(1)$ le fibré de Serre sur $\mathbb{P}^n$ et on le munit de la métrique définie pour toute section méromorphe de $\mathcal{O}(1)$ par :*

$$\|s(x)\|_\infty = \frac{|s(x)|}{\max(|x_0|, \ldots, |x_n|)}.$$

Cette métrique est admissible.

En fait, c'est un cas particulier d'un résultat plus général combinant la construction Batyrev et Tschinkel sur une variété torique projective et la construction de Zhang. Dans la première construction permet d'associer canoniquement à tout fibré en droites sur une variété torique projective complexe une métrique continue notée $\|\cdot\|_{BT}$ et déterminée uniquement par la combinatoire de la variété, voir [Mai00, proposition 3.3.1] et [Mai00, proposition 3.4.1]. L'approche de Zhang est moins directe, elle utilise un endomorphisme équivariant (correspondant à la multiplication par p, un entier supérieur à 2) afin de construire par récurrence une suite de métriques qui converge uniformément vers une limite notée $\|\cdot\|_{Zh,p}$ et qui, en plus, ne dépend pas du choix de la métrique de départ, voir [Zha95] ainsi que [Mai00, théorème 3.3.3]. Mais d'après [Mai00, théorème 3.3.5] on montre que

$$\|\cdot\|_{BT} = \|\cdot\|_{Zh,p}.$$

Que l'on appelle la métrique canonique associée à L. Notons que lorsque L n'est pas trivial, alors cette métrique n'est pas $\mathcal{C}^\infty$.

3.7.2 Constante isopérimetrique de Cheeger

On rappelle un résultat dû à Cheeger donnant une borne inférieure pour la première valeur propre non nulle du Laplacien $\Delta_{\overline{\mathcal{O}}_0}$, en termes de la géométrie de la variété considérée, où $\overline{\mathcal{O}}_0$ est le fibré en droites trivial muni d'une métrique constante . Ce résultat, nous a permis de répondre complètement à la question (**??**) dans la situation suivante : Soit $(h_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de métriques hermitiennes sur $\mathbb{P}^1$ et si l'on note par $\lambda_{1,p}$, pour tout $p \in \mathbb{N}$, la première valeur propre non nulle du Laplacien associé à $((\mathbb{P}^1, h_p), \overline{\mathcal{O}}_0)$ alors il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\lambda_{1,p} \geq C, \quad \forall\, p \in \mathbb{N}.$$

On va étendre la constante de Cheeger et on établira une inégalité isopérimétrique du même type.

On termine par résultat plus faible sur la variation de la première valeur propre en famille, c'est l'objet de la proposition (3.7.17).

Définition 3.7.8 (Constante isopérimetrique de Cheeger)**.** *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension n sans bord. On pose*

$$h(M) := \inf \frac{A(S)}{\min\big(V(M_1), V(M_2)\big)}$$

où $A(\cdot)$ dénote le $(n-1)$-volume dimensionnel, $V(\cdot)$ désigne le volume et l'inf est pris sur l'ensemble des sous-variétés à coins compactes S de dimension $n-1$, M_1 et M_2 sont deux sous-variétés avec bords telles que $M = M_1 \cup M_2$ et $\partial M_i = S$, pour $i = 1, 2$.

Théorème 3.7.9. *Si l'on note par λ_1 la plus petite valeur propre non nulle du Laplacien associé à (M, g) alors*

$$\lambda_1 \geq \frac{1}{4} h^2.$$

Démonstration. Voir [Che70]. □

Remarque 3.7.10. *Il est important de noter que h est non nulle, voir [Che70, p.198] pour le cas $n = 2$.*

Proposition 3.7.11. *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte. Soit g' une autre métrique riemannienne telle que*

$$C_1 g \leq g' \leq C_2 g, \tag{3.45}$$

où C_i deux constantes réelles non nulles, alors

$$\frac{C_1}{C_2} h_g(M) \leq h_{g'}(M) \leq \frac{C_2}{C_1} h_g(M).$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que l'inégalité (3.45) est stable par restriction. □

Lemme 3.7.12. *On considère la suite $\big(h_p\big)_{p\in\mathbb{N}_{\geq 2}}$ de métriques sur $\mathbb{P}^1$ définie par*

$$h_p(\cdot, \cdot) = \frac{|\cdot|^2}{(1 + |z|^p)^{\frac{4}{p}}},$$

alors

$$2^{-\frac{2\pi^2}{3}} \leq \frac{h_q}{h_p} \leq 1,$$

Pour tout $z \in \mathbb{P}^1$ et $2 \leq q \leq p$.

Démonstration. L'inégalité de droite est évidente. On vérifie que la fonction $F_{p,q} : x(\in \mathbb{R}^+) \mapsto \frac{(1+x^p)^{\frac{1}{q}}}{(1+x^q)^{\frac{1}{q}}}$ est minorée par $2^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$, donc

$$2^{-\frac{1}{n^2}} \leq F_{n+1,n}(x) \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}_{\geq 2}\, \forall x \in \mathbb{R}^+,$$

donc

$$\begin{aligned} 2^{-\frac{\pi^2}{6}} &\leq 2^{\sum_{n=q}^{p} \frac{1}{n^2}} \\ &\leq \prod_{q}^{p} F_{n+1,n}(x)\cdot \\ &= F_{p,q}(x) \end{aligned}$$

□

Corollaire 3.7.13. *On considère la suite* $(h_p)_{p\in\mathbb{N}_{\geq 2}}$ *précédente, alors*

$$2^{-\frac{\pi^2}{6}} h_p(\mathbb{P}^1) \leq h_q(\mathbb{P}^1) \leq 2^{\frac{\pi^2}{6}} h_p(\mathbb{P}^1) \quad \forall\, p, q \in \mathbb{N}_{\geq 2}.$$

En particulier, il existe une constante C *non nulle telle que*

$$\lambda_{p,1} \geq C, \quad \forall p \in \mathbb{N}_{n\geq 2}.$$

où $\lambda_{p,1}$ *est la plus petite valeur propre non nulle du Laplacien associé à la métrique* h_p*.*

Démonstration. C'est une application du (3.7.9), (3.7.11) et (3.7.12). □

3.7.3 Sur la première valeur propre du Laplacien généralisé

Lemme 3.7.14. *On a*

$$\inf_{\xi\in\ker(\Delta_{\overline{E}})^{\perp}} \frac{(\Delta_{\overline{E}}\xi, \xi)_{L^2}}{(\xi, \xi)_{L^2}} = \lambda_{1,h}$$

Démonstration. Par la théorie spectrale des opérateurs compacts positifs et autoadjoints, on a les vecteurs propres de $\Delta_{\overline{E}}$ forment un système orthogonal complet pour la métrique L^2. Si $\xi \in A^{0,0}(X, E) \cap \ker(\Delta_{\overline{E}})^{\perp}$, alors il existe des réels a_k tels que

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} a_k v_k,$$

où v_k est le vecteur propre associé à la valeur propre λ_k où on a posé $\lambda_0 = 0$. On a, alors

$$\begin{aligned} (\Delta_{\overline{E}}\xi, \xi)_{L^2} &= \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \lambda_k (v_k, v_k)_{L^2} \\ &\geq \lambda_1 \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 (v_k, v_k)_{L^2} \\ &= \lambda_1 (\xi, \xi)_{L^2} \quad \text{si} \quad \xi \in \ker(\Delta_{\overline{E}})^{\perp}. \end{aligned}$$

□

Théorème 3.7.15. *Soit (X,ω) une surface de Riemann compacte et L un fibré en droites holomorphe. Soit h_∞ une métrique hermitienne continue sur L. Soit $(h_n)_n$ une suite de métriques hermitiennes $\mathcal{C}^\infty$ sur L qui converge uniformément vers h_∞. Alors il existe α et β deux constantes réelles positives non nulles telle que*

$$\alpha(v,v)_{L^2,q} \leq (v,v)_{L^2,p} \leq \beta(v,v)_{L^2,q}, \tag{3.46}$$

et

$$\alpha(\Delta_q v,v)_{L^2,q} \leq (\Delta_p v,v)_{L^2,p} \leq \beta(\Delta_q v,v)_{L^2,q} \tag{3.47}$$

pour tout $1 \ll p \leq q$ et $v \in A^{0,0}(X,L)$.

Démonstration. Soit h une métrique hermitienne de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur L. On note par Δ_h le Laplacien généralisé associé.

Soit $v \in A^{0,0}(X,L)$. Localement, il existe $f_1,\dots,f_r \in A^{0,0}(X)$ et des sections locales holomorphes $e_1,\dots,e_r$ de L tels que $v = \sum_{k=1}^r f_k \otimes e_k$. On a donc,

$$(v,v)_{L^2,h} = \int_{x\in X} \sum_{kj} h(e_k,e_j)(x) f_k(x)\overline{f_j(x)}\omega(x),$$

et

$$(\Delta_h v,v)_{L^2,h} = \frac{i}{2\pi}\int_X \sum_{kj} h(e_k,e_j)(x)\frac{\partial f_k}{\partial \overline{z}}(x)\frac{\partial \overline{f_j}}{\partial z}(x)dz\wedge d\overline{z} \quad \text{voir (3.3.4).}$$

Si l'on pose, localement,

$$\mathbf{f} := (f_1,\dots,f_r) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \overline{z}} := (\frac{\partial f_1}{\partial \overline{z}},\dots,\frac{\partial f_r}{\partial \overline{z}}),$$

alors en utilisant les notations introduites, les deux derniers produits hermitiens deviennent :

$$(v,v)_{L^2,h} = \int_X \Big({}^t\overline{\mathbf{f}(x)}H_h(x)\mathbf{f}(x)\Big)\omega, \tag{3.48}$$

et

$$(\Delta_h v,v)_{L^2,h} = \int_X \Big({}^t\Big(\overline{\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z}(x)}\Big)H_h(x)\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z}(x)\Big)dz\wedge d\overline{z}. \tag{3.49}$$

On considère une métrique hermitienne continue h_∞ sur L et $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de métriques hermitiennes $\mathcal{C}^\infty$ sur L qui converge uniformément vers h_∞ sur X. On pose :

$$H_n(x) = \big(h_n(e_i,e_j)(x)\big)_{1\leq i,j\leq r} \quad \forall n \in \mathbb{N}\cup\{\infty\}.$$

Comme

$$H_n(x) = \frac{1}{l_n(x)}A(x) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\cup\{\infty\},$$

comme la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers h_∞, on peut trouver $\alpha < 1 < \beta$ deux constantes réelles telles que

$$\alpha \leq \frac{l_q(x)}{l_p(x)}\Big(= \frac{h_p(s,s)(x)}{h_q(s,s)(x)}\Big) \leq \beta \quad \forall\, p,\, q \gg 1,\ \forall\, x \in X, \tag{3.50}$$

où s est une section locale non nulle en x de L.

Fixons $x \in X$, et soient $p \leq q$, on a

$$\alpha \cdot {}^t\overline{\mathbf{f}}(x)H_q(x)\mathbf{f}(x) \leq {}^t\overline{\mathbf{f}}(x)H_p(x)\mathbf{f}(x) \leq {}^t\overline{\mathbf{f}}(x)H_q(x)\mathbf{f}(x),$$

et

$$\alpha \cdot {}^t\overline{\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z}(x)} H_q(x) \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z}(x) \leq {}^t\overline{\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z}(x)} H_p(x) \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z}(x) \leq {}^t\overline{\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z}(x)} H_q(x) \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial z}(x).$$

Vérifions cela, pour simplifier on notera par $\mathbf{u}$ le vecteur $\mathbf{f}$ ou $\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \overline{z}}$. On a

$$h_k(\mathbf{u}, \mathbf{u})(x) = {}^t\overline{\mathbf{u}} H_k(x) \mathbf{u} = \frac{1}{l_k(x)} {}^t\overline{\mathbf{u}} A(x) \mathbf{u} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}_{\geq 1}.$$

De (3.50) et notons que la matrice A est positive, on trouve que

$$\alpha {}^t\overline{\mathbf{u}} H_q(x) \mathbf{u} \leq {}^t\overline{\mathbf{u}} H_p(x) \mathbf{u} \leq \beta {}^t\overline{\mathbf{u}} H_q(x) \mathbf{u}.$$

On conclut, en utilisant les expressions (3.48) et (3.49), que

$$\alpha (v, v)_{L^2,q} \leq (v, v)_{L^2,p} \leq \beta (v, v)_{L^2,q},$$

et

$$\alpha (\Delta_q v, v)_{L^2,q} \leq (\Delta_p v, v)_{L^2,p} \leq \beta (\Delta_q v, v)_{L^2,q},$$

$\forall\, v \in A^{0,0}(X, L)$ et $p, q \gg 1$. □

Exemple 3.7.16. *Sur $\mathbb{P}^1$. Soit m un entier positif et $p \geq 2$. On considère $\mathcal{O}(m)$ muni de la métrique p-ème définie comme suit :*

$$h_p(s, s)(x) = \frac{s(x)\overline{s(x)}}{\left(|x_0|^p + |x_1|^p\right)^{\frac{2m}{p}}} \quad \forall\, x = [x_0 : x_1] \in \mathbb{P}^1,\ \forall s \in H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}(m)).$$

Proposition 3.7.17. *En gardant les mêmes hypothèses, on montre qu'il existe une constante $\alpha \neq 0$ telle que*

$$\alpha \leq \frac{\lambda_{1,q}}{\lambda_{1,p}} \leq \frac{1}{\alpha}, \quad \forall 1 \ll p \leq q.$$

Démonstration. Soient $q \geq p \geq 1$. Commençons tout d'abord par montrer le résultat technique suivant : Soit v un vecteur propre non nul associé à $\lambda_{1,q}$, alors il existe $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{C}$ tel

$$v' := v + \sum_{i=1}^{r} a_i (1 \otimes e_i) \in \ker(\Delta_p)^{\perp} \setminus \{0\}.$$

Pour cela, on va montrer que le système d'équations linéaires ci-dessous avec $(a_1, \ldots, a_r)$ comme inconnu admet une solution :

$$(v, 1 \otimes e_j)_{L^2,p} = -\sum_{i=1}^{r} a_i (1 \otimes e_i, 1 \otimes e_j)_{L^2,p}, \tag{3.51}$$

pour tout $j = 1, \ldots, r$.

Comme la matrice $A := \left((1 \otimes e_i, 1 \otimes e_j)_{L^2,p}\right)_{1 \leq i,j \leq r}$ est inversible car $e_1, \ldots, e_r$ est une famille libre sur $\mathbb{C}$: vérifions le, si $b = (b_1, \ldots, b_r) \in \mathbb{C}^r$ tel que $A \cdot b = 0$ alors ${}^t\overline{b} A b = 0$, en développant ce dernier on obtient :

$$\sum_{ij} (1 \otimes e_i, 1 \otimes e_j)_{L^2,p} b_i \overline{b_j} = 0.$$

Par sesquilinéarité du produit $(\cdot, \cdot)_{L^2,p}$, ce dernier terme n'est autre que

$$\left(\sum_i b_i e_i, \sum_i b_i e_i\right)_{L^2,p} = 0,$$

donc $\sum_i b_i e_i = 0$, par suite A est inversible. On conclut que le système linéaire (3.51) admet une solution, on pose $v' = v + \sum_{i=1}^r a_i e_i$, de (3.51) on vérifie que $v' \in \ker(\Delta_p)^\perp$. Il reste à montrer que $v' \neq 0$. Par l'absurde, on aura $v = -\sum_{i=1}^r a_i(1 \otimes e_i)$ qui appartient à $\ker(\Delta_p)$, voir (3.3.8), mais si l'on applique Δ_q on trouve que $\lambda_{1,q} v = 0$ ce qui contredit l'hypothèse ($\Delta_q v = \lambda_{1,q} v \neq 0$).

Soit maintenant v un vecteur propre non nul associé à $\lambda_{1,q}$ et on considère v' comme avant, cela nous permet de dire que

$$\begin{aligned}
(\Delta_q v', v')_{L^2,q} &= (\Delta_q v, v + \sum_{i=1}^r a_i(1 \otimes e_i))_{L^2,q} \\
&= (\Delta_q v, v)_{L^2,q} + (\Delta_q v, \sum_{i=1}^r a_i(1 \otimes e_i))_{L^2,q} \\
&= (\Delta_q v, v)_{L^2,q} \\
&= \lambda_{1,q}(v, v)_{L^2,q},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
(v', v')_{L^2,q} &= (v, v)_{L^2,q} + (v, \sum_{i=1}^r a_i(1 \otimes e_i))_{L^2,q} + (\sum_{i=1}^r a_i(1 \otimes e_i), v)_{L^2,q} + (\sum_{i=1}^r a_i(1 \otimes e_i), \sum_{i=1}^r a_i(1 \otimes e_i))_{L^2,q} \\
&= (v, v)_{L^2,q} + (\sum_{i=1}^r a_i(1 \otimes e_i), \sum_{i=1}^r a_i(1 \otimes e_i))_{L^2,q} \\
&\geq (v, v)_{L^2,q}.
\end{aligned}$$

(On a utilisé que $(v, 1 \otimes e_i)_{L^2,q} = 0$, cela résulte facilement du fait : $(v, 1 \otimes e_i)_{L^2,q} = \frac{1}{\lambda_{1,q}}(\Delta_q v, 1 \otimes e_i)_{L^2,q} = \frac{1}{\lambda_{1,q}}(v, \Delta_q(1 \otimes e_i))_{L^2,q} = 0$).

On a donc, pour $p \leq q$:

$$\begin{aligned}
\lambda_{1,p} \leq & \frac{(\Delta_p v', v')_{L^2,p}}{(v', v')_{L^2,p}} \quad \text{par (3.7.14)} \\
\leq & \frac{(\Delta_q v', v')_{L^2,q}}{(v', v')_{L^2,p}} \quad \text{par (3.3.7)} \\
\leq & \frac{1}{\alpha} \frac{(\Delta_q v', v')_{L^2,q}}{(v', v')_{L^2,q}} \quad \text{par (3.46)} \\
\leq & \frac{1}{\alpha} \frac{(\Delta_q v, v)_{L^2,q}}{(v, v)_{L^2,q} + (\sum_{i=1}^r a_i 1 \otimes e_i, \sum_{i=1}^r a_i 1 \otimes e_i)_{L^2,q}} \\
\leq & \frac{1}{\alpha} \frac{(\Delta_q v, v)_{L^2,q}}{(v, v)_{L^2,q}} \\
= & \frac{1}{\alpha} \lambda_{1,q},
\end{aligned}$$

d'où

$$\lambda_{1,p} \leq \frac{1}{\alpha} \lambda_{1,q} \quad \forall\, p \leq q. \tag{3.52}$$

On peut aussi montrer que

$$\frac{\lambda_{1,q}}{\lambda_{1,p}} \leq \alpha \quad \forall\, p \leq q.$$

De la même manière que précédemment : Si v est un vecteur propre non nul associé à $\lambda_{p,1}$ alors il existe $v' := v + \sum_i a_i(1 \otimes e_i) \in \ker(\Delta_q)^\perp \setminus \{0\}$. On va avoir que

$$(\Delta_p v', v')_{L^2,p} = (\Delta_p v, v)_{L^2,p} = \lambda_{1,p}(v, v)_{L^2,p},$$

et

$$(v', v')_{L^2,p} \geq (v, v)_{L^2,p}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\lambda_{1,q} &\leq \frac{(\Delta_q v', v')_{L^2,q}}{(v', v')_{L^2,q}} \quad (3.7.14) \\
&\leq \frac{1}{\alpha} \frac{(\Delta_p v', v')_{L^2,p}}{(v', v')_{L^2,p}}, \quad \text{de } (3.47) \\
&\leq \frac{1}{\alpha} \frac{(\Delta_p v, v)_{L^2,p}}{(v, v)_{L^2,p}} \\
&\leq \frac{1}{\alpha} \lambda_{1,p}.
\end{aligned}$$

Par suite

$$\lambda_{1,q} \leq \frac{1}{\alpha} \lambda_{1,p} \quad \forall\, p \leq q. \tag{3.53}$$

De (3.52) et (3.53), on a

$$\alpha \leq \frac{\lambda_{1,q}}{\lambda_{1,p}} \leq \frac{1}{\alpha} \quad \forall\, p \leq q.$$

□

Bibliographie

[AS92] Milton Abramowitz et Irene A. Stegun, éditeurs. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables.* Dover Publications Inc., New York, 1992. Reprint of the 1972 edition.

[Bar00] E. W. Barnes : The Theory of the G-funtion. *Quarterly Journ. Pure and Appl. Math.*, (31):264–314, 1900.

[BGPS11] José Ignacio Burgos Gil, Patrice Philippon et Martín Sombra : Arithmetic geometry of toric varieties. Metrics, measures and heights. *arXiv.org*, arXiv :1105.5584v1 [math.AG], Mai 2011.

[BGS88] J.-M. Bismut, H. Gillet et C. Soulé : Analytic torsion and holomorphic determinant bundles. I. Bott-Chern forms and analytic torsion. *Comm. Math. Phys.*, 115(1):49–78, 1988.

[BGV04] Nicole Berline, Ezra Getzler et Michèle Vergne : *Heat kernels and Dirac operators.* Grundlehren Text Editions. Springer-Verlag, Berlin, 2004. Corrected reprint of the 1992 original.

[BR89] Garrett Birkhoff et Gian-Carlo Rota : *Ordinary differential equations.* John Wiley & Sons Inc., New York, fourth édition, 1989.

[Che70] Jeff Cheeger : A lower bound for the smallest eigenvalue of the Laplacian. *In Problems in analysis (Papers dedicated to Salomon Bochner, 1969)*, pages 195–199. Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1970.

[Dem] J.P. Demailly : *Complex analytic and differential geometry.*

[Die68] J. Dieudonné : *Éléments d'analyse. Tome II : Chapitres XII à XV.* Cahiers Scientifiques, Fasc. XXXI. Gauthier-Villars, Éditeur, Paris, 1968.

[FS94] John Erik Fornæss et Nessim Sibony : Complex dynamics in higher dimensions. *In Complex potential theory (Montreal, PQ, 1993)*, volume 439 de *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.*, pages 131–186. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1994. Notes partially written by Estela A. Gavosto.

[GH94] Phillip Griffiths et Joseph Harris : *Principles of algebraic geometry.* Wiley Classics Library. John Wiley & Sons Inc., New York, 1994. Reprint of the 1978 original.

[GR00] I. S. Gradshteyn et I. M. Ryzhik : *Table of integrals, series, and products.* Academic Press Inc., San Diego, CA, sixth édition, 2000. Translated from the Russian, Translation edited and with a preface by Alan Jeffrey and Daniel Zwillinger.

[GS90a] Henri Gillet et Christophe Soulé : Arithmetic intersection theory. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (72):93–174 (1991), 1990.

[GS90b] Henri Gillet et Christophe Soulé : Characteristic classes for algebraic vector bundles with Hermitian metric. I. *Ann. of Math. (2)*, 131(1):163–203, 1990.

[GS91] H. Gillet et C. Soulé : Analytic torsion and the arithmetic Todd genus. *Topology*, 30(1):21–54, 1991. With an appendix by D. Zagier.

[GS92] Henri GILLET et Christophe SOULÉ : An arithmetic Riemann-Roch theorem. *Invent. Math.*, 110(3):473–543, 1992.

[Haja] Mounir HAJLI : Spectre du laplacien singulier associé aux métriques canoniques sur la droite projective complexe.

[Hajb] Mounir HAJLI : Sur la fonction zêta associée au laplacien singulier associé aux métriques canoniques sur la droite projective complexe. *preprint*.

[Han69] Hermann HANKEL : Die Cylinderfunctionen erster und zweiter Art. *Math. Ann.*, 1(3):467–501, 1869.

[Hil62] Einar HILLE : *Analytic function theory. Vol. II.* Introductions to Higher Mathematics. Ginn and Co., Boston, Mass.-New York-Toronto, Ont., 1962.

[HL99] Francis HIRSCH et Gilles LACOMBE : *Elements of functional analysis*, volume 192 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1999. Translated from the 1997 French original by Silvio Levy.

[IT78] Akira IKEDA et Yoshiharu TANIGUCHI : Spectra and eigenforms of the Laplacian on S^n and $P^n(\mathbf{C})$. *Osaka J. Math.*, 15(3):515–546, 1978.

[Jos06] Jürgen JOST : *Compact Riemann surfaces*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, third édition, 2006. An introduction to contemporary mathematics.

[Lan93] Serge LANG : *Real and functional analysis*, volume 142 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, third édition, 1993.

[LW20] E LANDAU et A WALFISZ : Über die Nichtfortsetzbarkeit einiger durch Dirichletsche Reihen definierte Funktionen. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 44:82–86, 1920.

[Mai00] Vincent MAILLOT : Géométrie d'Arakelov des variétés toriques et fibrés en droites intégrables. *Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.)*, (80):vi+129, 2000.

[Mil06] John MILNOR : *Dynamics in one complex variable*, volume 160 de *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, third édition, 2006.

[MM07] Xiaonan MA et George MARINESCU : *Holomorphic Morse inequalities and Bergman kernels*, volume 254 de *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2007.

[Olv74] F. W. J. OLVER : *Asymptotics and special functions*. Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1974. Computer Science and Applied Mathematics.

[Qui85] D. QUILLEN : Determinants of Cauchy-Riemann operators on Riemann surfaces. *Funct. Anal. Appl.*, pages 31–34,, 1985.

[Roc70] R. Tyrrell ROCKAFELLAR : *Convex analysis*. Princeton Mathematical Series, No. 28. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.

[RS73] D. B. RAY et I. M. SINGER : Analytic torsion for complex manifolds. *Ann. of Math. (2)*, 98:154–177, 1973.

[Sou92] C. SOULÉ : *Lectures on Arakelov geometry*, volume 33 de *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1992. With the collaboration of D. Abramovich, J.-F. Burnol and J. Kramer.

[Spr05] M. SPREAFICO : Zeta function and regularized determinant on a disc and on a cone. *J. Geom. Phys.*, 54(3):355–371, 2005.

[Tay11] Michael E. TAYLOR : *Partial differential equations I. Basic theory*, volume 115 de *Applied Mathematical Sciences*. Springer, New York, second édition, 2011.

[Voi02] Claire Voisin : *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe*, volume 10 de *Cours Spécialisés [Specialized Courses]*. Société Mathématique de France, Paris, 2002.

[Vor87] A. Voros : Spectral functions, special functions and the Selberg zeta function. *Comm. Math. Phys.*, 110(3):439–465, 1987.

[Wat44] G. N. Watson : *A Treatise on the Theory of Bessel Functions.* Cambridge University Press, Cambridge, England, 1944.

[WW62] E. T. Whittaker et G. N. Watson : *A course of modern analysis. An introduction to the general theory of infinite processes and of analytic functions : with an account of the principal transcendental functions.* Fourth edition. Reprinted. Cambridge University Press, New York, 1962.

[Zha95] Shouwu Zhang : Small points and adelic metrics. *J. Algebraic Geom.*, 4(2):281–300, 1995.