UNIVERSITÉ PARIS 7 — DENIS DIDEROT
U.F.R de Mathématiques

Thèse de Doctorat

Spécialité Mathématiques

présentée par

Rachel OLLIVIER

pour obtenir le diplôme de Docteur de l'Université Paris 7

Modules sur l'algèbre de Hecke du pro-p-Iwahori de $\mathrm{GL}_n(F)$ en caractéristique p

---

Soutenue le jeudi 8 décembre 2005 devant le jury composé de

Christophe BREUIL	(CNRS, IHES)	Rapporteur
Laurent CLOZEL	(Paris 11)	
Michael HARRIS	(Paris 7)	
Colette MOEGLIN	(CNRS, Paris 7)	
Peter SCHNEIDER	(Münster)	Rapporteur
Marie-France VIGNERAS	(Paris 7)	Directrice

UNIVERSITÉ PARIS 7 — DENIS DIDEROT
U.F.R de Mathématiques

Thèse de Doctorat

Spécialité Mathématiques

présentée par

Rachel OLLIVIER

pour obtenir le diplôme de Docteur de l'Université Paris 7

Modules sur l'algèbre de Hecke du pro-p-Iwahori de $\mathrm{GL}_n(F)$ en caractéristique p

---

Soutenue le jeudi 8 décembre 2005 devant le jury composé de

Christophe BREUIL	(CNRS, IHES)	Rapporteur
Laurent CLOZEL	(Paris 11)	
Michael HARRIS	(Paris 7)	
Colette MOEGLIN	(CNRS, Paris 7)	
Peter SCHNEIDER	(Münster)	Rapporteur
Marie-France VIGNERAS	(Paris 7)	Directrice

Remerciements

Je suis profondément reconnaissante à ma directrice de thèse, Marie-France Vignéras, de m'avoir invitée à travailler sur un sujet passionnant. Elle a su guider mes premiers pas dans un domaine peu défriché, a consacré du temps à de stimulants échanges, et s'est chaleureusement intéressée à chacun de mes résultats. Je l'en remercie vivement.

C'est un honneur pour moi que Christophe Breuil et Peter Schneider aient accepté la tâche de rapporter ma thèse. Je les remercie de s'en être acquittés avec grand soin. Certains de leurs travaux ont constitué pour moi un point d'ancrage et cette thèse n'aurait pu trouver rapporteurs plus appropriés.

Ma gratitude revient aussi à Laurent Clozel, Michael Harris et Colette Moeglin qui ont accepté de faire partie de mon jury.

J'ai une pensée reconnaisante pour ceux dont le travail a dynamisé le mien et ceux qui, par leur intérêt pour mes résultats, m'ont permis de saisir combien ces derniers sont reliés à la théorie des représentations p-adiques, désormais en pleine ébullition : Vytautas Paskunas, Christophe Breuil, Pierre Colmez, Ariane Mézard et Laurent Berger.

Au cours d'une conférence où, débutante, je connaissais bien peu les mathématiciens et les mathématiques en question, j'ai rencontré Vincent Sécherre qui a répondu patiemment à mes interrogations et m'a apporté maints éclairages sur la théorie des types. Un enrichissant et amical dialogue s'est poursuivi jusqu'alors et a contribué à améliorer la rédaction de certains passages de ce manuscrit.

Mon parcours mathématique a été initié par Bernard Luron, mon professeur de spéciale. Ses cours d'une grande rigueur pédagogique et scientifique sont encore dans mes bagages.

Je tiens à rendre hommage à Michèle Wasse et Monique Douchez. Le bien-vivre à l'Institut de Mathématiques de Jussieu doit beaucoup à leur efficacité et leur indispensable assistance, prodiguée avec bonne humeur.

Je n'oublie pas les amis, présences d'autant plus précieuses que le travail de recherche est parfois ascétique. Florent, bien sûr. Les habitants du 7ème étage à Chevaleret grâce auxquels ce lieu m'est devenu familier et convivial : la joyeuse troupe italienne autour de Giovanni, Pietro, Luca... Laurent, mon voisin Florian, Charlotte et nos belles résolutions d'après-thèse, Esther avec qui j'ai partagé la rituelle pause-café et bien plus encore, Clotilde, entre rires et confidences... Je pense aussi à ceux qui souriront sans doute s'ils feuillètent les austères pages qui suivent, mais sauront que l'aboutissement de ce travail doit aussi à leurs encouragements : Stéphanie, Jeff, Nico et toute la tribu, Martine et Gilles...

Il me reste à adresser une pensée à ma chère famille : mes parents et mes frères Frédéric et Aymeric, dont le soutien inconditionnel est une ressource inestimable.

Et à Pierre, qui a eu la tendresse de s'intéresser aux "pro-p-Iwahori".

TABLE DES MATIÈRES

Introduction 9

Notations et préliminaires 17
0.1. Représentations lisses et algèbres de Hecke 17
0.2. L'arbre de $\mathrm{PGL}_2(\mathrm{F})$ 24

Partie I. Le foncteur des invariants sous l'action du pro-p-Iwahori de $\mathrm{GL}_2(F)$ 37

1. Etude du module universel relatif au pro-p-Iwahori de $\mathrm{GL}_2(F)$ 39
1.1. Préliminaires 39
1.2. Platitude du module universel $\overline{\mathbb{F}}_p[IZ\backslash \mathrm{GL}_2(F)]$ sur l'algèbre de Hecke-Iwahori 43
1.3. Platitude du module $ind_{IZ}^{\mathrm{GL}_2(F)}\chi$ sur l'algèbre de Hecke du caractère régulier χ 50

2. Le foncteur des $I(1)$-invariants 71
2.1. Le foncteur des I-invariants 73
2.2. Etude de la partie régulière du foncteur des $I(1)$-invariants 89

Partie II. Modules simples sur la pro-p-algèbre de Hecke de $\mathrm{GL}_n(F)$ en caractéristique p 109

3. L'anneau de Hecke du pro-p-Iwahori de $\mathrm{GL}_n(F)$ et ses modules standards 111
3.1. Notations 111
3.2. Présentations de l'anneau de Hecke du pro-p-Iwahori de $\mathrm{GL}_n(F)$ 113
3.3. Modules standards de l'anneau de Hecke du pro-p-Iwahori de $\mathrm{GL}_n(F)$ 117
3.4. Critère d'irréductibilité pour les séries principales de $\mathrm{GL}_n(F)$ en caractéristique p 120

4. Modules simples en caractéristique p sur la pro-p-algèbre de Hecke de $\mathrm{GL}_3(F)$ .. 143
4.1. Préliminaires 143
4.2. Modules simples en caractéristique p sur l'algèbre de Hecke-Iwahori de $\mathrm{GL}_3(F)$ 144
4.3. Modules simples sur l'algèbre de Hecke régulière 163
4.4. Modules simples sur l'algèbre de Hecke semi-régulière 172
4.5. Modules standards non-supersinguliers et $I(1)$-invariants d'induites paraboliques 177
4.6. Correspondance de Langlands numérique modulo p pour la pro-p-algèbre de Hecke ... 184

Bibliographie 187

INTRODUCTION

Ce travail est une contribution à l'étude des représentations lisses modulo p du groupe linéaire général à cœfficients dans un corps local non archimédien de caractéristique résiduelle p. Soit F un tel corps.

On note $G = \mathrm{GL}_2(F)/\pi^{\mathbb{Z}}$ où π désigne une uniformisante de F. Nous montrons que, lorsque $F = \mathbb{Q}_p$ avec $p \neq 2$, le foncteur des invariants sous l'action du pro-p-Iwahori $I(1)$ de $\mathrm{GL}_2(F)$ est une équivalence entre la catégorie des $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentations lisses de G engendrées par leurs $I(1)$-invariants et la catégorie des modules à droite sur la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre de Hecke $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I(1))$. Nous donnons en outre des exemples de corps F pour lesquels ce résultat est faux.

D'autre part, nous donnons la classification des modules simples ayant un caractère central sur la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre de Hecke du pro-p-Iwahori de $\mathrm{GL}_3(F)$. Après avoir décrit conjecturalement les modules simples supersinguliers, nous montrons, dans l'esprit d'une correspondance de Langlands modulo p, qu'ils sont en bijection avec les $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentations irréductibles de dimension 3 du groupe de Weil de F.

Enfin, nous donnons un critère d'irréductibilité pour les séries principales de $\mathrm{GL}_n(F)$ en caractéristique p.

Toutes les représentations considérées sont lisses.

Soit n un entier strictement positif. La théorie des représentations complexes de $\mathrm{GL}_n(F)$ est bien comprise. J.N.Bernstein a montré que la catégorie des représentations complexes de $\mathrm{GL}_n(F)$ se décompose en un produit de catégories de modules sur des algèbres complexes, appelées blocs de Bernstein ([**5**]). La théorie des types de C.J.Bushnell et P.C Kutzko ([**7**]) assure que pour tout bloc de Bernstein $\mathcal{B}$, il existe un sous-groupe ouvert compact K de $\mathrm{GL}_n(F)$ et une représentation irréductible ρ de K tels que $\mathcal{B}$ coïncide avec la sous-catégorie des représentations complexes engendrées par leurs composantes (K, ρ)-isotypiques et que cette dernière est équivalente, *via* le foncteur des (K, ρ)-invariants, à la catégorie des modules à droite sur l'algèbre de Hecke de la représentation ρ. On dit que (K, ρ)-est un type pour le bloc de Bernstein $\mathcal{B}$.

En particulier, si l'on choisit pour K le sous-groupe d'Iwahori standard I de $\mathrm{GL}_n(F)$, et pour ρ son caractère trivial, le couple $(I, 1_I)$ est un type : le foncteur des I-invariants est une équivalence entre la catégorie des représentations complexes de $\mathrm{GL}_n(F)$ engendrées par leurs I-invariants et la catégorie des modules à droite sur l'algèbre de Hecke-Iwahori complexe de $\mathrm{GL}_n(F)$ ([**8**]).

La classification des représentations complexes est en partie motivée par la conjecture de Langlands, qui est désormais démontrée, lorsque F est de caractéristique positive ([**24**]) et lorsque F est de caractéristique nulle ([**21**] et [**20**]) : il existe une correspondance bijective naturelle entre les représentations irréductibles supercuspidales, *i.e.* qui ne sont pas des sous-quotients d'induites paraboliques, et les représentations irréductibles de dimension n du groupe de Weil de F.

Pour un nombre premier ℓ, on fixe une clôture algébrique $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ de $\mathbb{F}_\ell$. Les représentations de $\mathrm{GL}_n(F)$ à cœfficients dans $\overline{\mathbb{F}}_\ell$, $\ell \neq p$, ont été classifiées par M.-F.Vignéras ([**39**]) qui a adapté à ce cadre la théorie des types. Le foncteur des I-invariants met en bijection les $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-représentations irréductibles de $\mathrm{GL}_n(F)$ ayant un vecteur I-invariant non trivial avec les modules simples à droite sur la $\overline{\mathbb{F}}_\ell$-algèbre de Hecke-Iwahori. Le résultat reste vrai si l'on remplace I par le pro-p-Iwahori $I(1)$. Enfin, la conjecture de Langlands modulo ℓ est vérifiée ([**42**]).

On ne connaît pas les représentations irréductibles à cœfficients dans $\overline{\mathbb{F}}_p$ de $\mathrm{GL}_n(F)$. Travailler en caractéristique naturelle génère nombre de difficultés. Les outils précédemment utilisés, en particulier la mesure de Haar sur $\mathrm{GL}_n(F)$, ne s'adaptent pas car $\mathrm{GL}_n(F)$ est localement un pro-p-groupe.

Les pionniers de la théorie des $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentations de $\mathrm{GL}_n(F)$ ont abordé tout d'abord le cas où $n = 2$. En 1994, L.Barthel et R.Livné ([**1**], [**2**]) ont classifié les représentations irréductibles de $\mathrm{GL}_2(F)$ qui sont des sous-quotients d'induites paraboliques et montré qu'il existe des représentations irréductibles supercuspidales, qu'ils n'ont pas classifiées et qu'ils ont appelées *supersingulières*. En 2001, C.Breuil a classifié ces représentations supersingulières dans le cas particulier où $F = \mathbb{Q}_p$ ([**10**]).
Un enjeu majeur de la détermination des $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentations irréductibles de $\mathrm{GL}_n(F)$ est l'exploration de la possibilité d'une correspondance de Langlands en caractéristique p. Dans cet esprit, C.Breuil a démontré que les représentations supersingulières de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sont en bijection naturelle avec les $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentations irréductibles de dimension 2 du groupe de Weil de $\mathbb{Q}_p$.

Faute d'un cadre théorique adapté, les résultats précédents ne sont pas généralisés à tout $n \geq 2$. Le cas, encore très mystérieux, de la caractéristique p offre toutefois une propriété particulière : tout pro-p-groupe agissant (de façon lisse) sur un $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel admet un vecteur invariant non trivial. Le pro-p-Iwahori $I(1)$ de $\mathrm{GL}_n(F)$, c'est à dire l'unique pro-p-sous-groupe maximal de l'Iwahori standard, retient donc l'attention : si l'on se donne une $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation V non nulle de $\mathrm{GL}_n(F)$, la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre de Hecke $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\mathrm{GL}_n(F), I(1))$ du pro-p-Iwahori agit naturellement à droite sur l'espace $V^{I(1)}$ non trivial de ses $I(1)$-invariants. Le foncteur obtenu, de la catégorie des $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentations de $\mathrm{GL}_n(F)$ dans la catégorie des $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\mathrm{GL}_n(F), I(1))$-modules à droite, est appelé foncteur des $I(1)$-invariants.

S'inspirant du cadre des représentations complexes, ou bien à cœfficients dans $\overline{\mathbb{F}}_\ell$, $\ell \neq p$, il semble alors naturel d'appréhender le problème de la classification des $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentations irréductibles de $\mathrm{GL}_n(F)$ *via* les deux questions suivantes :

1. L'étude des propriétés du foncteur des $I(1)$-invariants.
2. La classification des modules simples sur la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre de Hecke du pro-p-Iwahori de $\mathrm{GL}_n(F)$.

L'objet du présent travail est d'apporter des éléments de réponse à ces deux questions. Rappelons tout d'abord ce qui a déjà été établi dans cette voie. En 2001, M.-F. Vignéras a classifié les modules simples sur la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre de Hecke du pro-p-Iwahori de $\mathrm{GL}_2(F)$ ayant un caractère central ([**43**]). Parmi ces modules, elle a identifé ceux qui proviennent, *via* le foncteur des $I(1)$-invariants, de sous-quotients irréductibles d'induites paraboliques. Il convenait alors d'appeler les autres des *modules supersinguliers*. Le bien-fondé de cette dénomination est manifeste, à la lumière des observations suivantes. Lorsque $F = \mathbb{Q}_p$, le foncteur des $I(1)$-invariants met en correspondance bijective les $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentations irréductibles de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ ayant un caractère central avec les $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p), I(1))$-modules simples ayant un caractère central. Cette correspondance associe les $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentations supersingulières classifiées par C.Breuil avec les $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p), I(1))$-modules simples supersinguliers. D'autre part, pour F quelconque, les $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\mathrm{GL}_2(F), I(1))$-modules simples supersinguliers sont en bijection avec les $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentations irréductibles de dimension 2 du groupe de Weil de F. Enfin, en 2003, à l'aide de systèmes de cœfficients inspirés de [**32**], V.Paskunas a associé à chaque $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\mathrm{GL}_2(F), I(1))$-module simple supersingulier une représentation supersingulière de $\mathrm{GL}_2(F)$ dont l'espace des $I(1)$-invariants a pour socle ce module simple supersingulier ([**28**]).

Les résultats présentés dans cette thèse s'organisent en deux parties, articulées autour des deux questions que nous nous sommes précédemment posées.

Partie I

Nous travaillons avec le groupe $G = \mathrm{GL}_2(F)/\pi^{\mathbb{Z}}$. Par définition, la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre de Hecke du pro-p-Iwahori de G est l'algèbre des entrelacements du $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-module universel $\overline{\mathbb{F}}_p[I(1)\backslash G]$. Ainsi, ce module universel définit les deux foncteurs adjoints $\mathcal{T}^{(1)}$ et $\mathcal{H}^{(1)}$ suivants :

– le foncteur $\mathcal{T}^{(1)}$ de la catégorie des $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I(1))$-modules à droite dans la catégorie des $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentations de G engendrées par leurs $I(1)$-invariants :

$$M \quad \longmapsto \quad M \otimes_{\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,I(1))} \overline{\mathbb{F}}_p[I(1)\backslash G],$$

– le foncteur $\mathcal{H}^{(1)}$, dit *des $I(1)$-invariants*, de la catégorie des $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentations de G engendrées par leurs $I(1)$-invariants dans la catégorie des $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I(1))$-modules à droite :

$$V \longmapsto Hom_{\overline{\mathbb{F}}_p[G]}(\overline{\mathbb{F}}_p[I(1)\backslash G],\, V) \simeq V^{I(1)}$$

Le module universel $\overline{\mathbb{F}}_p[I\backslash G]$, relatif à l'Iwahori standard I, définit de manière analogue deux foncteurs adjoints $\mathcal{T}$ et $\mathcal{H}$ entre la catégorie des $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I)$-modules à droite et la catégorie des $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentations de G engendrées par leurs I-invariants.

Lorsque l'on travaille avec les représentations complexes, il est bien connu que le foncteur $\mathcal{T}$ est exact : le résultat repose sur le fait que le pro-ordre de I est inversible dans l'anneau sur lequel on travaille. Ainsi, on dispose d'une mesure de Haar normalisée μ de I et, pour tout espace V sur lequel I agit, on a $V^I = \mu V$.

Notre premier chapitre s'attache à déterminer un critère d'exactitude pour le foncteur $\mathcal{T}^{(1)}$, condition *sine qua non* pour qu'il constitue une équivalence de catégories : nous montrons que le module universel $\overline{\mathbb{F}}_p[I(1)\backslash G]$ est plat comme module sur la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre de Hecke de $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I(1))$ si et seulement si le cardinal q du corps résiduel de F est premier, égal à p.

Plus précisément, on décompose $\mathcal{T}^{(1)}$ en sa partie *Iwahori* et sa partie *régulière* au sens suivant. On désigne par $ind_I^G\sigma$ l'induite compacte d'une $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation σ de I. Puisque $\overline{\mathbb{F}}_p$ est un anneau dans lequel $q-1$ est inversible et contenant une racine $q-1^{\text{ème}}$ de l'unité, le $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-module $\overline{\mathbb{F}}_p[I(1)\backslash G]$ se décompose en la somme directe

$$\overline{\mathbb{F}}_p[I(1)\backslash G] \simeq \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} ind_I^G\sigma_\gamma,$$

où Γ désigne l'ensemble des orbites sous l'action du groupe des permutations $\mathfrak{S}_2 = \{1,\tau\}$ des $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractères de $I/I(1) \simeq (\mathbb{F}_q^*)^2$ et, pour $\gamma \in \Gamma$, on désigne par σ_γ la représentation de I triviale sur $I(1)$ donnée par $\sigma_\gamma = \underset{\chi\in\gamma}{\oplus}\chi$.
Il n'y a pas d'entrelacement non nul entre les induites compactes de σ_γ et $\sigma_{\gamma'}$ si les orbites γ et γ' sont distinctes, de sorte que cette décomposition se traduit par l'écriture de la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre de Hecke $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I(1))$ en un produit d'algèbres de Hecke (proposition 1.1.3) :

$$\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I(1)) \simeq \bigoplus_{\gamma\in\Gamma}\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, \sigma_\gamma).$$

Le $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I(1))$-module $\overline{\mathbb{F}}_p[I(1)\backslash G]$ est plat si et seulement si pour chaque orbite $\gamma \in \Gamma$ l'induite compacte $ind_I^G\sigma_\gamma$ est un module plat sur la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre de Hecke $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, \sigma_\gamma)$ de la représentation σ_γ.

Lorsque γ est de cardinal 1 on dit que l'on est dans le cas *Iwahori* et l'on est ramené à l'étude de la platitude du $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I)$-module universel $\overline{\mathbb{F}}_p[I\backslash G]$ (§1.2). Lorsque $\gamma = \{\chi, \tau\chi\}$ est de cardinal 2, on dit que l'on est dans le cas *régulier* dont l'étude se ramène, par équivalence de Morita, à celle du $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, \chi)$-module $ind_I^G\chi$ (§1.3).

Nous montrons, à l'aide de l'arbre de Bruhat-Tits que le $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I)$-module $\overline{\mathbb{F}}_p[I\backslash G]$ est projectif donc plat. L'induite compacte d'un caractère régulier est, quant à elle, un $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, \chi)$-module libre si $q = p$, tandis que si $q \neq p$, ce n'est pas même un $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, \chi)$-module plat. Le défaut d'exactitude de $\mathcal{T}^{(1)}$ lorsque $q \neq p$ provient donc de sa partie régulière.

Lorsque $q \neq p$, on ne saurait donc espérer que $\mathcal{T}^{(1)}$ et $\mathcal{H}^{(1)}$ constituent des équivalences quasi-inverses de catégories. Est-ce une condition nécessaire et suffisante ? Qu'en est-il de $\mathcal{T}$ et $\mathcal{H}$?

Dans le deuxième chapitre, nous nous attelons à répondre à ces questions et établissons les résultats suivants :

a) Supposons que $F = \mathbb{Q}_p$, avec $p \neq 2$. Les foncteurs $\mathcal{T}^{(1)}$ et $\mathcal{H}^{(1)}$ sont des équivalences quasi-inverses entre la catégorie des $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I(1))$-modules à droite et la catégorie des $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentations de G engendrées par leurs $I(1)$-invariants.
b) Supposons que l'on est dans l'une des deux situations suivantes : $q \neq p$, ou bien $p \neq 2$ et $F = \mathbb{F}_p((t))$ est le corps des séries de Laurent en la variable t à cœfficients dans $\mathbb{F}_p$.
Il existe un $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I(1))$-module à droite simple supersingulier $\mathfrak{M}^{(1)}$ (qui est un $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel de dimension 2) tel que le $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel $\mathcal{H}^{(1)} \circ \mathcal{T}^{(1)}(\mathfrak{M}^{(1)})$ est de dimension infinie.

Ces résultats sont à nouveau démontrés en deux temps, en considérant la partie Iwahori (§2.1) puis la partie régulière (§2.2). Il apparaît par exemple, lorsque $F = \mathbb{F}_p((t))$ avec $p \neq 2$, que les foncteurs $\mathcal{T}^{(1)}$ et $\mathcal{H}^{(1)}$ ne sont pas des équivalences de catégories bien que $\mathcal{T}^{(1)}$ soit un foncteur exact.

Notons que le résultat a) du théorème permet en particulier de retrouver le résultat de C.Breuil de classification des $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentations irréductibles supersingulières de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ pour $p \neq 2$. Un résultat du type de b) était annoncé dans sa remarque 4.2.6.

Lorsque $F = \mathbb{Q}_p$, $p \neq 2$, notre preuve de l'équivalence de catégories tire profit, de façon essentielle, de la décomposition du module universel $\overline{\mathbb{F}}_p[I(1)\backslash G]$ en une somme directe de $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I(1))$-modules projectifs de type fini. On remarque de plus que l'on est naturellement conduit à l'étape déterminante qui consiste à vérifier que $\mathcal{H}^{(1)} \circ \mathcal{T}^{(1)}(\mathfrak{M}^{(1)}) \simeq \mathfrak{M}^{(1)}$, où $\mathfrak{M}^{(1)}$ est un $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I(1))$-module à droite simple supersingulier. C'est ainsi que l'on réalise, lorsque l'on se place dans les hypothèses b), que ce sont les modules supersinguliers qui viennent entraver l'existence d'un isomorphisme $\mathcal{H}^{(1)} \circ \mathcal{T}^{(1)} \simeq id$.

Partie II

Les résultats de la première partie sont spécifiques au cas $n = 2$ car ils nécessitent une compréhension de la structure du module universel sur la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre de Hecke du pro-p-Iwahori, facilitée par la structure d'arbre de l'immeuble de Bruhat-Tits de $\mathrm{GL}_2(F)$.

La deuxième question que nous avons posée au début de cette introduction apparaît, quant à elle, plus aisément abordable en de plus grandes dimensions. Nous décrivons ici les résultats établis dans l'espoir de comprendre la classification des modules simples ayant un caractère central sur la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre de Hecke du pro-p-Iwahori de $\mathrm{GL}_n(F)$ et mettons en œuvre ces méthodes dans le dernier chapitre, pour obtenir la complète classification lorsque $n = 3$.

Dans le chapitre 3, nous énonçons tout d'abord des résultats dus à Vignéras qui donnent un analogue, pour l'anneau de Hecke du pro-p-Iwahori de $\mathrm{GL}_n(F)$, de la présentation de Iwahori-Matsumoto pour l'anneau de Hecke-Iwahori ([**45**]). Si cette présentation fut suffisante pour déterminer les $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\mathrm{GL}_2(F), I(1))$-modules simples ([**43**]), les calculs sont inextricables si l'on procède de même avec $n = 3$. Cette difficulté a motivé la mise en place, pour le $\mathbb{Z}$-anneau de Hecke du pro-p-Iwahori de $\mathrm{GL}_n(F)$, d'une présentation de Bernstein entière ([**45**]) inspirée de la présentation de Bernstein pour l'algèbre de Hecke-Iwahori complexe ([**26**]). On dispose donc désormais dans le $\mathbb{Z}$-anneau de Hecke du pro-p-Iwahori d'un sous-anneau commutatif $\mathcal{A}^{(1)}$, contenant le centre, et sur lequel l'anneau de Hecke est un module de type fini.
Soit R un anneau commutatif unitaire. Suivant les méthodes de Rogawski ([**30**]) pour la détermination des modules simples de l'algèbre de Hecke-Iwahori complexe, on définit les R-modules standards, c'est-à-dire les $\mathcal{H}_R(\mathrm{GL}_n(F), I(1))$-modules induits par les R-caractères de $\mathcal{A}^{(1)}$ (§3.3). Ils possèdent la propriété universelle suivante : si R est un corps algébriquement clos, tout $\mathcal{H}_R(\mathrm{GL}_n(F), I(1))$-module simple ayant un caractère central est quotient d'un R-module standard. Si de plus q est inversible dans R, la R-algèbre de Hecke du pro-p-Iwahori de $\mathrm{GL}_n(F)$ est un module libre de rang $n!$ sur sa sous-algèbre commutative $\mathcal{A}^{(1)} \otimes_{\mathbb{Z}} R$ et les R-modules standards sont de dimension $n!$.

On classe les $\overline{\mathbb{F}}_p$-modules standards en trois familles : on dit d'un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère de $\mathcal{A}^{(1)}$, du $\overline{\mathbb{F}}_p$-module standard qu'il induit, et de tout $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\mathrm{GL}_n(F), I(1))$-module quotient de ce module standard, qu'ils sont *supersinguliers* si le caractère est "aussi nul que possible" au sens de la définition

3.3.11. Dans le cas opposé, où le caractère est "le moins nul possible", on dira qu'ils sont *réguliers*. Le cas intermédiaire sera appelé *singulier*.

Cette définition est légitimée tout d'abord par le fait qu'elle est en conformité avec le cas $n = 2$ pour lequel on connaît les modules simples supersinguliers. Elle suppose de plus implicitement que l'on puisse identifier les $I(1)$-invariants de sous-quotients d'induites paraboliques avec les $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\mathrm{GL}_n(F), I(1))$-modules non-supersinguliers. Nous donnons, à la section 3.4, un résultat dans cette direction : le $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\mathrm{GL}_n(F), I(1))$-module des $I(1)$-invariants d'une série principale contient un quotient non nul d'un $\overline{\mathbb{F}}_p$-module standard régulier. (Nous montrons même, lorsque $n = 3$, que le $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\mathrm{GL}_3(F), I(1))$-module des $I(1)$-invariants d'une série principale est isomorphe à un $\overline{\mathbb{F}}_p$-module standard régulier). On exhibe alors des entrelacements entre les modules standards réguliers qui permettent d'établir un critère d'irréductibilité pour les séries principales en caractéristique p. Il s'énonce de la façon suivante : soit $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \otimes ... \otimes \mathcal{X}_n : (F^*)^n \to \overline{\mathbb{F}}_p{}^*$ un caractère du tore déployé de $\mathrm{GL}_n(F)$; la série principale induite par $\mathcal{X}$ est une $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation irréductible de $\mathrm{GL}_n(F)$ si et seulement si pour tout $i \in \{1, ..., n-1\}$, on a $\mathcal{X}_i \neq \mathcal{X}_{i+1}$. Notons que cette condition est différente du critère d'irréductibilité pour les séries principales complexes : en effet, le critère d'irréductibilité pour la série principale induite par $\mathcal{X}$ ne dépend pas uniquement de la classe de conjugaison de $\mathcal{X}$ sous l'action du groupe des permutations $\mathfrak{S}_n$.

Le quatrième et dernier chapitre traite le cas $n = 3$. Nous y donnons la classification des modules simples ayant un caractère central sur la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre de Hecke du pro-p-Iwahori de $\mathrm{GL}_3(F)$ et établissons une correspondance de Langlands numérique pour les modules simples supersinguliers.

Comme pour $n = 2$, nous décomposons tout d'abord l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\mathrm{GL}_3(F), I(1))$ selon l'ensemble Γ des orbites sous l'action du groupe des permutations $\mathfrak{S}_3$ des $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractères du tore fini $(\mathbb{F}_q^*)^3 \simeq I/I(1)$: à l'orbite $\gamma \in \Gamma$ on associe la $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation de I triviale sur $I(1)$ donnée par $\sigma_\gamma = \oplus_{\chi \in \gamma} \chi$ et l'on a la décomposition en produit d'algèbres suivant :

$$\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\mathrm{GL}_3(F), I(1)) = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\mathrm{GL}_3(F), \sigma_\gamma).$$

On est ainsi ramené à l'étude des modules simples sur l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\mathrm{GL}_3(F), \sigma_\gamma)$ de la représentation σ_γ, selon que γ est de type *Iwahori* c'est-à-dire de cardinal 1, de type *régulier* c'est-à-dire de cardinal 6, et enfin de type *semi-régulier* c'est-à-dire, de cardinal 3.

La section 4.2 est consacrée à l'étude des modules simples sur $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\mathrm{GL}_3(F), I)$, la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre de Hecke-Iwahori de $\mathrm{GL}_3(F)$. Cette dernière est isomorphe à l'algèbre de Hecke de σ_γ pour toute orbite γ de cardinal 1.

La semi-simplification des modules standards de $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\mathrm{GL}_3(F), I)$ fournit la classification des $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\mathrm{GL}_3(F), I)$-modules simples ayant un caractère central. Cette classification est donnée au paragraphe 4.2.3.

On remarque en particulier que les $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\mathrm{GL}_3(F), I)$-modules standards induits par un caractère supersingulier sont des $\overline{\mathbb{F}}_p$-espaces vectoriels de dimension 12, et non $6 = |W_0|$. Leur étude montre qu'il existe des $\overline{\mathbb{Z}}_p$-modules standards qui ne sont pas des $\overline{\mathbb{Z}}_p$-modules libres. Ainsi, il apparaît que le $\mathbb{Z}$-anneau de Hecke du pro-p-Iwahori n'est pas plat sur son sous-anneau commutatif $\mathcal{A}^{(1)}$.

Dans la section 4.3, on étudie les modules simples sur la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre de Hecke de la représentation σ_γ lorsque γ est régulière. Un module standard pour cette algèbre de Hecke possède un unique quotient irréductible. (Ce résultat est transposable à $\mathrm{GL}_n(F)$ pour n quelconque.)
La classification des $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\mathrm{GL}_3(F), \sigma_\gamma)$-modules simples ayant un caractère central est donnée au paragraphe 4.3.3. Parmi ces modules, les supersinguliers sont de dimension 3. On en déduit en particulier que l'algèbre $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\mathrm{GL}_3(F), \sigma_\gamma)$ n'est pas isomorphe à une algèbre de matrices de taille 6. Ainsi, contrairement au cas des représentations complexes de $\mathrm{GL}_3(F)$, il apparaît que pour toute transposition $s \in \mathfrak{S}_3$, les induites compactes $ind_I^{\mathrm{GL}_3(F)}\chi$ et $ind_I^{\mathrm{GL}_3(F)}s\chi$ ne sont pas isomorphes comme $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{GL}_3(F)]$-modules.

Enfin, le cas semi-régulier est traité dans la partie 4.4. Nous ne procédons pas ici par semi-simplification des modules standards. Soit $\chi : I/I(1) \to \overline{\mathbb{F}}_p{}^*$ un caractère de l'Iwahori standard de $\mathrm{GL}_3(F)$ dont l'orbite γ sous l'action du groupe des permutations $\mathfrak{S}_3$ possède 3 éléments. L'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\mathrm{GL}_3(F), \sigma_\gamma)$ est isomorphe à l'algèbre des matrices de taille 3 sur l'anneau $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\mathrm{GL}_3(F), \chi)$. Par des calculs élémentaires, on obtient une présentation par générateurs et relations de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\mathrm{GL}_3(F), \chi)$ (§4.4.1) puis la liste de ses modules simples ayant un caractère central (§4.4.2).

On a ainsi déterminé les modules simples ayant un caractère central sur l'algèbre de Hecke du pro-p-Iwahori de $\mathrm{GL}_3(F)$. Parmi eux, on distingue les supersinguliers qui sont des $\overline{\mathbb{F}}_p$-espaces vectoriels de dimension 3.
Le bien-fondé de l'appellation "supersingulier" est justifié pour $n = 3$ par la partie 4.5. Au chapitre 3, nous avons vu que l'espace des $I(1)$-invariants d'une série principale de $\mathrm{GL}_3(F)$ est isomorphe à un $\overline{\mathbb{F}}_p$-module standard régulier. On suppose ici que $F = \mathbb{Q}_p$ de sorte que les représentations supersingulières de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et leurs espaces des invariants sous l'action du pro-p-Iwahori sont connus ([**10**], [**43**]). On considère la représentation ρ de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$ obtenue en induisant paraboliquement depuis le sous-groupe de Levi $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) \times \mathrm{GL}_1(\mathbb{Q}_p)$ (ou $\mathrm{GL}_1(\mathbb{Q}_p) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$) et en choisissant pour représentation de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ une représentation supersingulière. Alors, le $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p), I(1))$-module à droite des $I(1)$-invariants de ρ est un quotient d'un $\overline{\mathbb{F}}_p$-module standard singulier, non-supersingulier. Nous avons donc démontré que si l'on considère une représentation de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$ obtenue par induction parabolique d'une représentation supersingulière d'un Levi, un constituant irréductible de son espace des $I(1)$-invariants n'est pas un module supersingulier.

Enfin, dans la section 4.6, on observe une coïncidence numérique propre à nourrir l'espoir d'une correspondance de Langlands modulo p. Puisqu'elles sont modérément ramifiées, les représentations irréductibles de dimension 3 du groupe de Weil de F sont faciles à déterminer à l'aide de la théorie de Clifford et des caractères fondamentaux de Serre [**34**]. Nous démontrons le résultat suivant, que l'on appelle *correspondance de Langlands numérique pour la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre de Hecke du pro-p-Iwahori de* $\mathrm{GL}_3(F)$:

Soit $z \in \overline{\mathbb{F}}_p{}^*$. Entre l'ensemble fini des classes d'isomorphisme des $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\mathrm{GL}_3(F), I(1))$-modules simples supersinguliers, tels que l'uniformisante agit par multiplication par z, et l'ensemble fini des classes d'isomorphisme des représentations irréductibles de dimension 3 du groupe de Weil de F, telles que le déterminant du Frobenius est égal à z, on peut trouver une bijection compatible avec la torsion par le caractère fondamental de F^* (Théorème 4.6.4).

NOTATIONS ET PRÉLIMINAIRES

On désigne par F un corps local non archimédien de caractéristique résiduelle p, de corps résiduel $\mathbb{F}_q$, avec $q = p^\ell$, $\ell \geq 1$, par O_F l'anneau des entiers de F et par O_F^* le groupe des éléments inversibles de O_F. On choisit π une uniformisante de O_F, et val la valuation normalisée par $val(\pi) = 1$.

On fixe $\overline{\mathbb{Q}}_p$ une clôture algébrique de $\mathbb{Q}_p$. Soient $\overline{\mathbb{Z}}_p$ son sous-anneau des entiers algébriques, et $\overline{\mathbb{F}}_p$ son corps résiduel. On note $\iota_{\overline{\mathbb{Q}}_p} : \overline{\mathbb{Z}}_p \to \overline{\mathbb{Q}}_p$ l'inclusion, $r_p : \overline{\mathbb{Z}}_p \to \overline{\mathbb{F}}_p$, la réduction.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Pour k un corps, on désigne par $T(k)$ le tore déployé constitué par les matrices diagonales de $\mathrm{GL}_n(k)$, et par $B(k)$ le sous-groupe de Borel des matrices triangulaires supérieures.

On considère le groupe des permutations $\mathfrak{S}_n$ comme un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(F)$ en identifiant un élément de $\mathfrak{S}_n$ avec la matrice de permutation lui correspondant. On a une action par conjugaison de $\mathfrak{S}_n$ sur $T(\mathbb{F}_q)$ qui fournit une action de $\mathfrak{S}_n$ sur le groupe $\hat{T}(\mathbb{F}_q)$ des caractères de $T(\mathbb{F}_q)$ à valeurs dans $\mathbb{F}_q^*$: pour $\chi \in \hat{T}(\mathbb{F}_q)$, $w \in \mathfrak{S}_n$, on note $w\chi$ le caractère défini par $(w\chi)(t) = \chi(w^{-1}tw)$ pour tout $t \in T(\mathbb{F}_q)$. On note Γ l'ensemble des orbites de $\hat{T}(\mathbb{F}_q)$ sous l'action de $\mathfrak{S}_n$.

On désigne par R un anneau commutatif unitaire d'unité 1_R. Si R contient une racine $q-1^{\text{ème}}$ de l'unité, l'ensemble des R-caractères de $T(\mathbb{F}_q)$ s'identifie avec le groupe $\hat{T}(\mathbb{F}_q)$ des $\mathbb{F}_q$-caractères de $T(\mathbb{F}_q)$.

0.1. Représentations lisses et algèbres de Hecke

Toutes les représentations considérées sont lisses : les stabilisateurs des points sont ouverts. On appelle caractère une représentation de dimension 1.

Pour les rappels au sujet des algèbres de Hecke, on se réfère à [**43**, A.1].

Dans cette section on désigne par G un groupe localement fini. Par exemple $G = \mathrm{GL}_n(F)$.

0.1.1. Soit K un sous-groupe ouvert compact de G et $\sigma : K \to \mathrm{GL}(V)$ une R-représentation de K de type fini sur R.

0.1.1.1. On note $ind_K^G\sigma$ l'induite compacte de σ à G ([**39**, I.5.1]). Elle s'identifie à l'espace des fonctions à support compact $f : G \to V$ vérifiant

$$f(\,k\,g\,) \;=\; \sigma(k)\,f(g) \text{ pour tous } k \in K,\, g \in G$$

muni de la translation à droite

$$(g_0.f)\,(g) \;=\; f(gg_0) \text{ pour tous } g,\, g_0 \in G.$$

L'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_R(G,\sigma)$ est l'algèbre des entrelacements

$$\mathcal{H}_R(G,\sigma) = End_{R[G]}(ind_K^G\,\sigma).$$

0.1.1.2. — On suppose que $\sigma : K \to R^*$ est un caractère. Un base de l'induite compacte du caractère σ est l'ensemble

$$\{f_{Kg,\sigma},\;\; g \in K\backslash G\}$$

où l'on note $f_{Kg,\,\sigma}$ l'élément de $ind_K^G\sigma$ de support Kg et de valeur 1_R en g. Remarquons que $f_{Kg,\sigma} = g^{-1}.f_{K,\sigma}$ de sorte que le $R[G]$-module $ind_K^G\sigma$ est engendré par $f_{K,\sigma}$.

La composante (K,σ)-isotypique de $ind_K^G\sigma$ est l'ensemble des fonctions $f : G \to R$ telles que

$$f(k_1gk_2) = \sigma(k_1)f(g)\sigma(k_2) \text{ pour } g \in G,\, k_1, k_2 \in K.$$

On dit de $g \in G$ qu'il entrelace le caractère σ si pour tout $k \in K \cap gKg^{-1}$ on a $\sigma(k) = \sigma(g^{-1}kg)$. On note $\mathcal{S}_\sigma$ l'ensemble des éléments de G qui entrelacent σ. Pour tout $g \in \mathcal{S}_\sigma$ l'élément $T_{g,\sigma}$ de la composante (K,σ)-isotypique de $ind_K^G\sigma$ de support KgK et de valeur 1_R en g est bien défini.

Par réciprocité de Frobenius ([**39**, I.5.7]), l'algèbre de Hecke de σ s'identifie avec la composante (K,σ)-isotypique de $ind_K^G\sigma$ munie du produit de convolution décrit par [**43**, A.1]. Une base de l'algèbre de Hecke de σ est l'ensemble

$$\{T_{g,\sigma},\;\; g \in K\backslash\mathcal{S}_\sigma/K\}.$$

On appelle $\mathcal{S}_\sigma$ le support de l'algèbre de Hecke de σ.

0.1.2. — On suppose que σ est le caractère trivial de K. On note alors $\mathcal{H}_R(G,K)$ l'algèbre de Hecke de ce caractère et on l'appelle la R-algèbre de Hecke de K. Son support est égal à G tout entier et l'on notera simplement T_g l'élément $T_{g,\sigma}$ de $\mathcal{H}_R(G,K)$ de support KgK défini au paragraphe précédent.

0.1.2.1. — La catégorie des $\mathcal{H}_R(G,K)$-modules à droite est équivalente à la catégorie des $\mathcal{H}_R(G,K)$-modules à gauche. En effet l'endomorphisme de R-modules de $\mathcal{H}_R(G,K)$

$$T \longmapsto (T^{\smile} : g \mapsto T(g^{-1})) \tag{1}$$

est un anti-isomorphisme pour le produit de convolution de l'algèbre $\mathcal{H}_R(G,K)$. Pour tout $\mathcal{H}_R(G,K)$-module à droite M, on notera $[M]_{\mathfrak{g}}$ le $\mathcal{H}_R(G,K)$-module à gauche avec le même espace, et sur lequel l'action de $\mathcal{H}_R(G,K)$ donnée par

$$T.m := m.T^{\smile} \text{ pour } m \in M,\, T \in \mathcal{H}_R(G,K).$$

Désormais, en l'absence de précision, un $\mathcal{H}_R(G,K)$-module sera par défaut un $\mathcal{H}_R(G,K)$-module à gauche.

0.1.2.2. — L'induite compacte $ind_K^G 1$ du caractère trivial de K s'identifie avec le $R[G]$-module universel $R[K\backslash G]$ des fonctions à valeurs dans R et à support fini dans l'ensemble des classes à droites de G modulo K. On notera $\mathbf{1}_K$ l'élément $f_{K,1}$ égal à la fonction caractéristique de K. C'est un élément générateur du $R[G]$-module universel $R[K\backslash G]$.

Le module universel $R[K\backslash G]$ est ainsi naturellement un module à gauche sur la R-algèbre de Hecke de K. Pour tout $g \in G$, l'action de T_g sur ce $R[G]$-module est entièrement déterminée par l'action de T_g sur l'élément générateur $\mathbf{1}_K$ car l'action de la R-algèbre de Hecke de K commute à celle de G. Elle est donnée par

$$T_g(\mathbf{1}_K) = \sum_{x \in K\backslash KgK} x^{-1}\mathbf{1}_K = \sum_{x \in K\backslash KgK} \mathbf{1}_{Kx}.$$

0.1.3. Si (ρ, V) est une R-représentation de G, son espace des K-invariants est un module à droite pour la R-algèbre de Hecke de K. On peut se référer par exemple à [**1**, 1]. Soit $v \in V^K$. Il existe un unique morphisme de $R[G]$-modules

$$\begin{array}{rccc} \Phi_v : & R[K\backslash G] & \longrightarrow & V \\ & \mathbf{1}_K & \longmapsto & v. \end{array}$$

Pour tout T appartenant à l'algèbre $\mathcal{H}_R(G,K)$, l'action à droite de T sur v est donnée par

$$v.T := \Phi_v \circ T\,(\mathbf{1}_K).$$

0.1.3.1. — Le $R[G]$-module universel $R[K\backslash G]$ définit les deux foncteurs $\mathcal{T}$ et $\mathcal{H}$ suivants :

le foncteur $\mathcal{T}$ de la catégorie des $\mathcal{H}_R(G,K)$-modules à droite dans la catégorie des R-représentations de G engendrées par leurs K-invariants :

$$\begin{array}{ccc} Mod_D(\mathcal{H}_R(G,K)) & \longrightarrow & Mod_R^K(G) \\ M & \longmapsto & M \otimes_{\mathcal{H}_R(G,K)} R[K\backslash G], \end{array}$$

le foncteur $\mathcal{H}$ dit *des K-invariants* de la catégorie des R-représentations de G engendrées par leurs K-invariants dans la catégorie des $\mathcal{H}_R(G,K)$-modules à droite :

$$\begin{array}{ccc} Mod_R^K(G) & \longrightarrow & Mod_D(\mathcal{H}_R(G,K)) \\ V & \longmapsto & Hom_{R[G]}(R[K\backslash G],\, V) \simeq V^K. \end{array}$$

Le foncteur $\mathcal{T}$ est adjoint à gauche de $\mathcal{H}$. Par conséquent, si l'un de ces foncteurs est une équivalence de catégories, l'autre l'est aussi et en est un quasi-inverse.

Rappelons, pour M un $\mathcal{H}_R(G,K)$-module à droite et V une R-représentation de G engendrée par ses K-invariants, la forme de l'isomorphisme

$$Hom_{R[G]}(\mathcal{T}(M), V) \simeq Hom_{\mathcal{H}_R(G,K)}(M, \mathcal{H}(V)).$$

A un morphisme $\alpha : \mathcal{T}(M) \to V$ de $R[G]$-modules, on associe le morphisme de $\mathcal{H}_R(G,K)$-modules à droite défini par

$$\begin{array}{ccc} M & \to & V^K \\ m & \longmapsto & \alpha(m \otimes \mathbf{1}_K). \end{array}$$

A un morphisme $\beta : M \to V^K$ de $\mathcal{H}_R(G,K)$-modules à droite, on associe le morphisme de $R[G]$-modules défini par

$$\begin{array}{ccc} M \otimes_{\mathcal{H}_R(G,K)} R[K\backslash G] & \to & V \\ m \otimes \mathbf{1}_K & \longmapsto & \beta(m). \end{array}$$

Pour M un $\mathcal{H}_R(G,K)$-module à droite et V une R-représentation de G engendrée par ses K-invariants nous relions M et $\mathcal{H}\circ\mathcal{T}(M)$ d'une part, V et $\mathcal{T}\circ\mathcal{H}(V)$ d'autre part.

– On a un morphisme de $\mathcal{H}_R(G,K)$-modules à droite

$$\begin{array}{rcl} M & \longrightarrow & (M\otimes_{\mathcal{H}_R(G,K)} R[K\backslash G])^K \simeq \mathcal{H}\circ\mathcal{T}(M) \\ m & \longmapsto & m\otimes \mathbf{1}_K. \end{array} \tag{2}$$

Si l'espace des K-invariants de $R[K\backslash G]$ en est un facteur direct comme $\mathcal{H}_R(G,K)$-module, alors l'application (2) est injective.

– On a un morphisme surjectif de $R[G]$-modules

$$\mathcal{T}\circ\mathcal{H}(V) \simeq V^K \otimes_{\mathcal{H}_R(G,K)} R[K\backslash G] \to V \tag{3}$$

défini par $v\otimes \mathbf{1}_K \mapsto v$ pour tout $v\in V^K$.

0.1.4. — Soit I le sous-groupe d'Iwahori standard de $\mathrm{GL}_n(F)$, et $I(1)$ son unique pro-p-Sylow : I est l'image inverse, par la réduction modulo π, $\mathrm{GL}_n(O_F) \twoheadrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$, du sous-groupe de Borel $B(\mathbb{F}_q)$ de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$; $I(1)$ est l'image inverse du sous-groupe de $B(\mathbb{F}_q)$ constitué des matrices unipotentes.

Les sous-groupes $I(1)$ et I de $\mathrm{GL}_n(F)$ sont ouverts et compacts. Ils sont normalisés par l'élément $\omega\in\mathrm{GL}_n(F)$ défini par

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & & 0 & 1 \\ \pi & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

0.1.4.1. Le sous-groupe $I(1)$ de $\mathrm{GL}_n(F)$ étant un pro-p-groupe, toute $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation non nulle de $\mathrm{GL}_n(F)$ admet un vecteur non nul invariant par $I(1)$. (Puisque la représentation considérée est lisse, on peut se ramener au cas d'une représentation de dimension finie d'un p-groupe et la propriété énoncée est alors une conséquence de la proposition 26 de [**36**].)

Le quotient $I/I(1)$ s'identifie au tore fini $T(\mathbb{F}_q)$. D'après la propriété précédente tout $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère de I est trivial sur $I(1)$ et s'identifie avec un élément de $\hat{T}(\mathbb{F}_q)$.

0.1.4.2. Les propriétés du foncteur des $I(1)$-invariants sont encore énigmatiques. On dispose toutefois de l'assertion suivante ([**43**, 4.3]) :

Proposition 0.1.1 (Critère d'irréductibilité). *Soit (ρ,V) une $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation non-nulle de $\mathrm{GL}_n(F)$ engendrée par son espace $V^{I(1)}$ des $I(1)$-invariants.*
Si le $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\mathrm{GL}_n(F),I(1))$-module à droite $V^{I(1)}$ est irréductible, alors la représentation (ρ,V) est irréductible.

0.1.4.3. — On choisit $G = \mathrm{GL}_n(F)/\pi^{\mathbb{Z}}$. On identifie le sous-groupe et $I(1)$ de $\mathrm{GL}_n(F)$ avec son image dans G. Nous allons noter $\mathcal{T}^{(1)}$ et $\mathcal{H}^{(1)}$ les foncteurs définis comme au paragraphe 0.1.3.1 par le $\overline{\mathbb{F}}_p$-module universel $\overline{\mathbb{F}}_p[I(1)\backslash G]$ relatif au pro-p-Iwahori.

Proposition 0.1.2. *Supposons que pour tout $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I(1))$-module à droite M, l'application*

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & \mathcal{H}^{(1)} \circ \mathcal{T}^{(1)}(M) \\ m & \longmapsto & m \otimes \mathbf{1}_K \end{array} \tag{2}$$

est un isomorphisme de $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I(1))$-modules à droite. Alors, les foncteurs $\mathcal{T}^{(1)}$ et $\mathcal{H}^{(1)}$ sont des équivalences de catégories.

Démonstration. — Les foncteurs $\mathcal{T}^{(1)}$ et $\mathcal{H}^{(1)}$ étant adjoints l'un de l'autre, ils constituent des équivalences de catégories si et seulement si

$$\mathcal{H}^{(1)} \circ \mathcal{T}^{(1)} \simeq id \quad \text{et} \quad \mathcal{T}^{(1)} \circ \mathcal{H}^{(1)} \simeq id.$$

Sous l'hypothèse de la proposition, le premier isomorphisme est vérifié.

Soit V une $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation engendrée par ses $I(1)$-invariants. On rappelle qu'on a défini au paragraphe 0.1.3.1 un morphisme surjectif de $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-modules

$$\mathcal{T}^{(1)} \circ \mathcal{H}^{(1)}(V) \longrightarrow V. \tag{3}$$

L'hypothèse de la proposition appliquée au $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I(1))$-module à droite $\mathcal{H}^{(1)}(V)$ dit que l'espace des $I(1)$-invariants de $\mathcal{T}^{(1)} \circ \mathcal{H}^{(1)}(V)$ est égal à l'ensemble $\{v \otimes \mathbf{1}_K,\ v \in V^{I(1)}\}$. On en déduit que la restriction à cet espace des $I(1)$-invariants du morphisme (3) est injective. Puisque tout $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-module non nul admet un vecteur $I(1)$-invariant non trivial d'après les résultats du paragraphe précédent, on en déduit que (3) est injectif. C'est donc un isomorphisme.

□

0.1.5. Induction parabolique. —

0.1.5.1. Soit L un sous-groupe de Levi standard de $\mathrm{GL}_n(F)$, et P le parabolique supérieur associé. Soit (ρ, V) une $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation de L. On désigne par $\mathrm{Ind}_P^{\mathrm{GL}_n(F)}\rho$ la représentation de $\mathrm{GL}_n(F)$ obtenue par induction parabolique de ρ ([**39**, II.2]). C'est la partie lisse du $\overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{GL}_n(F)]$-module des fonctions

$$f : \mathrm{GL}_n(F) \to V$$

telles que

$$f(pg) = \rho(p)f(g), \text{ pour tous } p \in P,\ g \in \mathrm{GL}_n(F)$$

muni de la translation à droite

$$(g_0.f)\,(g) = f(gg_0), \text{ pour tous } g, g_0 \in \mathrm{GL}_n(F).$$

On suppose que $\rho : L \to \overline{\mathbb{F}}_p^{\,*}$ est un caractère de $\mathrm{GL}_n(F)$. Pour tout $g \in \mathrm{GL}_n(F)$, le caractère ρ est trivial sur le pro-p-groupe $P \cap gI(1)g^{-1}$, de sorte que l'élément

$$f_{PgI(1),\rho} \in \mathrm{Ind}_P^{\mathrm{GL}_n(F)}\rho$$

$I(1)$-invariant de support $PgI(1)$ et de valeur $1_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ en g est bien défini.

D'après [**39**, I.5.6], l'espace des $I(1)$-invariants de $\mathrm{Ind}_P^{\mathrm{GL}_n(F)}\rho$ est un $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel de dimension $|P\backslash \mathrm{GL}_n(F)/I(1)|$ de base $\{f_{PgI(1),\rho}\}_{g\in P\backslash \mathrm{GL}_n(F)/I(1)}$.

0.1.5.2. Exemples. — A) Pour $L = T(F)$, le tore diagonal de $\mathrm{GL}_n(F)$ et $\mathcal{X} : T(F) \to \overline{\mathbb{F}}_p^{\,*}$ un caractère de $T(F)$, on considère la série principale $\mathrm{Ind}_{B(F)}^{\mathrm{GL}_n(F)}\mathcal{X}$. Un système de représentants des doubles classes $B(F)\backslash \mathrm{GL}_n(F)/I(1)$ est donné par les éléments du groupe des permutations $\mathfrak{S}_n$ considéré comme un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(F)$. C'est une conséquence de la décomposition de Bruhat pour le groupe fini $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ ([**13**, Théorème 2.14]). Une $\overline{\mathbb{F}}_p$-base de l'espace $(\mathrm{Ind}_{B(F)}^{\mathrm{GL}_n(F)}\mathcal{X})^{I(1)}$ est donc donnée par $\{f_{B(F)wI(1),\mathcal{X}}\}_{w\in\mathfrak{S}_n}$.

B) On suppose que $n = 3$. Soient $B_1(F)$ et $B_2(F)$ les paraboliques supérieurs respectivement associés aux sous-groupes de Levi standards $L_1 \simeq \mathrm{GL_2(F)} \times \mathrm{GL_1(F)}$ et $L_2 \simeq \mathrm{GL_1(F)} \times \mathrm{GL_2(F)}$. Soient $\rho_1 : L_1 \to \overline{\mathbb{F}}_p^{\,*}$ et $\rho_2 : L_2 \to \overline{\mathbb{F}}_p^{\,*}$ des caractères.

Pour $i = 1, 2$, on note $s_i \in \mathfrak{S}_3$ la permutation $(i, i+1)$.

Une $\overline{\mathbb{F}}_p$-base de l'espace des $I(1)$-invariants de la représentation paraboliquement induite par ρ_1 (resp. ρ_2) est donnée par

$$\{f_{B_1(F)wI(1),\rho_1}\}_{w\in\{1,s_2,s_2s_1\}} \text{ (resp. } \{f_{B_2(F)wI(1),\rho_2}\}_{w\in\{1,s_1,s_1s_2\}}).$$

0.1.5.3. — On suppose que $n = 3$. Soit $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \otimes \mathcal{X}_2 \otimes \mathcal{X}_3 : T(F) \to \overline{\mathbb{F}}_p^{\,*}$ un caractère du tore déployé $T(F)$ de $\mathrm{GL}_3(F)$.

Proposition 0.1.3. *L'espace des $I(1)$-invariants de la série principale induite par $\mathcal{X}$ est un $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\mathrm{GL}_3(F), I(1))$-module à droite engendré par $f_{B(F)I(1),\mathcal{X}}$.*

Démonstration. — Pour $g \in \mathrm{GL}_3(F)$, on désigne comme au paragraphe 0.1.2 par T_g l'élément de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\mathrm{GL}_3(F), I(1))$ correspondant à la double classe $I(1)gI(1)$. Décrivons l'action à droite de tels éléments sur l'élément $I(1)$-invariant $f_{B(F)I(1),\mathcal{X}}$.

a) L'élément ω défini au paragraphe 0.1.4 normalise $I(1)$. Ainsi, $I(1)\omega I(1) = I(1)\omega$ et l'action à droite de T_ω sur $f_{B(F)I(1),\mathcal{X}}$ est donnée par

$$f_{B(F)I(1),\mathcal{X}}.T_\omega = \omega^{-1}.f_{B(F)I(1),\mathcal{X}}.$$

C'est un élément $I(1)$-invariant de support $B(F)I(1)\omega = B(F)\omega I(1)$. On écrit l'élément ω comme le produit de la diagonale $(1, 1, \pi)$ par la permutation s_2s_1. Ainsi, $B(F)\omega I(1) = B(F)s_2s_1I(1)$.

La valeur de $f_{B(F)I(1),\mathcal{X}}.T_\omega$ en s_2s_1 est donnée par

$$f_{B(F)I(1),\mathcal{X}}(s_2s_1\omega^{-1}) = f_{B(F)I(1),\mathcal{X}}(1, 1, \pi^{-1}) = \mathcal{X}_3(\pi^{-1}) \neq 0.$$

Par conséquent, l'élément $f_{B_1(F)s_2s_1I(1)}$ appartient au $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\mathrm{GL}_3(F), I(1))$-module à droite engendré par $f_{B(F)I(1),\mathcal{X}}$.

b) De même, l'étude de l'action de T_{ω^2} montre que l'élément $f_{B(F)s_1s_2I(1),\mathcal{X}}$ appartient au $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\mathrm{GL}_3(F), I(1))$-module à droite engendré par $f_{B(F)I(1),\mathcal{X}}$.

c) Etudions l'action de T_{s_1} à droite sur $f_{B(F)I(1),\mathcal{X}}$. Elle donne un élément $I(1)$-invariant de support $B(F)I(1)s_1I(1)$.

Si un élément w de $\mathfrak{S}_3$ appartient à $B(F)I(1)s_1I(1)$, alors, c'est qu'il existe un élément du sous-groupe de Borel $b \in B(F)$ à cœfficients entiers et des éléments α, $\alpha' \in I(1)$ tels que $w = b\alpha s_1\alpha'$. En réduisant cette égalité modulo π et sachant que l'image dans $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q)$ de $\mathfrak{S}_3$ est un système de représentants des doubles classes de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q)$ modulo son sous-groupe de Borel $B(\mathbb{F}_q)$, on en déduit que $w = s_1$. Par conséquent, $B(F)I(1)s_1I(1) = B(F)s_1I(1)$. Ainsi, l'action de T_{s_1} à droite sur $f_{B(F)I(1),\mathcal{X}}$ donne un élément $I(1)$-invariant de support $B(F)s_1I(1)$. Nous allons montrer que sa valeur en s_1 est égale à $1_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ ce qui nous assurera que cet élément est égal à $f_{B(F)s_1I(1),\mathcal{X}}$. Ainsi, on aura prouvé que $f_{B(F)s_1I(1),\mathcal{X}}$ appartient au $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\mathrm{GL}_3(F), I(1))$-module à droite engendré par $f_{B(F)I(1),\mathcal{X}}$.

On a la décomposition (voir [**43**, A.3, A.7])

$$I(1)s_1I(1) = \coprod_{x\in O_F/\pi O_F} I(1)s_1u_x \quad \text{avec } u_x = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Supposons qu'il existe $x \in O_F$ tel que $s_1 \in B(F)I(1)s_1u_x$, alors il existe un élément $b \in B(F)$ à cœfficients entiers et un élément $\alpha, \in I(1)$ tels que $s_1u_xs_1 = \alpha b$. Le terme de gauche est une matrice triangulaire inférieure à cœfficients entiers, la réduction modulo π du terme de droite est une matrice triangulaire supérieure. Ainsi, $x \in \pi O_F$ et

$$[f_{B(F)I(1),\mathcal{X}}.T_{s_1}](s_1) = \sum_{x\in O_F/\pi O_F} f_{B(F)I(1),\mathcal{X}}\left(s_1(s_1u_x)^{-1}\right) = f_{B(F)I(1),\mathcal{X}}(1) \ = \ 1,$$

et $f_{B(F)I(1),\mathcal{X}}.T_{s_1} = f_{B(F)s_1I(1),\mathcal{X}}$.

d) L'étude des actions respectives de T_ω et de T_{ω^2} sur $f_{B(F)s_1I(1),\mathcal{X}}$, menée de façon analogue aux points a) et b), montre alors que les éléments $f_{B(F)s_1s_2s_1I(1),\mathcal{X}}$ et $f_{B(F)s_2I(1),\mathcal{X}}$ appartiennent au $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\mathrm{GL}_3(F), I(1))$-module à droite engendré par $f_{B(F)I(1),\mathcal{X}}$.

On a démontré la proposition car une base de l'espace des $I(1)$-invariants de la série principale induite par $\mathcal{X}$ est l'ensemble

$$\{f_{B(F)wI(1),\mathcal{X}},\ w \in \mathfrak{S}_3\}. \tag{4}$$

□

0.1.5.4. — Soit $i \in \{1, 2\}$. Supposons que $\mathcal{X}_i = \mathcal{X}_{i+1}$. On note $\rho_1 = \mathcal{X}_1 \circ det \otimes \mathcal{X}_3$ (resp. $\rho_2 = \mathcal{X}_1 \otimes \mathcal{X}_2 \circ det$) le caractère du sous-groupe de Levi L_1 (resp. L_2). La série principale induite par $\mathcal{X}$ contient la représentation paraboliquement induite par ρ_i.

L'élément $I(1)$-invariant $f_{B_i(F)I(1),\rho_i}$ de cette sous-représentation se décompose selon la base (4) de l'espace des $I(1)$-invariants de la série principale induite par $\mathcal{X}$. Puisque son support est

$$B_i(F)I(1) = B(F)I(1) \cup B(F)s_iI(1),$$

c'est une combinaison linéaire de $f_{B(F)I(1),\mathcal{X}}$ et $f_{B(F)s_iI(1),\mathcal{X}}$. Or, on a

$$f_{B_i(F)I(1),\rho_i}(1) = 1 \text{ et } f_{B_i(F)I(1),\rho_i}(s_i) = \rho_i(s_i) = \mathcal{X}_i(-1), \text{ donc}$$

$$f_{B_i(F)I(1),\rho_i} = f_{B(F)I(1),\mathcal{X}} + \mathcal{X}_i(-1) f_{B(F)s_iI(1),\mathcal{X}}. \tag{5}$$

Remarque 0.1.4. On a vu que l'espace des $I(1)$-invariants de la représentation induite par ρ_i est de dimension 3. L'égalité (5) et la preuve de la proposition 0.1.3 montrent que cet espace a pour base

$$\{f_{B_i(F)I(1),\rho_i},\ \ f_{B_i(F)I(1),\rho_i}T_\omega,\ \ f_{B_i(F)I(1),\rho_i}T_{\omega^2}.\}$$

Il est donc engendré comme $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\mathrm{GL}_3(F), I(1))$-module à droite par $f_{B_i(F)I(1),\rho_i}$.

Remarque 0.1.5. Si $\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_2 = \mathcal{X}_3$, la série principale induite par $\mathcal{X}$ contient la sous-représentation de dimension 1 dite *des constantes* qui a pour base la fonction de support $\mathrm{GL}_3(F)$ et de valeur $1_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ en l'unité de $\mathrm{GL}_3(F)$.

0.2. L'arbre de $\mathrm{PGL}_2(\mathrm{F})$

0.2.1. Définitions. —

0.2.1.1. — On note $G = \mathrm{GL}_2(F)/\pi^{\mathbb{Z}}$. On identifie les sous-groupes I, $I(1)$, $\mathrm{GL}_2(O_F)$ de $\mathrm{GL}_2(F)$ avec leur image dans G.

On désigne par $\mathcal{T}$ l'arbre de $\mathrm{PGL}_2(\mathrm{F})$. On se réfère à **[35]**. Nous considérerons les arêtes de $\mathcal{T}$ comme orientées.

L'ensemble des sommets de $\mathcal{T}$ s'identifie avec l'ensemble des réseaux de F^2 à homothétie près. Il est muni d'une action à gauche de G qui est transitive. On note c_0 le sommet correspondant au réseau $O_F \oplus O_F$. Son stabilisateur sous l'action de G est égal à $\mathrm{GL}_2(\mathrm{O_F})$. Ainsi, l'ensemble des sommets de l'arbre s'identifie avec les classes à gauche $G/\mathrm{GL}_2(\mathrm{O_F})$.
Cette action de G sur l'ensemble des sommets induit une action transitive sur l'ensemble des arêtes. On note c_1 le sommet correspondant au réseau $O_F \oplus \pi O_F$ et u l'arête d'origine c_0 et d'extrémité c_1. Son stabilisateur sous l'action de G est égal au sous-groupe d'Iwahori I, donc l'ensemble des arêtes de l'arbre s'identifie avec les classes à gauche G/I.

Soit v une arête d'origine c et d'extrémité c'.

On désigne par $\tilde{v}$ et l'on appelle *arête opposée* à v l'arête d'origine c' et d'extrémité c. L'application involutive $v \mapsto \tilde{v}$ définie sur l'ensemble des arêtes s'étend en un endomorphisme linéaire de l'espace vectoriel de base l'ensemble des arêtes. Pour X un ensemble d'arêtes, on notera $\tilde{X}$ l'ensemble des arêtes opposées.

Toute arête d'extrémité c, distincte de $\tilde{v}$, sera dite *incidente* à v. Toute arête d'origine c', distincte de $\tilde{v}$, sera dite *adjacente* à v. On appelle *faisceau* issu de v et l'on note $\mathcal{F}_v$ l'ensemble des q arêtes adjacentes à v. On appelle *branche* de v l'ensemble $\mathcal{B}_v$ défini inductivement par $v \in \mathcal{B}_v$, $\mathcal{F}_v \subset \mathcal{B}_v$ et $\forall w \in \mathcal{B}_v$, $\mathcal{F}_w \subset \mathcal{B}_v$.

L'action de G sur l'ensemble des arêtes transforme un faisceau en un faisceau.

On distingue les arêtes de l'arbre $\mathcal{T}$ selon deux types : l'arête v sera dite *de type* 1 si v ou bien son opposée $\tilde{v}$ appartient à la branche de u. Dans le cas contraire, on dira que v est de type 0.

L'ensemble des sommets de l'arbre est naturellement muni d'une distance d. On dira de l'arête v d'origine c et d'extrémité c' qu'elle est *sortante* si $d(c_0, c) < d(c_0, c')$. Dans le cas contraire, on dira qu'elle est *rentrante*.
Pour $l \in \mathbb{N}$, on désigne par S_l la sphère de rayon l, c'est-à-dire l'ensemble des sommets à distance l de c_0. Nous dirons de l'arête v qu'elle est à distance l (sous-entendu de l'origine c_0) si l'on a $l = max\{d(c_0, c), d(c_0, c')\}$. Si v est sortante (resp. rentrante), cela signifie que son extrémité (resp. son origine) appartient à S_l.

Remarque 0.2.1. – L'élément $\omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \pi & 0 \end{pmatrix}$ échange les sommets c_0 et c_1 et envoie l'arête u sur son opposée $\tilde{u}$.

– L'élément $\omega^2 = \begin{pmatrix} \pi & 0 \\ 0 & \pi \end{pmatrix}$ agit trivialement sur l'arbre.

– L'élément ω envoie une arête sortante de type 0 à distance $i \geq 1$, sur une arête sortante de type 1 à distance $i + 1$.

  On le vérifie d'abord pour $i = 1$. Une arête sortante de type 0, à distance 1, appartient au faisceau issu de $\tilde{u}$. Son image par ω appartient donc au faisceau issu de $\omega\tilde{u} = u$, c'est à dire à l'ensemble des arêtes sortantes de type 1, à distance 2. Le résultat se montre pour tout $i \geq 1$ par récurrence, car toute arête sortante de type 0 à distance $i + 1$ est adjacente à une arête sortante de type 0 à distance i.

Pour travailler avec l'arbre $\mathcal{T}$, nous aurons besoin d'une indexation explicite de ses arêtes. Dans ce but, nous allons donner un système de représentants des classes à gauche de G modulo I et nous commençons par quelques rappels.

0.2.1.2. — Rappelons la construction de l'application de Teichmüller. Le corps résiduel $\mathbb{F}_q$ de F étant un corps parfait, un élément $x \in \mathbb{F}_q$ admet une racine $p^{\text{ème}}$ notée $x^{1/p}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on choisit un élément $\tilde{x}_k \in O_F$ dont l'image dans $O_F/\pi O_F \simeq \mathbb{F}_q$ est égale à $x^{p^{-k}}$. On montre alors, ([**33**, II,§4, proposition 8], [**19**]), que la suite $((\tilde{x}_k)^{p^k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans l'anneau complet O_F et que si l'on note $[x]$ sa limite, l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}_q & \longrightarrow & O_F \\ x & \longmapsto & [x] \end{array}$$

dite *de Teichmüller*, est l'unique système de représentants de $O_F/\pi O_F$ vérifiant $[xy] = [x][y]$ pour tous $x, y \in \mathbb{F}_q$. On identifie $\mathbb{F}_q^{\mathbb{N}}$ avec O_F *via*

$$a : \begin{array}{ccc} \mathbb{F}_q^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & O_F \\ (x_j)_{j\in\mathbb{N}} & \longmapsto & \sum_{j\in\mathbb{N}} \pi^j [x_j]. \end{array}$$

Pour tout $i \geq 1$, on plonge $\mathbb{F}_q^i$ dans $\mathbb{F}_q^{\mathbb{N}}$ en identifiant $(x_0, ..., x_{i-1}) \in \mathbb{F}_q^i$ avec l'élément $(x_0, ..., x_{i-1}, 0, 0, ...)$ de $\mathbb{F}_q^{\mathbb{N}}$. L'image de $\mathbb{F}_q^i$ par a est un système de représentants de $O_F/\pi^i O_F$.

Lorsque $F = \mathbb{F}_q((T))$, l'identification a est un morphisme additif de $\mathbb{F}_q^{\mathbb{N}}$, muni de l'addition coordonnée à coordonnée, dans $O_F = \mathbb{F}_q[[T]]$.

Lorsque F est l'extension non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ de corps résiduel $\mathbb{F}_q$, ce n'est plus le cas, mais l'anneau des entiers de F s'identifie alors avec l'anneau des vecteurs de Witt à cœfficients dans $\mathbb{F}_q$, ce qui permet de faire des calculs comme celui du lemme suivant. On note $Q \in \mathbb{F}_q[X, Y]$ la réduction modulo p du polynôme à cœfficients entiers

$$\frac{X^p + Y^p - (X+Y)^p}{p}.$$

Lemme 0.2.2. *On suppose que F est l'extension non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ de corps résiduel $\mathbb{F}_q$. Soient $i \geq 1$, $x = (x_0, ..., x_i) \in \mathbb{F}_q^{i+1}$ et $s \in \mathbb{F}_q$.*

$$\pi^{i-1}[s] + a(x_0, .., x_{i-1}, x_i) = a(x_0, .., s + x_{i-1}, x_i + Q(s^{1/p}, x_{i-1}^{1/p})) \mod \pi^{i+1} O_F.$$

Démonstration. — Le lemme s'obtient par un calcul sur les vecteurs de Witt, car l'anneau des entiers O_F s'identifie avec l'anneau des vecteurs de Witt à cœfficients dans $\mathbb{F}_q$ [**33**, §6]. (Comparer avec le lemme [**10**, 3.1.8]).

□

0.2.1.3. —

Notation 0.2.3. Soit $i \in \mathbb{N}$. Nous adopterons la convention suivante : tout élément de $\mathbb{F}_q^{i+1}$ se décompose sous la forme (x, s) avec $x \in \mathbb{F}_q^i$ et $s \in \mathbb{F}_q$. Si $i = 0$, alors on pose $x = \emptyset$ et $(\emptyset, s) = s$.

Soient $i \geq 1$, et $x \in \mathbb{F}_q^i$, on définit

$$g_x^0 = \begin{pmatrix} -a(x) & \pi^{i-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad g_x^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\pi a(x) & \pi^i \end{pmatrix}.$$

Pour $i = 0$, on pose $g_\emptyset^0 = \omega^{-1}$, $g_\emptyset^1 = 1$.

Un système de représentants des classes à gauche de G modulo $\mathrm{GL}_2(O_F)$ est donné par ([**10**]) :

$$\{1, \omega, g_x^\epsilon \omega, \text{ pour } \epsilon \in \{0,1\}, x \in \mathbb{F}_q^i, i \geq 1\}.$$

Les sommets à distance 1 de l'origine c_0 sont

$$\{c_1 = \omega\, c_0, \quad (g_s^0 \omega)\, c_0, \text{ pour } s \in \mathbb{F}_q\}.$$

Pour $l \in \mathbb{N}$, $l \geq 1$, la sphère S_l constituée des sommets à distance l de l'origine est

$$S_l = \{(g_x^0 \omega)\, c_0, \quad (g_y^1 \omega)\, c_0, \text{ pour } x \in \mathbb{F}_q^l, y \in \mathbb{F}_q^{l-1}\}.$$

Un système de représentants des classes à gauche de G modulo I est donné par :

$$\{1, g_x^\epsilon, \omega, g_x^\epsilon \omega, \text{ pour } \epsilon \in \{0,1\}, x \in \mathbb{F}_q^i, i \geq 1\}. \tag{6}$$

En effet, pour $\epsilon \in \{0,1\}$, $i \geq 1$, $x \in \mathbb{F}_q^i$, l'arête

$$u_x^\epsilon := g_x^\epsilon u$$

est l'unique arête sortante d'extrémité $(g_x^\epsilon \omega)c_0$. (Elle a pour origine $g_x^\epsilon c_0$ et pour extrémité $g_x^\epsilon c_1 = g_x^\epsilon \omega c_0$. Or on vérifie que $g_x^\epsilon c_0 = g_y^\epsilon \omega c_0$, avec $x = (y,s) \in \mathbb{F}_q^{i-1} \times \mathbb{F}_q$. Donc l'origine de u_x^ϵ est bien un sommet plus proche de c_0 que son extrémité.) L'arête opposée à u_x^ϵ est

$$\tilde{u}_x^\epsilon = (g_x^\epsilon \omega)\, u = g_x^\epsilon \tilde{u}.$$

Le faisceau issu de u_x^ϵ est l'ensemble suivant, indexé par $\mathbb{F}_q$:

$$\mathcal{F}_{u_x^\epsilon} = \{u_{(x,s)}^\epsilon,\ s \in \mathbb{F}_q\}.$$

Remarque 0.2.4. Pour alléger les notations lorsque l'on travaillera avec les $q+1$ arêtes $\{u, u_s^0\}_{s\in\mathbb{F}_q}$ d'origine c_0, on les notera simplement $\{u, u_s\}_{s\in\mathbb{F}_q}$.

Puisque l'action de G sur l'arbre transforme un faisceau en un faisceau, l'élément $(g_x^\epsilon \omega)$, qui envoie $\tilde{u}$ sur u_x^ϵ, envoie le faisceau issu de $\tilde{u}$ sur le faisceau issu de u_x^ϵ. Plus précisément, pour $s \in \mathbb{F}_q$, observons quelle est l'image de l'arête u_s issue de $\tilde{u}$: on effectue les produits matriciels

$$(g_x^0\omega)g_s^0 = \begin{pmatrix} -a(x) & \pi^{i-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \pi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -[s] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a(x) - \pi^i[s] & \pi^{i-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = g_{(x,s)}^0,$$

$$(g_x^1\omega)g_s^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\pi a(x) & \pi^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \pi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -[s] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\pi a(x) - \pi^{i+1}[s] & \pi^{i+1} \end{pmatrix} = g_{(x,s)}^1,$$

et l'on en déduit que l'arête u_s adjacente à $\tilde{u}$ est envoyée par translation par $(g_x^\epsilon \omega)$ sur l'arête $u_{(x,s)}^\epsilon$ adjacente à u_x^ϵ.

La branche de u est égale à $\mathcal{B}_u = \{u,\ u_x^1, x \in \mathbb{F}_q^i, i \geq 1\}$. Ainsi, une arête sortante v est de type 1 si $v = u$ ou bien s'il existe $i \geq 1$, $x \in \mathbb{F}_q^i$, tels que $v = u_x^1$. Elle est de type 0 s'il existe $i \geq 1$, $x \in \mathbb{F}_q^i$, tels que $v = u_x^0$.

On désigne par E_l l'ensemble des arêtes sortantes à distance $l+1$ de c_0, c'est à dire dont l'origine appartient à la sphère S_l et l'extrémité appartient à la sphère S_{l+1}. Il est de cardinal $|E_l| = |S_{l+1}| = q^l(q+1)$. On a

$$E_0 = \{u,\ u_s\}_{s\in\mathbb{F}_q},$$
$$E_l = \{u_x^0,\ u_y^1,\ \text{pour } x \in \mathbb{F}_q^{l+1},\ y \in \mathbb{F}_q^l\} \text{ pour } l \geq 1.$$

L'ensemble $\tilde{E}_l$ des arêtes rentrantes à distance l de l'origine est donné par :

$$\tilde{E}_0 = \{\tilde{u},\ \tilde{u}_s\}_{s\in\mathbb{F}_q} \text{et}$$
$$\tilde{E}_l = \{\tilde{u}_x^0,\ \tilde{u}_y^1,\ \text{pour } x \in \mathbb{F}_q^{l+1},\ y \in \mathbb{F}_q^l\},\ \text{pour } l \geq 1.$$

Remarque 0.2.5. On reprend la remarque *0.2.1* et l'on se donne une arête sortante u_x^0, $x \in \mathbb{F}_q^i$, à distance $i \geq 1$. Elle est envoyée par ω sur l'arête $\omega u_x^0 = (\omega g_x^0)u$. Or on vérifie que $\omega g_x^0 = g_x^1$. Donc, l'arête u_x^0 est envoyée sur l'arête sortante u_x^1 de type 1, à distance $i+1$.

0.2.2. Action de $I(1)$ sur l'arbre de $\mathrm{PGL}_2(F)$.—

0.2.2.1. —

Lemme 0.2.6. – *L'action de $I(1)$ sur les arêtes de $\mathcal{T}$ conserve la distance et l'orientation.*
– *L'action de $I(1)$ sur les arêtes de $\mathcal{T}$ conserve le type des arêtes.*
– *Comme celle de G, l'action de $I(1)$ sur les arêtes de $\mathcal{T}$ transforme un faisceau en un faisceau.*

La première assertion du lemme provient du fait que $I(1)$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(O_F)$ dont l'action sur l'ensemble des arêtes conserve la distance et l'orientation.
Pour prouver la deuxième assertion, on vérifie que l'ensemble des arêtes sortantes à distance 1 est partagé en deux orbites sous l'action de $I(1)$: celle de u d'une part, et d'autre part celle des q arêtes sortantes de type 0, $\{u_s,\ s \in \mathbb{F}_q\}$. Puis on procède par récurrence sur $i \in \mathbb{N}$.

Pour comprendre comment un élément de $I(1)$ donné agit sur une arête de l'arbre, il faut comprendre comment l'addition dans l'anneau O_F se reflète dans $\mathbb{F}_q^{\mathbb{N}}$ *via* l'identification $a : \mathbb{F}_q^{\mathbb{N}} \simeq O_F$. Nous illustrons cette observation au travers des exemples suivants qui décrivent l'action d'éléments de la forme $\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (respectivement $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pi\beta & 1 \end{pmatrix}$), avec $\beta \in O_F$, sur une arête de type 0 (respectivement de type 1).

Soient $i \in \mathbb{N}$, $x = (x_0, ..., x_i) \in \mathbb{F}_q^{i+1}$. On a :

$$\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g_x^0 = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a(x) & \pi^i \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(a(x)-\beta) & \pi^i \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pi\beta & 1 \end{pmatrix} g_x^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pi\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\pi a(x) & \pi^{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\pi(a(x)-\beta) & \pi^{i+1} \end{pmatrix}.$$

Ces égalités montrent que, pour identifier l'image de l'arête u_x^0 (respectivement u_x^1) sous l'action de l'élément $\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, (respectivement $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pi\beta & 1 \end{pmatrix}$), il nous faut déterminer l'élément de $\mathbb{F}_q^{i+1}$ dont l'image par $a : \mathbb{F}_q^{\mathbb{N}} \to O_F$ est égale, modulo $\pi^{i+1}O_F$, à $a(x) - \beta$.

Exemple 0.2.7. On choisit $\beta = -\pi^i[s]$, avec $s \in \mathbb{F}_q$. Par définition de l'application de Teichmüller, on a l'égalité suivante

$$[x_0] + \pi[x_1] + ... + \pi^i[x_i] + \pi^i[s] = [x_0] + \pi[x_1] + ... + \pi^i[x_i + s] \mod \pi^{i+1}O_F.$$

Ainsi, $a(x) - \beta = a(x_0, ..., x_i + s) \mod \pi^{i+1}O_F$ et

$$\begin{pmatrix} 1 & -\pi^i[s] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u_x^0 = u^0_{(x_0,...,x_{i-1},x_i+s)}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\pi^{i+1}[s] & 1 \end{pmatrix} u_x^1 = u^1_{(x_0,...x_{i-1},x_i+s)}.$$

Exemple 0.2.8. On suppose que $i \geq 1$ et l'on choisit $\beta = -\pi^{i-1}[s]$, avec $s \in \mathbb{F}_q$.

1. Supposons que $F = \mathbb{F}_q((t))$. On a l'égalité suivante :
$$[x_0] + ... + \pi^{i-1}[x_{i-1}] + \pi^i[x_i] + \pi^{i-1}[s] = [x_0] + ... + \pi^{i-1}[x_{i-1} + s] + \pi^i[x_i].$$
Ainsi $a(x) - \beta = a(x_0, ..., x_{i-1} + s, x_i)$ et
$$\begin{pmatrix} 1 & -\pi^{i-1}[s] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u_x^0 = u^0_{(x_0,...,x_{i-1}+s,x_i)}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\pi^i[s] & 1 \end{pmatrix} u_x^1 = u^1_{(x_0,...,x_{i-1}+s,x_i)}.$$

2. Supposons que F est l'extension non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$, de corps résiduel $\mathbb{F}_q$. La formule donnée par le lemme 0.2.2 permet de calculer $a(x) - \beta$:
$$a(x) - \beta = a(x_0, ...x_{i-1} + s, x_i + Q(s^{1/p}, x_{i-1}^{1/p}))) \mod \pi^{i+1}O_F, \quad \text{d'où}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -\pi^{i-1}[s] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u_x^0 = u^0_{(x_0,...,x_{i-1}+s,x_i+Q(s^{1/p},x_{i-1}^{1/p}))}, \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\pi^i[s] & 1 \end{pmatrix} u_x^1 = u^1_{(x_0,...,x_{i-1}+s,x_i+Q(s^{1/p},x_{i-1}^{1/p}))}.$$

0.2.2.2. — Puisque l'action de $I(1)$ sur les arêtes de l'arbre conserve la distance, l'orientation, le type des arêtes, et transforme un faisceau en un faisceau, les applications s_A^ϵ et r_A^ϵ introduites par le lemme suivant sont bien définies. Nous énonçons leurs propriétés. On note $\mathbb{F}_q^{(\mathbb{N})}$ la réunion des images de $\mathbb{F}_q^i$, $i \in \mathbb{N}$, dans $\mathbb{F}_q^{\mathbb{N}}$.

Lemme 0.2.9. *Soient $\epsilon \in \{0, 1\}$, $A \in I(1)$. On note $r_A^\epsilon : \mathbb{F}_q^{(\mathbb{N})} \to \mathbb{F}_q^{(\mathbb{N})}$, et $s_A^\epsilon : \mathbb{F}_q^{(\mathbb{N})} \mapsto \mathbb{F}_q$, les applications entièrement déterminées par :*

$$\text{pour tous } i \in \mathbb{N},\ i \geq 1,\ x \in \mathbb{F}_q^i, \qquad r_A^\epsilon(x) \in \mathbb{F}_q^i \text{ et } \begin{cases} Au^\epsilon_{r_A^\epsilon(x)} = u_x^\epsilon \\ Au^\epsilon_{(r_A^\epsilon(x), s_A^\epsilon(x))} = u^\epsilon_{(x,0)}. \end{cases}$$

Elles vérifient les propriétés suivantes. Soient $i \geq 1$ et $x \in \mathbb{F}_q^i$.

1. *La birestriction $r_A^\epsilon : \mathbb{F}_q^i \to \mathbb{F}_q^i$ est bijective.*
2. *Pour tout $s \in \mathbb{F}_q$, on a : $Au^\epsilon_{(r_A^\epsilon(x),\, s_A^\epsilon(x)+s)} = u^\epsilon_{(x,s)}$.*

Ce point 2) précise comment l'action de A transforme le faisceau issu de $u^\epsilon_{r_A^\epsilon(x)}$ en le faisceau issu de u_x^ϵ

3. *Pour tout* $s \in \mathbb{F}_q$, $r_A^\epsilon(x,s) = (r_A^\epsilon(x),\ s_A^\epsilon(x) + s)$.

4. *Soient* $A, B \in I(1)$. *On a* $r_{AB}^\epsilon = r_B^\epsilon \circ r_A^\epsilon$, $s_{AB}^\epsilon = s_B^\epsilon \circ r_A^\epsilon + s_A^\epsilon$. *En particulier,*
$$r_{A^{-1}}^\epsilon = (r_A^\epsilon)^{-1} \quad \text{et} \quad s_{A^{-1}}^\epsilon \circ r_A^\epsilon = -s_A^\epsilon.$$

5. *Si* F *est une extension non ramifiée de* $\mathbb{Q}_p$, *alors l'application*
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}_q & \to & \mathbb{F}_q \\ s & \mapsto & s_A^\epsilon(x, s^p) \end{array}$$
est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à p.

Si $F = \mathbb{F}_q((T))$, *alors l'application*
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}_q & \to & \mathbb{F}_q \\ x & \mapsto & s_A^\epsilon(x, s) \end{array}$$
est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à 1.

6. *Si* $F = \mathbb{Q}_p$ *et* $p \neq 2$, *alors*
$$\sum_{s \in \mathbb{F}_p} s_A^\epsilon(x,s) = s_A^\epsilon(x).$$
Si F *est l'extension non ramifiée de* $\mathbb{Q}_p$ *de corps résiduel* $\mathbb{F}_q$, $q > p$, *ou bien si* $F = \mathbb{F}_q((T))$ *avec* $q \neq 2$, *alors*
$$\sum_{s \in \mathbb{F}_p} s_A^\epsilon(x,s) = 0.$$

Le lemme 0.2.9 est obtenu en analysant l'action de $I(1)$ sur les arêtes de l'arbre $\mathcal{T}$ selon la nature du corps F. Avant de le démontrer, nous l'illustrons par des exemples.
Soient $i \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{F}_q^i$, et $s, t \in \mathbb{F}_q$.

Exemple 0.2.10. • Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & \pi^{i+1}[t] \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. D'après l'exemple *0.2.7* on a $A^{-1}u^0_{(x,s,0)} = u^0_{(x,s,t)}$. Ainsi, $r_A^0(x,s) = (x,s)$, et $s_A^0(x,s) = t$.

• Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pi^{i+2}[t] & 1 \end{pmatrix}$. De même, on a $r_A^1(x,s) = (x,s)$, $\quad s_A^1(x,s) = t$.

Exemple 0.2.11. • Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & \pi^i[t] \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Si $F = \mathbb{F}_q((T))$, alors, d'après l'exemple *0.2.8*, on a $A^{-1}u^0_{(x,s,0)} = u^0_{(x,s+t,0)}$ donc $r_A^0(x,s) = (x, s+t)$, $\quad s_A^0(x,s) = 0$.

2. Si F est l'extension non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ de corps résiduel $\mathbb{F}_q$, alors, d'après l'exemple *0.2.8*,
$$A^{-1}u^0_{(x,s,0)} = u^0_{(x,s+t,\,Q(t^{1/p},s^{1/p}))},$$
où $Q(X,Y)$ est, comme dans le lemme 0.2.2, la réduction modulo p du polynôme à cœfficients entiers $\frac{X^p+Y^p-(X+Y)^p}{p}$. D'où
$$r^0_A(x,s) = (x,s+t), \quad s^0_A(x,s) = Q(t^{1/p},s^{1/p}).$$
Ainsi, l'application $s \mapsto s^0_A(x,s^p)$ est polynômiale de degré $p-1$, inférieur à p.

- Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pi^{i+1}[t] & 1 \end{pmatrix}$. De même, on a les résultats suivants :
  1. Si $F = \mathbb{F}_q((T))$, alors $r^1_A(x,s) = (x,s+t), \quad s^1_A(x,s) = 0$.
  2. Si F est l'extension non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ de corps résiduel $\mathbb{F}_q$, alors
$$r^1_A(x,s) = (x,s+t), \quad s^1_A(x,s) = Q(t^{1/p},s^{1/p}).$$

Les exemples précédents illustrent la propriété 5. annoncée par le lemme. Pour y lire aussi la propriété 6., nous faisons la remarque suivante, qui interviendra par ailleurs dans la preuve de cette propriété.

Remarque 0.2.12. Soit $k \in \{1,...,q-1\}$, alors on a
$$\begin{array}{rcll} \sum_{x\in\mathbb{F}_q} x^k & = & 0 & \text{si} \quad k \neq q-1, \\ \sum_{x\in\mathbb{F}_q} x^k & = & -1 & \text{si} \quad k = q-1. \end{array}$$

Soit $t \in \mathbb{F}_q$. Le polynôme $Q(t,X)$ de degré $p-1$ a pour cœfficient dominant $-t$. On déduit des égalités précédentes que
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } q = p, \text{ alors } \sum\limits_{s\in\mathbb{F}_q} Q(t,s) = t, \\ \text{Si } q > p, \text{ alors } \sum\limits_{s\in\mathbb{F}_q} Q(t,s) = 0. \end{array} \right. \tag{7}$$

- Nous reprenons la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & \pi^i[t] \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et l'on suppose maintenant que $i \geq 1$. Nous voulons calculer la somme des $s^0_A(x,s)$, pour s parcourant $\mathbb{F}_q$.
  1. Si $F = \mathbb{F}_q((T))$, elle est clairement nulle et la propriété 6 est vérifiée.
  2. Si F est l'extension non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ de corps résiduel $\mathbb{F}_q$, il s'agit de calculer la somme pour s parcourant $\mathbb{F}_q$ des $Q(t^{1/p},s^{1/p})$, ce qui revient à calculer la somme des $Q(t^{1/p},s)$. D'après la remarque *0.2.12*, on distingue deux cas :
  – si $q > p$, on a $\sum_{s\in\mathbb{F}_q} Q(t^{1/p},s) = 0$,
  – si $q = p$, alors $t^{1/p} = t$ et $\sum_{s\in\mathbb{F}_q} Q(t,s) = t$. Or, $s^0_A(x) = t$ d'après l'exemple *0.2.10*.
  Dans les deux cas, la propriété 6 est vérifiée.

Preuve du Lemme 0.2.9. — Pour montrer certaines des assertions du lemme 0.2.9, nous nous ramènerons au cas de matrices élémentaires du type

$$E_0(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix},\ E^+(\beta) = \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ E^-(\gamma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pi\gamma & 1 \end{pmatrix}$$

avec $\alpha \in 1 + \pi O_F$, $\beta, \gamma \in O_F$, en remarquant— c'est la décomposition d'Iwahori standard— que tout élément $A = \begin{pmatrix} a & b \\ \pi c & d \end{pmatrix} \in I(1)$, s'écrit $A = aE^-(\pi c a^{-1})E_0(a^{-1}(d - \pi c b a^{-1}))E^+(ba^{-1})$.

Pour E une matrice élémentaire, nous établissons deux propriétés :

- Soient $i \geq 1$, $s \in \mathbb{F}_q$, $y \in \mathbb{F}_q^{i+1}$, et E une matrice élémentaire. On a l'égalité

$$\begin{pmatrix} 1 & -\pi^i[s] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} E^{-1} u_y^0 = E^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -\pi^i[s] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u_y^0. \tag{8}$$

  Pour la démontrer nous vérifions que le produit

$$g_y^{0-1} \begin{pmatrix} 1 & -\pi^i[s] \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} E \begin{pmatrix} 1 & -\pi^i[s] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} E^{-1} g_y^0 \tag{9}$$

  appartient à $I(1)$:

  (i) pour $E = E^+(\beta)$, il est égal à la matrice identité ;

  (ii) pour $E = E_0(\alpha)$, il est égal à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (1-\alpha^{-1})[s] & 1 \end{pmatrix}$ qui est un élément de $I(1)$ car $1 - \alpha^{-1}$ appartient à πO_F ;

  (iii) pour $E = E^-(\gamma)$, il est égal, modulo une matrice à cœfficients dans $\pi^2 O_F$, à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2\pi\gamma[s]a(y) & 1 \end{pmatrix}$ et appartient donc à $I(1)$.

- L'arête $u^0_{(y,0)}$ appartient au faisceau issu de u^0_y. Puisque l'action de G transforme un faisceau en un faisceau, il existe $\phi_E(y,s) \in \mathbb{F}_q$ tel que

$$\begin{pmatrix} 1 & -\pi^i[s] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} E^{-1} u^0_{(y,0)} = E^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -\pi^i[s] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u^0_{(y,\phi_E(y,s))}. \tag{10}$$

  Nous montrons que l'application $s \mapsto \phi_E(y,s)$ est affine. D'après la remarque *0.2.4*, on a $u^0_{(y,*)} = g^0_y \omega g^0_* u$ pour $* \in \mathbb{F}_q$. Ainsi $\phi_E(y,s)$ est l'unique élément de $\mathbb{F}_q$ tel que le produit de matrices

$$(\omega g^0_{\phi_E(y,s)})^{-1} g_y^{0-1} \begin{pmatrix} 1 & -\pi^i[s] \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} E \begin{pmatrix} 1 & -\pi^i[s] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} E^{-1} g^0_y \omega g^0_0 \tag{11}$$

  appartient à I. On effectue le calcul de (11) en multipliant (9) à gauche par $(\omega g^0_{\phi_E(y,s)})^{-1}$ et à droite par ωg^0_0.

  (i) Pour $E = E^+(\beta)$, le produit (11) est égal à l'identité pour $\phi_E(y,s) = 0$.

  (ii) Pour $E = E_0(\alpha)$, le produit (11) est égal à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ [\phi_E(y,s)] + \pi^{-1}(1-\alpha^{-1})[s] & 1 \end{pmatrix}$ d'après le calcul précédent. Donc, si $u \in \mathbb{F}_q$ désigne l'élément tel que $\alpha^{-1} = 1 + \pi[u] \mod \pi^2 O_F$, $\phi_E(y,s) = us$ convient.

(iii) Pour $E = E^-(\gamma)$, le produit (11) est égal, modulo une matrice à cœfficients dans $\pi^2 O_F$, à $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ [\phi_E(y,s)] - 2\gamma[s]a(y) & 1 \end{pmatrix}$. Donc, si y_0 désigne la première coordonnée de y et $v \in \mathbb{F}_q$ l'élément tel que $\gamma = [v] \mod \pi O_F$, $\phi_E(y,s) = 2svy_0$ convient.

Nous démontrons maintenant les assertions du lemme. Soit A un élément de $I(1)$ (non nécessairement élémentaire). Les applications r_A^ϵ et s_A^ϵ sont bien définies car l'action $I(1)$ stabilise l'ensemble des arêtes de type ϵ et conserve la distance et l'orientation (lemme 0.2.6). Pour simplifier la démonstration de leurs propriétés, nous allons considérer que $\epsilon = 0$; les résultats obtenus se transposeront alors automatiquement au cas $\epsilon = 1$. En effet, pour tous $i \geq 1$, $x \in \mathbb{F}_q^i$, on a $\omega^{-1} u_x^1 = u_x^0$ d'après la remarque *0.2.4*. Ainsi,

$$r_A^1(x) = r^0_{\omega^{-1}A\omega}(x), \;\; s_A^1(x) = s^0_{\omega^{-1}A\omega}(x).$$

Soient $i \geq 1$, $x \in \mathbb{F}_q^i$, $s \in \mathbb{F}_q$.

1. Le fait que la birestriction $r_A^0 : \mathbb{F}_q^i \to \mathbb{F}_q^i$ est bijective provient du fait que pour tout $x \in \mathbb{F}_q^i$, $r_A^0(x)$ est entièrement déterminé par $A u^0_{r_A(x)} = u_x^0$.

2. Puisque l'action de $I(1)$ conserve le type arêtes, la distance et l'orientation, l'égalité (8), démontrée pour les matrices élémentaires, est vraie pour tout produit de matrices élémentaires. Du fait de la décomposition d'Iwahori standard, la matrice A vérifie donc l'égalité (8), que l'on écrit pour $y = (x, 0)$:
$$\begin{pmatrix} 1 & -\pi^i[s] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A^{-1} u^0_{(x,0)} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -\pi^i[s] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u^0_{(x,0)},$$
c'est à dire, d'après l'exemple *0.2.7* qui dit que $u^0_{(x,s+*)} = \begin{pmatrix} 1 & -\pi^i[s] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u^0_{(x,*)}$, pour $* \in \mathbb{F}_q$,
$$\begin{pmatrix} 1 & -\pi^i[s] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A^{-1} u^0_{(x,0)} = A^{-1} u^0_{(x,s)},$$
puis sachant que $u^0_{(r_A^0(x), s_A^0(x))} = A^{-1} u^0_{(x,0)}$,
$$u^0_{(r_A^0(x), s_A^0(x)+s)} = A^{-1} u^0_{(x,s)}.$$

3. Par définition de l'application r_A^0, on a $A u^0_{r_A^0(x,s)} = u^0_{(x,s)}$. Or, d'après la propriété 2,
$$u^0_{(x,s)} = A u^0_{(r_A^0(x), s_A^0(x)+s)}.$$
On en déduit que $r_A^0(x,s) = (r_A^0(x), s_A^0(x) + s)$.

4. Soit $B \in I(1)$. On a $u^0_{(r_{AB}^0(x), s_{AB}^0(x))} = (AB)^{-1} u^0_{(x,0)} = B^{-1} u^0_{(r_A^0(x), s_A^0(x))}$. D'après la propriété 2,
$$B^{-1} u^0_{(r_A^0(x), s_A^0(x))} = u^0_{(r_B^0 \circ r_A^0(x),\, s_B^0 \circ r_A^0(x) + s_A^0(x))}.$$
On en déduit que
$$r_{AB}^0 = r_B^0 \circ r_A^0, \text{ et } s_{AB}^0 = s_B^0 \circ r_A^0 + s_A^0.$$
Pour la matrice identité notée Id, on a $r_{Id}(x) = x$ et $s_{Id}(x) = 0$. Ainsi,
$$r_{A^{-1}}^0 = (r_A^0)^{-1} \text{ et } s_{A^{-1}}^0 \circ r_A^0 = -s_A^0.$$

5. Supposons l'assertion 5 vérifiée pour deux éléments B et C de $I(1)$. Par la propriété 4, $s^0_{BC}(x,s) = s^0_C \circ r^0_B(x,s) + s^0_B(x,s)$. Or, la propriété 3 dit que $r^0_B(x,s) = (r_B(x), s_B(x)+s)$. Donc l'assertion 5 est vérifiée pour le produit BC.

   Par conséquent, il suffit de démontrer la propriété 5 pour les matrices élémentaires. Soit E une matrice élémentaire. Nous avons vu au début de cette preuve qu'il existe un élément $\phi_E(x,0,s)$ qui dépend de s de façon affine tel que :

$$\begin{pmatrix} 1 & -\pi^i[s] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} E^{-1} u^0_{(x,0,0)} = E^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -\pi^i[s] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u^0_{(x,0,\phi_E(x,0,s))}. \tag{12}$$

   – Supposons que $F = \mathbb{F}_q((T))$. D'après l'exemple *0.2.8*, le terme de droite de l'égalité (12) est $E^{-1}u^0_{(x,s,\phi_E(x,0,s))}$, qui d'après la propriété 2, est égal à $u^0_{(r^0_E(x,s),\, s^0_E(x,s)+\phi_E(x,0,s))}$.

     Etudions le terme de gauche. Par définition, on a $E^{-1}u^0_{(x,0,0)} = u^0_{(r^0_E(x,0), s^0_E(x,0))}$. Mais, d'après l'assertion 3., $r^0_E(x,0) = (r^0_E(x), s^0_E(x))$. Par conséquent, et d'après l'exemple *0.2.8*, le terme de gauche de l'égalité est $u^0_{(r^0_E(x),\, s+s^0_E(x),\, s^0_E(x,0))}$.

     On en déduit que
$$s^0_E(x,s) = -\phi_E(x,0,s) + s^0_E(x,0),$$
     ainsi, l'application $s \mapsto s^0_E(x,s)$ est bien une application affine.

   – Supposons que F est l'extension non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ de corps résiduel $\mathbb{F}_q$.

     D'après l'exemple *0.2.8*, et puisque $Q(s^{1/p},0) = 0$, le terme de droite de l'égalité (12) est $E^{-1}u^0_{(x,s,\phi_E(x,0,s))}$, qui d'après la propriété 2., n'est autre que $u^0_{(r^0_E(x,s),\, s^0_E(x,s)+\phi_E(x,0,s))}$.

     Etudions le terme de gauche. Par définition, on a $E^{-1}u^0_{(x,0,0)} = u^0_{(r^0_E(x,0), s^0_E(x,0))}$. Mais d'après l'assertion 3., on a $r^0_E(x,0) = (r^0_E(x), s^0_E(x))$. Par conséquent, et d'après l'exemple *0.2.8*, le terme de gauche de l'égalité est $u^0_{(r^0_E(x),\, s+s^0_E(x),\, s^0_E(x,0)+Q(s^{1/p}, s^0_E(x)^{1/p}))}$.

     On en déduit que
$$s^0_E(x,s) = -\phi_E(x,0,s) + s^0_E(x,0) + Q(s^{1/p}, s^0_E(x)^{1/p}) \tag{13}$$
     ainsi, l'application $s \mapsto s^0_E(x,s^p)$ est bien une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à p.

6. – Supposons que $F = \mathbb{F}_q((T))$ avec $q > 2$. D'après la propriété 5., $s \mapsto s^0_A(x,s)$ est une fonction polynomiale en s de degré inférieur ou égal à 1. Puisque $1 < q-1$, la somme pour s parcourant $\mathbb{F}_q$ de $s^0_A(x,s)$ est nulle d'après la remarque *0.2.12*.

   – Supposons que F est l'extension non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ de corps résiduel $\mathbb{F}_q$, avec $q > p$. Puisque $\mathbb{F}_q$ est parfait, sommer les $s^0_A(x,s)$ pour s parcourant $\mathbb{F}_q$ revient à sommer les $s^0_A(x,s^p)$ pour s parcourant $\mathbb{F}_q$. La propriété 5 dit que l'application $s \mapsto s^0_A(x,s^p)$ est polynomiale de degré inférieur ou égal à p. Puisque q est une puissance de p et que $q > p$, on a $q-1 > p$, donc la somme pour s parcourant $\mathbb{F}_q$ de $s^0_A(x,s^p)$ est nulle d'après la remarque *0.2.12*.

– Supposons que $F = \mathbb{Q}_p$, $p \neq 2$.

Supposons l'assertion 6. vérifiée pour deux éléments B et C de $I(1)$. On a alors, d'après les propriétés 3. et 4.,

$$s^0_{BC}(x,s) = s^0_C(r^0_B(x,s)) + s^0_B(x,s) = s^0_C(r^0_B(x), s^0_B(x) + s) + s^0_B(x,s).$$

Sommant cette égalité pour s parcourant $\mathbb{F}_p$, on a

$$\sum_{s\in\mathbb{F}_p} s^0_{BC}(x,s) = \sum_{s\in\mathbb{F}_p} s^0_C(r^0_B(x),s) + \sum_{s\in\mathbb{F}_p} s^0_B(x,s).$$

Puisqu'on a supposé l'assertion 6. vérifiée pour B et C, et en appliquant à nouveau la propriété 4.,

$$\sum_{s\in\mathbb{F}_p} s^0_{BC}(x,s) = s^0_C(r^0_B(x)) + s^0_B(x) = s^0_{BC}(x).$$

Donc le produit BC vérifie l'assertion 6.

Ainsi, il suffit de démontrer la propriété 6. pour une matrice E élémentaire. Dans ce cas, on dispose de l'égalité (13) qui s'écrit, puisque $q = p$,

$$s^0_E(x,s) = -\phi_E(x,0,s) + s^0_E(x,0) + Q(s, s^0_E(x)). \tag{13}$$

Puisque $s \mapsto \phi_E(x,0,s)$ est polynomiale de degré inférieur ou égal à 1 et que $p-1>1$, la somme pour s parcourant $\mathbb{F}_p$ de $\phi_E(x,0,s)$ est nulle d'après la remarque *0.2.12*.

La remarque *0.2.12* dit aussi que la somme pour s parcourant $\mathbb{F}_p$ de $Q(s, s^0_E(x))$ est égale à $s^0_E(x)$. Ainsi,

$$\sum_{s\in\mathbb{F}_p} s^0_E(x,s) = \sum_{s\in\mathbb{F}_p} Q(s, s^0_E(x)) = s^0_E(x).$$

□

PARTIE I

LE FONCTEUR DES INVARIANTS SOUS L'ACTION DU PRO-p-IWAHORI DE $\mathrm{GL}_2(F)$

CHAPITRE 1

ETUDE DU MODULE UNIVERSEL RELATIF AU PRO-p-IWAHORI DE $\mathrm{GL}_2(F)$

On note $G = \mathrm{GL}_2(F)/\pi^{\mathbb{Z}}$. On identifie les sous-groupes d'Iwahori et du pro-p-Iwahori I, $I(1)$ ainsi que le compact maximal $\mathrm{GL}_2(O_F)$ avec leur image dans G. On désigne par Z le centre de $\mathrm{GL}_2(F)$. Le quotient $I\backslash G$ s'identifie au quotient $IZ\backslash\mathrm{GL}_2(F)$.

Nous démontrons le résultat suivant :

Théorème 1.0.13. – *Le $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,I)$-module universel $\overline{\mathbb{F}}_p[I\backslash G]$ est plat.*

– *Le $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,I(1))$-module universel $\overline{\mathbb{F}}_p[I(1)\backslash G]$ est plat si et seulement si le cardinal du corps résiduel de F est premier, égal à p. Dans ce cas, c'est même un $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,I(1))$-module projectif et fidèlement plat.*

1.1. Préliminaires

1.1.1. Décomposition de la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre de Hecke du pro-p-Iwahori de G.— Soit $\gamma \in \Gamma$ l'orbite sous l'action de $\mathfrak{S}_2$ d'un caractère $\chi \in \hat{T}(\mathbb{F}_q)$. On considère χ comme un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère de I trivial sur $I(1)$ et l'on désigne par σ_γ la représentation de I définie par $\sigma_\gamma = \chi$ si $|\gamma| = 1$, $\sigma_\gamma = \chi \oplus \tau\chi$ si $|\gamma| = 2$, où τ est l'élément non trivial de $\mathfrak{S}_2$.

Proposition 1.1.1. – *Soit $\chi' : I \to \overline{\mathbb{F}}_p^{\,*}$. Si χ et χ' ne sont pas conjugués sous l'action de $\mathfrak{S}_2$, il n'existe pas d'entrelacement non trivial entre les $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-modules $ind_I^G\chi$, $ind_I^G\chi'$.*

– *On a un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-modules*

$$\begin{array}{ccc} ind_I^G\tau\chi & \longrightarrow & ind_I^G\chi \\ f_{I,\tau\chi} & \longmapsto & \omega f_{I,\chi}. \end{array} \tag{14}$$

Démonstration. — Ce sont les résultats de la proposition 2.1 de [**43**]. Nous rappelons la preuve de la seconde assertion. L'élément ω défini au paragraphe 0.1.4 normalise le sous-groupe d'Iwahori et l'action par conjugaison par ω sur un élément de I est donnée par

$$\omega \begin{pmatrix} a & d \\ \pi c & b \end{pmatrix} \omega^{-1} = \begin{pmatrix} b & c \\ \pi d & a \end{pmatrix}, \text{ pour } a, b \in O_F^*,\ c, d \in O_F.$$

Elle permute les éléments de la diagonale. Ainsi, un élément de I agit sur $\omega f_{I,\chi}$ par le caractère $\tau\chi$ et le morphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-module (14) est bien défini. C'est un isomorphisme car ω est inversible.

□

Remarque 1.1.2. – Si $|\gamma| = 1$, l'espace des $I(1)$-invariants de $ind_I^G\chi$ est égal à la composante (I,χ)-isotypique de $ind_I^G\chi$, d'après la première assertion de la proposition. Par définition de l'algèbre de Hecke de χ, c'est le $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,\chi)$-module libre de base $f_{I,\chi}$.

– Si $|\gamma| = 2$, l'espace des $I(1)$-invariants de $ind_I^G\chi$ est égal à la somme directe de sa composante (I,χ)-isotypique et de sa composante $(I,\tau\chi)$-isotypique, d'après la première assertion de la proposition. La première est, par définition de l'algèbre de Hecke de χ, égale au sous-$\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,\chi)$-module libre de $ind_I^G\chi$ engendré par $f_{I,\chi}$. D'après la seconde assertion de la proposition, son image sous l'action ω est égale à la composante $(I,\tau\chi)$-isotypique de $ind_I^G\chi$. Par conséquent, le $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,\chi)$-module libre de base $\{f_{I,\chi}, \omega f_{I,\chi}\}$ est égal à l'espace des $I(1)$-invariants de $ind_I^G\chi$.

Proposition 1.1.3. *La $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre de Hecke $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,I(1))$ est isomorphe au produit, pour γ parcourant Γ, des $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbres de Hecke $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,\sigma_\gamma)$. Plus précisément, il existe une famille $(\epsilon_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ d'idempotents centraux orthogonaux telle que*

$$1 = \sum_{\gamma\in\Gamma} \epsilon_\gamma \in \mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,I(1)) \qquad et \qquad \mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,\sigma_\gamma) \simeq \mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,I(1))\epsilon_\gamma.$$

Démonstration. — C'est la proposition 3.1 *loc.cit.* Sa preuve s'appuie sur la décomposition de l'induite compacte du caractère trivial en la somme directe de $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-modules

$$ind_{I(1)}^G \mathbf{1} \simeq \bigoplus_{\chi\in\hat{T}(\mathbb{F}_q)} ind_I^G\chi = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} ind_I^G\sigma_\gamma, \tag{15}$$

obtenue du fait que $q-1$ est inversible dans $\overline{\mathbb{F}}_p$ et que $\overline{\mathbb{F}}_p$ contient une racine $q-1^{\text{ème}}$ de l'unité. De plus, puisqu'il n'y a pas de morphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-modules non nul entre $ind_I^G\sigma_\gamma$ et $ind_I^G\sigma_{\gamma'}$ si $\gamma \neq \gamma'$ (proposition 1.1.1), cette décomposition se traduit par l'écriture de la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre de Hecke du pro-p-Iwahori en un produit d'algèbres de Hecke :

$$\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,I(1)) \simeq \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,\sigma_\gamma).$$

On note ϵ_χ l'élément de $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,I(1))$ égal à la projection $ind_{I(1)}^G\mathbf{1} \twoheadrightarrow ind_I^G\chi$. L'idempotent central $\epsilon_\gamma \in \mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,I(1))$ de la proposition est la projection $ind_{I(1)}^G\mathbf{1} \twoheadrightarrow ind_I^G\sigma_\gamma$. Il est égal à ϵ_χ si γ est de cardinal 1, à $\epsilon_\chi + \epsilon_{\tau\chi}$ si γ est de cardinal 2.

□

1.1.2. — Nous étudions maintenant la partie régulière de l'algèbre de Hecke du pro-p-Iwahori. Soit $\chi \in \hat{T}(\mathbb{F}_q)$ un caractère d'orbite γ sous l'action de $\mathfrak{S}_2$ que l'on suppose régulier, c'est-à-dire que γ est de cardinal 2. Remarquons que cela suppose que $q > 2$.

La proposition 1.1.1 dit que les $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-modules $ind_I^G \chi$ et $ind_I^G \tau\chi$ sont isomorphes. On en déduit que l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, \sigma_\gamma)$ est isomorphe à l'algèbre des matrices de taille 2 sur l'anneau $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, \chi)$: les algèbres de Hecke $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, \sigma_\gamma)$ et $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, \chi)$ sont Morita équivalentes ([**17**, §3D]). Explicitement, les foncteurs suivants constituent des équivalences quasi-inverses entre les catégories de modules (à gauche) sur $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, \sigma_\gamma)$ et $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, \chi)$:

$$\begin{array}{rcl} Mod(\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, \sigma_\gamma)) & \longmapsto & Mod(\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, \chi)) \\ M & \longmapsto & Hom_{\overline{\mathbb{F}}_p[G]}(ind_I^G \sigma_\gamma, ind_I^G \chi) \otimes_{\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,\sigma_\gamma)} M \end{array} \tag{16}$$

$$\begin{array}{rcl} Mod(\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, \chi)) & \longmapsto & Mod(\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, \sigma_\gamma)) \\ M & \longmapsto & Hom_{\overline{\mathbb{F}}_p[G]}(ind_I^G \chi, ind_I^G \sigma_\gamma) \otimes_{\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,\chi)} M. \end{array} \tag{17}$$

Remarque 1.1.4. En particulier, le $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, \chi)$-module à gauche correspondant, par équivalence de Morita, au $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, \sigma_\gamma)$-module à gauche $ind_I^G \sigma_\gamma$ n'est autre que $ind_I^G \chi$ puisqu'on a l'isomorphisme

$$\begin{array}{ccccc} Hom_{\overline{\mathbb{F}}_p[G]}(ind_I^G \chi, ind_I^G \sigma_\gamma) & \otimes_{\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,\chi)} & ind_I^G \chi & \xrightarrow{\sim} & ind_I^G \sigma_\gamma \\ f & \otimes & x & \longmapsto & f(x). \end{array} \tag{18}$$

L'équivalence de Morita préservant la platitude, le $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, \sigma_\gamma)$-module $ind_I^G \sigma_\gamma$ est plat si et seulement si le $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, \chi)$-module $ind_I^G \chi$ est plat.

Rappelons pourquoi l'équivalence de Morita préserve la platitude. Soient A et B deux algèbres Morita équivalentes. Soit (P, Q) une paire de Morita pour A et B au sens de [**17**, §3D] : P est un A-module à gauche et un B-module à droite, Q est un B-module à gauche et un A-module à droite, et l'on a les isomorphismes de bimodules $P \otimes_B Q \simeq A$, $Q \otimes_A P \simeq B$. En particulier, d'après [**17**, lemme (3.51)], Q est un B-module à gauche projectif.
Soit M un A-module à gauche que l'on suppose plat. Nous voulons montrer que le B-module à gauche $Q \otimes_A M$ lui correspondant par équivalence de Morita est plat. Soit $X \hookrightarrow Y$ un morphisme de B-modules à droite injectif. Par platitude du B-module projectif Q, il induit un morphisme injectif de A-modules à droite

$$X \otimes_B Q \hookrightarrow Y \otimes_B Q,$$

qui lui même, par platitude du A-module à gauche M, induit une application injective

$$(X \otimes_B Q) \otimes_A M \hookrightarrow (Y \otimes_B Q) \otimes_A M,$$

c'est-à-dire, par associativité du produit tensoriel, une application linéaire injective

$$X \otimes_B (Q \otimes_A M) \hookrightarrow Y \otimes_B (Q \otimes_A M).$$

Donc, $Q \otimes_A M$ est un B-module plat.

1.1.3. — Nous décrivons la démarche suivie dans le premier chapitre.

D'après la proposition 1.1.3 et sa preuve, le $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I(1))$-module $\overline{\mathbb{F}}_p[I(1)\backslash G]$ est plat si et seulement si

$$ind_I^G \sigma_\gamma \text{ est un } \mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, \sigma_\gamma)\text{-module plat pour tout } \gamma \in \Gamma.$$

– Lorsque γ est de cardinal 1, on dit que l'on est dans le cas Iwahori et l'on est ramené, quitte à tordre par un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère de G, à l'étude de la platitude du $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I)$-module universel $\overline{\mathbb{F}}_p[I\backslash G]$. C'est l'objet de la partie 1.2. On y montre que $\overline{\mathbb{F}}_p[I\backslash G]$ est un $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I)$-module projectif. De plus, son sous-$\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I)$-module constitué par ses $I(1)$-invariants en est un facteur direct.

– Lorsque $\gamma = \{\chi, \chi\tau\}$ est de cardinal 2, c'est-à-dire que l'on est dans le cas régulier, on étudie la platitude du $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, \sigma_\gamma)$-module $ind_I^G \sigma_\gamma$. D'après la remarque *1.1.4*, l'équivalence de Morita préserve la platitude et l'on est ainsi ramené à l'étude de la platitude $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, \chi)$-module $ind_I^G \chi$, à laquelle la partie 1.3 est consacrée : on y montre que $ind_I^G \chi$ est un $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, \chi)$-module plat si et seulement si $q = p$.

  Lorsque $q = p$, on montre de plus que $ind_I^G \chi$ est un $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, \chi)$-module libre et que son sous-$\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, \chi)$-module constitué par ses $I(1)$-invariants en est un facteur direct (§1.3.5). Grâce à l'isomorphisme de Morita (18) on transpose ces résultats à $ind_I^G \sigma_\gamma$: lorsque $q = p$, c'est un $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, \sigma_\gamma)$-module libre et son sous-module constitué par ses $I(1)$-invariants en est un facteur direct.

Rassemblant ces résultats, on aura ainsi montré que le $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I(1))$-module $\overline{\mathbb{F}}_p[I(1)\backslash G]$ est plat si et seulement si $q = p$.

Dans le cas où $q = p$, on aura même prouvé que c'est un $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I(1))$-module projectif et que son sous-module constitué par ses $I(1)$-invariants en est un facteur direct. Or ce sous-module est, par définition, isomorphe à l'algèbre de Hecke du pro-p-Iwahori de G. Ainsi, pour tout idéal propre à droite $\mathcal{A}$ de $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I(1))$, l'espace vectoriel quotient $\overline{\mathbb{F}}_p[I(1)\backslash G]/\mathcal{A}\overline{\mathbb{F}}_p[I(1)\backslash G]$, contient une copie du quotient de $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I(1))$ par $\mathcal{A}$. Ainsi, il ne saurait être nul. Cela signifie exactement que $\overline{\mathbb{F}}_p[I(1)\backslash G]$ est un $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I(1))$-module fidèlement plat, d'après [**9**, Chapitre 1 §3, n°1 Proposition 1].

1.2. Platitude du module universel $\overline{\mathbb{F}}_p[IZ\backslash \mathrm{GL}_2(F)]$ sur l'algèbre de Hecke-Iwahori

On désigne par H la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre de Hecke-Iwahori $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I)$. Elle est engendrée par les éléments S et T avec les relations $S(S+1) = 0$, $T^2 = 1$, où S et T sont respectivement les éléments de H de support $I\tau I$ et $I\omega$ ([**43**, 1.1]). Elle se décompose dès lors en somme directe de H-modules projectifs $H = HS \oplus H(S+1)$.

Le $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-module $\overline{\mathbb{F}}_p[I\backslash G]$ est engendré par la fonction caractéristique $\mathbf{1}_I$ de I. C'est un élément invariant sous l'action de I. Une $\overline{\mathbb{F}}_p$-base de $\overline{\mathbb{F}}_p[I\backslash G]$ est donnée par l'ensemble des $g.\mathbf{1}_I$ où g parcourt un système de représentants des classes à gauche G/I (§0.1.2.2).
Il existe une unique identification entre les arêtes de l'arbre $\mathcal{T}$ et une base de l'espace $\overline{\mathbb{F}}_p[I\backslash G]$ telle que l'arête u (§0.2.1.1) corresponde à $\mathbf{1}_I$ et qui soit compatible avec l'action de G. On considérera dorénavant les éléments de $\overline{\mathbb{F}}_p[I\backslash G]$ comme des combinaisons linéaires d'arêtes de l'arbre.

Remarque 1.2.1. Par définition de l'algèbre de Hecke H, l'espace des I-invariants de $\overline{\mathbb{F}}_p[I\backslash G]$ est égal au H-module libre base u.

Théorème 1.2.2. *Il existe un ensemble V d'arêtes de l'arbre $\mathcal{T}$ tel que le H-module $\overline{\mathbb{F}}_p[I\backslash G]$ est isomorphe à la somme directe de modules projectifs*

$$\overline{\mathbb{F}}_p[I\backslash G] \quad = \quad Hu \oplus \bigoplus_{v\in V} HSv \quad \simeq \quad H \oplus \bigoplus_{v\in V} HS.$$

Corollaire 1.2.3. *Le H-module $\overline{\mathbb{F}}_p[I\backslash G]$ est un H-module fidèlement plat.*

La suite de la partie 1.2 est consacrée à la démonstration de ce théorème.

1.2.1. Action de la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre de Hecke-Iwahori de G sur $\overline{\mathbb{F}}_p[I\backslash G]$.— Les actions des générateurs S et T de H sur les arêtes de l'arbre $\mathcal{T}$ sont entièrement déterminées par les données de $S(u)$ et $T(u)$ car l'action de H commute à celle de G. Pour calculer ces dernières, on utilise les observations du paragraphe 0.1.2.2.

Rappelons la description géométrique des actions de S et T.
– On a $T(u) = \omega\, u = \tilde{u}$. Donc, l'action de T sur une arête renverse son orientation.
– On a la décomposition ([**43**, A.3]) :

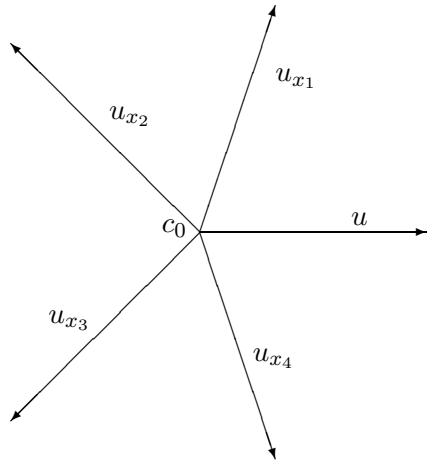
$$I\tau I = \bigcup_{s\in\mathbb{F}_q} I\tau \begin{pmatrix} 1 & [s] \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \bigcup_{s\in\mathbb{F}_q} I \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & [s] \end{pmatrix} = \bigcup_{s\in\mathbb{F}_q} I(g_s^0)^{-1}$$

Ainsi $S(u) = \sum_{s\in\mathbb{F}_q} g_s^0 u = \sum_{s\in\mathbb{F}_q} u_s$.

Ainsi, l'action de S envoie une arête v d'origine c sur la somme des q arêtes d'origine c distinctes de v.

Pour $q = 4$:

$S(u) = u_{x_1} + u_{x_2} + u_{x_3} + u_{x_4}$



Cette description géométrique des actions de S et T est la clef des preuves de la partie 1.2. Nous l'utiliserons à maintes reprises sous les formes suivantes :

Soit v une arête de l'arbre d'origine c.

G₁ : L'action de $(S+1)$ transforme v en la somme des $q+1$ arêtes d'origine c.

G₂ : L'action de ST transforme v en la somme des q arêtes adjacentes à v.

G₃ : Soit v' une arête adjacente à v. On a

$$(1+S)Tv = (1+S)v'.$$

1.2.2. Une base du $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel $\overline{\mathbb{F}}_p[I\backslash G]$.— Une $\overline{\mathbb{F}}_p$-base de $\overline{\mathbb{F}}_p[I\backslash G]$ est donnée par l'ensemble des arêtes de l'arbre $\mathcal{T}$. Nous allons en donner une autre en construisant les ensembles V_l de la manière suivante.

– $V_0 := \{u, u_s, s \in \mathbb{F}_q\}$ est l'ensemble des $q+1$ arêtes sortantes à distance 1.

– Construisons V_l, $l \geq 1$, un ensemble d'arêtes sortantes à distance $l+1$.

Soit v, une arête sortante à distance l. Nous avons vu (§0.2.1.3), que le faisceau issu de v est indexé par $\mathbb{F}_q$ de la façon suivante : soient $\epsilon \in \{0,1\}$, $x \in \mathbb{F}_q^{l-\epsilon}$, uniques, tels que $v = u_x^\epsilon$. Le faisceau issu de v est l'ensemble des q arêtes

$$\mathcal{F}_v = \{u^\epsilon_{(x,s)},\ s \in \mathbb{F}_q\}.$$

Nous appelons l'arête $u^\epsilon_{(x,0)}$ l'arête *exceptionnelle* issue de $v = u_x^\epsilon$.

Privant le faisceau issu de v de son arête exceptionnelle on obtient l'ensemble noté V_v :

$$V_v = \{u^\epsilon_{(x,s)},\ s \in \mathbb{F}_q^*\}.$$

On pose alors

$$V_l := \bigcup_v V_v,$$

où v parcourt l'ensemble des arêtes sortantes à distance l.

Les cardinaux des ensembles considérés sont respectivement :

$$|V_0| = q+1\,;\ \text{pour } l \in \mathbb{N},\ |V_{l+1}| = (q+1)(q^{l+1}-q^l).$$

La réunion des $(V_l)_{l\in\mathbb{N}}$ est l'ensemble des arêtes sortantes de l'arbre, privé des demi-droites d'origine un sommet à distance supérieure ou égale à 1, constituées par des arêtes exceptionnelles.

Par la suite, nous dirons aussi de l'arête u_0 d'origine c_0 qu'elle est exceptionnelle.

Rappelons que E_l désigne l'ensemble des arêtes sortantes à distance $l+1$.

Lemme 1.2.4. *Soit $l \in \mathbb{N}$.*
L'ensemble $\{(ST)^i v,\ v \in V_{l-i}\}_{0\le i\le l}$ est une base de l'espace vectoriel de base E_l.
L'ensemble $\{T(ST)^i v,\ v \in V_{l-i}\}_{0\le i\le l}$ est une base de l'espace vectoriel de base $\tilde{E}_l$.

Démonstration. — Posons $X_l = \{(ST)^i v,\ v \in V_{l-i}\}_{0\le i\le l}$.

Notons tout d'abord, grâce à $\mathbf{G_2}$, que pour tout $i \in \{0,..,l\}$ et toute arête $v \in V_{l-i}$, l'élément $(ST)^i v$ est la somme des q^i arêtes sortantes à distance $l+1$ de la branche de v.

Ainsi, tout élément de X_l appartient à l'espace vectoriel engendré par E_l.

On en déduit aussi que pour i, j, éléments distincts de $\{0,..,l\}$, les ensembles $\{(ST)^i v,\ v \in V_{l-i}\}$ et $\{(ST)^j v,\ v \in V_{l-j}\}$ sont disjoints et que le cardinal de X_l se calcule de la façon suivante :

$$|X_l| = \sum_{i\in\{0,..,l\}} |V_{l-i}| = q+1+\sum_{i\in\{1,..,l\}} (q+1)(q^i-q^{i-1}) = q^l(q+1) = |E_l|.$$

Pour montrer le lemme, il suffit donc de montrer que X_l engendre l'espace vectoriel de base E_l. Nous montrons cette assertion par récurrence sur l.

Pour $l=0$ c'est clair puisque $V_0 = E_0$. Soit $l \ge 1$, supposons l'assertion vérifiée pour $l-1$.
Soit $v \in E_l$. Si v n'est pas exceptionnelle, alors $v \in V_l \subset X_l$. Sinon, on note $v' \in E_{l-1}$ l'arête à laquelle v est adjacente. D'après $\mathbf{G_2}$, v est une combinaison linéaire de STv' et des $q-1$ arêtes non exceptionnelles adjacentes à v'. Ces dernières appartiennent à X_l. D'autre part, par hypothèse de récurrence, v' appartient à l'espace vectoriel engendré par X_{l-1}, donc STv' appartient à l'espace vectoriel engendré par $STX_{l-1} \subset X_l$. Ainsi, v appartient à l'espace vectoriel engendré par X_l. □

Une base de $\overline{\mathbb{F}}_p[I\backslash G]$ est donc donnée par

$$\{(ST)^k v,\ T(ST)^k v,\ \ v \in V_i\}_{i,k\in\mathbb{N}}. \tag{19}$$

1.2.3. Expression de $\overline{\mathbb{F}}_p[I\backslash G]$ comme limite inductive de $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,I)$-modules.— Pour $i \in \mathbb{N}$, on désigne par Y_i le sous-espace vectoriel de $\overline{\mathbb{F}}_p[I\backslash G]$ de base

$$\{(ST)^k v,\ T(ST)^k v,\ v \in V_j\}_{\ 0\leq j\leq i,\ k\in\mathbb{N}}.$$

La famille $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion.

Remarque 1.2.5. D'après le lemme 1.2.4 et par définition de Y_i, l'ensemble $\bigcup_{0\leq j\leq i} E_j \cup \tilde{E}_j$ des arêtes à distance inférieure ou égale à $i+1$ est contenu dans Y_i.

Proposition 1.2.6. *Pour $i \in \mathbb{N}$, le sous-espace vectoriel Y_i de $\overline{\mathbb{F}}_p[I\backslash G]$ est stable sous l'action de H.*

Corollaire 1.2.7. *Pour $i \in \mathbb{N}$, le H-module Y_i est engendré par $\bigcup_{0\leq j\leq i} V_j$.*

Preuve de la proposition 1.2.6. — Nous procédons par récurrence sur $i \in \mathbb{N}$. Puisque les générateurs S et T de H vérifient, $T^2 = 1$ et $S^2 = -S$, il suffit, pour montrer que Y_i est stable sous l'action de H, de s'assurer que

$$Sv \in Y_i, \quad \text{pour tout } v \in V_j,\ \ 0 \leq j \leq i.$$

– Soit $v \in V_0$, Sv est la somme des arêtes appartenant à V_0 différentes de v. Donc $Sv \in Y_0$ et Y_0 est stable sous l'action de H.
– Soit $i \in \mathbb{N}$. Supposons que Y_i est stable sous l'action de H.

  Soit $v \in V_j$, $j \leq i$, alors $Sv \in Y_i$ par hypothèse de récurrence, donc $Sv \in Y_{i+1}$.
  Soit $v \in V_{i+1}$. C'est une arête sortante à distance $i+2$. D'après la description géométrique de l'action de S, Sv est une combinaison linéaire d'une arête rentrante à distance $i+1$ et de $q-1$ arêtes sortantes à distance $i+2$. D'après la remarque *1.2.5*, ces arêtes appartiennent à Y_{i+1}, donc $Sv \in Y_{i+1}$.

  Ainsi, on a bien démontré que Y_{i+1} est stable sous l'action de H.

□

Lemme 1.2.8. *Pour tout $v \in V_{i+1}$, on a $(1+S)v \in Y_i$.*

Démonstration. — Soit $v' \in E_i$, l'arête sortante à distance $i+1$ à laquelle v est adjacente. D'après la remarque *1.2.5*, l'arête v' est contenue dans Y_i, qui est stable sous l'action de H d'après la proposition précédente. Or, d'après $\mathbf{G_3}$, on a $(1+S)v = (1+S)Tv'$. Ainsi, $(1+S)v \in Y_i$. □

Remarque 1.2.9. La remarque *1.2.5* nous dit que Y_i contient toutes les arêtes sortantes à distance inférieure ou égale à $i+1$. Or, l'action de $I(1)$ sur les arêtes de l'arbre commute à celle de H et, d'après le lemme 0.2.6, elle conserve la distance et l'orientation.
Ainsi, le H-module Y_i, engendré par un ensemble $\bigcup_{0\leq j\leq i} V_j$ d'arêtes sortantes à distance inférieure ou égale à $i+1$, est stable sous l'action de $I(1)$.

1.2.4. Projectivité des H-modules Y_i, $i \in \mathbb{N}$.—

1.2.4.1. Projectivité de Y_0.— On considère le morphisme de H-modules suivant :

$$\begin{array}{rccccc} \Phi : & H & \times & (HS)^{q-1} & \longrightarrow & Y_0 \\ & (h & , & (h_sS)_{s\in\mathbb{F}_q^*}) & \longmapsto & hu + \sum\limits_{s\in\mathbb{F}_q^*} h_sS\, u_s. \end{array}$$

Lemme 1.2.10. *Le morphisme de H-modules Φ est un isomorphisme.*

Démonstration. — Commençons par la preuve de la surjectivité de Φ. On rappelle que Y_0 est le H-module engendré par l'ensemble $V_0 = \{u, u_s, s \in \mathbb{F}_q\}$ des arêtes d'origine c_0. Montrons tout d'abord que Su_0 appartient à l'image de Φ. D'après $\mathbf{G_1}$, $(1+S)u$ est égal à la somme des arêtes u_s pour s parcourant $\mathbb{F}_q$. Puisque $S(S+1)=0$, on en déduit que

$$Su_0 = -\sum_{s\in\mathbb{F}_q^*} Su_s,$$

donc Su_0 appartient à l'image de Φ. Ainsi, l'image de Φ contient u, et Su_s, pour tout $s \in \mathbb{F}_q$. Pour montrer la surjectivité, il suffit de prouver qu'elle contient u_s pour tout $s \in \mathbb{F}_q$. Or, d'après $\mathbf{G_1}$, on a, pour tout $s \in \mathbb{F}_q$,

$$u_s = (1+S)u - Su_s,$$

donc Φ est surjectif.

Montrons maintenant que Φ est injectif. Soit $(h, (h_sS)_{s\in\mathbb{F}_q^*}) \in H \times (HS)^{q-1}$. L'élément $h \in H$ s'écrit de façon unique

$$h = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k(ST)^k + b_kT(ST)^k + c_k(ST)^kS + d_kT(ST)^kS,\ avec\, a_k, b_k, c_k, d_k \in \overline{\mathbb{F}}_p.$$

L'élément $h_sS \in HS$ s'écrit de façon unique

$$h_sS = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k^s(ST)^kS + b_k^sT(ST)^kS,\ avec\, a_k^s, b_k^s \in \overline{\mathbb{F}}_p.$$

On a, d'après $\mathbf{G_1}$,

$$\begin{array}{rcl} hu & = & \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} (a_k(ST)^ku + b_kT(ST)^ku + c_k(ST)^ku_0 + d_kT(ST)^ku_0 + \sum\limits_{r\in\mathbb{F}_q^*} c_k(ST)^ku_r + d_kT(ST)^ku_r) \\ h_sSu_s & = & \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} (a_k^s(ST)^ku + b_k^sT(ST)^ku + a_k^s(ST)^ku_0 + b_k^sT(ST)^ku_0 + \sum\limits_{r\in\mathbb{F}_q^*, r\neq s} a_k^s(ST)^ku_r + b_k^sT(ST)^ku_r) \end{array}$$

Ainsi l'image par Φ de $(h,(h_sS)_{s\in\mathbb{F}_q^*})$ est égale à

$$\begin{aligned}&\sum_{k\in\mathbb{N}}((a_k+\sum_{s\in\mathbb{F}_q^*}a_k^s)(ST)^ku+(b_k+\sum_{s\in\mathbb{F}_q^*}b_k^s)T(ST)^ku)\\&+\sum_{k\in\mathbb{N}}((c_k+\sum_{s\in\mathbb{F}_q^*}a_k^s)(ST)^ku_0+(d_k+\sum_{s\in\mathbb{F}_q^*}b_k^s)T(ST)^ku_0)\\&+\sum_{k\in\mathbb{N},\,r\in\mathbb{F}_q^*}((c_k+\sum_{s\in\mathbb{F}_q^*,s\neq r}a_k^s)(ST)^ku_r+(d_k+\sum_{s\in\mathbb{F}_q^*,s\neq r}b_k^s)T(ST)^ku_r)\end{aligned}$$

D'après le lemme 1.2.4, la famille $\{(ST)^ku,T(ST)^ku,(ST)^ku_s,T(ST)^ku_s\}_{k\in\mathbb{N},s\in\mathbb{F}_q}$ est libre. Donc, si l'image par Φ de $(h,(h_sS)_{s\in\mathbb{F}_q^*})$ est nulle, alors pour tout $k\in\mathbb{N}$:

$$\begin{cases}a_k+\sum\limits_{s\in\mathbb{F}_q^*}a_k^s=0,\\ c_k+\sum\limits_{s\in\mathbb{F}_q^*}a_k^s=0,\\ c_k+\sum\limits_{s\in\mathbb{F}_q^*,s\neq r}a_k^s=0,\forall r\in\mathbb{F}_q^*\end{cases}\quad\text{et}\quad\begin{cases}b_k+\sum\limits_{s\in\mathbb{F}_q^*}b_k^s=0,\\ d_k+\sum\limits_{s\in\mathbb{F}_q^*}b_k^s=0,\\ d_k+\sum\limits_{s\in\mathbb{F}_q^*,s\neq r}b_k^s=0,\forall r\in\mathbb{F}_q^*,\end{cases}$$

c'est-à-dire $a_k=c_k=0$, et $a_k^s=0$, $\forall s\in\mathbb{F}_q^*$, $b_k=d_k=0$, et $b_k^s=0$, $\forall s\in\mathbb{F}_q^*$. Ainsi, $(h,(h_sS)_{s\in\mathbb{F}_q^*})=0$ et Φ est injectif.

□

Le lemme 1.2.10 montre que le H-module Y_0 est égal au H-module projectif

$$Y_0 \;=\; Hu\oplus\bigoplus_{s\in\mathbb{F}_q^*}HS\,u_s \;\simeq\; H\oplus(HS)^{q-1} \tag{20}$$

1.2.4.2. Projectivité de Y_{i+1}, $i\in\mathbb{N}$.— Soit $i\in\mathbb{N}$. Supposons que Y_i est un H-module projectif. On a la suite exacte de H-modules

$$0\to Y_i\to Y_{i+1}\to Y_{i+1}/Y_i\to 0.$$

Ainsi, montrer la projectivité du H-module Y_{i+1}/Y_i suffit pour s'assurer de celle du H-module Y_{i+1}.

Lemme 1.2.11. *L'application*

$$\begin{array}{rccc}\Phi_i: & H^{|V_{i+1}|} & \to & Y_{i+1}/Y_i\\ & (h_v)_{v\in V_{i+1}} & \longmapsto & \sum\limits_{v\in V_{i+1}}h_vv \mod Y_i\end{array}$$

est un morphisme de H-modules surjectif de noyau $H(S+1)^{|V_{i+1}|}$.

Démonstration. — D'après sa définition, le $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel Y_{i+1} se décompose en la somme directe de Y_i et du $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel de base $\{(ST)^k v,\ T(ST)^k v,\ v \in V_{i+1}\}_{k\in\mathbb{N}}$. Ainsi, Φ_i est bien surjectif.

L'inclusion $H(S+1)^{|V_{i+1}|} \subset Ker\,\Phi_i$ résulte du fait que $(1+S)v \subset Y_i$ pour tout $v \in V_{i+1}$ (lemme 1.2.8).

Soit $(h_v)_v \in V_{i+1}$ un élément du noyau de $H^{|V_{i+1}|}$. Pour tout $v \in V_{i+1}$, l'élément $h_v \in H$ s'écrit de façon unique :

$$h_v = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k^v (ST)^k + b_k^v T(ST)^k + c_k^v (ST)^k S + d_k^v T(ST)^k S, \quad \text{avec} \quad a_k^v, b_k^v, c_k^v, d_k^v \in \overline{\mathbb{F}}_p.$$

Comme on vient de le rappeler, on a $Sv = -v \mod Y_i$ pour tout $v \in V_{i+1}$. Ainsi,

$$\sum_{v\in V_{i+1}} h_v v = \sum_{v\in V_{i+1}} ((a_k^v - c_k^v)(ST)^k v + (b_k^v - d_k^v)T(ST)^k v) \mod Y_i.$$

Puisque la famille $\{(ST)^k v, T(ST)^k v,\ v \in V_{i+1}\}_{k\in\mathbb{N}}$ est libre modulo Y_i, supposer que $(h_v)_{v\in V_{i+1}}$ appartient au noyau de Φ_i implique, pour tout $v \in V_{i+1}$, $k \in \mathbb{N}$:

$$a_k^v = c_k^v,\ \ b_k^v = d_k^v,$$

c'est à dire $h_v \in H(S+1)$, pour tous $v \in V_{i+1}$. □

Ainsi, le H-module Y_{i+1}/Y_i est isomorphe à une somme de copies de $H/H(S+1) \simeq HS$. C'est un module projectif et l'on a la décomposition en somme directe de H-modules projectifs :

$$Y_{i+1} \ = \ Y_i \oplus \bigoplus_{v\in V_{i+1}} HS\,v \ \simeq \ Y_i \oplus (HS)^{|V_{i+1}|}. \tag{21}$$

Des isomorphismes (20) et (21) et par définition de $V_0 = \{u,\ u_s,\ s \in \mathbb{F}_q\}$, on déduit

$$Y_i = Hu \ \oplus \bigoplus_{v\in V_0\cup\ldots\cup V_i - \{u,u_0\}} HS\,v \ \simeq H \ \oplus \bigoplus_{v\in V_0\cup\ldots\cup V_i - \{u,u_0\}} HS. \tag{22}$$

Le H-module $\overline{\mathbb{F}}_p[I\backslash G]$ est la limite inductive de la famille de H-modules $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ croissante pour l'inclusion. On a ainsi démontré le théorème 1.2.2 : en posant $V = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} V_i - \{u, u_0\}$, on a la décomposition en somme directe de H-modules,

$$\overline{\mathbb{F}}_p[I\backslash G] \ = \ Hu \oplus \bigoplus_{v\in V} HSv \ \simeq \ H \oplus \bigoplus_{v\in V} HS.$$

1.3. Platitude du module $ind_{IZ}^{\mathrm{GL}_2(F)}\chi$ sur l'algèbre de Hecke du caractère régulier χ

On suppose dans toute cette section que $q > 2$. et l'on se donne $\chi : \mathbb{F}_q^{*2} \to \overline{\mathbb{F}}_p{}^*$ un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère régulier du tore fini. On note H_χ l'algèbre de Hecke du caractère χ considéré comme un caractère de I trivial sur $I(1)$.

Soient t_1, t_2 les éléments de G définis par $t_1 = \begin{pmatrix} \pi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $t_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pi \end{pmatrix}$. L'algèbre de Hecke H_χ est la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre commutative de générateurs T_1, T_2 vérifiant $T_1T_2 = 0$, où, pour $i = 1, 2$, on désigne par T_i l'élément de H_χ de support It_iI et de valeur 1 en t_i ([**43**, 2.1]).

Nous allons montrer le théorème suivant.

Théorème 1.3.1. *Soit $a \in \{1, .., q-2\}$. Soit $\chi = 1 \otimes \chi_2 : \mathbb{F}_q^{*2} \to \overline{\mathbb{F}}_p{}^*$, le caractère régulier du tore fini tel que $\chi_2(x) = x^a$, $\forall x \in \mathbb{F}_q^*$.*

Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *Le H_χ -module $ind_I^G\chi$ est plat*
2. *Les coefficients des polynômes $(1-X)^a$ et $(1-X)^{q-1-a} \in \overline{\mathbb{F}}_p[X]$, de degrés respectifs a et $q-1-a$, sont tous non nuls.*
3. *On a la suite exacte de $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-modules $0 \longrightarrow T_1 ind_I^G\chi \longrightarrow ind_I^G\chi \xrightarrow{T_2} T_2 ind_I^G\chi \to 0$.*

Corollaire 1.3.2. *Le H_χ-module $ind_I^G\chi$ est plat si et seulement si q est un nombre premier.*

Preuve du corollaire. — Quitte à tordre par un caractère de G, on peut toujours se ramener à un caractère χ de la forme décrite dans le théorème.

Si $q = p$ la condition (2) du théorème est vérifiée.

Supposons que $q > p$. Soit $x := max\{a, q-1-a\}$. Il vérifie $x > p-1$. On a

$$(x-p+1)\binom{x}{p-1} = p\binom{x}{p}.$$

Si p ne divise pas $x-p+1$, alors p divise $\binom{x}{p-1}$ ce qui contredit la condition (2) pour le polynôme $(1-X)^x$. Si p divise $x-p+1$, il divise aussi $q-1-x$, ce qui contredit la condition (2) pour le polynôme $(1-X)^{q-1-x}$. □

Nous finirons la section 1.3 par la preuve du résultat suivant.

Théorème 1.3.3. *Si $q = p$, le H_χ-module $ind_I^G\chi$ est libre .*

Jusqu'à la fin de la section 1.3, nous allons considérer que $\chi : \mathbb{F}_q^{*2} \to \overline{\mathbb{F}}_p{}^*$ est un caractère régulier du tore fini comme dans l'énoncé du théorème 1.3.1, c'est-à-dire de la forme $\chi = 1 \otimes \chi_2$, avec

$$\chi_2 : \mathbb{F}_q^* \to \overline{\mathbb{F}}_p{}^*, \ x \mapsto x^a, \quad \text{où } a \in \{1, .., q-2\}.$$

Une $\overline{\mathbb{F}}_p$-base de $ind_I^G\chi$ est donnée par l'ensemble des fonctions $g.f_{I,\chi} = f_{Ig^{-1},\chi}$ de support Ig^{-1} et de valeur 1 en g^{-1}, où g parcourt le système de représentants (6) des classes à gauche de G modulo I donné au paragraphe 0.2.1.

On établit une bijection entre cette base de $ind_I^G\chi$ et l'ensemble des arêtes de l'arbre en identifiant, pour tout g appartenant au système de représentants (6), l'arête $g\,u$ avec l'élément $g.f_{I,\chi} = f_{Ig^{-1},\chi}$. On pourra donc considérer désormais tout élément de $ind_I^G\chi$ comme une combinaison linéaire d'arêtes de l'arbre. On rappelle que $\tilde{u}$ désigne l'arête $\omega u = \omega^{-1}u$ opposée à u.

Remarque 1.3.4. Cette identification n'est pas compatible avec l'action de G car l'arête u est invariante sous l'action de I tandis que I agit sur l'élément $f_{I,g}$ par le caractère non trivial χ.

1.3.1. Action de $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,\chi)$ sur $ind_I^G\chi$.—

1.3.1.1. Les actions de T_1 et T_2 sur $ind_I^G\chi$ sont respectivement entièrement déterminées par la donnée de $T_1(\tilde{u})$ et $T_2(u)$ car l'action de H_χ sur $ind_I^G\chi$ commute à celle de G. On en donne une description géométrique :

– On a la décomposition suivante ([**43**, Ap. 3]) :

$$It_1I = \bigcup_{s\in\mathbb{F}_q} I\begin{pmatrix}\pi & 0\\ \pi[s] & 1\end{pmatrix}.$$

Remarquons que $\begin{pmatrix}\pi & 0\\ \pi[s] & 1\end{pmatrix}^{-1} = \omega\begin{pmatrix}-[s] & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \omega g_s^0$. Ainsi $T_1(u) = \sum_{s\in\mathbb{F}_q}(\omega g_s^0)u$ et

$$T_1(\tilde{u}) = \omega^{-1}T_1(u) = \sum_{s\in\mathbb{F}_q} g_s^0 u = \sum_{s\in\mathbb{F}_q} u_s. \tag{23}$$

– On a la décomposition suivante :

$$It_2I = \bigcup_{s\in\mathbb{F}_q} I\begin{pmatrix}1 & s\\ 0 & \pi\end{pmatrix}.$$

Puisque $\begin{pmatrix}1 & s\\ 0 & \pi\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}-[s] & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\omega^{-1} = g_s^0\omega^{-1}$, on a

$$T_2(u) = \sum_{s\in\mathbb{F}_q} g_s^0\omega^{-1}\,u = \sum_{s\in\mathbb{F}_q}\tilde{u}_s. \tag{24}$$

Ainsi, $T_1(\tilde{u})$ est la somme des q arêtes adjacentes à $\tilde{u}$, et $T_2(u)$ est la somme des q arêtes incidentes à u. Comme dans le cas Iwahori, on pourrait être tenté de généraliser cette observation, sans plus de précautions, afin de décrire l'action de T_1 et de T_2 sur une arête quelconque v de l'arbre. C'est sans compter le fait que le sous-groupe d'Iwahori agit par le caractère non trivial χ sur l'arête u. De la description de l'action de T_1 sur l'arête $\tilde{u}$ et de T_2 sur l'arête u, on peut donc seulement déduire que :

$\mathbf{G_1^\chi}$: L'action de T_1 transforme v en une combinaison linéaire à cœfficients non nuls des q arêtes adjacentes à v.

$\mathbf{G_2^\chi}$: L'action de T_2 transforme v en une combinaison linéaire à cœfficients non nuls des q arêtes incidentes à v.

Par exemple, pour $s \in \mathbb{F}_q$, l'action de T_1 sur l'arête $\tilde{u}_s$ et l'action de T_2 sur l'arête u_s sont données par :

$$T_1(\tilde{u}_s) = u + \sum_{z\in\mathbb{F}_q,\, z\neq s} (z-s)^a u_z. \tag{25}$$

$$T_2(u_s) = \tilde{u} + \sum_{z\in\mathbb{F}_q,\, z\neq s} (s-z)^{q-1-a} \tilde{u}_z. \tag{26}$$

Montrons la relation (25). D'après l'égalité (23), on a $T_1(\tilde{u}_s) = g_s^0 T_1(\tilde{u}) = g_s^0(u_0 + \sum_{y\in\mathbb{F}_q^*} u_{-y}) = g_s^0(g_0^0 + \sum_{y\in\mathbb{F}_q^*} g_{-y}^0)u$.

Or l'élément $g_s^0 g_0^0 = \begin{pmatrix} -[s] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -[s] \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ appartient à $I(1)$ et fixe l'arête u. D'autre part, pour $y \in \mathbb{F}_q^*$, on calcule l'action de $g_s^0 g_{-y}^0$ sur u :

$$g_s^0 g_{-y}^0 = \begin{pmatrix} -[s] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} [y] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-[sy] & -[s] \\ [y] & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [y^{-1}]-[s] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} [y] & 1 \\ 0 & -[y^{-1}] \end{pmatrix} \quad \text{d'où}$$

$$(**) \qquad g_s^0 g_{-y}^0 = \begin{pmatrix} [-s+y^{-1}] & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ [y^{-1}]-[s]-[-s+y^{-1}] & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} [y] & 1 \\ 0 & -[y^{-1}] \end{pmatrix}.$$

La première matrice de l'égalité $(**)$ n'est autre que $g^0_{s-y^{-1}}$. La seconde appartient à $I(1)$ et fixe l'arête u, puisque, par définition de l'application de Teichmüller, on a $[y^{-1}]-[s]-[-s+y^{-1}] \in \pi O_F$. La troisième et dernière matrice appartient au sous-groupe d'Iwahori et agit sur l'arête u par le caractère $\chi = 1 \otimes \chi_2$. Ainsi, on a

$$g_s^0 g_{-y}^0 u = \chi_2(-y^{-1}) u_{s-y^{-1}}.$$

On a donc bien démontré que $T_1(\tilde{u}_s) = u + \sum_{y\in\mathbb{F}_q^*} \chi_2(-y^{-1}) u_{s-y^{-1}} = u + \sum_{z\in\mathbb{F}_q,\, z\neq s} \chi_2(z-s) u_z$.

Montrons la relation (26). La relation (24) nous assure que $T_2(u_s) = g_s^0(\tilde{u}_0 + \sum_{y_i n\mathbb{F}_q^*} \tilde{u}_{-y}^0) = g_s^0(g_0^0 + \sum_{y_i n\mathbb{F}_q^*} g_{-y}^0)\tilde{u}$.

Comme précédemment, $g_s^0 g_0^0 \in I(1)$ fixe l'arête u ainsi que son opposée $\tilde{u}$.
D'autre part, pour $y \in \mathbb{F}_q^*$, on calcule l'action de $g_s^0 g_{-y}^0$ sur l'arête $\tilde{u}$. La première matrice de l'égalité $(**)$ précédente est égale à $g^0_{s-y^{-1}}$. La seconde appartient à $I(1)$ et fixe l'arête $\tilde{u}$. La troisième et dernière matrice appartient au sous-groupe d'Iwahori I et agit sur l'arête $\tilde{u} = \omega u$ par le caractère $\chi_2 \otimes 1$. En effet, l'élément ω normalise I et l'action par conjugaison par ω sur un élément de I permute les éléments de la diagonale, comme on l'a vu dans la preuve de la proposition 1.1.1. Ainsi,

$$T_2(u_s) = \tilde{u} + \sum_{y\in\mathbb{F}_q^*} \chi_2(y) \tilde{u}_{s-y^{-1}} = \tilde{u} + \sum_{z\in\mathbb{F}_q,\, z\neq s} \chi_2(s-z)^{-1} \tilde{u}_z.$$

1.3.1.2. — Souhaitant faire un changement de base adéquat pour simplifier l'expression de l'action de T_1 et T_2, nous nous proposons de construire une base de l'espace vectoriel engendré par les arêtes sortantes à distance 1 par un procédé d'analyse de Fourier.

Fixons ζ un générateur du groupe cyclique $\mathbb{F}_q^*$. Le groupe des $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractères de $\mathbb{F}_q^*$ est paramétré par $\mathbb{F}_q^*$ de la façon suivante : à tout $s \in \mathbb{F}_q^*$, on associe le caractère $\lambda_s : \mathbb{F}_q^* \to \overline{\mathbb{F}}_p{}^*$ tel que $\zeta \mapsto s$.

Notation 1.3.5. Notons $w : \mathbb{F}_q^* \to ind_I^G\chi$ la transformée de Fourier de l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}_q^* & \to & ind_I^G\chi \\ s & \mapsto & u_s. \end{array}$$

Elle est donnée en $s \in \mathbb{F}_q^*$ par

$$w_s = \sum_{t\in\mathbb{F}_q^*} \lambda_s(t) u_t.$$

On pose de plus $w_0 := u_0$.

L'espace vectoriel engendré par l'ensemble $\{u_0, u_s,\ s \in \mathbb{F}_q^*\}$ des arêtes adjacentes à $\tilde{u}$ a pour base l'ensemble $\{w_0, w_s,\ s \in \mathbb{F}_q^*\}$.

L'élément $\tilde{w}_s$ est défini par $\tilde{w}_s := \sum_{t\in\mathbb{F}_q^*} \lambda_s(t)\tilde{u}_t$. L'espace vectoriel engendré par l'ensemble $\{\tilde{u}_0, \tilde{u}_s,\ s \in \mathbb{F}_q^*\}$ des arêtes incidentes à u a pour base l'ensemble $\{\tilde{w}_0, \tilde{w}_s,\ s \in \mathbb{F}_q^*\}$.

Notation 1.3.6. Nous propageons dans l'arbre ces nouvelles bases obtenues par transformée de Fourier. Soient $\epsilon \in \{0,1\}$, $i \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{F}_q^i$. On pose, pour tout $s \in \mathbb{F}_q$

$$w_{(x,s)}^{\epsilon} := (g_x^{\epsilon}\omega)\, w_s.$$

On a alors $\tilde{w}_{(x,s)}^{\epsilon} = (g_x^{\epsilon}\omega)\, \tilde{w}_s$.

L'action de G transforme un faisceau en un faisceau, donc l'ensemble $\{w_{(x,s)}^{\epsilon},\ s \in \mathbb{F}_q\}$ forme une base de l'espace vectoriel engendré par l'ensemble des arêtes adjacentes à $(g_x^{\epsilon}\omega)\tilde{u} = u_x^{\epsilon}$. De même, l'ensemble $\{\tilde{w}_{(x,s)}^{\epsilon},\ s \in \mathbb{F}_q\}$ forme une base de l'espace vectoriel engendré par l'ensemble des arêtes incidentes à $\tilde{u}_x^{\epsilon}$.

Ainsi, la définition suivante est naturelle :

Définition 1.3.7. *On dira de l'élément $w_{(x,s)}^0$ (resp. $\tilde{w}_{(x,s)}^0$) qu'il est de type 0, sortant (resp. rentrant), et à distance $i+1$.*

On dira de l'élément $w_{(x,s)}^1$ (resp. $\tilde{w}_{(x,s)}^1$) qu'il est de type 1, sortant (resp. rentrant), et à distance $i+2$.

Nous allons maintenant décrire l'action de T_1 et T_2 grâce aux nouvelles bases que nous venons de définir.

Définition 1.3.8. *On note respectivement $\Phi_1 \in \mathbb{F}_q[X]$ et $\Phi_2 \in \mathbb{F}_q[X]$ la transformée de Fourier du polynôme $(1-X)^a$ et la transformée de Fourier inverse du polynôme $(1-X)^{q-1-a}$:*

$$\Phi_1 = \sum_{0\leq j\leq q-2} (1-\zeta^j)^a X^j, \quad \Phi_2 = \sum_{0\leq j\leq q-2} (1-\zeta^{-j})^{q-1-a} X^j.$$

Du fait de la définition des polynômes Φ_1 et Φ_2, on les égalités suivantes dans $\mathbb{F}_q[X]$:

$$(1-X)^a = -\sum_{0\leq j\leq q-2} \Phi_1(\zeta^{q-1-j})X^j, \quad (1-X)^{q-1-a} = -\sum_{0\leq j\leq q-2} \Phi_2(\zeta^j)X^j. \tag{27}$$

Lemme 1.3.9. *L'action de T_1 dans les bases $\{\tilde{u}, \tilde{w}_0, \tilde{w}_s,\ s\in\mathbb{F}_q^*\}$ et $\{u, w_0, w_s,\ s\in\mathbb{F}_q^*\}$ est donnée par*

$$\begin{array}{lcll}
T_1(\tilde{u}) & = & w_0 + w_1, & \\
T_1(\tilde{w}_0) & = & u + w_{\zeta^a}, & \\
T_1(\tilde{w}_1) & = & -u + \Phi_1(1) w_{\zeta^a} & \text{où } \Phi_1(1) = -1, \\
T_1(\tilde{w}_{\zeta^{q-1-a}}) & = & -(-1)^a w_0 + \Phi_1(\zeta^{q-1-a}) w_1 & \text{où } \Phi_1(\zeta^{q-1-a}) = -(-1)^a, \\
T_1(\tilde{w}_s) & = & \Phi_1(s) w_{s\zeta^a}, & \text{pour tout } s\in\mathbb{F}_q^*\backslash\{1,\zeta^{q-1-a}\}.
\end{array}$$

L'action de T_2 dans les bases $\{u, w_0, w_s,\ s\in\mathbb{F}_q^*\}$ et $\{\tilde{u}, \tilde{w}_0, \tilde{w}_s,\ s\in\mathbb{F}_q^*\}$ est donnée par

$$\begin{array}{lcll}
T_2(u) & = & \tilde{w}_0 + \tilde{w}_1, & \\
T_2(w_0) & = & \tilde{u} + (-1)^{q-1-a} \tilde{w}_{\zeta^{q-1-a}}, & \\
T_2(w_1) & = & -\tilde{u} + \Phi_2(\zeta^{q-1-a}) \tilde{w}_{\zeta^{q-1-a}} & \text{où } \Phi_2(\zeta^{q-1-a}) = -(-1)^{q-1-a}, \\
T_2(w_{\zeta^a}) & = & -\tilde{w}_0 + \Phi_2(1)\tilde{w}_1 & \text{où } \Phi_2(1) = -1, \\
T_2(w_s) & = & \Phi_2(s\zeta^{q-1-a}) \tilde{w}_{s\zeta^{q-1-a}}, & \text{pour tout } s\in\mathbb{F}_q^*\backslash\{1,\zeta^a\}.
\end{array}$$

Démonstration. — Nous effectuons la preuve pour l'action de T_1.

– La relation (23) dit que $T_1(\tilde{u}) = \sum_{x\in\mathbb{F}_q} u_x$. Or, par définition, $w_1 = \sum_{x\in\mathbb{F}_q^*} u_x$. Donc, $T_1(\tilde{u}) = w_0 + w_1$.

– La relation (25) dit que $T_1(\tilde{u}_0) = u + \sum_{s\in\mathbb{F}_q^*} s^a u_s$. Par définition de w_{ζ^a}, on a donc $T_1(\tilde{u}_0) = u + w_{\zeta^a}$.

– Soit $s\in\mathbb{F}_q^*$ et $b\in\{0,..,q-2\}$ tel que $s=\zeta^b$. On a alors

$$\Phi_1(s) = \sum_{0\leq j\leq q-2} (1-\zeta^j)^a \zeta^{bj} = \sum_{t\in\mathbb{F}_q^*} (1-t)^a t^b.$$

D'après (25) et la définition de $\tilde{w}_s$,

$$\begin{aligned}
T_1(\tilde{w}_s) &= \sum_{t\in\mathbb{F}_q^*} t^b T_1(\tilde{u}_t) \\
&= \sum_{t\in\mathbb{F}_q^*} t^b [u + (-t)^a u_0 + \sum_{z\in\mathbb{F}_q^*} (z-t)^a u_z]
\end{aligned}$$

(Dans la dernière somme, il n'est en fait pas nécessaire d'exclure le cas $z=t$ comme on l'a fait dans l'écriture de l'égalité (25), car $a\neq 0 \mod q-1$.)

$$\begin{aligned}
T_1(\tilde{w}_s) &= (\sum_{t\in\mathbb{F}_q^*} t^b)u + (\sum_{t\in\mathbb{F}_q^*}(-1)^a t^{a+b})u_0 + \sum_{z\in\mathbb{F}_q^*} z^{a+b}u_z(\sum_{t\in\mathbb{F}_q^*}(1-tz^{-1})^a(tz^{-1})^b \\
&= (\sum_{t\in\mathbb{F}_q^*} t^b)u + (\sum_{t\in\mathbb{F}_q^*}(-1)^a t^{a+b})u_0 + \sum_{z\in\mathbb{F}_q^*} z^{a+b}u_z(\sum_{t\in\mathbb{F}_q^*}(1-t)^a t^b) \\
&= (\sum_{t\in\mathbb{F}_q^*} t^b)u + (\sum_{t\in\mathbb{F}_q^*}(-1)^a t^{a+b})u_0 + \Phi_1(s)\sum_{z\in\mathbb{F}_q^*} z^{a+b}u_z \\
&= (\sum_{t\in\mathbb{F}_q^*} t^b)u + (\sum_{t\in\mathbb{F}_q^*}(-1)^a t^{a+b})u_0 + \Phi_1(s)w_{s\zeta^a}
\end{aligned}$$

– Si $b \neq 0$ et $b \neq q-1-a$, c'est-à-dire si $s \neq 1$ et $s \neq \zeta^{q-1-a}$, les deux premiers termes sont nuls et l'on retrouve la formule annoncée dans le lemme.

– Si $b = 0$, c'est-à-dire $s = 1$, alors $b \neq q-1-a$ et le deuxième terme est nul tandis que le premier vaut $-u$. Pour retrouver la formule annoncée par le lemme, il reste à montrer que $\Phi_1(1) = -1$.
D'après la définition du polynôme Φ_1 et l'égalité (27) qu'on en a déduite, $-\Phi_1(1)$ est égal au terme constant du polynôme $(1-X)^a$. Ainsi, $\Phi_1(1) = -1$.

– Si $b = q-1-a$, c'est-à-dire $s = \zeta^{q-1-a}$, alors $b \neq 0$ et le premier terme est nul, tandis que le deuxième vaut $-(-1)^a u_0 = -(-1)^a w_0$. Pour retrouver la formule annoncée par le lemme, il reste à montrer que $\Phi_1(\zeta^{q-1-a}) = -(-1)^a$.
D'après l'égalité (27), $-\Phi_1(\zeta^{q-1-a})$ est égal au cœfficient du monôme X^a du polynôme $(1-X)^a$. Ainsi, $\Phi_1(\zeta^{q-1-a}) = -(-1)^a$.

□

1.3.2. Expression de $ind_I^G\chi$ comme limite inductive de $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,\chi)$-modules. — A la section 1.2, nous avons écrit le H-module $\overline{\mathbb{F}}_p[I\backslash G]$ comme limite inductive de H-modules de type fini. Pour celà, nous avons fait usage de la description géométrique de l'action des générateurs de H sur les arêtes de l'arbre considérées comme des éléments de $\overline{\mathbb{F}}_p[I\backslash G]$.

Nous allons adopter une démarche analogue pour écrire le H_χ-module $ind_I^G\chi$ comme limite inductive de H_χ-modules de type fini. Nous allons utiliser les observations $\mathbf{G_1^\chi}$ et $\mathbf{G_2^\chi}$, qui donnent la description géométrique de l'action des générateurs T_1 et T_2 de H_χ sur l'ensemble des arêtes de l'arbre, que nous avons identifié avec une $\overline{\mathbb{F}}_p$-base de $ind_I^G\chi$. Pour l'instant nous ne nous servons pas de la base obtenue par analyse de Fourier.

On rappelle que, pour $l \in \mathbb{N}$, on désigne par E_l l'ensemble des arêtes sortantes à distance $l+1$. On considère l'ensemble d'arêtes V_l construit au paragraphe 1.2.2 : V_0 est l'ensemble des $q+1$ arêtes sortantes à distance 1 et si $l \geq 1$, V_l est l'ensemble E_l privé des arêtes dites exceptionnelles.

Lemme 1.3.10. *L'ensemble $\{T_1^i v, v \in V_{l-i}\}_{0\leq i\leq l}$ est une base du $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel de base E_l. L'ensemble $\{T_2^i \tilde{v}, v \in V_{l-i}\}_{0\leq i\leq l}$ est une base du $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel de base $\tilde{E}_l$.*

Démonstration. — C'est l'analogue du lemme 1.2.4. Il se démontre de façon tout à fait semblable, car l'élément de T_1, qui envoie une arête sur une combinaison linéaire à cœfficients non nuls des arêtes adjacentes, se comporte "géométriquement" comme l'élément ST de la section précédente. De même, l'élément T_2 se comporte comme $T(ST)$.
Nous démontrons la première assertion du lemme. La seconde se démontre de même.

Posons $X_l = \{T_1^i v,\ v \in V_{l-i}\}_{0\leq i\leq l}$.

Notons que pour tout $i \in \{0,..,l\}$ et tout $v \in V_{l-i}$, $T_1^i v$ est une combinaison linéaire à cœfficients non nuls des q^i arêtes de l'intersection de E_l avec la branche de v.

On en déduit que tout élément de X_l appartient à l'espace vectoriel de base E_l.

On en déduit aussi que pour i, j deux éléments distincts de $\{0, ..., l\}$, les ensembles $\{T_1^i v,\ v \in V_{l-i}\}$ et $\{T_1^j v,\ v \in V_{l-j}\}$ sont disjoints et que le cardinal de X_l se calcule de la façon suivante :

$$|X_l| = \sum_{i\in\{0,..,l\}} |V_{l-i}| = q + 1 + \sum_{i\in\{1,..,l\}} (q+1)(q^i - q^{i-1}) = q^l(q+1) = |E_l|.$$

Pour démontrer le lemme il suffit donc de s'assurer que X_l engendre le $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel engendré par E_l.
Pour $l = 0$ c'est clair. Soit $l \in \mathbb{N}$, $l \geq 1$. Supposons l'assertion vérifiée pour $l-1$. Soit $v' \in E_l$ et $v \in E_{l-1}$ l'arête à laquelle v' est adjacente. Si v' n'est pas exceptionnelle, alors $v' \in V_l \subset X_l$. Si v' est exceptionelle, alors, d'après $\mathbf{G}_{\mathbf{1}}^{\chi}$, v' est une combinaison linéaire à cœfficients non nuls de $T_1 v$ et des $q-1$ arêtes non exceptionnelles adjacentes à v. Par hypothèse de récurrence, v appartient à l'espace vectoriel engendré par X_{l-1}, donc $T_1 v$ appartient à l'espace vectoriel engendré par $T_1 X_{l-1} \subset X_l$. Ainsi, v' appartient à l'espace vectoriel engendré par X_l. □

On déduit de ce lemme que $ind_I^G \chi$ est le $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel de base

$$\{T_1^k v,\ T_2^k \tilde{v},\ v \in V_i\}_{i,k\in\mathbb{N}}. \tag{28}$$

On définit la famille $(Z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de sous-$\overline{\mathbb{F}}_p$-espaces vectoriels de $ind_I^G \chi$, croissante pour l'inclusion, en désignant par Z_i le $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel de base

$$\{T_1^k v,\ T_2^k \tilde{v},\ v \in V_j\}_{0\leq j\leq i,\ k\in\mathbb{N}}.$$

C'est l'analogue du sous-espace vectoriel Y_i de $\overline{\mathbb{F}}_p[I\backslash G]$ défini au paragraphe 1.2.3.

Remarque 1.3.11. D'après le lemme 1.3.10, l'ensemble $\bigcup_{0\leq j\leq i} E_j$ (resp. $\bigcup_{0\leq j\leq i} \tilde{E}_j$) des arêtes sortantes (resp. rentrantes) à distance inférieure à $i+1$ est inclus dans Z_i.

Proposition 1.3.12. *Pour tout $i \in \mathbb{N}$, le $\overline{\mathbb{F}}_p$-vectoriel Z_i est stable sous l'action de H_χ.*

Corollaire 1.3.13. *Le H_χ-module Z_i est engendré par l'ensemble $\bigcup_{j=0,..,i} V_j \cup \tilde{V}_j$.*

Preuve de la proposition 1.3.12. — Nous procédons par récurrence sur $i \in \mathbb{N}$. Puisque les générateurs T_1 et T_2 de l'algèbre commutative H_χ vérifient $T_1T_2 = 0$, il suffit, pour montrer que Z_i est stable sous l'action de H_χ, de montrer que

$$T_1\tilde{v} \in Z_i,\ \ T_2v \in Z_i, \quad \text{pour tout } v \in V_j,\ \ 0 \leq j \leq i.$$

– Pour $i = 0$. Soit $v \in V_0$, alors, d'après $\mathbf{G_2^\chi}$ et $\mathbf{G_1^\chi}$, T_2v (resp. $T_1\tilde{v}$) est une combinaison linéaire de q arêtes rentrantes (resp. sortantes) à distance 1. Ces arêtes appartiennent à $\tilde{V}_0$ (resp. V_0). Donc, T_2v et $T_1\tilde{v}$ appartiennent à Z_0.

– Soit $i \in \mathbb{N}$. Supposons que Z_i est stable sous l'action de H_χ.
  Soit $v \in V_j$, $j \leq i$. Alors $T_1\tilde{v}, T_2v \in Z_i$ par hypothèse de récurrence, donc $T_1\tilde{v}, T_2v \in Z_{i+1}$.
  Soit $v \in V_{i+1}$. Alors d'après $\mathbf{G_2^\chi}$, T_2v est une combinaison linéaire d'une arête sortante à distance $i+1$ et de $q-1$ arêtes rentrantes à distance $i+2$. D'après la remarque *1.3.11*, chacune de ces arêtes appartient à Z_{i+1}, donc $T_2v \in Z_{i+1}$. De la même façon, $T_1\tilde{v} \in Z_{i+1}$.

  Ainsi, on a démontré que Z_{i+1} est stable sous l'action de H_χ.

□

Remarque 1.3.14. On déduit de la proposition et de la remarque 1.3.11, (comme nous l'avons fait pour Y_i à la remarque *1.2.9*), que l'espace Z_i est stable sous l'action de $I(1)$.

Nous avons démontré que $ind_I^G\chi$ est la limite inductive du système H_χ-modules $(Z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ où les flèches du système inductif sont données par les inclusions.

Nous allons maintenant détailler la structure de ce système inductif et suggérer que les H_χ-modules Z_i ont été bien construits de façon à ce que leurs propriétés dépendent entièrement de celles du H_χ-module initial Z_0. Réinitialisons tout d'abord le système inductif au rang -1 en choisissant pour Z_{-1} le H_χ-module engendré par u et $\tilde{u}$.

Remarque 1.3.15. Nous avons vu au début de ce chapitre (§1.1.2) que la partie (I,χ)-isotypique de $ind_I^G\chi$ est égale au H_χ-module libre de base u, et que sa $(I,\chi\tau)$-isotypique est égale au H_χ-module libre de base $\tilde{u}$. On en déduit que le H_χ-module Z_{-1} engendré par u et $\tilde{u}$ est libre de base $\{u, \tilde{u}\}$. De plus, il est égal à l'espace des $I(1)$-invariants de $ind_I^G\chi$.

On rappelle qu'on appelle les $q-1$ arêtes $\{u_s,\ s \in \mathbb{F}_q^*\}$ les *arêtes non exceptionnelles* adjacentes à $\tilde{u}$. On a le résultat suivant :

Lemme 1.3.16. – *Le H_χ-module Z_0 est engendré par Z_{-1} et par l'ensemble des $q-1$ arêtes non exceptionnelles adjacentes à $\tilde{u}$ et de leurs opposées.*

Soit $i \in \mathbb{N}$.

– *Soit v une arête sortante à distance $i+1$. Les images dans le quotient Z_{i+1}/Z_i des $q-1$ arêtes non exceptionnelles adjacentes à v et de leurs opposées engendrent un sous-module de Z_{i+1}/Z_i isomorphe à Z_0/Z_{-1}.*

– *Le H_χ-module Z_{i+1}/Z_i est la somme directe de ces sous-modules, pour v parcourant l'ensemble des arêtes sortantes à distance $i+1$.*

Démonstration. — L'espace vectoriel Z_{-1} est engendré par l'ensemble $\{T_1^k u, T_1^{k+1}\tilde{u}, T_2^k\tilde{u}, T_2^{k+1}u\}$, ou encore d'après les relations (23) et (24) par l'ensemble

$$\{T_1^k u, T_1^k(u_0 + \sum_{s\in\mathbb{F}_q^*} u_s),\ T_2^k\tilde{u}, T_2^k(\tilde{u}_0 + \sum_{s\in\mathbb{F}_q^*}\tilde{u}_s)\}.$$

Par définition de l'espace vectoriel Z_0, cet ensemble est une base de Z_{-1} et le sous-espace vectoriel de base $\{T_1^k u_s,\ T_2^k\tilde{u}_s,\ s\in\mathbb{F}_q^*\}_{k\in\mathbb{N}}$ en est un supplémentaire dans Z_0. Par conséquent, Z_0 est engendré comme H_χ-module par Z_{-1} et par l'ensemble $\{u_s,\ \tilde{u}_s,\ s\in\mathbb{F}_q^*\}$ des $q-1$ arêtes non exceptionnelles adjacentes à $\tilde{u}$ et de leurs opposées.

Montrons la troisième assertion. Une arête sortante à distance $i+1$ s'écrit de façon unique sous la forme $u_x^\epsilon = g_x^\epsilon u$, avec $\epsilon\in\{0,1\}$, $x\in\mathbb{F}_q^{i+1-\epsilon}$. Grâce à la remarque *0.2.4*, nous observons l'image par translation par $(g_x^\epsilon\omega)$ d'un système générateur de Z_0,

$$\begin{cases} (g_x^\epsilon\omega)u & = & \tilde{u}_x^\epsilon & \in Z_i, \\ (g_x^\epsilon\omega)\tilde{u} & = & u_x^\epsilon & \in Z_i, \\ \text{et, pour tout } s\in\mathbb{F}_q & & & \\ (g_x^\epsilon\omega)u_s & = & u_{(x,s)}^\epsilon & \in Z_{i+1}, \\ (g_x^\epsilon\omega)\tilde{u}_s & = & \tilde{u}_{(x,s)}^\epsilon & \in Z_{i+1}. \end{cases}$$

L'action de H_χ commute à celle de $(g_x^\epsilon\omega)$ donc l'image du H_χ-module Z_0 par translation par $(g_x^\epsilon\omega)$ est incluse dans Z_{i+1}, et de plus, on peut définir le morphisme de H_χ-modules

$$\begin{array}{ccc} Z_0 & \longrightarrow & Z_{i+1}/Z_i \\ z & \longmapsto & (g_x^\epsilon\omega)z \mod Z_i. \end{array}$$

Il envoie u et $\tilde{u}$ sur 0, donc il se factorise par Z_{-1} et l'on note

$$\mathcal{F}_x^\epsilon : Z_0/Z_{-1} \to Z_{i+1}/Z_i$$

le morphisme obtenu. Puisque Z_0 est engendré par Z_{-1} et par l'ensemble $\{u_s, \tilde{u}_s,\ s\in\mathbb{F}_q^*\}$, le H_χ-module image de $\mathcal{F}_x^\epsilon$ est engendré par la projection dans Z_{i+1}/Z_i des éléments $\{u_{(x,s)}, \tilde{u}_{(x,s)},\ s\in\mathbb{F}_q^*\}$, c'est-à-dire des $q-1$ arêtes non exceptionnelles adjacentes à u_x^ϵ et de leurs opposées. Ainsi, le sous-module de Z_{i+1}/Z_i dont on veut démontrer qu'il est isomorphe à Z_0/Z_{-1} n'est autre que l'image de $\mathcal{F}_x^\epsilon$. On aura donc démontré la troisième assertion si l'on montre que $\mathcal{F}_x^\epsilon$ est injectif.

On a vu qu'une base de l'espace Z_0 modulo Z_{-1} est donnée par l'ensemble $\{T_1^k u_s,\ T_2^k\tilde{u}_s,\ s\in\mathbb{F}_q^*\}$. Elle est envoyée par $\mathcal{F}_x^\epsilon$ sur la projection dans Z_{i+1}/Z_i des éléments $\{T_1^k u_{(x,s)},\ T_2^k\tilde{u}_{(x,s)},\ s\in\mathbb{F}_q^*\}$, dont on sait, par définition de Z_{i+1}, qu'ils forment une famille libre de Z_{i+1} modulo Z_i. Ainsi, $\mathcal{F}_x^\epsilon$ est injectif.

On déduit aussi de ce qui précède que le sous H_χ-module image de $\mathcal{F}_x^\epsilon$ a pour base l'ensemble des projections dans Z_{i+1}/Z_i des éléments $\{T_1^k u_{(x,s)},\ T_2^k\tilde{u}_{(x,s)},\ s\in\mathbb{F}_q^*\}$.
Or, par définition, l'espace vectoriel Z_{i+1} est la somme directe de Z_i et des espaces vectoriels de base $\{T_1^k u_{(x,s)},\ T_2^k\tilde{u}_{(x,s)},\ s\in\mathbb{F}_q^*\}$, pour $\epsilon\in\{0,1\}$ et x parcourant $\mathbb{F}_q^{i+1-\epsilon}$.
Par conséquent Z_{i+1}/Z_i est la somme directe des images des morphismes $\mathcal{F}_x^\epsilon$, pour $\epsilon\in\{0,1\}$ et x parcourant $\mathbb{F}_q^{i+1-\epsilon}$. La dernière assertion est démontrée.

□

1.3.3. Considérations d'algèbre générale.— Soient K un corps commutatif et $K[x,\tilde{x}]$ la K-algèbre commutative de générateurs x et $\tilde{x}$ avec la relation $x\tilde{x}=0$. Cette K-algèbre contient la K-algèbre $K[x]$ des polynômes en l'indéterminée x, et la K-algèbre $K[\tilde{x}]$ des polynômes en l'indéterminée $\tilde{x}$.

1.3.3.1. Condition nécessaire de platitude pour un $K[x,\tilde{x}]$-module.—

Lemme 1.3.17. *Si Z est un $K[x,\tilde{x}]$-module plat, alors la suite,*

$$0 \to xZ \to Z \xrightarrow{\tilde{x}} \tilde{x}Z \to 0 \tag{29}$$

est exacte.

Démonstration. — Soit Z un $K[x,\tilde{x}]$-module plat. Alors, notant $(\tilde{x})$ l'idéal de $K[x,\tilde{x}]$ engendré par $\tilde{x}$, l'application linéaire canonique

$$\phi_{(\tilde{x})} : (\tilde{x}) \otimes_{K[x,\tilde{x}]} Z \to Z$$

est injective. Soit $z \in Z$ tel que $\tilde{x}z=0$, alors on a $\phi_{(\tilde{x})}(\tilde{x}\otimes z)=\tilde{x}z=0$, et par injectivité de $\phi_{(\tilde{x})}$, on en déduit que $\tilde{x}\otimes z=0$. Or, dans $(\tilde{x})\otimes_{K[x,\tilde{x}]} Z$, on a $\tilde{x}\otimes z=0$ si et seulement si il existe un ensemble fini J, une famille $(z_j)_{j\in J}$ d'éléments de Z et une famille $(a_j)_{j\in J}$ d'éléments de $K[x,\tilde{x}]$ tels que :

– pour tout $j\in J$, on a $\tilde{x}a_j=0$,
– $z=\sum_{j\in J} a_j z_j$.

([**9**] Chapitre 1 §2 n° 11 lemme 10).

Du fait de la structure de l'algèbre commutative $K[x,\tilde{x}]$, la première condition est équivalente à $a_j \in xK[x,\tilde{x}]$ pour tout $j\in J$. Ainsi, d'après la deuxième condition $z\in xZ$. On a montré que la suite (29) est exacte.

□

1.3.3.2. Condition suffisante de platitude. — Nous commençons par décrire la structure des $K[x,\tilde{x}]$-modules avec lesquels nous allons travailler et montrons ensuite que pour ces modules, la condition du lemme 1.3.17 est en fait suffisante.

Soit W un $K[x]$-module libre de rang fini $n\geq 1$, de base V, et $\tilde{W}$ un $K[\tilde{x}]$-module libre de même rang fini n, de base $\tilde{V}$. Puisque $K[x]$ et $K[\tilde{x}]$ sont des algèbres de polynômes sur le corps K, ce sont des anneaux intègres de sorte que W et $\tilde{W}$ sont respectivement sans $K[x]$-torsion et sans $K[\tilde{x}]$-torsion. On a les décompositions en sommes directes de K-espaces vectoriels suivantes :

$$W = < V > \oplus x\,W, \quad \tilde{W} = < \tilde{V} > \oplus \tilde{x}\,\tilde{W},$$

où $< V >$ (resp. $< \tilde{V} >$) désigne le K-espace vectoriel de base V (resp. $\tilde{V}$).

On se donne deux applications K-linéaires : f_x de l'espace vectoriel $< \tilde{V} >$ dans l'espace vectoriel $< V >$, et $f_{\tilde{x}}$ de l'espace vectoriel $< V >$ dans l'espace vectoriel $< \tilde{V} >$. On suppose qu'elles vérifient

$$f_x \circ f_{\tilde{x}} = 0, \;\; f_{\tilde{x}} \circ f_x = 0.$$

On peut alors définir une action linéaire de x et une action linéaire de $\tilde{x}$ sur le K-espace vectoriel

$$Z = W \oplus \tilde{W} = < V > \oplus x\,W \oplus < \tilde{V} > \oplus \tilde{x}\,\tilde{W} \tag{30}$$

comme suit : pour tous $v \in V$, $\tilde{v} \in \tilde{V}$, $w \in W$, $\tilde{w} \in \tilde{W}$,

$$x.(v, xw, \tilde{v}, \tilde{x}\tilde{w}) := (f_x(\tilde{v}), xv + x^2 w, 0, 0), \quad \tilde{x}.(v, xw, \tilde{v}, \tilde{x}\tilde{w}) := (0, 0, f_{\tilde{x}}(v), \tilde{x}\tilde{v} + \tilde{x}^2\tilde{w}).$$

Puisque $f_x \circ f_{\tilde{x}} = 0$, $f_{\tilde{x}} \circ f_x = 0$, ces actions définissent une structure de $K[x, \tilde{x}]$-module sur le K-espace vectoriel $Z = W \oplus \tilde{W}$, qui est compatible avec la structure de $K[x]$-module de W et la structure de $K[\tilde{x}]$-module de $\tilde{W}$.

Lemme 1.3.18. *La suite*

$$0 \to xZ \to Z \xrightarrow{\tilde{x}} \tilde{x}Z \to 0 \tag{29}$$

est exacte si et seulement si

$$Ker(f_{\tilde{x}}) = Im(f_x).$$

Remarque 1.3.19. – Les générateurs x et $\tilde{x}$ de la K-algèbre $K[x, \tilde{x}]$ jouent un rôle symétrique vis à vis du $K[x, \tilde{x}]$-module Z. Le lemme reste donc vrai en échangeant les rôles de x et $\tilde{x}$.

– Les applications linéaires f_x et $f_{\tilde{x}}$ entre espaces vectoriels de même dimension finie vérifient $f_x f_{\tilde{x}} = f_{\tilde{x}} f_x = 0$. Ainsi, dire que l'image f_x est égale au noyau de $f_{\tilde{x}}$ est équivalent à dire que l'image $f_{\tilde{x}}$ est égale au noyau de f_x.

Preuve du lemme 1.3.18. — Montrons tout d'abord que l'intersection de xZ et du sous-espace vectoriel de Z de base V est égale à l'image par x du sous-espace vectoriel de base $\tilde{V}$, *i.e*, à $Im(f_x)$. On rappelle la décomposition du K-espace vectoriel Z,

$$Z = < V > \oplus x\,W \oplus < \tilde{V} > \oplus \tilde{x}\,\tilde{W}. \tag{30}$$

Puisque l'action de x envoie le sous-espace vectoriel de base $\tilde{V}$ dans le sous-espace vectoriel de base V et est donnée par f_x, le sous-espace xZ se décompose comme suit :

$$xZ = Im(f_x) \oplus xW \oplus 0 \oplus 0. \tag{31}$$

Par conséquent, on a bien $xZ \cap < V > = Im(f_x)$.

Supposons que la suite (29) est exacte et montrons que $Ker(f_{\tilde{x}}) = Im(f_x)$. Il suffit de démontrer l'inclusion directe. Soit w une combinaison linéaire d'éléments de V dont l'image par $f_{\tilde{x}}$ est nulle. Par définition de l'action de $\tilde{x}$ sur le $K[x, \tilde{x}]$-module Z, cela signifie que $\tilde{x}w = 0$, et puisque la suite (29) exacte, cela implique $w \in xZ$. Ainsi, d'après ce qui précède, l'élément w, combinaison linéaire d'éléments de V appartenant à xZ, appartient à $Im(f_x)$.

Supposons que $Ker(f_{\tilde{x}}) = Im(f_x)$ et montrons que la suite (29) est exacte. Soit $z \in Z$. On note

$$z = (v, xw, \tilde{v}, \tilde{x}\tilde{w}), \quad v \in < V >, w \in W, \ \tilde{v} \in < \tilde{V} >, \tilde{w} \in \tilde{W},$$

l'écriture de z dans la décomposition de Z en somme directe de sous-espaces vectoriels donnée par (30). Alors

$$\tilde{x}z = (0, 0, f_{\tilde{x}}(v), \tilde{x}\tilde{v} + \tilde{x}^2\tilde{w}).$$

Supposons que $\tilde{x}z = 0$. D'une part, on en déduit que v appartient au noyau de $f_{\tilde{x}}$ qu'on a supposé égal à l'image de f_x : il existe $\tilde{v}' \in < \tilde{V} >$, tel que $v = f_x(\tilde{v}')$. D'autre part, on a $\tilde{x}\tilde{v} + \tilde{x}^2\tilde{w} = 0$ dans le $K[\tilde{x}]$-module sans torsion $\tilde{W}$. On en déduit que $\tilde{v} + \tilde{x}\tilde{w} = 0$, puis $\tilde{v} = \tilde{w} = 0$ car les espaces $< \tilde{V} >$ et $\tilde{x}\tilde{W}$ sont en somme directe.

On a ainsi obtenu $z = (f_x(\tilde{v}'), xw, 0, 0)$ ce qui, d'après (31), signifie que $z \in xZ$. □

Proposition 1.3.20. *Le $K[x, \tilde{x}]$-module Z est plat si et seulement si la suite,*

$$0 \to xZ \to Z \xrightarrow{\tilde{x}} \tilde{x}Z \to 0 \tag{29}$$

est exacte.

Démonstration. — Il faut prouver la condition suffisante. D'après ([**9**] Chapitre 1 §2 $n°$ 3 proposition 1 a)), il suffit, pour montrer que Z est un $K[x, \tilde{x}]$-module plat de s'assurer que, pour tout $\mathcal{A}$ idéal de $K[x, \tilde{x}]$, l'application linéaire canonique

$$\phi_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \otimes_{K[x,\tilde{x}]} Z \to Z$$

est injective. A ce titre, nous verrons que l'idéal de $K[x, \tilde{x}]$ engendré par x et $\tilde{x}$ se distingue naturellement dans l'élaboration du critère de platitude pour Z. Nous allons noter (x) (resp. $(\tilde{x})$) l'idéal de $K[x, \tilde{x}]$ engendré par x (resp. $\tilde{x}$). Puisque $x\tilde{x} = 0$, l'idéal de $K[x, \tilde{x}]$ engendré par x et $\tilde{x}$ est, comme $K[x, \tilde{x}]$-module, la somme directe de (x) et de $(\tilde{x})$, c'est pourquoi nous le noterons $(x) \oplus (\tilde{x})$. C'est un idéal maximal de $K[x, \tilde{x}]$.

1. Nous montrons que $\phi_{\mathcal{A}}$ est injectif lorsque $\mathcal{A}$ est un idéal propre de $K[x, \tilde{x}]$ qui n'est pas contenu dans l'idéal $(x) \oplus (\tilde{x})$.

   Indexons les éléments de $V = \{v_i\}_{i=1,..,n}$ et de $\tilde{V} = \{\tilde{v}_i\}_{i=1,..,n}$, et appelons X (resp. $\tilde{X}$) la matrice de f_x (resp. $f_{\tilde{x}}$) dans les bases $\tilde{V}$ et V (resp. V et $\tilde{V}$).

   Un élément générique U de $\mathcal{A} \otimes_{K[x,\tilde{x}]} Z$ s'écrit $\sum_{i=1}^n a_i \otimes v_i + \tilde{a}_i \otimes \tilde{v}_i$, avec $a_i, \tilde{a}_i \in \mathcal{A}$. Du fait de la structure de l'algèbre $K[x, \tilde{x}]$, les éléments a_i et $\tilde{a}_i$ s'écrivent de façon unique $a_i = b_i + \tilde{x}c_i$, $\tilde{a}_i = x\tilde{b}_i + \tilde{c}_i$, avec $b_i, \tilde{b}_i \in K[x]$, $c_i, \tilde{c}_i \in K[\tilde{x}]$. (Ces derniers ne sont pas forcément des éléments de l'idéal $\mathcal{A}$.) Nous allons noter a, $\tilde{a}$, b, etc... les vecteurs colonnes à cœfficients dans $K[x, \tilde{x}]$ de coordonnées $(a_i)_{1\le i\le n}$, $(\tilde{a}_i)_{1\le i\le n}$, $(b_i)_{1\le i\le n}$, etc...

   Sachant que $x\tilde{v}_i = f_x(\tilde{v}_i) = \sum_{j=1}^n X_{ji}v_j$ et $\tilde{x}v_i = f_{\tilde{x}}(v_i) = \sum_{j=1}^n \tilde{X}_{ji}\tilde{v}_j$, l'image de U par $\Phi_{\mathcal{A}}$ est l'élément de Z égale à

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n a_iv_i + \tilde{a}_i\tilde{v}_i &= \sum_{i=1}^n (b_iv_i + c_i(\sum_{j=1}^n \tilde{X}_{ji}\tilde{v}_j) + \tilde{b}_i(\sum_{j=1}^n X_{ji}v_j) + \tilde{c}_i\tilde{v}_i) \\
&= \sum_{j=1}^n (b_j + \sum_{i=1}^n X_{ji}\tilde{b}_i)v_j + \sum_{j=1}^n (\tilde{c}_j + \sum_{i=1}^n \tilde{X}_{ji}c_i)\tilde{v}_j
\end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^{n}(b+X\tilde{b})_j v_j + \sum_{j=1}^{n}(\tilde{c}+\tilde{X}c)_j \tilde{v}_j.$$

Le premier terme de l'égalité est la composante selon W, le second, la composante selon $\tilde{W}$. Ainsi, si l'image de U par $\Phi_{\mathcal{A}}$ est nulle, chacune de ces composante est nulle. Mais W est le $K[x]$-module libre de base V, $\tilde{W}$ est le $K[\tilde{x}]$-module libre de base $\tilde{V}$, donc cela implique que l'on a les égalités vectorielles

$$b+X\tilde{b}=0, \quad \tilde{c}+\tilde{X}c=0.$$

Puisque le produit $X\tilde{X}$ (resp. $\tilde{X}X$) est la matrice de l'application linéaire nulle $f_x \circ f_{\tilde{x}}$ (resp. $f_{\tilde{x}} \circ f_x$), on en déduit que $X\tilde{c}=0$ et $\tilde{X}b=0$, donc

$$\tilde{X}a+\tilde{x}\tilde{a} = \tilde{X}(b+\tilde{x}c)+\tilde{x}(x\tilde{b}+\tilde{c}) = \tilde{x}(\tilde{X}c+\tilde{c}) = 0, \tag{32}$$

$$X\tilde{a}+xa = X(x\tilde{b}+\tilde{c})+x(b+\tilde{x}c) = x(X\tilde{b}+b) = 0. \tag{33}$$

Dès lors, l'action de x sur $U \in \mathcal{A} \otimes_{K[x,\tilde{x}]} Z$ est donnée par :

$$\begin{array}{rclcl} xU & = & \sum\limits_i xa_i \otimes v_i + x\tilde{a}_i \otimes \tilde{v}_i & = & \sum\limits_i xa_i \otimes v_i + \tilde{a}_i \otimes x\tilde{v}_i, \\ & = & \sum\limits_i xa_i \otimes v_i + \tilde{a}_i \otimes (\sum_{j=1}^n X_{ji}v_j) & = & \sum\limits_j (xa_j + \sum_{i=1}^n X_{ji}\tilde{a}_i) \otimes v_j, \\ & = & \sum\limits_j (xa+X\tilde{a})_j \otimes v_j, & & \\ & = & 0, \quad \text{d'après l'égalité (32).} & & \end{array}$$

Ainsi, on vient de montrer, que sous l'hypothèse que l'image de $U \in \mathcal{A} \otimes_{K[x,\tilde{x}]} Z$ par $\phi_{\mathcal{A}}$ est nulle, alors, l'idéal annulateur de U contient x. A l'aide de l'égalité (33) on montre de même que l'idéal annulateur de U contient $\tilde{x}$.
Mais, toujours sous l'hypothèse que l'image de U par $\phi_{\mathcal{A}}$ est nulle, tout élément de $\mathcal{A}$ appartient aussi à l'idéal annulateur de U. En effet, pour tout $a \in \mathcal{A}$,

$$aU = a \otimes (\sum_{i=1}^{n} a_i v_i + \tilde{a}_i \tilde{v}_i) = a \otimes 0 = 0.$$

Puisque l'on a supposé que $\mathcal{A}$ n'est pas inclus dans l'idéal engendré par x et $\tilde{x}$ et puisque ce dernier idéal est maximal, on en déduit que $U=0$. Ainsi, l'application $\phi_{\mathcal{A}}$ est injective.

Remarque 1.3.21. Pour l'instant, nous ne nous sommes servis que de la structure du $K[x,\tilde{x}]$-module Z. L'hypothèse d'exactitude de la suite exacte (29) n'est pas encore intervenue.

2. Montrons que $\phi_{\mathcal{A}}$ est injective lorsque $\mathcal{A}$ est un idéal non nul de $K[x,\tilde{x}]$ inclus dans l'idéal (x) engendré par x, ou bien dans l'idéal $(\tilde{x})$ engendré par $\tilde{x}$.
Par symétrie des rôles de x et $\tilde{x}$, nous pouvons nous contenter de faire la démonstration dans le cas où $\mathcal{A}$ est inclus dans (x).

L'idéal (x) s'identifie avec l'idéal de $K[x]$ constitué par les polynômes en l'indéterminée x avec un terme constant nul. Par conséquent, l'idéal $\mathcal{A}$ s'identifie avec un idéal (principal) de $K[x]$. Soit $p \in K[x]-\{0\}$, tel que xp est un générateur de $\mathcal{A}$.

Un élément de $\mathcal{A} \otimes_{K[x,\tilde{x}]} Z$ s'écrit $px \otimes z$, avec $z \in Z$. Si son image par $\phi_{\mathcal{A}}$ est nulle, c'est que $(px)z = 0$. Or, d'après la description de l'action de x sur Z, l'élément xz appartient au sous-espace vectoriel W de Z. Mais puisque W est sans $K[x]$-torsion, $p(xz) = 0$ implique $xz = 0$. Puisque la suite (29) est exacte (ainsi que celle obtenue en échangeant les rôles de x et $\tilde{x}$ d'après la remarque *1.3.19*), cela signifie que $z \in \tilde{x}Z$. Mais alors dans $\mathcal{A} \otimes_{K[x,\tilde{x}]} Z$, on a $px \otimes z = 0$ puisque $x\tilde{x} = 0$. Ainsi, $\phi_{\mathcal{A}}$ est injectif.

3. De l'étape 2, on déduit que $\phi_{(x)\oplus(\tilde{x})}$ est injective.
   En effet, le K-espace vectoriel $((x) \oplus (\tilde{x})) \otimes_{K[x,\tilde{x}]} Z$ s'identifie à la somme directe
   $$(x) \otimes_{K[x,\tilde{x}]} Z \ \oplus \ (\tilde{x}) \otimes_{K[x,\tilde{x}]} Z$$
   et pour $z, \tilde{z} \in Z$, l'image par $\phi_{(x)\oplus(\tilde{x})}$ de $x \otimes z + \tilde{x} \otimes \tilde{z}$ est égale à
   $$xz + \tilde{x}\tilde{z} = \phi_{(x)}(x \otimes z) + \phi_{(\tilde{x})}(\tilde{x} \otimes \tilde{z}).$$
   Or, les espaces vectoriels $xZ \subset W$ et $\tilde{x}Z \subset \tilde{W}$ sont en somme directe. Donc, si $xz + \tilde{x}z$ est nul, chacun des termes de cette somme est nul. Par injectivité de $\phi_{(x)}$ et de $\phi_{(\tilde{x})}$, on en déduit que $x \otimes z = 0$ et $\tilde{x} \otimes \tilde{z} = 0$. Ainsi, $\phi_{(x)\oplus(\tilde{x})}$ est injective.

4. Il reste à traiter le cas d'un idéal inclus dans $(x) + (\tilde{x})$.

   On dit de Z qu'il est *plat pour l'idéal* $\mathcal{B}$ si, pour tout idéal $\mathcal{A}$ de $K[x, \tilde{x}]$ inclus dans $\mathcal{B}$, l'application linéaire naturelle $\mathcal{A} \otimes_{K[x,\tilde{x}]} Z \hookrightarrow \mathcal{B} \otimes_{K[x,\tilde{x}]} Z$ est injective.

   De l'étape 2, on déduit que Z est plat pour (x) et $(\tilde{x})$. Avec (**[9]** Chapitre 1 § 2 $n°$ 2 Lemme 5), il découle que Z est plat pour $(x) \oplus (\tilde{x})$. Ainsi, pour tout idéal $\mathcal{A}$ inclus dans $(x) \oplus (\tilde{x})$, l'application
   $$\mathcal{A} \otimes_{K[x,\tilde{x}]} Z \to (x) \oplus (\tilde{x}) \otimes_{K[x,\tilde{x}]} Z$$
   est injective. D'après l'étape 3, l'application
   $$(x) \oplus (\tilde{x}) \otimes_{K[x,\tilde{x}]} Z \to Z$$
   est également injective. Ainsi, $\phi_{\mathcal{A}}$, qui est la composée de ces applications, est injective.

□

1.3.3.3. Exemples. — On rappelle que la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre H_χ est la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre commutative de générateurs T_1 et T_2 avec la relation $T_1T_2 = 0$. C'est donc une algèbre de type $K[x, \tilde{x}]$ décrite au paragraphe 1.3.3.

A) Le H_χ-module Z_0 rentre dans le cadre que nous avons décrit au paragraphe 1.3.3.2. En effet, par sa définition, il est la somme directe du $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel de base $\{T_1^k v, v \in V_0\}_{k\in\mathbb{N}}$ et du $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel de base $\{T_2^k \tilde{v}, v \in V_0\}_{k\in\mathbb{N}}$, c'est-à-dire du $\overline{\mathbb{F}}_p[T_1]$-module libre de base V_0 et du $\overline{\mathbb{F}}_p[T_2]$-module libre de base $\tilde{V}_0$.

De plus, d'après $\mathbf{G}_{\mathbf{1}}^{\chi}$ et $\mathbf{G}_{\mathbf{2}}^{\chi}$, l'action de T_1 (resp. T_2) induit une application linéaire de l'espace vectoriel de base $\tilde{V}_0$ (resp. V_0) à valeurs dans l'espace vectoriel de base V_0 (resp. $\tilde{V}_0$). On la notera $\mathcal{T}_1$ (resp. $\mathcal{T}_2$).

B) Le quotient Z_0/Z_{-1} est un autre exemple de H_χ-module qui rentre dans le cadre du paragraphe 1.3.3.2. Pour $v \in Z_0$, on désigne par $\overline{v} \in Z_0/Z_{-1}$ sa projection dans le module quotient. On a vu dans la preuve du lemme 1.3.16 qu'une base de Z_0/Z_{-1} comme espace vectoriel est donnée par

$$\{T_1^k\overline{u_s},\ T_2^k\overline{\tilde{u}_s},\ s \in \mathbb{F}_q^*\}.$$

Ainsi, en posant $V = \{\overline{u_s},\ s \in \mathbb{F}_q^*\}$, $\tilde{V} = \{\overline{\tilde{u}_s},\ s \in \mathbb{F}_q^*\}$, le $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel Z_0 est la somme directe du $\overline{\mathbb{F}}_p[T_1]$-module libre de base V et du $\overline{\mathbb{F}}_p[T_2]$-module libre de base $\tilde{V}$.

De plus, l'action de T_1 (resp. T_2) induit bien une application linéaire du sous-espace vectoriel de base $\tilde{V}$ (resp. V) dans le sous-espace vectoriel de base V (resp. $\tilde{V}$). En effet, d'après $\mathbf{G}_\mathbf{1}^\chi$, pour tout $s \in \mathbb{F}_q^*$, $T_1(\tilde{u}_s)$ est une combinaison linéaire de u, u_0, u_s, $s \in \mathbb{F}_q^*$. Mais u appartient à Z_{-1} donc $\bar{u} = 0$ et $T_1(\tilde{u})$ est égal à la somme des arêtes u_s, $s \in \mathbb{F}_q$, donc $\bar{u}_0 = -\sum_{s\in\mathbb{F}_q^*} \bar{u}_s$. Ainsi, $T_1(\overline{\tilde{u}_s})$ appartient bien au sous-espace vectoriel de Z_0/Z_{-1} de base V. On raisonne de même pour T_2.

Remarque 1.3.22. On déduit du début de la preuve du lemme 1.3.18 que l'intersection des images par T_1 et T_2 de Z_0/Z_{-1} est nulle. De plus, l'intersection de $T_1(Z_0/Z_{-1}) \oplus T_2(Z_0/Z_{-1})$ avec l'espace vectoriel de base V est égal à l'image par T_1 de l'espace vectoriel de base $\tilde{V}$.

1.3.4. Critère de platitude pour les H_χ-modules Z_i, $i \in \mathbb{N}$.—

Proposition 1.3.23. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Le H_χ-module Z_0 est plat.*
2. *On a la suite exacte de H_χ-modules*

$$0 \longrightarrow T_1Z_0 \longrightarrow Z_0 \xrightarrow{T_2} T_2Z_0 \longrightarrow 0. \tag{34}$$

3. *Les cœfficients des polynômes $(1-X)^a$, $(1-X)^{q-1-a} \in \overline{\mathbb{F}}_p[X]$ de degrés respectifs a et $q-1-a$ sont tous non nuls.*
4. *Le H_χ-module Z_0/Z_{-1} est plat.*

Corollaire 1.3.24. *Si Z_0 est un H_χ-module plat, alors Z_i est plat pour tout $i \in \mathbb{N}$.*

PREUVE DU COROLLAIRE. — Supposant que Z_0,..., Z_i sont des H_χ-modules plats, nous allons montrer que Z_{i+1} est un H_χ-module plat. Puisqu'on a la suite exacte de H_χ-modules

$$0 \longrightarrow Z_i \longrightarrow Z_{i+1} \longrightarrow Z_{i+1}/Z_i \longrightarrow 0,$$

il suffit, pour prouver que Z_{i+1} est un H_χ-module plat, de prouver que Z_{i+1}/Z_i est un H_χ-module plat ([**9**, Chapitre 1 §2 $n°$ 5 Proposition 5]). D'après le lemme 1.3.16, le H_χ-module Z_{i+1}/Z_i est une somme de copies de Z_0/Z_{-1}, qui, d'après la proposition, est un H_χ-module plat. Donc Z_{i+1}/Z_i est plat.

□

PREUVE DE LA PROPOSITION. — Nous avons vu au paragraphe 1.3.3.3 que le H_χ-module Z_0 rentre dans le cadre du paragraphe 1.3.3.2. On a noté $\mathcal{T}_1$ (resp. $\mathcal{T}_2$) l'application linéaire induite par l'action de T_1 (resp. T_2) de l'espace vectoriel de base $\tilde{V}_0$ (resp. V_0) dans l'espace vectoriel de base V_0 (resp. $\tilde{V}_0$).

L'équivalence entre les assertions 1 et 2 est alors donnée par la proposition 1.3.20. Le lemme 1.3.18 nous dit par ailleurs que l'assertion 2 est équivalente à l'égalité des espaces vectoriels $Im\mathcal{T}_1 = Ker\mathcal{T}_2$. Nous allons montrer, par le calcul explicite des rangs des applications $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$, que cette égalité est vraie si et seulement si la troisième assertion de la proposition est vérifiée.

Au chapitre précédent, nous avons défini par analyse de Fourier, des nouvelles bases $\{w, w_0, w_s, s \in \mathbb{F}_q^*\}$ et $\{\tilde{w}, \tilde{w}_0, \tilde{w}_s, s \in \mathbb{F}_q^*\}$ de l'espace vectoriel de base V_0 et de l'espace vectoriel de base $\tilde{V}_0$, dans lesquelles les actions respectives de T_2 et T_1 s'expriment simplement et sont données par le lemme 1.3.9. On y lit que

$$\begin{array}{rcl} rang(\mathcal{T}_1) & = & 2 + |\{s \in \mathbb{F}_q^* - \{1, \zeta^{q-1-a}\}\ \Phi_1(s) \neq 0\}|, \\ rang(\mathcal{T}_2) & = & 2 + |\{s \in \mathbb{F}_q^* - \{1, \zeta^{a}\}\ \Phi_2(s\zeta^{q-1-a}) \neq 0\}, \end{array}$$

où Φ_1 est la transformée de Fourier du polynôme $(1-X)^a$ et Φ_2, la transformée de Fourier inverse du polynôme $(1-X)^{q-1-a}$: on rappelle les formules

$$(1-X)^a = -\sum_{0\leq j\leq q-2} \Phi_1(\zeta^{q-1-j})X^j, \quad (1-X)^{q-1-a} = -\sum_{0\leq j\leq q-2} \Phi_2(\zeta^j)X^j. \tag{27}$$

Elles permettent de faire des calculs explicites de valeurs de Φ_1 et Φ_2 comme nous l'avons vu dans la preuve du lemme 1.3.9 (par exemple $\Phi_1(1) = -1 \neq 0$, $\Phi_1(\zeta^{q-1-a}) = -(-1)^a \neq 0$ et $\Phi_2(1) = -1 \neq 0$, et $\Phi_2(\zeta^{q-1-a}) = -(-1)^{q-1-a} \neq 0$) dont on déduit que

$$rang(\mathcal{T}_1) = |\{s \in \mathbb{F}_q^*\ \ \Phi_1(s) \neq 0\}|,$$

$$rang(\mathcal{T}_2) = |\{s \in \mathbb{F}_q^*\ \ \Phi_2(s) \neq 0\}|.$$

Puisque $T_2T_1 = 0$, on a $Im\mathcal{T}_1 = Ker\mathcal{T}_2$ si et seulement si la somme des rangs de $\mathcal{T}_1$ et de $\mathcal{T}_2$ est égale au cardinal $q+1$ de V_0. Notant r_1 (resp. r_2) le nombre de racines de Φ_1 (resp. Φ_2) dans $\mathbb{F}_q^*$, cette condition est équivalente, d'après ce qui précède, à $q-1-r_1+q-1-r_2 = q+1$, ou encore $r_1 + r_2 = q-3$.

Par comparaison des degrés des polynômes, les relations (27) permettent de voir que $\Phi_1(\zeta^j) = 0$ dès que $j \in \{1, ..., q-2-a\}$ et $\Phi_2(\zeta^j) = 0$ dès que $j \in \{q-a, ..., q-2\}$. On recense ainsi $q-a-2$ racines pour Φ_1 et $a-1$ racines pour Φ_2. Or, $(q-a-2)+(a-1) = q-3$. Ainsi, $Im\mathcal{T}_1 = Ker\mathcal{T}_2$ si et seulement si Φ_1 et Φ_2 n'ont pas d'autre racine c'est à dire si les cœfficients du polynôme $(1-X)^a \in \overline{\mathbb{F}}_p[X]$ de degré a sont tous non nuls, et les cœfficients du polynôme $(1-X)^{q-1-a} \in \overline{\mathbb{F}}_p[X]$ de degré $q-1-a$ sont tous non nuls. C'est la troisième assertion.

Enfin, la dernière assertion implique la première d'après [**9**, Chapitre 1 §2 n° 5 Proposition 5] car Z_{-1} est un H_χ-module libre donc plat d'après la remarque *1.3.15*. Il reste à démontrer que l'une des trois premières assertions implique la dernière. Pour ce faire on rappelle que Z_0/Z_{-1} rentre à son tour dans le cadre du paragraphe 1.3.3.2 comme on l'a vu au paragraphe 1.3.3.3.

Nous pouvons dès lors appliquer la proposition 1.3.20 pour dire que Z_0/Z_{-1} est un H_χ-module plat si et seulement si la suite de H_χ-modules suivante est exacte

$$0 \longrightarrow T_1(Z_0/Z_{-1}) \longrightarrow Z_0/Z_{-1} \xrightarrow{T_2} T_2(Z_0/Z_{-1}) \longrightarrow 0. \tag{35}$$

Supposons que la suite (34) de la deuxième assertion est exacte. Soit $z \in Z_0$ tel que $T_2 z \in Z_{-1}$: il existe $h, \tilde{h} \in H_\chi$, tels que

$$T_2 z = hu + \tilde{h}u,$$

dont on déduit que $T_1 hu + T_1 \tilde{h}\tilde{u} = 0$. Puisque Z_{-1} est un H_χ-module libre de base $\{u, \tilde{u}\}$, cela signifie que $T_1 h = T_1 \tilde{h} = 0$, ou encore qu'il existe $k, \tilde{k} \in H_\chi$, tels que $h = T_2 k$, $\tilde{h} = T_2 \tilde{k}$. Dès lors

$$T_2(z - ku - \tilde{k}\tilde{u}) = 0,$$

ce qui, par exactitude de la suite (34), signifie que $z - ku - \tilde{k}\tilde{u}$ appartient à $T_1 Z_0$. Ainsi, z appartient à $T_1 Z_0$ modulo Z_{-1} et la suite (35) est exacte. Ainsi, Z_0/Z_{-1} est plat.

□

1.3.4.1. Critère de platitude pour $ind_I^G \chi$.—

Proposition 1.3.25. *Les assertions suivantes sont équivalentes*

1. *Le H_χ-module $ind_I^G \chi$ est plat.*
2. *La suite de $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-modules*

$$0 \longrightarrow T_1 ind_I^G \chi \longrightarrow ind_I^G \chi \xrightarrow{T_2} T_2 ind_I^G \chi \longrightarrow 0 \tag{36}$$

   est exacte.
3. *Le H_χ-module Z_0 est plat.*
4. *Les cœfficients des polynômes $(1-X)^a$ et $(1-X)^{q-1-a} \in \overline{\mathbb{F}}_p[X]$, de degrés respectifs a et $q-1-a$, sont tous non nuls.*

Remarque 1.3.26. La platitude du H_χ-module $ind_I^G \chi$ est ainsi équivalente à celle du H_χ-module Z_0. Or, on a vu (§1.3.3.3) que le cas de Z_0 correspond exactement à celui que l'on traite dans la proposition 1.3.20. La preuve de celle-ci montre que, l'idéal $H_\chi T_1 + H_\chi T_2$ engendré par T_1 et T_2 se distingue naturellement dans le critère de platitude pour Z_0. L'apparition de cet idéal n'est pas anodine, puisque le H_χ-module quotient $H_\chi/(H_\chi T_1 + H_\chi T_2)$ correspond, par équivalence de Morita (§1.1.2), au $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, \chi \oplus \tau\chi)$-module simple supersingulier ([**43**, 3.2]).

Preuve de la proposition. — Il suffit de montrer l'équivalence entre les trois premières assertions puisque l'équivalence entre la troisième et la quatrième est donnée par la proposition 1.3.23.

Supposons que Z_0 est plat. D'après le corollaire 1.3.24, cela implique que chaque H_χ-module Z_i est plat. Or, on a montré au paragraphe 1.3.2 que le H_χ-module $ind_I^G \chi$ est la limite inductive filtrante des H_χ-modules $(Z_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Ainsi, d'après [**9**, Chapitre 1,§2,n° 3, proposition 2, (ii)], si chacun des Z_i est plat alors $ind_I^G \chi$ est plat. Par conséquent, la troisième assertion implique la première.

Le fait que la première implique la deuxième est un résultat donné par le lemme 1.3.17.

Montrons que la deuxième assertion implique la troisième. Supposons que la suite (36) est exacte. Puisque le H_χ-module Z_0 rentre dans le cadre du paragraphe 1.3.3.2, il suffit, pour montrer que Z_0 est plat, de montrer que la suite

$$0 \longrightarrow T_1 Z_0 \longrightarrow Z_0 \xrightarrow{T_2} T_2 Z_0 \longrightarrow 0, \tag{37}$$

est exacte ou encore, d'après le lemme 1.3.18, que toute combinaison linéaire de V_0 annulée par T_2 est l'image par T_1 d'une combinaison linéaire des éléments $\tilde{V}_0$. Ceci est une conséquence immédiate du fait que la suite (36) est exacte et que l'intersection de $T_1 ind_I^G \chi$ avec l'espace vectoriel de base l'ensemble V_0 des arêtes sortantes à distance 1 est égale à l'image par T_1 de l'espace vectoriel de base $\tilde{V}_0$. (En effet, $ind_I^G \chi$ a pour base $\{T_1^k v, \tilde{T}_2^k \tilde{v}, v \in V_i\}_{i\in\mathbb{N},k\in\mathbb{N}}$. L'image par T_1 de cette base est l'ensemble $\{T_1^{k+1} v, T_1 \tilde{v}, v \in V_i\}_{i\in\mathbb{N},k\in\mathbb{N}}$. Or, d'après la description géométrique de l'action de T_1, pour tous $k, i \in \mathbb{N}$, $v \in V_i$, $T_1^{k+1} v$ est une combinaison linéaire d'arêtes sortantes à distance supérieure ou égale à 2, et si $i \geq 1$, $T_1 \tilde{v}$ est une combinaison linéaire d'une arête rentrante et d'arêtes sortantes à distance supérieure ou égale à 2. Seuls les éléments de type $T_1 \tilde{v}$, $v \in \tilde{V}_0$, sont des combinaisons linéaires d'arêtes sortantes à distance 1.)

□

Nous avons achevé la preuve du théorème 1.3.1.

1.3.5. Liberté du H_χ-module $ind_I^G \chi$, lorsque $q = p$.— Lorsque le corps résiduel de F est de cardinal $q = p$, nous avons montré que le H_χ-module $ind_I^G \chi$ est plat. Nous montrons maintenant qu'il est, de surcroît, libre. Dans tout ce paragraphe, on suppose que $q = p$.

On définit le sous-ensemble J de $\mathbb{F}_p^*$ de cardinal $p - 1 - a$:

$$J := \{\zeta^{a+1}, \zeta^{a+2}, ..., \zeta^{p-1}\}.$$

Le complémentaire de $\zeta^{-a} J$ dans $\mathbb{F}_p^*$ sera noté $\mathbb{F}_p^* - (\zeta^{-a} J)$; c'est l'ensemble de cardinal a

$$\mathbb{F}_p^* - (\zeta^{-a} J) = \{\zeta^{p-a}, \zeta^{p-a+1}, ..., \zeta^{p-1}\}.$$

Lemme 1.3.27. – *Pour tout $s \in \mathbb{F}_p^*$,*

$$\begin{array}{lll} Si \quad s \in \mathbb{F}_p^* - (\zeta^{-a} J) & alors & \Phi_1(s) \neq 0 \\ Si \quad s \in \zeta^{-a} J & alors & \Phi_2(s) \neq 0. \end{array} \tag{38}$$

– Pour tout $s \in \mathbb{F}_p^*$ n'appartenant pas à J, l'élément $s' = \zeta^{-a} s$ appartient à $\mathbb{F}_p^* - (\zeta^{-a} J)$ et

$$\left\{ \begin{array}{lll} w_{\zeta^a} & = & -u + \quad (\Phi_1(1))^{-1} T_1(\tilde{w}_1) \ où \ \Phi_1(1) = -1 \\ w_s & = & \quad (\Phi_1(s'))^{-1} T_1(\tilde{w}_{s'}) \ si \ s \neq \zeta^a. \end{array} \right. \tag{39}$$

– *Pour tout $s' \in \mathbb{F}_p^*$ n'appartenant pas à $\mathbb{F}_p^* - (\zeta^{-a}J)$, l'élément $s = \zeta^a s'$ appartient à J et*

$$\left\{ \begin{array}{lcll} \tilde{w}_{\zeta^{-a}} & = & -(-1)^a\tilde{u}+ & (\Phi_2(\zeta^{-a}))^{-1}T_2(w_1) \text{ où } \Phi_2(\zeta^{-a}) = -(-1)^a \\ \tilde{w}_{s'} & = & & (\Phi_2(s'))^{-1}T_2(w_s) \text{ si } s' \neq \zeta^{-a}. \end{array} \right. \tag{40}$$

Démonstration. — Puisque $q = p$, l'écriture des polynômes Φ_1 et Φ_2 comme transformée de Fourier et transformée de Fourier inverse de $(1-X)^a$ et $(1-X)^{p-1-a}$ (voir la définition 1.3.8 et les formules (27)) nous assurent que pour tout $j \in \{1, ...p-1\}$, $\Phi_1(\zeta^j) \neq 0$ si et seulement si $j \in \{p-a-1, ..., p-1\}$, et $\Phi_2(\zeta^j) \neq 0$ si et seulement si $j \in \{1, ..., p-1-a\} \cup \{p-1\}$, ce qui donne la première assertion du lemme. Les deux suivantes en découlent avec le lemme 1.3.9. □

Le H_χ-module Z_0 est engendré, modulo Z_{-1}, par les arêtes non exceptionnelles $\{u_s, s \in \mathbb{F}_p^*\}$ adjacentes à $\tilde{u}$ et par leurs opposées (lemme 1.3.16). Les éléments $\{w_s\}_{s\in\mathbb{F}_p^*}$ ont étés obtenus par analyse de Fourier sur ces arêtes. On en déduit que $\{w_s,\ \tilde{w}_s, s \in \mathbb{F}_p^*\}$ forme également un système générateur de Z_0 modulo Z_{-1} et le lemme précédent nous dit que cela reste vrai en éliminant $\{w_s, s \in \mathbb{F}_p^* - J,\ \tilde{w}_{s'},\ s' \in \zeta^{-a}J\}$. Nous allons voir que le système alors obtenu engendre librement le H_χ-module Z_0 modulo Z_{-1}.

Proposition 1.3.28. *Le H_χ-module Z_0 est la somme directe de Z_{-1} et du H_χ-module libre de base*

$$\{w_s,\ \tilde{w}_{s'},\ s \in J,\ s' \in \mathbb{F}_p^* - (\zeta^{-a}J)\}.$$

Pour $i \in \mathbb{N}$, le H_χ-module Z_{i+1} est la somme directe de Z_i et du H_χ-module libre de base

$$\{w^0_{(x,s)},\ \tilde{w}^0_{(x,s')},\ \ s \in J,\ s' \in \mathbb{F}_p^* - (\zeta^{-a}J)\}_{x\in\mathbb{F}_p^{i+1}} \ \cup\ \{w^1_{(x,s)},\ \tilde{w}^1_{(x,s')},\ \ s \in J,\ s' \in \mathbb{F}_p^* - (\zeta^{-a}J)\}_{x\in\mathbb{F}_p^{i}}.$$

Le H_χ-module $\mathrm{ind}_I^G\chi$ est libre de base

$$\{u,\ \tilde{u},\ w_s,\ \ \tilde{w}_{s'}, w^\epsilon_{(x,s)},\ \ \tilde{w}^\epsilon_{(x,s')},\ \ \ s \in J,\ \ s' \in \mathbb{F}_p^* - (\zeta^{-a}J)\}_{\epsilon\in\{0,1\},\, x\in\mathbb{F}_q^{(\mathbb{N})}}.$$

Preuve de la proposition. — D'après la preuve du lemme 1.3.16, l'espace vectoriel Z_0 est la somme directe de Z_{-1} et de l'espace vectoriel de base $\{T_1^k u_s, T_2^k \tilde{u}_s, s \in \mathbb{F}_q^*\}$, qui, par transformée de Fourier, a aussi pour base l'ensemble $\{T_1^k w_s,\ T_2^k \tilde{w}_s, s \in \mathbb{F}_q^*\}_{k\in\mathbb{N}}$, que l'on écrit sous la forme

$$\{T_1^k w_s,\ T_2^k \tilde{w}_{\zeta^{-a}s},\ s \in J\}_{k\in\mathbb{N}} \ \cup\ \{T_2^k \tilde{w}_{s'},\ T_1^k w_{\zeta^a s'},\ s' \in \mathbb{F}_p^* - (\zeta^{-a}J)\}_{k\in\mathbb{N}}$$

Soit $s \in J$. D'après le lemme 1.3.27, $\tilde{w}_{\zeta^{-a}s}$ est égal, à un élément de Z_{-1} près, à $\Phi_2(\zeta^{-a}s)^{-1}T_2(w_s)$. De même, pour $s' \in \mathbb{F}_p^* - (\zeta^{-a}J)$, $w_{\zeta^a s'}$ est égal, à un élément de Z_{-1} près, à $\Phi_1(s')^{-1}T_1(\tilde{w}_{s'})$.

Par conséquent Z_0 est la somme directe de Z_{-1} et de l'espace vectoriel de base

$$\{T_1^k w_s,\ T_2^{k+1} w_s,\ s \in J\}_{k\in\mathbb{N}} \ \cup\ \{T_2^k \tilde{w}_{s'},\ T_1^{k+1} \tilde{w}_{s'},\ s' \in \mathbb{F}_p^* - (\zeta^{-a}J)\}_{k\in\mathbb{N}}$$

Puisque H_χ est la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre engendrée par T_1 et T_2 avec la relation $T_1T_2 = 0$, on en déduit que pour tous $s \in J$ et $s' \in \mathbb{F}_p^* - (\zeta^{-a}J)$, les éléments w_s et $\tilde{w}_{s'}$ engendrent chacun un sous-H_χ-module libre de Z_0 et que Z_0 est la somme directe de Z_{-1} et de ces H_χ-modules libres. On a montré la première assertion du lemme.

D'après le lemme 1.3.16 le H_χ-module Z_{i+1}/Z_i est une somme directe finie de copies de Z_0/Z_{-1}. Il est donc libre. Explicitement, pour tout $\epsilon \in \{0,1\}$ et $x \in \mathbb{F}_p^{i+1-\epsilon}$ nous avons montré que le morphisme de H_χ-modules

$$\begin{array}{ccc} Z_0 & \longrightarrow & Z_{i+1}/Z_i \\ z & \longmapsto & (g_x^\epsilon\omega)z \mod Z_i \end{array}$$

a pour noyau Z_{-1} et que le H_χ-module Z_{i+1}/Z_i est la somme directe des images de ces morphismes pour $\epsilon \in \{0,1\}$ et x parcourant $\mathbb{F}_p^{i+1-\epsilon}$.

Nous venons d'établir que Z_0 est la somme directe de Z_{-1} et du H_χ-module libre de base $\{w_s,\, \tilde{w}_{s'}, s \in J,\, s' \in \mathbb{F}_p^* - (\zeta^{-a}J)\}$. L'image par translation par $(g_x^\epsilon\omega)$ de cette base est l'ensemble $\{w_{(x,s)}^\epsilon,\, \tilde{w}_{(x,s')}^\epsilon, s \in J,\, s' \in \mathbb{F}_p^* - (\zeta^{-a}J)\}$. On en déduit que le H_χ-module Z_{i+1} est la somme directe de Z_i et du H_χ-module libre de base la réunion des ensembles

$$\{w_{(x,s)}^\epsilon,\, \tilde{w}_{(x,s')}^\epsilon, s \in J,\, s' \in \mathbb{F}_p^* - (\zeta^{-a}J)\}$$

pour $\epsilon \in \{0,1\}$ et x parcourant $\overline{\mathbb{F}}_p^{\,i+1-\epsilon}$.

$\square$

CHAPITRE 2

LE FONCTEUR DES $I(1)$-INVARIANTS

Nous adoptons les notations du chapitre précédent. On rappelle que le $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-module universel $\overline{\mathbb{F}}_p[I(1)\backslash G]$ définit les deux foncteurs $\mathcal{T}^{(1)}$ et $\mathcal{H}^{1)}$ suivants, introduits par les paragraphes 0.1.3.1 et 0.1.4.3 :

le foncteur $\mathcal{T}^{(1)}$ de la catégorie des $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I(1))$-modules à droite dans la catégorie des $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentations de G engendrées par leurs $I(1)$-invariants :

$$M \quad \longmapsto \quad M \otimes_{\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,I(1))} \overline{\mathbb{F}}_p[I(1)\backslash G],$$

le foncteur $\mathcal{H}^{(1)}$ dit *des $I(1)$-invariants* de la catégorie des $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentations de G engendrées par leurs $I(1)$-invariants dans la catégorie des $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I(1))$-modules à droite :

$$V \quad \longmapsto \quad Hom_G(\overline{\mathbb{F}}_p[I(1)\backslash G],\, V) \simeq V^{I(1)}.$$

Le $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-module universel $\overline{\mathbb{F}}_p[I\backslash G]$ définit de manière analogue deux foncteurs $\mathcal{T}$ et $\mathcal{H}$, dit *des I-invariants*, entre la catégorie des $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I)$-modules à droite et la catégorie des $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentations de G engendrées par leurs I-invariants.

L'objet de ce chapitre est de démontrer le théorème suivant :

Théorème 2.0.29. a) *Supposons que $F = \mathbb{Q}_p$, avec $p \neq 2$. Les foncteurs $\mathcal{T}^{(1)}$ et $\mathcal{H}^{(1)}$ sont des équivalences de catégories quasi-inverses entre la catégorie des $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I(1))$-modules à droite et la catégorie des $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentations de G engendrées par leurs $I(1)$-invariants.*

b) *Supposons que l'on est dans l'une des deux situations suivantes :*
   - *$p \neq 2$ et $F = \mathbb{F}_p((T))$.*
   - *$q > p$.*

   Il existe un $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I(1))$-module à droite simple supersingulier $\mathfrak{M}^{(1)}$ tel que le $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel $\mathcal{H}^{(1)} \circ \mathcal{T}^{(1)}(\mathfrak{M}^{(1)})$ est de dimension infinie.

Sous les hypothèses b), les foncteurs $\mathcal{T}^{(1)}$ et $\mathcal{H}^{(1)}$ ne sont pas des équivalences de catégories. En effet, ils sont adjoints l'un de l'autre, donc si l'un était une équivalence de catégories, l'autre le serait aussi et en serait un quasi-inverse. Or, un $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I(1))$-module simple supersingulier est un $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel de dimension finie, égale à 2.

Décrivons le principe de la preuve du théorème.

Plaçons nous sous l'hypothèse $F = \mathbb{Q}_p$ avec $p \neq 2$.

Pour démontrer la première assertion du théorème, il suffit, d'après la proposition 0.1.2, de s'assurer que pour tout $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I(1))$-module à droite M, l'application

$$\begin{array}{rcl} M & \longrightarrow & (\mathcal{T}^{(1)}(M))^{I(1)} \\ m & \longmapsto & m \otimes \mathbf{1}_{I(1)} \end{array} \tag{41}$$

est un isomorphisme de $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I(1))$-modules à droite, où l'on désigne par $\mathbf{1}_{I(1)}$ la fonction caractéristique de $I(1)$.

Remarque 2.0.30. Rappelons que l'espace des $I(1)$-invariants du $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-module universel $\overline{\mathbb{F}}_p[I(1)\backslash G]$ est, par définition, égal à son sous-$\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I(1))$-module libre de base $\mathbf{1}_{I(1)}$. Nous avons démontré au chapitre précédent (voir le paragraphe 1.1.3) que c'en est un facteur direct. Par conséquent, l'application (41) est injective. Reste à démontrer qu'elle est surjective.

Pour étudier l'espace des $I(1)$-invariants de $\mathcal{T}^{(1)}(M)$, nous recourons comme au chapitre précédent à la décomposition de l'unité de $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I(1))$ en une somme d'idempotents centraux orthogonaux $(\epsilon_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ et aux résultats du paragraphe 1.1.1 qui nous assurent qu'on a la décomposition en somme directe de $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-modules

$$\mathcal{T}^{(1)}(M) = M \otimes_{\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,I(1))} \overline{\mathbb{F}}_p[I(1)\backslash G] = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma} M\epsilon_\gamma \otimes_{\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,\sigma_\gamma)} ind_I^G \sigma_\gamma. \tag{42}$$

On est ainsi conduit à démontrer que, pour tout $\gamma \in \Gamma$, l'espace des $I(1)$-invariants du $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-module $M\epsilon_\gamma \otimes_{\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,\sigma_\gamma)} ind_I^G \sigma_\gamma$ est égal à l'image de l'aplication

$$M\epsilon_\gamma \otimes_{\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,\sigma_\gamma)} (ind_I^G \sigma_\gamma)^{I(1)} \longrightarrow M\epsilon_\gamma \otimes_{\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,\sigma_\gamma)} ind_I^G \sigma_\gamma.$$

Traiter le cas où γ est de cardinal 1 revient, par torsion par un caractère de G, à traiter le cas où γ est l'orbite du caractère trivial de I. C'est ce qui est fait au paragraphe 2.1.3. On y démontre que pour tout $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I)$-module à droite M, l'application linéaire $M \to (\mathcal{T}(M))^{I(1)}$, définie par $m \mapsto m \otimes \mathbf{1}_I$, est un isomorphisme. On en déduit que l'espace des $I(1)$-invariants de $\mathcal{T}(M)$ est égal à son espace des I-invariants et est isomorphe à M comme $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I)$-module à droite. Ainsi on $\mathcal{H} \circ \mathcal{T} \simeq id$. Un raisonnement analogue à celui de la proposition 0.1.2 montre alors que $\mathcal{T} \circ \mathcal{H} \simeq id$. Donc le foncteur $\mathcal{H}$ des I-invariants est une équivalence de catégories.

Lorsque $\gamma = \{\chi, \chi\tau\}$ est de cardinal 2, on est ramené par équivalence de Morita (§1.1.2) à montrer que pour tout $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, \chi)$-à droite M, l'espace des $I(1)$-invariants de $M \otimes_{\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,\chi)} ind_I^G \chi$ est égal à l'image de l'application

$$M \otimes_{\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,\chi)} (ind_I^G \chi)^{I(1)} \longrightarrow M \otimes_{\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,\chi)} ind_I^G \chi.$$

C'est l'objet du paragraphe 2.2.3.

Pour l'assertion b) du théorème, on se repose à nouveau sur la décomposition (42), et l'on montre les résultats suivants.

Au paragraphe 2.1.4, on prouve que si $F = \mathbb{F}_q((t))$ avec $q \neq 2$ ou bien si F est l'extension non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ de corps résiduel $\mathbb{F}_q$ avec $q > p$, alors l'espace des $I(1)$-invariants de $\mathcal{T}(\mathfrak{M})$ est de dimension infinie, où $\mathfrak{M}$ désigne le $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I)$-module simple supersingulier. Remarquons qu'on démontre aussi ainsi que le foncteur $\mathcal{T}$ n'est pas une équivalence de catégories, bien qu'on ait vu au chapitre précédent qu'il est exact quel que soit le cardinal du corps résiduel de F.

Au paragraphe 2.2.4, on montre que si F a pour corps résiduel $\mathbb{F}_q$ avec $q > p$, alors il existe un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère régulier χ de l'Iwahori, tel que l'espace des $I(1)$-invariants de $\mathfrak{M}_\chi \otimes_{\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,\chi)} ind_I^G \chi$ est de dimension infinie, où $\mathfrak{M}_\chi$ désigne le $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, \chi)$-caractère supersingulier. Notons γ l'orbite de χ sous l'action de $\mathfrak{S}_2$ et $\mathfrak{M}_\gamma$ le $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, \sigma_\gamma)$-module à droite simple supersingulier. Par équivalence de Morita, on a ainsi démontré que l'espace des $I(1)$-invariants de $\mathfrak{M}_\gamma \otimes_{\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,\sigma_\gamma)} ind_I^G \sigma_\gamma$ est de dimension infinie.

2.1. Le foncteur des I-invariants

Dans toute cette section, M désigne un H-module à droite, où comme au chapitre précédent, on désigne par H la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre de Hecke-Iwahori de G. On rappelle que u est l'arête de l'arbre de $\mathrm{PGL}_2(F)$ correspondant à la classe $1 \in I\backslash G$. Vue comme un élément de $\overline{\mathbb{F}}_p[I\backslash G]$, elle correspond à la fonction caractéristique de I.

L'espace des I-invariants de $\overline{\mathbb{F}}_p[I\backslash G]$ est égal à son sous-H-module libre de base u. Nous avons montré (theorème 1.2.2) que c'en est un facteur direct. Ainsi, $M \otimes_H \overline{\mathbb{F}}_p[I\backslash G]$ contient une copie de M notée $M \otimes_H u$.

Nous démontrons le théorème suivant :

Théorème 2.1.1. – *On suppose que $F = \mathbb{Q}_p$, avec $p \neq 2$. L'espace des $I(1)$-invariants du $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-module $M \otimes_H \overline{\mathbb{F}}_p[I\backslash G]$ est égal à $M \otimes_H u$.*

– *Supposons que l'on est dans l'une des deux situations suivantes :*
  – *$q \neq 2$ et $F = \mathbb{F}_q((T))$,*
  – *F est l'extension non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ de corps résiduel $\mathbb{F}_q$ avec $q > p$.*

On désigne par $\mathfrak{M}$ le H-module simple à droite supersingulier. L'espace des $I(1)$-invariants de $\mathfrak{M} \otimes_H \overline{\mathbb{F}}_p[I\backslash G]$ est de dimension infinie.

Au chapitre précédent, nous avons exhibé une famille $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de sous-H-modules de type fini de $\overline{\mathbb{F}}_p[I\backslash G]$, croissante pour l'inclusion et dont le H-module $\overline{\mathbb{F}}_p[I\backslash G]$ est la limite inductive. De plus, on a prouvé que chaque H-module Y_i est un facteur direct de Y_{i+1}, de sorte que l'on a un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p$-espaces vectoriels

$$M \otimes_H \overline{\mathbb{F}}_p[I\backslash G] \simeq \varinjlim_{i\geq 0} M \otimes_H Y_i, \tag{43}$$

où les flèches du système inductif sont injectives.

A la remarque *1.2.9*, il est apparu que chacun des Y_i est stable sous l'action du pro-p-Iwahori $I(1)$, ainsi $M \otimes_H Y_i$ possède une structure de $\overline{\mathbb{F}}_p[I(1)]$-module et l'isomorphisme (43) commute à l'action de $I(1)$. De plus, Y_i contient le H-module libre de base u comme facteur direct. Ainsi, le $M \otimes_H Y_i$ contient l'espace $I(1)$-invariant $M \otimes_H u$.

Pour traiter le cas où $F = \mathbb{F}_q((T))$, $q \neq 2$ et le cas où F est l'extension non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ de corps résiduel $\mathbb{F}_q$, $q > p$, il suffit de montrer que chaque espace $\mathfrak{M} \otimes_H Y_i$, $i \geq 2$, possède un élément $I(1)$-invariant non trivial, et non contenu dans $\mathfrak{M} \otimes_H Y_{i-1}$. C'est l'objet du paragraphe 2.1.4.

Lorsque $F = \mathbb{Q}_p$ $p \neq 2$, nous montrons que l'espace des $I(1)$-invariants de $M \otimes_H \overline{\mathbb{F}}_p[I\backslash G]$ est égal à $M \otimes_H u$ en procédant par les quatre étapes suivantes.

Etape 1 : Pour tout $i \geq 3$, nous déterminons l'image dans le quotient $(M \otimes_H Y_i)/(M \otimes_H Y_{i-2})$, d'un élément $I(1)$-invariant de $M \otimes_H Y_i$ (§2.1.3.2).

Etape 2 : On démontre à l'aide de la première étape que l'espace des $I(1)$-invariants de $M \otimes_H Y_2$ est égal à $M \otimes_H u$ (§2.1.3.3).

Etape 3 On utilise la première étape pour traiter le cas du H-module simple à droite supersingulier et montrer que l'espace des $I(1)$-invariants de $\mathfrak{M} \otimes_H \overline{\mathbb{F}}_p[I\backslash G]$ est réduit à $\mathfrak{M} \otimes_H u$ (§2.1.3.4).

Etape 4 : On démontre, par récurrence sur $i \in \mathbb{N}$, que pour tout H-module à droite M, l'espace des $I(1)$-invariants de $M \otimes_H Y_i$ est égal à $M \otimes_H u$. L'initialisation est donnée par l'étape 2. Le passage du rang i au rang $i+1$ repose sur l'étape 3 (§2.1.3.5).

2.1.1. Structure du $\overline{\mathbb{F}}_p[I(1)]$-module $\overline{\mathbb{F}}_p[I\backslash G]$. — Pour l'instant, on ne fait pas d'hypothèse sur F.

2.1.1.1. Rappelons quelques notations du chapitre précédent.
La description géométrique de l'action des générateurs S et T de H sur les arêtes de l'arbre a été donnée au paragraphe 1.2.1 ; on l'exploite en particulier sous la forme des observations $\mathbf{G_1}$, $\mathbf{G_2}$, $\mathbf{G_3}$.
Au paragraphe 1.2.2, on a défini l'ensemble des arêtes exceptionnelles de l'arbre. On a désigné par $V_0 = \{u, u_s, s \in \mathbb{F}_q\}$, l'ensemble des arêtes sortantes à distance 1. Il contient l'arête exceptionnelle u_0. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, V_{i+1} est l'ensemble des arêtes non exceptionnelles à distance $i+2$.
Pour $i \in \mathbb{N}$, le H-module Y_i a été défini au paragraphe 1.2.3. Il contient toutes les arêtes à distance $i+1$. Nous avons établi l'isomorphisme de Y_i avec une somme directe finie de H-modules projectifs :

$$Y_i = Hu \oplus \bigoplus_{v \in V_0 \cup \ldots \cup V_i - \{u, u_0\}} HSv \simeq H \oplus \bigoplus_{v \in V_0 \cup \ldots \cup V_i - \{u, u_0\}} HS. \tag{22}$$

On rappelle que l'on a distingué les arêtes de l'arbre selon deux types, 0 et 1 (§0.2.1.1 et §0.2.1.3). Les arêtes de type 1 sont les arêtes de la branche de u et leurs opposées. Les autres sont dites de type 0.

Fixons un élément $i \in \mathbb{N}$.

Notation 2.1.2. On considère les sous-H-modules de Y_i

$$Y_i^0 = \bigoplus_{\substack{v \in V_0 \cup \ldots \cup V_i - \{u, u_0\} \\ v \text{ de type } 0}} HSv, \quad Y_i^1 = Hu \oplus \bigoplus_{\substack{v \in V_0 \cup \ldots \cup V_i - \{u, u_0\} \\ v \text{ de type } 1}} HSv.$$

Ce sont des espaces supplémentaires dans Y_i.

2.1.1.2. — Etudions l'action de ω sur Y_i et ses sous-modules Y_i^0, Y_i^1.

Le H-module Hu est stable sous l'action de ω. En effet, ω envoie u sur $\tilde{u} = Tu \in Hu$. Soit $x \in \mathbb{F}_q^{i+1}$. L'action de ω envoie l'arête u_x^1 de type 1 sortante à distance $i+2$ sur l'arête u_x^0 de type 0 sortante à distance $i+1$, comme nous l'avons vu à la remarque *0.2.5*. Elle envoie donc une arête exceptionnelle de type 1 à distance $i+2$ sur une arête exceptionnelle de type 0 à distance $i+1$. Puisque l'action de ω commute à celle de H, on en déduit que l'image sous l'action de ω du H-module Y_{i+1}^1 est égale à la somme directe de Hu et de Y_i^0. De plus, ω^2 agit trivialement sur les arêtes de l'arbre, d'où

$$\omega Y_{i+1}^1 = Hu \oplus Y_i^0, \;\; Y_{i+1}^1 = Hu \oplus \omega Y_i^0. \tag{44}$$

2.1.1.3. Nous décrivons maintenant la structure de Y_i comme $\overline{\mathbb{F}}_p[I(1)]$-module.

Lemme 2.1.3. – *Les sous-espaces Y_i^1 et $Hu \oplus Y_i^0$ de Y_i sont stables sous l'action de $I(1)$.*
– *L'espace Y_i/Hu se décompose en la somme directe de H-modules et de $\overline{\mathbb{F}}_p[I(1)]$-modules*

$$Y_i/Hu \;=\; Y_i^1/Hu \;\oplus\; (Hu \oplus Y_i^0)/Hu.$$

Démonstration. — Nous démontrons la première assertion du lemme ; la deuxième s'en déduit car Y_i est la somme directe des espaces vectoriels Y_i^0 et Y_i^1 et que Hu est contenu dans Y_i^1.

Nous allons montrer par récurrence sur $i \in \mathbb{N}$, que

$$Y_i^1 = Hu \;+ \sum_{\substack{v \text{ arête sortante} \\ \text{à distance } \leq i+1 \\ \text{de type } 1}} HSv. \tag{45}$$

On en déduira que Y_i^1 est stable sous l'action de $I(1)$ car celle-ci commute à l'action de H, fixe u et conserve la distance, l'orientation, et le type des arêtes (lemme 0.2.6). Puisque ω normalise $I(1)$, et du fait de l'égalité (44), on aura ainsi aussi démontré que le sous-espace $Hu \oplus Y_i^0$ de Y_i est stable sous l'action de $I(1)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.

Pour $i = 0$, l'égalité (45) est claire puisque l'unique arête sortante à distance 1 de type 1 est u.

Pour $i = 1$, il faut s'assurer que pour toute arête v de type 1 sortante à distance 2, l'élément Sv appartient à Y_1^1. Par définition de Y_1^1, seul le cas où v est exceptionnelle nécessite une vérification. Puisque v est adjacente à u, l'arête v est d'après $\mathbf{G_2}$, une combinaison linéaire de STu et des

$q-1$ arêtes non exceptionnelles adjacentes à u. Puisque $S^2=-S$, Sv est une combinaison linéaire de STu et des images par S des $q-1$ arêtes non exceptionnelles adjacentes à u. Chacun de ces éléments appartient à Y_1^1, donc c'est aussi le cas de Sv.

Supposons la propriété vraie au rang i, avec $i\geq 1$. Pour la démontrer au rang $i+1$, il suffit de s'assurer que pour toute arête v de type 1 sortante à distance $i+2$, l'élément Sv appartient à Y_{i+1}^1. A nouveau, seul le cas où v est exceptionnelle nécessite une vérification. On désigne alors par v' l'arête sortante à distance $i+1$ à laquelle v est adjacente. Elle est de type 1. Comme dans le cas où $i=1$, Sv est une combinaison linéaire de STv' et des images par S des $q-1$ arêtes non exceptionnelles adjacentes à v', qui sont de type 1 et appartiennent à V_{i+1}. Ainsi, il suffit de vérifier que STv' appartient à Y_{i+1}^1. Puisque $i\geq 1$, v' est à son tour adjacente à une arête v'' de type 1 sortante à distance i et l'on a d'après $\mathbf{G_3}$,

$$(1+S)v'=(1+S)Tv'',\quad \text{c'est-à-dire, puisque } T^2=1,\ \ STv'=-STSv'+Sv''+STSTv''.$$

Les deux premiers termes de cette somme appartiennent à $Y_i^1\subset Y_{i+1}^1$ par hypothèse de récurrence car v' et v'' sont de type 1 à distance inférieure ou égale à $i+1$. D'autre part, STv'' est la somme des q arêtes adjacentes à v'', ou encore, puisque $S^2=-S$, $-STv''$ est la somme des images par S des q arêtes adjacentes à v''. Ces dernières arêtes sont sortantes, à distance $i+1$, de type 1, donc par hypothèse de récurrence, STv'', puis $STSTv''$, appartiennent à Y_i^1. Ainsi, STv' appartient à $Y_i^1\subset Y_{i+1}^1$.

□

2.1.1.4. — Les éléments suivants rappellent ceux qui ont été introduits par Breuil [**10**, 3.2] :

Notation 2.1.4. Pour tout $i\in\mathbb{N}$, $i\geq 1$, on définit

$$\left\{\begin{array}{lcll} X_0^0 & = & \sum_{s\in\mathbb{F}_q} su_s^0 & \in Y_0,\\ X_i^0 & = & \sum_{x\in\mathbb{F}_q^i}\sum_{s\in\mathbb{F}_q} su_{(x,s)}^0 & \in Y_i,\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcll} X_0^1 & = & \sum_{s\in\mathbb{F}_q} su_s^1 & \in Y_1,\\ X_i^1 & = & \sum_{x\in\mathbb{F}_q^i}\sum_{s\in\mathbb{F}_q} su_{(x,s)}^1 & \in Y_{i+1}.\end{array}\right.$$

Pour $i\geq 1$, $x\in\mathbb{F}_q^i$, on a vu à la remarque *0.2.5* que l'action de l'élément ω envoie l'arête u_x^1 à distance $i+1$ sur l'arête u_x^0 à distance i. On en déduit que

$$\omega X_0^1=X_0^0,\ \ \omega X_i^1=X_i^0. \tag{46}$$

Avec les notations du lemme 0.2.9, on a :

Lemme 2.1.5. *On suppose que $F=\mathbb{Q}_p$ avec $p\neq 2$. Soient $i\geq 1$, et $A\in I(1)$. L'élément $S(AX_i^0-X_i^0)$ appartient à Y_{i-1} ; l'élément $S(AX_i^1-X_i^1)$, appartient à Y_i. Explicitement, on a :*

$$S(AX_i^0-X_i^0)=\sum_{l=1}^{i}(ST)^l(\sum_{x\in\mathbb{F}_p^{i-l+1}}s_A^0(x)Su_x^0)-\sum_{l=1}^{i-1}(ST)^{l-1}(\sum_{x\in\mathbb{F}_p^{i-l}}s_A^0(x)Su_x^0)-(ST)^i(S+1)\sum_{x\in\mathbb{F}_p}s_A^0(x)u,$$

$$S(AX_i^1 - X_i^1) = \sum_{l=1}^{i}(ST)^l(\sum_{x\in\mathbb{F}_p^{i-l+1}} s_A^1(x)Su_x^1) - \sum_{l=1}^{i-1}(ST)^{l-1}(\sum_{x\in\mathbb{F}_p^{i-l}} s_A^1(x)Su_x^1) - (ST)^i(S+1)\sum_{x\in\mathbb{F}_p} s_A^1(x)Tu.$$

Le lemme 2.1.5 se montre par récurrence sur $i \in \mathbb{N}$, $i \geq 1$ grâce au lemme 0.2.9 et à la description géométrique des actions de S et T. On se servira essentiellement de la relation $\mathbf{G_3}$. Les détails de la preuve sont donnés au paragraphe 2.1.5.

2.1.2. Structure du $\overline{\mathbb{F}}_p[I(1)]$-module $M \otimes_H Y_i$.— Nous traduisons pour $M \otimes_H Y_i$ les propriétés structurelles du $\overline{\mathbb{F}}_p[I(1)]$-module Y_i que nous avons établies au paragraphe précédent.

2.1.2.1. — D'après l'isomorphisme (22), l'espace vectoriel $M \otimes_H Y_i$ est isomorphe à la somme directe de $M \otimes_H Y_{i-1}$ et d'une somme directe finie de copies de l'espace vectoriel MS. En effet on a la décomposition

$$M \otimes_H Y_i \;\simeq\; \bigoplus_{v\in V_i} M \otimes_H Sv \;\oplus\; M \otimes_H Y_{i-1},$$

où l'on note $M \otimes_H Sv$ le produit tensoriel de M avec le H-module HSv. Puisque ce dernier est isomorphe à HS, le sous-espace $M \otimes_H Sv$ de $M \otimes_H Y_i$ est isomorphe à MS.

On rappelle que l'ensemble V_i est constitué par les arêtes non exceptionnelles à distance $i+1$. Ainsi, pour tout élément de $M \otimes_H Y_i$, il existe une famille $\{m^\epsilon_{(x,s)}\}$ d'éléments de M indexée par $\epsilon \in \{0,1\}$, $x \in \mathbb{F}_q^{i-\epsilon}$, $s \in \mathbb{F}_q^*$ telle que cet élément s'écrit

$$\sum_{x\in\mathbb{F}_q^i\, s\in\mathbb{F}_p^*} m^0_{(x,s)} \otimes Su^0_{(x,s)} \;+\; \sum_{x\in\mathbb{F}_q^{i-1} s\in\mathbb{F}_q^*} m^1_{(x,s)} \otimes Su^1_{(x,s)} \quad \mathrm{mod}\ M \otimes_H Y_{i-1}.$$

Il appartient à $M \otimes_H Y_{i-1}$ si et seulement si chacune de ses composantes dans $M \otimes_H Su^\epsilon_{(x,s)}$ est nulle, ce qui est équivalent à dire que $m^\epsilon_{(x,s)}S = 0$.

2.1.2.2. Dans $M \otimes_H Y_i$, distinguons les éléments de type 0 et les éléments de type 1.

Puisque le H-module Y_i est la somme directe des H-modules Y_i^0 et Y_i^1, le $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel $M \otimes_H Y_i$ est la somme directe de son sous-espace $M \otimes_H Y_i^0$ des éléments dits *de type* 0 et de son sous-espace $M \otimes_H Y_i^1$ des éléments dits *de type* 1. Ces sous-espaces ne sont pas stables sous l'action de $I(1)$. Mais, le H-module libre Hu étant un facteur direct de Y_i, (resp. $Hu \oplus Y_i^0$, resp. Y_i^1), on déduit de la deuxième assertion du lemme 2.1.3 la décomposition en somme directe de $\overline{\mathbb{F}}_p[I(1)]$-modules :

$$[M \otimes_H Y_i]/[M \otimes_H u] \;=\; [M \otimes_H Y_i^1]/[M \otimes_H u] \;\oplus\; [M \otimes_H (Hu \oplus Y_i^0)]/[M \otimes_H u]. \tag{47}$$

Ainsi, tout élément $I(1)$-invariant de $M \otimes_H Y_i$ est égal, modulo $M \otimes_H u$, à la somme d'un élément de $M \otimes_H (Hu \oplus Y_i^0)$ qui est $I(1)$-invariant modulo $M \otimes_H u$, et d'un élément de $M \otimes_H Y_i^1$ qui est $I(1)$-invariant modulo $M \otimes_H u$.

Puisque u est invariant sous l'action de $I(1)$, on en déduit que tout élément $I(1)$-invariant de $M \otimes_H Y_i$ est égal, modulo $M \otimes_H u$, à la somme d'un élément de type 0 et d'un élément de type 1, tous deux $I(1)$-invariants modulo $M \otimes_H u$.

2.1.3. Cas où $F = \mathbb{Q}_p$, avec $p \neq 2$: le foncteur des I-invariants est une équivalence de catégories.— Dans ce paragraphe, on suppose que $F = \mathbb{Q}_p$ avec $p \neq 2$. Nous allons montrer que pout tout $i \in \mathbb{N}$, l'espace des $I(1)$-invariants de $M \otimes_H Y_i$ est réduit à $M \otimes_H u$.

2.1.3.1. — Soit $i \geq 1$. Soit U un élément de type 1 de $M \otimes_H Y_i$. Comme on l'a vu au paragraphe 2.1.2.1, il s'écrit

$$\sum_{x \in \mathbb{F}_p^{i-1}} \sum_{s \in \mathbb{F}_p} m_{(x,s)} \otimes S u^1_{(x,s)} \quad \text{mod } M \otimes_H Y_{i-1}, \quad \text{avec } m_{(x,s)} \in M \text{ et } m_{(x,0)} = 0.$$

Lemme 2.1.6. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pi^i & 1 \end{pmatrix}$. *L'élément* $AU - U$ *est égal, modulo* $M \otimes_H Y_{i-1}$, *à*

$$\sum_{x \in \mathbb{F}_p^{i-1}, s \in \mathbb{F}_p} (m_{(x,s+1)} - m_{(x,s)} - m_{(x,1)}) \otimes S u^1_{(x,s)}.$$

Démonstration. — Pour $x \in \mathbb{F}_p^{i-1}$, $s \in \mathbb{F}_p$, l'exemple *0.2.7* dit que A agit sur l'arête $u^1_{(x,s)}$ de type 1 à distance $i+1$ de la façon suivante : $Au^1_{(x,s)} = u^1_{(x,s-1)}$. Ainsi,

$$AU = \sum_{x \in \mathbb{F}_p^{i-1} s \in \mathbb{F}_p} m_{(x,s+1)} \otimes Su^1_{(x,s)} \mod M \otimes_H Y_{i-1}.$$

L'arête u^1_x (ou bien u si $i = 1$) est une arête à distance i et appartient donc à Y_{i-1}. D'après $\mathbf{G_2}$, son image par ST est égale à la somme des p arêtes, $u^1_{(x,s)}$, $s \in \mathbb{F}_p$, qui lui sont adjacentes. Ainsi,

$$u^1_{(x,0)} = -\sum_{s \in \mathbb{F}_p^*} u^1_{(x,s)} \mod Y_{i-1}, \quad \text{et}$$

$$AU = \sum_{x \in \mathbb{F}_p^{i-1} s \in \mathbb{F}_p^*} (m_{(x,s+1)} - m_{(x,1)}) \otimes Su^1_{(x,s)} \mod M \otimes_H Y_{i-1}.$$

On en déduit le lemme. □

Remarque 2.1.7. On a montré par la même occasion que pour tous $m \in M$, $x \in \mathbb{F}_p^{i-1}$ l'élément $m \otimes Su^1_{(x,0)}$ appartient au sous-espace de $M \otimes_H Y_i$

$$\bigoplus_{s \in \mathbb{F}_p^*} M \otimes_H Su^1_{(x,s)} \ \oplus \ M \otimes_H Y_{i-1}.$$

Lemme 2.1.8. *Supposons que U est $I(1)$-invariant modulo $M \otimes_H Y_{i-1}$, alors il existe $\alpha \in M$ tel que*

$$U = \alpha \otimes SX^1_{i-1} \mod M \otimes_H Y_{i-1}.$$

Démonstration. — L'élément U est en particulier fixé, modulo $M \otimes_H Y_{i-1}$, par l'action de la matrice A du lemme 2.1.6. On en déduit, à l'aide des observations du paragraphe 2.1.2.1, que $(m_{(x,s+1)} - m_{(x,s)} - m_{(x,1)}) \otimes Su^1_{(x,s)} = 0$, pour tous $x \in \mathbb{F}_p^{i-1}$, $s \in \mathbb{F}_p^*$, de sorte que $(m_{(x,s+1)} - m_{(x,s)} - m_{(x,1)})S = 0$. Ainsi,

$$m_{(x,s)}S = sm_{(x,1)}S.$$

Montrons que l'élément $m_{(x,1)}S$ ne dépend pas de x. Soit $x_0 \in \mathbb{F}_p^{i-1}$, fixé. On a vu au paragraphe 0.2.2.1 que l'action de $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\pi a(x_0) & 1 \end{pmatrix}$ envoie l'arête $u^1_{(x,s)}$ sur l'élément

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\pi(a(x_0,0) + a(x,s)) & \pi^i \end{pmatrix} u.$$

C'est un élément de type 1, qui s'écrit $u^1_{(x_0,*)}$ à condition que $a(x_0,0) + a(x,s) = a(x_0,*)$, c'est à dire, si $x = 0$. Dans ce cas, $a(x_0,0) + a(0,s) = a(x_0,s)$, et B envoie l'arête $u^1_{(0,s)}$ sur $u^1_{(x_0,s)}$.
Par conséquent, et d'après la remarque *2.1.7*, la composante de BU dans la somme directe $\bigoplus_{s \in \mathbb{F}_p^*} M \otimes Su^1_{(x_0,s)}$ est égale à

$$B \sum_{s \in \mathbb{F}_p^*} m_{(0,s)} \otimes Su^1_{(0,s)} \ = \ \sum_{s \in \mathbb{F}_p^*} m_{(0,s)} \otimes Su^1_{(x_0,s)},$$

ou encore, puisque, $m_{(0,s)}S = sm_{(0,1)}S$, à

$$\sum_{s\in\mathbb{F}_p^*} sm_{(0,1)} \otimes Su^1_{(x_0,s)}$$

tandis que la composante de U dans cette même somme directe est

$$\sum_{s\in\mathbb{F}_p^*} m_{(x_0,s)} \otimes Su^1_{(x_0,s)} = \sum_{s\in\mathbb{F}_p^*} sm_{(x_0,1)} \otimes Su^1_{(x_0,s)}.$$

Puisque U est fixé, modulo $M \otimes_H Y_{i-1}$, par l'action de $B \in I(1)$, on a, pour tout $s \in \mathbb{F}_p^*$:

$$sm_{(x_0,1)} \otimes Su^1_{(x_0,s)} = sm_{(0,1)} \otimes Su^1_{(x_0,s)}.$$

On en déduit, avec les observations du paragraphe 2.1.2.1, que l'élément $m_{(x_0,1)}S = m_{(0,1)}S$ ne dépend pas de x_0. En posant $\alpha = m_{(0,1)}$, on a démontré que, pour tous $x \in \mathbb{F}_p^{i-1}$, $s \in \mathbb{F}_p$, on a $m_{(x,s)}S = s\alpha S$. Ainsi,

$$\begin{array}{rclcl} U & = & \sum\limits_{x\in\mathbb{F}_p^{i-1}s\in\mathbb{F}_p} m_{(x,s)}S \otimes u^1_{(x,s)} & = & \sum\limits_{x\in\mathbb{F}_p^{i-1}s\in\mathbb{F}_p} s\alpha S \otimes u^1_{(x,s)} \mod M \otimes Y_{i-1} \\ & = & \sum\limits_{x\in\mathbb{F}_p^{i-1}s\in\mathbb{F}_p} s\alpha \otimes Su^1_{(x,s)} & = & \alpha \otimes S \sum\limits_{x\in\mathbb{F}_p^{i-1}s\in\mathbb{F}_p} su^1_{(x,s)} \mod M \otimes Y_{i-1}, \end{array}$$

c'est-à-dire $U = \alpha \otimes SX^1_{i-1} \mod M \otimes_H Y_{i-1}$.

□

2.1.3.2. —

Proposition 2.1.9. *Supposons que $i \geq 2$. Un élément $I(1)$-invariant de $M \otimes_H Y_i$ est de la forme*

$$\alpha^0 \otimes SX^0_i + \beta^0 \otimes SX^0_{i-1} + \alpha^1 \otimes SX^1_{i-1} + \beta^1 \otimes SX^1_{i-2} \mod M \otimes_H Y_{i-2}$$

avec $\alpha^0, \alpha^1, \beta^0, \beta^1$ des éléments de M vérifiant

$$\alpha^0 STS = 0 \text{ et } \alpha^0 S = \beta^0 STS,$$
$$\alpha^1 STS = 0.$$

Si $i \geq 3$, on a de plus $\alpha^1 S = \beta^1 STS$.

Démonstration. — On se donne un élément $I(1)$-invariant de $M \otimes_H Y_i$. D'après les résultats du paragraphe 2.1.2, il est égal, modulo $M \otimes_H u$, à la somme d'un élément de type 1 et d'un élément de type 0 qui sont chacun $I(1)$-invariants modulo $M \otimes_H u$.

Nous allons déterminer, modulo $M \otimes_H Y_{i-2}$, la forme d'un élément de type 1 de $M \otimes_H Y_i$ que l'on suppose $I(1)$-invariant modulo $M \otimes_H u$. Notons U un tel élément.

Puisque $i \geq 2$, $M \otimes_H Y_{i-1}$ contient $M \otimes_H u$ et l'on peut appliquer le lemme 2.1.8 à U : il existe $\alpha \in M$, tel que

$$U = \alpha \otimes SX^1_{i-1} \ mod\, M \otimes_H Y_{i-1}.$$

Il existe donc un élément W de type 1 de $M \otimes Y_{i-1}$ tel que

$$U = \alpha \otimes SX^1_{i-1} + W \ mod\, M \otimes_H Y_{i-2}.$$

Il s'écrit sous la forme générique $W = \sum_{x\in\mathbb{F}_p^{i-2}} \sum_{s\in\mathbb{F}_p} m_{(x,s)} \otimes Su^1_{(x,s)}$, avec $m_{(x,s)} \in M$, $m_{(x,0)} = 0$.

Pour $A \in I(1)$, la composante modulo $M \otimes_H Y_{i-2}$ de $\alpha \otimes S(AX^1_{i-1} - X^1_{i-1})$ est donnée par le lemme 2.1.5 :

$$\alpha \otimes S(AX^1_{i-1} - X^1_{i-1}) = \alpha ST \otimes \sum_{x\in\mathbb{F}_p^{i-2}, s\in\mathbb{F}_p} s^1_A(x,s) Su^1_{(x,s)} \mod M \otimes_H Y_{i-2}. \tag{48}$$

Dans le cas particulier où $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pi^{i-1} & 1 \end{pmatrix}$, le cœfficient $s^1_A(x,s)$ est égal à $Q(1,s)$. (C'est l'exemple *0.2.11*). En particulier, il est nul pour $s = 0$.

Le lemme 2.1.6 appliqué à W donne la composante modulo $M \otimes_H Y_{i-2}$ de $AW - W$:

$$AW - W = \sum_{x\in\mathbb{F}_p^{i-2} s\in\mathbb{F}_p^*} (m_{(x,s+1)} - m_{(x,s)} - m_{(x,1)}) \otimes Su^1_{(x,s)} \mod M \otimes_H Y_{i-2}.$$

Puisque U est $I(1)$-invariant modulo $M \otimes_H Y_{i-2}$, on en déduit que pour tous $x \in \mathbb{F}_p^{i-2}$, $s \in \mathbb{F}_p^*$, on a

$$(m^1_{(x,s+1)} - m^1_{(x,s)} - m^1_{(x,1)}) \otimes Su^1_{(x,s)} = -\alpha Q(1,s) ST \otimes Su^1_{(x,s)}$$

ce qui, appliquant les observations du paragraphe 2.1.2.1, donne l'égalité

$$(m^1_{(x,s+1)} - m^1_{(x,s)} - m^1_{(x,1)})S = -\alpha Q(1,s) STS.$$

A x fixé, nous la sommons sur tous les $s \in \mathbb{F}_p$. Puisqu'on travaille sur $F = \mathbb{Q}_p$, l'égalité (7) de la remarque *0.2.12* dit que le terme obtenu à droite vaut $-\alpha STS$. Le terme obtenu à gauche est nul. D'où

$$\alpha STS = 0.$$

Mais alors, l'égalité (48), valable pour $A \in I(1)$ quelconque, montre que, comme U, l'élément $\alpha \otimes SX^1_{i-1}$ est $I(1)$ invariant modulo $M \otimes_H Y_{i-2}$. Par conséquent, c'est aussi le cas de W auquel on applique le lemme 2.1.8 qui fournit un élément $\beta \in M$ tel que

$$W = \beta \otimes SX^1_{i-2} \mod M \otimes_H Y_{i-2}.$$

Supposons de plus que $i \geq 3$. Nous travaillons maintenant modulo $M \otimes_H Y_{i-3}$. Il existe un élément W' de type 1 de $M \otimes_H Y_{i-2}$ tel que U est de la forme

$$\alpha \otimes SX^1_{i-1} + \beta \otimes SX^1_{i-2} + W' \mod M \otimes_H Y_{i-3},$$

et qui s'écrit sous la forme générique $W' = \sum_{x\in\mathbb{F}_p^{i-3}} \sum_{s\in\mathbb{F}_p} \sum m_{(x,s)} \otimes Su^1_{(x,s)}$ où $m_{(x,0)} = 0$.

On a vu que, puisque $\alpha STS = 0$, l'élément $\alpha \otimes SX^1_{i-1}$ est $I(1)$-invariant modulo $M \otimes_H Y_{i-2}$. Pour $A \in I(1)$, le lemme 2.1.5 donne la composante de $\alpha \otimes S(AX^1_{i-1} - X^1_{i-1})$ modulo $M \otimes_H Y_{i-3}$:

$$\alpha \otimes S(AX^1_{i-1} - X^1_{i-1}) = -\alpha \otimes \sum_{x\in\mathbb{F}_p^{i-3}, s\in\mathbb{F}_p} s^1_A(x,s) Su^1_{(x,s)} \mod M \otimes_H Y_{i-3}.$$

Celle de $\beta \otimes S(AX^1_{i-2} - X^1_{i-2})$ est, elle aussi, donnée par le lemme 2.1.5. C'est la formule (48) au rang $i-2$:

$$\beta \otimes S(AX^1_{i-2} - X^1_{i-2}) = \beta ST \otimes \sum_{x \in \mathbb{F}_p^{i-3}, s \in \mathbb{F}_p} s^1_A(x,s) S u^1_{(x,s)} \mod M \otimes_H Y_{i-3}.$$

On choisit maintenant $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pi^{i-2} & 1 \end{pmatrix}$, de sorte que les cœfficients $s^1_A(x,s)$ ci-dessus sont égaux à $Q(1,s)$, et donc nuls lorsque $s=0$ (c'est l'exemple *0.2.11*) et que l'action de A sur W' est donnée par le lemme 2.1.6 :

$$AW' - W' = \sum_{x \in \mathbb{F}_p^{i-3} s \in \mathbb{F}_p^*} (m_{(x,s+1)} - m_{(x,s)} - m_{(x,1)}) \otimes S u^1_{(x,s)} \mod M \otimes_H Y_{i-3}.$$

Puisque U est $I(1)$-invariant modulo $M \otimes_H u \subset M \otimes Y_{i-3}$, on a pour tous $\mathbb{F}_p^{i-3}$ et $s \in \mathbb{F}_p^*$,

$$0 = (-\alpha Q(1,s) + \beta STQ(1,s) + m_{(x,s+1)} - m_{(x,s)} - m_{(x,1)}) \otimes S u^1_{(x,s)},$$

$$\text{puis} \quad Q(1,s)(\alpha S - \beta STS) = (m_{(x,s+1)} - m_{(x,s)} - m_{(x,1)})S.$$

Sommant, à x fixé, cette égalité sur tous les $s \in \mathbb{F}_p$, le terme de gauche devient $\alpha S - \beta STS$, et celui de droite est nul. Ainsi, on a

$$\alpha S = \beta STS.$$

On a démontré qu'un élément de type 1 *de* $M \otimes_H Y_i$, $i \geq 2$, *qui est* $I(1)$*-invariant modulo* $M \otimes_H u$ *est de la forme*

$$\alpha^1 \otimes SX^1_{i-1} + \beta^1 \otimes SX^1_{i-2} \mod M \otimes_H Y_{i-2}$$

avec α^1, $\beta^1 \in M$ *vérifiant* $\alpha^1 STS = 0$. *Si de plus* $i \geq 3$, *on a* $\alpha^1 S = \beta^1 STS$.

Nous voulons maintenant donner la forme d'un élément de type 0 de $M \otimes_H Y_i$, $i \geq 2$, qui est $I(1)$-invariant modulo $M \otimes_H u$. Le résultat provient de ce qui précède, en se servant de la propriété fondamentale de l'action de ω que l'on a vue au paragraphe 2.1.1.2 : l'action de ω envoie un élément de Y^0_i sur un élément de Y^1_{i+1}.
Ainsi, un élément U de type 0 de $M \otimes_H Y_i$ est envoyé par ω sur un élément de type 1 de $M \otimes_H Y_{i+1}$. Si l'élément U est $I(1)$-invariant modulo $M \otimes_H u$, c'est aussi le cas de ωU puisque ω normalise $I(1)$ et fixe l'arête u. Ainsi, on peut appliquer le résultat précédent au rang $i+1$ à l'élément de type 1 de ωU : il existe $\alpha^0, \beta^0 \in M$, avec $\alpha^0 STS = 0$, et $\alpha^0 S = \beta^0 STS$, tels que

$$\omega U = \alpha^0 \otimes SX^1_i + \beta^0 \otimes SX^1_{i-1} \mod M \otimes_H Y_{i-1}.$$

L'élément ω^2 agit trivialement sur les arêtes de l'arbre, donc

$$U = \alpha^0 \otimes \omega SX^1_i + \beta^0 \otimes \omega SX^1_{i-1} \mod M \otimes_H \omega Y_{i-1}.$$

Toujours par la propriété de l'action de ω, et comme on l'a vu suite à la définition des éléments X^0_i, X^1_i, on a $\omega X^1_i = X^0_i$, $\omega X^1_{i-1} = X^0_{i-1}$. Donc l'élément $U - \alpha^0 \otimes SX^0_i - \beta^0 \otimes SX^0_{i-1}$ de type 0 appartient à $M \otimes_H \omega Y_{i-1}$.

Au paragraphe 2.1.1.2 nous avons interprété la propriété de l'action de ω sous la forme : $\omega Y^1_{j+1} = Hu \oplus Y^0_j$ pour $j \geq 0$. On en déduit que

$$\omega Y_{i-1} = \omega(Y^0_{i-1}) \oplus \omega(Y^1_{i-1}) = \omega(Y^0_{i-1}) \oplus Hu \oplus Y^0_{i-2} = \omega(Y^0_{i-1} \oplus Hu) \oplus Y^0_{i-2} = Y^1_i \oplus Y^0_{i-2}.$$

Ainsi, un élément de type 0 de $M \otimes_H Y_i$ appartenant à $M \otimes_H \omega Y_{i-1}$ appartient en fait à $M \otimes_H Y_{i-2}$. Par conséquent,

$$U - \alpha^0 \otimes SX^0_i - \beta^0 \otimes SX^0_{i-1} \in M \otimes_H Y_{i-2}.$$

On a démontré qu'un élément de type 0 *de* $M \otimes_H Y_i$, $i \geq 2$, *qui est* $I(1)$*-invariant modulo* $M \otimes_H u$ *est de la forme*

$$\alpha^0 \otimes SX^0_i + \beta^0 \otimes SX^0_i \mod M \otimes_H Y_{i-2}$$

avec $\alpha^0, \beta^0 \in M$ *vérifiant* $\alpha^0 STS = 0$ *et* $\alpha^0 S = \beta^0 STS$.

La proposition est démontrée.

□

2.1.3.3. Espace des $I(1)$*-invariants de* $M \otimes_H Y_2$. — Soit U un élément de $I(1)$-invariant de $M \otimes_H Y_2$. Nous allons montrer qu'il appartient à $M \otimes_H u$.

D'après la proposition 2.1.9, il existe $\alpha^0, \beta^0, \alpha^1, \beta^1 \in M$, $m \in M$, et $\{m_s\}_{s \in \mathbb{F}_p} \in M$, avec $m_0 = 0$, tels que

$$\alpha^0 STS = 0, \ \alpha^0 S = \beta^0 STS, \quad \alpha^1 STS = 0, \quad \text{et} \tag{49}$$

$$U = \alpha^0 \otimes SX^0_2 + \beta^0 \otimes SX^0_1 + \alpha^1 \otimes SX^1_1 + \beta^1 \otimes SX^1_0 + z, \ \text{ avec } z = \sum_{s \in \mathbb{F}_p} m_s \otimes Su_s + m \otimes u \in M \otimes Y_0.$$

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Son action envoie l'arête u_s de type 0 sur l'arête u_{s-1}, comme le montre l'exemple *0.2.7*. La vérification $(g^1_s)^{-1} A g^1_s \in I(1)$ montre que l'action de A fixe les arêtes u^1_s de type 1. Ainsi, l'action de A sur les deux derniers termes de U est :

$$\begin{aligned} Az - z &= \sum_{s \in \mathbb{F}_p} (m_{s+1} - m_s) \otimes Su_s \\ &= \sum_{s \in \mathbb{F}^*_p} (m_{s+1} - m_s - m_1) \otimes Su_s - m_1 \otimes Su \ \text{ car, d'après } \mathbf{G_1}, \ Su_0 = -Su - \sum_{s \in \mathbb{F}^*_p} Su_s, \end{aligned}$$

et $\beta^1 \otimes S(AX^1_0 - X^1_0) = 0$.

Le lemme 2.1.5 décrit explicitement l'action de A sur les trois premiers termes de l'écriture de U. On la donne ici, en tenant compte des relations (49) et en remplaçant les cœfficients $s^0_A(s)$ par leur valeur $Q(1, s)$ donnée par l'exemple *0.2.11* :

$$\begin{aligned}
\alpha^0 \otimes S(AX_2^0 - X_2^0) &= -\alpha^0 \otimes \sum_{s\in\mathbb{F}_p} Q(1,s)Su_s \\
\beta^0 \otimes S(AX_1^0 - X_1^0) &= \alpha^0 \otimes \sum_{s\in\mathbb{F}_p} Q(1,s)Su_s - \beta^0 ST(S+1)\otimes u \\
\alpha^1 S \otimes S(AX_1^1 - X_1^1) &= -\alpha^1(\sum_{s\in\mathbb{F}_q} s_A^1(s))S\otimes u
\end{aligned}$$

Or, chacune des composantes de $AU-U$ dans la somme directe $M\otimes_H Y_0 = \bigoplus_{s\in\mathbb{F}_p^*} M\otimes_H Su_s \oplus M\otimes_H u$ est nulle, donc

$$\left\{\begin{array}{lcl} -m_1 S - \beta^0 ST(S+1) - \alpha^1(\sum_{s\in\mathbb{F}_q} s_A^1(s))S &=& 0 \\ (m_{s+1} - m_s - m_1^0)S &=& 0 \quad \text{pour tout } s\in\mathbb{F}_p. \end{array}\right. \tag{50}$$

On multiplie la première égalité à droite par $(S+1)$. Sachant que $S(S+1)=0$, on obtient $\beta^0 ST(S+1)=0$, c'est à dire $\beta^0 STS + \beta^0 ST = 0$. Or $\alpha^0 S = \beta^0 STS$, donc $\alpha^0 S + \beta^0 ST = 0$, ce qui, combiné avec le fait que $\alpha^0 STS = 0$ et que $T^2 = 1$, donne $\beta^0 S = 0$ puis $\alpha^0 S = 0$. D'où

$$U = \alpha^1 \otimes SX_1^1 + \beta^1 \otimes SX_0^1 + z.$$

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pi & 1 \end{pmatrix}$. La vérification $(g_s^0)^{-1} A g_s^0 \in I(1)$ montre que A fixe les arête de type 0 à distance 1, donc A fixe z. Pour calculer l'action de A sur $\beta^1 \otimes SX_0^1$, on rappelle que A envoie l'arête u_s^1 sur l'arête u_{s-1}^1 (exemple *0.2.7*). Ainsi, d'après la description $\mathbf{G}_2$ de l'action de ST,

$$\beta^1 \otimes S(AX_0^1 - X_0^1) = \beta^1 \otimes \sum_{s\in\mathbb{F}_p} S(su_{s-1}^1 - su_s^1) = \beta^1 \otimes S\sum_{s\in\mathbb{F}_p} u_s^1 = \beta^1 \otimes S(STu) = -\beta^1 \otimes STu.$$

Le lemme 2.1.5 permet de calculer l'action de A sur $\alpha^1 \otimes SX_1^1$, sachant, d'après l'exemple *0.2.11*, que $s_A^1(s) = Q(1,s)$ et $\sum_{s\in\mathbb{F}_p} Q(1,s) = 1$. On a

$$\alpha^1 \otimes S(AX_1^1 - X_1^1) = -\alpha^1 ST(S+1)\otimes Tu = -\alpha^1 \otimes Su \text{ car } \alpha^1 STS = 0.$$

On en déduit que $\alpha^1 S + \beta^1 ST = 0$. Or, $\beta^1 S = -\beta^1 ST(TS)$, donc $\beta^1 S = \alpha^1 STS = 0$. Ainsi, $\alpha^1 S = \beta^1 S = 0$ et $U = z$. Mais les relations (50) donnent désormais $m_s S = 0$ pour tout $s \in \mathbb{F}_p$, donc $U = m \otimes u \in M \otimes_H u$.

2.1.3.4. Espace des $I(1)$-invariants de $\mathfrak{M}\otimes_H \overline{\mathbb{F}}_p[I\backslash G]$.— Soit $\mathfrak{M}$ le H-module à droite supersingulier ([**43**, 3.2]). Il a pour $\overline{\mathbb{F}}_p$-base $\{v, vT\}$ vérifiant

$$vS = -v,\ vTS = 0, \text{ et } T^2 \text{ agit par 1 sur } \mathfrak{M}.$$

Remarque 2.1.10. Le morphisme de H-modules à droite défini par

$$\begin{array}{ccc} H/(TSH+(S+1)H) & \twoheadrightarrow & \mathfrak{M} \\ 1 & \mapsto & v \end{array}$$

est un isomorphisme car le $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel $H/(TSH+(S+1)H)$ est de dimension 2 de base les images $[1]$ et $[T]$ de 1 et T dans le module quotient.

En effet, le $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel H a pour base

$$(ST)^j,\ T(ST)^j,\ S(TS)^j,\ (TS)^j \quad j\in\mathbb{N}$$

et ces éléments vérifient : pour $j\geq 1$, $T(ST)^j$, $(TS)^j$, $S(TS)^j=(S+1)(TS)^j-(TS)^j\in TSH+(S+1)H$, pour $j\geq 2$, $(ST)^j=(S+1)T(ST)^{j-1}-T(ST)^{j-1}\in TSH+(S+1)H$.

Proposition 2.1.11. *L'espace des $I(1)$-invariants de $\mathfrak{M}\otimes_H\overline{\mathbb{F}}_p[I\backslash G]$ est égal à $\mathfrak{M}\otimes_H u$.*

Démonstration. — Soit U un élément de $\mathfrak{M}\otimes_H\overline{\mathbb{F}}_p[I\backslash G]$ que l'on suppose $I(1)$-invariant. Soit

$$i:=min\{k\in\mathbb{N},\ U\in\mathfrak{M}\otimes_H Y_k\}.$$

Si $i\leq 2$, l'élément $I(1)$-invariant $U\in\mathfrak{M}\otimes_H Y_2$ appartient bien à $\mathfrak{M}\otimes_H u$, d'après le paragraphe 2.1.3.3. Supposons que $i\geq 3$. D'après la proposition 2.1.9, il existe $\alpha^0,\beta^0,\alpha^1,\beta^1\in\mathfrak{M}$ vérifiant $\beta^0STS=\alpha^0S$, $\beta^1STS=\alpha^1S$, tels que

$$U=\alpha^0\otimes SX_i^0+\beta^0\otimes SX_{i-1}^0+\alpha^1\otimes SX_{i-1}^1+\beta^1\otimes SX_{i-2}^1 \mod \mathfrak{M}\otimes_H Y_{i-2}.$$

D'après la remarque précédente, STS annule tout élément du H-module à droite $\mathfrak{M}$. Donc, $\alpha^0S=\alpha^1S=0$ et $U\in\mathfrak{M}\otimes_H Y_{i-1}$ ce qui est en contradiction avec la définition de i. □

2.1.3.5. Espace des $I(1)$-invariants de $M\otimes_H Y_i$, pour $i\in\mathbb{N}$, $i\in N$. —

Proposition 2.1.12. *Soit $i\in\mathbb{N}$. Pour tout H-module à droite M, l'espace des $I(1)$-invariants de $M\otimes_H Y_i$ est égal à $M\otimes u$.*

Démonstration. — Nous montrons la proposition par récurrence sur i.

Elle est prouvée pour $i=2$ au paragraphe 2.1.3.3. Supposons la proposition démontrée pour $i-1$ avec $i\geq 3$.

Soit U un élément de $M\otimes_H Y_i$ que l'on suppose $I(1)$-invariant.

D'après la proposition 2.1.9, il existe $\alpha^0,\alpha^1\in M$ vérifiant $\alpha^0STS=\alpha^1STS=0$, tels que

$$U=\alpha^0\otimes SX_i^0+\alpha^1\otimes SX_{i-1}^1 \mod M\otimes_H Y_{i-1}.$$

Si $\alpha^0S=\alpha^1S=0$, alors $U\in M\otimes_H Y_{i-1}$ et par hypothèse de récurrence, $U\in M\otimes_H u$.

Supposons que $\alpha^0S\neq 0$ ou $\alpha^1S\neq 0$. On a la suite exacte de H-modules à droite suivante,

$$0\to\alpha^0SH+\alpha^1SH\to M\xrightarrow{\mathcal{P}}M/(\alpha^0SH+\alpha^1SH)\to 0$$

qui, par platitude du H-module Y_i, donne la suite exacte de $\overline{\mathbb{F}}_p[I(1)]$-modules

$$0\longrightarrow(\alpha^0SH+\alpha^1SH)\otimes_H Y_i\longrightarrow M\otimes_H Y_i\xrightarrow{\mathcal{P}\otimes id_{Y_i}}\mathcal{P}(M)\otimes_H Y_i\longrightarrow 0.$$

L'image de U par $\mathcal{P} \otimes id_{Y_i}$ est un élément $I(1)$-invariant appartenant à $\mathcal{P}(M) \otimes_H Y_{i-1}$ car, par définition, on a $\mathcal{P} \otimes id_{Y_i}(\alpha^0 \otimes SX_i^0) = \mathcal{P}(\alpha^0 S) \otimes X_i^0 = 0$, et de même $\mathcal{P} \otimes id_{Y_i}(\alpha^1 \otimes SX_{i-1}^1) = 0$. Par hypothèse de récurrence, appliquée au H-module à droite $\mathcal{P}(M)$,

$$(\mathcal{P} \otimes id_{Y_i})(U) \in \mathcal{P}(M) \otimes_H u,$$

c'est-à-dire, il existe $m \in M$, tel que $\mathcal{P} \otimes id_{Y_i}(U) = \mathcal{P}(m) \otimes_H u$, ou encore

$$U - m \otimes u \in Ker(\mathcal{P} \otimes id_{Y_i}) = (\alpha^0 SH + \alpha^1 SH) \otimes_H Y_i.$$

Pour démontrer que $U \in M \otimes_H u$, il suffit donc de s'assurer que tout élément $I(1)$-invariant de $(\alpha^0 SH + \alpha^1 SH) \otimes_H Y_i$ appartient à $(\alpha^0 SH + \alpha^1 SH) \otimes_H u$.

Or pour $\epsilon \in \{0, 1\}$ le sous-H-module à droite de M engendré par $\alpha^\epsilon S$ est, s'il est non nul, isomorphe au H-module à droite supersingulier $\mathfrak{M}$ puisque $\alpha^\epsilon S(TS) = \alpha^\epsilon S(S+1) = 0$ et par l'isomorphime exhibé à la remarque *2.1.10*. Ainsi, le H-module à droite $\alpha^0 SH + \alpha^1 SH$ est isomorphe à $\mathfrak{M}$ ou bien $\mathfrak{M} \oplus \mathfrak{M}$. Le résultat est donc donné par la proposition 2.1.11. □

2.1.4. Le foncteur des I-invariants n'est pas en général une équivalence de catégories. — Soit $\mathfrak{M}$ le H-module à droite supersingulier. On suppose que l'on est dans l'un des cas suivants : $F = \mathbb{F}_q((T))$ avec $q \neq 2$, ou bien F est l'extension non ramifiée de corps résiduel $\mathbb{F}_q$ avec $q > p$.

Proposition 2.1.13. *Soit $i \geq 2$. L'élément $[1] \otimes SX_i^0$ est un élément $I(1)$-invariant de $\mathfrak{M} \otimes_H Y_i$ qui n'appartient par à $\mathfrak{M} \otimes_H Y_{i-1}$.*

Corollaire 2.1.14. *Le H-module à droite des $I(1)$-invariants de $\mathfrak{M} \otimes_H ind_I^G \chi$ est un espace vectoriel de dimension infinie.*

PREUVE DE LA PROPOSITION 2.1.13. — On rappelle que

$$X_i^0 = \sum_{x \in \mathbb{F}_q^i s \in \mathbb{F}_q} s u^0_{(x,s)}.$$

D'après l'isomorphisme (22) qui donne la décomposition de Y_i en somme directe de H-modules projectifs, il est clair que SX_i^0 est un élément de Y_i n'appartenant pas à Y_{i-1}. Ainsi, $[1] \otimes SX_i^0$ est un élément de $\mathfrak{M} \otimes_H Y_i$ n'appartenant pas à $\mathfrak{M} \otimes_H Y_{i-1}$.

Montrons que $[1] \otimes SX_i^0$ est un élément $I(1)$-invariant. Soit $A \in I(1)$.

$$\begin{aligned} A^{-1}X_i^0 &= \sum_{x \in \mathbb{F}_q^i s \in \mathbb{F}_q} s A^{-1} u^0_{(x,s)} \\ &= \sum_{x \in \mathbb{F}_q^i s \in \mathbb{F}_q} s u^0_{(r_A^0(x),\, s_A^0(x)+s)} \qquad \text{avec les notations et l'assertion 3. du lemme 0.2.9,} \\ &= \sum_{x \in \mathbb{F}_q^i s \in \mathbb{F}_q} (s - s_A^0(x)) u^0_{(r_A^0(x),s)}. \end{aligned}$$

Or, par bijectivité de r_A^0 (lemme 0.2.9-1.), $X_i^0 = \sum_{x \in \mathbb{F}_q^i s \in \mathbb{F}_q} s u^0_{(r_A^0(x),s)}$. D'où

$$\begin{aligned}
A^{-1}X_i^0 - X_i^0 &= \sum_{x\in\mathbb{F}_q^i s\in\mathbb{F}_q} (-s_A^0(x))u^0_{(r_A^0(x),s)} \\
&= \sum_{x\in\mathbb{F}_q^i} (-s_A^0(x)) \sum_{s\in\mathbb{F}_q} u^0_{(r_A^0(x),s)} \\
&= \sum_{x\in\mathbb{F}_q^i} (-s_A^0(x)) ST u^0_{r_A^0(x)} && \text{d'après la description géométrique } \mathbf{G_2} \text{ de l'action de } ST, \\
&= \sum_{x\in\mathbb{F}_q^i} (-s_A^0 \circ (r_A^0)^{-1}(x)) ST u_x^0 \\
&= \sum_{x\in\mathbb{F}_q^i} s^0_{A^{-1}}(x) ST u_x^0 && \text{avec l'assertion 4. du lemme 0.2.9.}
\end{aligned}$$

Ainsi, puisque $S^2 = -S$, on a dans $\mathfrak{M} \otimes_H Y_i$,

$$[1] \otimes S(A^{-1}X_i^0 - X_i^0) = -[1] \otimes \sum_{x\in\mathbb{F}_q^i} s^0_{A^{-1}}(x) ST u_x^0.$$

Chaque $x \in \mathbb{F}_q^i$ s'écrit $x = (x_0, ..., x_{i-1})$ et l'arête u_x^0 est adjacente à $u^0_{(x_0,...,x_{i-2})}$. On utilise alors la description géométrique $\mathbf{G_3}$ qui dit que

$$(S+1)u_x^0 = (S+1)Tu^0_{(x_0,...,x_{i-2})}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
[1] \otimes S(A^{-1}X_i^0 - X_i^0) &= -[1]S \otimes \sum_{x\in\mathbb{F}_q^i} s^0_{A^{-1}}(x)(T(S+1)Tu^0_{(x_0,..,x_{i-2})} - TSu_x^0) \\
&= -[1](STST + ST^2) \otimes \sum_{x\in\mathbb{F}_q^i} s^0_{A^{-1}}(x) u^0_{(x_0,..,x_{i-2})} + [1]STS \otimes \sum_{x\in\mathbb{F}_q^i} s^0_{A^{-1}}(x) u_x^0.
\end{aligned}$$

Or, $T^2 = 1$ et, dans le H-module à droite supersingulier $\mathfrak{M}$, on a $[1]STS = 0$. Ainsi,

$$[1] \otimes S(A^{-1}X_i^0 - X_i^0) = -[1]S \otimes \sum_{x\in\mathbb{F}_q^i} s^0_{A^{-1}}(x) u^0_{(x_0,..,x_{i-2})}$$

Mais, l'assertion 6. du lemme 0.2.9 dit que, du fait du choix de la nature du corps F que nous avons fait, on a

$$\sum_{x_{i-1}\in\mathbb{F}_q} s^0_{A^{-1}}(x_0, ..., x_{i-2}, x_{i-1}) = 0.$$

Ainsi,

$$[1] \otimes S(A^{-1}X_i^0 - X_i^0) = 0.$$

□

2.1.5. Preuve du lemme 2.1.5. — On suppose que $F = \mathbb{Q}_p$, $p \neq 2$. Soient $i \in \mathbb{N}$, $i \geq 1$, $A \in I(1)$. On démontre le lemme pour $\epsilon = 1$. Le cas $\epsilon = 0$ s'en déduit en effectuant une translation par ω^{-1}, car $X_i^1 = \omega X_i^0$ et $s_A^1 = s^0_{\omega^{-1}A\omega}$ (voir la preuve de lemme 0.2.9).

Nous pouvons reprendre le début de la preuve de la proposition 2.1.13 qui, avec les notations du lemme 0.2.9, donne l'égalité suivante dans Y_{i+1},

$$AX_i^1 - X_i^1 = \sum_{x\in\mathbb{F}_p^i} s_A^1(x) ST u_x^1.$$

Puisque $S^2 = -S$, on en déduit

$$S(AX_i^1 - X_i^1) = -S \sum_{x \in \mathbb{F}_p^i} s_A^1(x) T u_x^1 \tag{51}$$

– Si $i = 1$, en appliquant la description géométrique $\mathbf{G}_3$ qui dit que $T(S+1)u_x^1 = T(S+1)Tu$, on a pour tout $x \in \mathbb{F}_p$:

$$\begin{aligned} S(AX_1^1 - X_1^1) &= -S \sum_{x \in \mathbb{F}_p} s_A^1(x)(T(S+1)Tu - TSu_x^1) \\ &= STS \sum_{x \in \mathbb{F}_p} s_A^1(x) u_x^1 - ST(S+1) \sum_{x \in \mathbb{F}_p} s_A^1(x) Tu \end{aligned}$$

C'est la formule du lemme au rang 1.

– Supposons que le lemme est démontré pour $i \in \mathbb{N}$, $i \geq 1$.
Pour $x = (x_0, ..., x_{i-1}, x_i) \in \mathbb{F}_p^{i+1}$, l'arête u_x^1 est adjacente à $u^1_{(x_0,...,x_{i-1})}$, donc la description géométrique $\mathbf{G}_3$ dit que $Tu_x^1 = T(S+1)Tu^1_{(x_0,...,x_{i-1})} - TSu_x^1$. La relation (51) au rang $i+1$ se traduit alors par

$$S(AX_{i+1}^1 - X_{i+1}^1) = -S \sum_{x \in \mathbb{F}_p^{i+1}} s_A^1(x)(T(S+1)Tu^1_{(x_0,...,x_{i-1})} - TSu_x^1)$$

D'après le lemme 0.2.9-6., $\sum_{x_i \in \mathbb{F}_p} s_A^1(x_0, ..., x_{i-1}, x_i) = s_A^1(x_0, ..., x_{i-1})$. D'où

$$\begin{aligned} S(AX_{i+1}^1 - X_{i+1}^1) &= STS \sum_{x \in \mathbb{F}_p^{i+1}} s_A^1(x) u_x^1 - S \sum_{x \in \mathbb{F}_p^i} s_A^1(x) u_x^1 \\ &\quad - STS \sum_{x \in \mathbb{F}_p^i} s_A^1(x) Tu_x^1 \end{aligned}$$

Ainsi en utilisant l'égalité (51) au rang i,

$$\begin{aligned} S(AX_{i+1}^1 - X_{i+1}^1) &= STS \sum_{x \in \mathbb{F}_p^{i+1}} s_A^1(x) u_x^1 - S \sum_{x \in \mathbb{F}_p^i} s_A^1(x) u_x^1 \\ &\quad + STS(AX_i^1 - X_i^1) \end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, on remplace dans cette formule $STS(AX_i^1 - X_i^1)$ par

$$\sum_{l=2}^{i+1} (ST)^l \Big(\sum_{x \in \mathbb{F}_p^{i+2-l}} s_A^1(x) S u_x^1 \Big) - \sum_{l=2}^{i} (ST)^{l-1} \Big(\sum_{x \in \mathbb{F}_p^{i+1-l}} s_A^1(x) S u_x^1 \Big) - (ST)^{i+1}(S+1) \sum_{x \in \mathbb{F}_p} s_A^1(x) Tu$$

et l'on obtient

$$\begin{aligned} S(AX_{i+1}^1 - X_{i+1}^1) &= \sum_{l=1}^{i+1} (ST)^l S \sum_{x \in \mathbb{F}_p^{i+2-l}} s_A^1(x) u_x^1 - \sum_{l=1}^{i} (ST)^{l-1} S \sum_{x \in \mathbb{F}_p^{i+1-l}} s_A^1(x) u_x^1 \\ &\quad - (ST)^{i+1}(S+1) \sum_{x \in \mathbb{F}_p} s_A^1(x) Tu. \end{aligned}$$

C'est l'égalité souhaitée au rang $i+1$.

2.2. Etude de la partie régulière du foncteur des $I(1)$-invariants

Dans toute cette section on suppose que $q \neq 2$. Rappelons quelques notations introduites à la section 1.3. On fixe ζ un générateur du groupe cyclique $\mathbb{F}_q^*$. Soit $a \in \{1, ..., q-2\}$. On considère le caractère régulier $\chi = 1 \otimes \chi_2 : \mathbb{F}_q^{*2} \to \overline{\mathbb{F}}_p{}^*$ du tore fini tel que $\chi_2(\zeta) = \zeta^a$.

On désigne par $H_\chi = \mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, \chi)$ l'algèbre de Hecke du caractère χ. C'est une algèbre commutative de générateurs T_1, T_2 avec la relation $T_1T_2 = 0$.

On a identifié l'arête u de l'arbre $\mathcal{T}$ avec l'élément $f_{I,\chi}$ de l'induite compacte $ind_I^G\chi$ de support I et de valeur 1 en l'unité de G et noté $\tilde{u} = \omega.u$ son arête opposée. L'espace des $I(1)$-invariants de $ind_I^G\chi$ est égal au H_χ-module libre de base $\{u, \tilde{u}\}$ (remarque *1.3.15*). Nous avons appelé Z_{-1} ce sous-H_χ-module de $ind_I^G\chi$ et montré, lorsque $q = p$, que c'en est un facteur direct (proposition 1.3.28).

Dans cette section, M désigne un H_χ-module à droite. Lorsque $q = p$, l'espace $M \otimes_{H_\chi} Z_{-1}$ s'injecte dans $M \otimes_{H_\chi} ind_I^G\chi$. Nous allons démontrer le résultat suivant :

Théorème 2.2.1. – *On suppose $F = \mathbb{Q}_p$, $p \neq 2$. L'espace des $I(1)$-invariants du $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-module $M \otimes_{H_\chi} ind_I^G\chi$ est égal à*

$$M \otimes_{H_\chi} Z_{-1}.$$

– *Supposons que le corps résiduel de F possède $q > p$ éléments. Il existe un caractère régulier χ du tore fini tel que, si l'on note $\mathfrak{M}_\chi$ le H_χ-caractère supersingulier, alors l'espace des $I(1)$-invariants de $\mathfrak{M}_\chi \otimes_{H_\chi} ind_I^G\chi$ est de dimension infinie.*

Nous allons faire usage de l'écriture du H_χ-module $ind_I^G\chi$ comme limite inductive du système de H_χ-modules de type fini $\{Z_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ défini à la section 1.3. On a un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p$-espaces vectoriels

$$M \otimes_{H_\chi} ind_I^G\chi \simeq \varinjlim_{i\geq 0} M \otimes_{H_\chi} Z_i, \tag{52}$$

où, en désignant par ι_{Z_i} l'inclusion $Z_i \hookrightarrow Z_{i+1}$, les flèches du système inductif sont les applications linéaires $id_M \otimes \iota_{Z_i} : M \otimes_{H_\chi} Z_i \to M \otimes_{H_\chi} Z_{i+1}$. A la remarque *1.3.14*, il est apparu que chacun des Z_i est stable sous l'action du pro-p-Iwahori $I(1)$, ainsi chaque $M \otimes_{H_\chi} Z_i$ possède une structure de $\overline{\mathbb{F}}_p[I(1)]$-module et l'isomorphisme (52) commute à l'action de $I(1)$.

Nous commencerons par prouver la première assertion du théorème. La proposition 1.3.28 nous assure que, si le corps résiduel de F est de cardinal p, alors pour tout $i \geq 0$, le H_χ-module Z_{i-1} est un facteur direct de Z_i. Ainsi, les flèches du système inductif (52) sont injectives. Les paragraphes 2.2.1 et 2.2.2 décrivent respectivement les structures des $\overline{\mathbb{F}}_p[I(1)]$-modules Z_i et $M \otimes_{H_\chi} Z_i$, en supposant $q = p$. Puis, au paragraphe 2.2.3, on suppose que $F = \mathbb{Q}_p$ avec $p \neq 2$ et l'on montre que l'espace des $I(1)$-invariants de $M \otimes_{H_\chi} Z_i$ est réduit à $M \otimes_{H_\chi} Z_{-1}$. La méthode utilisée est analogue à celle que nous avons suivie pour la preuve de la première assertion du théorème 2.1.1.

Lorsque le corps résiduel de F possède $q > p$ éléments, nous choisissons au paragraphe 2.2.4 une valeur de $a \in \{1, ..., q-2\}$ telle que chaque espace $\mathfrak{M}_\chi \otimes_{H_\chi} Z_{i+1}$ possède un élément $I(1)$-invariant qui n'appartient pas à l'espace image de $id_M \otimes \iota_{Z_i}$.

Remarque 2.2.2. Au chapitre précédent, nous avons identifié une base de l'espace vectoriel $ind_I^G \chi$ avec l'ensemble des arêtes de l'arbre $\mathcal{T}$: pour tout g appartenant au système de représentants (6) des classes à gauche de G modulo I, on a identifié l'élément $g.f_{I,\chi} = f_{Ig^{-1},\chi}$. avec l'arête gu. La remarque *1.3.4* a attiré notre attention sur le fait que cette identification n'est pas compatible avec l'action de G. Toutefois, elle est compatible avec l'action de $I(1)$ comme nous allons nous en assurer à présent. Cela tient au choix du système (6) de représentants de G/I. En effet on rappelle qu'il est donné par

$$\{g_x^\epsilon, g_x^\epsilon \omega, \text{ pour } \epsilon \in \{0,1\}, x \in \mathbb{F}_q^i, i \geq 0\} \tag{6}$$

et l'on remarque que l'on a la propriété suivante : pour tous $x, y \in \mathbb{F}_q^i$, $i \in \mathbb{N}$,

$$g_x^0 (g_y^0)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & a(y) - a(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in I(1), \;\; g_x^1 (g_y^1)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pi(a(y) - a(x)) & 1 \end{pmatrix} \in I(1). \tag{53}$$

Soient $A \in I(1)$ et u_x^ϵ une arête sortante de l'arbre, avec $\epsilon \in \{0,1\}$, $x \in \mathbb{F}_q^i$, $i \in \mathbb{N}$. Montrons que l'élément de $ind_I^G \chi$ correspondant à l'arête u_x^ϵ est envoyé par A sur l'élément de $ind_I^G \chi$ correspondant à l'arête Au_x^ϵ.

Puisque l'action de $I(1)$ sur l'ensemble des arêtes conserve la distance, l'orientation et le type, l'arête u_x^ϵ est envoyée sous l'action de A sur une arête de la forme u_y^ϵ, avec $y \in \mathbb{F}_q^i$. L'égalité $Au_x^\epsilon = u_y^\epsilon$ s'écrit encore $(g_y^\epsilon)^{-1} A g_x^\epsilon u = u$, et puisque le sous-groupe d'Iwahori est le stabilisateur de l'arête u, on a $(g_y^\epsilon)^{-1} A g_x^\epsilon \in I$. Mais la propriété (53) dit qu'il existe un élément $B \in I(1)$ tel que $g_x^\epsilon = B g_y^\epsilon$. Ainsi,

$$(g_y^\epsilon)^{-1} A g_x^\epsilon = (g_y^\epsilon)^{-1} A B g_y^\epsilon \in I \cap (g_y^\epsilon)^{-1} I(1) g_y^\epsilon.$$

Puisque $I(1)$ est l'unique pro-p-Sylow de I, on en déduit que $(g_y^\epsilon)^{-1} A g_x^\epsilon$ appartient à $I(1)$.

L'élément de $ind_I^G \chi$ correspondant à l'arête u_x^ϵ est l'élément $g_x^\epsilon.f_{I,\chi}$. Il est envoyé par A sur l'élément $A g_x^\epsilon.f_{I,\chi}$. Mais, d'après ce qui précède et puisque $f_{I,\chi}$ est invariant sous l'action de $I(1)$, on a $A g_x^\epsilon.f_{I,\chi} = g_y^\epsilon.f_{I,\chi}$, qui est l'élément de $ind_I^G \chi$ correspondant à l'arête $u_y^\epsilon = Au_x^\epsilon$.

2.2.1. Structure du $\overline{\mathbb{F}}_p[I(1)]$-module $ind_I^G \chi$ lorsque le corps résiduel de F est égal à $\mathbb{F}_p$. — Dans tout ce paragraphe, on suppose que $q = p$ (et $p \neq 2$).

2.2.1.1. Comme au paragraphe 1.3.5 on note J le sous-ensemble de $\mathbb{F}_q^*$ à $p-a-1$ éléments

$$J = \{\zeta^{a+1}, \zeta^{a+2}, ..., \zeta^{p-1}\}.$$

L'ensemble $\mathbb{F}_p^* - (\zeta^{-a}J)$ de cardinal a est

$$\mathbb{F}_p^* - (\zeta^{-a}J) = \{\zeta^{p-a}, \zeta^{p-a+1}, ..., \zeta^{p-1}\}.$$

Au paragraphe 1.3.1.2, nous avons construit, par analyse de Fourier, une nouvelle base du $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel engendré par les arêtes de l'arbre. Pour chaque élément, w_*^ϵ, $\tilde{w}_*^\epsilon$, de cette nouvelle base, nous avons défini son type, son orientation, sa distance à l'origine (définition *1.3.7*).

Soit $i \in \mathbb{N}$. Le H_χ-module Z_i défini au paragraphe 1.3.2 contient toutes les arêtes à distance $i+1$. C'est de plus un H_χ-module libre : Z_0 est libre de base

$$\mathcal{W}_0 = \{u,\ \tilde{u},\ w_s,\ \tilde{w}_{s'},\quad s \in J,\ s' \in \mathbb{F}_p^* - (\zeta^{-a}J)\},$$

tandis que Z_{i+1} est la somme directe de Z_i et du H_χ-module libre de base l'ensemble $\mathcal{W}_{i+1}$ d'éléments de type 0 et 1 à distance $i+2$:

$$\mathcal{W}_{i+1} = \{w^0_{(x,s)}, \tilde{w}^0_{(x,s')}, s \in J, s' \in \mathbb{F}_p^* - (\zeta^{-a}J)\}_{x \in \mathbb{F}_p^{i+1}} \cup \{w^1_{(x,s)}, \tilde{w}^1_{(x,s')}, s \in J, s' \in \mathbb{F}_p^* - (\zeta^{-a}J)\}_{x \in \mathbb{F}_p^{i}}.$$

Remarque 2.2.3. Ces résultats sont ceux de la proposition 1.3.28. On rappelle qu'elle se démontre en étudiant tout d'abord le H_χ-module Z_0/Z_{-1} et en utilisant le fait que le H_χ-module Z_i/Z_{i-1} est la somme directe

$$Z_i/Z_{i-1} = \bigoplus_{x \in \mathbb{F}_p^i} \mathcal{F}_x^0\,(Z_0/Z_{-1}) \ \oplus \bigoplus_{x \in \mathbb{F}_p^{i-1}} \mathcal{F}_x^1\,(Z_0/Z_{-1}),$$

où pour $\epsilon \in \{0,1\}$, $x \in \mathbb{F}_p^{i-\epsilon}$, le morphisme injectif de H_χ-modules $\mathcal{F}_x^\epsilon : Z_0/Z_{-1} \to Z_i/Z_{i-1}$ est induit par la translation par $(g_x^\epsilon \omega)$ comme dans la preuve du lemme 1.3.16.

Notation 2.2.4. On considère les H_χ-modules définis par récurrence :

$$Z_0^0 = \bigoplus_{\substack{w \in \mathcal{W}_0 \\ w \text{ de type } 0}} H_\chi\, w, \qquad Z_0^1 = \bigoplus_{\substack{w \in \mathcal{W}_0 \\ w \text{ de type } 1}} H_\chi\, w = H_\chi\, u \oplus H_\chi\, \tilde{u}.$$

$$Z_{i+1}^0 = Z_i^0 \oplus \bigoplus_{\substack{w \in \mathcal{W}_{i+1} \\ w \text{ de type } 0}} H_\chi\, w, \qquad Z_{i+1}^1 = Z_i^1 \oplus \bigoplus_{\substack{w \in \mathcal{W}_{i+1} \\ w \text{ de type } 1}} H_\chi\, w.$$

Z_i^0 et Z_i^1 sont des sous-espaces supplémentaires de Z_i.

2.2.1.2. — Etudions l'action de ω sur Z_i et ses sous-modules Z_i^0, Z_i^1.

Le H_χ-module Z_{-1} est stable sous l'action de ω puisque $\omega u = \tilde{u}$ et que ω^2 agit trivialement sur les arêtes de l'arbre. De plus, on rappelle que par définition des bases obtenus par analyse de Fourier, on a pour $x \in \mathbb{F}_p^i$, $s \in \mathbb{F}_p$, $\epsilon \in \{0,1\}$, $w^\epsilon_{(x,s)} = (g_x^\epsilon \omega) w_s$. Or, la remarque *0.2.5* dit que $\omega g_x^0 = g_x^1$. On en déduit que l'élément $w^0_{(x,s)}$ de type 0 à distance $i+1$ est envoyé par ω sur l'élément $w^1_{(x,s)}$ de type 1 à distance $i+2$. Ainsi, puisque ω^2 agit trivialement sur les arêtes de l'arbre, on a

$$Z^1_{i+1} \;=\; Z_{-1} \oplus \omega Z_i^0, \qquad \omega Z^1_{i+1} \;=\; Z_{-1} \oplus Z_i^0. \tag{54}$$

2.2.1.3. Nous décrivons la structure de Z_i comme $\overline{\mathbb{F}}_p[I(1)]$-module.

Lemme 2.2.5. – *Les sous-espaces Z_i^1 et $Z_{-1} \oplus Z_i^0$ sont stables sous l'action de $I(1)$.*

– *L'espace Z_i/Z_{-1} se décompose en la somme directe de H_χ-modules et de $\overline{\mathbb{F}}_p[I(1)]$-modules :*

$$Z_i/Z_{-1} \;=\; Z_i^1/Z_{-1} \;\oplus\; (Z_{-1} \oplus Z_i^0)/Z_{-1}.$$

Démonstration. — C'est l'analogue du lemme 2.1.3. Comme dans la preuve de ce dernier, il suffit de démontrer, pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$Z_i^1 = \sum_{\substack{v \text{ arête} \\ \text{à distance } \leq i+1 \\ \text{de type } 1}} H_\chi\, v. \tag{55}$$

Pour $i = 0$, l'égalité (55) est claire puisque les uniques arêtes à distance 1 de type 1 sont u et $\tilde{u}$ qui appartiennent à Z_0^1 par définition.

Soit $i \geq 1$. Supposons l'égalité (55) vérifiée pour Z_{i-1}^1 et montrons la au rang i. Il faut s'assurer que toute arête v de type 1 à distance $i+1$ appartient à Z_i^1. Ces arêtes engendrent un espace vectoriel dont une base est donnée par $\{w^1_{(x,s)},\ \tilde{w}^1_{(x,s)},\ s \in \mathbb{F}_p\}_{x \in \mathbb{F}_p^{i-1}}$. Il s'agit donc de démontrer, à $x \in \mathbb{F}_p^{i-1}$ fixé, que chacun des $w^1_{(x,s)}$, $\tilde{w}^1_{(x,s)}$, pour $s \in \mathbb{F}_p$, appartient à Z_i^1.

a) Par définition, Z_i^1 contient les éléments $w^1_{(x,s)}$, pour $s \in J$ et $\tilde{w}^1_{(x,s')}$, pour $s' \in \mathbb{F}_p^* - (\zeta^{-a} J)$.

b) Soit $s \in \mathbb{F}_p - J$, $s' \in \{0\} \cup \zeta^{-a} J$. On rappelle que l'élément $w^1_{(x,s)}$ (resp. $\tilde{w}_{(x,s')}$) est l'image par translation par $g_x^1 \omega$ de w_s (resp.$\tilde{w}_{s'}$).

   – On traite le cas où $s = 0$ et $s' = 0$. Le lemme 1.3.9 donne, par translation par $g_x^1 \omega$,

   $$T_1(u_x^1) = w^1_{(x,0)} + w^1_{(x,1)}.$$

   Par hypothèse de récurrence, l'arête u_x^1 de type 1 à distance i appartient au H_χ-module Z_{i-1}^1 qui est contenu dans Z_i^1. D'autre part, $1 = \zeta^{p-1} \in J$, donc $w^1_{(x,1)}$ appartient à Z_i^1 d'après a). Ainsi, $w^1_{(x,0)}$ appartient à Z_i^1 .

   De la même façon, $T_2(\tilde{u}_x^1) = \tilde{w}^1_{(x,0)} + \tilde{w}^1_{(x,1)}$ et l'on en déduit que $\tilde{w}^1_{(x,0)}$ appartient à Z_i^1, car $1 = \zeta^{p-1}$ appartient à $\mathbb{F}_p^* - (\zeta^{-a} J)$.

– On suppose maintenant que $s \in \mathbb{F}_p^* - J$. Le lemme 1.3.27 dit (en effectuant la translation par $g_x^1\omega$) que $w^1_{(x,s)}$ est une combinaison linéaire de l'arête $\tilde{u}^1_x$ à distance i qui appartient à Z^1_{i-1} par hypothèse de récurrence, et de l'image par T_1 de l'élément $\tilde{w}_{(x,\zeta^{-a}s)}$ qui, par a) appartient à Z^1_i. Ainsi, $w^1_{(x,s)}$ appartient à Z^1_i.

De même, pour $s' \in \zeta^{-a}J$, le lemme 1.3.27 dit que $\tilde{w}^1_{(x,s')}$ est une combinaison linéaire de l'arête u^1_x à distance i qui appartient à Z^1_{i-1} par hypothèse de récurrence, et de l'image par T_2 de l'élément $w_{(x,\zeta^a s')}$ qui, par a), appartient à Z^1_i. Ainsi, $\tilde{w}^1_{(x,s')}$ appartient à Z^1_i.

□

2.2.1.4. Soient $s \in J$, $s' \in \mathbb{F}_p^* - (\zeta^{-a}J)$, et $A \in I(1)$. Puisque le H_χ-module Z_0, libre de base $\{u, \tilde{u},\ w_s,\ \tilde{w}_{s'},\ s \in J,\ s' \in \mathbb{F}_p^* - (\zeta^{-a}J)\}$, est stable sous l'action de $I(1)$, les éléments $Aw_s - w_s$ et $A\tilde{w}_{s'} - \tilde{w}_{s'}$ se décomposent selon cette base. Le lemme 2.2.6 donne ces décompositions, pour un élément $A \in I(1)$ choisi. Il est obtenu par le calcul explicite de $Aw_s - w_s$ et de $A\tilde{w}_{s'} - \tilde{w}_{s'}$, effectué au paragraphe 2.2.5.

Lemme 2.2.6. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Soit $s \in J$ et $j \in \{a+1, ..., p-1\}$ tel que $s = \zeta^j$. Alors $Aw_s - w_s$ est une combinaison linéaire à cœfficients non nuls de

$$u, T_1(\tilde{u}),\quad w_{\zeta^{a+1}}, ..., w_{\zeta^{j-1}},\quad T_1(\tilde{w}_{\zeta^{p-a}}), ..., T_1(\tilde{w}_{\zeta^{p-1}}).$$

Soit $s' \in \mathbb{F}_p^* - (\zeta^{-a}J)$ et $j \in \{p-a, ..., p-1\}$ tel que $s' = \zeta^j$. Alors $A\tilde{w}_s - \tilde{w}_s$ est une combinaison linéaire à cœfficients non nuls de

$$T_2(u),\ \tilde{u},\ \tilde{w}_{\zeta^{p-a}}, ..., \tilde{w}_{\zeta^{j-1}},\ T_2(w_{\zeta^{a+1}}), ..., T_2(w_{\zeta^{p-1}}).$$

2.2.1.5. —
Notation 2.2.7. Dans $ind_I^G\chi$, on définit les éléments suivants, pour $i \geq 1$,

$$\begin{cases} S_0^0 = w_{\zeta^{1+a}} \in Z_0, \\ S_i^0 = \sum\limits_{x \in \mathbb{F}_p^i} w^0_{(x,\zeta^{1+a})} \in Z_i, \end{cases} \qquad \begin{cases} R_0^0 = \tilde{w}_{\zeta^{p-a}} \in Z_0, \\ R_i^0 = \sum\limits_{x \in \mathbb{F}_p^i} \tilde{w}^0_{(x,\zeta^{p-a})} \in Z_i, \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_0^1 = w^1_{\zeta^{1+a}} \in Z_1, \\ S_i^1 = \sum\limits_{x \in \mathbb{F}_p^i} w^1_{(x,\zeta^{1+a})} \in Z_{i+1}, \end{cases} \qquad \begin{cases} R_0^1 = \tilde{w}^1_{\zeta^{p-a}} \in Z_1, \\ R_i^1 = \sum\limits_{x \in \mathbb{F}_p^i} \tilde{w}^1_{(x,\zeta^{p-a})} \in Z_{i+1}, \end{cases}$$

Remarque 2.2.8. L'élément S_i^ϵ est une combinaison linéaire d'arêtes sortantes de type ϵ. D'après le lemme 1.3.9, son image par T_2 est égale à

$$\Phi_2(\zeta)\sum_{x\in\mathbb{F}_p^i}\tilde{w}_{(x,\zeta)} = \Phi_2(\zeta)\sum_{s\in\mathbb{F}_p} s\tilde{u}^\epsilon_{(x,s)},$$

avec $\Phi_2(\zeta)\neq 0$ car $q=p$. Par conséquent, lorsqu'on la voit comme une simple combinaison linéaire d'arêtes de l'arbre (et non comme un élément de $ind_I^G\chi$ et $\overline{\mathbb{F}}_p[I\backslash G]$), l'image par T_2 de S_i^ϵ est égale, au cœfficient multiplicatif non nul $\Phi_2(\zeta)$ près, à l'élément $\tilde{X}_i^\epsilon$ défini au paragraphe 2.1.1.4. De la même façon, $T_1(R_i^\epsilon)$ est égal, au cœfficient multiplicatif $\Phi_1(\zeta^{p-a})$ non nul près, à X_i^ϵ.

Notons de plus que, pour $i\geq 0$, on a $\omega S_i^0 = S_i^1$, et $\omega R_i^0 = R_i^1$.

Soit $i\geq 1$. On note $A^0 = \begin{pmatrix} 1 & \pi^{i-1} \\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pi^i & 1\end{pmatrix}$.

Lemme 2.2.9. *On suppose que $F=\mathbb{Q}_p$, avec $p\neq 2$.*

Alors $A^\epsilon S_i^\epsilon - S_i^\epsilon$ est la somme d'un l'élément de $T_1 ind_I^G\chi$ et d'un élément de $Z_{i-1+\epsilon}$ égal à une combinaison linéaire à cœfficients non nuls des éléments suivants, pour x parcourant $\mathbb{F}_p^{i-1}$:

$$\tilde{w}^\epsilon_{(x,s')},\quad s'\in\mathbb{F}_p^* - (\zeta^{-a}J),$$
$$u_x^\epsilon + T_2(w^\epsilon_{(x,\zeta^{p-1})}) \qquad et \qquad T_2(w^\epsilon_{(x,s)}),\ pour\ s\in J,\ s\neq\zeta^{p-1}.$$

$A^\epsilon R_i^\epsilon - R_i^\epsilon$ est égal à la somme d'un l'élément de $T_2 ind_I^G\chi$ et d'un élément de $Z_{i-1+\epsilon}$ égal à une combinaison linéaire à cœfficients non nuls des éléments suivants, pour x parcourant $\mathbb{F}_p^{i-1}$:

$$w^\epsilon_{(x,s)},\quad s\in J,$$
$$\tilde{u}_x^\epsilon + T_1(\tilde{w}^\epsilon_{(x,\zeta^{p-1})}) \qquad et \qquad T_1(\tilde{w}^\epsilon_{(x,s')}),\ pour\ s'\in\mathbb{F}_p^* - (\zeta^{-a}J),\ s'\neq\zeta^{p-1}.$$

La preuve de ce lemme, effectuée au paragraphe 2.2.5, fait en particulier intervenir le fait que $q=p$ sous la forme de la condition 3) du théorème 1.3.1 qui nous assure que l'on a la suite exacte de H_χ-modules

$$0\longrightarrow T_1 ind_I^G\chi \longrightarrow ind_I^G\chi \xrightarrow{T_2} T_2 ind_I^G\chi \longrightarrow 0.$$

2.2.2. Structure du $\overline{\mathbb{F}}_p[I(1)]$-module $M\otimes_{H_\chi} Z_i$.— Nous traduisons pour $M\otimes_{H_\chi} Z_i$ les propriétés structurelles de Z_i que nous avons établies au paragraphe précédent.

2.2.2.1. Le H_χ-module Z_i étant libre de base $\mathcal{W}_0 \cup ... \cup \mathcal{W}_i$, l'espace vectoriel $M \otimes_{H_\chi} Z_i$ est isomorphe à une somme directe finie de copies de M. Il s'écrit

$$M \otimes_{H_\chi} Z_i \simeq \bigoplus_{v \in \mathcal{W}_i} M \otimes_{H_\chi} w \oplus M \otimes_{H_\chi} Z_{i-1}, \tag{56}$$

où chaque espace $M \otimes_{H_\chi} w$ est isomorphe à M.

2.2.2.2. Dans $M \otimes_{H_\chi} Z_i$, distinguons les éléments de type 0 et les éléments de type 1.

Puisque le H_χ-module Z_i est la somme directe des H_χ-modules Z_i^0 et Z_i^1, le $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel $M \otimes_{H_\chi} Z_i$ est la somme directe de son sous-espace $M \otimes_{H_\chi} Z_i^0$ des éléments dits *de type* 0 et de son sous-espace $M \otimes_{H_\chi} Z_i^1$ des éléments dits *de type* 1. Ces sous-espaces ne sont pas stables sous l'action de $I(1)$. Mais, le H_χ-module Z_{-1} libre de base $\{u, \tilde{u}\}$ étant un facteur direct de Z_i, (resp. $Z_{-1} \oplus Z_i^0$, resp. Z_i^1), on déduit de la deuxième assertion du lemme 2.2.5 la décomposition en somme directe de $\overline{\mathbb{F}}_p[I(1)]$-modules :

$$[M \otimes_{H_\chi} Z_i]/[M \otimes_{H_\chi} Z_{-1}] = [M \otimes_{H_\chi} Z_i^1]/[M \otimes_{H_\chi} Z_{-1}] \oplus [M \otimes_{H_\chi} (Z_{-1} \oplus Z_i^0)]/[M \otimes_{H_\chi} Z_{-1}]. \tag{57}$$

Puisqu'un élément de Z_{-1} est fixé par l'action de $I(1)$, on en déduit que tout élément $I(1)$-invariant de $M \otimes_{H_\chi} Z_i$ est égal, modulo $M \otimes_{H_\chi} Z_{-1}$, à la somme d'un élément de type 0 et d'un élément de type 1, tous deux $I(1)$-invariants modulo $M \otimes_{H_\chi} Z_{-1}$.

2.2.2.3.

Lemme 2.2.10. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Si l'élément de type* 0 *de* $M \otimes_{H_\chi} Z_0$

$$\sum_{s \in J} m_s \otimes w_s + \sum_{s' \in \mathbb{F}_p^* - (\zeta^{-a} J)} \tilde{m}_{s'} \otimes \tilde{w}_{s'} \tag{58}$$

est invariant modulo $M \otimes_{H_\chi} Z_{-1}$ *sous l'action de* A*, alors*

$$\begin{cases} m_s = 0, \text{ pour tout } s \in J,\ s \neq \zeta^{a+1}, \quad \text{et} \quad m_{\zeta^{a+1}} T_1 = 0, \\ \tilde{m}_{s'} = 0, \text{ pour tout } s' \in \mathbb{F}_p^* - (\zeta^{-a} J),\ s' \neq \zeta^{p-a}, \quad \text{et} \quad \tilde{m}_{\zeta^{p-a}} T_2 = 0. \end{cases}$$

Démonstration. — On appelle U un élément de la forme (58). L'action de A sur U se calcule grâce au lemme 2.2.6. Etudions les coordonnées de $AU - U$ dans la somme directe :

$$M \otimes_{H_\chi} Z_0 = \bigoplus_{s \in J} M \otimes_{H_\chi} w_s \oplus \bigoplus_{s' \in \mathbb{F}_p^* - (\zeta^{-a} J)} M \otimes_{H_\chi} \tilde{w}_{s'} \oplus M \otimes_{H_\chi} Z_{-1}.$$

a) Soit $j \in \{a+2, ..., p-1\}$. D'après le lemme 2.2.6, pour tout $s' \in \mathbb{F}_p^* - (\zeta^{-a}J)$, la contribution de $\tilde{m}_{s'} \otimes (A\tilde{w}_{s'} - \tilde{w}_{s'})$ à la composante de $AU - U$ selon $M \otimes_{H_\chi} w_{\zeta^{j-1}}$ appartient à $MT_2 \otimes w_{\zeta^{j-1}}$.

Ainsi, toujours d'après le lemme 2.2.6, la composante de $AU - U$ selon $M \otimes_{H_\chi} w_{\zeta^{j-1}}$ est égale à la somme d'un élément de $MT_2 \otimes w_{\zeta^{j-1}}$ et d'une combinaison linéaire à cœfficients non nuls de

$$m_{\zeta^j} \otimes w_{\zeta^{j-1}}, ..., m_{\zeta^{p-2}} \otimes w_{\zeta^{j-1}}, m_{\zeta^{p-1}} \otimes w_{\zeta^{j-1}}.$$

Si U est invariant modulo $M \otimes_{H_\chi} Z_{-1}$ sous l'action de A, cette composante est nulle. En la considérant successivement pour $j = p-1$, $p-2$,... et enfin $a+2$, on obtient

$$m_{\zeta^{p-1}},\ m_{\zeta^{p-2}},\ ...\ \text{et enfin } m_{\zeta^{a+2}} \text{ appartiennent à } MT_2.$$

b) De même, on observe les composantes de $AU - U$ selon $M \otimes_{H_\chi} \tilde{w}_{\zeta^{j-1}}$ pour j décroissant de $p-1$ à $p-a+1$. En supposant que U est invariant modulo $M \otimes_{H_\chi} Z_{-1}$ sous l'action de A, on obtient successivement

$$\tilde{m}_{\zeta^{p-1}},\ \tilde{m}_{\zeta^{p-2}},\ ...,\ m_{\zeta^{p-a+1}} \text{ appartiennent à } MT_1.$$

c) Soit $j \in \{a+2, ..., p-1\}$. Grâce à b), au lemme 2.2.6 et puisque $T_1T_2 = 0$, il apparaît alors que, pour tout $s' \in \mathbb{F}_p^* - (\zeta^{-a}J)$, $s' \neq \zeta^{p-a}$ le terme $\tilde{m}_{s'} \otimes (A\tilde{w}_{s'} - \tilde{w}_{s'})$ apporte une contribulion nulle à la composante de $AU - U$ selon $M \otimes_{H_\chi} w_{\zeta^{j-1}}$. Pour $s' = \zeta^{p-a}$, cette contribution est égale à, un scalaire multiplicatif non nul, près à $\tilde{m}_{\zeta^{p-a}}T_2 \otimes w_{\zeta^{j-1}}$. Par conséquent, reprendre le raisonnement de a) donne désormais un résultat plus précis :

$$m_{\zeta^{p-1}},\ m_{\zeta^{p-2}},\ ...,\ \text{ et } m_{\zeta^{a+2}} \text{ sont proportionnels à } \tilde{m}_{\zeta^{p-a}}T_2.$$

d) De la même façon, le point a) permet d'affiner le résultat de b) :

$$\tilde{m}_{\zeta^{p-1}},\ \tilde{m}_{\zeta^{p-2}},\ ...,\ \text{ et } m_{\zeta^{p-a+1}} \text{ sont proportionnels à } m_{\zeta^{a+1}}T_1.$$

e) En tenant compte du résultat de a) et de b) et puisque $T_1T_2 = 0$, le lemme 2.2.6 dit que la composante de $AU - U$ selon $M \otimes w_{\zeta^{p-1}}$ est égale, à un scalaire multiplicatif non nul près à $\tilde{m}_{\zeta^{p-a}}T_2 \otimes w_{\zeta^{p-1}}$, et sa composante selon $M \otimes \tilde{w}_{\zeta^{p-1}}$ est égale, à un scalaire multiplicatif non nul près à $m_{\zeta^{a+1}}T_1 \otimes \tilde{w}_{\zeta^{p-1}}$. Supposant que U est $I(1)$-invariant modulo $M \otimes_{H_\chi} Z_{-1}$, ces deux composantes sont nulles. On en déduit que

$$m_{\zeta^{a+1}}T_1 = 0,\ \ \tilde{m}_{\zeta^{p-a}}T_2 = 0.$$

puis, que $m_{\zeta^{p-1}}, m_{\zeta^{p-2}}, ..., m_{\zeta^{a+2}}$ et $\tilde{m}_{\zeta^{p-1}}, \tilde{m}_{\zeta^{p-2}}, ..., \tilde{m}_{\zeta^{p-a+1}}$ sont nuls, grâce aux résultats de *c*) et *d*).

□

2.2.2.4. Soit $i \geq 1$. Nous voulons maintenant étudier les éléments de type 1 de $M \otimes_{H_\chi} Z_i$ qui sont $I(1)$-invariants modulo $M \otimes_{H_\chi} Z_{i-1}$.

Puisque le H_χ-module Z_{i-1} est un facteur direct de Z_i, le $\overline{\mathbb{F}}_p[I(1)]$-module quotient de $M \otimes_{H_\chi} Z_i$ par $M \otimes_{H_\chi} Z_{i-1}$ s'identifie avec $M \otimes_{H_\chi} Z_i/Z_{i-1}$ qui d'après la remarque *2.2.3*, se décompose en la somme directe d'espaces vectoriels

$$M \otimes_{H_\chi} Z_i/Z_{i-1} = \bigoplus_{x \in \mathbb{F}_p^i} M \otimes_{H_\chi} \mathcal{F}_x^0\,(Z_0/Z_{-1}) \oplus \bigoplus_{x \in \mathbb{F}_p^{i-1}} M \otimes_{H_\chi} \mathcal{F}_x^1\,(Z_0/Z_{-1}),$$

où pour $\epsilon \in \{0,1\}$, $x \in \mathbb{F}_p^{i-\epsilon}$, le morphisme injectif de H_χ-modules $\mathcal{F}_x^\epsilon : Z_0/Z_{-1} \to Z_i/Z_{i-1}$ est induit par la translation par $(g_x^\epsilon \omega)$.

Soit U un élément de type 1 de $M \otimes_{H_\chi} Z_i$. Il existe une unique famille d'éléments de M, $\{m_{(x,s)}, \tilde{m}_{(x,s')}\}$ avec $x \in \mathbb{F}_p^{i-1}$, $s \in J$, $s' \in \mathbb{F}_p^* - (\zeta^{-a} J)$ telle que

$$U = \sum_{x \in \mathbb{F}_p^{i-1}} \sum_{s \in J} m_{(x,s)} \otimes w^1_{(x,s)} + \sum_{x \in \mathbb{F}_p^{i-1}} \sum_{s' \in \mathbb{F}_p^* - (\zeta^{-a} J)} \tilde{m}_{(x,s')} \otimes \tilde{w}^1_{(x,s')} \mod M \otimes_{H_\chi} Z_{i-1}. \tag{59}$$

Considéré comme un élément de $M \otimes_{H_\chi} Z_i/Z_{i-1}$, sa composante selon $M \otimes_{H_\chi} \mathcal{F}_x^0\,(Z_0/Z_{-1})$ est nulle pour tout $x \in \mathbb{F}_p^i$, et pour tout $x \in \mathbb{F}_p^{i-1}$, sa composante selon $M \otimes_{H_\chi} \mathcal{F}_x^1\,(Z_0/Z_{-1})$ est

$$\sum_{s \in J} m_{(x,s)} \otimes \mathcal{F}_x^1(w_s) + \sum_{s \in \mathbb{F}_p^* - (\zeta^{-a} J)} \tilde{m}_{(x,s')} \otimes \mathcal{F}_x^1(\tilde{w}_{s'}).$$

Remarque 2.2.11. Soit $x_0 \in \mathbb{F}_p^{i-1}$ fixé. On pose $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\pi a(x_0) & 1 \end{pmatrix}$. Nous voulons connaître la composante de BU selon $\mathcal{F}_{x_0}^1(Z_0/Z_{-1})$. Soient $x \in \mathbb{F}_p^{i-1}$ et y l'unique élément de $\mathbb{F}_p^{i-1}$ tel que $a(x) + a(x_0) = a(y) \mod \pi^{i-1} O_F$. On a

$$B(g_x^1 \omega) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pi(a(x) + a(x_0)) & \pi^{i-1} \end{pmatrix} \omega.$$

Ainsi, $(g_y^1 \omega)^{-1} B (g_x^1 \omega)$ appartient à $I(1)$. On en déduit que l'image par B de la composante de U selon $\mathcal{F}_x^1(Z_0/Z_{-1})$ appartient à $\mathcal{F}_y^1(Z_0/Z_{-1})$. Par conséquent, la composante de BU selon $\mathcal{F}_{x_0}^1(Z_0/Z_{-1})$ est égale à l'image par B de la composante de U selon $\mathcal{F}_0^1(Z_0/Z_{-1})$, c'est-à-dire à

$$\sum_{s \in J} m_{(0,s)} \otimes \mathcal{F}_{x_0}^1(w_s) + \sum_{s \in \mathbb{F}_p^* - (\zeta^{-a} J)} \tilde{m}_{(0,s')} \otimes \mathcal{F}_{x_0}^1(\tilde{w}_{s'}).$$

Lemme 2.2.12. *Si U est $I(1)$-invariant modulo $M \otimes_{H_\chi} Z_{i-1}$, alors il existe α et $\beta \in M$ tels que $\alpha T_2 = 0$, $\beta T_1 = 0$ et*

$$U \;=\; \alpha \otimes R_{i-1}^1 \;+\; \beta \otimes S_{i-1}^1 \mod M \otimes_{H_\chi} Z_{i-1}.$$

Démonstration. — Considérons U comme un élément $I(1)$-invariant de $M \otimes_{H_\chi} Z_i/Z_{i-1}$. Soit

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pi^i & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $x \in \mathbb{F}_p^{i-1}$ fixé. On a l'égalité matricielle

$$(g_x^1\omega)^{-1}A(g_x^1\omega) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in I(1).$$

On en déduit que l'action de A stabilise le sous-espace $M \otimes_{H_\chi} \mathcal{F}_x^1(Z_0/Z_{-1})$. Par conséquent, puisque U est invariant sous l'action de A, sa composante selon $\mathcal{F}_x^1(Z_0/Z_{-1})$ l'est aussi. En appliquant la translation par $(g_x^1\omega)^{-1}$ à cette composante pour revenir à un élément de Z_0/Z_{-1}, on a ainsi démontré que

$$\sum_{s\in J} m_{(x,s)} \otimes w_s + \sum_{s\in\mathbb{F}_p^*-(\zeta^{-a}J)} \tilde{m}_{(x,s')} \otimes \tilde{w}_{s'}$$

est un élément de $M \otimes_{H_\chi} Z_0$ qui est invariant modulo $M \otimes_{H_\chi} Z_{-1}$ sous l'action de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Le lemme 2.2.10 dit alors que

$$m_{(x,s)} = 0, \text{ pour tout } s \in J,\ s \neq \zeta^{a+1}, \quad \text{ et } m_{(x,\zeta^{a+1})}T_1 = 0,$$

$$\tilde{m}_{(x,s')} = 0, \text{ pour tout } s' \in \mathbb{F}_p^* - (\zeta^{-a}J),\ s' \neq \zeta^{p-1-a}, \quad \text{ et } \tilde{m}_{(x,\zeta^{p-1-a})}T_2 = 0.$$

D'où

$$U = \sum_{x\in\mathbb{F}_p^{i-1}} m_{(x,\zeta^{a+1})} \otimes w^1_{(x,\zeta^{a+1})} + \tilde{m}_{(x,\zeta^{p-a})} \otimes \tilde{w}^1_{(x,\zeta^{p-a})} \mod M \otimes_{H_\chi} Z_{i-1}$$

$$\text{avec } m_{(x,\zeta^{a+1})}T_1 = 0,\ \tilde{m}_{(x,\zeta^{p-1-a})}T_2 = 0.$$

D'après la définition des élements R^1_{i-1} et S^1_{i-1}, on aura prouvé le lemme si l'on démontre que $m_{(x,\zeta^{a+1})}$ (resp. $\tilde{m}_{(x,\zeta^{p-1-a})}$) ne dépend pas de $x \in \mathbb{F}_p^{i-1}$. On désignera alors par α la valeur commune des $\tilde{m}_{(x,\zeta^{p-1-a})}$ et par β la valeur commune des $m_{(x,\zeta^{a+1})}$.

Soit $x \in \mathbb{F}_p^{i-1}$ fixé. On pose $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\pi a(x) & 1 \end{pmatrix}$. La remarque *2.2.11* dit que la composante de BU selon $\mathcal{F}_x^1(Z_0/Z_{-1})$ est

$$m_{(0,\zeta^{a+1})} \otimes \mathcal{F}_x^1(w_s) + \tilde{m}_{(0,s')} \otimes \mathcal{F}_x^1(\tilde{w}_{s'})$$

Celle de $BU - U$ est donc

$$(m_{(0,\zeta^{a+1})} - m_{(x,\zeta^{a+1})}) \otimes \mathcal{F}_x^1(w_{\zeta^{a+1}}) + (\tilde{m}_{(0,\zeta^{p-1-a})} - \tilde{m}_{(x,\zeta^{p-1-a})}) \otimes \mathcal{F}_x^1(\tilde{w}_{\zeta^{p-1-a}})$$

Puisque U est invariant sous l'action de $I(1)$, cette composante est nulle et l'on en déduit que $m_{(x,\zeta^{a+1})} = m_{(0,\zeta^{a+1})}$ ne dépend pas de x, de même que $\tilde{m}_{(x,\zeta^{p-a})} = \tilde{m}_{(0,\zeta^{p-a})}$ ne dépend pas de x. □

2.2.3. Cas où $F = \mathbb{Q}_p$, $p \neq 2$. L'espace des $I(1)$-invariants de $M \otimes_{H_\chi} ind_I^G\chi$ est réduit à $M \otimes_{H_\chi} Z_{-1}$.—

2.2.3.1. Soit $i \geq 1$.

Proposition 2.2.13. *Un élément $I(1)$-invariant de $M \otimes_{H_\chi} Z_i$ est de la forme*

$$\alpha^0 \otimes R_i^0 + \beta^0 \otimes S_i^0 + \alpha^1 \otimes R_{i-1}^1 + \beta^1 \otimes S_{i-1}^1 \mod M \otimes_{H_\chi} Z_{i-1}$$

avec α^0, β^0, α^1, β^1 des éléments de M tels que

$$\alpha^0 T_2 = \alpha^1 T_2 = 0, \quad \beta^0 T_1 = \beta^1 T_1 = 0, \quad \text{et } \alpha^0 \in MT_2, \ \beta^0 \in MT_1.$$

Si de plus $i \geq 2$, on a $\qquad \alpha^1 \in MT_2, \quad \beta^1 \in MT_1.$

Démonstration. — On se donne un élément de $M \otimes_{H_\chi} Z_i$. D'après les résultats du paragraphe 2.2.2, il est égal, modulo $M \otimes_{H_\chi} Z_{-1}$ à la somme d'un élément de type 0 et d'un élément de type 1 qui sont chacun $I(1)$-invariants modulo $M \otimes_{H_\chi} Z_{-1}$.

Déterminons, modulo $M \otimes Z_{i-1}$, la forme d'un élément U de type 1 que l'on suppose $I(1)$-invariant modulo $M \otimes_{H_\chi} Z_{-1}$.

Puisque $i \geq 1$, $M \otimes_{H_\chi} Z_{i-1}$ contient $M \otimes_{H_\chi} Z_{-1}$, donc U est $I(1)$-invariant modulo $M \otimes_{H_\chi} Z_{i-1}$ et l'on peut appliquer le lemme 2.2.12 : il existe α, $\beta \in M$ tels que $\alpha T_2 = 0$ et $\beta T_1 = 0$, et

$$U = \alpha \otimes R_{i-1}^1 + \beta \otimes S_{i-1}^1 \mod M \otimes_{H_\chi} Z_{i-1}.$$

Supposons de plus que $i \geq 2$. Nous travaillons alors modulo $M \otimes_{H_\chi} Z_{i-2}$ et l'on a

$$U = \alpha \otimes R_{i-1}^1 + \beta \otimes S_{i-1}^1 + W \mod M \otimes_{H_\chi} Z_{i-2}$$

avec W un élément de $M \otimes_{H_\chi} Z_{i-1}$ qui s'écrit de façon générique

$$W = \sum_{x \in \mathbb{F}_p^{i-2}} \sum_{s \in J} m_{(x,s)} \otimes w_{(x,s)}^1 + \sum_{s' \in \mathbb{F}_p^* - (\zeta^{-a} J)} \tilde{m}_{(x,s')} \otimes \tilde{w}_{(x,s')}^1 \mod M \otimes_{H_\chi} Z_{i-2}, \text{ avec } m_{(x,s)}, \tilde{m}_{(x,s')} \in M.$$

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pi^{i-1} & 1 \end{pmatrix}$. L'action de A sur W se calcule grâce au lemme 2.2.6 puisque, pour $x \in \mathbb{F}_p^{i-2}$, on a $w_{(x,s)}^1 = (g_x^1 \omega) w_s$, $\tilde{w}_{(x,s')}^1 = (g_x^1 \omega) \tilde{w}_{s'}$ et

$$A(g_x^1 \omega) = (g_x^1 \omega) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, pour $x \in \mathbb{F}_p^{i-2}$, la composante de $AW - W$ selon $M \otimes w_{(x,\zeta^{p-1})}^1$ appartient à $MT_2 \otimes w_{(x,\zeta^{p-1})}^1$ et sa composante selon $M \otimes \tilde{w}_{(x,\zeta^{p-1})}^1$ appartient à $MT_1 \otimes \tilde{w}_{(x,\zeta^{p-1})}^1$.

D'autre part, le lemme 2.2.9 décrit les composantes $\alpha \otimes A(R_{i-1}^1 - R_{i-1}^1)$ car $\alpha T_2 = 0$. Ainsi, sa composante selon $M \otimes_{H_\chi} w_{(x,\zeta^{p-1})}^1$ est égale, à un scalaire multiplicatif non nul près à $\alpha \otimes w_{(x,\zeta^{p-1})}^1$ tandis que sa composante selon $M \otimes_{H_\chi} \tilde{w}_{(x,\zeta^{p-1})}^1$ appartient à $MT_1 \otimes_{H_\chi} \tilde{w}_{(x,\zeta^{p-1})}^1$.
De même, la composante de $\beta \otimes A(S_{i-1}^1 - S_{i-1}^1)$ selon $M \otimes_{H_\chi} \tilde{w}_{(x,\zeta^{p-1})}^1$ est égale, à un scalaire multiplicatif non nul près à $\beta \otimes \tilde{w}_{(x,\zeta^{p-1})}^1$ tandis que sa composante selon $M \otimes_{H_\chi} w_{(x,\zeta^{p-1})}^1$ appartient à $MT_2 \otimes_{H_\chi} w_{(x,\zeta^{p-1})}^1$.

Puisque $i \geq 2$, U est invariant sous l'action de A modulo $M \otimes_{H_\chi} Z_{i-2}$ et les composantes de $AU - U$ selon $M \otimes_{H_\chi} w^1_{(x,\zeta^{p-1})}$ et $M \otimes_{H_\chi} \tilde{w}^1_{(x,\zeta^{p-1})}$ sont nulles. On en déduit que $\alpha \in MT_2$ et $\beta \in MT_1$.

Nous avons démontré, pour $i \geq 1$, qu'un élement de type 1 de $M \otimes_{H_\chi} Z_i$ qui est $I(1)$-invariant modulo $M \otimes_{H_\chi} Z_{-1}$ est de la forme

$$U^1 = \alpha^1 \otimes R^1_{i-1} + \beta^1 \otimes S^1_{i-1} \mod M \otimes_{H_\chi} Z_{i-1},$$

avec α^1, $\beta^1 \in M$ tels que $\alpha^1 T_2 = 0$, $\beta^1 T_1 = 0$. Si de plus, $i \geq 2$, alors $\alpha^1 \in MT_2$, $\beta^1 \in MT_1$.

Nous voulons maintenant donner la forme d'un élément de type 0 de $M \otimes_{H_\chi} Z_i$, $i \geq 1$, qui est $I(1)$-invariant modulo $M \otimes_{H_\chi} Z_{-1}$. C'est le même raisonnement que celui de la preuve de la proposition 2.1.9. D'après le paragraphe 2.2.1.2 qui décrit l'action de ω sur Z_i, un élément U de type 0 de $M \otimes_{H_\chi} Z_i$ est envoyé par ω sur un élément de type 1 de $M \otimes_{H_\chi} Z_{i+1}$, qui est lui aussi $I(1)$-invariant modulo $M \otimes_{H_\chi} Z_{-1}$. Ainsi, on peut appliquer le résultat précédent au rang $i+1$ à ωU : il existe $\alpha^0 \in MT_2$, $\beta^0 \in MT_1$, avec $\alpha^0 T_2 = 0$, $\beta^0 T_1 = 0$, tels que

$$\omega U = \alpha^0 \otimes R^1_i + \beta^0 \otimes S^1_{i-1} \mod M \otimes_{H_\chi} Z_{i-1}.$$

L'élément ω^2 agit trivialement sur les arêtes de l'arbre, donc

$$U = \alpha^0 \otimes \omega R^1_i + \beta^0 \otimes \omega S^1_{i-1} \mod M \otimes_H \omega Z_i.$$

Comme on l'a vu suite à la définition des éléments R^ϵ_i, S^ϵ_i, on a $\omega R^1_i = R^0_i$, $\omega S^1_{i-1} = S^0_{i-1}$. Donc

$$U - \alpha^0 \otimes R^0_i - \beta^0 \otimes S^0_{i-1} \in M \otimes_{H_\chi} \omega Z_i.$$

Toujours comme dans la preuve de la proposition 2.1.9, on déduit de l'égalité (54) du paragraphe 2.2.1.2 qu'un élément de type 0 appartenant à $M \otimes_{H_\chi} \omega Z_i$ appartient en fait à $M \otimes_{H_\chi} Z^0_{i-1}$. Par conséquent,

$$U - \alpha^0 \otimes R^0_i - \beta^0 \otimes S^0_{i-1} \in M \otimes_{H_\chi} Z_{i-1}.$$

Nous avons démontré, pour $i \geq 1$, qu'un élement de type 0 de $M \otimes_{H_\chi} Z_i$ qui est $I(1)$-invariant modulo $M \otimes_{H_\chi} Z_{-1}$ est de la forme

$$U^0 = \alpha^0 \otimes R^0_i + \beta^0 \otimes S^0_i \mod M \otimes_{H_\chi} Z_{i-1},$$

avec $\alpha^0 \in MT_2$, $\beta^0 \in MT_1$ et $\alpha^0 T_2 = 0$, $\beta^0 T_1 = 0$.

□

2.2.3.2. — Nous montrons qu'un élément U de $M \otimes_{H_\chi} Z_1$ qui est $I(1)$-invariant appartient à $M \otimes_{H_\chi} Z_{-1}$. D'après la proposition 2.2.13 il existe des éléments de M notés α^0 β^0, α^1, β^1, $\{m_s\}_{s\in J}$, $\{\tilde{m}_{s'}\}_{s'\in\mathbb{F}_p^*-(\zeta^{-a}J)}$, m, $\tilde{m}$ vérifiant

$$\alpha^0 \in MT_2,\ \ \beta^0 \in MT_1,\ \ \alpha^0 T_2 = \alpha^1 T_2 = 0,\ \ \beta^0 T_1 = \beta^1 T_1 = 0, \tag{60}$$

tels que

$$U = \alpha^0 \otimes R_1^0 + \beta^0 \otimes S_1^0 + \alpha^1 \otimes R_0^1 + \beta^1 \otimes S_0^1 + W$$

où $W \in M \otimes_{H_\chi} Z_0$ s'écrit de façon générique

$$W = \sum_{s\in J} m_s \otimes w_s + \sum_{s'\in\mathbb{F}_p^*-(\zeta^{-a}J)} \tilde{m}_{s'} \otimes \tilde{w}_{s'} + m \otimes u + \tilde{m} \otimes \tilde{u}.$$

Nous considérons tout d'abord l'action de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sur U pour montrer que $\alpha^0 = \beta^0 = 0$.

– La vérification $(g_s^1)^{-1} A g_s^1 \in I(1)$ montre que l'action de A fixe les arêtes de type 1 à distance 2, ainsi, elle fixe S_0^1 et R_0^1.

– Le lemme 2.2.9 permet de décrire l'action de A sur $\beta^0 \otimes S_1^0$: en effet, il donne la forme de $AS_1^0 - S_1^0$ modulo $T_1 ind_I^G \chi$. Or, $\beta^0 T_1 = 0$. Ainsi, $\beta^0 \otimes (AS_1^0 - S_1^0)$ est une combinaison linéaire à cœfficients non nuls des éléments suivants,

$$\beta^0 \otimes \tilde{w}_{s'},\quad s' \in \mathbb{F}_p^* - (\zeta^{-a}J),$$

$$\beta^0 \otimes \tilde{u} \ + \ \beta^0 \otimes T_2(w_{\zeta^{p-1}}) \qquad \text{et } \beta^0 \otimes T_2(w_s),\ \text{pour } s \in J,\ \ s \neq \zeta^{p-1},$$

Mais $\beta^0 \in MT_1$, donc $\beta^0 T_2 = 0$ et $\beta^0 \otimes (AS_1^0 - S_1^0)$ est une combinaison linéaire à cœfficients non nuls de :

$$\beta^0 \otimes \tilde{u},\quad \beta^0 \otimes \tilde{w}_{s'},\quad s' \in \mathbb{F}_p^* - (\zeta^{-a}J),$$

– De même, $\alpha^0 \otimes (AR_1^0 - R_1^0)$ est une combinaison linéaire à cœfficients non nuls des éléments suivants,

$$\alpha^0 \otimes u,\ \alpha^0 \otimes w_s,\quad s \in J,$$

– Le lemme 2.2.6 permet de décrire l'action de A sur W.

A l'aide de ces quatre descriptions, nous reprenons un raisonnement analogue à celui de la preuve du lemme 2.2.10.

a) Soit $j \in \{a+2, ..., p-1\}$. D'après ce qui précède, la contribution de $\beta^0 \otimes (AS_1^0 - S_1^0)$ à la composante de $AU - U$ selon $M \otimes_{H_\chi} w_{\zeta^{j-1}}$ nulle. Celle de $\alpha^0 \otimes (AR_1^0 - R_1^0)$ est proportionnelle à $\alpha^0 \otimes w_{\zeta^{j-1}}$, elle appartient donc à $MT_2 \otimes_{H_\chi} w_{\zeta^{j-1}}$ car $\alpha^0 \in MT_2$. D'après le lemme 2.2.6, pour tout $s' \in \mathbb{F}_p^* - (\zeta^{-a}J)$, celle de $\tilde{m}_{s'} \otimes (A\tilde{w}_{s'} - \tilde{w}_{s'})$ appartient à $MT_2 \otimes w_{\zeta^{j-1}}$.

Ainsi, toujours d'après le lemme 2.2.6, la composante de $AU - U$ selon $M \otimes_{H_\chi} w_{\zeta^{j-1}}$ est égale à la somme d'un élément de $MT_2 \otimes w_{\zeta^{j-1}}$ et d'une combinaison linéaire à cœfficients non nuls de

$$m_{\zeta^j} \otimes w_{\zeta^{j-1}}, ..., m_{\zeta^{p-2}} \otimes w_{\zeta^{j-1}}, m_{\zeta^{p-1}} \otimes w_{\zeta^{j-1}}.$$

Puisque U est invariant modulo sous l'action de A, cette composante est nulle. En la considérant successivement pour $j = p-1$, $p-2$,... et enfin $a+2$, on obtient

$$m_{\zeta^{p-1}} \in MT_2,\ m_{\zeta^{p-2}} \in MT_2,\ ...,\ \text{ et enfin } m_{\zeta^{a+2}} \in MT_2.$$

b) De même, on observe les composantes de $AU - U$ selon $M \otimes_{H_\chi} \tilde{w}_{\zeta^{j-1}}$ pour j décroissant de $p-1$ à $p-a+1$, on obtient successivement

$$\tilde{m}_{\zeta^{p-1}},\ \tilde{m}_{\zeta^{p-2}},\ ...,\ m_{\zeta^{p-a+1}} \in MT_1.$$

c) On regarde alors la composante de $AU - U$ selon $M \otimes_{H_\chi} u$. La contribution de $\beta^0 \otimes (S_0^1 - S_0^1)$ à cette composante est nulle. Celle de $\alpha^0 \otimes (R_0^1 - R_0^1)$ est proportionnelle à $\alpha^0 \otimes u$ et appartient donc à $MT_2 \otimes u$. D'après a) et b), et avec le lemme 2.2.6, celle de $AW - W$ est égale à la somme d'un élément de $MT_2 \otimes u$ et d'un multiple non nul de $m_{\zeta^{a+1}} \otimes u$. Puisque U est $I(1)$-invariant, cette composante est nulle et l'on en déduit que $m_{\zeta^{a+1}}$ appartient à MT_2.
De même, l'observation de la composante de $AU - U$ selon $M \otimes_{H_\chi} \tilde{u}$ montre que $\tilde{m}_{\zeta^{p-a}}$ appartient à MT_1.

Mais alors, puisque $T_1T_2 = 0$, et toujours d'après le lemme 2.2.6, la composante de $AW - W$ selon $M \otimes_{H_\chi} w_{\zeta^{p-1}}$ est nulle. Or, la contribution de $\beta^0 \otimes (AS_1^0 - S_1^0)$ à cette composante est elle aussi nulle d'après ce qui précède, et celle de $\alpha^0 \otimes (AR_1^0 - R_1^0)$ est égale à $\alpha^0 \otimes w_{\zeta^{p-1}}$, à un scalaire multiplicatif non nul près. On en déduit que $\alpha^0 = 0$. De même, l'observation de la composante de $AU - U$ selon $M \otimes_{H_\chi} \tilde{w}_{\zeta^{p-1}}$ montre que $\beta^0 = 0$. Ainsi,

$$U = \alpha^1 \otimes R_0^1 + \beta^1 \otimes S_0^1 + W \mod M \otimes_{H_\chi} Z_{-1}.$$

Nous choisissons maintenant $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \pi & 1 \end{pmatrix}$ pour montrer que $\alpha^1 = \beta^1 = 0$.

– Comme le montre la vérification $(g_x^0)^{-1} A g_x^0 \in I(1)$, l'action de A fixe les arêtes de type 0 à distance 1. Par conséquent, elle fixe W.
– On rappelle que $R_0^1 = \tilde{w}^1_{\zeta^{p-a}} = \omega \tilde{w}_{\zeta^{p-a}}$, et $S_0^1 = w^1_{\zeta^{a+1}} = \omega w_{\zeta^{a+1}}$. Or, $\omega^{-1} A \omega = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc le lemme 2.2.6 donne l'action de A sur $\alpha^1 \otimes R_0^1$ et $\beta^1 \otimes S_0^1$. Sachant que $\alpha^1 T_2 = 0$ et $\beta^1 T_1 = 0$ il nous dit que $\beta^1 \otimes (AS_0^1 - AS_0^1)$ est égal, à un scalaire multiplicatif non nul près, à $\beta^1 \otimes \tilde{u}$ et $\alpha^1 \otimes (AR_0^1 - AR_0^1)$ est égal, à un scalaire multiplicatif non nul près, à $\alpha^1 \otimes u$.

Puisque U est fixé par l'action de A, on en déduit que $\alpha^1 = \beta^1 = 0$.

Ainsi, $U = W$ et l'on peut donc appliquer le lemme 2.2.10 à l'élément $I(1)$-invariant W. On en déduit que $m_s = 0$ pour tout $s \in J$, $s \neq \zeta^{a+1}$, $\tilde{m}_{s'} = 0$ pour tout $s' \in \mathbb{F}_p^* - (\zeta^{-a} J)$, $s' \neq \zeta^{p-a}$, et $m_{\zeta^{a+1}} T_1 = 0$, $\tilde{m}_{\zeta^{p-a}} T_2 = 0$. Ainsi,

$$U = m_{\zeta^{a+1}} \otimes w_{\zeta^{a+1}} + \tilde{m}_{\zeta^{p-a}} \otimes \tilde{w}_{\zeta^{a+1}} \mod M \otimes_{H_\chi} Z_{-1}.$$

L'action de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sur U s'obtient alors grâce au lemme 2.2.6 qui nous dit que $AU - U$ est égal à une combinaison linéaire à cœfficients non nuls de $m_{\zeta^{a+1}} \otimes u$ et de $\tilde{m}_{\zeta^{p-a}} \otimes \tilde{u}$. Par conséquent, $m_{\zeta^{a+1}} = \tilde{m}_{\zeta^{p-a}} = 0$ et $U \in M \otimes_{H_\chi} Z_{-1}$.

2.2.3.3. Espace des $I(1)$-invariants de $\mathfrak{M}_\chi \otimes_{H_\chi} ind_I^G \chi$. — Soit $\mathfrak{M}_\chi$ le H_χ-module supersingulier : d'après [**43**, 3.2], c'est le caractère de H_χ donné par

$$T_1 \mapsto 0, \quad T_2 \mapsto 0.$$

Proposition 2.2.14. *L'espace des $I(1)$-invariants de $\mathfrak{M}_\chi \otimes_{H_\chi} ind_I^G \chi$ est égal à $\mathfrak{M}_\chi \otimes_{H_\chi} Z_{-1}$*

Démonstration. — Soit $U \in \mathfrak{M}_\chi \otimes_{H_\chi} ind_I^G \chi$ un élément $I(1)$-invariant. On note

$$i := min\{k \in \mathbb{N},\ U \in \mathfrak{M}_\chi \otimes_{H_\chi} Z_k\}.$$

Si $i \leq 1$, alors d'après le résultat du paragraphe 2.2.3.2, on a $U \in \mathfrak{M}_\chi \otimes_{H_\chi} Z_{-1}$.

Supposons que $i \geq 2$, alors d'après la proposition 2.2.13 il existe α^0, α^1 β^0, $\beta^1 \in \mathfrak{M}_\chi$, tels que

$$U = \alpha^0 \otimes R_i^0 + \beta^0 \otimes S_i^0 + \alpha^1 \otimes R_{i-1}^1 + \beta^1 \otimes S_{i-1}^1 \mod \mathfrak{M}_\chi \otimes_{H_\chi} Z_{i-1}$$

avec α^0, $\alpha^1 \in \mathfrak{M}_\chi T_2$, β^0, $\beta^1 \in \mathfrak{M}_\chi T_1$. Or, $\mathfrak{M}_\chi T_1 = \{0\}$, $\mathfrak{M}_\chi T_2 = \{0\}$ donc α^0, α^1, β^0, et β^1 sont tous nuls ce qui contredit la définition de i.

□

2.2.3.4. Espace des $I(1)$-invariants de $M \otimes_{H_\chi} Z_i$, $i \geq 0$. —

Proposition 2.2.15. *Soit $i \in \mathbb{N}$. Pour tout H_χ-module à droite M, l'espace des $I(1)$-invariants de $M \otimes_{H_\chi} Z_i$ est égal à $M \otimes_{H_\chi} Z_{-1}$.*

Démonstration. — Nous montrons la proposition par récurrence sur i.
Elle est déjà prouvée pour $i = 1$ au paragraphe 2.2.3.2.

Supposons la proposition démontrée pour $i - 1$ avec $i \geq 2$. Soit U un élément de $M \otimes_{H_\chi} Z_i$ que l'on suppose $I(1)$-invariant. D'après la proposition 2.2.13, il existe α^0, α^1 β^0, $\beta^1 \in M$, tels que

$$U = \alpha^0 \otimes R_i^0 + \beta^0 \otimes S_i^0 + \alpha^1 \otimes R_{i-1}^1 + \beta^1 \otimes S_{i-1}^1 \mod M \otimes_{H_\chi} Z_{i-1}$$

avec α^0, $\alpha^1 \in MT_2$, β^0, $\beta^1 \in MT_1$, et $\alpha^0 T_2 = \alpha^1 T_2 = 0$, $\beta^0 T_1 = \beta^1 T_1 = 0$. Notons N le sous-H_χ-module de M engendré par les éléments α^0, β^0, α^1, et β^1.

Si N est nul alors $U \in M \otimes_{H_\chi} Z_{i-1}$ et par hypothèse de récurrence, $U \in M \otimes_{H_\chi} Z_{-1}$.

Supposons que $N \neq \{0\}$. On a la suite exacte de H_χ-modules à droite suivante,

$$0 \to N \to M \xrightarrow{\mathcal{P}} M/N \to 0$$

qui, par platitude du H_χ-module Z_i, donne la suite exacte de $\overline{\mathbb{F}}_p[I(1)]$-modules

$$0 \longrightarrow N \otimes_{H_\chi} Z_i \longrightarrow M \otimes_{H_\chi} Z_i \xrightarrow{\mathcal{P} \otimes id_{Z_i}} \mathcal{P}(M) \otimes_{H_\chi} Z_i \longrightarrow 0.$$

L'image de U par $\mathcal{P} \otimes id_{Z_i}$ est un élément $I(1)$-invariant appartenant à $\mathcal{P}(M) \otimes_{H_\chi} Z_{i-1}$. Par hypothèse de récurrence appliquée à $\mathcal{P}(M)$,

$$(\mathcal{P} \otimes id_{Z_i})(U) \in \mathcal{P}(M) \otimes_{H_\chi} Z_{-1}$$

c'est-à-dire qu'il existe $m, \tilde{m} \in M$, tels que $\mathcal{P} \otimes id_{Z_i}(U) = \mathcal{P}(m) \otimes u + \mathcal{P}(\tilde{m}) \otimes \tilde{u}$, ou encore

$$U - (m \otimes u + \tilde{m} \otimes \tilde{u}) \in Ker(\mathcal{P} \otimes id_{Z_i}) = N \otimes_{H_\chi} Z_i.$$

Pour démontrer que $U \in M \otimes_{H_\chi} Z_{-1}$, il suffit donc de s'assurer que tout élément $I(1)$-invariant de $N \otimes_{H_\chi} Z_i$ appartient à $N \otimes_{H_\chi} Z_{-1}$. Or pour $\epsilon \in \{0,1\}$, le sous-H_χ-module à droite de M engendré par α^ϵ (resp. β^ϵ) est isomorphe au H_χ-module à droite supersingulier $\mathfrak{M}_\chi$: en effet on a d'une part $\alpha^\epsilon T_2 = 0$ et $\alpha^\epsilon T_1 = 0$ car $\alpha^\epsilon \in MT_2$ et d'autre part, $\beta^\epsilon T_1 = 0$ et $\beta^\epsilon T_2 = 0$ car $\beta^\epsilon \in MT_1$. Ainsi, le H_χ-module à droite N est isomorphe à une somme de copies du H_χ-module supersingulier $\mathfrak{M}_\chi$. Le résultat est donc donné par la proposition 2.2.14. □

2.2.4. Cas où le corps résiduel de F est égal à $q > p$. — On suppose dans ce paragraphe que le corps résiduel de F est $\mathbb{F}_q$ avec $q > p$ et que $\chi = 1 \otimes \chi_2$ est le caractère régulier du tore défini par

$$\chi_2 : \mathbb{F}_q^* \to \overline{\mathbb{F}}_p{}^*,\ x \mapsto x^a, \text{ avec } a = p.$$

On note $\mathcal{A}$ l'idéal de H_χ engendré par T_1 et T_2 de sorte que le H_χ-module supersingulier $\mathfrak{M}_\chi$ est égal au quotient $H_\chi/\mathcal{A}$ et que le $\overline{\mathbb{F}}_p[I(1)]$-module $\mathfrak{M}_\chi \otimes_{H_\chi} ind_I^G \chi$ est isomorphe à la limite inductive

$$\mathfrak{M}_\chi \otimes_{H_\chi} ind_I^G \chi \simeq \varinjlim_{i \geq -1} Z_i/\mathcal{A}Z_i$$

où les flèches du système inductif sont les applications linéaires naturelles

$$\theta_i : Z_i/\mathcal{A}Z_i \to Z_{i+1}/\mathcal{A}Z_{i+1}.$$

L'image de θ_i est le sous H_χ-module $Z_i + \mathcal{A}Z_{i+1}/\mathcal{A}Z_{i+1}$ de $Z_{i+1}/\mathcal{A}Z_{i+1}$.

Soit $i \in \mathbb{N}$. On définit l'élément $X_i \in Z_i$ de la façon suivante

$$X_i = \sum_{x \in \mathbb{F}_q^i} w^0_{(x,\zeta)} \in Z_i.$$

Proposition 2.2.16. *La projection de X_i dans le quotient $Z_i/\mathcal{A}Z_i$ est un élément $I(1)$-invariant qui n'appartient pas à l'image $Im(\theta_{i-1})$ de θ_{i-1}.*

Corollaire 2.2.17. *L'espace des $I(1)$-invariants de $\mathfrak{M}_\chi \otimes_{H_\chi} ind_I^G \chi$ est de dimension infinie.*

Preuve de la proposition 2.2.16. — Assurons nous que l'image de $X_0 = w_\zeta$ dans le quotient $Z_0/\mathcal{A}Z_0$ n'appartient à $Im(\theta_{-1})$, c'est à dire que X_0 n'appartient pas à $\mathcal{A}Z_0 + Z_{-1}$.

Nous avons décrit au paragraphe 1.3.3.3 la structure du H_χ-module Z_0/Z_{-1}. Il est apparu à la remarque *1.3.22* qu'une combinaison linéaire des arêtes contenues dans $V_0 - \{u, u_0\}$ appartient à $\mathcal{A}Z_0 + Z_{-1} = T_1Z_0 + T_2Z_0 + Z_{-1}$ si et seulement si elle appartient, modulo Z_{-1}, à l'image par T_1 du $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel de base $\{\tilde{v},\ v \in V_0 - \{u, u_0\}\}$. Mais le lemme 1.3.9 décrit cette image : on y lit que w_ζ lui appartient, modulo Z_{-1}, si et seulement si $\Phi_1(\zeta^{q-a}) \neq 0$. Or, par les égalités (27), on a

$$\Phi_1(\zeta^{q-a}) = -(-1)^{a-1}a = -(-1)^{p-1}p = 0 \in \overline{\mathbb{F}}_p,$$

par conséquent, $X_0 = w_\zeta$ n'appartient pas à $\mathcal{A}Z_0 + Z_{-1}$.

Montrons maintenant que l'image de X_i dans le quotient $Z_i/\mathcal{A}Z_i$ n'appartient pas à $Im(\theta_{i-1})$, ou encore que X_i n'appartient pas à $\mathcal{A}Z_i + Z_{i-1}$. On rappelle (voir par exemple la preuve du lemme 1.3.16) que le H_χ-module Z_i/Z_{i-1} est la somme directe

$$Z_i/Z_{i-1} = \bigoplus_{x\in\mathbb{F}_q^i} \mathcal{F}_x^0\,(Z_0/Z_{-1}) \;\oplus\; \bigoplus_{x\in\mathbb{F}_q^{i-1}} \mathcal{F}_x^1\,(Z_0/Z_{-1}),$$

où pour $\epsilon \in \{0,1\}$, $x \in \mathbb{F}_q^{i-\epsilon}$, le morphisme injectif de H_χ-modules $\mathcal{F}_x^\epsilon : Z_0/Z_{i-1} \to Z_i/Z_{i-1}$ est induit par la translation par $(g_x^\epsilon\omega)$. La projection de X_i dans le quotient Z_i/Z_{i-1} a une coordonnée nulle selon $\mathcal{F}_x^1\,(Z_0/Z_{-1})$ pour tout $x \in \mathbb{F}_q^{i-1}$ tandis que, pour $x \in \mathbb{F}_q^i$, sa composante selon $\mathcal{F}_x^0\,(Z_0/Z_{-1})$ est l'image par $\mathcal{F}_x^0$ de $w_\zeta \mod Z_{-1}$.
De la décomposition précédente, on déduit que

$$\mathcal{A}Z_i + Z_{i-1}/Z_{i-1} = \bigoplus_{x\in\mathbb{F}_p^i} \mathcal{F}_x^0\,(\mathcal{A}Z_0 + Z_{-1}/Z_{-1}) \;\oplus\; \bigoplus_{x\in\mathbb{F}_p^{i-1}} \mathcal{F}_x^1\,(\mathcal{A}Z_0 + Z_{-1}/Z_{-1}),$$

et que X_i appartient à $\mathcal{A}Z_i + Z_{i-1}$ si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{F}_q^i$ sa composante selon $\mathcal{F}_x^0\,(Z_0/Z_{-1})$ appartient à $\mathcal{F}_x^0\,(\mathcal{A}Z_0 + Z_{-1}/Z_{-1})$. Ce n'est pas le cas puisqu'on a vu précédemment que w_ζ n'appartient pas à $\mathcal{A}Z_0 + Z_{-1}$. Donc X_i n'appartient pas à $\mathcal{A}Z_i + Z_{i-1}$.

Montrons que X_i est $I(1)$-invariant modulo $\mathcal{A}Z_i$. Soit $A \in I(1)$. Nous pouvons utiliser les résultats du lemme 0.2.9 du fait de la remarque *2.2.2* qui dit que l'identification que nous avons choisie entre l'ensemble des arêtes de l'arbre et une $\overline{\mathbb{F}}_p$-base de $ind_I^G\chi$ est compatible avec l'action de $I(1)$. On en déduit, avec les mêmes calculs que ceux de la preuve de la proposition 2.1.13 :

$$\begin{array}{rcl} A^{-1}X_i & = & \sum_{x\in\mathbb{F}_q^i}\sum_{s\in\mathbb{F}_q} sA^{-1}u^0_{(x,s)} \\ & = & \sum_{x\in\mathbb{F}_q^i}\sum_{s\in\mathbb{F}_q} su^0_{(r_A^0(x),\,s_A^0(x)+s)} \qquad \text{avec les notations du lemme 0.2.9,} \\ & = & \sum_{x\in\mathbb{F}_q^i}\sum_{s\in\mathbb{F}_q}(s - s_A^0(x))u^0_{(r_A^0(x),s)}. \end{array}$$

Or, par bijectivité de r_A^0, $X_i = \sum_{x\in\mathbb{F}_q^i}\sum_{s\in\mathbb{F}_q} su^0_{(r_A^0(x),s)}$. D'où, par l'assertion 4. du lemme 0.2.9,

$$A^{-1}X_i - X_i = \sum_{x\in\mathbb{F}_q^i}\sum_{s\in\mathbb{F}_q}(-s_A^0(x))u^0_{(r_A^0(x),s)} = \sum_{x\in\mathbb{F}_q^i}\sum_{s\in\mathbb{F}_q} s^0_{A^{-1}}(x)u^0_{(x,s)}$$

Or, on rappelle que $T_1(u_x^0) = (g_x^0\omega)T_1(\tilde{u}) = (g_x^0\omega)\sum_{s\in\mathbb{F}_p} u_s = \sum_{s\in\mathbb{F}_p} u^0_{(x,s)}$ d'après la remarque *0.2.4* et la description géométrique de l'action de T_1. Ainsi,

$$A^{-1}X_i - X_i = \sum_{x\in\mathbb{F}_q^i} s^0_{A^{-1}}(x)\; T_1u_x^0 = T_1(\sum_{x\in\mathbb{F}_q^i} s^0_{A^{-1}}(x)\; u_x^0) \in \mathcal{A}Z_{i-1} \subset \mathcal{A}Z_i.$$

□

2.2.5. Preuve des lemmes . —

Preuve du lemme 2.2.6. — Pour tout $i \in \{1, ..., p-1\}$, on a

$$w_{\zeta^i} = \sum_{k \in \mathbb{F}_p^*} k^i u_k = \sum_{k \in \mathbb{F}_p} k^i u_k. \tag{61}$$

Soit $i \in \{1, ..., p-1\}$. D'après l'exemple *0.2.7*, l'action de A transforme l'arête u_k en l'arête u_{k-1}. Ainsi,

$$\begin{aligned} Aw_{\zeta^j} - w_{\zeta^j} &= \sum_{k \in \mathbb{F}_p} ((k+1)^j - k^j) u_k \\ &= u_0 + \sum_{k \in \mathbb{F}_p^*} (\sum_{i=0}^{j-1} \binom{j}{i} k^i) uk \\ &= u_0 + \sum_{k \in \mathbb{F}_p^*} u_k + \sum_{k \in \mathbb{F}_p^*} (\sum_{i=1}^{j-1} \binom{j}{i} k^i) u_k \\ &= u_0 + w_1 + \sum_{i=1}^{j-1} \binom{j}{i} w_{\zeta^i} \text{ d'après l'égalité (61).} \end{aligned} \tag{62}$$

- Supposons maintenant que $\zeta^j \in J$, c'est à dire $j \in \{a+1, ..., p-1\}$. Alors

$$Aw_{\zeta^j} - w_{\zeta^j} = u_0 + w_1 + \sum_{i=1}^{a} \binom{j}{i} w_{\zeta^i} + \sum_{i=a+1}^{j-1} \binom{j}{i} w_{\zeta^i},$$

  où la deuxième somme est vide si $j = a+1$.

  Grâce au lemme 1.3.27, nous remplaçons, dans la première somme, l'élément $u_0 + w_1$ par $T_1(\tilde{u})$, l'élément w_{ζ^a} par $-u + (\Phi_1(1))^{-1} T_1(\tilde{w}_1)$, et pour $i \in \{1, ..., a-1\}$, l'élément w_{ζ^i} par $\Phi_1(\zeta^{i-a})^{-1} T_1(\tilde{w}_{\zeta^{i-a}})$, sachant que les valeurs de Φ_1 qui apparaissent ne s'annulent pas. Ces valeurs sont du reste reliées aux cœfficients du polynôme $(1-X)^a$, et l'on a, pour tout $i \in \{1, ..., a\}$, $\Phi_1(\zeta^{i-a}) = -(-1)^{a-i} \binom{a}{i}$. Ainsi,

$$Aw_{\zeta^j} - w_{\zeta^j} = T_1(\tilde{u}) - \binom{j}{a} u - \sum_{i=1}^{a} (-1)^{a-i} \binom{j}{i} \binom{a}{i}^{-1} T_1(\tilde{w}_{\zeta^{i-a}}) + \sum_{i=a+1}^{j-1} \binom{j}{i} w_{\zeta^i}.$$

  On a montré, pour $j \in \{a+1, ..., p-1\}$, que $Aw_{\zeta^j} - w_{\zeta^j}$ est une combinaison linéaire à cœfficients non nuls de

$$u,\ T_1(\tilde{u}),\ \ w_{\zeta^{a+1}}, ..., w_{\zeta^{j-1}},\ \ T_1(\tilde{w}_{\zeta^{p-a}}), ..., T_1(\tilde{w}_{\zeta^{p-1}}).$$

- Supposons maintenant que $\zeta^j \in \mathbb{F}_p^* - (\zeta^{-a} J)$, c'est-à-dire $j \in \{p-a, ..., p-1\}$. Le calcul de $A\tilde{w}_{\zeta^j} - \tilde{w}_{\zeta^j}$ débute comme celui de $Aw_{\zeta^j} - w_{\zeta^j}$ et l'on peut reprendre l'égalité (62) en passant aux éléments opposés :

$$\begin{aligned} A\tilde{w}_{\zeta^j} - \tilde{w}_{\zeta^j} &= \tilde{u}_0 + \tilde{w}_1 + \sum_{i=1}^{j-1} \binom{j}{i} \tilde{w}_{\zeta^i} \\ &= \tilde{u}_0 + \tilde{w}_1 + \sum_{i=1}^{p-a-1} \binom{j}{i} \tilde{w}_{\zeta^i} + \sum_{i=p-a}^{j-1} \binom{j}{i} \tilde{w}_{\zeta^i}, \end{aligned}$$

où la deuxième somme est vide si $j = p - a$.

Grâce au lemme 1.3.27, nous remplaçons, dans la première somme l'élément $\tilde{u}_0 + \tilde{w}_1$ par $T_2(u)$, l'élément $\tilde{w}_{\zeta^{p-1-a}}$ par $-(-1)^a\tilde{u}+(\Phi_2(\zeta^{-a}))^{-1}T_2(w_1)$, et pour tout $i \in \{1, ..., p-a-2\}$, l'élément $\tilde{w}_{\zeta^i}$ par $\Phi_2(\zeta^i)^{-1}T_2(w_{\zeta^{i+a}})$, sachant que les valeurs de Φ_2 qui apparaissent ne s'annulent pas, et sont reliées aux les cœfficients du polynôme $(1-X)^{p-1-a}$: on a, pour tout $i \in \{1, ..., p-1-a\}$, $\Phi_2(\zeta^i) = -(-1)^i \binom{p-1-a}{i}$. Ainsi,

$$A\tilde{w}_{\zeta^j} - \tilde{w}_{\zeta^j} = T_2(u) - (-1)^a \binom{j}{p-1-a} \tilde{u} - \sum_{i=1}^{p-a-1} (-1)^i \binom{j}{i} \binom{p-1-a}{i} T_2(w_{\zeta^{i+a}}) + \sum_{i=p-a}^{j-1} \binom{j}{i} \tilde{w}_{\zeta^i}.$$

On a montré, pour $j \in \{p-a, ..., p-1\}$, que $A\tilde{w}_{\zeta^j} - \tilde{w}_{\zeta^j}$ est une combinaison linéaire à cœfficients non nuls de

$$T_2(u),\ \tilde{u},\ \ \tilde{w}_{\zeta^{p-a}}, ..., \tilde{w}_{\zeta^{j-1}},\ \ T_2(w_{\zeta^{a+1}}), ..., T_1(w_{\zeta^{p-1}}).$$

□

PREUVE DU LEMME 2.2.9. — On suppose que $F = \mathbb{Q}_p$, $p \neq 2$. Soit $i \geq 1$. On démontre le lemme pour $\epsilon = 0$. Le cas $\epsilon = 1$ s'en déduit aisément car on rappelle que $\omega S_i^1 = S_i^0$, $\omega R_i^1 = R_i^0$ et que l'on a l'égalité matricielle $\omega A^1 \omega^{-1} = A^0$.

Par définition, $S_i^0 = \sum_{x \in \mathbb{F}_p^i} w^0_{(x,\zeta^{1+a})}$. D'après la remarque *2.2.8*, on a $T_2(S_i^0) = \Phi_2(\zeta) \sum_{x \in \mathbb{F}_p^i, s \in \mathbb{F}_p} s\tilde{u}^0_{(x,s)}$ où $\Phi_2(\zeta) \neq 0$.
D'après la remarque *2.2.2*, on peut appliquer les résultats du lemme 0.2.9 pour étudier l'action de $A := A^0$ sur $T_2(S_i^0)$ et l'on peut reprendre les calculs de la preuve de la proposition 2.2.16 pour obtenir

$$AT_2(S_i^0) - T_2(S_i^0) = \Phi_2(\zeta) \sum_{x \in \mathbb{F}_p^i} s_A^0(x) T_2(\tilde{u}_x^0)$$

Puisque le corps résiduel de $\mathbb{Q}_p$ est de cardinal p, la condition 3 du théorème 1.3.1 est vérifiée : on a la suite exacte de $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-modules

$$0 \longrightarrow T_1 ind_I^G \chi \longrightarrow ind_I^G \chi \xrightarrow{T_2} T_2 ind_I^G \chi \longrightarrow 0.$$

On en déduit que, modulo l'image $T_1 ind_I^G \chi$ de T_1, on a l'égalité suivante :

$$AS_i^0 - S_i^0 = \Phi_2(\zeta) \sum_{x \in \mathbb{F}_p^i} s_A^0(x) \tilde{u}_x^0 = \Phi_2(\zeta) \sum_{x \in \mathbb{F}_p^{i-1} s \in \mathbb{F}_p} s_A^0(x,s) \tilde{u}^0_{(x,s)}.$$

D'après l'exemple *0.2.11*, on a $s_A^0(x,s) = Q(1,s)$, où $Q(X,Y)$ est la réduction modulo p du polynôme à cœfficients entiers $\frac{X^p+Y^p-(X+Y)^p}{p}$.
Ainsi, $s_A^0(x,s)$ s'écrit $s_A^0(x,s) = \sum_{k=1}^{p-1} q_k s^k$, où chacun des $q_k \in \overline{\mathbb{F}}_p$ est non nul. Donc,

$$\begin{aligned} AS_i^0 - S_i^0 &= \Phi_2(\zeta) \sum_{x\in\mathbb{F}_p^{i-1}} \sum_{s\in\mathbb{F}_p^*} \sum_{k=1}^{p-1} q_k s^k \tilde{u}^0_{(x,s)} \\ &= \Phi_2(\zeta) \sum_{x\in\mathbb{F}_p^{i-1}} \sum_{j=1}^{p-1} \sum_{k=1}^{p-1} q_k \zeta^{jk} \tilde{u}^0_{(x,\zeta^j)} \end{aligned}$$

On reconnaît alors la transformée de Fourier $\sum_{j=1}^{p-1} \zeta^{jk} \tilde{u}^0_{(x,\zeta^j)} = \tilde{w}^0_{(x,\zeta^k)}$, donc

$$AS_i^0 - S_i^0 = \Phi_2(\zeta) \sum_{x\in\mathbb{F}_p^{i-1}} \sum_{k=1}^{p-1} q_k \tilde{w}^0_{(x,\zeta^k)}$$

où les q_k sont tous non nuls.

On rappelle que $\mathbb{F}_p^* - (\zeta^{-a}J) = \{\zeta^{p-a}, ..., \zeta^{p-1}\}$. Pour k appartenant à $\{1, ..., p-a-1\}$, on remplace, avec le lemme 1.3.27

$\tilde{w}^0_{(x,\zeta^{p-1-a})}$ par $-(-1)^a u_x^0 + \Phi_2(\zeta^{-a})^{-1} T_2(w^0_{(x,\zeta^{p-1})}) = -(-1)^a u_x^0 - (-1)^a T_2(w^0_{(x,\zeta^{p-1})})$,

$\tilde{w}^0_{(x,\zeta^k)}$ par $\Phi_2(\zeta^k)^{-1} T_2(w^0_{(x,\zeta^{k+a})})$.

On a alors le résultat annoncé.

□

PARTIE II

MODULES SIMPLES SUR LA PRO-p-ALGÈBRE DE HECKE DE $\mathrm{GL}_n(F)$ EN CARACTÉRISTIQUE p

CHAPITRE 3

L'ANNEAU DE HECKE DU PRO-p-IWAHORI DE $\mathrm{GL}_n(F)$ ET SES MODULES STANDARDS

3.1. Notations

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Le groupe réductif $\mathrm{GL}_n(F)$ est muni d'un système de Tits généralisé ([**11**]). Nous rappelons les propriétés dont nous aurons l'usage.

Soit $(X,\, X^\vee,\, R_0,\, R_0^\vee, B, B^\vee)$ la donnée radicielle affine associée à $(\mathrm{GL}_n(F), B(F), T(F))$ ([**26**, 1], [**11**, 6]). L'ensemble X est le groupe additif des matrices diagonales dont les cœfficients diagonaux sont des puissances de π. On dit d'un élément de X qu'il est dominant s'il est égal à la diagonale $(\pi^{v_1}, \pi^{v_2}, ..., \pi^{v_n})$ avec $v_1, ...v_n \in \mathbb{Z}$, $v_1 \leq v_2 \leq ... \leq v_n$. On note X_{dom} le semi-groupe constitué par les éléments dominants de X.

Soit $N(F)$ le normalisateur dans $\mathrm{GL}_n(F)$ du tore déployé $T(F)$. Le groupe de Weyl de $\mathrm{GL}_n(F)$ est le groupe quotient $W_0 = N(F)/T(F)$. On considère comme précédemment le groupe des permutations $\mathfrak{S}_n$ comme un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(F)$ en associant à un élément de $\mathfrak{S}_n$ la matrice de permutation correspondante. Alors $\mathfrak{S}_n$ est un ensemble de représentants du quotient $N(F)/T(F)$ et on l'identifiera désormais avec W_0. Ainsi, W_0 est un groupe de Coxeter de système générateur $\mathrm{S}_0 = \{s_1, .., s_{n-1}\}$ où, pour $i \in \{1, .., n-1\}$, on désigne par s_i la transposition associée à la racine simple α_i.

Le groupe de Weyl affine W_{aff} de $\mathrm{GL}_n(F)$ est le produit semi-direct $W_{aff} = W_0.X_{aff}$ où X_{aff} est le sous-groupe de X engendré par R_0. Si α_0 est la racine la plus longue et s la réflexion associée, on note $s_0 = \alpha_0.s \in W_{aff}$. A l'aide de l'élément ω défini au paragraphe 0.1.4, l'élément s_0 s'écrit $s_0 = \omega s_1 \omega^{-1}$. D'après [**23**, Proposition 1.1], le groupe W_{aff} est un groupe de Coxeter de système générateur $S = \{s_0, s_1, .., s_{n-1}\}$. Pour tout $i \in \{1, ..., n-1\}$, on a les relations $s_i = \omega^{-1} s_{i-1} \omega$ et $s_i s_{i-1} s_i = s_{i-1} s_i s_{i-1}$.

Pour $s \in S$, on désigne par $\Phi_s : \mathrm{GL}_2(F) \to \mathrm{GL}_n(F)$ le morphisme associé ([**23**], [**45**, 1.2]), et par $T_s(\mathbb{F}_q)$ le sous-groupe du tore fini $T(\mathbb{F}_q)$ égal à l'image du cocaractère $h_s : \mathbb{F}_q^* \to T(\mathbb{F}_q)$ associé à s. Pour tout $\alpha \in \mathbb{F}_q^*$, on rappelle que $h_s(\alpha) = \Phi_s \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}$. Pour $s \in S$, on pose $\delta_s = \Phi_s \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On note $T(O_F)$ le sous-groupe du tore $T(F)$ constitué par les diagonales d'éléments de O_F^*. Le groupe de Weyl affine étendu $\tilde{W} = N(F)/T(O_F)$ s'identifie à un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(F)$ isomorphe au produit semi-direct $W_0.X$. Notant $< \omega >$ le groupe cyclique engendré par ω , le groupe de Weyl affine étendu s'écrit aussi $< \omega > .W_{aff}$ où ω normalise W_{aff}. Ainsi, la longueur ℓ du système

de Coxeter (W_{aff}, S) se prolonge à $\tilde{W}$ de façon à ce que le groupe $< \omega >$ soit l'ensemble des éléments de longueur nulle ([**26**, 1.4]). Le groupe de Weyl affine étendu fournit un système de représentants des doubles classes de $\mathrm{GL}_n(F)$ modulo le sous-groupe d'Iwahori standard I ([**23**, Proposition 2.1]). Ainsi, une $\mathbb{Z}$-base de l'anneau de Hecke-Iwahori de $\mathrm{GL}_n(F)$ est donnée par l'ensemble $\{T_w,\ w \in \tilde{W}\}$ avec les notations du paragraphe 0.1.2.

On note $T(1+\pi O_F)$ le sous-groupe de $T(O_F)$ constitué par les diagonales d'éléments de $1+\pi O_F$. Rappelons que le tore fini $T(\mathbb{F}_q)$ s'identifie avec un sous-groupe de $T(O_F)$ *via* l'isomorphisme de Teichmüller de $\mathbb{F}_q^*$ à valeurs dans le groupe des racines de l'unité de O_F^* d'ordre premier à p : on a la suite exacte scindée

$$0 \to T(1+\pi O_F) \to T(O_F) \to T(\mathbb{F}_q) \to 0.$$

Grâce à cette identification, le sous-groupe d'Iwahori standard I de $\mathrm{GL}_n(F)$ s'écrit comme le produit semi-direct $T(\mathbb{F}_q).I(1)$.

Comme dans [**45**], on notera parfois $X^{(1)}$ le tore déployé $T(F)$, pour insister sur le fait qu'il s'identifie avec le produit direct $X \times T(\mathbb{F}_q)$. On dira de $x \in X^{(1)}$ que c'est un élément dominant si c'est une diagonale $(x_1, ..., x_n)$ telle que $val(x_1) \leq ... \leq val(x_n)$. Le semi-groupe $X^{(1)}_{dom}$ des éléments dominants de $X^{(1)}$ s'identifie avec le semi-groupe $X_{dom} \times T(\mathbb{F}_q)$.

On note $W^{(1)}$ le groupe quotient $N(F)/T(1+\pi O_F)$. Il s'identifie avec un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(F)$ isomorphe au produit semi-direct $W_0.X^{(1)}$. Il fournit un système de représentants des doubles classes de $\mathrm{GL}_n(F)$ modulo le pro-p-Iwahori $I(1)$. On prolonge la longueur ℓ de $\tilde{W}$ à $W^{(1)}$ de façon à ce que $\ell(twt') = \ell(w)$ pour tous $t, t' \in T(\mathbb{F}_q)$, $w \in W^{(1)}$ ([**45**] Proposition 1). Un élément de longueur nulle de $W^{(1)}$ est le produit d'une puissance de ω par un élément du tore fini. Un élément de longueur $d \in \mathbb{N}$ de $W^{(1)}$ est égal au produit d'un élément de longueur d de W_{aff} et d'un élément de longueur nulle.

L'action de W_0 sur le tore fini $T(\mathbb{F}_q)$ induit une action sur le groupe $\hat{T}(\mathbb{F}_q)$ des $\mathbb{F}_q$-caractères de $T(\mathbb{F}_q)$. On a noté Γ l'ensemble des orbites dans $\hat{T}(\mathbb{F}_q)$ sous l'action de W_0. On considère l'action de $W^{(1)}$ sur $\hat{T}(\mathbb{F}_q)$ qui se factorise par celle de W_0 : pour $w = w_0 x \in W^{(1)} = W_0 X^{(1)}$, $\chi \in \hat{T}(\mathbb{F}_q)$, on a $w\chi := w_0\chi$.

On désignera par R un anneau commutatif unitaire et l'on notera $R \supset \{\mu_{q-1}, (q-1)^{-1}\}$ lorsque R contient une racine $q-1^{\text{ème}}$ primitive de l'unité et $q-1$ est inversible dans R. On rappelle que, dans ce cas, le groupe des R-caractères de $T(\mathbb{F}_q)$ s'identifie avec le groupe $\hat{T}(\mathbb{F}_q)$ des $\mathbb{F}_q$-caractères de $T(\mathbb{F}_q)$.

Dans ce chapitre on note $G = \mathrm{GL}_n(F)$.

3.2. Présentations de l'anneau de Hecke du pro-p-Iwahori de $\mathrm{GL}_n(F)$

3.2.1. Présentation de Iwahori-Matsumoto.—

3.2.1.1. L'anneau de Hecke $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}(G, I(1))$ du pro-p-Iwahori de G possède une présentation de type Iwahori-Matsumoto. Pour tout $w \in W^{(1)}$, on désigne, comme au paragraphe 0.1.2, par T_w l'élément de $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}(G, I(1))$ de support $I(1)wI(1)$ et de valeur 1 en w. Les théorèmes suivants sont démontrés dans ([**45**, 1.3]).

Théorème 3.2.1. *L'anneau de Hecke $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}(G, I(1))$ est le $\mathbb{Z}$-module libre de base $(T_w)_{w\in W^{(1)}}$ vérifiant :*
(1) les relations de tresses, $T_wT_{w'} = T_{ww'}$ pour w, $w' \in W^{(1)}$ tels que $\ell(w) + \ell(w') = \ell(ww')$,
(2) les relations quadratiques, $(T_s)^2 = q + T_s(\sum_{t\in T_s(\mathbb{F}_q)} T_{\delta_s}T_t)$ pour $s \in S$.

Notation 3.2.2. – On note q_R l'élément $q_R := q.1_R$. Désormais, on considère q comme une indéterminée et R comme un $\mathbb{Z}[q]$-module *via* le morphisme d'anneaux unitaires défini par $q \mapsto q_R$.

– On note $\mathcal{H}^{(1)}$ la $\mathbb{Z}[q]$-algèbre de générateurs $(T_w)_{w\in W^{(1)}}$ vérifiant les relations (1) et (2) du théorème. Puisque ω et $t \in T(\mathbb{F}_q)$ sont de longueur nulle dans $W^{(1)}$, les éléments T_ω et T_t de la base de Iwahori-Matsumoto leur correspondant sont inversibles dans $\mathcal{H}^{(1)}$.

  Du fait de la présentation du groupe $W^{(1)}$ donnée au paragraphe 3.1, les relations de tresses montrent qu'un système générateur de la $\mathbb{Z}[q]$-algèbre $\mathcal{H}^{(1)}$ est
$$\{T_{s_1}, T_\omega^{\pm 1}, T_t \in T(\mathbb{F}_q)\}.$$

– On note $\mathcal{H}^{(1)}[q^{\pm 1/2}]$ l'algèbre obtenue après addition d'une racine carrée et d'un inverse de q à l'anneau des scalaires de $\mathcal{H}^{(1)}$. D'après les relations quadratiques, l'élément T_{s_1} est inversible dans $\mathcal{H}^{(1)}[q^{\pm 1/2}]$. Ainsi, tout élément de la base de Iwahori-Matsumoto est inversible dans $\mathcal{H}^{(1)}[q^{\pm 1/2}]$.

– On désigne par $\mathcal{H}_R^{(1)}$ la R-algèbre $\mathcal{H}^{(1)} \otimes_{\mathbb{Z}[q]} R$. Elle s'identifie à l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_R(G, I(1))$.

Pour tout $w \in W^{(1)}$, l'élément $T_w^* = q^{\ell(w)}(T_w)^{-1}$ appartient à $\mathcal{H}^{(1)}$, où $(T_w)^{-1}$ désigne l'inverse de T_w dans $\mathcal{H}^{(1)}[q^{\pm 1/2}]$ ([**45**, Remarque 7]). En particulier, pour tout $s \in S$,
$$T_s^* = T_s - \sum_{t\in T_s(\mathbb{F}_q)} T_{\delta_s}T_t. \tag{63}$$

Remarque 3.2.3. Soit $w \in W^{(1)}$ et $s \in S$.
Si $\ell(ws) > \ell(w)$, alors c'est que $\ell(ws) = \ell(w) + 1$ et d'après les relations de tresses (1), on a $T_wT_s = T_{ws}$.
Sinon, c'est que $\ell(w) = \ell(ws) + 1$ et d'après les relations de tresses (1), $T_{ws}T_s = T_w$. Dans ce cas, d'après les relations quadratiques (2) on a $T_wT_s = T_{ws}T_s^2 = qT_{ws} + T_{ws}T_s(\sum_{t\in T_s(\mathbb{F}_q)} T_{\delta_s}T_t) = qT_{ws} + T_w(\sum_{t\in T_s(\mathbb{F}_q)} T_{\delta_s}T_t)$. Puisqu'un élément du tore fini est de longueur nulle dans $W^{(1)}$, les relations de tresses donnent $T_wT_s = qT_{ws} + \sum_{t\in T_s(\mathbb{F}_q)} T_{w\delta_s t}$ avec $\ell(w\delta_s t) = \ell(w)$.

Dans les deux cas T_wT_s est une combinaison linéaire à cœfficients dans $\mathbb{Z}[q]$ d'éléments de la base de Iwahori-Matsumoto de $\mathcal{H}^{(1)}$ correspondant à des éléments de $W^{(1)}$ de longueur inférieure ou égale à $\ell(w) + 1$. C'est encore vrai en remplaçant s par un élément quelconque de longueur 1 de $W^{(1)}$.

3.2.1.2. — Supposons que $R \supset \{\mu_{q-1}, (q-1)^{-1}\}$. La preuve de la proposition 1.1.3 effectuée dans [**43**, Proposition 2.1] ne fait pas intervenir le fait que $n = 2$. Pour $G = \mathrm{GL}_n(F)$, cette proposition se traduit de la façon suivante : l'induite compacte du caractère trivial de $I(1)$ à valeurs dans R se décompose en la somme directe de $R[G]$-modules

$$ind_{I(1)}^G \mathbf{1} \simeq \bigoplus_{\chi \in \hat{T}(\mathbb{F}_q)} ind_I^G \chi. \tag{64}$$

De plus, il n'y a pas de morphisme non nul entre les $R[G]$-modules $ind_I^G \chi$ et $ind_I^G \chi'$ si χ et χ' ne sont pas conjugués sous l'action de W_0. On obtient ainsi la décomposition de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_R^{(1)}$ en le produit d'algèbres de Hecke

$$\mathcal{H}_R^{(1)} = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} \mathcal{H}_R(G, \sigma_\gamma),$$

où pour $\gamma \in \Gamma$, on désigne par σ_γ la R-représentation de I triviale sur $I(1)$ donnée par $\sigma_\gamma = \underset{\chi \in \gamma}{\oplus} \chi$.

Pour $\chi \in \hat{T}(\mathbb{F}_q)$, on note ϵ_χ l'élément de $\mathcal{H}_R^{(1)}$ égal à la projection $ind_{I(1)}^G \mathbf{1} \twoheadrightarrow ind_{I(1)}^G \chi$. On pose alors $\epsilon_\gamma = \sum_{\chi \in \gamma} \epsilon_\chi$. C'est un idempotent central de $\mathcal{H}_R^{(1)}$ et l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_R(G, \sigma_\gamma)$ s'identifie avec l'algèbre $\epsilon_\gamma \mathcal{H}_R^{(1)}$ d'unité ϵ_γ.

Lemme 3.2.4. *Dans la R-base de Iwahori-Matsumoto $(T_w)_{w \in W^{(1)}}$ de $\mathcal{H}_R^{(1)}$, l'élément ϵ_χ se décompose comme suit :*

$$\epsilon_\chi = (q_R - 1)^{-n} \sum\nolimits_{t \in T(\mathbb{F}_q)} \chi(t) T_t.$$

En particulier, pour tout $t \in T(\mathbb{F}_q)$, on a $\epsilon_\chi T_t = T_t \epsilon_\chi = \chi(t^{-1}) \epsilon_\chi$.

Démonstration. — On utilise les notations et remarques du paragraphe 0.1.2.
Soient $\chi' \in \hat{T}(\mathbb{F}_q)$ et f l'élément de l'induite compacte $ind_{I(1)}^G \mathbf{1}$ défini par $f = \sum_{t \in T(\mathbb{F}_q)} \chi'(t) t^{-1} \mathbf{1}_{I(1)}$, où l'on désigne par $\mathbf{1}_{I(1)}$ la fonction caractéristique de $I(1)$. Son support est inclus dans I et sa valeur en l'unité de G est égale à $1_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ car le seul élément du tore fini qui appartient à $I(1)$ est l'élément unité. Un élément $u \in I$ agit sur f par

$$uf = u\,(\sum_{t \in T(\mathbb{F}_q)} \chi'(t) t^{-1} \mathbf{1}_{I(1)}) = \sum_{t \in T(\mathbb{F}_q)} \chi'(u) \chi'(tu^{-1}) (tu^{-1})^{-1} \mathbf{1}_{I(1)} = \chi'(u) f.$$

Ainsi, f est l'élément de $ind_I^G \chi'$ égal à l'élément noté $f_{I,\chi'}$ de support I et de valeur $1_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ en l'unité de G.

On note p_χ l'élément de $\mathcal{H}_R^{(1)}$ du lemme $p_\chi = (q_R - 1)^{-n} \sum_{t \in T(\mathbb{F}_q)} \chi(t) T_t$, dont on veut montrer qu'il est égal à la projection $\epsilon_\chi : ind_{I(1)}^G \mathbf{1} \twoheadrightarrow ind_I^G \chi$. Nous allons calculer l'image de $f_{I,\chi'}$ par p_χ et montrer qu'elle est nulle si $\chi \neq \chi'$, égale à $f_{I,\chi}$ sinon. Ainsi, puisque le $R[G]$-module $ind_I^G \chi'$ est engendré par $f_{I,\chi'}$, on aura montré que p_χ et ϵ_χ coïncident sur chaque sous-espace de la décomposition (64).

Pour tout $u \in T(\mathbb{F}_q)$, puisque $I(1)uI(1) = I(1)u$, on a $T_u(\mathbf{1}_{I(1)}) = u^{-1}\mathbf{1}_{I(1)}$. Ainsi,

$$\begin{array}{rcl} p_\chi(f_{I,\chi'}) & = & (q_R-1)^{-n}\sum_{t\in T(\mathbb{F}_q)}\chi'(t)t^{-1}p_\chi(\mathbf{1}_{I(1)}) \\ & = & (q_R-1)^{-n}\sum_{t,u\in T(\mathbb{F}_q)}\chi'(t)\chi(u)t^{-1}T_u\mathbf{1}_{I(1)} \\ & = & (q_R-1)^{-n}\sum_{t,u\in T(\mathbb{F}_q)}\chi'(t)\chi(u)t^{-1}u^{-1}\mathbf{1}_{I(1)} \\ & = & (q_R-1)^{-n}\sum_{t\in T(\mathbb{F}_q)}\chi'(t)\chi(t^{-1})\sum_{u\in T(\mathbb{F}_q)}\chi(ut)(ut)^{-1}\mathbf{1}_{I(1)} \\ & = & (q_R-1)^{-n}(\sum_{t\in T(\mathbb{F}_q)}\chi'(t)\chi(t^{-1}))f_{I,\chi} \end{array}$$

Or, si $\chi \neq \chi'$ la somme $\sum_{t\in T(\mathbb{F}_q)}\chi'(t)\chi(t^{-1})$ est nulle, tandis que si $\chi = \chi'$ elle vaut $(q_R-1)^n$. Ainsi, $p_\chi(f_{I,\chi'}) = 0$ si $\chi' \neq \chi$, et $p_\chi(f_{I,\chi}) = f_{I,\chi}$ sinon.

□

On déduit de ces résultats le théorème suivant. C'est le corollaire 4 de [**45**] adapté au cas du groupe $\mathrm{GL}_n(F)$.

Théorème 3.2.5. *La R-algèbre de Hecke $\mathcal{H}_R^{(1)}$ est le produit, sur les W_0-orbites γ de $\hat{T}(\mathbb{F}_q)$, des R-algèbres $\epsilon_\gamma\mathcal{H}_R^{(1)}$, d'unité ϵ_γ et de base $(T_w\epsilon_\chi)_{w\in\tilde{W},\chi\in\gamma}$, avec les relations :*

(1) pour χ, $\chi' \in \gamma$, $\chi \neq \chi'$, $\epsilon_\chi^2 = \epsilon_\chi$, $\epsilon_\chi\epsilon_{\chi'} = 0$, $\sum_{\chi\in\gamma}\epsilon_\chi = \epsilon_\gamma$,
(2) pour $w \in \tilde{W}$, $\chi \in \gamma$, $T_w\epsilon_\chi = \epsilon_{w\chi}T_w$,
(3) pour w, $w' \in \tilde{W}$ tels que $\ell(ww') = \ell(w) + \ell(w')$, on a $T_wT_{w'} = T_{ww'}$,
(4) pour $s \in S$, $(T_s)^2\epsilon_\gamma = q_R\epsilon_\gamma + (q_R-1)T_s\sum_{\chi\in\gamma,\, s\chi=\chi}\chi(\delta_s)\epsilon_\chi$.

Remarque 3.2.6. Pour $s \in S$, on a

$$T_s^*\epsilon_\gamma = T_s\epsilon_\gamma + (1-q_R)\sum_{\chi\in\gamma,\, s\chi=\chi}\chi(\delta_s)\epsilon_\chi.$$

3.2.2. Base de Bernstein entière.— On dispose d'une présentation de Bernstein de l'anneau de Hecke $\mathcal{H}^{(1)}$ qui reflète la décomposition $W^{(1)} = W_0.X^{(1)}$ ([**45**, 1.4]). C'est une généralisation de la présentation de Bernstein pour la $\mathbb{Z}[q^{\pm 1/2}]$-algèbre de Hecke-Iwahori de G ([**26**, 3.],[**7**, 5.4]).

Dans l'algèbre $\mathcal{H}^{(1)}[q^{\pm 1/2}]$, on définit les analogues des éléments de Bernstein de la $\mathbb{Z}[q^{\pm 1/2}]$-algèbre de Hecke-Iwahori : pour $w \in W^{(1)}$, on pose $\tilde{T}_w = q^{-\ell(w)/2}T_w$. Soit $x \in X^{(1)}$, $x = y - z$ avec y, $z \in X^{(1)}_{dom}$. L'élément $\theta_x^{(1)} = \tilde{T}_y\tilde{T}_z^{-1}$ ne dépend pas du choix de x et y. De plus, l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[q^{\pm 1/2}][X^{(1)}] & \longrightarrow & \mathcal{H}^{(1)}[q^{\pm 1/2}] \\ x & \longmapsto & \theta_x^{(1)} \end{array}$$

est un morphisme injectif de $\mathbb{Z}[q^{\pm 1/2}]$-algèbres ([**45**, Proposition 4]). On note $\mathcal{A}^{(1)}[q^{\pm 1/2}]$ son image.

Pour $w = w_0x \in W_0.X^{(1)}$, on pose

$$E_w := q^{\ell(w)/2}\tilde{T}_{w_0}\theta_x^{(1)}. \tag{65}$$

Notation 3.2.7. Soit I un sous-ensemble de $\{1, ..., n\}$. On désigne par x_I la diagonale constituée de π en les coordonnées qui appartiennent à I, et de 1 ailleurs. Si I est le singleton $\{i\}$, on notera simplement x_i. D'après l'appendice de **[44]**, la longueur de l'élément $x_I \in W^{(1)}$ est égale à $|I|(n - |I|)$. L'élément E_{x_I} sera noté E_I. En particulier, $E_{\{1,..,n\}}$ est égal à l'élément central inversible T_ω^n.

Exemple 3.2.8. – On a $E_{w_0} = T_{w_0}$ pour $w_0 \in W_0$, $E_x = T_x$ pour $x \in X^{(1)}_{dom}$.

– L'inverse de l'élément $x_1 = s_1...s_{n-1}\omega$ de X est dominant, donc dans $\mathcal{H}^{(1)}[q^{\pm 1/2}]$, on a

$$\theta^{(1)}_{x_1} = (\theta^{(1)}_{x_1^{-1}})^{-1} = q^{(n-1)/2} T^{-1}_{s_1} ... T^{-1}_{s_{n-1}} T_\omega.$$

On en déduit que $T_\omega = q^{-(n-1)/2} T_{s_{n-1}} ... T_{s_1} \theta^{(1)}_{x_1}$. Mais on reconnaît précisément dans cette écriture l'élément E_ω. Donc, $E_\omega = T_\omega$.

– L'élément le plus long de W_0 est $s = s_1 s_2 ... s_{n-1} ... s_2 s_1$. L'élément $s_0 = \omega s_1 \omega^{-1}$ se décompose dans $W^{(1)} = W_0.X^{(1)}$ comme suit : $s_0 = s\, x_1 x_n^{-1}$. Les calculs que l'on vient de faire montrent alors que $E_{s_0} = qT^{-1}_{s_0} = T^*_{s_0}$.

Dans tous les cas, on remarque que les éléments $E_?$ que l'on a calculés appartiennent en fait à la $\mathbb{Z}[q]$-algèbre $\mathcal{H}^{(1)}$.

Théorème 3.2.9. *(1) Une $\mathbb{Z}[q]$-base de $\mathcal{H}^{(1)}$ est donnée par $(E_w)_{w \in W^{(1)}}$.*

(2) L'ensemble $(E_x)_{x \in X^{(1)}}$ est une base de la $\mathbb{Z}[q]$-algèbre commutative $\mathcal{A}^{(1)} = \mathcal{A}^{(1)}[q^{\pm 1/2}] \cap \mathcal{H}^{(1)}$. Un système de générateurs de $\mathcal{A}^{(1)}$ est donné par

$$E^{\pm 1}_{\{1,..,n\}},\ (E_I)_{I \subsetneq \{1,..,n\}},\ (T_t)_{t \in T(\mathbb{F}_q)},$$

avec les relations :

$$T_t T_{t'} = T_{tt'},\ \textit{pour}\ t, t' \in T(\mathbb{F}_q),$$

et pour $I, J \subset \{1, ..., n\}$,

$$(\mathcal{R}_0) \quad E_I E_J = q^{bc} E_{I \cup J} E_{I \cap J} \quad \textit{où}\ |I \cap J| = a,\ |I| = a + b,\ |J| = a + c.$$

(3) L'action naturelle de W_0 sur $X^{(1)}$ fournit une action de W_0 sur $\mathcal{A}^{(1)}[q^{\pm 1/2}]$ qui stabilise $\mathcal{A}^{(1)}$. Le centre de $\mathcal{H}^{(1)}$ est égal au sous-anneau des W_0-invariants de $\mathcal{A}^{(1)}$. C'est la $\mathbb{Z}[q]$-algèbre de générateurs

$$E^{\pm 1}_{\{1,...,n\}}, \qquad \sum_{\substack{I \subset \{1,...,n\} \\ |I| = t}} E_I \quad \textit{pour}\ t\ \textit{parcourant}\ t \in \{1, ..., n\}.$$

La $\mathbb{Z}[q]$-algèbre $\mathcal{H}^{(1)}$ est un module de type fini sur son centre.

(4) On suppose que $R \supset \{\mu_{q-1}, (q-1)^{-1}\}$. Soit $\gamma \in \Gamma$.
Une base de la R-algèbre $\mathcal{H}^{(1)}_R \epsilon_\gamma$ d'unité ϵ_γ est donnée par $(E_w \epsilon_\chi)_{w \in \tilde{W}, \chi \in \gamma}$.

Notation 3.2.10. On ne suppose pas que $R \supset \{\mu_{q-1}, (q-1)^{-1}\}$. On note $\mathcal{A}_R^{(1)} = \mathcal{A}^{(1)} \otimes_{\mathbb{Z}[q]} R$ la sous-algèbre commutative de $\mathcal{H}_R^{(1)}$. La $\mathbb{Z}[q]$-algèbre $\mathcal{A}^{(1)}$ agit sur tout $\mathcal{H}_R^{(1)}$-module *via* sa projection $\mathcal{A}_R^{(1)}$ dans $\mathcal{H}_R^{(1)}$.

On appellera *R-caractère de $\mathcal{A}^{(1)}$* un morphisme d'anneaux unitaires $\mathcal{A}^{(1)} \to R$ tel que $q \mapsto q_R$.

L'action de W_0 sur $\mathcal{A}^{(1)}$ induit une action de W_0 sur les R-caractères de $\mathcal{A}^{(1)}$. On considère l'action de $W^{(1)}$ sur $\mathcal{A}^{(1)}$ et ses R-caractères qui se factorise par celle de W_0.

3.3. Modules standards de l'anneau de Hecke du pro-p-Iwahori de $\mathrm{GL}_n(F)$

3.3.1. Définition. —

Définition 3.3.1. *Soit $\lambda : \mathcal{A}^{(1)} \to R$ un R-caractère de $\mathcal{A}^{(1)}$. On appelle $\mathcal{H}_R^{(1)}$-module standard induit par λ le $\mathcal{H}_R^{(1)}$-module*

$$I(\lambda) = \mathcal{H}_R^{(1)} \otimes_{\mathcal{A}^{(1)}} \lambda.$$

Propriétés des modules standards :

1. Le $\mathcal{H}_R^{(1)}$-module standard induit par $\lambda : \mathcal{A}^{(1)} \to R$ est un R-module de type fini.
2. Il est engendré comme $\mathcal{H}_R^{(1)}$-module par $\varphi = 1 \otimes 1$, qui est un élément propre pour $\mathcal{A}^{(1)}$ pour le caractère λ. On appellera φ le *générateur canonique* de $I(\lambda)$.
3. Le $\mathcal{H}_R^{(1)}$-module standard induit par λ possède la propriété universelle suivante : tout $\mathcal{H}_R^{(1)}$-module engendré par un élément propre pour $\mathcal{A}^{(1)}$ pour le caractère λ est quotient de $I(\lambda)$.
4. Si R est un corps algébriquement clos, tout $\mathcal{H}_R^{(1)}$-module simple ayant un caractère central est quotient d'un $\mathcal{H}_R^{(1)}$-module standard.
5. Soit $\lambda : \mathcal{A}^{(1)} \to \overline{\mathbb{Z}}_p$ et $r_p\lambda : \mathcal{A}^{(1)} \to \overline{\mathbb{F}}_p$ sa réduction modulo p. Le $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}^{(1)}$-module standard induit par $r_p\lambda$ est égal à la réduction modulo p du $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{Z}}_p}$-module standard induit par λ :
$$I(r_p\lambda) = I(\lambda) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_p} \overline{\mathbb{F}}_p.$$
6. Si R est un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, le $\mathcal{H}_R^{(1)}$-module standard induit par $\lambda : \mathcal{A}^{(1)} \to R$ est un R-espace vectoriel de dimension $|W_0|$.

Les premières propriétés sont des conséquences directes du théorème 3.2.9 et de la définition des modules standards. La dernière est une conséquence du théorème de Bernstein [**45**, Proposition 6] qui nous assure que $\mathcal{H}^{(1)}[q^{\pm 1/2}]$ est un $\mathcal{A}^{(1)}[q^{\pm 1/2}]$-module libre de rang $|W_0|$.

3.3.2. $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{Z}}_p}$-modules standards.— Soit $\lambda : \mathcal{A}^{(1)} \to \overline{\mathbb{Z}}_p$ un $\overline{\mathbb{Z}}_p$-caractère. Puisque $\mathcal{A}^{(1)}$ est une $\mathbb{Z}[q]$-algèbre de type fini, l'image de λ est contenue dans une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. Ceci permet, dans l'étude des $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{Z}}_p}$-modules standards, de raisonner comme si $\overline{\mathbb{Z}}_p$ était un anneau de valuation discrète.
Le $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{Z}}_p}$-module standard $I(\lambda)$ est un $\overline{\mathbb{Z}}_p$-module qui se décompose en la somme directe de sa partie libre $\mathcal{L}(\lambda)$ et de sa partie de torsion $\mathcal{T}(\lambda)$.
Le $\overline{\mathbb{Z}}_p$-module de torsion $\mathcal{T}(\lambda)$ est un module pour la $\overline{\mathbb{Z}}_p$-algèbre de Hecke $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{Z}}_p}$. Ainsi, le $\overline{\mathbb{Z}}_p$-module $\mathcal{L}(\lambda)$ hérite d'une structure de $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{Z}}_p}$-module quotient.

3.3.3. Structures entières de $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$-modules standards.— Les propositions suivantes sont une adaptation au cas de l'anneau de Hecke du pro-p-Iwahori des résultats de [**44**, Theorème 5] qui traite le cas de l'anneau de Hecke-Iwahori. Les preuves se transposent directement.

Soit M_0 un $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$-module, de type fini sur $\overline{\mathbb{Q}}_p$. On dit que le $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{Z}}_p}$-module L est une structure entière de M_0 si
– L est un $\overline{\mathbb{Z}}_p$-module de type fini,
– L est un sous-$\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{Z}}_p}$-module de M_0,
– L contient une base du $\overline{\mathbb{Q}}_p$-espace vectoriel M_0.

Soit M un $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module, de type fini sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. On dit que le $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$-module M_0 relève M si M_0 admet une structure entière L telle que l'on a un isomorphisme de $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules : $L \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_p} \overline{\mathbb{F}}_p \simeq M$.

On dira d'un caractère $\lambda : \mathcal{A}^{(1)} \to \overline{\mathbb{Q}}_p$ qu'il est *entier* s'il est à valeurs dans $\overline{\mathbb{Z}}_p$.

Proposition 3.3.2. – *Soit $\lambda : \mathcal{A}^{(1)} \to \overline{\mathbb{Q}}_p$. Le $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$-module standard $I(\lambda)$ admet une structure entière si et seulement si λ est entier.*
– *Supposons que $\lambda : \mathcal{A}^{(1)} \to \overline{\mathbb{Q}}_p$ est entier. On note $L(\lambda)$ le sous-$\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{Z}}_p}$-module de $I(\lambda)$ engendré par son générateur canonique φ. C'est une structure entière de $I(\lambda)$.*

On appelle $L(\lambda)$ la *structure entière canonique* de $I(\lambda)$.

Proposition 3.3.3. *Soit $\lambda : \mathcal{A}^{(1)} \to \overline{\mathbb{Q}}_p$ un caractère entier. Soit L une structure entière de $I(\lambda)$. La semi-simplification du $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module $L \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_p} \overline{\mathbb{F}}_p$ ne dépend pas du choix de la structure entière L.*

3.3.4. Soit $\lambda : \mathcal{A}^{(1)} \to \overline{\mathbb{Z}}_p$ un caractère. Grâce au théorème 5 de [**44**], nous comparons la partie $\overline{\mathbb{Z}}_p$-libre du $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{Z}}_p}$-module standard induit par λ avec la structure entière canonique du $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$-module standard induit par $\iota_{\overline{\mathbb{Q}}_p}\lambda : \mathcal{A}^{(1)} \to \overline{\mathbb{Q}}_p$:

Proposition 3.3.4. *La partie libre $\mathcal{L}(\lambda)$ du $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{Z}}_p}$-module standard $I(\lambda)$ est un $\overline{\mathbb{Z}}_p$-module libre de rang $|W_0|$.*

Corollaire 3.3.5. *Le $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{Z}}_p}$-module $I(\lambda)$ est sans $\overline{\mathbb{Z}}_p$-torsion si et seulement s'il est isomorphe à la structure entière canonique du $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$-module standard induit par $\iota_{\overline{\mathbb{Q}}_p}\lambda$.*

3.3.5. Etude des $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules standards.— Soit $\lambda : \mathcal{A}^{(1)} \to \overline{\mathbb{F}}_p$, un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère de $\mathcal{A}^{(1)}$.

Proposition 3.3.6. *Il existe $\lambda_0 : \mathcal{A}^{(1)} \to \overline{\mathbb{Z}}_p$ qui relève λ c'est-à-dire tel que $\lambda = r_p \circ \lambda_0$.*

Corollaire 3.3.7. *Un $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module standard est la réduction d'un $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{Z}}_p}$-module standard. En particulier, un $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module standard est un $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel de dimension supérieure ou égale à $|W_0|$.*

Corollaire 3.3.8. *Soit $\lambda_0 : \mathcal{A}^{(1)} \to \overline{\mathbb{Z}}_p$ un $\overline{\mathbb{Z}}_p$-caractère relevant λ.*
Si le module standard $I(\lambda)$ est un $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel de dimension $|W_0|$, alors le module standard $I(\lambda_0)$ est un $\overline{\mathbb{Z}}_p$-module sans torsion et est isomorphe, comme $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{Z}}_p}$-module, à la structure entière canonique du $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$-module standard induit par $\iota_{\overline{\mathbb{Q}}_p}\lambda_0$.

La proposition 3.3.6 est prouvée en [**43**, Théorème 6]. Elle est illustrée par la proposition 4.2.10 du chapitre suivant qui la démontre dans le cas particulier où $n = 3$ et $\lambda(T_t) = 1\ \forall t \in T(\mathbb{F}_q)$.

Remarque 3.3.9. Soit $\lambda_0 : \mathcal{A}^{(1)} \to \overline{\mathbb{Z}}_p$ relevant λ. Pour $w \in W_0$, le caractère $w.\lambda_0$ relève $w.\lambda$.

Par projection dans $\mathcal{A}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ de la relation $(\mathcal{R}_0)$ du théorème 3.2.9, il apparaît que si $I, J \subset \{1, ..., n\}$ vérifient $I \not\subset J$ et $J \not\subset I$, alors $E_I E_J = 0$ dans $\mathcal{A}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$. On en déduit qu'il existe un drapeau, appelé *drapeau de* λ,

$$\emptyset \subsetneq I_1 \subsetneq ... \subsetneq I_r \subsetneq I_{r+1} = \{1, .., n\} \tag{66}$$

tel que pour tout $\emptyset \subsetneq I \subset \{1, ..., n\}$,

$\lambda(E_I) \neq 0$ si et seulement si I est l'un des éléments $I_1, ..., I_{r+1}$ de ce drapeau.

On dira d'un sous-ensemble I de $\{1, ...n\}$ qu'il est dominant si la diagonale x_I lui correspondant (notation *3.2.7*) est un élément dominant de X. Cela signifie que I est l'un des éléments suivants

$$\emptyset,\ \{n\},\ \{n-1, n\}\ , ...,\ \{2, ..., n-1, n\}\ ,\ \{1, ..., n-1, n\}.$$

On dira du drapeau de λ qu'il est dominant s'il est constitué de sous-ensembles dominants de $\{1, ..., n\}$. Le $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module standard induit par λ sera alors dit *de drapeau dominant.*

Remarque 3.3.10. Le caractère λ est entièrement déterminé par la donnée de $\{\lambda(E_{I_i})\}_{i=1,..,r+1}$ et de l'élément $\chi \in \hat{T}(\mathbb{F}_q)$ tel que $\lambda(T_t) = \chi(t)\ \forall t \in T(\mathbb{F}_q)$.

Définition 3.3.11. – *On dit de λ qu'il est régulier si son drapeau est complet c'est-à-dire si $r + 1 = n$.*

– *Sinon, on dit de λ qu'il est singulier.*
– *Dans le cas particulier où le drapeau est trivial, i.e $r = 0$, on dit que λ est un caractère supersingulier.*

Lorsque λ est régulier (resp. singulier, resp. supersingulier), le $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module standard $I(\lambda)$ est dit régulier (resp. singulier, resp. supersingulier). Tout $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module quotient de $I(\lambda)$ sera alors dit régulier (resp. singulier, resp. supersingulier).

Remarque 3.3.12. – Si λ est régulier (resp. singulier), un caractère appartenant à son orbite sous l'action de W_0 est également régulier (resp. singulier). Si λ est supersingulier, son orbite est de cardinal 1.
– Dans l'orbite de λ sous l'action de W_0, il y a un caractère de drapeau dominant.

3.4. Critère d'irréductibilité pour les séries principales de $\mathrm{GL}_n(F)$ en caractéristique p

L'objet de cette section est de démontrer le résultat suivant :

Théorème 3.4.1. *Soit $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \otimes ... \otimes \mathcal{X}_n : T(F) \to \overline{\mathbb{F}}_p^{\,*}$ un caractère du tore déployé $T(F)$ de G. La série principale $\mathrm{Ind}_{B(F)}^{G}\mathcal{X}$ induite par $\mathcal{X}$ est un $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-module irréductible si et seulement si*

$$\mathcal{X}_i \neq \mathcal{X}_{i+1} \text{ pour tout } i \in \{1, .., n-1\}.$$

La condition nécessaire est claire. Nous allons démontrer la condition suffisante.

3.4.1. Modules standards réguliers de drapeau dominant et $I(1)$-invariants des séries principales.—

3.4.1.1. —

Notation 3.4.2. On note $\mathcal{D}$ la sous-$\mathbb{Z}[q]$-algèbre de $\mathcal{A}^{(1)}$ engendrée par les éléments T_x, pour x parcourant le semi-groupe $X^{(1)}_{dom}$ des éléments dominants de $X^{(1)}$.

On appellera $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère de $\mathcal{D}$ tout morphisme d'anneaux $\mathcal{D} \to \overline{\mathbb{F}}_p$ qui à l'indéterminée q associe $0 = q_{\overline{\mathbb{F}}_p}$. Par exemple, la restriction à $\mathcal{D}$ d'un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère de $\mathcal{A}^{(1)}$ est un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère de $\mathcal{D}$.

Remarque 3.4.3. Rappelons que pour $x \in X^{(1)}_{dom}$, l'élément E_x de la base de Bernstein entière coïncide avec l'élément de la base de Iwahori-Matsumoto T_x. Il appartient donc à $\mathcal{D}$. En particulier si I est un sous-ensemble dominant de $\{1, ..., n\}$, c'est à dire que I est un élément du drapeau

$$\emptyset \subsetneq \{n\} \subsetneq \{n-1, n\} ... \subsetneq \{2, ..., n-1, n\} \subsetneq \{1, ..., n-1, n\} \tag{67}$$

alors la diagonale x_I lui correspondant (notation *3.2.7*) appartient à X_{dom} et $E_I = T_{x_I}$ appartient à $\mathcal{D}$.

D'après [**44**, (1.6.5)], dans $X^{(1)}_{dom}$, les longueurs s'ajoutent :

$$\forall x, y \in X^{(1)}_{dom}, \text{ on a } \ell(xy) = \ell(x) + \ell(y),$$
$$\text{ainsi, d'après les relations de tresses dans } \mathcal{H}^{(1)}, \text{ on a } T_x T_y = T_{xy} \text{ dans } \mathcal{D}.$$

Par conséquent, la $\mathbb{Z}[q]$-algèbre $\mathcal{D}$ est engendrée par les éléments T_x pour x parcourant un système générateur du semi-groupe $X^{(1)}_{dom}$. Ce dernier étant engendré par l'ensemble des x_I pour I parcourant le drapeau (67) et des T_t, pour $t \in T(F)$, auquel on ajoute l'élément $x^{-1}_{\{1,\dots,n\}}$, la $\mathbb{Z}[q]$-algèbre $\mathcal{D}$ est engendrée par les éléments

$$E_I, \text{ pour } I \text{ parcourant le drapeau (67)}, E^{\pm 1}_{\{1,\dots,n\}}, \text{ et } T_t \text{ pour } t \in T(\mathbb{F}_q).$$

Lemme 3.4.4. *Un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère de $\mathcal{D}$ s'étend de façon unique en un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère de $\mathcal{A}^{(1)}$ de drapeau dominant.*

Démonstration. — Un drapeau dominant est un sous-drapeau de (67). Ainsi, d'après la remarque *3.3.10*, un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère de $\mathcal{A}^{(1)}$ de drapeau dominant est univoquement déterminé par la donnée de ses valeurs en les T_t pour $t \in T(\mathbb{F}_q)$, et en les $E_I = T_{x_I}$ pour I parcourant le drapeau (67), c'est-à-dire qu'il est univoquement déterminé par ses valeurs sur un système générateur de la $\mathbb{Z}[q]$-algèbre $\mathcal{D}$.

□

Soit λ un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère de $\mathcal{A}^{(1)}$ de drapeau dominant. On le suppose de surcroît régulier c'est-à-dire que le drapeau de λ est égal au drapeau (67).

Lemme 3.4.5. *Soit M un $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module. Un élément $m \in M$ est propre pour l'action de $\mathcal{A}^{(1)}$ pour le caractère λ si et seulement s'il est propre pour l'action de $\mathcal{D}$ pour la restriction de λ à $\mathcal{D}$.*

Démonstration. — On suppose que m est non nul et que la sous-$\mathbb{Z}[q]$-algèbre $\mathcal{D}$ de $\mathcal{A}^{(1)}$ agit sur m par la restriction à $\mathcal{D}$ du caractère λ. D'après le théorème 3.2.9, la $\mathbb{Z}[q]$-algèbre $\mathcal{A}^{(1)}$ est engendrée par les éléments

$$E_I \text{ pour } I \subset \{1,...,n\},\ E^{\pm 1}_{\{1,\dots,n\}}, \text{ et } T_t,\ t \in T(\mathbb{F}_q).$$

L'algèbre $\mathcal{D}$ contient les E_I pour $I \subset \{1,...,n\}$ dominant, et les éléments $T_t, t \in T(\mathbb{F}_q)$. Ainsi, pour s'assurer que $\mathcal{A}^{(1)}$ agit sur m par le caractère λ, il suffit de vérifier que, pour I non dominant, E_I agit sur m par multiplication par le scalaire $\lambda(E_I)$.

Soit $I \subset \{1,...,n\}$ non dominant. Puisque le drapeau de λ est dominant, il ne contient pas I de sorte que $\lambda(E_I) = 0$. Il nous faut donc montrer que $E_I m = 0$.

Il existe $J \subset \{1,...,n\}$ dominant tel que $I \not\subset J$ et $J \not\subset I$. (On peut par exemple choisir l'élément du drapeau (67) de même cardinal que I.) D'après la relation $(\mathcal{R}_0)$ du théorème 3.2.9, cela implique que le produit $E_I E_J$ est nul dans $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$, et donc $E_I E_J m = 0$. Mais, d'autre part, puisque J est dominant, E_J appartient au drapeau de λ donc $\lambda(E_J) \neq 0$ et E_J appartient à $\mathcal{D}$ donc $E_J m = \lambda(E_J)m$. Ainsi, $E_I E_J m = \lambda(E_J) E_I m$ avec $\lambda(E_J) \neq 0$. On a démontré que $E_I m = 0$.

□

Remarque 3.4.6. Lorsque λ est régulier de drapeau non nécessairement dominant, on a un résultat analogue qui se démontre avec les mêmes arguments : l'élément $m \in M$ est propre pour l'action de $\mathcal{A}^{(1)}$ pour le caractère λ si et seulement si la sous-algèbre de $\mathcal{A}^{(1)}$ engendrée par les éléments

$$E_J, \text{ avec } J \subset \{1,...,n\} \text{ appartenant au drapeau de } \lambda, \text{ et } T_t, t \in T(\mathbb{F}_q)$$

agit sur m par la restriction du caractère λ.

Par la propriété universelle du module standard induit par λ, on déduit du lemme 3.4.5 que l'on a un isomorphisme de $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules

$$\begin{array}{ccc} I(\lambda) & \simeq & \mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p} \otimes_{\mathcal{D}} \lambda \\ \varphi & \mapsto & 1 \otimes 1 \end{array} \tag{68}$$

où φ désigne le générateur canonique de $I(\lambda)$ et où l'on note encore λ la restriction de λ à la sous-algèbre $\mathcal{D}$ de $\mathcal{A}^{(1)}$.

3.4.1.2. — Soit $\mathcal{X} : T(F) \to \overline{\mathbb{F}}_p{}^*$ un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère du tore déployé $T(F)$ de G. Puisque dans $X^{(1)}_{dom}$ les longueurs s'ajoutent comme on l'a souligné au paragraphe précédent, $\mathcal{X}$ induit un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère de $\mathcal{D}$, encore noté $\mathcal{X}$, et défini par : $\mathcal{X}(T_x) := \mathcal{X}(x), \quad \forall x \in X^{(1)}_{dom}$.

D'après le lemme 3.4.4, ce $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère de $\mathcal{D}$ s'étend de façon unique en un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère de $\mathcal{A}^{(1)}$ de drapeau dominant que l'on notera $\lambda_{\mathcal{X}}$. Le caractère $\lambda_{\mathcal{X}}$ est, de plus, régulier car pour tout élément dominant $x \in X^{(1)}_{dom}$, $\lambda_{\mathcal{X}}(E_x) = \lambda_{\mathcal{X}}(T_x) = \mathcal{X}(T_x) = \mathcal{X}(x) \neq 0$.

On définit ainsi une bijection, de l'ensemble $\mathcal{X}$ des $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractères du tore $T(F)$ dans l'ensemble Λ des $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractères de $\mathcal{A}^{(1)}$ réguliers de drapeau dominant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \xrightarrow{\sim} & \Lambda \\ \mathcal{X} & \longmapsto & \lambda_{\mathcal{X}}. \end{array} \tag{69}$$

L'isomorphisme (68) dit que pour tout caractère $\mathcal{X} \in \mathcal{X}$ que l'on identifie avec un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère de $\mathcal{D}$, on a un isomorphisme de $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules

$$\begin{array}{ccc} I(\lambda_{\mathcal{X}}) & \simeq & \mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p} \otimes_{\mathcal{D}} \mathcal{X} \\ \varphi & \mapsto & 1 \otimes 1 \end{array} . \tag{70}$$

3.4.1.3. — Au paragraphe 0.1.2.1, on a défini un anti-automorphisme de la $\mathbb{Z}[q]$-algèbre $\mathcal{H}^{(1)}$ par la formule :

$$T_w{}^{\tilde{}} := T_{w^{-1}}, \forall w \in W^{(1)}. \tag{1}$$

La restriction de cet anti-automorphisme à l'algèbre commutative $\mathcal{D}$ est un morphisme d'algèbres injectif d'image notée $\mathcal{D}^{\tilde{}}$. On dira d'un morphisme d'anneaux $\mathcal{D}^{\tilde{}} \to \overline{\mathbb{F}}_p$ qui à l'indéterminée q associe 0 que c'est un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère de $\mathcal{D}^{\tilde{}}$.

Soit $\mathcal{X} : T(F) \to \overline{\mathbb{F}}_p{}^*$. On le considère comme un caractère de $\mathcal{D}$ et l'on note $\mathcal{X}^{\tilde{}}$ le $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère de $\mathcal{D}^{\tilde{}}$ qu'il définit par composition avec l'isomorphisme $\mathcal{D}^{\tilde{}} \to \mathcal{D}$.

Nous reprenons les notations du paragraphe 0.1.

Proposition 3.4.7. *On a un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-modules*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}\tilde{}\otimes_{\mathcal{D}\tilde{}}\, ind_{I(1)}^G\mathbf{1} & \longrightarrow & \mathrm{Ind}_{B(F)}^G\mathcal{X} \\ 1\otimes\mathbf{1}_{I(1)} & \longmapsto & f_{B(F)I(1),\mathcal{X}} \end{array} \tag{71}$$

Démonstration. — Notons $\mathcal{D}_0$ la sous-algèbre de $\mathcal{D}$ engendrée par les éléments T_x, pour x parcourant l'ensemble X_{dom} des éléments dominants de X, et $\mathcal{D}_0\tilde{}$ son image dans $\mathcal{D}\tilde{}$.

Soit $\chi : T(\mathbb{F}_q) \to \overline{\mathbb{F}}_p$ la restriction de $\mathcal{X}$ au tore fini. Le théorème 4.11 de [**43**] dit que l'on a un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-modules

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}\tilde{}\otimes_{\mathcal{D}_0\tilde{}}\, ind_I^G\chi & \longrightarrow & \mathrm{Ind}_{B(F)}^G\mathcal{X} \\ 1\otimes f_{I,\chi} & \longmapsto & f_{B(F)I(1),\mathcal{X}}. \end{array} \tag{72}$$

Il nous suffit donc de prouver que l'identification $1\otimes f_{I,\chi}\mapsto 1\otimes\mathbf{1}_{I(1)}$ induit un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-modules entre $\mathcal{X}\tilde{}\otimes_{\mathcal{D}_0\tilde{}}\, ind_I^G\chi$ et $\mathcal{X}\tilde{}\otimes_{\mathcal{D}\tilde{}}\, ind_{I(1)}^G\mathbf{1}$.

– Le $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-module $ind_I^G\chi$ s'injecte dans $ind_{I(1)}^G\mathbf{1}$ comme le montre la décomposition (64). Cette injection induit un morphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-modules $ind_I^G\chi\to\mathcal{X}\tilde{}\otimes_{\mathcal{D}\tilde{}} ind_{I(1)}^G\mathbf{1}$ qui se factorise par $\mathcal{X}\tilde{}\otimes_{\mathcal{D}_0\tilde{}} ind_I^G\chi$ car $\mathcal{D}_0\tilde{}$ est incluse dans $\mathcal{D}\tilde{}$. On note $\mathcal{I}$ le morphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-modules obtenu.

– La projection $ind_{I(1)}^G\mathbf{1}\twoheadrightarrow ind_I^G\chi$ induit, quant à elle, un morphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-modules $ind_{I(1)}^G\mathbf{1}\to\mathcal{X}\tilde{}\otimes_{\mathcal{D}_0\tilde{}} ind_I^G\chi$. Montrons que ce dernier se factorise par $\mathcal{X}\tilde{}\otimes_{\mathcal{D}\tilde{}} ind_{I(1)}^G\mathbf{1}$ en un morphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-modules que l'on notera $\mathcal{P}$. Puisque $\mathcal{D}\tilde{}$ est engendrée par $\mathcal{D}_0\tilde{}$ et les éléments T_t, $t\in T(\mathbb{F}_q)$, il suffit, pour s'en assurer, de montrer que pour $f\in ind_{I(1)}^G\mathbf{1}$ et $t\in T(\mathbb{F}_q)$, les éléments T_tf et $\mathcal{X}\tilde{}(T_t)\,f$ ont la même image dans $\mathcal{X}\tilde{}\otimes_{\mathcal{D}_0\tilde{}} ind_I^G\chi$.

  Nous avons appelé ϵ_χ l'élément de la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre de Hecke $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}^{(1)}$ égal à la projection $ind_{I(1)}^G\mathbf{1}\twoheadrightarrow ind_I^G\chi$. Ainsi, l'image de $\mathcal{X}\tilde{}(T_t)\,f$ dans $\mathcal{X}\tilde{}\otimes_{\mathcal{D}_0\tilde{}} ind_I^G\chi$ est
  $$1\otimes\mathcal{X}\tilde{}(T_t)\,\epsilon_\chi f = 1\otimes\mathcal{X}(t^{-1})\epsilon_\chi f.$$
  D'autre part, on a montré que pour tout $t\in T(\mathbb{F}_q)$, $\epsilon_\chi(T_t)=\chi(t^{-1})\epsilon_\chi$ (lemme 3.2.4), donc l'image de T_tf dans $\mathcal{X}\tilde{}\otimes_{\mathcal{D}_0\tilde{}} ind_I^G\chi$ est égale à
  $$1\otimes\epsilon_\chi(T_tf) = 1\otimes(\epsilon_\chi T_t)f = 1\otimes\chi(t^{-1})\epsilon_\chi f.$$
  Or χ est la restriction de $\mathcal{X}$ au tore fini, donc ces deux images coïncident.

– Il est clair que la composée $\mathcal{P}\circ\mathcal{I}$ est l'identité sur $\mathcal{X}\tilde{}\otimes_{\mathcal{D}_0\tilde{}} ind_I^G\chi$.

  Soit f un élément de l'induite compacte $ind_{I(1)}^G\mathbf{1}$. Sa projection dans $ind_I^G\chi$ est égale à $\epsilon_\chi f$ ou encore, en recourant à la forme de ϵ_χ donnée par le lemme 3.2.4, à $(-1)^n\sum_{t\in T(\mathbb{F}_q)}\chi(t)T_tf$.

  Ainsi, l'image de $\mathcal{P}(1\otimes f)=1\otimes\epsilon_\chi f$ par $\mathcal{I}$ est l'élément de $\mathcal{X}\tilde{}\otimes_{\mathcal{D}\tilde{}} ind_{I(1)}^G\mathbf{1}$ égal à
  $$(-1)^n\sum_{t\in T(\mathbb{F}_q)}\chi(t)\otimes T_tf = (-1)^n\sum_{t\in T(\mathbb{F}_q)}\chi(t)\mathcal{X}\tilde{}(T_t)\otimes f = (-1)^n\sum_{t\in T(\mathbb{F}_q)}\mathcal{X}(t)\mathcal{X}(t^{-1})\otimes f = 1\otimes f.$$

  Ainsi, la composée $\mathcal{I}\circ\mathcal{P}$ est égale à l'identité sur $\mathcal{X}\tilde{}\otimes_{\mathcal{D}\tilde{}} ind_{I(1)}^G\mathbf{1}$.

□

Par passage aux $I(1)$-invariants, l'isomorphisme (71) donne un morphisme de $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules à droite. Le sous-$\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module à droite de $(\mathcal{X}\tilde{}\otimes_{\mathcal{D}\tilde{}} ind^G_{I(1)}\mathbf{1})^{I(1)}$ engendré par $1\otimes \mathbf{1}_{I(1)}$ est non nul et est égal à l'image de l'application naturelle $\mathcal{X}\tilde{}\otimes_{\mathcal{D}\tilde{}}\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p} \to \mathcal{X}\tilde{}\otimes_{\mathcal{D}\tilde{}} ind^G_{I(1)}\mathbf{1}$. On a donc un morphisme non nul de $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules à droite

$$\mathcal{X}\tilde{}\otimes_{\mathcal{D}\tilde{}}\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p} \longrightarrow (\mathrm{Ind}^G_{B(F)}\mathcal{X})^{I(1)}.$$

L'anti-isomorphisme (1) permet de passer des $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules à droite aux $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules à gauche. On vérifie sans difficulté que le $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module à gauche correspondant à $\mathcal{X}\tilde{}\otimes_{\mathcal{D}\tilde{}}\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ n'est autre que $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}\otimes_{\mathcal{D}}\mathcal{X}$. Or, ce dernier est isomorphe à $I(\lambda_{\mathcal{X}})$ comme le montre l'isomorphisme (70). Ainsi, on a un morphisme de $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules non nul

$$\begin{array}{ccc} I(\lambda_{\mathcal{X}}) & \longrightarrow & [(\mathrm{Ind}^G_{B(F)}\mathcal{X})^{I(1)}]_{\mathfrak{g}} \\ \varphi & \longmapsto & f_{B(F)I(1),\mathcal{X}}, \end{array} \tag{73}$$

où φ désigne le générateur canonique du module standard induit par $\lambda_{\mathcal{X}}$.

Corollaire 3.4.8. *Supposons que $\lambda_{\mathcal{X}}$ et ses conjugués sous l'action de W_0 induisent des $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules standards isomorphes. Alors la série principale induite par $\mathcal{X}$ est un $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-module irréductible.*

Démonstration. — Sous les hypothèses de la proposition, un quotient non nul de $I(\lambda_{\mathcal{X}})$ est quotient de chacun des modules standards induits par les conjugués de $\lambda_{\mathcal{X}}$. Puisque $\lambda_{\mathcal{X}}$ est un caractère régulier, il est distinct de chacun de ses conjugués de sorte qu'un quotient non nul de $I(\lambda_{\mathcal{X}})$ est de dimension supérieure ou égale à $|W_0|$. De plus, si l'on a l'égalité, alors ce quotient est irréductible.

On rappelle que le $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel des $I(1)$-invariants de la série principale induite par $\mathcal{X}$ est un $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel de dimension $|W_0|$ (exemple *0.1.5.2*).

L'existence du morphisme non nul (73) dit en particulier qu'il existe un quotient non nul de $I(\lambda_{\mathcal{X}})$ qui s'injecte dans le $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module à gauche $[(\mathrm{Ind}^G_{B(F)}\mathcal{X})^{I(1)}]_{\mathfrak{g}}$. Par argument de dimension, et d'après ce qui précède, ce quotient de $I(\lambda_{\mathcal{X}})$ est de dimension égale à $|W_0|$, est irréductible comme $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module, et est isomorphe à $[(\mathrm{Ind}^G_{B(F)}\mathcal{X})^{I(1)}]_{\mathfrak{g}}$.

Ainsi, l'espace des $I(1)$-invariants de $\mathrm{Ind}^G_{B(F)}\mathcal{X}$ est un $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module à droite irréductible. Or le $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-module $\mathrm{Ind}^G_{B(F)}\mathcal{X}$ est engendré par l'élément $I(1)$-invariant $f_{B(F)I(1),\mathcal{X}}$ comme le montre l'isomorphisme (71). On conclut alors qu'il est irréductible grâce au critère d'irréductibilité 0.1.1.

□

3.4.2. Entrelacements entre les modules standards réguliers.— Fixons $i \in \{1, ..., n-1\}$ et un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère régulier $\lambda : \mathcal{A}^{(1)} \to \overline{\mathbb{F}}_p$.

On suppose que λ vérifie l'hypothèse suivante :

Hypothèse 1. *Le drapeau de λ possède un élément $I \subset \{1, ..., n\}$ qui contient $i+1$ et ne contient pas i, c'est-à-dire un élément de la forme*

$$I = I_0 \cup \{i+1\}, \quad \textit{avec } I_0 \subset \{1, ..., n\}, \quad \textit{tel que } i \notin I_0. \tag{74}$$

On pose alors $\beta_{i,I}(\lambda) := \lambda(E_{I_0})\lambda(E_{I_0 \cup \{i,i+1\}})(\lambda(E_{I_0 \cup \{i\}}))^{-1}$.

3.4.2.1. — Discutons du statut de l'hypothèse ***1***.

Notons tout d'abord qu'elle n'est pas vraiment restrictive, puisque, si λ ne la vérifie pas, alors son conjugué $s_i.\lambda$ la vérifie. Supposons en effet que λ ne vérifie pas l'hypothèse. Cela signifie que tout élément de son drapeau contenant $i+1$ contient aussi i. On note alors I l'élément minimal du drapeau de λ qui contient i. L'ensemble $I_0 \subsetneq I$ précédant I dans le drapeau de λ ne contient pas i par minimalité de I, donc il ne contient pas non plus $i+1$. Puisque le drapeau de λ est régulier, I et I_0 diffèrent d'un seul élément, donc $I = I_0 \cup \{i\}$, avec $i, i+1 \notin I_0$. L'image $I_0 \cup \{i+1\}$ de I par la permutation s_i ne contient pas i et appartient au drapeau de $s_i.\lambda$

Remarquons de plus que λ est de drapeau dominant si et seulement s'il vérifie l'hypothèse ***1*** pour tout $i \in \{1, ..., n-1\}$ auquel cas, pour chaque i, il y a un unique élément de la forme (74) dans le drapeau de λ et c'est $\{i+1, ..., n\}$. En effet, si λ vérifie l'hypothèse ***1*** pour tout $i \in \{1, ..., n-1\}$, on note I_{i+1} l'élément du drapeau de λ minimal contenant $i+1$. Alors, i n'appartient pas à I_{i+1} par l'hypothèse ***1***. On en déduit que I_i n'est pas inclus dans I_{i+1} donc $I_{i+1} \subsetneq I_i$ et le drapeau de λ est $\emptyset \subsetneq I_n \subsetneq I_{n-1} ... \subsetneq I_1 = \{1, ..., n\}$. Ainsi, $I_{i+1} = \{i+1, ..., n\}$ et le drapeau de λ est dominant.

Lemme 3.4.9. *La valeur de $\beta_{i,I}(\lambda)$ est nulle si et seulement si le drapeau de λ possède un élément de la forme (74) qui est distinct de I.*

Démonstration. — Dire que $\lambda(E_{I_0}) = 0$ signifie que l'élément $J \subsetneq I$ précédant $I = I_0 \cup \{i+1\}$ dans le drapeau de λ n'est pas I_0. Le drapeau étant régulier, I et J diffèrent d'un seul élément, qui n'est donc pas $i+1$: l'élément J appartenant au drapeau de λ est donc de la forme $J = J_0 \cup \{i+1\}$ avec $i \notin J_0$.

Dire que $\lambda(E_{I_0 \cup \{i,i+1\}}) = \lambda(E_{I \cup \{i\}}) = 0$ signifie que l'élément K, $I \subsetneq K$, suivant I dans le drapeau de λ n'est pas $I \cup \{i\}$. Le drapeau étant régulier, I et K diffèrent d'un seul élément, qui n'est donc pas i : l'élément K appartenant au drapeau de λ est de la forme $K = K_0 \cup \{i+1\}$ avec $i \notin K_0$.

□

3.4.2.2. Les deux lemmes suivants seront démontrés au paragraphe 3.4.4. On est toujours sous l'hypothèse ***1***, c'est-à-dire qu'il existe un élément noté I du drapeau de λ qui contient $i+1$ et ne contient pas i. On note σ_i l'élément de $\mathcal{A}^{(1)}$ défini par la relation (63) tel que $T^*_{s_i} = T_{s_i} + \sigma_i$.

Lemme 3.4.10. *Soit M un $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module.*
- *Si $m \in M$ est propre pour $\mathcal{A}^{(1)}$ pour le caractère λ, alors $T^*_{s_i}m$ est propre pour $\mathcal{A}^{(1)}$ pour le caractère $s_i.\lambda$.*
- *Si $m' \in M$ est propre pour $\mathcal{A}^{(1)}$ pour le caractère $s_i.\lambda$, alors $(E_{x_I s_i} - \beta_{i,I}(\lambda)\sigma_i)m'$ est propre pour $\mathcal{A}^{(1)}$ pour le caractère λ.*

On désigne par $\chi : T(\mathbb{F}_q) \to \overline{\mathbb{F}}_p^{\,*}$ le caractère du tore fini défini par $\chi(t) := \lambda(T_t)$, pour $t \in T(\mathbb{F}_q)$. On pose

$$\begin{cases} \alpha_{i,I}(\lambda) := \lambda(E_I) \text{ si } s_i\chi \neq \chi, \\ \\ \alpha_{i,I}(\lambda) := \lambda(E_I) - \beta_{i,I}(\lambda) \text{ si } s_i\chi = \chi. \end{cases}$$

Lemme 3.4.11. *Soit M un $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module.*
- *Si $m \in M$ est propre pour $\mathcal{A}^{(1)}$ pour le caractère λ, alors $(E_{x_I s_i} - \beta_{i,I}(\lambda)\sigma_i)T^*_{s_i}m = \alpha_{i,I}(\lambda)m$.*
- *Si $m' \in M$ est propre pour $\mathcal{A}^{(1)}$ pour le caractère $s_i.\lambda$, alors $T^*_{s_i}(E_{x_I s_i} - \beta_{i,I}(\lambda)\sigma_i)m' = \alpha_{i,I}(\lambda)m'$*

Supposons que λ vérifie de plus l'une des deux hypothèses suivantes, qui s'excluent mutuellement.

Hypothèse 2. *$s_i\chi \neq \chi$.*

Hypothèse 3. *$s_i\chi = \chi$ et $\beta_{i,I}(\lambda) \neq \lambda(E_I)$.*

Sous chacune de ces hypothèses, $\alpha_{i,I}(\lambda)$ est un élément non nul de $\overline{\mathbb{F}}_p$ et l'on a le résultat :

Proposition 3.4.12. *Les $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules standards $I(\lambda)$ et $I(s_i.\lambda)$ sont isomorphes.*

Preuve de la proposition. — Par propriété universelle des modules standards, le lemme 3.4.10 permet de construire des morphismes de $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules $I(s_i.\lambda) \to I(\lambda)$ et $I(\lambda) \to I(s_i.\lambda)$: notant φ (resp. φ_i) le générateur canonique de $I(\lambda)$ (resp. $I(s_i.\lambda)$), le premier est l'unique morphisme de $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules qui à φ_i associe $T^*_{s_i}\varphi$, le second, l'unique morphisme de $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules qui à φ associe $(E_{x_I s_i} - \beta_{i,I}(\lambda)\sigma_i)\varphi_i$.
Le lemme 3.4.11 dit que la composée de ces deux morphismes est égale à l'homothétie de rapport $\alpha_{i,I}(\lambda)$. Puisque l'on est sous l'une des hypothèses ***2*** ou ***3***, le rapport est non nul donc ces morphismes sont des isomorphismes.

□

Remarque 3.4.13. Dans le cas particulier où le drapeau de λ est dominant, nous précisons la signification des hypothèses ***2*** et ***3***. Grâce à la correspondance (69), un tel λ provient d'un caractère du tore déployé $T(F)$: il existe $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \otimes ... \otimes \mathcal{X}_n : T(F) \to \overline{\mathbb{F}}_p{}^*$ tel que $\lambda = \lambda_{\mathcal{X}}$.

Comme nous l'avons remarqué précédemment, le caractère $\lambda_{\mathcal{X}}$ vérifie l'hypothèse ***1*** puisque son drapeau contient l'élément $I = \{i+1, ..., n\}$. Par définition, la valeur de $\lambda_{\mathcal{X}}$ en E_I est égale à $\lambda_{\mathcal{X}}(E_I) = \mathcal{X}_{i+1}(\pi)...\mathcal{X}_n(\pi)$. Le calcul de $\beta_{i,I}(\lambda)$ montre que $\beta_{i,I}(\lambda) = \lambda_{\mathcal{X}}(E_I)\mathcal{X}_i(\pi)(\mathcal{X}_{i+1}(\pi))^{-1}$.

Le caractère $\chi \in \hat{T}(\mathbb{F}_q)$ tel que $\chi(t) = \lambda_{\mathcal{X}}(T_t)$ pour tout $t \in \mathbb{F}_q$ n'est autre que la restriction de $\mathcal{X}$ au tore fini. L'hypothèse ***2*** signifie donc que les $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractères $\mathcal{X}_i$ et $\mathcal{X}_{i+1}$ diffèrent par leur restriction au groupe fini $\mathbb{F}_q^*$. L'hypothèse ***3*** signifie que $\mathcal{X}_i$ et $\mathcal{X}_{i+1}$ coïncident sur $\mathbb{F}_q^*$ mais diffèrent par leurs valeurs en l'uniformisante π.

Ainsi, d'après la proposition 3.4.12 on a : si $\mathcal{X}_i \neq \mathcal{X}_{i+1}$ alors les $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules standards $I(\lambda_{\mathcal{X}})$ et $I(s_i.\lambda_{\mathcal{X}})$ sont isomorphes.

3.4.3. Preuve du critère d'irréductibilité pour les séries principales. — Fixons

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \otimes ... \otimes \mathcal{X}_n : T(F) \to \overline{\mathbb{F}}_p{}^*$$

un caractère du tore déployé $T(F)$ tel que pour tout $i \in \{1, ..., n-1\}$, on a

$$\mathcal{X}_i \neq \mathcal{X}_{i+1}.$$

Proposition 3.4.14. *Le $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module standard induit par $\lambda_{\mathcal{X}}$ est isomorphe au module standard induit par tout caractère conjugué de $\lambda_{\mathcal{X}}$ sous l'action de W_0.*

Corollaire 3.4.15. *La série principale induite par $\mathcal{X}$ est un $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-module irréductible.*

Le corollaire est la condition suffisante d'irréductibilité pour la série principale induite par $\mathcal{X}$ annoncée par le théorème 3.4.1. Il s'obtient à l'aide du corollaire 3.4.8.

Preuve de la proposition. — Soit $\mu : \mathcal{A}^{(1)} \to \overline{\mathbb{F}}_p$ un caractère conjugué de $\lambda_{\mathcal{X}}$. Soit $i \in \{1, ..., n-1\}$. Nous allons montrer que les caractères μ et $s_i.\mu$ induisent des $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules isomorphes. Puisque W_0 est engendré par les transpositions, on aura démontré la proposition.

D'après le paragraphe 3.4.2.1, on peut, quitte à échanger μ et $s_i.\mu$, considérer que μ vérifie l'hypothèse ***1*** : on note $I = I_0 \cup \{i+1\}$ un élément du drapeau de μ qui contient $i+1$ et ne contient pas i.

- Si μ vérifie l'hypothèse ***2***, alors on peut appliquer la proposition 3.4.12 et $I(s_i.\mu)$ et $I(\mu)$ sont isomorphes.
- Si μ ne vérifie pas l'hypothèse ***2***, cela signife que $s_i w\chi = w\chi$, où χ désigne la restriction de $\mathcal{X}$ au tore fini et où w désigne l'élément de W_0 tel que $\mu = w.\lambda_{\mathcal{X}}$. Vérifions que μ vérifie l'hypothèse ***3***. D'après la proposition 3.4.12, $I(s_i.\mu)$ et $I(\mu)$ seront dès lors isomorphes.
  - Si $\beta_{i,I}(\mu) = 0$, alors $\beta_{i,I}(\mu) \neq \mu(E_I)$, donc l'hypothèse ***3*** est vérifiée.

– Sinon, c'est que I_0 et $I_0 \cup \{i, i+1\}$ appartiennent au drapeau de μ. Or, le drapeau de μ est l'image par w du drapeau de $\lambda_{\mathcal{X}}$ régulier à support dominant : c'est le drapeau

$$\emptyset \subsetneq \{w(n)\}, \subsetneq \{w(n), w(n-1)\}, \subsetneq ..., \subsetneq \{w(n), ..., w(2)\} \subsetneq \{w(n), ..., w(2), w(1)\}.$$

Notant $k-1$, k, $k+1$ les cardinaux respectifs de I_0, $I = I_0 \cup \{i+1\}$, et $I_0 \cup \{i, i+1\}$ avec $k \in \{1, ..., n-1\}$, on a donc nécessairement

$$\begin{array}{rcl} I_0 & = & \{w(n-k+2), ..., w(n)\} \text{ si } k \geq 2, \ \ I_0 = \emptyset \text{ si } k = 1, \\ I_0 \cup \{i+1\} & = & \{w(n-k+1), ..., w(n)\}, \\ I_0 \cup \{i, i+1\} & = & \{w(n-k), ..., w(n)\}, \end{array} \tag{75}$$

ce qui nous renseigne tout d'abord sur la transposition $w^{-1}s_iw$: il apparaît en effet dans ces égalités que $i+1 = w(n-k+1)$ et $i = w(n-k)$. Par conséquent, $w^{-1}s_iw$ est la transposition qui échange $n-k$ et $n-k+1$. Autrement dit, l'égalité $s_iw\chi = w\chi$ se traduit par la coïncidence de $\mathcal{X}_{n-k}$ et $\mathcal{X}_{n-k+1}$ sur le groupe fini $\mathbb{F}_q^*$. L'hypothèse de la proposition nous assure pourtant que ces deux caractères de F^* sont distincts : ils ne sauraient donc avoir la même valeur en l'uniformisante : on a $\mathcal{X}_{n-k}(\pi) \neq \mathcal{X}_{n-k+1}(\pi)$.

Par définition de $\lambda_{\mathcal{X}}$, et puisque $\mu = w.\lambda_{\mathcal{X}}$, les égalités (75) donnent aussi :

$$\begin{array}{rcl} \mu(E_{I_0}) & = & \mathcal{X}_{n-k+2}(\pi)...\mathcal{X}_n(\pi) \text{ si } k \geq 2, \ \ \mu(E_{I_0}) = 1 \text{ si } k = 1, \\ \mu(E_{I_0 \cup \{i+1\}}) & = & \mathcal{X}_{n-k+1}(\pi)...\mathcal{X}_n(\pi), \\ \mu(E_{I_0 \cup \{i,i+1\}}) & = & \mathcal{X}_{n-k}(\pi)...\mathcal{X}_n(\pi). \end{array}$$

Ainsi, $\beta_{i,I}(\mu)\,\mu(E_I)^{-1} = \mu(E_{I_0 \cup \{i,i+1\}})\mu(E_{I_0})\mu(E_{I_0 \cup \{i+1\}})^{-2} = \mathcal{X}_{n-k}(\pi)\mathcal{X}_{n-k+1}(\pi)^{-1}$.

Puisqu'on s'est assuré que $\mathcal{X}_{n-k}(\pi) \neq \mathcal{X}_{n-k+1}(\pi)$, on a $\beta_{i,I}(\mu) \neq \mu(E_I)$ si bien que μ vérifie l'hypothèse ***3***.

□

3.4.4. Preuve des lemmes. —

3.4.4.1. Nous montrons d'abord dans $\mathcal{H}^{(1)}$ les relations de commutation suivantes qui sont des analogues des relations de Bernstein dans $\mathcal{H}^{(1)}_{\mathbb{Z}[q^{\pm 1/2}]}$.

Soient $i \in \{1, ..., n-1\}$, $t \in T(\mathbb{F}_q)$, I_0, J_0 deux sous-ensembles de $\{1, ..., n\}$ ne contenant ni i, ni $i+1$. On pose $I := I_0 \cup \{i+1\}$.

$$T_{s_i}\sigma_i = \sigma_i T_{s_i} \tag{76}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} T_t T_{s_i}^* & = & T_{s_i}^* T_{s_i t s_i}, \\ T_t E_{x_I s_i} & = & E_{x_I s_i} T_{s_i t s_i}, \end{array} \right. \tag{77}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_{J_0},\ E_{J_0 \cup \{i,i+1\}}, \ \text{ et } T_{s_i} \text{ commutent}, \\ E_{J_0},\ E_{J_0 \cup \{i,i+1\}}, \ \text{ et } E_{x_I s_i} \text{ commutent}, \end{array} \right. \tag{78}$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} T_{s_i}^* E_{J_0\cup\{i+1\}} & = & E_{J_0\cup\{i\}} T_{s_i}, \\ E_{J_0\cup\{i+1\}} T_{s_i}^* & = & T_{s_i} E_{J_0\cup\{i\}}. \end{array}\right. \tag{79}$$

On suppose de plus que $J_0 \subset I_0$ ou bien $I_0 \subset J_0$. On a :

$$E_{J_0\cup\{i+1\}} E_{x_I s_i} = E_{x_I s_i} E_{J_0\cup\{i\}} - q^{|I_0\cup J_0|-|I_0\cap J_0|} E_{I_0\cap J_0} E_{I_0\cup J_0\cup\{i,i+1\}} \sigma_i. \tag{80}$$

Nous établissons également les relations suivantes qui permettront de démontrer le lemme 3.4.11.

$$T_{s_i}^* E_{x_I s_i} = E_{I_0\cup\{i\}}, \tag{81}$$

$$E_{x_I s_i} T_{s_i} = E_{I_0\cup\{i+1\}} = E_I, \tag{82}$$

$$E_{x_I s_i} E_I = T_{s_i} E_{I_0} E_{I_0\cup\{i,i+1\}}. \tag{83}$$

Démonstration. — Dans $\mathcal{H}^{(1)}$, nous connaissons les relations de tresses du théorème 3.2.1, la relation $(\mathcal{R}_0)$ du théorème 3.2.9. Nous savons aussi que l'algèbre $\mathcal{A}^{(1)}$ est commutative. Si l'on étend les scalaires à $\mathbb{Z}[q^{\pm 1/2}]$, on dispose de plus des relations de Bernstein données par ([**45**, Proposition 5]) : dans $\mathcal{H}^{(1)}[q^{\pm 1/2}]$ on a :

(a) si $j \in \{1, ..., n\}$, $j \neq i, i+1$, alors T_{s_i} et $\theta_{x_j}^{(1)}$ commutent ;
(b) $\theta_{x_i}^{(1)}\, T_{s_i} = T_{s_i}^*\, \theta_{x_{i+1}}^{(1)}$;
(c) $\theta_{x_{i+1}}^{(1)}\, T_{s_i}^* = T_{s_i}\, \theta_{x_i}^{(1)}$.

Ce sont là les ingrédients de la preuve des relations de commutation.

(76) : Cette égalité s'obtient en se plongeant dans $\mathcal{H}^{(1)}[q^{\pm 1/2}]$ où l'élément $T_{s_i}^* = T_{s_i} + \sigma_i$ est égal à $qT_{s_i}^{-1}$.

(77) : L'élément t est de longueur nulle dans $W^{(1)}$. Des relations de tresses, on déduit donc que $T_t T_{s_i} = T_{ts_i} = T_{s_i} T_{s_i t s_i}$. Les relations s'obtiennent dès lors en se plongeant dans $\mathcal{H}^{(1)}[q^{\pm 1/2}]$ dans laquelle, d'une part $T_{s_i}^* = qT_{s_i}^{-1}$ et d'autre part, par définition des éléments de la base de Bernstein entière, $E_{x_I s_i}$ s'écrit comme le produit de T_{s_i} et d'un élément de l'algèbre commutative $\mathcal{A}^{(1)}[q^{\pm 1/2}]$.

(78) : En se plongeant dans $\mathcal{H}^{(1)}[q^{\pm 1/2}]$, l'élément E_{J_0} est proportionnel à un produit de θ_{x_j}, avec $j \neq i, i+1$. Du fait de la relation de Bernstein (a) , E_{J_0} et T_{s_i} commutent. De plus, on remarque, à l'aide de (b) et (c), que $\theta_{x_{i+1}}^{(1)}\, \theta_{x_i}^{(1)}\, T_{s_i} = \theta_{x_{i+1}}^{(1)}\, T_{s_i}^* \theta_{x_{i+1}}^{(1)} = T_{s_i} \theta_{x_i}^{(1)}\, \theta_{x_{i+1}}^{(1)}$. Ainsi, $E_{J_0\cup\{i,i+1\}}$ et T_{s_i} commutent.

Enfin, puisque $E_{x_I s_i}$ le produit de T_{s_i} et d'un élément de l'algèbre commutative $\mathcal{A}^{(1)}[q^{\pm 1/2}]$, on en déduit que E_{J_0}, $E_{J_0\cup\{i,i+1\}}$ et $E_{x_I s_i}$ commutent.

(79) : Les relations (79) s'obtiennent de même en se plongeant dans $\mathcal{H}^{(1)}[q^{\pm 1/2}]$ et en appliquant (a), (b), (c).

(80) : Puisque $i+1 \in I$ et $i \notin I$, on a $\ell(x_I s_i) = \ell(x_I) - 1$ ([**44**, Appendice]). De plus, la longueur de x_I ne dépend que du cardinal de I, c'est-à-dire que x_I et $x_{I_0 \cup \{i\}}$ ont la même longueur. On en déduit que

$$E_{x_I s_i} = q^{-1+\ell(x_I)/2} T_{s_i} \theta_{x_{I_0\cup\{i\}}} = q^{-1} T_{s_i} E_{I_0 \cup \{i\}}.$$

On rappelle que $T_{s_i}^* = T_{s_i} + \sigma_i$ où σ_i est un élément de $\mathcal{A}^{(1)}$. Ainsi

$$\begin{array}{rcll} qE_{J_0\cup\{i+1\}}E_{x_I s_i} & = & E_{J_0\cup\{i+1\}}T_{s_i}E_{I_0\cup\{i\}} & \\ & = & E_{J_0\cup\{i+1\}}(T_{s_i}^* - \sigma_i)E_{I_0\cup\{i\}} & \\ & = & T_{s_i}E_{J_0\cup\{i\}}E_{I_0\cup\{i\}} - E_{J_0\cup\{i+1\}}E_{I_0\cup\{i\}}\sigma_i & \text{d'après les relations (79)} \\ & = & qE_{x_I s_i}E_{J_0\cup\{i\}} - E_{J_0\cup\{i+1\}}E_{I_0\cup\{i\}}\sigma_i & \end{array}$$

La relation $(\mathcal{R}_0)$ du théorème 3.2.9 donne, puisque $I_0 \subset J_0$ ou bien $J_0 \subset I_0$,

$$E_{J_0\cup\{i+1\}}E_{I_0\cup\{i\}} = q^{1+|I_0\cup J_0|-|I_0\cap J_0|}E_{J_0\cap I_0}E_{I_0\cup J_0\cup\{i,i+1\}}.$$

Ainsi, divisant par q, on a dans $\mathcal{H}^{(1)}[q^{\pm 1/2}]$

$$E_{J_0\cup\{i+1\}}E_{x_I s_i} = E_{x_I s_i}E_{J_0\cup\{i\}} - q^{|I_0\cup J_0|-|I_0\cap J_0|}E_{J_0\cap I_0}E_{I_0\cup J_0\cup\{i,i+1\}}\sigma_i$$

qui est une égalité dans $\mathcal{H}^{(1)}$: c'est la relation (80).

(81) : L'égalité $E_{x_I s_i} = q^{-1}T_{s_i}E_{I_0\cup\{i\}}$ donne la relation (81) en multipliant à gauche par $T_{s_i}^*$ car $T_{s_i}^*T_{s_i} = q$.

(82) : Grâce à la relation (79), on a $E_{x_I s_i} = q^{-1}E_{I_0\cup\{i+1\}}T_{s_i}^*$, ce qui donne la relation (82) en multipliant à droite par T_{s_i}.

(83) : D'après la relation $(\mathcal{R}_0)$ du théorème 3.2.9, $E_{I_0\cup\{i\}}E_{I_0\cup\{i+1\}} = qE_{I_0}E_{I_0\cup\{i,i+1\}}$. Ainsi,

$$E_{x_I s_i}E_{I_0\cup\{i+1\}} = q^{-1}T_{s_i}E_{I_0\cup\{i\}}E_{I_0\cup\{i+1\}} = T_{s_i}E_{I_0}E_{I_0\cup\{i,i+1\}}.$$

□

3.4.4.2. Preuve du lemme 3.4.10. — Soit $\lambda : \mathcal{A}^{(1)} \to \overline{\mathbb{F}}_p$ un caractère régulier et $\chi : T(\mathbb{F}_q) \to \overline{\mathbb{F}}_p{}^*$ le caractère défini par $\chi(t) := \lambda(T_t)$, pour tout $t \in T(\mathbb{F}_q)$. Soit M un $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module.

Remarque 3.4.16. Rappelons que l'élément σ_i de $\mathcal{A}^{(1)}$ tel que $T_{s_i}^* = T_{s_i} + \sigma_i$ est égal à

$$\sigma_i = -T_{\delta_{s_i}} \sum_{t \in T_{s_i}(\mathbb{F}_q)} T_t.$$

Ainsi, si $m \in M$ est un élément sur lequel $\mathcal{A}^{(1)}$ agit par le caractère λ, on a

$$\sigma_i m = -\chi(\delta_{s_i}) \sum_{t \in T_{s_i}(\mathbb{F}_q)} \chi(t)\, m \quad = \quad \begin{cases} \chi(\delta_{s_i})m & \text{si} \quad s_i\chi = \chi \\ 0 & \text{si} \quad s_i\chi \neq \chi. \end{cases}$$

On se place sous l'hypothèse ***1*** et l'on note I un élément du drapeau de λ de la forme $I = I_0 \cup \{i+1\}$ avec $i \notin I_0$. On se donne un élément $m \in M$ sur lequel $\mathcal{A}^{(1)}$ agit par le caractère λ. Nous voulons démontrer que $T_{s_i}^* m$ est propre pour $\mathcal{A}^{(1)}$ pour le caractère $s_i.\lambda$. D'après la remarque *3.4.6*, il suffit pour cela de démontrer que

1) pour tout $t \in T(\mathbb{F}_q)$, $T_t T^*_{s_i} m = (s_i.\lambda)(T_t) T^*_{s_i} m$.
2) pour tout J appartenant au drapeau de $s_i.\lambda$, $E_J T^*_{s_i} m = (s_i.\lambda)(E_J) T^*_{s_i} m$.

Le point 1) est une conséquence de la première relation de commutation (77).

Soit J un élément du drapeau de $s_i.\lambda$. Puisque $I_0 \cup \{i\}$ appartient aussi au drapeau de $s_i.\lambda$, et que $i+1 \notin I_0$, cela signifie que si $i+1$ appartient à J alors i appartient à J.

Si l'ensemble J est fixé par l'action de s_i, le point 2) découle des relations (78).

Sinon, c'est que i appartient à J et $i+1$ n'appartient pas à J. On pose $J = J_0 \cup \{i\}$ avec $i+1 \notin J_0$, et on applique les relations (79) :

$$E_{J_0 \cup \{i\}} T^*_{s_i} = E_{J_0 \cup \{i\}} T_{s_i} + \sigma_i E_{J_0 \cup \{i\}} = T^*_{s_i} E_{J_0 \cup \{i+1\}} + \sigma_i E_{J_0 \cup \{i\}}.$$

Or, $J_0 \cup \{i\}$ n'est pas dans le drapeau de λ puisqu'il ne contient pas I et n'est pas inclus dans I, donc $E_{J_0 \cup \{i\}} m = 0$. Ainsi,

$$E_{J_0 \cup \{i\}} T^*_{s_i} m = T^*_{s_i} E_{J_0 \cup \{i+1\}} m = \lambda(E_{J_0 \cup \{i+1\}}) T^*_{s_i} m = (s_i.\lambda)(E_{J_0 \cup \{i\}}) T^*_{s_i} m.$$

Soit $m' \in M$ que l'on suppose propre pour $\mathcal{A}^{(1)}$ pour le caractère $s_i.\lambda$. Nous voulons démontrer que $(E_{x_I s_i} - \beta_{i,I}(\lambda)\sigma_i)m'$ est propre pour $\mathcal{A}^{(1)}$ pour le caractère λ. Comme précédemment, il suffit pour cela de démontrer que

1) pour tout $t \in T(\mathbb{F}_q)$, $T_t(E_{x_I s_i} - \beta_{i,I}(\lambda)\sigma_i)m' = \lambda(T_t)(E_{x_I s_i} - \beta_{i,I}(\lambda)\sigma_i)m'$.
2) pour tout J appartenant au drapeau de λ,

$$E_J(E_{x_I s_i} - \beta_{i,I}(\lambda)\sigma_i)m' = \lambda(E_J)(E_{x_I s_i} - \beta_{i,I}(\lambda)\sigma_i)m'.$$

Le point 1) est une conséquence de la deuxième relation de commutation (77) et de la remarque *3.4.16* appliquée à $s_i.\lambda$ et m'.

Soit J un élément du drapeau de λ. Puisque $I = I_0 \cup \{i+1\}$ appartient aussi au drapeau de λ, et que $i \notin I_0$, cela signifie que si i appartient à J alors $i+1$ appartient à J.

Si J est fixé par l'action de s_i, le point 2) découle de la relation (78).

Sinon, c'est que $i+1$ appartient à J et i n'appartient pas à J. On note alors $J = J_0 \cup \{i+1\}$, avec $i \notin J_0$. On a $J_0 \subset I_0$ ou bien $I_0 \subset J_0$. Or $J_0 \cup \{i+1\}$ n'appartient pas au drapeau de $s_i.\lambda$ car il n'est pas inclus dans $I_0 \cup \{i\}$ et ne contient pas non plus cet ensemble. On a donc $E_{J_0 \cup \{i+1\}} m' = 0$, et l'on doit démontrer que

$$E_{J_0 \cup \{i+1\}} E_{x_I s_i} m' = \lambda(E_{J_0 \cup \{i+1\}})(E_{x_I s_i} - \beta_{i,I}(\lambda)\sigma_i)m'.$$

- Si $I_0 \neq J_0$, le drapeau de λ possède deux éléments distincts qui contiennent $i+1$ et ne contiennent pas i. D'après le lemme 3.4.9, cela signifie que $\beta_{i,I}(\lambda) = 0$. D'autre part, d'après la relation (80), on a, puisque $|I_0 \cup J_0| > |I_0 \cap J_0|$,

$$E_{J_0 \cup \{i+1\}} E_{x_I s_i} m' = E_{x_I s_i} E_{J_0 \cup \{i\}} m' = (s_i.\lambda)(E_{J_0 \cup \{i\}}) E_{x_I s_i} m' = \lambda(E_{J_0 \cup \{i+1\}}) E_{x_I s_i} m'.$$

- Si $I_0 = J_0$, alors $J_0 \cup \{i+1\} = I$ et la relation (80) donne

$$E_I E_{x_I s_i} m' = E_{x_I s_i} E_{I_0 \cup \{i\}} m' - E_{I_0} E_{I_0 \cup \{i,i+1\}} \sigma_i m',$$

c'est-à-dire

$$E_I E_{x_I s_i} m' = \lambda(E_I) E_{x_I s_i} m' - \lambda(E_I)\beta_{i,I}(\lambda)\sigma_i m' = \lambda(E_I)(E_{x_I s_i} - \beta_{i,I}(\lambda)\sigma_i)m'.$$

3.4.4.3. Preuve du lemme 3.4.11. — Sachant que $E_I m = \lambda(E_I)m$ et que $\lambda(E_I) \neq 0$, la relation (83) dit que

$$E_{x_I s_i} m = \beta_{i,I}(\lambda) T_{s_i} m,$$

tandis que la relation (82) donne

$$E_{x_I s_i} T_{s_i} m = \lambda(E_I) m.$$

Ainsi, $E_{x_I s_i} T_{s_i}^* m = (\lambda(E_I) + \beta_{i,I}(\lambda) T_{s_i} \sigma_i) m$ et $\beta_{i,I}(\lambda)\sigma_i T_{s_i}^* m = (\beta_{i,I}(\lambda) T_{s_i}\sigma_i + \beta_{i,I}(\lambda)\sigma_i^2)m$, car T_{s_i} et σ_i commutent. D'où

$$(E_{x_I s_i} - \beta_{i,I}(\lambda)\sigma_i) T_{s_i}^* m = (\lambda(E_I) - \beta_{i,I}(\lambda)\sigma_i^2) m.$$

Si $s_i\chi \neq \chi$ alors $\sigma_i m = 0$ d'après la remarque *3.4.16* et

$$(E_{x_I s_i} - \beta_{i,I}(\lambda)\sigma_i) T_{s_i}^* m = \lambda(E_I) m = \alpha_{i,I}(\lambda) m.$$

Si $s_i\chi = \chi$ alors $\sigma_i^2 m = \chi(\delta_{s_i})^2 m = m$ car $\delta_{s_i}^2 = 1$ et

$$(E_{x_I s_i} - \beta_{i,I}(\lambda)\sigma_i) T_{s_i}^* m = (\lambda(E_I) - \beta_{i,I}(\lambda)) m = \alpha_{i,I}(\lambda) m.$$

D'autre part, sachant que $E_I m' = (s_i.\lambda)(E_I) m' = 0$, la relation (83) dit que

$$0 = \beta_{i,I}(\lambda) T_{s_i} m',$$

tandis que la relation (81) donne

$$T_{s_i}^* E_{x_I s_i} m' = \lambda(E_I) m'.$$

Ainsi, $T_{s_i}^* \beta_{i,I}(\lambda)\sigma_i m' = \beta_{i,I}(\lambda)\sigma_i^2 m'$. D'où

$$T_{s_i}^* (E_{x_I s_i} - \beta_{i,I}(\lambda)\sigma_i) m' = (\lambda(E_I) - \beta_{i,I}(\lambda)\sigma_i^2) m'.$$

On conclut comme précédemment que,

$$T_{s_i}^* (E_{x_I s_i} - \beta_{i,I}(\lambda)\sigma_i) m' = \alpha_{i,I}(\lambda) m'.$$

3.4.5. — Dans le but d'établir le critère d'irréductibilité pour les séries principales, nous avons établi un lien entre certains $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules standards réguliers et l'espace des $I(1)$-invariants des séries principales, puis nous avons décrit des entrelacements entre $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules standards réguliers. Nous exploitons ici ces mêmes résultats afin de donner la semi-simplification du $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module à droite des $I(1)$-invariants d'une série principale en supposant que $n = 3$. Nous nous contenterons de traiter le cas d'une série principale non ramifiée pour ne pas alourdir les discussions, bien que le cas général se traite avec les mêmes arguments.

Dans tout ce paragraphe on suppose que $n = 3$ et l'on se donne un caractère du tore déployé $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \otimes \mathcal{X}_2 \otimes \mathcal{X}_3 : T(F) \to \overline{\mathbb{F}}_p^{\,*}$. On note $\chi : T(\mathbb{F}_q) \to \overline{\mathbb{F}}_p^{\,*}$ sa restriction au tore fini. A partir du paragraphe 3.4.5.4, nous supposerons que χ est le caractère trivial.

3.4.5.1. Le fait de travailler avec $n = 3$ permet de borner la dimension des modules standards grâce au lemme suivant :

Lemme 3.4.17. *Soit $\lambda : \mathcal{A}^{(1)} \to \overline{\mathbb{F}}_p$ un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère de $\mathcal{A}^{(1)}$. Le module standard induit par λ est engendré comme $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel par les éléments*

$$\{T_w\varphi\}_{w\in W^{(1)},\,\ell(w)\leq 1},$$

ou encore par l'ensemble

$$\{\varphi,\ T_\omega\varphi,\ T_\omega^2\varphi,\ T_{s_i}\varphi,\ T_\omega T_{s_i}\varphi,\ T_\omega^2 T_{s_i}\varphi,\ i\in\{0,1,2\}\},$$

où φ désigne le générateur canonique du module standard induit par λ.

Démonstration. — a) Dans le groupe de Weyl affine étendu $\tilde{W}$, un élément de longueur 2 s'écrit comme le produit d'une puissance de l'élément ω de longueur nulle, et d'un élément de longueur 2 du groupe de Weyl affine. On rappelle que ce dernier est le groupe de Coxeter de système générateur $\{s_0, s_1, s_2\}$. De plus on a les relations (exemple *3.2.8*),

$$\left\{\begin{array}{lcl} \omega & = & s_2s_1x_1 = x_3s_2s_1 \\ \omega^2 & = & s_1s_2x_1x_2 = x_2x_3s_1s_2 \\ s_0 & = & s_1s_2s_1x_1x_3^{-1} = s_2s_1s_2x_1x_3^{-1}. \end{array}\right. \tag{84}$$

Un élément de longueur 2 du groupe de Weyl affine est l'un des éléments de l'ensemble

$$\{s_1s_2,\ s_2s_1,\ s_0s_1,\ s_1s_0,\ s_0s_2,\ s_2s_0\}$$

qui s'écrit aussi

$$\{s_1s_2,\ s_2s_1,\ s_1s_2x_2x_3^{-1},\ s_2s_1x_1x_3^{-1},\ s_2s_1x_1x_2^{-1},\ s_1s_2x_1x_3^{-1}\}$$

ou encore

$$\{\omega^2(x_1x_2)^{-1},\ \omega x_1^{-1},\ \omega^2(x_2x_3)^{-1},\ \omega x_3^{-1},\ \omega x_2^{-1},\ \omega^2(x_2x_3)^{-1}.\}$$

Ainsi, un élément de longueur 2 de $\tilde{W}$ est le produit d'une puissance de l'élément de longueur nulle ω et d'un élément de X. Par conséquent, un élément de longueur 2 de $W^{(1)}$ est le produit d'une puissance de l'élément de longueur nulle ω et d'un élément de $X^{(1)} = X \times T(\mathbb{F}_q)$.

b) Soient v un élément de longueur 2 de $W^{(1)}$, et $k \in \{0, 1, 2\}$, $x \in X^{(1)}$ avec $\ell(x) = 2$ tels que $v = \omega^k x$.

- Si $k = 0$, alors $v = x$ et $E_v = E_x$.
- Si $k = 1$, alors $v = s_2s_1x_1x$ d'après les relations (84). Calculons l'élément E_v. Il est défini dans $\mathcal{H}^{(1)}[q^{\pm 1/2}]$ par $E_v = T_{s_2}T_{s_1}\theta^{(1)}_{x_1}\theta^{(1)}_x$. L'exemple *3.2.8* a montré que $qT_\omega = T_{s_2}T_{s_1}\theta^{(1)}_{x_1}$, donc $E_v = qT_\omega\theta^{(1)}_x$. D'autre part, x est de longueur 2 donc $E_x = q\theta^{(1)}_x$. Ainsi $E_v = T_\omega E_x$.
- Si $k = 2$, on a de même, $E_v = T_\omega^2 E_x$.

Dans les trois cas, l'action de l'élément E_v sur le générateur canonique φ de $I(\lambda)$ est donnée par

$$E_v\varphi = \lambda(E_x)T_\omega^k\varphi.$$

Ainsi, puisque ω est de longueur nulle, $E_v\varphi$ appartient à l'espace vectoriel engendré par $\{T_w\varphi,\ w \in W^{(1)}\ \ell(w) \leq 1\}$. Mais l'élément E_v se décompose selon la base de Iwahori-Matsumoto de $\mathcal{H}^{(1)}$: d'après [**45**, Proposition 7], c'est la somme de T_v et d'une combinaison linéaire à cœfficients dans $\mathbb{Z}[q]$ d'éléments de type T_w, avec $w \in W^{(1)}$, $\ell(w) \leq \ell(v) - 1 = 1$.

Par conséquent $T_v\varphi$ appartient lui aussi à l'espace vectoriel engendré par

$$\{T_w\varphi,\ w \in W^{(1)}\ \ell(w) \leq 1\}.$$

c) L'algèbre $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ ayant pour $\overline{\mathbb{F}}_p$-base les éléments de Iwahori-Matsumoto $\{T_w,\ w \in W^{(1)}\}$, le $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel $I(\lambda)$ est engendré par les éléments

$$\{T_w\varphi,\ w \in W^{(1)}\}. \tag{85}$$

Pour prouver le lemme, il faut montrer que, dans le système générateur (85), on peut éliminer les éléments $T_w\varphi$ avec $\ell(w) \geq 2$. C'est une conséquence de l'argument suivant.

Un élément $w' \in W^{(1)}$ de longueur supérieure ou égale à 2 s'écrit $w' = w_1 v$, avec $w_1,\ v \in W^{(1)}$, vérifiant $\ell(w') = \ell(w_1) + \ell(v)$, et $\ell(v) = 2$. Du fait des relations de tresses, on a $T_{w'} = T_{w_1}T_v$. Ainsi, $T_{w'}\varphi = T_{w_1}T_v\varphi$ est, d'après le b), une combinaison linéaire des éléments

$$\{T_{w_1}T_w\varphi,\ w \in W^{(1)}\ell(w) \leq 1\}.$$

Or, d'après la remarque *3.2.3*, le produit $T_{w_1}T_w$ est égal à une combinaison linéaire à cœfficients dans $\mathbb{Z}[q]$ d'éléments de la base de Iwahori-Matsumoto correspondant à des éléments de $W^{(1)}$ de longueur inférieure ou égale à $\ell(w_1) + 1 < \ell(w')$. Par récurrence descendante sur la longueur de w', on montre ainsi que, du système générateur (85), on peut éliminer les $T_{w'}\varphi$ avec w' de longueur supérieure ou égale à 2.

Un élément de longueur 0 de $W^{(1)}$ est le produit d'une puissance de ω et d'un élément du tore fini. Un élément de longueur 1 de $W^{(1)}$ est le produit d'une puissance de ω, d'un des éléments $\{s_0, s_1, s_2\}$ et d'un élément du tore fini. Les éléments T_{ω^3} et T_t, $t \in T(\mathbb{F}_q)$ agissent sur φ par multiplication par un scalaire non nul. On déduit alors de ce qui précède que le module standard induit par λ est engendré comme $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel par les éléments

$$\{\varphi,\ T_\omega\varphi,\ T^2_\omega\varphi,\ T_{s_i}\varphi,\ T_\omega T_{s_i}\varphi,\ T^2_\omega T_{s_i}\varphi,\ i \in \{0,1,2\}\}.$$

□

Ce lemme nous permettra au chapitre suivant de calculer la dimension du module standard induit par λ. Nous l'exploitons ici pour le cas particulier qui suit.

3.4.5.2. Soit $\lambda_{\mathcal{X}} : \mathcal{A}^{(1)} \to \overline{\mathbb{F}}_p$ le caractère régulier de drapeau dominant associé par la bijection (69) au caractère $\mathcal{X}$. On rappelle qu'il est entièrement déterminé par les données suivantes :

$$\begin{cases} \lambda_{\mathcal{X}}(T_t) = \chi(t), \quad \forall t \in T(\mathbb{F}_q), \\ \lambda(E_{\{3\}}) = \mathcal{X}_3(\pi),\ \lambda(E_{\{2,3\}}) = \mathcal{X}_2(\pi)\mathcal{X}_3(\pi),\ \lambda(E_{\{1,2,3\}}) = \mathcal{X}_1(\pi)\mathcal{X}_2(\pi)\mathcal{X}_3(\pi). \end{cases} \tag{86}$$

Lemme 3.4.18. *Le module standard induit par $\lambda_{\mathcal{X}}$ est un $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel de dimension* 6.

Démonstration. — L'élément $E_{\{3\}}$ de la base de Bernstein entière correspondant à l'élément dominant $x_3 \in X$ est égal à $T_{x_3} = T_{\omega s_1 s_2} = T_\omega T_{s_1} T_{s_2}$. L'élément $E_{\{2,3\}}$ de la base de Bernstein entière correspondant à l'élément dominant $x_{\{2,3\}} \in X$ est égal à $T_{x_2 x_3} = T_{\omega^2 s_2 s_1} = T_\omega^2 T_{s_2} T_{s_1}$. Enfin, $E_{\{1,2,3\}}$ est égal à l'élément central inversible T_ω^3. Les relations (86) disent donc en particulier que dans le $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module standard induit par $\lambda_{\mathcal{X}}$ de générateur canonique φ, on a :

$$T_\omega T_{s_1} T_{s_2} \varphi = \mathcal{X}_3(\pi)\varphi \tag{87}$$

$$T_\omega^2 T_{s_2} T_{s_1} \varphi = \mathcal{X}_2(\pi)\mathcal{X}_3(\pi)\varphi \tag{88}$$

$$T_\omega^3 \varphi = \mathcal{X}_1(\pi)\mathcal{X}_2(\pi)\mathcal{X}_3(\pi)\varphi \tag{89}$$

Nous allons donner une $\overline{\mathbb{F}}_p$-base du module standard induit par $\lambda_{\mathcal{X}}$.

On rappelle dans $W^{(1)}$, les relations de commutation, $s_1\omega = \omega s_2$, $s_0\omega = \omega s_1$ et $s_1 s_2 s_1 = s_2 s_1 s_2$. Multiplions la relation (87) à gauche par $T_\omega T_{s_1}$. On obtient l'égalité entre

$$T_\omega^2 T_{s_2} T_{s_1} T_{s_2} \varphi = T_\omega^2 T_{s_1} T_{s_2} T_{s_1} \varphi = T_{s_2} T_\omega^2 T_{s_2} T_{s_1} \varphi \quad \text{et} \quad \mathcal{X}_3(\pi) T_\omega T_{s_1} \varphi$$

qui, à l'aide de la relation (88), donne $\mathcal{X}_2(\pi)\mathcal{X}_3(\pi) T_{s_2}\varphi = \mathcal{X}_3(\pi) T_\omega T_{s_1}\varphi$, donc

$$T_{s_2}\varphi = (\mathcal{X}_2(\pi))^{-1} T_\omega T_{s_1}\varphi. \tag{90}$$

Multiplions la relation (87) à gauche par $T_{s_0}^*$. On obtient,

$$\mathcal{X}_3(\pi) T_{s_0}^* \varphi = T_{s_0}^* T_\omega T_{s_1} T_{s_2} \varphi = T_\omega T_{s_1}^* T_{s_1} T_{s_2} \varphi = 0$$

donc $T_{s_0}^*\varphi = 0$. Du fait de l'expression de $T_{s_0}^* = T_{s_0} + \sigma_0$ avec $\sigma_0 \in \mathcal{A}^{(1)}$, il apparaît que $T_{s_0}^*\varphi$ est la somme de $T_{s_0}\varphi$ et d'un élément proportionnel à φ, donc $T_{s_0}\phi$ est proportionnel à φ.

Ainsi, d'après le lemme 3.4.17, le module standard $I(\lambda_{\mathcal{X}})$ induit par $\lambda_{\mathcal{X}}$ est le $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel engendré par

$$\{\varphi,\ T_\omega\varphi,\ T_\omega^2\varphi,\ T_{s_1}\varphi,\ T_\omega T_{s_1}\varphi,\ T_\omega^2 T_{s_1}\varphi.\}$$

Le corollaire 3.3.7 dit que $I(\lambda_{\mathcal{X}})$ est un $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel de dimension au moins 6, donc le système générateur que l'on vient d'exhiber est même une $\overline{\mathbb{F}}_p$-base de $I(\lambda_{\mathcal{X}})$.

□

3.4.5.3. Nous reprenons les notations du paragraphe 0.1.5.
En particulier, on note ρ_1 le caractère du Levi L_1 égal à $\mathcal{X}_1 \circ det \otimes \mathcal{X}_3$ et ρ_2 le caractère du Levi L_2 égal à $\mathcal{X}_1 \otimes \mathcal{X}_2 \circ det$. Pour $i \in \{1,2\}$, si $\mathcal{X}_i = \mathcal{X}_{i+1}$, la représentation paraboliquement induite par ρ_i est une sous-représentation de la série principale induite par $\mathcal{X}$.

Proposition 3.4.19. – *Le morphisme de $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules (73) défini par*

$$\begin{array}{ccc} I(\lambda_{\mathcal{X}}) & \longrightarrow & [(\mathrm{Ind}_{B(F)}^G \mathcal{X})^{I(1)}]_{\mathfrak{g}} \\ \varphi & \longmapsto & f_{B(F)I(1),\mathcal{X}} \end{array}$$

est un isomorphisme.

– *Soit $i \in \{1,2\}$. Supposons que $\mathcal{X}_i = \mathcal{X}_{i+1}$. L'image par le morphisme (73) du sous-$\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module de $I(\lambda_{\mathcal{X}})$ engendré par $T^*_{s_i}\varphi$ est égale à $[(\mathrm{Ind}^G_{B_1(F)}\rho_i)^{I(1)}]_{\mathfrak{g}}$.*

Démonstration. — La première assertion de la proposition provient des observations du paragraphe 0.1.5.3. En effet, on y a vu que l'espace des $I(1)$-invariants de la série principale induite par $\mathcal{X}$ est un $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel de dimension 6 de base

$$\{f_{B(F)wI(1),\mathcal{X}},\ w \in \mathfrak{S}_3\}$$

et que c'est un $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module à droite engendré par $f_{B(F)I(1),\mathcal{X}}$. Le morphisme (73) est donc surjectif, et injectif par argument de dimension, grâce au lemme 3.4.18.

Soit $i \in \{1,2\}$. Supposons que $\mathcal{X}_i = \mathcal{X}_{i+1}$. D'après le paragraphe 0.1.5.4, la série principale induite par $\mathcal{X}$ contient la sous-représentation induite par ρ_i dont l'espace des $I(1)$-invariants est un espace vectoriel de dimension 3, égal au sous-$\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module à droite de $(\mathrm{Ind}^G_{B(F)}\mathcal{X})^{I(1)}$ engendré par

$$f_{B_1(F)I(1),\rho_i} = f_{B(F)I(1),\mathcal{X}} + \mathcal{X}_i(-1)f_{B(F)s_iI(1),\mathcal{X}} = f_{B(F)I(1),\mathcal{X}} + \mathcal{X}_i(-1)f_{B(F)I(1),\mathcal{X}}.T_{s_i}$$

D'autre part, la remarque *3.4.16* nous rappelle que, dans le $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ module standard induit par $\lambda_{\mathcal{X}}$ on a

$$T^*_{s_i}\varphi = T_{s_i}\varphi + \sigma_i\varphi = T_{s_i}\varphi + \mathcal{X}_i(-1)\varphi = \mathcal{X}_i(-1)(\varphi + \mathcal{X}_i(-1)T_{s_i}\varphi).$$

Par conséquent, et puisque l'élément $T^*_{s_i}$ est invariant par l'anti-automorphisme (1), l'image par le morphisme (73) de $T^*_{s_i}\varphi$ est égale à l'élément $\mathcal{X}_i(-1)f_{B_1(F)I(1),\rho_i}$. On en déduit la deuxième assertion de la proposition.

□

3.4.5.4. — On suppose maintenant que $\mathcal{X} : T(F) \to \overline{\mathbb{F}}_p{}^*$ est un caractère non ramifié, c'est à dire que sa restriction $\chi : T(\mathbb{F}_q) \to \mathbb{F}_q^*$ au tore fini est le caractère trivial.

Lemme 3.4.20. – *Les $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules standards induits par $s_2.\lambda_{\mathcal{X}}$, $s_1s_2.\lambda_{\mathcal{X}}$ sont isomorphes. Si $\mathcal{X}_1 \neq \mathcal{X}_2$, ils sont de plus isomorphes au module standard induit par $s_1s_2s_1.\lambda_{\mathcal{X}}$.*

– *Les $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules standards induits par $s_1.\lambda_{\mathcal{X}}$, $s_2s_1.\lambda_{\mathcal{X}}$ sont isomorphes. Si $\mathcal{X}_2 \neq \mathcal{X}_3$, ils sont de plus isomorphes au module standard induit par $s_1s_2s_1.\lambda_{\mathcal{X}}$.*

– *Soit $i \in \{1,2\}$. Le morphisme de $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules suivant est bien défini*

$$\begin{array}{rccc} F_i : & I(s_i.\lambda_{\mathcal{X}}) & \longrightarrow & I(\lambda_{\mathcal{X}}) \\ & \varphi_i & \longmapsto & T^*_{s_i}\varphi, \end{array}$$

où φ_i désigne le générateur canonique du module standard induit par $s_i.\lambda_{\mathcal{X}}$.

Si $\mathcal{X}_i \neq \mathcal{X}_{i+1}$, c'est un isomorphisme. Sinon, son image est un sous-espace vectoriel de $I(\lambda_{\mathcal{X}})$ de dimension 3.

Démonstration. — C'est une application directe des lemmes 3.4.10, 3.4.11, et de la proposition 3.4.12. On rappelle que le drapeau de $\lambda_{\mathcal{X}}$ est le drapeau dominant

$$\emptyset \subsetneq \{3\} \subsetneq \{2,3\} \subsetneq \{1,2,3\}.$$

Démontrons la première assertion du lemme. La seconde s'obtient de la même façon. Le caractère $s_2.\lambda_{\mathcal{X}}$ de drapeau

$$\emptyset \subsetneq \{2\} \subsetneq \{2,3\} \subsetneq \{1,2,3\}$$

vérifie l'hypothèse ***1*** pour $i = 1$: en effet l'ensemble $\{2\}$ (qui contient $i+1$ et ne contient pas i) figure dans son drapeau. De plus, il vérifie aussi l'hypothèse ***3*** puisque d'une part χ est le caractère trivial du tore fini et, d'autre part $\beta_{1,\{2\}}(s_2.\lambda_{\mathcal{X}}) = 0$ car $\{1,2\}$ n'appartient pas au drapeau de $s_2.\lambda_{\mathcal{X}}$. D'après la proposition 3.4.12, les modules standards induits par $s_2.\lambda_{\mathcal{X}}$ et $s_1s_2.\lambda_{\mathcal{X}}$ sont isomorphes.

Supposons que $\mathcal{X}_1 \neq \mathcal{X}_2$. Le caractère $s_1s_2.\lambda_{\mathcal{X}}$ de drapeau

$$\emptyset \subsetneq \{1\} \subsetneq \{1,3\} \subsetneq \{1,2,3\}$$

vérifie l'hypothèse ***1*** pour $i = 2$: en effet l'ensemble $\{1,3\}$ figure dans son drapeau. De plus, il vérifie aussi l'hypothèse ***3*** puisque

$$\begin{array}{rcl} \beta_{2,\{1,3\}}(s_1s_2.\lambda_{\mathcal{X}}) & = & (s_1s_2.\lambda_{\mathcal{X}}(E_{\{1\}}))(s_1s_2.\lambda_{\mathcal{X}}(E_{\{1,2,3\}}))(s_1s_2.\lambda_{\mathcal{X}}(E_{\{1,3\}}))^{-1} \\ & = & \mathcal{X}_3(\pi)(\mathcal{X}_1(\pi)\mathcal{X}_2(\pi)\mathcal{X}_3(\pi))(\mathcal{X}_2(\pi)\mathcal{X}_3(\pi))^{-1} \\ & = & \mathcal{X}_1(\pi)\mathcal{X}_3(\pi). \end{array}$$

Ainsi,

$$\beta_{2,\{1,3\}}(s_1s_2.\lambda_{\mathcal{X}}) \neq \mathcal{X}_1(\pi)\mathcal{X}_2(\pi) = (s_1s_2.\lambda_{\mathcal{X}})(E_{\{1,3\}}).$$

Par la proposition 3.4.12, les modules standards induits par $s_1s_2.\lambda_{\mathcal{X}}$ et $s_2s_1s_2.\lambda_{\mathcal{X}}$ sont donc isomorphes.

Démontrons la troisième assertion du lemme. Soit $i \in \{1,2\}$. Le drapeau du caractère $\lambda_{\mathcal{X}}$ est dominant, nous sommes donc dans le cadre de la remarque *3.4.13*. Nous y avons noté que $\lambda_{\mathcal{X}}$ vérifie l'hypothèse ***1*** de sorte que, d'après le lemme 3.4.10, le morphisme de $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules F_i est bien défini. Nous y avons de plus vu que si $\mathcal{X}_i \neq \mathcal{X}_{i+1}$, alors $\lambda_{\mathcal{X}}$ vérifie l'hypothèse ***3*** et F_i est un isomorphisme. Dans le cas contraire, la proposition 3.4.19 dit que l'image de F_i est isomorphe au $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module $[(\mathrm{Ind}_{B_i(F)}^{G}\rho_i)^{I(1)}]_{\mathfrak{g}}$, qui est un espace vectoriel de dimension 3.

□

3.4.5.5. — Nous donnons maintenant la semi-simplification du $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ module standard induit par $\lambda_{\mathcal{X}}$.

Remarque 3.4.21. Puisqu'on a supposé que la restriction χ de $\mathcal{X}$ au tore fini est égale au caractère trivial noté $\mathbf{1}$, l'espace des $I(1)$-invariants de la série principale induite par $\mathcal{X}$ est en fait un espace invariant sous l'action du sous-groupe d'Iwahori.

D'autre part, l'idempotent central $\epsilon_{\mathbf{1}}$ (défini au paragraphe 3.2.1.2) agit sur le générateur canonique φ de $I(\lambda_{\mathcal{X}})$ par $\epsilon_{\mathbf{1}}\varphi = \varphi$. Ainsi $\epsilon_{\mathbf{1}}$ agit comme l'identité sur le module standard $I(\lambda_{\mathcal{X}})$, qui a

donc une structure de module pour l'algèbre $\epsilon_{\mathbf{1}}\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ dont on a vu qu'elle est isomorphe à l'algèbre de Hecke-Iwahori de G.

Enfin, d'après la remarque *3.2.6*, on a pour $i \in \{0,1,2\}$,

$$T^*_{s_i}\epsilon_{\mathbf{1}} = (T_{s_i}+1)\epsilon_{\mathbf{1}}$$

donc $T^*_{s_i}$ agit comme $T_{s_i}+1$ sur le module standard induit par $\lambda_{\mathcal{X}}$.

La preuve du lemme 3.4.18 a montré qu'une base de $I(\lambda_{\mathcal{X}})$ est donnée par

$$\{\varphi,\ T_\omega\varphi,\ T^2_\omega\varphi,\ T_{s_1}\varphi,\ T_\omega T_{s_1}\varphi,\ T^2_\omega T_{s_1}\varphi.\} \tag{91}$$

Décrivons l'action de l'algèbre $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ sur $I(\lambda_{\mathcal{X}})$ sur cette base. Suite au théorème 3.2.1, nous avons vu que la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ est engendrée par $\{T_{s_1}, T_\omega^{\pm 1}, T_t, t \in T(\mathbb{F}_q)\}$. Puisque l'élément central T^3_ω agit par multiplication par $\mathcal{X}_1(\pi)\mathcal{X}_2(\pi)\mathcal{X}_3(\pi)$ et que T_t agit par multiplication par 1, il nous suffit de donner l'action de T_{s_1} sur la base de $I(\lambda_{\mathcal{X}})$.

Les relations (87), (88), (89) et les calculs de la preuve du lemme 3.4.18 montrent que l'action de T_{s_1} sur $I(\lambda_{\mathcal{X}})$ est donnée par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} T_{s_1}.\varphi & = & T_{s_1}\varphi, \\ T_{s_1}.T_\omega\varphi & = & \mathcal{X}_2(\pi)^{-1}T^2_\omega T_{s_1}\varphi \\ T_{s_1}.T^2_\omega\varphi & = & -T^2_\omega\varphi, \\ T_{s_1}.T_{s_1}\varphi & = & -T_{s_1}\varphi, \\ T_{s_1}.T_\omega T_{s_1}\varphi & = & \mathcal{X}_1(\pi)^{-1}T^2_\omega\varphi \\ T_{s_1}T^2_\omega T_{s_1}\varphi & = & -T^2_\omega T_{s_1}\varphi \end{array}\right. \tag{92}$$

Pour obtenir la semi-simplification de ce $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module standard, nous allons utiliser à maintes reprises l'argument suivant qui nous a déjà servi pour la preuve du corollaire 3.4.8 : le caractère régulier $\lambda_{\mathcal{X}}$ est distinct de chacun de ses conjugués sous l'action de $\mathfrak{S}_3$. Soient λ et λ' deux conjugués distincts de $\lambda_{\mathcal{X}}$. Si les modules standards qu'ils induisent sont isomorphes, alors tout quotient non nul de l'un possède un élément propre pour chacun des caractères λ et λ', il est donc de dimension supérieure ou égale à 2.

Nous allons aussi utiliser le fait que le module standard induit par un conjugué de $\lambda_{\mathcal{X}}$ est de dimension 6. Pour l'instant nous n'avons démontré ce résultat que pour $\lambda_{\mathcal{X}}$ lui-même (lemme 3.4.18), mais nous le démontrerons en général par la proposition 4.2.15 du chapitre suivant.

- Si $\mathcal{X}_1 \neq \mathcal{X}_2$ et $\mathcal{X}_2 \neq \mathcal{X}_3$, le lemme 3.4.20 dit que le module standard induit par $\lambda_{\mathcal{X}}$ est isomorphe au module standard induit par chacun des 6 conjugués distincts de $\lambda_{\mathcal{X}}$. Puisqu'il est de dimension 6, il est donc irréductible.

- Supposons que $\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_2$ et $\mathcal{X}_2 \neq \mathcal{X}_3$. Le lemme 3.4.20 dit que les modules standards induits par $\lambda_{\mathcal{X}}$, $s_2.\lambda_{\mathcal{X}}$, et $s_1s_2.\lambda_{\mathcal{X}}$ sont isomorphes d'une part, et que les modules standards induits par $s_1.\lambda_{\mathcal{X}}$, $s_2s_1.\lambda_{\mathcal{X}}$, et $s_1s_2s_1.\lambda_{\mathcal{X}}$ sont isomorphes d'autre part. Par conséquent un quotient non nul d'un de ces modules standards est de dimension supérieure ou égale à 3 et s'il est de dimension 3 il est irréductible. (C'est là que l'on utilise le fait que $I(s_1.\lambda_{\mathcal{X}})$ est de dimension 6).

  D'après le lemme 3.4.20, l'image du morphisme F_1, qui est un quotient de $I(s_1.\lambda_{\mathcal{X}})$, est un sous-espace de dimension 3 de $I(\lambda_{\mathcal{X}})$. On en déduit que c'est un $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module irréductible et que c'est le seul sous-module propre de $I(\lambda_{\mathcal{X}})$. Il est engendré par $\psi_1 := T^*_{s_1}\varphi$ et a pour base $\{\psi_1, T_\omega\psi_1, T_\omega\psi_1\}$. D'après les relations (92), l'action de T_{s_1} y est donnée par

$$\left\{\begin{array}{lcl} T_{s_1}.\psi_1 & = & 0 \\ T_{s_1}.T_\omega\psi_1 & = & \mathcal{X}_1(\pi)^{-1}T^2_\omega\psi_1 \\ T_{s_1}.T^2_\omega\psi_1 & = & -T^2_\omega T^*_{s_1}\varphi. \end{array}\right. \tag{93}$$

  Le quotient de $I(\lambda_{\mathcal{X}})$ par son sous-module propre est engendré par $\bar{\varphi}$ et a pour base $\{\bar{\varphi}, T_\omega\bar{\varphi}, T^2_\omega\bar{\varphi}\}$ où $\bar{\varphi}$ désigne l'image de φ dans le module quotient. L'action de T_{s_1} y est donnée par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} T_{s_1}.\bar{\varphi} & = & -\bar{\varphi} \\ T_{s_1}.T_\omega\bar{\varphi} & = & -\mathcal{X}_1(\pi)^{-1}T^2_\omega\bar{\varphi} \\ T_{s_1}.T^2_\omega\bar{\varphi} & = & -T^2_\omega\bar{\varphi} \end{array}\right. \tag{94}$$

  Grâce à la proposition 3.4.19, nous avons ainsi obtenu la suite de Jordan-Hölder du $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module $[(\mathrm{Ind}^G_{B(F)}\mathcal{X})^{I(1)}]_{\mathfrak{g}}$:

$$[(\mathrm{Ind}^G_{B(F)}\mathcal{X})^{I(1)}]_{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\quad(94)\quad} [(\mathrm{Ind}^G_{B_1(F)}\rho_1)^{I(1)}]_{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\quad(93)\quad} 0$$

– De même si $\mathcal{X}_1 \neq \mathcal{X}_2$ et $\mathcal{X}_2 = \mathcal{X}_3$, on montrerait que le $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module standard induit par $\lambda_{\mathcal{X}}$ a pour unique sous-module propre le sous-module engendré par $T^*_{s_2}\varphi$ et que ce dernier est de dimension 3. La remarque *3.4.21* et l'égalité (90) donnent $T^*_{s_2}\varphi = \varphi + T_{s_2}\varphi = \varphi + \mathcal{X}_3(\pi)^{-1}T_\omega T_{s_1}\varphi$ donc le sous-module engendré par $\psi_2 := T^*_{s_2}\varphi$ a pour $\overline{\mathbb{F}}_p$-base $\{\psi_2, T_\omega\psi_2, T_\omega\psi_2\}$. D'après les relations (92), l'action de T_{s_1} y est donnée par

$$\left\{\begin{array}{lcl} T_{s_1}.\psi_2 & = & (\mathcal{X}_1(\pi)\mathcal{X}_2(\pi))^{-1}T^2_\omega\psi_2 \\ T_{s_1}.T_\omega\psi_2 & = & 0 \\ T_{s_1}.T^2_\omega\psi_2 & = & -T^2_\omega\psi_2 \end{array}\right. \tag{95}$$

  Le quotient de $I(\lambda_{\mathcal{X}})$ par son sous-module propre est engendré par $\bar{\varphi}$ et a pour base $\{\bar{\varphi}, T_\omega\bar{\varphi}, T^2_\omega\bar{\varphi}\}$ où $\bar{\varphi}$ désigne l'image de φ dans le module quotient. Elle vérifie $0 = T^*_{s_2}\bar{\varphi} = \bar{\varphi} + \mathcal{X}_3(\pi)^{-1}T_\omega T_{s_1}\bar{\varphi}$. L'action de T_{s_1} sur le module quotient est donnée par :

$$(96)\qquad \begin{cases} T_{s_1}.\bar{\varphi} & = & -(\mathcal{X}_1(\pi)\mathcal{X}_2(\pi))^{-1}T_\omega^2\bar{\varphi} \\ T_{s_1}.T_\omega\bar{\varphi} & = & -T_\omega\bar{\varphi} \\ T_{s_1}.T_\omega^2\bar{\varphi} & = & -T_\omega^2\bar{\varphi} \end{cases}$$

Grâce à la proposition 3.4.19, nous avons ainsi obtenu la suite de Jordan-Hölder du $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module $[(\mathrm{Ind}_{B(F)}^G\mathcal{X})^{I(1)}]_{\mathfrak{g}}$:

$$[(\mathrm{Ind}_{B(F)}^G\mathcal{X})^{I(1)}]_{\mathfrak{g}} \xrightarrow{\quad(96)\quad} [(\mathrm{Ind}_{B_2(F)}^G\rho_2)^{I(1)}]_{\overline{\mathfrak{g}}} \xrightarrow{\quad(95)\quad} 0$$

– Enfin, supposons que $\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_2$ et $\mathcal{X}_2 = \mathcal{X}_3$. Pour $i \in \{1,2\}$, la représentation paraboliquement induite par ρ_i est une sous-représenttion de la série principale induite par $\mathcal{X}$. De plus l'intersection de ces deux sous-représentations est non nulle puisqu'elle contient la sous-représentation de dimension 1 dite "des constantes" (remarque *0.1.5*). Par conséquent,

$$(\mathrm{Ind}_{B_1(F)}^G\rho_1)^{I(1)} \cap (\mathrm{Ind}_{B_2(F)}^G\rho_2)^{I(1)} \neq \{0\}.$$

Par passage aux $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules à gauche, et grâce à la proposition 3.4.19 qui identifie l'image du morphisme F_i avec $[(\mathrm{Ind}_{B_i(F)}^G\rho_i)^{I(1)}]_{\mathfrak{g}}$, on en déduit que l'intersection des images de F_1 et F_2 est un sous-module non nul de $I(\lambda_{\mathcal{X}})$.

D'après le lemme 3.4.20, les modules standards induits par $s_1.\lambda_{\mathcal{X}}$ et $s_2s_1.\lambda_{\mathcal{X}}$ (resp. $s_2.\lambda_{\mathcal{X}}$ et $s_1s_2.\lambda_{\mathcal{X}}$) sont isomorphes, donc un quotient de $I(s_1.\lambda_{\mathcal{X}})$ (resp. $I(s_2.\lambda_{\mathcal{X}})$) est de dimension supérieure ou égale à 2. Par conséquent, le quotient de $Im(F_1)$ (resp. $Im(F_2)$) par l'intersection $Im(F_1) \cap Im(F_2)$ est un espace de dimension 2 et est irréductible comme $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module. Ainsi, $Im(F_1) \cap Im(F_2)$ est un espace de dimension 1. De plus, la somme de $Im(F_1)$ et $Im(F_2)$ est un sous-module de dimension 5 du module standard induit par $\lambda_{\mathcal{X}}$.

Décrivons chacun des constituants irréductibles du module standard induit par $\lambda_{\mathcal{X}}$ que nous venons d'exhiber. Pour cela, calculons la décomposition de l'élément

$$\mathcal{K} := T_{s_2}^*T_{s_1}^*T_{s_2}^*\varphi = T_{s_1}^*T_{s_2}^*T_{s_1}^*\varphi$$

dans la base (91) de $I(\lambda_{\mathcal{X}})$. On utilise pour cela les relations (92) et le fait que $T_{s_2} = T_\omega^{-1}T_{s_1}T_\omega$. On obtient

$$\mathcal{K} = \mathcal{X}_1(\pi)^2\varphi + \mathcal{X}_1(\pi)T_\omega\varphi + T_\omega^2\varphi + \mathcal{X}_1(\pi)^2T_{s_1}\varphi + \mathcal{X}_1(\pi)T_\omega T_{s_1}\varphi + T_\omega^2T_{s_1}\varphi.$$

C'est donc un élément non nul. Il appartient de plus à l'intersection de $Im(F_1)$ et de $Im(F_2)$ dont on sait maintenant que c'est un espace de dimension 1. C'en est donc une base. Les actions de T_ω et T_{s_1} sur $\mathcal{K}$ sont données par

$$(97)\qquad \begin{cases} T_\omega\mathcal{K} & = & \mathcal{X}_1(\pi)\mathcal{K} \\ T_{s_1}\mathcal{K} & = & 0 \qquad\qquad \text{car } T_{s_i}T_{s_i}^* = 0. \end{cases}$$

On note encore $\psi_1 = T^*_{s_1}\varphi$. On remarque que $\mathcal{K} = \mathcal{X}_1(\pi)^2\psi_1 + \mathcal{X}_1(\pi)T_\omega\psi_1 + T^2_\omega\psi_1$. Une base du quotient de $Im(F_1)$ par son sous-module de $\overline{\mathbb{F}}_p$-base $\mathcal{K}$ est $\{\bar{\psi}_1, T_\omega\bar{\psi}_1\}$ où $\bar{\psi}_1$ désigne l'image de ψ_1 dans le module quotient. Grâce aux relations (93) qui sont encore valables ici puisque $\mathcal{X}_1 = \mathcal{X}_2$, les actions de T_{s_1} et de T_ω y sont données par

$$\left\{\begin{array}{lcl} T^2_\omega\bar{\psi}_1 & = & -\mathcal{X}_1(\pi)^2\bar{\psi}_1 - \mathcal{X}_1(\pi)T_\omega\bar{\psi}_1 \\ \\ T_{s_1}\bar{\psi}_1 & = & 0 \\ T_{s_1}T_\omega\bar{\psi}_1 & = & -\mathcal{X}_1(\pi)\bar{\psi}_1 - T_\omega\bar{\psi}_1 \end{array}\right. \tag{98}$$

Notons $\psi_2 := T^*_{s_2}\varphi$. Grâce à la relation (90) on l'écrit $\psi_2 = \varphi + \mathcal{X}_1(\pi)^{-1}T_\omega T_{s_1}\varphi$. On remarque que $\mathcal{K} = \mathcal{X}_1(\pi)^2\psi_2 + \mathcal{X}_1(\pi)T_\omega\psi_2 + T^2_\omega\psi_2$. Une base du quotient de $Im(F_2)$ par son sous-module de $\overline{\mathbb{F}}_p$-base $\mathcal{K}$ est donnée par $\{\bar{\psi}_2, T_\omega\bar{\psi}_2\}$ où $\bar{\psi}_2$ désigne l'image de ψ_2 dans le module quotient. Grâce aux relations (95) qui sont encore valables car $\mathcal{X}_2 = \mathcal{X}_3$, les actions de T_{s_1} et de T_ω y sont données par

$$\left\{\begin{array}{lcl} T^2_\omega\bar{\psi}_2 & = & -\mathcal{X}_1(\pi)^2\psi_2 - \mathcal{X}_1(\pi)T_\omega\bar{\psi}_2 \\ \\ T_{s_1}\bar{\psi}_2 & = & -\bar{\psi}_2 - \mathcal{X}_1(\pi)^{-1}T_\omega\bar{\psi}_2 \\ T_{s_1}T_\omega\bar{\psi}_2 & = & 0 \end{array}\right. \tag{99}$$

Enfin notant $\bar{\varphi}$ l'image de φ dans le quotient de $I(\lambda_{\mathcal{X}})$ par le sous-module $Im(F_1) + Im(F_2)$, les égalités $T^*_{s_1}\varphi = T_{s_1}\varphi + \varphi$ et $T^*_{s_2}\varphi = \varphi + \mathcal{X}_1(\pi)^{-1}T_\omega T_{s_1}\varphi$ donnent $0 = T_{s_1}\bar{\varphi} + \bar{\varphi}$ et $0 = \bar{\varphi} - \mathcal{X}_1(\pi)^{-1}T_\omega\varphi$. Donc les actions de T_{s_1} et de T_ω sur $\bar{\varphi}$ sont données par

$$\left\{\begin{array}{lcl} T_\omega\bar{\varphi} & = & \mathcal{X}_1(\pi)\bar{\varphi} \\ \\ T_{s_1}\bar{\varphi} & = & -\bar{\varphi} \end{array}\right. \tag{100}$$

Grâce à la proposition 3.4.19, nous avons ainsi obtenu la suite de Jordan-Hölder du $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module $[(\mathrm{Ind}^G_{B(F)}\mathcal{X})^{I(1)}]_{\mathfrak{g}}$:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & & {[(\mathrm{Ind}^G_{B_2(F)}\rho_2)^{I(1)}]_{\mathfrak{g}}} \arrow[dr, dash, "(99)"] & & \\ {[(\mathrm{Ind}^G_{B(F)}\mathcal{X})^{I(1)}]_{\mathfrak{g}}} \arrow[r, dash, "(100)"] \arrow[ur, dash, "(98)"] \arrow[dr, dash, "(99)"'] & & & \overline{\mathbb{F}}_p\mathcal{K} \arrow[r, dash, "(97)"] & 0 \\ & & {[(\mathrm{Ind}^G_{B_1(F)}\rho_1)^{I(1)}]_{\mathfrak{g}}} \arrow[ur, dash, "(98)"'] & & \end{tikzcd}$$

CHAPITRE 4

MODULES SIMPLES EN CARACTÉRISTIQUE p SUR LA PRO-p-ALGÈBRE DE HECKE DE $\mathrm{GL}_3(F)$

On reprend les notations du chapitre 3 en considérant que $n = 3$. En particulier, G désigne maintenant le groupe linéaire $\mathrm{GL}_3(F)$ et $\mathcal{H}_R^{(1)}$ désigne la R-algèbre de Hecke du pro-p-Iwahori de $\mathrm{GL}_3(F)$.

4.1. Préliminaires

Dans ce paragraphe de préliminaires, q désigne le cardinal du corps résiduel de F. Plus tard, nous considérerons à nouveau q comme une indéterminée.

Définition 4.1.1. *Soit $\chi \in \hat{T}(\mathbb{F}_q)$ un $\mathbb{F}_q$-caractère du tore fini $T(\mathbb{F}_q)$. On note γ l'orbite de χ sous l'action de $\mathfrak{S}_3$ et σ_γ la représentation de I triviale sur $I(1)$ définie par $\bigoplus_{\chi' \in \gamma} \chi'$.*

On dit que χ et γ sont
– réguliers si γ est de cardinal 6,
– semi-réguliers si γ est de cardinal 3.

Sinon, γ est de cardinal 1 et l'on est dans le cas Iwahori.

Notons que si $q = 2$, seul le cas Iwahori existe ; si $q = 3$ seuls les cas Iwahori et semi-régulier existent.

Le théorème 3.2.5 se traduit pour $n = 3$ et $R = \overline{\mathbb{F}}_p$ par la proposition suivante :

Proposition 4.1.2. *Il existe une famille d'idempotents centraux orthogonaux $(\epsilon_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$, indexée sur l'ensemble Γ des $\mathfrak{S}_3$-orbites de $\hat{T}(\mathbb{F}_q)$ telle que l'unité de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I(1))$ est la somme de ces idempotents :*

$$1 = \sum_{\gamma \in \Gamma} \epsilon_\gamma \in \mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I(1)).$$

Pour $\gamma \in \Gamma$, on a l'isomorphisme

$$\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, \sigma_\gamma) \simeq \epsilon_\gamma \mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I(1)).$$

De plus, pour γ, γ' orbites régulières (resp. semi-régulières, resp. de cardinal 1), les algèbres $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, \sigma_\gamma)$ et $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, \sigma_{\gamma'})$ sont isomorphes.

La dernière assertion de la proposition provient de [**45**, 1.3, Exemple 3].

Proposition 4.1.3. *Soit $\chi \in \hat{T}(\mathbb{F}_q)$ un caractère du tore fini. On a un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p[G]$-modules*

$$\begin{array}{ccc} ind_I^G\, s_2 s_1 \chi & \longrightarrow & ind_I^G \chi \\ f_{I,s_2 s_1 \chi} & \longmapsto & \omega f_{I,\chi}. \end{array}$$

C'est l'analogue, pour $n = 3$ de la deuxième assertion de la proposition 1.1.1. Le résultat provient du fait que l'élément ω normalise les sous-groupes I et $I(1)$ de G et agit sur le tore $T(\mathbb{F}_q)$ comme le cycle $s_2 s_1$.

4.2. Modules simples en caractéristique p sur l'algèbre de Hecke-Iwahori de $\mathrm{GL}_3(F)$

Soit $\chi \in \hat{T}(\mathbb{F}_q)$. On suppose que l'on est dans le cas Iwahori c'est-à-dire que $\chi = \chi s_1 = \chi s_2$. D'après la proposition 4.1.2, on a un isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbres

$$\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, \chi) \simeq \mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I).$$

Dans le cas Iwahori, l'étude des $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, \chi)$-modules simples se ramène ainsi à l'étude des $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I)$-modules simples.

4.2.1. Présentations de l'anneau de Hecke-Iwahori.— La mise en place de ces présentations a été antérieure à l'établissement des théorèmes 3.2.1 et 3.2.9 provenant de **[45]** qui fournissent des présentations de l'anneau de Hecke du pro-p-Iwahori. La parenté entre ces résultats est visible dans ce paragraphe, qui "remplace" les notations ($T_?$, $\theta_?^{(1)}$, $E_?$...) du paragraphe 3.2 par ($\mathrm{T}_?$, $\theta_?$, $\mathrm{E}_?$...), et est précisée à travers les remarques *4.2.2* et *4.2.8*.

4.2.1.1. Présentation de Iwahori-Matsumoto. — Nous rappelons les résultats de **[23]**.

Pour $w \in \tilde{W}$, on désigne par T_w l'élément de l'anneau de Hecke-Iwahori de G correspondant à la double classe IwI. L'anneau de Hecke $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}(G, I)$ est le $\mathbb{Z}$-module libre de base $\{\mathrm{T}_w,\, w \in \tilde{W}\}$ vérifiant

(1) Les relations de tresse, $\mathrm{T}_w \mathrm{T}_{w'} = \mathrm{T}_{ww'}$, si $w, w' \in \tilde{W}$ vérifient $\ell(w) + \ell(w') = \ell(ww')$.

(2) Les relations quadratiques, $T_s^2 = (q-1)T_s + q$, pour tout $s \in S = \{s_0, s_1, s_2\}$.

Notation 4.2.1. – Dans l'anneau commutatif unitaire, on note $q_R := q.1_R$. Désormais, on considère q comme une indéterminée et R comme un $\mathbb{Z}[q]$-module *via* le morphisme d'anneaux unitaires défini par $q \mapsto q_R$.

– On désigne par H la $\mathbb{Z}[q]$-algèbre de base $\{\mathrm{T}_w,\, w \in \tilde{W}\}$ avec les relations (1) et (2) précédentes.

Nous allons noter S_0, S_1, S_2, Ω les éléments T_{s_0}, T_{s_1}, T_{s_2}, T_ω. La $\mathbb{Z}[q]$-algèbre H est engendrée par $\Omega^{\pm 1}$ et S_1 avec les relations

$$(S_1 + 1)(S_1 - q) = 0,\ \Omega^3 S_1 = S_1 \Omega^3,\ S_1 S_2 S_1 = S_2 S_1 S_2, \tag{101}$$

$$\text{où } S_2 = \Omega^{-1} S_1 \Omega. \quad \text{On a aussi} \quad S_0 = \Omega S_1 \Omega^{-1}. \tag{102}$$

– On notera $H[q^{\pm 1/2}]$ la $\mathbb{Z}[q^{\pm 1/2}]$-algèbre obtenue après addition d'une racine carrée et d'un inverse de l'indéterminée q aux scalaires de H. D'après les relations quadratiques, les éléments S_0, S_1, S_2 sont inversibles dans $H[q^{\pm 1/2}]$, donc tout élément de la base de Iwahori-Matsumoto de H est inversible dans $H[q^{\pm 1/2}]$.

– Enfin, on désigne par H_R la R-algèbre $H \otimes_{\mathbb{Z}[q]} R$. Elle est isomorphe à la R-algèbre de Hecke $\mathcal{H}_R(G, I)$ de G.

Remarque 4.2.2. Soit $\mathbf{1} \in \hat{T}(\mathbb{F}_q)$ le caractère trivial du tore fini. Si $R \supset \{\mu_{q-1}, (q-1)^{-1}\}$, alors la R-algèbre de Hecke H_R est isomorphe à la R-algèbre $\epsilon_{\mathbf{1}}\mathcal{H}_R^{(1)}$ d'unité $\epsilon_{\mathbf{1}}$ *via* l'identification : $\mathrm{T}_w \to \epsilon_{\mathbf{1}} T_w$, pour tout $w \in \tilde{W}$ (voir le théorème 3.2.5).

4.2.1.2. Présentation de Bernstein entière pour l'anneau de Hecke-Iwahori de $\mathrm{GL}_3(F)$.— [**44**]. La présentation de Bernstein de la $\mathbb{Z}[q^{\pm 1/2}]$-algèbre de Hecke-Iwahori rappelée tout d'abord ici est fondamentale pour la détermination des H_R-modules irréductibles lorsque R est un corps algébriquement clos de caractéristique nulle ([**29**], [**30**]).

Il existe un morphisme injectif de $\mathbb{Z}[q^{\pm 1/2}]$-algèbres

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[q^{\pm 1/2}][X] & \longrightarrow & H[q^{\pm 1/2}] \\ x & \longmapsto & \theta_x \end{array}$$

tel que, pour tout $x \in X$ élément dominant, θ_x est égal à $q^{-\ell(x)/2}\mathrm{T}_x$. On note $\mathcal{A}[q^{\pm 1/2}]$ son image. D'après le théorème de Bernstein ([**26**, Proposition 3.7]), $H[q^{\pm 1/2}]$ est un $\mathcal{A}[q^{\pm 1/2}]$-module libre de rang 6 de base $\{\mathrm{T}_{w_0}\}_{w_0 \in W_0}$.

Comme au chapitre précédent, pour $I \subset \{1, 2, 3\}$, on désigne par x_I la diagonale constituée de π en les coordonnées qui appartiennent à I et de 1 ailleurs (voir la notation *3.2.7*). Lorsque I est le singleton $\{i\}$, on notera simplement x_i. D'après l'appendice de [**44**], la longueur de $x_I \in \tilde{W}$ est égale à $|I|(3 - |I|)$.

L'algèbre $\mathcal{A}[q^{\pm 1/2}]$ est la sous-algèbre commutative de $H[q^{\pm 1/2}]$

$$\mathbb{Z}[q^{\pm 1/2}][\theta_{x_1}^{\pm 1}, \theta_{x_2}^{\pm 1}, \theta_{x_3}^{\pm 1}].$$

Exemple 4.2.3. Donnons l'expression de θ_{x_1}, θ_{x_2} et θ_{x_3} en fonction des éléments $\Omega^{\pm 1}$ S_1 et S_2 générateurs de $H[q^{\pm 1/2}]$.

– L'élément $x_3 = \omega s_1 s_2$ est dominant. Par conséquent $\theta_{x_3} = q^{-1}\mathrm{T}_{x_3} = q^{-1}\Omega S_1 S_2$.

– L'élément x_2 s'écrit $x_2 = x_{\{2,3\}} x_3^{-1}$ où x_3 et $x_{\{2,3\}} = \omega^2 s_2 s_1$ sont des éléments dominants.

$$\theta_{x_2} = \theta_{x_{\{2,3\}}} {\theta_{x_3}}^{-1} = \Omega^2 S_2 S_1 S_2^{-1} S_1^{-1} \Omega^{-1} = S_2^{-1} \Omega S_1.$$

– L'inverse de l'élément $x_1 = s_1 s_2 \omega$ est dominant, donc

$$\theta_{x_1} = (\theta_{x_1^{-1}})^{-1} = q S_1^{-1} S_2^{-1} \Omega.$$

Notation 4.2.4. Pour tout $w \in \tilde{W}$ de décomposition $w = w_0 x \in W_0.X$, on définit comme dans [**44**] l'élément $\mathrm{E}_w \in H[q^{\pm 1/2}]$ par

$$\mathrm{E}_w := q^{(\ell(w)-\ell(w_0))/2}\mathrm{T}_{w_0}\theta_x.$$

Exemple 4.2.5. On a $\mathrm{E}_{w_0} = \mathrm{T}_{w_0}$ pour $w_0 \in W_0$, $\mathrm{E}_x = \mathrm{T}_x$ pour $x \in X_{dom}$. Calculons les éléments E_ω, E_{s_0}.

L'élément de longueur nulle ω s'écrit $\omega = s_2 s_1 x_1 \in W_0.X$, donc

$$\mathrm{E}_\omega = q^{-1}S_2S_1\theta_{x_1} = q^{-1}S_2S_1qS_1^{-1}S_2^{-1}\Omega = \Omega.$$

L'élément s_0 de longueur 1 se décompose $s_0 = \omega s_1 \omega^{-1} = s_2 s_1 s_2\, x_1 x_3^{-1} \in W_0.X$, donc

$$\mathrm{E}_{s_0} = q^{-1}S_2S_1S_1\theta_{x_1}\theta_{x_3}^{-1} = qS_0^{-1} = S_0 + 1 - q.$$

Dans tous ces cas l'élément E_* appartient en fait à la $\mathbb{Z}[q]$-algèbre H.

Notation 4.2.6. Pour $I \subset \{1,2,3\}$, on désignera l'élément E_{x_I} par E_I. Par exemple, $\mathrm{E}_{\{1,2,3\}}$ est égal à l'élément central inversible Ω^3.

Le résultat suivant est un cas particulier de [**44**, Théorème 1].

Théorème 4.2.7. *1) L'ensemble $\{\mathrm{E}_w\}_{w\in\tilde{W}}$ constitue une base de la $\mathbb{Z}[q]$-algèbre H.*

2) L'ensemble $\{\mathrm{E}_x\}_{x\in\tilde{X}}$ est une base de la $\mathbb{Z}[q]$-algèbre $\mathcal{A} = H \cap \mathcal{A}[q^{\pm 1/2}]$. De plus, un système générateur de $\mathcal{A}$ est donné par

$$\mathrm{E}_{\{1,2,3\}}^{\pm 1},\ \mathrm{E}_I,\ \ \textit{pour}\ \emptyset \subset I \subset \{1,2,3\}$$

avec les relations : pour $I, J \subset \{1,2,3\}$,

$$(\mathcal{R}_0)\ \ \mathrm{E}_I\mathrm{E}_J = q^{(|I\cup J|-|I|)(|I\cup J|-|J|)}\mathrm{E}_{I\cap J}\mathrm{E}_{I\cup J}.$$

3) Le centre de H est la $\mathbb{Z}[q]$-algèbre de type fini

$$\mathbb{Z}[q][\,\Omega^{\pm 3},\ Z_1,\ Z_2\,],$$

où $Z_1 = \mathrm{E}_{\{1\}} + \mathrm{E}_{\{2\}} + \mathrm{E}_{\{3\}}$, $Z_2 = \mathrm{E}_{\{1,2\}} + \mathrm{E}_{\{2,3\}} + \mathrm{E}_{\{1,3\}}$.

L'algèbre H est de type fini sur son centre.

On désignera par $\mathcal{A}_R$ la R-algèbre $\mathcal{A} \otimes_{\mathbb{Z}[q]} R$. La $\mathbb{Z}[q]$-algèbre $\mathcal{A}$ agit sur tout H_R-module *via* sa projection $\mathcal{A}_R$ dans H_R.

Remarque 4.2.8. Soit $\mathbf{1} \in \hat{T}_3(\mathbb{F}_q)$ le caractère trivial du tore fini. Si $R \supset \{\mu_{q-1}, (q-1)^{-1}\}$ alors dans l'identification $H_R \to \epsilon_{\mathbf{1}}\mathcal{H}_R^{(1)}$, l'élément E_w de la base de Bernstein de H_R que nous venons de définir s'envoie sur l'élément $\epsilon_{\mathbf{1}}E_w$, où E_w désigne l'élément de la base de Bernstein entière de la $\mathbb{Z}[q]$-algèbre de Hecke du pro-p-Iwahori $\mathcal{H}^{(1)}$ définie au précédent chapitre. La comparaison des exemples *3.2.8* et *4.2.5* illustre cette remarque.

En particulier, la R-algèbre $\mathcal{A}_R$ est isomorphe à la sous-algèbre commutative $\epsilon_{\mathbf{1}}\mathcal{A}_R^{(1)}$ de $\epsilon_{\mathbf{1}}\mathcal{H}_R^{(1)}$.

4.2.1.3. Relations de commutation dans H.— Pour tout $w \in \tilde{W}$, l'élément suivant appartient à H [**45**, Remarque 7] :

$$(\mathrm{T}_w)^* = q^{\ell(w)}(\mathrm{T}_w)^{-1},$$

où $(\mathrm{T}_w)^{-1}$ désigne l'élément inverse de T_w dans $H[q^{\pm 1/2}]$. En particulier $S_i^* = S_i + 1 - q$ pour $i \in \{0, 1, 2\}$.

Les relations de la présentation de Iwahori-Matsumoto assurent que l'application $S_1, S_2 \mapsto -1$, $\Omega \mapsto 1$ s'étend de façon unique en un morphisme de $\mathbb{Z}[q]$-algèbres $H \to \mathbb{Z}[q]$ que l'on note *sign*. On a alors un anti-automorphisme d'algèbres involutif $\iota : H \to H$ défini par

$$\iota(\mathrm{T}_w) = sign(\mathrm{T}_w)(\mathrm{T}_w)^*$$

pour $w \in \tilde{W}$ [**45**, Corollaire 2]. En particulier, $\iota(S_i) = -S_i^*$ pour $i \in \{0, 1, 2\}$.

Dans H, on dispose des "relations de Bernstein entières". Comme leurs analogues (78) et (79) pour l'algèbre de Hecke du pro-p-Iwahori que nous avons démontrées au paragraphe 3.4.4, elles s'obtiennent en étendant d'abord les scalaires à $\mathbb{Z}[q^{\pm 1/2}]$ puis en appliquant les relations de Bernstein dans $H[q^{\pm 1/2}]$ ([**29**, §5]). Soit $i \in \{1, 2\}$, $I \subset \{1, 2, 3\}$.

($\mathcal{B}_1$) Si $i \in I$, $i+1 \notin I$, alors $\mathrm{E}_I S_i = S_i^* \mathrm{E}_{I \cup \{i+1\} - \{i\}}$,

($\mathcal{B}_2$) Si $i \notin I$, $i+1 \in I$, alors $\mathrm{E}_I S_i^* = S_i \mathrm{E}_{I \cup \{i\} - \{i+1\}}$,

($\mathcal{B}_3$) Si i, $i+1 \notin I$, alors E_I et S_i commutent.

($\mathcal{B}_4$) Si i, $i+1 \in I$, alors E_I et S_i commutent.

Les relations suivantes sont les analogues des relations (82) et (83) du chapitre précédent. Soit $i \in \{1, 2\}$, $I \subset \{1, 2, 3\}$ avec $i+1 \in I$, $i \notin I$.

($\mathcal{R}_1$) $\mathrm{E}_{x_I s_i} S_i = \mathrm{E}_I$,

($\mathcal{R}_2$) $\mathrm{E}_{x_I s_i} \mathrm{E}_I = S_i \mathrm{E}_{I - \{i+1\}} \mathrm{E}_{I \cup \{i\}}$.

Nous voulons exhiber une symétrie dans l'expression des éléments générateurs de la $\mathbb{Z}[q]$-algèbre $\mathcal{A}$. Pour ce faire, on utilise les relations de commutation (102) et l'exemple *4.2.3*, et l'on obtient :

($\mathcal{R}_3$) $\mathrm{E}_{\{1\}} = S_1^* \Omega S_0^*$, $\mathrm{E}_{\{2\}} = S_2^* \Omega S_1$, $\mathrm{E}_{\{3\}} = S_0 \Omega S_2$;

($\mathcal{R}_3'$) $\mathrm{E}_{\{1,2\}} = S_2^* \Omega^2 S_0^*$, $\mathrm{E}_{\{2,3\}} = S_0 \Omega^2 S_1$, $\mathrm{E}_{\{1,3\}} = S_1^* \Omega^2 S_2$.

Notation 4.2.9. Nous adoptons la convention suivante, qui souligne la symétrie annoncée. Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on pose

$s_i := s_1$, $\mathrm{E}_{\{i\}} = \mathrm{E}_{\{1\}}$, $\mathrm{E}_{\{i,i+1\}} = \mathrm{E}_{\{1,2\}}$, si $i = 1 \mod 3$;
$s_i := s_2$, $\mathrm{E}_{\{i\}} = \mathrm{E}_{\{2\}}$, $\mathrm{E}_{\{i,i+1\}} = \mathrm{E}_{\{2,3\}}$, si $i = 2 \mod 3$;
$s_i := s_0$, $\mathrm{E}_{\{i\}} = \mathrm{E}_{\{3\}}$, $\mathrm{E}_{\{i,i+1\}} = \mathrm{E}_{\{3,1\}}$, si $i = 0 \mod 3$.

Les relations ($\mathcal{R}_3$) et ($\mathcal{R}_3'$) se traduisent alors de la façon suivante : pour tout $i \in \mathbb{Z}$,

($\mathcal{R}_3$) $\mathrm{E}_{\{i\}} = -\iota(\mathrm{E}_{s_i}) \Omega \mathrm{E}_{s_{i-1}}$,

$(\mathcal{R}_3')$ $\mathrm{E}_{\{i,i+1\}} = -\iota(\mathrm{E}_{s_{i+1}})\Omega^2\mathrm{E}_{s_{i-1}}$.

On a, pour finir, les relations suivantes. Pour tout $i \in \mathbb{Z}$,

$(\mathcal{R}_4)$ $\mathrm{E}_{s_i}\mathrm{E}_{\{i,i+1\}} = \Omega\mathrm{E}_{s_{i-1}}\mathrm{E}_{\{i+1\}}$.

Rappelons que $\mathrm{E}_{s_1} = S_1$, $\mathrm{E}_{s_2} = S_2$, $\mathrm{E}_{s_0} = S_0^*$, et montrons l'égalité $(\mathcal{R}_4)$ pour $i = 1$. D'après $(\mathcal{R}_0)$, $q\mathrm{E}_{\{1,2\}} = \mathrm{E}_{\{1\}}\mathrm{E}_{\{2\}}$. D'autre part, d'après $(\mathcal{R}_3)$, on a $\mathrm{E}_{s_1}\mathrm{E}_{\{1\}} = q\Omega\mathrm{E}_{s_0}$. D'où $q\mathrm{E}_{s_1}\mathrm{E}_{\{1,2\}} = q\Omega\mathrm{E}_{s_0}\mathrm{E}_{\{2\}}$, donc $\mathrm{E}_{s_1}\mathrm{E}_{\{1,2\}} = \Omega\mathrm{E}_{s_0}\mathrm{E}_{\{2\}}$. Les cas $i = 2$ et $i = 3$ se démontrent de la même façon.

4.2.1.4. Relèvement des $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractères de $\mathcal{A}$. — On appelle R-caractère de $\mathcal{A}$ un morphisme d'anneaux $\lambda : \mathcal{A} \to R$ tel que $\lambda(q) = q_R$. L'action naturelle de W_0 sur X fournit une action de W_0 sur $\mathcal{A}[q^{\pm 1/2}]$ qui stabilise $\mathcal{A}$. On en déduit une action de W_0 sur $\mathcal{A}$ et sur ses caractères.

Proposition 4.2.10. *Soit $\lambda : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{F}}_p$. Il existe $\lambda_0 : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{Z}}_p$ qui relève λ c'est à dire tel que $\lambda = r_p \circ \lambda_0$.*

Preuve de la proposition 4.2.10. — Soit $\lambda : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{F}}_p$. On note $z = \lambda(\Omega^3) \in \overline{\mathbb{F}}_p{}^*$ et $z_0 \in \overline{\mathbb{Z}}_p{}^*$ un relèvement de z. Dans chacun des cas suivants, nous donnons un caractère $\lambda_0 : \mathcal{A}[q^{\pm 1/2}] \to \overline{\mathbb{Q}}_p$ dont la restriction à $\mathcal{A}$ est à valeurs entières et relève λ. (Pour s'en assurer il suffit de vérifier que, pour tout $I \subset \{1, 2, 3\}$, $\lambda_0(E_I)$ appartient à $\overline{\mathbb{Z}}_p$ et que sa réduction modulo p est égale à $\lambda(E_I)$.)

– Lorsque λ est régulier, il existe $i \in \mathbb{N}$, $\epsilon \in \{1, -1\}$ tels que, avec la notation *4.2.9*,
$$\lambda(\mathrm{E}_{\{i\}}) = y \neq 0,\ \lambda(\mathrm{E}_{\{i,i+\epsilon\}}) = y' \neq 0.$$
Soient y_0 et $y_0' \in \overline{\mathbb{Z}}_p^*$ relevant respectivement y et y'. On définit $\lambda_0 : \mathcal{A}[q^{\pm 1/2}] \to \overline{\mathbb{Q}}_p$ par :
$$\lambda_0 : \theta_{x_i} \mapsto q^{-1}y_0,\ \theta_{x_{i+\epsilon}} \mapsto y_0'y_0^{-1},\ \theta_{x_{i-\epsilon}} \mapsto qz_0{y'}_0^{-1}\ .$$
– Lorsque λ est singulier, non supersingulier :

Premier cas : il existe $i \in \mathbb{N}$, tel que $\lambda(\mathrm{E}_{\{i\}}) = y \neq 0$. Soit $y_0 \in \overline{\mathbb{Z}}_p^*$ relevant y. On définit $\lambda_0 : \mathcal{A}[q^{\pm 1/2}] \to \overline{\mathbb{Q}}_p$ par :
$$\lambda_0 : \theta_{x_i} \mapsto q^{-1}y_0,\ \theta_{x_{i+1}} \mapsto q^{1/2},\ \theta_{x_{i-1}} \mapsto q^{1/2}z_0y_0^{-1}.$$
Deuxième cas : il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que $\lambda(\mathrm{E}_{\{i,i+1\}}) = y' \neq 0$. Soit $y_0' \in \overline{\mathbb{Z}}_p^*$ relevant y'. On définit $\lambda_0 : \mathcal{A}[q^{\pm 1/2}] \to \overline{\mathbb{Q}}_p$ par :
$$\lambda_0 : \theta_{x_i} \mapsto q^{-1/2},\ \theta_{x_{i+1}} \mapsto q^{-1/2}y_0',\ \theta_{x_{i-1}} \mapsto z_0{y'}_0^{-1}.$$
– Si λ est supersingulier. On définit $\lambda_0 : \mathcal{A}[q^{\pm 1/2}] \to \overline{\mathbb{Q}}_p$ par
$$\lambda_0 : \theta_{x_1} \mapsto 1,\ \theta_{x_2} \mapsto 1,\ \theta_{x_3} \mapsto z_0.$$
□

4.2.2. Modules standards pour l'anneau de Hecke-Iwahori de $\mathrm{GL}_3(F)$. — Soit un R-caractère $\lambda : \mathcal{A} \to R$.

Définition 4.2.11. *On appelle H_R-module standard induit par λ le H_R-module*

$$I(\lambda) = H_R \otimes_{\mathcal{A}} \lambda.$$

On note ϕ l'élément générateur $1 \otimes 1$ de $I(\lambda)$ et on l'appelle le générateur canonique.

4.2.2.1. Lien avec les modules standards pour l'anneau de Hecke du pro-p-Iwahori de $\mathrm{GL}_3(F)$.— Supposons que $R \supset \{\mu_{q-1}, (q-1)^{-1}\}$. Les remarques *4.2.2* et *4.2.8* disent que la R-algèbre $\epsilon_{\mathbf{1}}\mathcal{H}_R^{(1)}$ d'unité $\epsilon_{\mathbf{1}}$ est isomorphe à la R-algèbre H_R d'unité *via* l'identification : $\epsilon_{\mathbf{1}}E_w \mapsto \mathrm{E}_w$ pour tout $w \in \tilde{W}$. Dans cette identification, l'algèbre commutative $\epsilon_{\mathbf{1}}\mathcal{A}_R^{(1)}$ correspond à la R-algèbre $\mathcal{A}_R$:

$$\begin{array}{lcll} \epsilon_{\mathbf{1}}\mathcal{A}_R^{(1)} & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{A}_R & \\ \epsilon_{\mathbf{1}}T_t & \longmapsto & 1 & \text{pour tout } t \in T(\mathbb{F}_q) \\ \epsilon_{\mathbf{1}}E_x & \longmapsto & \mathrm{E}_x & \text{pour tout } x \in X. \end{array}$$

Ainsi le H_R-module standard induit par λ, de générateur canonique ϕ, a une structure de $\mathcal{H}_R^{(1)}$-module engendré par ϕ vérifiant $\epsilon_{\mathbf{1}}\phi = \phi$, et

$$\begin{cases} T_t\phi = \phi, \text{ pour tout } t \in T(\mathbb{F}_q) \\ E_x\phi = \lambda(\mathrm{E}_x)\phi, \text{ pour tout } x \in X. \end{cases}$$

On note $\lambda^{(1)} : \mathcal{A}^{(1)} \to R$ le R-caractère de $\mathcal{A}^{(1)}$ défini par

$$\lambda^{(1)}(T_t) := 1 \text{ pour tout } t \in T(\mathbb{F}_q), \ \lambda^{(1)}(E_x) := \lambda(\mathrm{E}_x), \text{ pour tout } x \in X.$$

Le H_R-module standard induit par λ a une structure de $\mathcal{H}_R^{(1)}$-module isomorphe au $\mathcal{H}_R^{(1)}$-module standard induit par $\lambda^{(1)}$. Les propriétés des $\mathcal{H}_R^{(1)}$-modules standards énoncées au chapitre précédent se transposent donc aux H_R-modules standards.

4.2.2.2. Lorsque $R = \overline{\mathbb{F}}_p$, on dira de λ et du $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module standard qu'il induit qu'ils sont *réguliers, resp. singuliers, resp. supersinguliers,* si $\lambda^{(1)}$ est régulier, resp. singulier, resp. supersingulier. On appellera *drapeau* de λ le drapeau de $\lambda^{(1)}$.

Lorsque $R = \overline{\mathbb{Q}}_p$, on dira de λ qu'il est *entier* si $\lambda(\mathcal{A}) \subset \overline{\mathbb{Z}}_p$, c'est à dire si $\lambda^{(1)}$ est entier. On notera $L(\lambda)$ le sous-$H_{\overline{\mathbb{Z}}_p}$-module de $I(\lambda)$ induit par ϕ. D'après la proposition 3.3.2, c'est une structure entière pour $I(\lambda)$, que l'on appelle la *structure entière canonique* de $I(\lambda)$.

Proposition 4.2.12. *Soit $\lambda : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{Q}}_p$ un caractère entier. Pour tout $w \in W_0$, le caractère $w.\lambda$ est entier et les $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules $L(\lambda) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_p} \overline{\mathbb{F}}_p$ et $L(w.\lambda) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_p} \overline{\mathbb{F}}_p$ ont la même semi-simplification.*

Démonstration. — Il est démontré dans [**29**, 2.3], à l'aide des polynômes de Kazhdan-Lusztig ([**22**, 5.9]), ou bien encore dans [**15**, proposition 1.5] que les $H_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$-modules standards induits par λ et $w.\lambda$ ont la même semi-simplification. Il est de plus classique d'établir que la semi-simplification de la réduction d'une structure entière d'un $H_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$-module ne dépend que de la semi-simplification de ce $H_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$-module.

□

Corollaire 4.2.13. *Soit $\lambda : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{F}}_p$. Supposons que les $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules standards induits par les conjugués de λ sont de dimension 6. Alors ils ont la même semi-simplification.*

Démonstration. — On se place sous les hypothèses du corollaire. Le caractère λ se relève en un caractère $\lambda_0 : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{Z}}_p$ comme on l'a vu par la proposition 4.2.10. Pour tout $w \in W_0$, le caractère $w.\lambda_0$ relève le caractère $w.\lambda$ conjugué de λ.
Le corollaire 3.3.8 dit que le $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module standard induit par λ est isomorphe à la réduction de la structure entière canonique du $H_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$-module standard induit par $\iota_{\overline{\mathbb{Q}}_p}\lambda_0$. D'après la proposition 4.2.12, il a donc la même semi-simplification que le $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module standard induit par $w.\lambda$.

□

4.2.3. Classification des $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules simples.— Soient $y, y \in \overline{\mathbb{F}}_p$, $z \in \overline{\mathbb{F}}_p{}^*$. On désigne par $\mu(z, y, y')$ le caractère du centre de $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ déterminé par :

$$\begin{array}{rccc} \mu(z,y,y') : & \Omega^3 & \longmapsto & z \\ & Z_1 & \longmapsto & y \\ & Z_2 & \longmapsto & y'. \end{array}$$

On dit de $\mu(z, y, y')$ qu'il est *régulier* si $yy' \neq 0$, *singulier* sinon. Dans le cas particulier où $(y, y') = (0, 0)$ on dit que $\mu(z, y, y')$ est *supersingulier.* Nous donnons maintenant une liste de $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules ayant un caractère central égal à $\mu(z, y, y')$. Pour décrire l'action de $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$, il suffit de définir les actions de S_1 et Ω car $\{S_1, \Omega^{\pm 1}\}$ est un système générateur de $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$.

$H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules de caractère central $\mu(z, y, y')$ régulier :

- $K_6(z, y, y')$ de base $\{u, \Omega u, \Omega^2 u, v, \Omega v, \Omega^2 v\}$ avec
$$S_1(u) = v,\ \ S_1(\Omega u) = yy'^{-1}\Omega^2 v,\ \ S_1(\Omega^2 u) = -\Omega^2 u,$$
$$S_1(v) = -v,\ \ S_1(\Omega v) = y'z^{-1}\Omega^2 u,\ \ \ S_1(\Omega^2 v) = -\Omega^2 v.$$

- $M_3(z, y, y')$ de base $\{u_1, \Omega u_1, \Omega^2 u_1\}$, avec $y'^2 = zy$.

  L'action de $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ est donnée par $S_1 u_1 = 0$, $S_1 \Omega u_1 = y'z^{-1}\Omega^2 u_1$, $S_1 \Omega^2 u_1 = -\Omega^2 u_1$.

  Si $y^3 = z$, alors $M_3(z, y, y')$ a pour sous-module le caractère de base $y^2 u_1 + y\Omega u_1 + \Omega^2 u_1$ suivant :
$$M_1(0, y) : \Omega \to y,\ S_1 \to 0.$$
  Le quotient obtenu est isomorphe à $M_2(y)$ de $\overline{\mathbb{F}}_p$-base $\{w_1, \Omega w_1\}$ déterminé par $S_1 w_1 = 0$, $S_1 \Omega w_1 = -yw_1 - \Omega w_1$, $\Omega^2 w_1 = -y^2 w_1 - y\Omega w_1$.

- $\tilde{M}_3(z,y,y')$ de $\overline{\mathbb{F}}_p$-base $\{\tilde{u}_1, \Omega\tilde{u}_1, \Omega^2\tilde{u}_1\}$ avec $y'^2 = zy$.

  L'action de $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ est donnée par $S_1\tilde{u}_1 = -\tilde{u}_1$, $S_1\Omega\tilde{u}_1 = -y'z^{-1}\Omega^2\tilde{u}_1$, $S_1\Omega^2\tilde{u}_1 = -\Omega^2\tilde{u}_1$.

  Si $y^3 = z$, alors $\tilde{M}_3(z,y,y')$ a pour sous-module le module $\tilde{M}_2(y)$ de $\overline{\mathbb{F}}_p$-base $\{\tilde{v}_1, \Omega\tilde{v}_1\}$ avec $\tilde{v}_1 = y^2\tilde{u}_1 - y\Omega\tilde{u}_1$ et $S_1\tilde{v}_1 = -\tilde{v}_1 - y^{-1}\Omega\tilde{v}_1$, $S_1\Omega\tilde{v}_1 = 0\ \Omega^2\tilde{v}_1 = -y^2\tilde{v}_1 - y\Omega\tilde{v}_1$.
  Le quotient obtenu est le caractère
  $$M_1(-1,y) : \Omega \to y,\ S_1 \to -1.$$

- $N_3(z,y,y')$ de $\overline{\mathbb{F}}_p$-base $\{u_2, \Omega u_2, \Omega^2 u_2\}$, avec $y' = y^2$.

  L'action de $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-est donnée par $S_1 u_2 = yz^{-1}\Omega^2 u_2$, $S_1\Omega u_2 = 0$, $S_1\Omega^2 u_2 = -\Omega^2 u_2$.

  Si $y^3 = z$, alors $N_3(z,y,y')$ a pour sous-module le caractère $M_1(0,y)$ de base $y^2u_2 + y\Omega u_2 + \Omega^2 u_2$. Le quotient obtenu est isomorphe à $\tilde{M}_2(y)$.

- $\tilde{N}_3(z,y,y')$ de $\overline{\mathbb{F}}_p$-base $\{\tilde{u}_2, \Omega\tilde{u}_2, \Omega^2\tilde{u}_2\}$ avec $y' = y^2$.

  L'action de $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ est donnée par $S_1\tilde{u}_2 = -yz^{-1}\Omega^2\tilde{u}_2$, $S_1\Omega\tilde{u}_2 = -\Omega\tilde{u}_2$, $S_1\Omega^2\tilde{u}_2 = -\Omega^2\tilde{u}_2$.

  Si $y^3 = z$, alors $\tilde{N}_3(z,y,y')$ a pour sous-module est le $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module de $\overline{\mathbb{F}}_p$-base $\{\tilde{v}_2, \Omega\tilde{v}_2\}$ avec $\tilde{v}_2 = y\Omega\tilde{u}_2 - \Omega^2\tilde{u}_2$ qui est isomorphe à $M_2(y)$. Le quotient obtenu est le caractère $M_1(-1,y)$.

$H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules de caractère central $\mu(z,y,y')$ singulier, non supersingulier :

- $L_6(z,y,0)$ de base $\{v, \Omega v, \Omega^2 v, w, \Omega w, \Omega^2 w\}$ avec $S_1 v = 0$, $S_1\Omega v = \Omega w$, $S_1\Omega^2 v = -\Omega^2 v$, $S_1(w) = yz^{-1}\Omega^2 v$, $S_1\Omega w = -\Omega w$, $S_1(\Omega^2 w) = -\Omega^2 w$.
- $\tilde{L}_6(z,0,y') = \{v, \Omega v, \Omega^2 v, w, \Omega w, \Omega^2 w\}$. $S_1(v) = w$, $S_1(\Omega v) = 0$, $S_1(\Omega^2 v) = -\Omega^2 v$, $S_1(w) = -w$, $S_1(\Omega w) = y'z^{-1}\Omega^2 v$, $S_1(\Omega^2 w) = -\Omega^2 w$.

$H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules de caractère central supersingulier $\mu(z,0,0)$:

- $P_3(z)$ a pour $\overline{\mathbb{F}}_p$-base $\{u, \Omega u, \Omega^2 u\}$. L'action de S_1 donnée par $S_1 u = S_1\Omega u = 0$, $S_1\Omega^2 u = -\Omega^2 u$.
- $\tilde{P}_3(z)$ a pour $\overline{\mathbb{F}}_p$-base $\{v, \Omega v, \Omega^2 v\}$. L'action de S_1 donnée par $S_1 v = -v$, $S_1\Omega v = 0$, $S_1\Omega^2 v = -\Omega^2 v$.

L'observation du caractère central et de la trace de l'action de S_1 montre que deux $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules de dimension 6, 3 ou 1 de la liste précédente ne sont pas isomorphes.
Soit $y \in \overline{\mathbb{F}}_p^*$. Remarquons qu'un élément du noyau de l'action de $S_1 + 1$ sur le $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module $M_2(y)$ est envoyé par Ω dans le noyau de l'action de S_1. En revanche, l'image par Ω du noyau de l'action de $S_1 + 1$ sur $\tilde{M}_2(y)$ n'est pas un espace propre pour l'action de S_1. Par conséquent, les $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules $M_2(y)$ et $\tilde{M}_2(y)$ ne sont pas isomorphes.

Théorème 4.2.14. *a) Soient $y, y' \in \overline{\mathbb{F}}_p$, $z \in \overline{\mathbb{F}}_p^{\,*}$. Un $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module simple ayant un caractère central égal à $\mu(z, y, y')$ est isomorphe à l'un des $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules de la liste suivante :*

$$M_1(0, y),\ M_1(-1, y),\ M_2(y),\ \tilde{M}_2(y) \text{ avec } y \neq 0,\ y' = y^2,\ z = y^3,$$
$$M_3(z, y, y'),\ \tilde{M}_3(z, y, y') \text{ avec } y \neq 0,\ y'^2 = zy,\ y' \neq y^2,$$
$$N_3(z, y, y'),\ \tilde{N}_3(z, y, y') \text{ avec } y \neq 0\ y'^2 \neq zy,\ y' = y^2,$$
$$K_6(z, y, y'), \text{ avec } yy' \neq 0\ y'^2 \neq zy,\ y' \neq y^2,$$
$$L_6(z, y, 0) \text{ avec } y \neq 0,\ \tilde{L}_6(z, 0, y') \text{ avec } y' \neq 0,$$
$$P_3(z),\ \tilde{P}_3(z).$$

Deux modules simples de cette liste ne sont pas isomorphes.

b) De plus, tout $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module irréductible M se relève : il existe un $H_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$-module irréductible M_0 admettant une structure entière L_0 telle que l'on a l'isomorphisme de $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules

$$M \simeq L_0 \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_p} \overline{\mathbb{F}}_p.$$

La suite de la section 4.2 est consacrée à la démonstration du théorème 4.2.14 : il s'agit de déterminer la semi-simplification des $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules standards.

4.2.4. Semi-simplification des $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules standards réguliers.—

Proposition 4.2.15. *Soit $\lambda : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{F}}_p$ un caractère régulier. Le $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module standard induit par λ est un $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel de dimension* 6.

Démonstration. — D'après le lemme 3.4.17, que l'on peut appliquer aux $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules standards du fait des observations du paragraphe 4.2.2.1, le $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel $I(\lambda)$ est engendré par l'ensemble

$$\{\phi,\ \Omega\phi,\ \Omega^2\phi,\ S_i\phi,\ \Omega S_i\phi,\ \Omega^2 S_i\phi,\ i \in \{0, 1, 2\}\}.$$

Puisque $\mathrm{E}_{s_1} = S_1$, $\mathrm{E}_{s_2} = S_2$, $\mathrm{E}_{s_0} = S_0 + 1 - q$, il est aussi engendré par

$$\{\phi,\ \Omega\phi,\ \Omega^2\phi,\ \mathrm{E}_{s_i}\phi,\ \Omega\mathrm{E}_{s_i}\phi,\ \Omega^2\mathrm{E}_{s_i}\phi,\ i \in \{0, 1, 2\}\}.$$

Premier cas : le support de λ est de la forme $\{\mathrm{E}_{\{i\}}, \mathrm{E}_{\{i,i+1\}}\}$, pour $i \in \mathbb{N}$, avec la convention adoptée par la notation *4.2.9*. On a

$$\mathrm{E}_{\{i\}}\phi = \lambda(\mathrm{E}_{\{i\}})\phi \neq 0,\ \mathrm{E}_{\{i,i+1\}}\phi = \lambda(\mathrm{E}_{\{i,i+1\}})\phi \neq 0.$$

On rappelle que $\mathrm{E}_{\{i\}} = -\iota(\mathrm{E}_{s_i})\Omega\mathrm{E}_{s_{i-1}}$ et $\mathrm{E}_{\{i,i+1\}} = -\iota(\mathrm{E}_{s_{i+1}})\Omega^2\mathrm{E}_{s_{i-1}}$: ce sont les relations $(\mathcal{R}_3)$ et $(\mathcal{R}_3')$. On en déduit que $\mathrm{E}_{s_{i+1}}\mathrm{E}_{\{i,i+1\}} = 0$ et $\mathrm{E}_{s_i}\mathrm{E}_{\{i\}} = 0$. Ainsi, $\mathrm{E}_{s_{i+1}}\phi = 0$ et $\mathrm{E}_{s_i}\phi = 0$. Par conséquent le $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel $I(\lambda)$ est engendré par l'ensemble $\{\phi, \Omega\phi,\ \Omega^2\phi,\ \mathrm{E}_{s_{i-1}}\phi,\ \Omega\mathrm{E}_{s_{i-1}}\phi,\ \Omega^2\mathrm{E}_{s_{i-1}}\phi\}$. Or on sait que $I(\lambda)$ est de dimension supérieure ou égale à 6 (corollaire 3.3.7), donc $I(\lambda)$ est le $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel de dimension 6 de base

$$\{\phi, \Omega\phi,\ \Omega^2\phi,\ \mathrm{E}_{s_{i-1}}\phi,\ \Omega\mathrm{E}_{s_{i-1}}\phi,\ \Omega^2\mathrm{E}_{s_{i-1}}\phi\}.$$

Deuxième cas : le support de λ est de la forme $\{\mathrm{E}_{\{i\}}, \mathrm{E}_{\{i,i-1\}}\}$, pour $i \in \mathbb{N}$, avec la convention adoptée par la notation *4.2.9*. De la même façon, les relations

$$\mathrm{E}_{s_i}\phi = 0 \text{ car } \mathrm{E}_{s_i}\mathrm{E}_i\phi = 0,\ \mathrm{E}_{s_{i+1}}\phi = \lambda(\mathrm{E}_{\{i-1,i\}})\lambda(\mathrm{E}_{\{i\}})^{-1}\Omega^{-1}\mathrm{E}_{s_{i-1}}\phi \text{ du fait de } (\mathcal{R}_4).$$

assurent que $I(\lambda)$ est le $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel de dimension 6 de base

$$\{\phi, \Omega\phi,\ \Omega^2\phi,\ \mathrm{E}_{s_{i-1}}\phi,\ \Omega\mathrm{E}_{s_{i-1}}\phi,\ \Omega^2\mathrm{E}_{s_{i-1}}\phi\}.$$

□

Théorème 4.2.16. *Soient $i, j \in \{1,2,3\}$, $i \neq j$. Soit $\lambda : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{F}}_p$ un caractère régulier de drapeau*

$$\emptyset \subsetneq \{i\} \subsetneq \{i,j\} \subsetneq \{1,2,3\}.$$

Notons y, y', z les éléments non nuls de $\overline{\mathbb{F}}_p$ tels que

$$\lambda(\mathrm{E}_{\{i\}}) = y,\ \ \lambda(\mathrm{E}_{\{i,j\}}) = y',\ \ \lambda(\Omega^3) = z.$$

- *Le $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module $I(\lambda)$ est irréductible si et seulement si*

$$zy'^{-1} \neq y'y^{-1} \text{ et } y'y^{-1} \neq y,$$

  auquel cas il est isomorphe au $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module $K_6(z,y,y')$.
- *Supposons que $zy'^{-1} = y'y^{-1}$ et $y'y^{-1} \neq y$.*
  Alors $I(\lambda)$ possède deux sous-quotients irréductibles non isomorphes. L'un est isomorphe à $M_3(z,y,y')$, l'autre à $\tilde{M}_3(z,y,y')$.
- *Supposons que $zy'^{-1} \neq y'y^{-1}$ et $y'y^{-1} = y$.*
  Alors $I(\lambda)$ possède deux sous-quotients irréductibles non isomorphes. L'un est isomorphe à $N_3(z,y,y')$, l'autre à $\tilde{N}_3(z,y,y')$.
- *Supposons que $y'y^{-1} = y$ et $zy'^{-1} = y'y^{-1}$. Alors $I(\lambda)$ admet quatre constituants irréductibles non-isomorphes : $M_1(0,y)$, $M_1(-1,y)$, $M_2(y)$, $\tilde{M}_2(y)$.*

Démonstration. — Supposons que le drapeau de λ est dominant,

$$\emptyset \subsetneq \{3\} \subsetneq \{2,3\} \subsetneq \{1,2,3\}.$$

Puisque la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ s'identifie avec la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre $\epsilon_{\mathbf{1}}\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ d'unité $\epsilon_{\mathbf{1}}$, le paragraphe 4.2.2.1 a montré que l'étude du $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module standard induit par λ se ramène à l'étude du $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module standard induit par le caractère $\lambda^{(1)} : \mathcal{A}^{(1)} \to \overline{\mathbb{F}}_p$ régulier de drapeau dominant défini par

$$\lambda^{(1)}(E_{\{3\}}) = y,\ \ \lambda^{(1)}(E_{\{2,3\}}) = y',\ \ \lambda^{(1)}(E_{\{1,2,3\}}) = z,\ \ \lambda^{(1)}(T_t) = 1\ \forall t \in T(\mathbb{F}_q),$$

et qui provient par la bijection (69) du caractère non ramifié $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \otimes \mathcal{X}_2 \otimes \mathcal{X}_3 : T(F) \to \overline{\mathbb{F}}_p{}^*$ défini par

$$\mathcal{X}_1(\pi) = zy'^{-1},\ \mathcal{X}_2(\pi) = y'y^{-1},\ \mathcal{X}_3(\pi) = y$$

(Voir le paragraphe 3.4.1.2). La semi-simplification du module standard induit par $\lambda^{(1)}$ est donnée par le paragraphe 3.4.5.5, selon que $\mathcal{X}_1(\pi)$, $\mathcal{X}_2(\pi)$ et $\mathcal{X}_3(\pi)$ sont des éléments distincts ou non. Pour retrouver les constituants irréductibles annoncés par le théorème il suffit de comparer le $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module $K_6(z,y,y')$ (respectivement $M_3(z,y,y')$, $\tilde{M}_3(z,y,y')$, $N_3(z,y,y')$, $\tilde{N}_3(z,y,y')$, $M_1(0,y)$, $M_2(y)$, $\tilde{M}_2(y)$, $M_1(-1,y)$) avec le $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module défini par les formules (92), (resp. (93), (94), (95), (96), (97), (98), (99), (100).) On a ainsi démontré le théorème pour λ de drapeau dominant.

Un conjugué de λ est régulier et induit un module standard de dimension 6 d'après la proposition 4.2.15. Par le corollaire 4.2.13, ce dernier a la même semi-simplification que le module standard induit par λ.
Le théorème est ainsi démontré car tout $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère régulier de $\mathcal{A}$ est dans l'orbite sous l'action de W_0 d'un caractère régulier de drapeau dominant.

□

Relèvement des $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules simples réguliers.
Soient $z, y, y' \in \overline{\mathbb{F}}_p^{\,*}$ et $\lambda : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{F}}_p$ le caractère régulier de drapeau dominant défini par

$$\lambda(\Omega^3) = z,\ \lambda(\mathrm{E}_{\{3\}}) = y,\ \lambda(\mathrm{E}_{\{2,3\}}) = y'.$$

Soient $z_0, y_0, y_0' \in \overline{\mathbb{Z}}_p^{\,*}$ relevant respectivement z, y, y'. D'après la preuve de la proposition 4.2.10, le caractère $\mathcal{A}[q^{\pm 1/2}] \to \overline{\mathbb{Q}}_p$ défini par

$$\theta_{x_1} \mapsto q z_0 {y'}_0^{-1},\ \theta_{x_2} \mapsto y_0' y_0^{-1},\ \theta_{x_3} \mapsto q^{-1} y_0$$

est entier et sa restriction $\lambda_0 : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{Z}}_p$ relève λ. Le $H_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$-module standard $I(\iota_{\overline{\mathbb{Q}}_p}\lambda_0)$ admet donc une structure entière canonique $L(\iota_{\overline{\mathbb{Q}}_p}\lambda_0)$ isomorphe au $H_{\overline{\mathbb{Z}}_p}$-module standard induit par λ_0 (proposition 4.2.15 et corollaire 3.3.8) et l'on a $L(\iota_{\overline{\mathbb{Q}}_p}\lambda) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_p} \overline{\mathbb{F}}_p \simeq I(\lambda)$.

Si $I(\lambda)$ est irréductible, alors $zy'^{-1} \neq y'y^{-1}$ et $y'y^{-1} \neq y$, d'après la condition d'irréductibilité du théorème 4.2.16. Dès lors, z_0, y_0, y_0' vérifient nécessairement les relations $\lambda_0(\theta_{x_1}) \neq q\lambda_0(\theta_{x_2})$, et $\lambda_0(\theta_{x_2}) \neq q\lambda_0(\theta_{x_3})$. D'après le critère d'irréductibilité pour les $H_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$-modules standards **[30]**, $I(\iota_{\overline{\mathbb{Q}}_p}\lambda_0)$ est alors irréductible et il relève le $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module standard irréductible $I(\lambda)$.
Si $I(\lambda)$ admet deux constituants irréductibles respectivement isomorphes à $N_3(z, y, y')$ et $\tilde{N}_3(z, y, y')$, alors, d'après le théorème 4.2.16, c'est que l'on a $zy'^{-1} \neq y'y^{-1}$ et $y'y^{-1} = y$. On peut choisir z_0, y_0, y_0' tels que $\lambda_0(\theta_{x_1}) \neq q\lambda_0(\theta_{x_2})$ et $\lambda_0(\theta_{x_2}) = q\lambda_0(\theta_{x_3})$. Dans ce cas $I(\iota_{\overline{\mathbb{Q}}_p}\lambda_0)$ admet, d'après **[30]**, deux constituants irréductibles, qui relèvent dès lors respectivement $N_3(z, y, y')$ et $\tilde{N}_3(z, y, y')$.
Le cas où $I(\lambda)$ admet deux constituants irréductibles respectivement isomorphes à $M_3(z, y, y')$ et $\tilde{M}_3(z, y, y')$ est traité de même.

Enfin, si $I(\lambda)$ admet quatre constituants irréductibles, alors, d'après le théorème 4.2.16, on peut choisir z, y_0, y_0' tels que $\lambda_0(\theta_{x_1}) = q\lambda_0(\theta_{x_2})$ et $\lambda_0(\theta_{x_2}) = q\lambda_0(\theta_{x_3})$. Dans ce cas $I(\iota_{\overline{\mathbb{Q}}_p}\lambda_0)$ admet, d'après **[30]** également quatre constituants irréductibles, qui relèvent respectivement $M_1(0, y)$, $M_1(-1, y)$, $M_2(y)$, $\tilde{M}_2(y)$.

4.2.5. Semi-simplification des $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules standards singuliers, non supersingulier.— Soit $\lambda : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{F}}_p$ un caractère singulier non supersingulier. Soient $y, y', z \in \overline{\mathbb{F}}_p$ avec $z \neq 0$, $(y, y') \neq (0, 0)$, $yy' = 0$ tels que la restriction de λ au centre de H est définie par

$$\begin{array}{ccc} \Omega^3 & \longmapsto & z \\ Z_1 & \longmapsto & y \\ Z_2 & \longmapsto & y'. \end{array}$$

Proposition 4.2.17. *Le $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module standard $I(\lambda)$ est un $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel de dimension* 6.

Démonstration. — D'après le lemme 3.4.17, et par le même argument que pour la preuve de la proposition 4.2.15, le $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel $I(\lambda)$ est engendré par les éléments

$$\{\phi, \Omega\phi,\ \Omega^2\phi,\ \mathrm{E}_{s_i}\phi,\ \Omega\mathrm{E}_{s_i}\phi,\ \Omega^2\mathrm{E}_{s_i}\phi,\ i \in \{0,1,2\}\}.$$

– Supposons que $y \neq 0$. Cela signifie que le drapeau de λ est de la forme

$$\emptyset \subsetneq \{i\} \subsetneq \{1,2,3\}$$

pour $i \in \{1,2,3\}$. La relation $(\mathcal{R}_3)$ dit que $\mathrm{E}_{\{i\}} = -\iota(\mathrm{E}_{s_i})\Omega\mathrm{E}_{s_{i-1}}$. Elle donne donc $\mathrm{E}_{s_{i-1}}\phi \neq 0$ et permet aussi de remarquer que $\mathrm{E}_{s_i}\mathrm{E}_{\{i\}} = 0$ donc $\mathrm{E}_{s_i}\phi = 0$. La relation $(\mathcal{R}_4)$ quant à elle, dit que $\mathrm{E}_{s_{i-1}}\mathrm{E}_{\{i-1,i\}} = \Omega\mathrm{E}_{s_{i+1}}\mathrm{E}_{\{i\}}$. On en déduit que $\Omega\mathrm{E}_{s_{i+1}}\mathrm{E}_{\{i\}}\phi = 0$ et donc $\mathrm{E}_{s_{i+1}}\phi = 0$. Par conséquent, le $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel $I(\lambda)$ est engendré par les éléments

$$\{\phi, \Omega\phi,\ \Omega^2\phi,\ \mathrm{E}_{s_{i-1}}\phi,\ \Omega\mathrm{E}_{s_{i-1}}\phi,\ \Omega^2\mathrm{E}_{s_{i-1}}\phi\}.$$

Or on sait qu'il est de dimension supérieure ou égale à 6 (corollaire 3.3.7), donc cet ensemble en est une base.

– Si $y = 0$ et $y' \neq 0$, cela signifie qu'il existe $i \in \{1,2,3\}$ tel que $\lambda(\mathrm{E}_{\{i,i+1\}}) \neq 0$. La relation $(\mathcal{R}'_3)$ dit que $\mathrm{E}_{\{i,i+1\}} = \iota(\mathrm{E}_{s_{i+1}})\Omega^2\mathrm{E}_{s_{i-1}}$. Elle donne donc $\mathrm{E}_{s_{i-1}}\phi \neq 0$ et permet de remarquer que $\mathrm{E}_{s_{i+1}}\mathrm{E}_{\{i,i+1\}} = 0$, d'où $\mathrm{E}_{s_{i+1}}\phi = 0$. Enfin, la relation $(\mathcal{R}_4)$ dit que $\mathrm{E}_{s_i}\mathrm{E}_{\{i,i+1\}} = \Omega\mathrm{E}_{s_{i-1}}\mathrm{E}_{\{i+1\}}$ de sorte que $\mathrm{E}_{s_i}\mathrm{E}_{\{i,i+1\}}\phi = 0$ d'où $\mathrm{E}_{s_i}\phi = 0$.
Ainsi, $I(\lambda)$ est un $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel de dimension 6 de base

$$\{\phi, \Omega\phi,\ \Omega^2\phi,\ \mathrm{E}_{s_{i-1}}\phi,\ \Omega\mathrm{E}_{s_{i-1}}\phi,\ \Omega^2\mathrm{E}_{s_{i-1}}\phi\}.$$

□

Théorème 4.2.18. *Le $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module standard induit par λ est irréductible. Il est isomorphe à $L_6(z,y,0)$ si $y \neq 0$, à $\tilde{L}_6(z,0,y')$ si $y' \neq 0$.*

Démonstration. — Nous montrons le théorème 4.2.18 dans le cas où le drapeau de λ est dominant. Comme dans la preuve du théorème 4.2.16, le cas général s'en déduit grâce au corollaire 4.2.13.

Soit M un sous-$H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module propre de $I(\lambda)$. Supposons que S_1 agit par zéro sur M. Dès lors $S_0 = \Omega S_1 \Omega^{-1}$ et $S_2^{-1} = \Omega^{-1} S_1 \Omega$ agissent également par zéro sur M et, d'après les relations $(\mathcal{R}_3)$, et $(\mathcal{R}'_3)$, les éléments centraux Z_1, et Z_2 agissent alors sur tout élément $m \in M$ par

$$Z_1 m = (\Omega S_2^* S_0^* + \Omega S_0^* S_1 + \Omega S_1 S_2)m = \Omega m,$$
$$Z_2 m = (\Omega^2 S_1^* S_0^* + \Omega^2 S_2 S_1 + \Omega^2 S_0^* S_2)m = \Omega^2 m,$$

ce qui, puisque M est non nul, est en contradiction avec le fait que $I(\lambda)$ admet un caractère central singulier. Par conséquent, M n'est pas inclus dans le noyau de l'action de S_1 et, puisque $(S_1+1)S_1 = 0$, il existe un élément non nul $m \in M$, appartenant au noyau de l'action de $S_1 + 1$.

Premier cas : le drapeau de λ est $\emptyset \subsetneq \{3\} \subsetneq \{1,2,3\}$. Cela signifie que $y \neq 0$. D'après la preuve de la proposition 4.2.17, une $\overline{\mathbb{F}}_p$-base de $I(\lambda)$ est donnée par $\{\phi, \Omega\phi,\ \Omega^2\phi,\ S_2\phi,\ \Omega S_2\phi,\ \Omega^2 S_2\phi\}$. De plus on y a vu que $S_0^*\phi = \mathrm{E}_{s_0}\phi = 0$ et $S_1\phi = \mathrm{E}_{s_1}\phi = 0$. On vérifie alors à l'aide des relations $(\mathcal{R}_3)$

et $(\mathcal{R}'_3)$ que le $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module $I(\lambda)$ est isomorphe à $L_6(z,y,0)$ *via* l'identification $v \mapsto \phi$, $w \mapsto S_2\phi$. En effet on a

- $S_1.\phi = 0$,
- $S_1.\Omega\phi = \Omega S_2\phi$,
- $S_1.\Omega^2\phi = \Omega^2 S_0\phi = -\Omega^2\phi$,
- $\mathrm{E}_{\{3\}} = \Omega S_1 S_2$ donc $S_1.S_2\phi = z^{-1}y\Omega^2\phi$,
- $S_1.\Omega S_2\phi = \Omega S_2^2\phi = -\Omega S_2\phi$,
- $\mathrm{E}_{\{1,3\}} = S_1^*\Omega^2 S_2$ donc $0 = S_1^*\Omega^2 S_2\phi$ et $S_1.\Omega^2 S_2\phi = -\Omega^2 S_2\phi$

L'élément non nul $m \in M$, appartenant au noyau de l'action de $S_1 + 1$, s'écrit

$$m = \alpha\Omega^2\phi + \beta\Omega S_2\phi + \gamma\Omega^2 S_2\phi$$

avec $\alpha, \beta, \gamma \in \overline{\mathbb{F}}_p$. On a alors $\Omega S_1\Omega.m = z(-\beta S_2\phi + \gamma y\phi) \in M$, et $S_1(\Omega S_1\Omega.m) = -\beta y\Omega^2\phi \in M$. Or ϕ engendre le $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module $I(\lambda)$. Donc, si β était non nul, M ne serait pas un sous-module propre de $I(\lambda)$. Donc $\beta = 0$. De même, on a alors $\gamma = 0$, et $\alpha = 0$, et $m = 0$.
Par conséquent $I(\lambda)$ est un $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module irréductible.

Deuxième cas : le drapeau de λ est $\emptyset \subsetneq \{2,3\} \subsetneq \{1,2,3\}$. Cela signifie que $y' \neq 0$. D'après la preuve de la proposition 4.2.17, une $\overline{\mathbb{F}}_p$-base de $I(\lambda)$ est donnée par $\{\phi, \Omega\phi, \Omega^2\phi, S_1\phi, \Omega S_1\phi, \Omega^2 S_1\phi\}$ et l'on a $S_0\phi = -\phi$, $S_2\phi = 0$. On vérifie alors à l'aide des relations $(\mathcal{R}_3)$ et $(\mathcal{R}'_3)$ que le $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module $I(\lambda)$ est isomorphe à $\tilde{L}_6(z,0,y')$ *via* l'identification $v \mapsto \phi$, $w \mapsto S_1\phi$. En effet, on a

- $S_1.\phi = S_1\phi$,
- $S_1\Omega\phi = \Omega S_2\phi = 0$,
- $S_1\Omega^2\phi = \Omega^2 S_0\phi = -\Omega^2\phi$,
- $S_1.S_1\phi = -S_1\phi$,
- $\mathrm{E}_{\{2,3\}} = \Omega^2 S_2 S_1$ donc $S_1.\Omega S_1\phi = \Omega S_2 S_1 = z^{-1}y'\Omega^2\phi$,
- $\mathrm{E}_{\{2\}} = S_2^*\Omega S_1$ donc $S_2^*\Omega S_1\phi = 0$ et $S_1.\Omega^2 S_1\phi = \Omega S_2\Omega S_1\phi = -\Omega^2 S_1\phi$.

L'élément $m \neq 0$, $m \in M$ non nul appartenant au noyau de l'action de $S_1 + 1$, s'écrit

$$m = \alpha\Omega^2\phi + \beta S_1\phi + \gamma\Omega^2 S_1\phi$$

avec $\alpha, \beta, \gamma \in \overline{\mathbb{F}}_p$. De plus, on a $S_1\Omega^2.m = -\beta\Omega^2 S_1\phi + \gamma y'\Omega^2\phi \in M$, et $(S_1\Omega^2)^2.m = -\beta y'\Omega^2\phi \in M$. Or ϕ engendre le $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module $I(\lambda)$. Donc, $\beta = 0$, puis $\gamma = 0$, et $\alpha = 0$.
Par conséquent $I(\lambda)$ est un $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module irréductible. □

Relèvement des $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules standards singuliers, non-supersinguliers.

Soit $\lambda : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{F}}_p$ un caractère singulier non-supersingulier. Soit $\lambda_0 : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{Z}}_p$ le relèvement de λ donné dans la preuve de la proposition 4.2.10. Puisque le module standard induit par λ est de dimension 6, le corollaire 3.3.8 dit que le $H_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$-module standard induit par $\iota_{\overline{\mathbb{Q}}_p}\lambda_0$ admet une structure entière canonique $L(\iota_{\overline{\mathbb{Q}}_p}\lambda_0)$ isomorphe au $H_{\overline{\mathbb{Z}}_p}$-module standard induit par λ et l'on a $L(\iota_{\overline{\mathbb{Q}}_p}\lambda_0) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_p} \overline{\mathbb{F}}_p \simeq I(\lambda)$.
Le critère d'irréductibilité des $H_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$-modules standards **[30]** nous assure que le $H_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$-module standard $I(\iota_{\overline{\mathbb{Q}}_p}\lambda_0)$ est irréductible.
Ainsi, le $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module standard irréductible $I(\lambda)$ se relève : il est isomorphe à la réduction de la structure entière canonique du $H_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$-module irréductible $I(\iota_{\overline{\mathbb{Q}}_p}\lambda_0)$.

4.2.6. Semi-simplification des modules standards supersinguliers.— Soit $\lambda : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{F}}_p$ un caractère supersingulier. Il est entièrement déterminé par sa valeur $z \in \overline{\mathbb{F}}_p{}^*$ en l'élément central inversible Ω^3. Nous allons démontrer le théorème suivant.

Théorème 4.2.19. *Il existe un morphisme de $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules défini par*

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{P}: & I(\lambda) & \longrightarrow & I(\lambda) \\ & \phi & \longmapsto & (1+S_1+S_2)\phi. \end{array}$$

où ϕ désigne le générateur canonique du $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module standard $I(\lambda)$. C'est un projecteur et le $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module $I(\lambda)$ se décompose en la somme directe de $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules

$$I(\lambda) = Im\mathcal{P} \oplus Ker\mathcal{P}.$$

Le $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module $Im\mathcal{P}$ indécomposable de longueur 2 : on a la suite exacte de $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules

$$0 \to \tilde{P}_3(z) \longrightarrow Im(\mathcal{P}) \longrightarrow P_3(z) \longrightarrow 0$$

et $Ker\mathcal{P}$ est un $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module isomorphe à la somme directe $\tilde{P}_3(z) \oplus \tilde{P}_3(z)$.

Corollaire 4.2.20. *Le $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module standard $I(\lambda)$ est de dimension 12.*

Corollaire 4.2.21. *Soit $\lambda_0 : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{Z}}_p$ un caractère de réduction égale à λ. La partie libre $\mathcal{L}(\lambda_0)$ du module standard induit par λ_0 est un $\overline{\mathbb{Z}}_p$-module libre de rang 6 et la réduction du $\overline{\mathbb{Z}}_p$-module de torsion $\mathcal{T}(\lambda) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_p} \overline{\mathbb{F}}_p$ est un $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel de dimension 6.*

4.2.6.1. On désigne par $I(\lambda)_\lambda$ le sous-espace vectoriel de $I(\lambda)$ λ-isotypique :

$$I(\lambda)_\lambda = \{v \in I(\lambda),\ \mathrm{E}_x.v = \lambda(\mathrm{E}_x)v\ \forall x \in X\}.$$

Lemme 4.2.22. *Le sous-espace vectoriel $I(\lambda)_\lambda$ est stable sous l'action de l'algèbre de Hecke finie de générateurs $\{S_1, S_2\}$.*

Démonstration. — Cela tient aux relations de Bernstein entières. La $\mathbb{Z}[q]$-algèbre $\mathcal{A}$ est engendrée par les éléments $\Omega^{\pm 3}$ et E_I, pour $I \subset \{1,2,3\}$ donc un élément appartient au sous-espace vectoriel λ-isotypique si et seulement si son image sous l'action de E_I est nulle pour tout $I \subsetneq \{1,2,3\}$. Soient v un élément de $I(\lambda)_\lambda$, $i \in \{1,2\}$ et $I \subsetneq \{1,2,3\}$.

– Si $i \in I$, $i+1 \notin I$, alors $E_I S_i v = S_i^* E_{I\cup\{i+1\}-\{i\}} v = 0$, d'après la relation $(\mathcal{B}_1)$.
– Si $i \notin I$, $i \in I$, alors $E_I S_i v = S_i E_{I\cup\{i\}-\{i+1\}} v - E_I v = 0$, d'après la relation $(\mathcal{B}_2)$.
– Dans les autres cas, S_i et E_I commutent donc $E_I S_i v = 0$ d'après les relations $(\mathcal{B}_3)$ et $(\mathcal{B}_4)$.

Donc $S_i v$ appartient au sous-espace λ-isotypique.

□

4.2.6.2. Soit $\epsilon \in \{-1, 1\}$. Nous définissons un relèvement de λ noté λ_ϵ. Soit $z_0 \in \overline{\mathbb{Z}}_p{}^*$ relevant z. On vérifie aisément que le caractère de $\mathcal{A}[q^{\pm 1/2}]$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$ défini par

$$\theta_{x_1} \mapsto 1,\ \theta_{x_2} \mapsto q^{\epsilon/2},\ \theta_{x_3} \mapsto z_0 q^{-\epsilon/2}$$

est entier et que sa restriction $\lambda_\epsilon : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{Z}}_p$ relève λ.

Nous noterons ϕ_ϵ le générateur canonique du $H_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$-module standard induit par $\iota_{\overline{\mathbb{Q}}_p}\lambda_\epsilon$. On rappelle que le sous-$H_{\overline{\mathbb{Z}}_p}$-module qu'il engendre est la structure entière canonique $L(\iota_{\overline{\mathbb{Q}}_p}\lambda_\epsilon)$. On notera $\bar{\phi}_\epsilon$ son image dans la réduction modulo p de cette structure entière.

Lemme 4.2.23. *Supposons que $\epsilon = 1$. La réduction modulo p de la structure entière canonique $L(\iota_{\overline{\mathbb{Q}}_p}\lambda_1)$ est le $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel de base*

$$\{\bar{\phi}_1,\ \Omega\bar{\phi}_1,\ \Omega^2\bar{\phi}_1, S_2\bar{\phi}_1,\ \Omega S_2\bar{\phi}_1,\ \Omega^2 S_2\bar{\phi}_1\}.$$

L'action de $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ y est donnée par

$$S_1.\bar{\phi}_1 = 0, \quad S_1.\Omega\bar{\phi}_1 = \Omega S_2\bar{\phi}_1, \quad S_1.\Omega^2\bar{\phi}_1 = -\Omega^2\bar{\phi}_1,$$

$$S_1.S_2\bar{\phi}_1 = 0, \quad S_1.\Omega S_2\bar{\phi}_1 = -\Omega S_2\bar{\phi}_1,\ S_1.\Omega^2 S_2\bar{\phi}_1 = -\Omega^2 S_2\bar{\phi}_1$$

et l'élément central Ω^3 agit par le scalaire z.

Supposons que $\epsilon = -1$. La réduction modulo p de la structure entière canonique $L(\iota_{\overline{\mathbb{Q}}_p}\lambda_{-1})$ est le $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel de base

$$\{\bar{\phi}_{-1},\ \Omega\bar{\phi}_{-1},\ \Omega^2\bar{\phi}_{-1}, S_1\bar{\phi}_{-1},\ \Omega S_1\bar{\phi}_{-1},\ \Omega^2 S_1\bar{\phi}_{-1}\}.$$

L'action de $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ y est donnée par

$$S_1.\bar{\phi}_{-1} = S_1\bar{\phi}_{-1}, \quad S_1.\Omega\bar{\phi}_{-1} = 0, \quad S_1.\Omega^2\bar{\phi}_{-1} = -\Omega^2\bar{\phi}_{-1} + \Omega S_1\bar{\phi}_{-1},$$

$$S_1.S_1\bar{\phi}_{-1} = -S_1\bar{\phi}_{-1}, \quad S_1.\Omega S_1\bar{\phi}_{-1} = 0,\ S_1.\Omega^2 S_1\bar{\phi}_{-1} = -\Omega^2 S_1\bar{\phi}_{-1}$$

et l'élément central Ω^3 agit par le scalaire z.

Nous démontrons ce lemme au paragraphe 4.2.6.4.

Notation 4.2.24. L'élément $\bar{\phi}_\epsilon$ est propre pour $\mathcal{A}$ pour le caractère λ. On a donc un morphisme surjectif de $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules

$$\begin{array}{rccc} j_\epsilon : & I(\lambda) & \twoheadrightarrow & L(\iota_{\overline{\mathbb{Q}}_p}\lambda_\epsilon) \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_p} \overline{\mathbb{F}}_p \\ & \phi & \mapsto & \bar{\phi}_\epsilon. \end{array}$$

4.2.6.3. Preuve du théorème 4.2.19. — Tout d'abord nous remarquons que des calculs élémentaires permettent aisément de s'assurer que les $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules $P_3(z)$ et $\tilde{P}_3(z)$ sont irréductibles.

Dans le module standard induit par λ, on a, d'après les relations $(\mathcal{R}_3)$ et $(\mathcal{R}'_3)$

$$\left\{\begin{array}{l} E_{\{1\}}\phi = S_1^*S_2^*\Omega\phi = 0 \\ E_{\{2\}}\phi = S_2^*\Omega S_1\phi = 0 \\ E_{\{3\}}\phi = \Omega S_1S_2\phi = 0 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} E_{\{1,2\}}\phi = S_2^*S_1^*\Omega^2\phi = 0 \\ E_{\{1,3\}}\phi = S_1^*\Omega^2S_2\phi = 0 \\ E_{\{2,3\}}\phi = \Omega^2S_2S_1\phi = 0 \end{array}\right. \tag{103}$$

D'après le lemme 4.2.22, le morphisme de $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules $\mathcal{P}$ est bien défini par

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{P}: & I(\lambda) & \longrightarrow & I(\lambda) \\ & \phi & \longmapsto & (1+S_1+S_2)\phi \end{array}$$

Pour vérifier que c'est un projecteur il suffit de s'assurer que $\mathcal{P}^2(\phi) = \mathcal{P}(\phi)$. Or, d'après les relations (103), $S_1S_2\phi = S_2S_1\phi = 0$. D'où,

$$\mathcal{P}^2(\phi) = (1+S_1+S_2)(1+S_1+S_2)\phi = (1+S_1+S_2+S_1S_2+S_2S_1)\phi = (1+S_1+S_2)\phi = \mathcal{P}(\phi)$$

et l'on a bien la décomposition en somme directe de $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules

$$I(\lambda) = Im\mathcal{P} \oplus Ker\mathcal{P}.$$

Le projecteur $\mathcal{P}$ vérifie :

$$\mathcal{P}(S_1\phi) = S_1(1+S_1+S_2)\phi = 0,$$

$$\mathcal{P}(S_1\Omega\phi) = S_1\Omega(1+S_1+S_2)\phi = \Omega S_2(1+S_1+S_2)\phi = 0$$

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{P}((S_1+1)\Omega^2\phi) & = & (S_1+1)\Omega^2(1+S_1+S_2)\phi \\ & = & \Omega(1+S_2)\Omega(1+S_1+S_2)\phi \\ & = & \Omega(1+S_2)\Omega S_1\phi + \Omega(1+S_2)\Omega\phi + \Omega(1+S_2)\Omega S_2\phi \\ & = & \mathrm{E}_{s_2}^*\Omega\mathrm{E}_{s_1}\phi + (1+S_1)\Omega^2\phi + \mathrm{E}_{s_1}^*\Omega^2\mathrm{E}_{s_2}\phi \\ & = & \mathrm{E}_{\{2\}}\phi + (1+S_1)\Omega^2\phi + \mathrm{E}_{\{1,3\}}\phi \\ & = & 0 + (1+S_1)\Omega^2\phi + 0. \end{array}$$

D'après le lemme 3.4.17, le $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel $I(\lambda)$ est engendré par

$$\{\phi,\ \Omega\phi,\ \Omega^2\phi,\ S_i\phi,\ \Omega S_i\phi,\ \Omega^2S_i\phi,\ i\in\{0,1,2\}\} = \{\phi,\ \Omega\phi,\ \Omega^2\phi,\ \Omega^kS_1\Omega^l\phi,\ \ k,l\in\{0,1,2\}\}$$

ou encore par $\mathcal{S} = \mathcal{S}^1 \cup \mathcal{S}^2$ où

$$\mathcal{S}^1 = \{S_1\phi, \Omega S_1\phi, \Omega^2S_1\phi, S_1\Omega\phi, \Omega S_1\Omega\phi, \Omega^2S_1\Omega\phi\} \subset\ Ker\mathcal{P}, \ \text{ et}$$

$$\mathcal{S}^2 = \{\mathcal{P}(\phi), \Omega\mathcal{P}(\phi), \Omega^2\mathcal{P}(\phi), (S_1+1)\Omega^2\phi, \Omega(S_1+1)\Omega^2\phi, \Omega^2(S_1+1)\Omega^2\phi\} \subset\ Im\mathcal{P}.$$

On en déduit que les $\overline{\mathbb{F}}_p$-espaces vectoriels $Ker\mathcal{P}$ et $Im\mathcal{P}$ sont respectivement engendrés par $\mathcal{S}^1$ et $\mathcal{S}^2$.

Semi-simplification du $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module $Im\mathcal{P}$: On pose $u = (S_1+1)\Omega^2\phi$, $v = \mathcal{P}(\phi)$. Ce sont deux éléments non nuls de $I(\lambda)$. En effet, d'après le lemme 4.2.23, leurs images par j_{-1} sont non nulles. D'après les relations (103), on a dans $Im(\mathcal{P})$

$$\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl} S_1u & = & 0, & S_1v & = & 0, \\ S_1(\Omega u) & = & \Omega S_2(S_1+1)\Omega^2\phi = -\Omega u, & S_1(\Omega v) & = & 0, \\ S_1(\Omega^2 u) & = & \Omega^3 S_1(S_2+1)\Omega\phi = -\Omega^2 u, & S_1(\Omega^2 v) & = & u - \Omega^2 v. \end{array}$$

Donc le sous-module de $Im\mathcal{P}$ engendré par u est isomorphe au $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module irréductible $\tilde{P}_3(z)$ et le quotient de $Im\mathcal{P}$ par ce sous-module est isomorphe au $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module irréductible $P_3(z)$. En particulier, on en déduit que $Im\mathcal{P}$ est de dimension 6 et a pour $\overline{\mathbb{F}}_p$-base $\mathcal{S}^2$.

Montrons que $Im\mathcal{P}$ est indécomposable. Si $Im\mathcal{P}$ possédait un sous-$H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module isomorphe à $P_3(z)$, il possèderait un élément non nul appartenant annulé par S_1, $S_1\Omega$ et $(S_1+1)\Omega^2$. Or l'intersection de $Im\mathcal{P}$ avec le noyau de l'action de S_1 et celui de l'action de $S_1\Omega$ est égale à la droite dirigée par v mais v n'est pas annulé par $(S_1+1)\Omega^2$. Donc $Im\mathcal{P}$ est un $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module indécomposable et l'on a la suite exacte annoncée dans le théorème.

Semi-simplification de $Ker\mathcal{P}$: On s'attache maintenant à montrer que le système générateur $\mathcal{S}^1$ du $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel $Ker\mathcal{P}$ en est une base. Grâce aux relations (103), on a

$$\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl} S_1.S_1\phi & = & -S_1\phi, & S_1.\Omega S_1\Omega\phi & = & -\Omega S_1\Omega\phi, \\ S_1.\Omega S_1\phi & = & 0, & S_1.\Omega^2 S_1\Omega\phi & = & 0, \\ S_1.\Omega^2 S_1\phi & = & -\Omega^2 S_1\phi, & S_1.\Omega^3 S_1\Omega\phi & = & -\Omega^3 S_1\Omega\phi. \end{array}$$

Il apparaît donc que, s'ils sont non nuls, les sous-$H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules de $Ker\mathcal{P}$ engendrés respectivement par $S_1\phi$ et $\Omega S_1\Omega\phi$ sont isomorphes au $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module irréductible $\tilde{P}_3(z)$.

Soit une combinaison linéaire nulle des éléments de $\mathcal{S}^1$,

$$(C)\quad \alpha_1 S_1\phi + \alpha_2\Omega S_1\phi + \alpha_3\Omega^2 S_1\phi + \beta_1\Omega S_1\Omega\phi + \beta_2\Omega^2 S_1\Omega\phi + \beta_3\Omega^3 S_1\Omega\phi = 0.$$

Nous allons montrer que $0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3$.
En appliquant tour à tour l'action de $(S_1+1)\Omega$, S_1+1, et $(S_1+1)\Omega^2$, la combinaison linéaire (C) donne

$$(C_1)\ \alpha_1 S_1\phi + \beta_1\Omega S_1\Omega\phi = 0,\quad (C_2)\ \alpha_2\Omega S_1\phi + \beta_2\Omega^2 S_1\Omega\phi = 0\quad (C_3)\ \alpha_3\Omega^2 S_1\phi + \beta_3 z S_1\Omega\phi = 0.$$

D'après le lemme 4.2.23, l'image de la combinaison linéaire (C_1) (resp. (C_2) resp. (C_3)) par j_{-1} donne $\alpha_1 S_1\bar{\phi}_{-1} = 1$ (resp $\alpha_2\Omega S_1\bar{\phi}_{-1} = 0$, resp. $\alpha_3\Omega^2 S_1\bar{\phi}_{-1} = 0$) d'où, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

D'après le lemme 4.2.23, l'image de la combinaison linéaire (C_1) (resp. (C_2) resp. (C_3)) par j_1 donne alors $\beta_1\Omega S_1\Omega\bar{\phi}_1 = 0$ (resp $\beta_2\Omega^2 S_1\Omega\bar{\phi}_1 = 0$, resp. $\beta_3 S_1\Omega\bar{\phi}_1 = 0$) d'où, $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$.

Par conséquent le système $\mathcal{S}^1$ constitue une base du $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel du $Ker\mathcal{P}$. On a aisni montré que le $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module $Ker\mathcal{P}$ est isomorphe à la somme directe $\tilde{P}_3(z) \oplus \tilde{P}_3(z)$. Le théorème est démontré.

4.2.6.4. Preuve du lemme 4.2.23. — Dans $I(\iota_{\overline{\mathbb{Q}}_p}\lambda_\epsilon)$ de générateur canonique ϕ_ϵ, on a, d'après $(\mathcal{R}_3)$ et $(\mathcal{R}'_3)$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_{\{1\}}\phi_\epsilon &= S_1^*S_2^*\Omega\phi_\epsilon = q\phi_\epsilon, & \mathrm{E}_{\{1,2\}}\phi_\epsilon &= S_2^*S_1^*\Omega^2\phi_\epsilon = q^{1+\epsilon/2}\phi_\epsilon,\\
\mathrm{E}_{\{2\}}\phi_\epsilon &= S_2^*\Omega S_1\phi_\epsilon = q^{1+\epsilon/2}\phi_\epsilon, & \mathrm{E}_{\{1,3\}}\phi_\epsilon &= S_1^*\Omega^2S_2\phi_\epsilon = q^{1-\epsilon/2}z_0\phi_\epsilon,\\
\mathrm{E}_{\{3\}}\phi_\epsilon &= \Omega S_1S_2\phi_\epsilon = z_0q^{1-\epsilon/2}\phi_\epsilon, & \mathrm{E}_{\{2,3\}}\phi_\epsilon &= \Omega^2S_2S_1\phi_\epsilon = z_0q\phi_\epsilon.
\end{aligned}$$

On traite le cas $\epsilon = 1$. Vérifions à l'aide de ces relations que le $\overline{\mathbb{Z}}_p$-module engendré par $\{\phi_1, \Omega\phi_1, \Omega^2\phi_1, S_2\phi_1, \Omega S_2\phi_1, \Omega^2S_2\phi_1\}$ est stable sous l'action de $H_{\overline{\mathbb{Z}}_p}$. Pour ce faire il suffit de vérifier que ce $\overline{\mathbb{Z}}_p$-module est stable sous l'action de S_1 et $\Omega^{\pm1}$ qui engendrent $H_{\overline{\mathbb{Z}}_p}$. Pour l'action de $\Omega^{\pm1}$, cette assertion est claire car l'élément central Ω^3 agit par multiplication par le scalaire non nul z_0. Observons l'action de S_1.

- On a $S_1E_{\{1,3\}} = q\Omega^2S_2$, donc, dans le $H_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$-module standard induit par $\iota_{\overline{\mathbb{Q}}_p}\lambda_1$ qui est sans $\overline{\mathbb{Z}}_p$-torsion, $S_1.\phi_1 = q^{1/2}z_0^{-1}\Omega^2S_2\phi_1$.
- On a $S_1\Omega = \Omega S_2$, donc $S_1.\Omega\phi_1 = \Omega S_2\phi_1$.
- On a $S_1^*\Omega^2E_{\{3\}} = q\Omega^3S_2$, donc $S_1.\Omega^2\phi_1 = (q-1)\Omega^2\phi_1 + q^{1/2}S_2\phi_1$.
- On a $S_1.S_2 = \Omega^{-1}E_{\{3\}}$ donc $S_1.S_2\phi_1 = q^{1/2}\Omega^2\phi_1$.
- On a $S_1\Omega S_2 = (q-1)\Omega S_2 + q\Omega$ donc $S_1.\Omega S_2\phi_1 = (q-1)\Omega S_2\phi_1 + q\Omega\phi_1$.
- On a $S_1^*\Omega^2S_2 = E_{\{1,3\}}$ donc $S_1.\Omega^2S_2\phi_1 = (q-1)\Omega^2S_2\phi_1 + q^{1/2}z_0\phi_1$.

On a donc démontré que le $\overline{\mathbb{Z}}_p$-module engendré par $\{\phi_1, \Omega\phi_1, \Omega^2\phi_1, S_2\phi_1, \Omega S_2\phi_1, \Omega^2S_2\phi_1\}$ a une structure de $H_{\overline{\mathbb{Z}}_p}$-module. Puisqu'il engendré par le générateur canonique ϕ_ϵ, on en déduit grâce à la proposition 3.3.2 qu'il n'est autre que la structure entière canonique du $H_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$-module standard induit par $\iota_{\overline{\mathbb{Q}}_p}\lambda_1$. En particulier, c'est un $\overline{\mathbb{Z}}_p$-module libre de rang 6, et $\{\phi_1, \Omega\phi_1, \Omega^2\phi_1, S_2\phi_1, \Omega S_2\phi_1, \Omega^2S_2\phi_1\}$ en est une base.
Par réduction modulo p des relations ci-dessus, on en déduit la structure du $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module $L(\iota_{\overline{\mathbb{Q}}_p}\lambda_1)\otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_p}\overline{\mathbb{F}}_p$ annoncée par le lemme.

La cas $\epsilon = -1$ se traite de même, en vérifiant tout d'abord que le $\overline{\mathbb{Z}}_p$-module engendré par $\{\phi_{-1}, \Omega\phi_{-1}, \Omega^2\phi_{-1}, S_1\phi_{-1}, \Omega S_1\phi_{-1}, \Omega^2S_1\phi_{-1}\}$ est stable sous l'action de $H_{\overline{\mathbb{Z}}_p}$. On utilise les relations suivantes

- On a $S_1.\phi_{-1} = S_1\phi_{-1}$.
- On a $S_1\Omega E_{\{2\}} = q\Omega S_1$, donc $S_1.\Omega\phi_{-1} = q^{1/2}\Omega^2S_1\phi_{-1}$.
- On a $S_1^*\Omega^2E_{\{2,3\}} = q\Omega^3\Omega S_1$, donc $S_1.\Omega^2\phi_{-1} = (q-1)\Omega^2\phi_{-1} + \Omega S_1\phi_{-1}$.
- On a $S_1^2 = (q-1)S_1 + q$ donc $S_1.S_1\phi_{-1} = (q-1)S_1\phi_{-1} + q\phi_{-1}$.
- On a $S_1.\Omega S_1 = \Omega^{-1}E_{\{2,3\}}$ donc $S_1.\Omega S_1\phi_{-1} = q\Omega^2\phi_{-1}$.
- On a $S_1^*\Omega^2S_1 = \Omega E_{\{2\}}$ donc $S_1.\Omega^2S_1\phi_{-1} = (q-1)\Omega^2S_1\phi_1 + q^{1/2}z_0\Omega\phi_{-1}$.

4.2.6.5.

Proposition 4.2.25. *Soit $\lambda_0 : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{Z}}_p$ un caractère relevant λ. La réduction modulo p d'une structure entière du module standard induit par $\iota_{\overline{\mathbb{Q}}_p}\lambda_0$ admet deux constituants irréductibles respectivement isomorphes à $P_3(z)$ et $\tilde{P}_3(z)$.*

Démonstration. — Soit L une structure entière du module standard induit par $\iota_{\overline{\mathbb{Q}}_p}\lambda_0$. Tout constituant irréductible du $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module $L \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_p} \overline{\mathbb{F}}_p$ admet un caractère central supersingulier égal à $\mu(z,0,0)$. Par la propriété 4. des modules standards, on en déduit que les constituants irréductibles de $L \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_p} \overline{\mathbb{F}}_p$ sont des quotients du module standard supersingulier de caractère central $\mu(z,0,0)$: d'après le théorème 4.2.19, ce sont donc des copies de $P_3(z)$ et $\tilde{P}_3(z)$. Par argument de dimension, il y en a 2.

D'après le théorème de Bernstein, une base du $H_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$-module standard induit par $\iota_{\overline{\mathbb{Q}}_p}\lambda_0$, de générateur canonique ϕ_0, est donnée par $\{\phi_0, S_1\phi_0, S_2\phi_0, S_1S_2\phi_0, S_2S_1\phi_0, S_1S_2S_1\phi_0\}$. Puisque $S_1^2 = (q-1)S_1 + q$, la trace de l'action de S_1 sur le module standard induit par $\iota_{\overline{\mathbb{Q}}_p}\lambda_0$ est égale à $3(q-1)$. La trace de l'action de S_1 sur $L \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_p} \overline{\mathbb{F}}_p$ est donc égale à (-3). Par conséquent, les deux constituants irréductibles de $L \otimes_{\overline{\mathbb{Z}}_p} \overline{\mathbb{F}}_p$ sont respectivement isomorphes à $P_3(z)$ et $\tilde{P}_3(z)$. □

Montrons maintenant que tout $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module simple supersingulier se relève. On définit un $\overline{\mathbb{Q}}_p$-caractère de $\mathcal{A}[q^{\pm 1/2}]$ par

$$\theta_{x_1} \mapsto q^{-1/4},\ \theta_{x_2} \mapsto q^{3/4},\ \theta_{x_3} \mapsto z_0 q^{-1/2}.$$

Sa restriction à $\mathcal{A}$ est un caractère entier noté $\lambda_0 : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{Z}}_p$ et qui relève λ. D'après [**30**], le $H_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$-module standard induit par $\iota_{\overline{\mathbb{Q}}_p}\lambda_0$ est réductible car $q\lambda_0(\theta_{x_1}) = \lambda_0(\theta_{x_2})$. D'après la proposition précédente, il admet deux constituants irréductibles qui relèvent respectivement $P_3(z)$ et $\tilde{P}_3(z)$. Ainsi, tout $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module simple supersingulier se relève.

Remarque 4.2.26. On choisit le relèvement $\lambda_0 : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{Z}}_p$ de λ donné dans la preuve de la proposition 4.2.10. D'après le critère d'irréductibilité pour les $H_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$-modules standards ([**30**]), le $H_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$-module standard induit par $\iota_{\overline{\mathbb{Q}}_p}\lambda_0$ est irréductible et ne nous donne donc pas de relèvement pour les $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-modules simples supersinguliers.

4.3. Modules simples sur l'algèbre de Hecke régulière

On se donne R un anneau commutatif unitaire tel que $R \supset \{\mu_{q-1}, (q-1)^{-1}\}$ et l'on considère comme précemment R comme un $\mathbb{Z}[q]$-module *via* le morphisme d'anneaux unitaires défini par $q \mapsto q_R$ (voir la notation *4.2.1*).

Soit γ l'orbite sous l'action de W_0 d'un $\mathbb{F}_q$-caractère régulier du tore fini $T(\mathbb{F}_q)$. Rappelons qu'un $\mathbb{F}_q$-caractère du tore fini s'identifie avec un R-caractère du tore fini et l'on peut considérer σ_γ, la R-représentation de I triviale sur $I(1)$ donnée par $\underset{\chi\in\gamma}{\oplus}\chi$.

4.3.1. Présentation de $\mathcal{H}_R(G, \sigma_\gamma)$. — D'après la proposition 4.1.2, la R-algèbre de Hecke de σ_γ est isomorphe à la R-algèbre $\epsilon_\gamma \mathcal{H}_R^{(1)}$ d'unité ϵ_γ. Nous allons en donner une présentation.

Définition 4.3.1. *Soit $H(\gamma)$ la $\mathbb{Z}[q]$-algèbre de base $\{\mathrm{T}_w\epsilon_\chi\}_{w\in\tilde{W},\chi\in\gamma}$ avec les relations :*
(1) Pour χ, $\chi' \in \gamma$, $\chi \neq \chi'$, on a

$$\epsilon_\chi^2 = \epsilon_\chi,\ \epsilon_\chi\epsilon_{\chi'} = 0,\ \sum_{\chi\in\gamma}\epsilon_\chi = 1.$$

(2) Pour $w \in \tilde{W}$, $\chi \in \gamma$

$$\mathrm{T}_w\epsilon_\chi = \epsilon_{w\chi}\mathrm{T}_w.$$

(3) Pour w, $w' \in \tilde{W}$ tels que $\ell(ww') = \ell(w) + \ell(w')$, on a

$$\mathrm{T}_w\mathrm{T}_{w'} = \mathrm{T}_{ww'}.$$

(4) Pour $i \in \{0, 1, 2\}$, on a $\mathrm{T}_{s_i}^2 = q$.

On pose $H_R(\gamma) := H(\gamma) \otimes_{\mathbb{Z}[q]} R$.

D'après le théorème 3.2.5, la R-algèbre $\epsilon_\gamma\mathcal{H}_R^{(1)}$ d'unité ϵ_γ est isomorphe à la R-algèbre $H_R(\gamma)$ *via* l'identification $\epsilon_\gamma T_w \mapsto \mathrm{T}_w$ pour tout $w \in \tilde{W}$.

Remarque 4.3.2. Par définition des algèbres de Hecke, la R-algèbre de Hecke de σ_γ contient une sous-algèbre isomorphe au produit d'algèbres

$$\bigoplus_{\chi\in\gamma}\mathcal{H}_R(G, \chi) \hookrightarrow \mathcal{H}_R(G, \sigma_\gamma).$$

Par définition des idempotents ϵ_χ (§3.2.1.2) ce produit d'algèbres est isomorphe à la sous-algèbre

$$\bigoplus_{\chi\in\gamma}\epsilon_\chi H_R(\gamma)\epsilon_\chi \hookrightarrow H_R(\gamma)$$

de l'algèbre $H_R(\gamma)$ d'unité ϵ_γ. D'après les relations de commutation (1) et (2), cette sous-algèbre est commutative et a pour R-base l'ensemble $\{\mathrm{T}_x\epsilon_\chi,\ x \in X, \chi \in \gamma\}$.

Remarque 4.3.3. On note $H(\gamma)[q^{\pm 1/2}]$ la $\mathbb{Z}[q^{\pm 1/2}]$-algèbre obtenue après addition d'un inverse et d'une racine carrée de l'indéterminée q à l'anneau des scalaires de $H(\gamma)$. On considère l'application suivante :

$$\begin{array}{rccc} \phi: & \mathbb{Z}[q][\tilde{W}] & \longrightarrow & H(\gamma)[q^{\pm 1/2}] \\ & w & \longmapsto & q^{-\ell(w)/2}\mathrm{T}_w \end{array}.$$

C'est un morphisme d'anneaux injectif. En effet, d'après les relations (3) et (4) de la définition 4.3.1, les éléments $\{\phi(w)\}_{w\in\tilde{W}}$ vérifient les mêmes relations que les $\{w\}_{w\in\tilde{W}}$.

Soit $w \in \tilde{W}$. Par l'isomorphisme $\epsilon_\gamma \mathcal{H}_R^{(1)} \simeq H_R(\gamma)$ l'élément $\epsilon_\gamma E_w \in \epsilon_\gamma \mathcal{H}_R^{(1)}$ de la base de Bernstein entière défini au paragraphe 3.2.2, correspond à l'élément $\mathrm{T}_w \in H_R(\gamma)$:
en effet, pour $w = w_0 x \in \tilde{W} = W_0.X$, on a défini E_w dans $\mathcal{H}^{(1)}[q^{\pm 1/2}]$ par

$$E_w = q^{(\ell(w)-\ell(w_0)+\ell(z)-\ell(y))/2} T_{w_0} T_y T_z^{-1},$$

avec y, $z \in X$, dominants tels que $x = y - z$. Or, dans $H(\gamma)[q^{\pm 1/2}]$,

$$q^{(\ell(w)-\ell(w_0)+\ell(z)-\ell(y))/2}\mathrm{T}_{w_0}\mathrm{T}_y\mathrm{T}_z^{-1} = q^{\ell(w)/2}\phi(w_0)\phi(y)\phi(z)^{-1} = q^{\ell(w)/2}\phi(w) = \mathrm{T}_w.$$

En particulier, dans l'isomorphisme $\epsilon_\gamma \mathcal{H}_R^{(1)} \simeq H_R(\gamma)$, la sous-algèbre commutative $\epsilon_\gamma \mathcal{A}_R^{(1)}$ de $\epsilon_\gamma \mathcal{H}_R^{(1)}$ correspond à la sous-algèbre commutative de $H_R(\gamma)$ de R-base $\{\mathrm{T}_x \epsilon_\chi,\ x \in X, \chi \in \gamma\}$. On note $B_R(\gamma)$ cette dernière.

On appelle R-caractère de $B_R(\gamma)$ un morphisme de R-algèbres $B_R(\gamma) \to R$. On déduit de l'action de $\tilde{W}$ sur $\mathcal{A}^{(1)}$ (voir la notation *3.2.10*) une action de $\tilde{W}$ sur $B_R(\gamma)$ et sur ses R-caractères : pour tout $w = w_0 x \in \tilde{W} = W_0.X$, le caractère $w.\lambda$ est défini par

$$w.\lambda(T_x) = \lambda(T_{w_0^{-1}xw_0}),\ \forall x \in X; \quad w.\lambda(\epsilon_\chi) = \lambda(\epsilon_{w_0^{-1}.\chi})\ \forall \chi \in \gamma.$$

Remarquons que puisque γ est une orbite régulière, un R-caractère de $B_R(\gamma)$ est distinct de chacun de ses conjugués sous l'action de W_0.

4.3.2. La sous-algèbre commutative B_γ et ses caractères :— Désormais $R = \overline{\mathbb{F}}_p$. On note B_γ la sous-algèbre commutative $B_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$ de $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$.

Pour $I \subset \{1,2,3\}$, on désigne comme précédemment par x_I la diagonale constituée de π en les coordonnées qui appartiennent à I et de 1 ailleurs. On notera T_I l'élément T_{x_I}.
En particulier, $\mathrm{T}_{\{1,2,3\}} = \mathrm{T}_\omega^3$ où $\omega \in \tilde{W}$ est l'élément de longueur nulle défini au paragraphe 0.1.4.

D'après la remarque *4.3.3*, la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre B_γ est isomorphe à la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre $\epsilon_\gamma \mathcal{A}_{\overline{\mathbb{F}}_p}^{(1)}$ et, d'après le théorème 3.2.9 on a le résultat suivant :

Proposition 4.3.4. – *La $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre commutative B_γ est engendrée par l'ensemble*

$$\{\mathrm{T}_I,\ \epsilon_\chi,\ \mathrm{T}_\omega{}^{\pm 3}\}_{\chi\in\gamma, I\subsetneq\{1,2,3\}}$$

avec les relations

$$\mathrm{T}_I\mathrm{T}_J = 0 \textit{ si } I \not\subset J \textit{ et } I \not\subset I \textit{ et les relations (1) de la définition 4.3.1 entre les } \epsilon_\chi.$$

– *Elle contient le centre* $\mathcal{Z}(H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma))$ *de* $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$,

$$\mathcal{Z}(H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)) = \overline{\mathbb{F}}_p[\mathrm{T}_\omega^{\pm 3}, Z_1(\gamma), Z_2(\gamma)],$$

où $Z_i(\gamma) = \sum_{I\subset\{1,2,3\},|I|=i} \mathrm{T}_I$, *pour* $i \in \{1,2\}$.

– *L'algèbre* $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$ *est de type fini sur son centre.*

Soit $\lambda : B_\gamma \to \overline{\mathbb{F}}_p$ un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère. D'après les relations de commutations dans B_γ, il existe un drapeau, appelé *drapeau de* λ

$$\emptyset \subsetneq I_1 \subsetneq ... \subsetneq I_r \subsetneq I_{r+1} = \{1,2,3\},$$

tel que pour tout $\emptyset \subsetneq I \subset \{1,2,3\}$,

$$\lambda(\mathrm{T}_I) \neq 0 \text{ si et seulement si } I \text{ est l'un des éléments } I_1, ..., I_{r+1} \text{ de ce drapeau.}$$

Le caractère λ est entièrement déterminé par la donnée de $\{\lambda(\mathrm{T}_{I_i})\}_{i=1,..,r+1}$ et de l'unique élément $\chi \in \gamma$ tel que $\lambda(\epsilon_\chi) \neq 0$.

On dit que λ est
- *régulier* si le drapeau est complet *i.e.* $r = 2$.
- *singulier* s'il n'est pas régulier,
- *supersingulier* si le drapeau est trivial, *i.e.* si $\lambda(\mathrm{T}_I) = 0$ pour $\emptyset \subsetneq I \subsetneq \{1,2,3\}$.

4.3.3. Classification des $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,\sigma_\gamma)$-modules simples :— Soient $z \in \overline{\mathbb{F}}_p^{\,*}$, $y, y' \in \overline{\mathbb{F}}_p$. Soit $\mu(z,y,y')$ le caractère du centre de $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$ déterminé par

$$\mu(z,y,y') : {\mathrm{T}_\omega}^3 \mapsto z,\ Z_1(\gamma) \mapsto y,\ Z_2(\gamma) \mapsto y'.$$

On dit de $\mu(z,y,y')$ qu'il est *régulier* si $yy' \neq 0$, *singulier* sinon. Dans le cas particulier où $(y,y') = (0,0)$ on dit que $\mu(z,y,y')$ est *supersingulier*.

Nous donnons maintenant une liste $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-modules de caractère central $\mu(z,y,y')$. Pour les décrire, il suffit de donner l'action de $\{\epsilon_\chi\}_{\chi\in\gamma}$, T_{s_1} et T_ω car ${\mathrm{T}_\omega}^3$ agit par le scalaire $z \neq 0$ et car la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$ est engendrée par l'ensemble $\{\mathrm{T}_{s_1}, {\mathrm{T}_\omega}^{\pm 1}, \{\epsilon_\chi\}_{\chi\in\gamma}\}$.

Modules ayant un caractère central régulier :

Pour $yy' \neq 0$, $\chi \in \gamma$, on définit le $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-module $K_6(z, y, y', \chi)$ de $\overline{\mathbb{F}}_p$-base $\{v, \mathrm{T}_\omega v, {\mathrm{T}_\omega}^2 v, w, \mathrm{T}_\omega w, {\mathrm{T}_\omega}^2 w\}$ avec $\epsilon_\chi v = v$ et

$$\begin{cases} \mathrm{T}_{s_1} v = w, \\ \mathrm{T}_{s_1}\mathrm{T}_\omega v = yy'^{-1}{\mathrm{T}_\omega}^2 w, \\ \mathrm{T}_{s_1}{\mathrm{T}_\omega}^2 v = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathrm{T}_{s_1} w = 0, \\ \mathrm{T}_{s_1}\mathrm{T}_\omega w = y'z^{-1}{\mathrm{T}_\omega}^2 v, \\ \mathrm{T}_{s_1}{\mathrm{T}_\omega}^2 w = 0. \end{cases}$$

Modules ayant un caractère central singulier, non-supersingulier :

– Pour $y \neq 0$, $y' = 0$, $\chi \in \gamma$ on définit le $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-module $L_6(z, y, 0, \chi)$ de $\overline{\mathbb{F}}_p$-base $\{v, \mathrm{T}_\omega v, {\mathrm{T}_\omega}^2 v, w, \mathrm{T}_\omega w, {\mathrm{T}_\omega}^2 w\}$ avec $\epsilon_\chi v = v$,

$$\begin{cases} \mathrm{T}_{s_1} v = 0, \\ \mathrm{T}_{s_1}\mathrm{T}_\omega v = \mathrm{T}_\omega w \\ \mathrm{T}_{s_1}{\mathrm{T}_\omega}^2 v = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathrm{T}_{s_1} w = yz^{-1}{\mathrm{T}_\omega}^2 v, \\ \mathrm{T}_{s_1}\mathrm{T}_\omega w = 0, \\ \mathrm{T}_{s_1}{\mathrm{T}_\omega}^2 w = 0. \end{cases}$$

– Pour $y = 0$, $y' \neq 0$, $\chi \in \gamma$ on définit le $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-module $\tilde{L}_6(z, 0, y', \chi)$ de $\overline{\mathbb{F}}_p$-base $\{v, \mathrm{T}_\omega v, {\mathrm{T}_\omega}^2 v, w, \mathrm{T}_\omega w, {\mathrm{T}_\omega}^2 w\}$ avec $\epsilon_\chi v = v$ et

$$\begin{cases} \mathrm{T}_{s_1} v = w, \\ \mathrm{T}_{s_1}\mathrm{T}_\omega v = 0 \\ \mathrm{T}_{s_1}{\mathrm{T}_\omega}^2 v = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathrm{T}_{s_1} w = 0, \\ \mathrm{T}_{s_1}\mathrm{T}_\omega w = y'z^{-1}{\mathrm{T}_\omega}^2 v, \\ \mathrm{T}_{s_1}{\mathrm{T}_\omega}^2 w = 0. \end{cases}$$

Modules ayant un caractère central supersingulier :

Soit $\chi \in \gamma$. Le $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module $P(z, 0, 0, \chi)$ a pour $\overline{\mathbb{F}}_p$-base $\{v, \mathrm{T}_\omega v, {\mathrm{T}_\omega}^2 v\}$; T_{s_1} agit par zéro sur $P(z, 0, 0, \chi)$ et $\epsilon_\chi v = v$.

Théorème 4.3.5. *Soient $z \in {\overline{\mathbb{F}}_p}^*$ $y, y' \in \overline{\mathbb{F}}_p$, $\chi \in \gamma$. Pour tout $w \in W_0$, on a les isomorphismes de $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-modules suivants :*

$$K_6(z, y, y', \chi) \simeq K_6(z, y, y', \chi w) \text{ avec } yy' \neq 0,$$
$$L_6(z, y, 0, \chi) \simeq L_6(z, y, 0, \chi w) \text{ avec } y \neq 0,$$
$$\tilde{L}_6(z, 0, y', \chi) \simeq \tilde{L}_6(z, 0, y', \chi w) \text{ avec } y' \neq 0,$$
$$P(z, 0, 0, \chi) \simeq P(z, 0, 0, \chi s_1 s_2) \simeq P(z, 0, 0, \chi s_2 s_1).$$

En revanche les $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-modules $P(z, 0, 0, \chi)$ et $P(z, 0, 0, \chi s_1)$ ne sont pas isomorphes.

Pour tout $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-module simple ayant un caractère central égal à $\mu(z, y, y')$, il existe $\chi \in \gamma$ tel que ce module est isomorphe à l'un des $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-modules de la liste suivante :

$$K_6(z, y, y', \chi) \text{ si } yy' \neq 0,$$
$$L_6(z, y, 0, \chi) \text{ si } y \neq 0 \ y' = 0, \ \tilde{L}_6(z, 0, y', \chi) \text{ si } y = 0, \ y' \neq 0,$$
$$P(z, 0, 0, \chi) \text{ si } (y, y') = (0, 0).$$

La suite de la partie 4.3 est consacrée à la démonstration de ce théorème.

4.3.4. Modules standards pour la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\mathrm{GL}_3(F), \sigma_\gamma)$.—

4.3.4.1. Sous-espaces λ-isotypiques. — Soient V un $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-module, λ un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère de B_γ.

Définition 4.3.6. *On note V_λ le sous-espace λ-isotypique de V*

$$V_\lambda = \{v \in V,\, b.v = \lambda(b)v \;\forall\, b \in B_\gamma\}.$$

Lemme 4.3.7. *Soit $w \in \tilde{W}$. On a $\mathrm{T}_w.V_\lambda \subset V_{w.\lambda}$.*

PREUVE. — Il suffit de montrer que $\mathrm{T}_\omega.V_\lambda \subset V_{\omega.\lambda}$ et $\mathrm{T}_{s_1}.V_\lambda \subset V_{s_1.\lambda}$ car $\tilde{W}$ est engendré par $\{s_1,\, \omega^{\pm 1}\}$. Soient $\chi \in \gamma$, $x \in X$.

On a d'une part $\epsilon_\chi \mathrm{T}_\omega = \mathrm{T}_\omega \epsilon_{\omega^{-1}\chi}$ d'après les relations (2) de la définition 4.3.1, et $\mathrm{T}_x\mathrm{T}_\omega = \mathrm{T}_{\omega\,\omega^{-1}x\omega} = \mathrm{T}_\omega \mathrm{T}_{\omega^{-1}x\omega}$. Par conséquent, on a bien $\mathrm{T}_\omega.V_\lambda \subset V_{\omega.\lambda}$.

D'autre part, du fait des relations (2) de la définition 4.3.1, on a $\epsilon_\chi \mathrm{T}_{s_1} = \mathrm{T}_{s_1}\epsilon_{s_1\chi}$. De plus, si $\ell(xs_1) = \ell(x) + 1$, on a $\mathrm{T}_{xs_1} = \mathrm{T}_x\mathrm{T}_{s_1} = \mathrm{T}_{s_1}\mathrm{T}_{s_1xs_1}$; ainsi, $\mathrm{T}_x\mathrm{T}_{s_1} = \mathrm{T}_x\mathrm{T}_{s_1}v = \mathrm{T}_{s_1}\mathrm{T}_{s_1xs_1}$. Si $\ell(xs_1) = \ell(x) - 1$, on a $\mathrm{T}_{s_1xs_1} = \mathrm{T}_{s_1}\mathrm{T}_{xs_1}$, $\mathrm{T}_x = \mathrm{T}_{xs_1}\mathrm{T}_{s_1}$; ainsi $\mathrm{T}_x\mathrm{T}_{s_1} = 0 = \mathrm{T}_{s_1}\mathrm{T}_{s_1xs_1}$. D'où, $\mathrm{T}_{s_1}.V_\lambda \subset V_{s_1.\lambda}$. □

On déduit du lemme 4.3.7 que si V est un $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-module engendré par V_λ, alors le $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel V est la somme directe de ses sous-espaces $w.\lambda$-isotypiques non nuls, avec w parcourant W_0.

Lemme 4.3.8. *Si le $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-module V est engendré par un vecteur $v \in V_\lambda$, alors on a $dim V_\lambda = 1$.*

PREUVE. — Soit χ l'unique élément de γ tel que $\lambda(\epsilon_\chi) = 1$. Puisque $v \in V_\lambda$ on a $\epsilon_\chi v = v$. De plus, pour tout élément non trivial $w \in W_0$, les caractères $w\chi$ et χ sont distincts donc $\epsilon_{w\chi}v = (\epsilon_{w\chi}\epsilon_\chi)v = 0$.

Soit u un élément non nul de V_λ. On a en particulier $\epsilon_\chi u = u$. Puisque v engendre V, il existe une famille non nulle $\{\beta_{\tilde{w}}\}_{\tilde{w}}$ indexée par les éléments $\tilde{w} = wx \in W_0.X = \tilde{W}$ telle que $u = \sum_{\tilde{w}} \beta_{\tilde{w}} \mathrm{T}_{\tilde{w}} v$. Ainsi $u = \epsilon_\chi u = \sum_{\tilde{w}} \beta_{\tilde{w}} \mathrm{T}_{\tilde{w}}\, \epsilon_{w^{-1}\chi}\, v = \sum_{x \in X} \beta_x \mathrm{T}_x v$. D'où, $u \in \overline{\mathbb{F}}_p v$. □

4.3.4.2. Propriétés des $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-modules standards.— Soit λ un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère de B_γ.

Définition 4.3.9. *Le $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-module standard induit par λ est le $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-module*

$$I(\lambda) = H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma) \otimes_{B_\gamma} \lambda.$$

On note $\varphi_\lambda = 1 \otimes 1 \in I(\lambda)$ le générateur canonique du $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-module $I(\lambda)$. C'est un élément λ-isotypique.

Les propriétés suivantes proviennent du fait que $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$ est de type fini sur son centre et des lemmes 4.3.7 et 4.3.8.

(i) Le module standard $I(\lambda)$ est un $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel de dimension finie. Il est égal à la somme directe de ses sous-espaces $w.\lambda$-isotypiques non nuls, pour w parcourant W_0. Sa partie λ-isotypique est la droite dirigée par φ_λ.

(ii) Tout $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-module simple ayant un caractère central est quotient d'un module standard.

Proposition 4.3.10. – *Le $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-module standard $I(\lambda)$ admet un unique quotient irréductible non nul noté V^λ.*

– *Soit $w \in W_0$. On a un isomorphisme de $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-modules $I(\lambda) \simeq I(w.\lambda)$ si et seulement si l'espace $w.\lambda$ isotypique $V^\lambda_{w.\lambda}$ est non nul.*

– *On a les isomorphismes $I(\lambda) \simeq I(\omega.\lambda) \simeq I(\omega^2.\lambda)$. Ainsi, la dimension de l'espace vectoriel V^λ est supérieure ou égale à 3.*

– *On a la suite exacte de $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-modules*

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{w \in W_0, I(\lambda) \not\simeq I(w.\lambda)} I(\lambda)_{w.\lambda} \longrightarrow I(\lambda) \longrightarrow V^\lambda \longrightarrow 0.$$

La preuve de la proposition 4.3.10 repose sur les lemmes suivants :

Lemme 4.3.11. *Soit $w \in W_0$. On suppose qu'il existe d, $d' \in X$ tels que*

$$\mathrm{T}_{w^{-1}d'}\mathrm{T}_{wd}\varphi_\lambda \neq 0.$$

Alors on a un morphisme injectif de $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-modules

$$\begin{array}{ccc} I(\lambda) & \overset{A}{\hookrightarrow} & I(w.\lambda) \\ \varphi_\lambda & \longmapsto & \mathrm{T}_{w^{-1}d'}\varphi_{w.\lambda}. \end{array}$$

En particulier, on a les isomorphismes de $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-modules : $I(\lambda) \simeq I(\omega.\lambda) \simeq I(\omega^2.\lambda)$.

PREUVE DU LEMME 4.3.11. — Soient λ, w, d, d' vérifiant les hypothèses du lemme. D'après le lemme 4.3.7, on a des morphismes de $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-modules A et B bien définis par :

$$\begin{array}{ccccc} I(\lambda) & \xrightarrow{A} & I(w.\lambda) & \xrightarrow{B} & I(\lambda) \\ \varphi_\lambda & \longmapsto & \mathrm{T}_{w^{-1}d'}\varphi_{w.\lambda} & & \\ & & \varphi_{w.\lambda} & \longmapsto & \mathrm{T}_{wd}\varphi_\lambda \end{array}$$

De plus $B \circ A(\varphi_\lambda) = \mathrm{T}_{w^{-1}d'}\mathrm{T}_{wd}\varphi_\lambda$: c'est un élément non nul appartenant à l'espace λ-isotypique $I(\lambda)_\lambda$. D'après le lemme 4.3.8, il existe $\beta \neq 0$ tel que $B \circ A$ est égal à l'homothétie de rapport β. Ainsi, A est une injection $I(\lambda) \hookrightarrow I(w.\lambda)$.

Les isomorphismes annoncés sont ensuite obtenus en choisissant $w = s_2 s_1$, $d = s_1 s_2 \omega$, $d' = s_2 s_1 \omega^2$, car alors $\mathrm{T}_{w^{-1}d'}\mathrm{T}_{wd}\varphi_\lambda = \mathrm{T}_\omega{}^3\varphi_\lambda \neq 0$. D'après ce qui précède on a donc un morphisme injectif $I(\lambda) \hookrightarrow I(\omega.\lambda)$. L'isomorphisme est obtenu en réitérant ce raisonnement pour $\omega.\lambda$ puis $\omega^2.\lambda$ et en notant que l'élément central ω^3 laisse invariant le caractère λ.

□

Lemme 4.3.12. *Soient V un quotient irréductible non nul du $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-module standard $I(\lambda)$. Pour $w \in W_0$, on a un isomorphisme de $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-modules $I(\lambda) \simeq I(w.\lambda)$ si et seulement si l'espace $w.\lambda$-isotypique de V est non nul.*

Un quotient irréductible non nul V de $I(\lambda)$ possède un espace λ-isotypique non nul. On déduit de ce lemme et du précédent que les espaces $\omega.\lambda$-isotypique et $\omega^2.\lambda$-isotypique de V sont également non nuls de sorte que V est un espace vectoriel de dimension supérieure ou égale à 3.

PREUVE DU LEMME 4.3.12. — D'après le lemme 4.3.8 et puisque le quotient non nul V de $I(\lambda)$ est irréductible, son espace λ-isotypique est un $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel de dimension 1. Soit v une base de V_λ. Soit $w \in W_0$.

Supposons $I(\lambda) \simeq I(w.\lambda)$. En particulier V est un quotient non nul de $I(w.\lambda)$ donc l'espace $w.\lambda$-isotypique de V est non nul.

Réciproquement, supposons que l'espace $w.\lambda$-isotypique de V est non nul. Puisque V est un $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-module irréductible, il est engendré par $v \in V_\lambda$. D'après le lemme 4.3.7, le $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel $V_{w.\lambda}$ est engendré par les éléments de la forme $\{\mathrm{T}_{wd}v\}_{d\in X}$. Il existe donc $d \in X$, tel que $u := \mathrm{T}_{wd}v \neq 0$.
Puisque u engendre lui aussi le $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-module irréductible V, l'élément v s'écrit $v = \sum_{z\in\tilde{W}} a_z \mathrm{T}_z u$.
Mais γ est une orbite régulière, donc, par un raisonnement analogue à celui de la preuve du lemme 4.3.8 il existe $d' \in X$ tel que $\mathrm{T}_z u \neq 0$ pour $z = w^{-1}d'$. Les hypothèses du lemme 4.3.11 sont dès lors vérifiées par w, d, d', λ. On a donc une injection de $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-modules $I(\lambda) \hookrightarrow I(w.\lambda)$. Par symétrie des rôles, et puisque les modules standards sont de dimension finie, on en déduit un isomorphisme de $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-modules entre $I(\lambda)$ et $I(w.\lambda)$.

□

Achevons la preuve de la proposition 4.3.10. Il reste à s'assurer de l'unicité du quotient irréductible du $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-module standard induit par λ.
Soient λ un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère de B_γ, V un $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-module quotient irréductible non nul du module standard $I(\lambda)$. On note F la projection $F : I(\lambda) \twoheadrightarrow V$. On rappelle que le module standard $I(\lambda)$

est la somme directe comme $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel de ses composantes $w.\lambda$-isotypiques non nulles, pour w parcourant W_0.
Soit $w \in W_0$. D'après le lemme 4.3.12, si les $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-modules $I(\lambda)$ et $I(w.\lambda)$ ne sont pas isomorphes alors la composante $w.\lambda$-isotypique de $I(\lambda)$ est incluse dans le noyau de F. Si en revanche ils sont isomorphes alors la composante $w.\lambda$-isotypique de $I(\lambda)$ est de dimension 1 et $I(\lambda)_{w.\lambda} \cap Ker\, F = \{0\}$. D'où $Ker\, F$ est déterminé par λ :

$$Ker\, F = \bigoplus_{w \in W_0,\, I(\lambda) \not\simeq I(w.\lambda)} I(\lambda)_{w.\lambda}.$$

Par conséquent, $I(\lambda)$ possède un unique quotient irréductible non nul et la proposition 4.3.10 est démontrée.

Remarque 4.3.13. Jusqu'ici, on ne s'est pas réellement servi du fait que $n = 3$. Les résultats de la partie 3 précédents se généralisent à $\mathrm{GL}_n(F)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

4.3.5. Classification des $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-modules simples. — Soient $\lambda : B_\gamma \to \overline{\mathbb{F}}_p$ un caractère et $\chi \in \gamma$ tel que $\lambda(\epsilon_\chi) = 1$. On note $z \in \overline{\mathbb{F}}_p^{\,*}$, $y, y' \in \overline{\mathbb{F}}_p$ les éléments tels que

$$z = \lambda({\mathrm{T}_\omega}^3),\ y = \lambda(Z_1(\gamma)),\ y' = \lambda(Z_2(\gamma)).$$

Nous déterminons l'unique quotient irréductible du $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-module standard $I(\lambda)$, selon la nature du caractère λ. A cette occasion, nous déterminons l'ensemble des éléments $w \in W_0$ tels que les $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-modules standards $I(\lambda)$ et $I(w.\lambda)$ sont isomorphes. D'après la proposition 4.3.4 et les propriétés des modules standards, cette étude fournit la classification des $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-modules simples ayant un caractère central égal à $\mu(z, y, y')$ et prouve le théorème 4.3.5.

- λ **est un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère de B_γ régulier :** Puisque λ est régulier et quitte à échanger λ et $s_i.\lambda$, il existe un élément $I \subset \{1, 2, 3\}$ appartenant au drapeau de λ tel que $I = I_0 \cup \{i+1\}$, avec $i \notin I_0$ (comparer avec le paragraphe 3.4.2.1). D'après l'appendice de [**44**], on a alors $\ell(x_I s_i) = \ell(x_I) - 1$, d'où $\mathrm{T}_I = \mathrm{T}_{x_I s_i}\mathrm{T}_{s_i} = \mathrm{T}_{s_i x_{I_0 \cup \{i\}}}\mathrm{T}_{s_i}$ et $\mathrm{T}_{I_0 \cup \{i\}} = \mathrm{T}_{s_i}\mathrm{T}_{x_I s_i}$.

  Avec $w = s_i$, $d = 1$, $d' = x_{I_0 \cup \{i\}}$, on a alors $\mathrm{T}_{w^{-1}d'}\mathrm{T}_{wd}\varphi_\lambda = \mathrm{T}_I\varphi_\lambda = \lambda(\mathrm{T}_I)\varphi_\lambda \neq 0$. Le lemme 4.3.11 fournit alors un morphisme injectif de $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-modules $I(\lambda) \hookrightarrow I(s_i.\lambda)$.

  En échangeant les rôles de λ et $s_i.\lambda$ et avec $w = s_i$, $d = x_{I_0 \cup \{i\}}$, $d' = 1$, on obtient de même, avec le lemme 4.3.11, un morphisme injectif de $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-modules $I(s_i.\lambda) \hookrightarrow I(\lambda)$.

  Or, les modules standards sont de dimension finie. Ainsi $I(\lambda)$ et $I(s_i.\lambda)$ sont isomorphes. Puisque W_0 est engendré par s_1 et s_2, on en déduit que pour tout $w \in W_0$, le module standard induit par $w.\lambda$ est isomorphe au module standard induit par λ. De plus, d'après la proposition 4.3.10 le $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-module standard induit par λ est irréductible de dimension 6.

  Pour décrire plus précisément le $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-module $I(\lambda)$, on peut donc supposer que le drapeau de λ est dominant, c'est à dire que $\mathrm{T}_{\{3\}}\phi_\lambda = \mathrm{T}_\omega\mathrm{T}_{s_1}\mathrm{T}_{s_2}\phi_\lambda = y\phi_\lambda$, et $\mathrm{T}_{\{2,3\}}\phi_\lambda = {\mathrm{T}_\omega}^2\mathrm{T}_{s_2}\mathrm{T}_{s_1}\phi_\lambda = y'\phi_\lambda$. De ces égalités on déduit aisément que $I(\lambda)$ est isomorphe au $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-module $K_6(z, y, y', \chi)$ *via* l'identification $\varphi_\lambda \mapsto v$, $\mathrm{T}_{s_1}\varphi_\lambda \mapsto w$.

λ est un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère de B_γ supersingulier : On définit le $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-module de dimension 3 suivant :

$$P(z,0,0,\chi) = \bigoplus_{k\in\{0,1,2\}} \overline{\mathbb{F}}_p\, \mathrm{T}_\omega{}^k\, v$$

où v est un vecteur λ-propre pour B_γ et T_{s_1} agit par zéro sur $P(z,0,0,\chi)$. On vérifie, sachant que χ est régulier, que c'est un $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-module irréductible engendré par v. Par conséquent, c'est l'unique quotient irréductible de $I(\lambda)$.

Remarquons que pour $k \in \{0,1,2\}$, l'espace $\omega^k.\lambda$-isotypique de ce module est égal à la droite dirigée par $\mathrm{T}_\omega{}^k v$. On en déduit, par la proposition 4.3.10, que les $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-modules standards $I(\lambda)$ et $I(s_1.\lambda)$ ne sont pas isomorphes et que, à z fixé, il y a deux modules simples supersinguliers non isomorphes : $P(z,0,0,\chi)$ et $P(z,0,0,s_1\chi)$.

λ est un $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractère singulier non supersingulier : Puisque λ n'est ni régulier, ni supersingulier, le drapeau de λ est fixé par exactement une des deux transpositions s_1 et s_2. Choisissons $i \in \{1,2\}$ tel que s_i ne fixe pas le drapeau de λ.

Quitte à échanger λ et $s_i.\lambda$, on peut supposer que le drapeau de λ possède un élément $I \subset \{1,2,3\}$ tel que $I = I_0 \cup \{i+1\}$ et $i \notin I_0$. On procède alors comme dans le cas régulier pour montrer que l'on a un isomorphisme de $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-modules $I(\lambda) \simeq I(s_i.\lambda)$.

Or nous avons vu que λ, $\omega.\lambda$ et $\omega^2.\lambda$ engendrent des modules standards isomorphes et l'on rappelle que ω agit sur le caractère λ comme le cycle s_2s_1. Ainsi, puisque s_i et s_2s_1 engendrent W_0, pour tout $w \in W_0$, le module standard induit par $w.\lambda$ est isomorphe au module standard induit par λ. De plus, c'est un $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-module irréductible.

Pour décrire plus précisément le $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-module $I(\lambda)$, on peut donc supposer que le drapeau de λ est dominant, c'est à dire que $\mathrm{T}_{\{3\}}\phi_\lambda = \mathrm{T}_\omega \mathrm{T}_{s_1}\mathrm{T}_{s_2}\phi_\lambda = y\phi_\lambda$, et $\mathrm{T}_{\{2,3\}}\phi_\lambda = \mathrm{T}_\omega{}^2\mathrm{T}_{s_2}\mathrm{T}_{s_1}\phi_\lambda = y'\phi_\lambda$. De ces égalités on déduit aisément que $I(\lambda)$ est isomorphe au $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-module $L_6(z,y,0,\chi)$ si $y' = 0$, *via* l'identification $\varphi_\lambda \mapsto v$, $\mathrm{T}_{s_2}\varphi_\lambda \mapsto w$, ou bien à $\tilde{L}_6(z,0,y',\chi)$ si $\lambda(y) = 0$, *via* l'identification $\varphi_\lambda \mapsto v$, $\mathrm{T}_{s_1}\varphi_\lambda \mapsto w$.

Remarque 4.3.14. Suite à la remarque *4.3.13*, observons ce qu'on aurait obtenu en travaillant avec $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$:

– On montrerait de même, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, que le module standard induit par un caractère régulier est irréductible ce qui est conforme aux résultats de la partie 3.4.

– Le cas où λ est supersingulier est également accessible pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

  Comme pour $n = 3$, on montrerait que, puisque l'action du cycle $s_{n-1}...s_2s_1$ partitionne γ en $n!/n$ orbites, on a $(n-1)!$ module simples supersinguliers pour l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\mathrm{GL}_n(F),\sigma_\gamma)$, avec γ orbite régulière dans $\hat{T}(\mathbb{F}_q)$.

  D'après [**45**, Théorème 5], cela revient à dire que tout $H_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\gamma)$-module simple supersingulier contient un caractère pour la sous-algèbre de Hecke affine ce qui est conforme à la conjecture 2 (*loc.cit*).

4.4. Modules simples sur l'algèbre de Hecke semi-régulière

Soit γ l'orbite d'un caractère semi-régulier $\chi \in \hat{T}(\mathbb{F}_q)$. Nous allons étudier la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre de Hecke de la représentation σ_γ. D'après la proposition 4.1.2, on peut supposer que $\chi = 1 \otimes 1 \otimes \alpha$ où l'on désigne par 1 le caractère trivial de $\mathbb{F}_q^*$ et par α un caractère non trivial de $\mathbb{F}_q^*$.

D'après la proposition 4.1.3, la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre de Hecke de σ_γ

$$\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, \sigma_\gamma) = End_{\overline{\mathbb{F}}_p[G]}(ind_I^G \chi \oplus ind_I^G s_2\chi \oplus ind_I^G s_1 s_2 \chi)$$

est isomorphe à l'algèbre des matrices carrées de taille 3 à cœfficients dans l'algèbre $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, \chi)$. On a dès lors une équivalence de catégories abéliennes entre la catégorie des $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, \sigma_\gamma)$-modules et celle des $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, \chi)$-modules.

4.4.1. Présentation de $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, \chi)$.— Nous reprenons les notations du paragraphe 0.1.1.2. En particulier, pour tout $g \in G$ entrelaçant le caractère χ, on note $T_{g,\chi} \in \mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, \chi)$ l'élément de l'algèbre de Hecke support IgI et de valeur $1_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ en g.

Théorème 4.4.1. *L'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, \chi)$ est engendrée par les éléments*

$$S = T_{s_1,\chi},\ \ T = T_{t_0,\chi},\ \ T^* = T_{t_0^{-1},\chi},\ \ Z^{\pm 1} = T_{z_0^{\pm 1},\chi}$$

où

$$t_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \ s_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \ z_0 = \begin{pmatrix} \pi & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix}$$

avec les relations

$$S^2 = -S,\ TT^* = T^*T = 0,$$
$$T^2,\ T^{*2},\ Z \text{ sont des éléments centraux.}$$

Les éléments $Y = TS + (S+1)T$ et $Y^* = T^*S + (S+1)T^*$ sont également dans le centre de $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, \chi)$.

Le théorème 4.4.1 est démontré au paragraphe 4.4.3.

4.4.2. Classification des $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, \chi)$-modules simples ayant un caractère central.— Soient $y,\ y^*,\ t,\ t^*,\ z \in \overline{\mathbb{F}}_p$ vérifiant $z \neq 0$, $tt^* = 0$. Nous donnons une liste de $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, \chi)$-modules sur lesquels les éléments centraux Y, Y^*, T^2, T^{*2}, Z y agissent respectivement par multiplication par les scalaires $y,\ y^*,\ t,\ t^*,\ z$.

Caractères :
- $M_1(y, z)$: $S \mapsto 0,\ T \mapsto y,\ T^* \mapsto 0,\ Z \mapsto z$, avec $y, z \neq 0$. On a alors, $(y,\ y^*,\ t,\ t^*, z) = (y, 0, y^2, 0, z)$.
- $\tilde{M}_1(y, z)$: $S \mapsto -1,\ T \mapsto -y,\ T^* \mapsto 0,\ Z \mapsto z$, avec $y, z \neq 0$. On a alors, $(y,\ y^*,\ t,\ t^*, z) = (y, 0, y^2, 0, z)$.
- $M_1^*(y^*, z)$: $S \mapsto 0,\ T \mapsto 0,\ T^* \mapsto y^*,\ Z \mapsto z$, avec $y^*, z \neq 0$.
  On a alors $(y,\ y^*,\ t,\ t^*, z) = (0, y^*, 0, y^{*2}, z)$.
- $\tilde{M}_1^*(y^*, z)$: $S \mapsto -1,\ T \mapsto 0,\ T^* \mapsto y^*,\ Z \mapsto z$, avec $y^*, z \neq 0$.
  On a alors $(y,\ y^*,\ t,\ t^*, z) = (0, y^*, 0, y^{*2}, z)$.

- $P_1(z)$: $S \mapsto 0,\ T \mapsto 0,\ T^* \mapsto 0,\ Z \mapsto z$, avec $z \neq 0$.
  On a alors $(y,\ y^*,\ t,\ t^*, z) = (0, 0, 0, 0, z)$.
- $\tilde{P}_1(z)$: $S \mapsto -1,\ T \mapsto 0,\ T^* \mapsto 0,\ Z \mapsto z$, avec $z \neq 0$.
  On a alors $(y,\ y^*,\ t,\ t^*, z) = (0, 0, 0, 0, z)$.

Modules de dimension 2 : - $M_2(y, t, z)$ avec $t, z \neq 0$.
Dans une base de $M_2(y, t, z)$, les actions de S, T, T^* sont données par les matrices :

$$S = \begin{pmatrix} -1 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ T = \begin{pmatrix} 0 & t \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ T^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a $(y,\ y^*,\ t,\ t^*, z) = (y, 0, t, 0, z)$.
C'est un module simple si et seulement si $y^2 \neq t$.
Si $y^2 = t$, $M_2(y, t, z)$ a pour sous-module le caractère $M_1(y, z)$ et pour quotient le caractère $\tilde{M}_1(y, z)$.

- $M_2^*(y^*, t^*, z)$ avec $t^*, z \neq 0$.
  Dans une base de $M_2^*(y^*, t^*, z)$, les actions de S, T, T^* sont données par les matrices :

$$S = \begin{pmatrix} -1 & y^* \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ T^* = \begin{pmatrix} 0 & t^* \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a $(y,\ y^*,\ t,\ t^*, z) = (0, y^*, 0, t^*, z)$
C'est un module simple si et seulement si ${y^*}^2 \neq t^*$.
Si ${y^*}^2 = t$, $M_2^*(y^*, t^*, z)$ a pour sous-module le caractère $M_1(y^*, z)$ et pour quotient le caractère $\tilde{M}_1(y^*, z)$.

- $N_2(y, y^*, z)$ avec $z \neq 0$.
  Dans une base de $N_2(y, y^*, z)$, les actions de S, T, T^* sont données par les matrices :

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ T = \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ T^* = \begin{pmatrix} 0 & y^* \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a $(y,\ y^*,\ t,\ t^*, z) = (y, y^*, 0, 0, z)$.
C'est un module simple si et seulement si $(y, y^*) \neq (0, 0)$.
Si $(y, y^*) = (0, 0)$, $N_2(y, y^*, z)$ a pour sous-module le caractère $\tilde{P}_1(z)$ et pour quotient le caractère $P_1(z)$.

Puisqu'ils sont de dimension finie, ces $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, \chi)$-modules possèdent un caractère central. La lecture de ce caractère central nous assure qu'il n'y a pas d'isomorphisme entre deux $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, \chi)$-modules simples de la liste ci-dessus.

Théorème 4.4.2. *Soit M un $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, \chi)$-module simple ayant un caractère central.*
Alors M est isomorphe à l'un des modules de la liste précédente.

Le théorème 4.4.2 est démontré au paragraphe 4.4.4.

On appelle supersinguliers les $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, \chi)$-modules (resp. les $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, \sigma_\gamma)$-modules) ayant un caractère central "aussi nul que possible". Soit $z \in {\overline{\mathbb{F}}_p}^*$.
On a deux $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, \chi)$-modules simples supersinguliers non isomorphes tels que l'élément central inversible Z agit par multiplication par z. Ce sont les caractères $P_1(z)$ et $\tilde{P}_1(z)$.

Ainsi, si l'on fixe à z l'action de l'élément central inversible $\epsilon_\gamma T_{\omega^3} \in \mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, \sigma_\gamma)$, les modules simples supersinguliers de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, \sigma_\gamma)$ sont les deux modules simples non isomorphes provenant de $P_1(z)$ et $\tilde{P}_1(z)$ par équivalence de Morita. Ils sont de dimension 3.

Remarque 4.4.3. La détermination des $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, \chi)$-modules simples effectuée ici est "directe" (preuve du théorème 4.4.2) : elle ne passe pas par la semi-simplification de modules standards.

4.4.3. Démonstration du théorème 4.4.1.—

4.4.3.1. Nous reprenons les notations du paragraphe 0.1.5. On pose $L := L_1$ où L_1 est le sous-groupe de Levi standard de G isomorphe à $\mathrm{GL}_2(F) \times \mathrm{GL}_1(F)$. On désigne par $B_1(F)$ le sous-groupe parabolique supérieur de G de décomposition de Lévi $B_1(F) = LU$. Le sous-groupe parabolique opposé est noté $\bar{B}_1(F) = L\bar{U}$.

On se réfère à [**41**, II]. Le sous-groupe d'Iwahori I de G admet une décomposition selon $(B_1(F), \bar{B}_1(F))$, c'est à dire

$$I = I^- I_L I^+, \quad I_L = I \cap L, \quad I^- = I \cap \bar{U}, \quad I^+ = I \cap U.$$

Le caractère χ est trivial sur I^- et I^+.

On appelle *positifs* les éléments $m \in L$ tels que $mI^+m^{-1} \subset I^+$ et $m^{-1}I^-m \subset I^-$. On note leur ensemble L^+. Ce sont les éléments de L de la forme $\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$ avec a, b, c, d, $e \in F$ tels que $val(e) \leq min(val(a),\ val(b),\ val(c),\ val(d))$.

4.4.3.2. On choisit $\alpha_0 : \mathbb{F}_q^* \to O_E^*$ un relèvement du caractère non trivial $\alpha : \mathbb{F}_q^* \to \overline{\mathbb{F}}_p^{\,*}$ où O_E est l'anneau des entiers d'une extension finie E de $\mathbb{Q}_p$. Le caractère $\chi_0 = 1 \otimes 1 \otimes \alpha_0 : T(\mathbb{F}_q) \to O_E^*$ est un relèvement de χ. On considère χ_0 comme un caractère à valeurs dans O_E^* ou bien E^*. On a :

$$\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, \chi) = \mathcal{H}_{O_E}(G, \chi_0) \otimes_{O_E} \overline{\mathbb{F}}_p.$$

On note χ_{0L} la restriction de χ_0 à I_L. D'après [**43**, 1.], l'algèbre $\mathcal{H}_E(L, \chi_{0L})$ est engendrée par

$$T_0^{\pm 1} = T_{t_0^{\pm 1}, \chi_{0L}}, \quad S_0 = T_{s_1, \chi_{0L}}$$

$$Z_0^{\pm 1} = T_{z^{\pm 1}, \chi_{0L}}$$

où

$$t_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \pi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ s_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ z = \begin{pmatrix} \pi & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix},$$

avec les relations

$$(S_0 + 1)(S_0 - q) = 0, \ T_0^2 \textit{ et } Z_0 \textit{ sont dans le centre.}$$

Le centre de $\mathcal{H}_E(L, \chi_{0L})$ est la E-algèbre engendrée par $\{Z_0, T_0^{\pm 2}, T_0 S_0 + (S_0 + 1 - q)T_0\}$.

4.4.3.3. —

Lemme 4.4.4. [**41**, II.6, II.8]
Soit $a = diag(1, 1, \pi^{-1})$. C'est un élément du centre de L. L'élément T_{a,χ_0} est inversible dans $\mathcal{H}_E(G, \chi_0)$ d'inverse $q^{-2}T_{a^{-1},\chi_0}$. De plus, pour tout $m' \in L$ il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $m = a^k m' \in L^+$. L'application

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{F}: & \mathcal{H}_E(L, \chi_{0L}) & \longrightarrow & \mathcal{H}_E(G, \chi_0) \\ & T_{m',\chi_{0L}} & \longmapsto & T_{a,\chi_0}^{-k} T_{m,\chi_0} \end{array}$$

est bien définie. C'est un isomorphisme d'algèbres qui vérifie

$$\mathcal{F}(T_{m',\chi_{0L}}) = q^{-2k} c(m, k) T_{m',\chi_0}$$

où $c(m, k)$ désigne l'indice $[I^- \cap (m'^{-1} I^- m') : m^{-1} I^- m]$.

Calcul de c(m,k) :
Soient $k \in \mathbb{N}$, $x, y \in \mathbb{Z}$, $-k \leq min(x, y)$. Pour $m = a^k m' = diag(\pi^x, \pi^y, \pi^{-k}) \in L^+$ ou bien $m = a^k m' = s_1 diag(\pi^x, \pi^y, \pi^{-k}) \in L^+$, on a les isomorphismes compatibles suivants :

$$m^{-1} I^- m \simeq \pi^{1+k+x} O_F \times \pi^{1+k+y} O_F, \quad m'^{-1} I^- m' \cap I^- \simeq \pi^{1+max(0,x)} O_F \times \pi^{1+max(0,y)} O_F.$$

Ainsi,

$$c(m, k) = q^{2k+x+y-max(0,x)-max(0,y)}.$$

4.4.3.4. — D'après les paragraphes précédents, la E-algèbre $\mathcal{H}_E(G, \chi_0)$ est engendrée par

$$\mathcal{F}(T_0) = T_{t_0,\chi_0}, \ \ \mathcal{F}(T_0^{-1}) = q^{-1} T_{t_0^{-1},\chi_0}$$

$$\mathcal{F}(S_0) = T_{s_1,\chi_0}, \ \ \mathcal{F}(Z_0^{\pm 1}) = T_{z^{\pm 1},\chi_0}$$

avec les relations

$$(\mathcal{F}(S_0) + 1)(\mathcal{F}(S_0) - q) = 0, \ \mathcal{F}(T_0^2) \text{ et } \mathcal{F}(Z_0) \text{ appartiennent au centre.}$$

Le centre de $\mathcal{H}_E(G, \chi_0)$ est la E-algèbre engendrée par

$$\{\mathcal{F}(Z_0)^{\pm 1}, \mathcal{F}(T_0)^{\pm 2}, \mathcal{F}(T_0 S_0 + (S_0 + 1 - q) T_0)\}.$$

4.4.3.5.

Lemme 4.4.5. *La O_E-algèbre $\mathcal{H}_{O_E}(G, \chi_0)$ est isomorphe à la sous-O_E-algèbre de $\mathcal{H}_E(G, \chi_0)$ engendrée par $\{\mathcal{F}(Z_0^{\pm 1}), \mathcal{F}(S_0), \mathcal{T}(T_0), \mathcal{F}(qT_0^{-1})\}$:*

$$\mathcal{H}_{O_E}(G, \chi_0) \simeq \mathcal{F}(O_E[Z_0^{\pm 1}, S_0, T_0, qT_0^{-1}])$$

Démonstration. — D'après le paragraphe précédent, les images par $\mathcal{F}$ des éléments $Z_0^{\pm 1}$, S_0, T_0, qT_0^{-1} sont bien des éléments de $\mathcal{H}_{O_E}(G, \chi_0)$.

D'après les résultats de [**41**, II.6, II.8], le support de l'algèbre de Hecke de χ_0 est l'ensemble $\mathcal{S}_{\chi_0} = ILI$ (§0.1.1.2). Une base de $\mathcal{H}_{O_E}(G, \chi_0)$ est donc l'ensemble des $\{T_{g,\chi_0}, g \in D\}$ où D est un système de représentants des doubles classes $I \backslash ILI / I$. On choisit

$$D = \begin{pmatrix} \pi^{\mathbb{Z}} & 0 & 0 \\ 0 & \pi^{\mathbb{Z}} & 0 \\ 0 & 0 & \pi^{\mathbb{Z}} \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} 0 & \pi^{\mathbb{Z}} & 0 \\ \pi^{\mathbb{Z}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi^{\mathbb{Z}} \end{pmatrix}.$$

Nous voulons montrer que pour tout $g \in D$, l'élément $T_{g,\chi_0} \in \mathcal{H}_{O_E}(G,\chi_0)$ appartient à $\mathcal{F}(O_E[Z_0^{\pm 1},\, S_0,\, T_0,\, qT_0^{-1}])$. Un tel $g \in D$ s'écrit $diag(\pi^x,\pi^y,\pi^k)$ ou bien $s_1\, diag(\pi^x,\pi^y,\pi^k)$, avec $x,y,k \in \mathbb{Z}$. Puisqu'alors $T_{g,\chi_0} = \mathcal{F}(Z_0)^k T_{m,\chi_0}$ avec $m = diag(\pi^x,\pi^y,1)$ ou bien $m = s_1\, diag(\pi^x,\pi^y,1)$, on peut se ramener au cas où $k=0$.

Montrons que T_{m,χ_0} est un élément de $\mathcal{F}(O_E[Z_0^{\pm 1},\, S_0,\, T_0,\, qT_0^{-1}])$ pour $m = diag(\pi^x,\pi^y,1)$ et $m = s_1\, diag(\pi^x,\pi^y,1)$. D'après le paragraphe 4.4.3.3

$$T_{m,\chi_0} = \mathcal{F}(q^{max(0,x)+max(0,y)-x-y} T_{m,\chi_{0L}}).$$

Nous allons calculer $q^{max(0,x)+max(0,y)-x-y} T_{m,\chi_{0L}}$ afin de montrer qu'il appartient à la sous-O_E-algèbre de $\mathcal{H}_E(L,\chi_{0L})$ engendrée par $\{Z_0^{\pm 1},\, S_0,\, T_0,\, qT_0^{-1}\}$. Le lemme sera ainsi démontré.

Les lois de composition dans l'algèbre de Hecke-Iwahori de $\mathrm{GL}_2(F)$ [**43**, Ap 2], assurent que dans l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_E(L,\chi_{0L})$ on a les relations

$$\forall k \in \mathbb{N}, (T_0S_0)^k = (T_{t_0s_1,\chi_{0L}})^k = T_{(t_0s_1)^k,\chi_{0L}},\ \ (S_0T_0)^k = (T_{s_1t_0,\chi_{0L}})^k = T_{(s_1t_0)^k,\chi_{0L}}$$

De plus, T_0^2 appartient au centre de $\mathcal{H}_E(L,\chi_{0L})$.

On a ainsi les relations suivantes, pour $m = diag(\pi^x,\pi^y,1)$, $x,y \in \mathbb{Z}$.

Si $\mathbf{x \leq y}$: alors $T_{m,\chi_{0L}} = T_0^{2x}(T_0S_0)^{y-x}$. De plus, on a

- Cas $0 \leq x \leq y$: $q^{max(0,x)+max(y,0)-x-y} T_{m,\chi_{0L}} = T_0^{2x}(T_0S_0)^{y-x}$.
- Cas $x \leq 0 \leq y$: $q^{max(0,x)+max(y,0)-x-y} T_{m,\chi_{0L}} = (qT_0^{-1}S_0)^{-x}(T_0S_0)^{y}$.
- Cas $x \leq y \leq 0$: $q^{max(0,x)+max(y,0)-x-y} T_{m,\chi_{0L}} = (qT_0^{-1}S_0)^{y-x}(qT_0^{-1})^{-2y}$.

Si $\mathbf{x > y}$: alors $T_{m,\chi_{0L}} = T_0^{2y}(S_0T_0)^{x-y}$. De plus, on a

- Cas $0 \leq y \leq x$: $q^{max(0,x)+max(y,0)-x-y} T_{m,\chi_{0L}} = T_0^{2y}(S_0T_0)^{x-y}$.
- Cas $y \leq 0 \leq x$: $q^{max(0,x)+max(y,0)-x-y} T_{m,\chi_{0L}} = (qS_0T_0^{-1})^{-y}(S_0T_0)^{x}$.
- Cas $y \leq x \leq 0$: $q^{max(0,x)+max(y,0)-x-y} T_{m,\chi_{0L}} = (qS_0T_0^{-1})^{x-y}(qT_0^{-1})^{-2x}$.

Soit $m = s_1\, diag(\pi^x,\pi^y,1)$.

Si $\mathbf{x \leq y}$: $T_{m,\chi_{0L}} = S_0 T_{diag(\pi^x,\pi^y,1),\chi_{0L}}$ et l'on est ramené à la discussion précédente.

Si $\mathbf{x > y}$: alors $T_{m,\chi_{0L}} = T_0 T_{diag(\pi^{x-1},\pi^y,1),\chi_{0L}} = T_0^{2y+1}(S_0T_0)^{x-1-y}$.

- Cas $0 \leq y < x$: $q^{max(0,x)+max(y,0)-x-y} T_{m,\chi_{0L}} = T_0^{2y+1}(S_0T_0)^{x-1-y}$.
- Cas $y < 0 \leq x$: $q^{max(0,x)+max(y,0)-x-y} T_{m,\chi_{0L}} = qT_0^{-1}(qS_0T_0^{-1})^{-1-y}(S_0T_0)^{x}$.
- Cas $y < x < 0$: $q^{max(0,x)+max(y,0)-x-y} T_{m,\chi_{0L}} = (qT_0^{-1})^{1-2x}(qS_0T_0^{-1})^{x-1-y}$.

□

On conclut la démonstration du lemme 4.4.5 en notant que $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,\chi) = \mathcal{H}_{O_E}(G,\chi_0) \otimes_{O_E} \overline{\mathbb{F}}_p$, donc $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,\chi)$ est bien engendrée par $S, T, T^*, Z^{\pm 1}$. Les relations entre ces générateurs se déduisent des relations dans $\mathcal{H}_E(G,\chi_{0L})$ car $\mathcal{F}$ respecte le produit.

4.4.4. Démonstration du théorème 4.4.2.— Soit V un $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,\chi)$-module simple ayant un caractère central. Les éléments centraux Y, Y^*, Z, T^2, T^{*2} y agissent respectivement par multiplication par les scalaires y, y^*, z, t, t^* avec $z \neq 0$, $tt^* = 0$.

Nous allons noter $\tilde{S}, \tilde{T}, \tilde{T}^*$ les endomorphismes de $\overline{\mathbb{F}}_p$-espaces vectoriels induits par les actions respectives de S, T, T^* sur le $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,\chi)$-module V. On a $\tilde{S}(\tilde{S}+1) = 0$.

(1) On suppose que $t \neq 0$. Alors $\tilde{T}$ est inversible. Or $TT^* = 0$, donc $\tilde{T}^* = 0$.

Si $Ker(\tilde{S}+1) = \{0\}$, alors $\tilde{S} = 0$ et T agit comme Y sur V. Ainsi, T agit par multiplication par y, qui est non nul car $\tilde{T}$ est inversible. Soit $v \in V\backslash\{0\}$. Alors $V = \overline{\mathbb{F}}_p v$ est le caractère $M_1(y,z)$.
Si $Ker(\tilde{S}+1) \neq \{0\}$. Puisque $\tilde{S}\tilde{T}\tilde{S} = y\tilde{S}$, il existe $v \in V\backslash\{0\}$ tel que $Sv = -v$, $STv = yv$.
Si v et Tv sont liés, alors $y \neq 0$ et l'on vérifie que $V = \overline{\mathbb{F}}_p v$ est le caractère $\tilde{M}_1(y,z)$
Si $\{v, Tv\}$ forme une famille libre, alors $V = \overline{\mathbb{F}}_p v \oplus \overline{\mathbb{F}}_p Tv$ est le module $M_2(y,t,z)$.

(2) Le cas $t \neq 0$ est symétrique du précédent. Il fournit deux caractères et un module de dimension 2 : le caractère $M_1^*(y^*,z)$, le caractère $\tilde{M}_1^*(y^*,z)$, le module $M_2^*(y^*,t^*,z)$.

(3) Maintenant $t = t^* = 0$.

Si $Ker(\tilde{S}+1) = \{0\}$, alors $\tilde{S} = \tilde{T} = \tilde{T}^* = 0$ et V est le caractère $P_1(z)$.
Si $Ker(\tilde{S}+1) \neq \{0\}$. Puisque $\tilde{S}\tilde{T}\tilde{S} = y\tilde{S}$, il existe $v \in V\backslash\{0\}$ tel que $Sv = -v$, $STv = yv$.
- Supposons que $T^*v = 0$.
  Si $\{v, Tv\}$ forme une famille liée, c'est que $Tv = 0$ car $t = 0$. Alors $V = \overline{\mathbb{F}}_p v$ est le caractère $\tilde{P}_1(z)$.
  Si $\{v, Tv\}$ forme une famille libre, alors $V = \overline{\mathbb{F}}_p v \oplus \overline{\mathbb{F}}_p Tv$ est le module $N_2(y,0,z)$ avec $y \neq 0$.
- Supposons $T^*v \neq 0$.
  Si $\{T^*v, ST^*v\}$ forme une famille liée, alors $V = \overline{\mathbb{F}}_p T^*v$ est le caractère $P_1(z)$ ou $\tilde{P}_1(z)$ pour $z \neq 0$.
  Si $\{T^*v, ST^*v\}$ forme une famille libre, alors $V = \overline{\mathbb{F}}_p T^*v \oplus \overline{\mathbb{F}}_p ST^*v$ est le module $N_2(y,y^*,z)$ avec $(y,y^*) \neq (0,0)$.

4.5. Modules standards non-supersinguliers et $I(1)$-invariants d'induites paraboliques.

4.5.1. Modules standards réguliers. — Au paragraphe 3.4.5 on a vu que l'espace des $I(1)$-invariants d'une série principale de G s'identifie avec un $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module standard régulier de drapeau dominant.

4.5.2. Modules standards singuliers. — On suppose dans ce paragraphe que $F = \mathbb{Q}_p$. On désigne toujours par G le groupe $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}_p)$ et par $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre de Hecke du pro-p-Iwahori de G.

Notation 4.5.1. Pour $h \in G$ la notation T_h désigne comme précédemment l'élément de $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ correspondant à la double classe modulo le pro-p-Iwahori de G contenant h.

Pour $h \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, il n'y a pas d'ambiguité à noter T_h l'élément de la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre de Hecke du pro-p-Iwahori de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ de support la double classe modulo le pro-p-Iwahori de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ contenant h.

Soit σ une $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentation supersingulière de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. (On rappelle que ces représentations ont été classifiées par Breuil [**10**].) La représentation σ admet un caractère central et l'on pose

$$z := \sigma \begin{pmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & p^{-1} \end{pmatrix} \in \overline{\mathbb{F}}_p{}^*.$$

On note V l'espace des $I(1)$-invariants de σ sous l'action du pro-p-Iwahori de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Au paragraphe 4.5.2.3, nous décrirons sa structure de module à droite pour l'algèbre de Hecke du pro-p-Iwahori de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. On précise toutefois dès maintenant que c'est un espace vectoriel de dimension 2 de base

$$\{u, uT_{\omega_2}\},$$

où ω_2 est l'élément $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p & 0 \end{pmatrix}$ de longueur nulle du groupe de Weyl affine étendu de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. L'élément central $T_{\omega_2{}^2}$ agit sur V par multiplication par z.

Soit $\psi : \mathbb{Q}_p^* \to \overline{\mathbb{F}}_p{}^*$ un caractère de $\mathbb{Q}_p^*$. On considère $\sigma \otimes \psi$ la représentation du sous-groupe de Levi standard $L_1 \simeq \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) \times \mathrm{GL}_1(\mathbb{Q}_p)$ de G. On désigne simplement par L le Levi L_1 et par B_1 (au lieu de $B_1(\mathbb{Q}_p)$) le parabolique supérieur associé à L. Nous allons étudier l'espace des $I(1)$-invariants de l'induite parabolique

$$\mathrm{Ind}_{B_1}^G \sigma \otimes \psi.$$

Lemme 4.5.2. *L'espace des $I(1)$ invariants de $\mathrm{Ind}_{B_1}^G \sigma \otimes \psi$ est un $\overline{\mathbb{F}}_p$-espace vectoriel de dimension 6, de base*

$$\{f_{B_1 w I(1), u},\ f_{B_1 w I(1), uT_{\omega_2}}\}_{w \in \{1, s_2, s_2 s_1\}}$$

où, pour $w \in \{1, s_2, s_2 s_1\}$, $v \in V$, on désigne par $f_{B_1 g I(1), v}$ l'élément de $\mathrm{Ind}_{B_1}^G \sigma \otimes \psi$ qui est $I(1)$-invariant, de support $B_1 w I(1)$, et de valeur v en w.

Démonstration. — C'est un résultat classique qui provient de [**39**, I.5.6], parce qu'un système de représentants des doubles classes $B_1 \backslash G / I(1)$ est donné par $\{1, s_2, s_2 s_1\}$ et que pour chaque élément w de ce système, l'image de la projection

$$B_1 \cap w I(1) w^{-1} \twoheadrightarrow L \simeq \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p) \times \mathrm{GL}_1(\mathbb{Q}_p)$$

est égale au produit du pro-p-Iwahori de $\mathrm{GL}_2(F)$ par le sous groupe $1 + p\mathbb{Z}_p$ de $\mathrm{GL}_1(\mathbb{Q}_p)$.

□

4.5.2.1. On reprend les notations de la preuve du théorème 4.4.1. En particulier, on note $B_1 = LU$ et $\bar{B}_1 = L\bar{U}$ la décomposition de Lévi du sous-groupe parabolique B_1 et de son opposé $\bar{B}_1$.

On désigne par L^+ le semi-groupe des éléments positifs de L relativement à la décomposition d'Iwahori selon $(B_1, \bar{B}_1)$. On rappelle que ce sont les éléments de la forme

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix} \in L, \quad \text{avec} \quad val(e) \leq min(val(a),\, val(b),\, val(c),\, val(d)).$$

Soit $\mathcal{C}$ la sous-algèbre de $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ engendrée par les éléments $\{T_h\}_{h \in L^+}$. D'après [**40**, II.5], l'espace V des invariants de σ sous l'action du pro-p-Iwahori de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ est un module à droite pour la sous-algèbre $\mathcal{C}$ de $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ défini de la façon suivante :

$$\text{pour tout } h \in L^+,\ h = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix},\ \text{et tout } v \in V,\ v.T_h := \psi(e^{-1})\ v.T_{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}. \tag{104}$$

Lemme 4.5.3. *Soient $h \in L^+$ et $v \in V$. L'image de l'élément $I(1)$-invariant $f_{B_1 I(1), v}$ sous l'action à droite de $T_h \in \mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ est égale à*

$$f_{B_1 I(1), v}.T_h = f_{B_1 I(1), v.T_h}.$$

Démonstration. — D'après [**40**, II.4], il existe un système de représentants $\{yc_y\}_{y \in Y, c_y \in C_y}$ des classes simples

$$I(1)hI(1) = \coprod_{y \in Y,\, c_y \in C_y} I(1)hyc_y, \tag{105}$$

tel que $Y \subset I(1) \cap L$, est un système de représentants des classes simples

$$(I(1) \cap L)h(I(1) \cap L) = \coprod_{y \in Y} (I(1) \cap L)hy, \tag{106}$$

et que pour tout $y \in Y$, on a $C_y \subset I(1) \cap \bar{U}$ et la décomposition en classes simples

$$I(1)hy(I(1) \cap \bar{U}) = \coprod_{c_y \in C_y} I(1)hyc_y. \tag{107}$$

Supposons que $B_1 I(1)hyc_y \cap B_1 I(1)hy \neq \emptyset$. Montrons qu'alors $c_y = 1$.(Les arguments sont inspirés de [**31**, §4, Proposition 7]). Notons que, par positivité de h, on a $B_1 I(1)h = B_1 h^{-1}(I(1) \cap \bar{U})h$. Ainsi, l'hypothèse se traduit par l'existence de $b \in B_1$, $k_1, k_2 \in I(1) \cap \bar{U}$ tels que

$$h^{-1}k_1 hyc_y = bh^{-1}k_2 hy.$$

Or, $I(1) \cap \bar{U}$ est contracté par h^{-1}. C'est de plus un sous-groupe distingué de $I(1) \cap \bar{B}_1$, donc $yc_y y^{-1} \in I(1) \cap \bar{U}$. Par conséquent, $b \in I(1) \cap \bar{U}$. Mais puisque $b \in B_1$, on obtient $b = 1$ et $hyc_y = k_1^{-1}k_2 hy$. Ainsi, $I(1)hyc_y = I(1)hy$ et $c_y = 1$.

L'image, sous l'action à droite de T_h, de $f_{B_1I(1),v}$ est un élément $I(1)$-invariant de $\mathrm{Ind}_{B_1}^G\sigma\otimes\psi$ de support $B_1I(1)hI(1)$. Or, h^{-1} contracte $I(1)\cap\bar{U}$. Ainsi,

$$B_1I(1)hI(1) = B_1(I(1)\cap\bar{U})hI(1) \subset B_1hI(1) = B_1I(1).$$

Par conséquent, $f_{B_1I(1),v}.T_h$ est un élément $I(1)$-invariant de $\mathrm{Ind}_{B_1}^G\sigma\otimes\psi$ de support $B_1I(1)$. Pour le déterminer entièrement, il suffit donc de déterminer sa valeur en l'unité de G.
D'après la décomposition de la double classe $I(1)hI(1)$ donnée par (105), on a

$$f_{B_1I(1),v}.T_h = \sum_{y\in Y,\, c_y\in C_y} (hyc_y)^{-1}.f_{B_1I(1),v}.$$

Si l'unité de G appartient à $B_1I(1)hyc_y$, alors, puisque $hy\in B_1$, on a $B_1I(1)hyc_y\cap B_1I(1)hy\neq\emptyset$ et $c_y=1$ d'après ce qui précède. Ainsi,

$$\begin{aligned}[f_{B_1I(1),v}.T_h](1_G) &= \sum_{y\in Y} f_{B_1I(1),v}((hy)^{-1})\\ &= \sum_{y\in Y}(\psi\otimes\sigma)((hy)^{-1}).v \quad \text{car } h,y\in L.\end{aligned}$$

Par définition de l'action de l'algèbre $\mathcal{C}$ sur v et du fait de la décomposition (106), cet élément n'est autre que $v.T_h$.

□

4.5.2.2. On rappelle que l'espace V a pour base $\{u, uT_{\omega_2}\}$.

Lemme 4.5.4. *L'espace des $I(1)$-invariants de $\mathrm{Ind}_{B_1}^G\sigma\otimes\psi$ est un $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module à droite engendré par*

$$f_{B_1I(1),u}.$$

Démonstration. — Soit $v\in V$.

a) L'image de $f_{B_1I(1),v}$ sous l'action à droite de l'élément $T_\omega\in\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ est un élément non nul (car T_ω est inversible dans $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$), $I(1)$-invariant, de support

$$B_1I(1)\omega = B_1\omega I(1) = B_1s_2s_1I(1)$$

car ω normalise le pro-p-Iwahori et se décompose sous la forme $\omega = x_3s_2s_1$. Sa valeur en s_2s_1 est

$$f_{B_1I(1),v}(s_2s_1\omega^{-1}) = (\sigma\otimes\psi)(x_3^{-1}).v = \psi(\pi^{-1})v.$$

b) L'image de $f_{B_1I(1),v}$ sous l'action à droite de l'élément $T_{\omega^2}\in\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ est un élément non nul, $I(1)$-invariant, de support

$$B_1I(1)\omega^2 = B_1\omega^2I(1) = B_1s_2I(1)$$

car $\omega^2 = x_2x_3s_1s_2$. Sa valeur en s_2 est

$$f_{B_1I(1),v}(s_2\omega^{-2}) = (\sigma\otimes\psi)(s_1x_2^{-1}x_3^{-1}).v = \psi(\pi^{-1})\sigma(\omega_2^{-1})v = \psi(\pi^{-1})v.T_{\omega_2}.$$

c) On pose $h := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \pi & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. C'est un élément positif de L. Ainsi, d'après le lemme 4.5.3 l'image de $f_{B_1 I(1),v}$ sous l'action à droite de l'élément $T_h \in \mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ est égale à l'élément

$$f_{B_1 I(1),vT_h} = f_{B_1 I(1),vT_{\omega_2}}.$$

D'après c) (appliqué à $v := u$) le sous $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module à droite engendré par l'élément $f_{B_1 I(1),u}$ contient les éléments

$$f_{B_1 I(1),u}, \ \ f_{B_1 I(1),uT_{\omega_2}}.$$

D'après a), il contient alors aussi les éléments

$$f_{B_1 s_2 s_1 I(1),u}, \ \ f_{B_1 s_2 s_1 I(1),uT_{\omega_2}}$$

et d'après b), les éléments

$$f_{B_1 s_2 I(1),uT_{\omega_2}}, \ \text{ et } \ f_{B_1 s_2 I(1),u},$$

car $T^2_{\omega_2} u = zu$ avec $z \neq 0$. Du fait du lemme 4.5.2 qui donne une base de l'espace des $I(1)$-invariants de $\mathrm{Ind}^G_{B_1} \sigma \otimes \psi$, on a démontré le lemme.

□

4.5.2.3. — D'après les résultats du paragraphe 3.2.1, la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre de Hecke du pro-p-Iwahori de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ est engendrée par les éléments

$$\{T_s, \ T^{\pm 1}_{\omega_2}, \ T_{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}}, \ \text{ avec } a, b \in \mathbb{F}^*_q, \} \quad \text{où } s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a noté T^*_s l'élément suivant qui vérifie $T^*_s T_s = 0$: $\quad T^*_s = T_s - \sum_{a \in \mathbb{F}^*_q} T_{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a^{-1} \end{pmatrix}}$.

La classification des représentations supersingulières de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ effectuée dans [**10**] (ou bien encore le résultat de notre chapitre 2) montre que l'espace des invariants de la représentation σ sous l'action du pro-p-Iwahori est un module simple à droite supersingulier pour la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre de Hecke du pro-p-Iwahori de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. A l'aide des résultats [**43**], nous décrivons l'action à droite de cette algèbre de Hecke sur l'espace V des invariants de σ sous l'action du pro-p-Iwahori.

– L'espace V a pour $\overline{\mathbb{F}}_p$-base $\{u, uT_{\omega_2}\}$.

– Il existe un caractère $\chi = \chi_1 \otimes \chi_2 : \mathbb{F}^*_p \times \mathbb{F}^*_p \to \overline{\mathbb{F}}_p{}^*$ tel que pour tous $a, b \in \mathbb{F}^*_q$,

$$uT_{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}} = \chi_1(a)\chi_2(b)u.$$

– L'élément central $T^2_{\omega_2}$ agit par multiplication par le scalaire non nul z^{-1}.

– Enfin, on a $uT_s = 0, \ uT_{\omega_2} T^*_s = 0$.

Remarque 4.5.5. Pour tous $a, b \in \mathbb{F}_q^*$ il découle des relations de commutation dans l'algèbre de Hecke du pro-p-Iwahori de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ (voir le théorème 3.2.1) que l'élément $T_{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}}$ agit à droite sur uT_{ω_2} par multiplication par $\chi_1(b)\chi_2(a)$.

Proposition 4.5.6. *Le $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module à gauche des $I(1)$-invariants $[(\mathrm{Ind}_{B_1}^G \sigma \otimes \psi)^{I(1)}]_{\mathfrak{g}}$ est un quotient d'un $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module standard singulier de drapeau dominant de caractère central donné par*

$$T_\omega^3 \mapsto z\psi(\pi), \quad E_{\{1\}} + E_{\{2\}} + E_{\{3\}} \mapsto \psi(\pi), \quad E_{\{1,2\}} + E_{\{2,3\}} + E_{\{1,3\}} \mapsto 0.$$

Remarque 4.5.7. Soit B_2 le parabolique supérieur associé au sous-groupe de Lévi standard $L_2 \simeq \mathrm{GL}_1(\mathbb{Q}_p) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. Le $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module à gauche des $I(1)$-invariants $[(\mathrm{Ind}_{B_2}^G \psi \otimes \sigma)^{I(1)}]_{\mathfrak{g}}$ est un quotient d'un $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module standard standard singulier de drapeau dominant de caractère central tel que $E_{\{1\}} + E_{\{2\}} + E_{\{3\}} \mapsto 0$.

Preuve de la proposition 4.5.6. — Il suffit de prouver que l'élément $f_{B_1 I(1),u}$ générateur du $\mathcal{H}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$-module à gauche $[(\mathrm{Ind}_{B_1}^G \sigma \otimes \psi)^{I(1)}]_{\mathfrak{g}}$ est un élément propre pour la sous-algèbre commutative $\mathcal{A}^{(1)}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ de générateurs

$$\{T_\omega^{\pm 3},\ E_{\{1\}},\ E_{\{2\}},\ E_{\{3\}},\ E_{\{1,2\}},\ E_{\{1,3\}},\ E_{\{2,3\}},\ T_t, t \in T(\mathbb{F}_q)\}$$

pour le caractère singulier λ de drapeau dominant $\emptyset \subsetneq \{3\} \subsetneq \{1,2,3\}$, déterminé par la donnée

$$\lambda(T_\omega^3) = z\psi(\pi),\ \ \lambda(E_{\{3\}}) = \psi(\pi),\ \lambda(T_t) = (\chi^{-1} \otimes \psi)(t)\ \ \forall t \in T(\mathbb{F}_q).$$

– Soit g un élément de G tel que $g^{-1} \in L^+$. D'après le paragraphe 0.1.2.1, l'image de l'élément $f_{B_1 I(1),u} \in [(\mathrm{Ind}_{B_1}^G \sigma \otimes \psi)^{I(1)}]_{\mathfrak{g}}$ sous l'action à gauche de T_g est

$$f_{B_1 I(1),u}.\, T_{g^{-1}}.$$

L'élément g^{-1} appartenant à L^+, le lemme 4.5.3 dit que cette image n'est autre que l'élément $I(1)$-invariant de support $B_1 I(1)$ et de valeur en l'unité de G égale à

$$uT_{g^{-1}}.$$

Appliquons cela aux éléments $t \in T(\mathbb{F}_p)$, x_3, $x_{\{2,3\}}$, et ω^3 dont les inverses sont bien des éléments de L^+. D'après (104) et la description de l'action à droite de l'algèbre de Hecke du pro-p-Iwahori de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ sur V, on remarque que

- Si $t = (t_1, t_2, t_3)$, alors $uT_{t^{-1}} = \chi^{-1}(t_1, t_2)\psi(t_3) = (\chi^{-1} \otimes \psi)(t)$,
- $uT_\omega^{-3} = z\psi(\pi)$,
- $uT_{x_3^{-1}} = \psi(\pi)u$

– $uT_{x_{2,3}^{-1}} = \psi(\pi)uT\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \pi^{-1}\end{pmatrix} = \psi(\pi)uT_sT_{\omega_2}^{-1} = 0.$

Donc T_t, T_ω^3, $E_{\{3\}} = T_{x_3}$ et $E_{\{2,3\}} = T_{x_{2,3}}$ agissent respectivement à gauche sur $f_{B_1I(1),u}$ par multiplication par $(\chi^{-1}\otimes\psi)(t)$, $z\psi(\pi)$, $\psi(\pi)$ et 0.

– D'après les relations de commutation $(\mathcal{R}_0)$ du théorème 3.2.9, le produit $E_{\{1,2\}}E_{\{3\}}$ est nul. Donc l'action à gauche de $E_{\{1,2\}}$ sur $f_{B_1I(1),u} \in [(\mathrm{Ind}_{B_1}^G\sigma\otimes\psi)^{I(1)}]_{\mathfrak{g}}$ est nulle, puisque $E_{\{3\}}$ agit par multiplication par un scalaire non nul.

– L'image de $f_{B_1I(1),u} \in [(\mathrm{Ind}_{B_1}^G\sigma\otimes\psi)^{I(1)}]_{\mathfrak{g}}$ sous l'action à gauche de $E_{\{1,3\}} = T_{s_1}^*T_\omega^2T_{s_2}$ est l'élément

$$f_{B_1I(1),u}.\,T_{s_2}T_\omega^{-2}T_{s_1}^*.$$

On a $T_{s_2}T_\omega^{-2} = T_{s_2\omega^{-2}}$. Or $s_2\omega^{-2} = \begin{pmatrix}0 & \pi^{-1} & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \pi^{-1}\end{pmatrix}$ appartient à L^+. Par conséquent, d'après le lemme 4.5.3, $f_{B_1I(1),u}T_{s_2}T_\omega^{-2}$ est égal à l'élément $I(1)$-invariant de support $B_1I(1)$ et de valeur en l'unité de G

$$uT_{s_2\omega^{-2}} = \psi(\pi)u.T\begin{pmatrix}0 & \pi^{-1}\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \psi(\pi)u.T_{\omega_2}^{-1} = z\psi(\pi)u.T_{\omega_2}.$$

L'image sous l'action de

$$T_{s_1}^* = T_{s_1} - \sum_{a\in\mathbb{F}_q^*}T\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & -a^{-1} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

de $f_{B_1I(1),u.T_{\omega_2}}$ est alors elle aussi obtenue par le lemme 4.5.3 car dans l'écriture de $T_{s_1}^*$ n'apparaîssent que des matrices appartenant à L^+ . On obtient ainsi l'élément $I(1)$-invariant de support $B_1I(1)$ et de valeur en l'unité de G égale à

$$(u.T_{\omega_2})[T_s - \sum_{a\in\mathbb{F}_q^*}T\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & -a^{-1}\end{pmatrix}] = (u.T_{\omega_2})T_s^* = 0.$$

Ainsi, l'action à gauche de $E_{\{1,3\}}$ annule $f_{B_1I(1),u}$.

□

4.6. Correspondance de Langlands numérique modulo p pour la pro-p-algèbre de Hecke

4.6.1. Représentations irréductibles de dimension 3 du groupe de Weil de F. — On note W_F le groupe de Weil de F ([**34**], [**37**]). On y fixe un Frobenius géométrique. Pour $z \in \overline{\mathbb{F}}_p{}^*$, on désigne par $Irr^z_{\overline{\mathbb{F}}_p}(W_F)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme des $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentations irréductibles de dimension 3 de W_F telles que le déterminant du Frobenius géométrique est égal à z.

Soient $i \in \mathbb{N}^*$ et F_i l'extension non ramifiée de degré i de F. En particulier, $F_1 = F$. Soient W_{F_i} le groupe de Weil de F_i et I_{F_i} le sous-groupe d'inertie. On fixe un isomorphisme $v_i : W_{F_i}/I_{F_i} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$. Pour $z \in \overline{\mathbb{F}}_p{}^*$, on désigne par $\nu_{i,z}$ le caractère non ramifié de W_{F_i} défini par $\nu_{i,z}(w) = z^{v_i(w)}$, $\forall w \in W_{F_i}$.

Un caractère $W_{F_3} \to \overline{\mathbb{F}}_p{}^*$ est modérément ramifié et s'identifie par la théorie du corps de classes à un produit $\alpha\,\nu_{3,z}$ avec $z \in \overline{\mathbb{F}}_p{}^*$, $\alpha : \mathbb{F}_{q^3}^* \to \overline{\mathbb{F}}_p{}^*$. Pour un tel couple (z, α) on note $\sigma(z, \alpha)$ la représentation de W_F

$$\sigma(z, \alpha) = ind_{W_{F_3}}^{W_F}\, \alpha\, \nu_{3,z}.$$

Soit $\mathcal{O}$ l'ensemble des orbites sous l'action du groupe de Galois de $\mathbb{F}_q$ des $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractères réguliers de $\mathbb{F}_{q^3}^*$. L'application suivante est bien définie,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O} & \longrightarrow & Irr^z_{\overline{\mathbb{F}}_p}(W_F) \\ \bar{\alpha} & \longmapsto & \sigma(z, \alpha) \end{array} \tag{108}$$

où $\bar{\alpha}$ désigne l'orbite du caractère α sous l'action du groupe de Galois de $\mathbb{F}_q$. C'est une bijection d'après [**40**, 1.13]. D'où,

$$Card(Irr^z_{\overline{\mathbb{F}}_p}(W_F)) = (q+1)q(q-1)/3.$$

Action par torsion par un caractère $\chi_0 : F^* \to \overline{\mathbb{F}}_p^*$.

On note $\mu : F^* \to \overline{\mathbb{F}}_p{}^*$ le caractère obtenu par inflation de la réduction $O_F^* \to \overline{\mathbb{F}}_p{}^*$ et en choisissant $\mu(\pi) = 1$. On pourra aussi considérer μ comme un caractère de $O_F^*/1+\pi O_F \simeq \mathbb{F}_q^*$. C'est le caractère fondamental de F^*. On note μ_3 le caractère fondamental de F_3, construit de même.

Tout caractère $\chi_0 : F^* \to \overline{\mathbb{F}}_p^*$ s'identifie à un produit $\mu^l \nu_{z_0}$, pour $l \in \mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}$ et $z_0 \in \overline{\mathbb{F}}_p{}^*$. L'inflation par la norme $F_3^* \to F^*$ du caractère χ_0 est le caractère $\mu_3^{l(1+q+q^2)}\nu_{3,z_0^3}$. Ainsi, la torsion par le caractère χ_0 de la représentation $\sigma(z, \alpha)$ s'écrit :

$$\chi_0.\sigma(z, \alpha) = \sigma(zz_0^3,\, \alpha\mu_3^{l(1+q+q^2)}) \;\in\; Irr^{zz_0^3}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(W_F).$$

Lemme 4.6.1. *Soit $z \in \overline{\mathbb{F}}_p{}^*$. L'action de $\{\mu^l,\, l \in \mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}\}$ partitionne $Irr^z_{\overline{\mathbb{F}}_p}(W_F)$ en :*

- $(q+1)q/3$ *orbites de cardinal* $q-1$ *si* $q \neq 1 \bmod 3$.
- $3m(m+1)$ *orbites de cardinal* $q-1$ *et de* 2 *orbites de cardinal* m *si* $q = 1+3m$.

DÉMONSTRATION. — Soit ζ un générateur du groupe multiplicatif $\mathbb{F}_{q^3}^*$. Un caractère de $\mathbb{F}_{q^3}^*$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{F}}_p{}^*$ est déterminé par l'image ζ^k de ζ, où $k \in \mathbb{Z}/(q^3-1)\mathbb{Z}$. Ce caractère est régulier si son orbite sous l'action du groupe de Galois possède 3 éléments, c'est-à-dire si les éléments $\zeta^k, \zeta^{qk}, \zeta^{q^2k}$ sont distincts.

Ainsi, d'après (108), l'ensemble $Irr^z_{\overline{\mathbb{F}}_p}(W_F)$ est paramétré par les triplets non ordonnés $\{\zeta^k, \zeta^{qk}, \zeta^{q^2k}\}_{k\in\mathbb{Z}/(q^3-1)\mathbb{Z}}$ constitués d'éléments deux à deux distincts de $\mathbb{F}_{q^3}^*$, ou encore par l'ensemble $\mathcal{P}_q$ des polynômes unitaires de degré 3 irréductibles sur $\mathbb{F}_q$: soit $k \in \mathbb{Z}/(q^3-1)\mathbb{Z}$, l'élément P_k de $\mathcal{P}_q$ correspondant au triplet $\{\zeta^k, \zeta^{qk}, \zeta^{q^2k}\}$ est le polynôme irréductible sur $\mathbb{F}_q$,

$$P_k = (X-\zeta^k)(X-\zeta^{qk})(X-\zeta^{q^2k}) = X^3 + a_kX^2 + b_kX + c_k \in \mathbb{F}_q[X].$$

L'action de $\{\mu^l,\, l \in \mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}\}$ sur $Irr^z_{\overline{\mathbb{F}}_p}(W_F)$ se traduit alors par l'action de $\mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}$ sur $\mathcal{P}_q$ suivante : pour $l \in \mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}$, $P_k \in \mathcal{P}_q$,

$$l.P_k = (X-\zeta^{k+l(1+q+q^2)})(X-\zeta^{qk+l(1+q+q^2)})(X-\zeta^{q^2k+l(1+q+q^2)}) = \zeta^{3l(1+q+q^2)}P(\zeta^{-l(1+q+q^2)}X).$$

Nous voulons identifier les polynômes de $\mathcal{P}_q$ ayant un stabilisateur non trivial sous l'action de $\mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}$. Soit $P_k = X^3 + a_kX^2 + b_kX + c_k \in \mathcal{P}_q$ et $l \in \mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}$ tel que $l.P_k = P_k$. En observant le terme constant de ce polynôme, on a $\zeta^{3l(1+q+q^2)} = 1$.

- Si $q \neq 1\, mod\, 3$, alors $q-1$ et $1+q+q^2$ sont premiers entre eux et $\zeta^{3l(1+q+q^2)} = 1$ implique que $l = 0$ donc P_k a un stabilisateur trivial et une orbite de cardinal $q-1$.
- Sinon, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $q = 3m+1$, et m et $(1+q+q^2)/3$ sont premiers entre eux. Alors $\zeta^{3l(1+q+q^2)} = 1$ implique que $l \in m(\mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Ainsi, si P_k a un stabilisateur non trivial, ce dernier est égal au sous-groupe de $\mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}$ engendré par m. Or, $\zeta^{m(1+q+q^2)} \neq 1$ donc $a_k = 0$, de même $\zeta^{2m(1+q+q^2)} \neq 1$ donc $b_k = 0$ et P_k est de la forme $X^3 + c_k$.
  Puisque l'image de l'endomorphisme $x \mapsto x^3$ du groupe $\mathbb{F}_q^*$ est de cardinal $(q-1)/3$, il existe $2(q-1)/3$ polynômes unitaires irréductibles sur $\mathbb{F}_q$ de la forme $X^3 + c$.
  Ainsi, $\mathcal{P}_q$ contient deux 2 orbites de cardinal $(q-1)/3$: celle associée au polynôme $P_{\frac{1+q+q^2}{3}} = X^3 - \zeta^{1+q+q^2}$, et celle associée à $P_{\frac{2(1+q+q^2)}{3}} = X^3 - \zeta^{2(1+q+q^2)}$. Les autres orbites sont de cardinal $q-1$.

□

4.6.2. $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I(1))$-modules simples supersinguliers.— Soit $z \in \overline{\mathbb{F}}_p{}^*$. On note $SS_z(\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I(1)))$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I(1))$-modules simples supersinguliers tels que l'élément central inversible T_{ω^3} agit par multiplication par z.

Soit Γ l'ensemble des $\mathfrak{S}_3$-orbites dans $\hat{T}(\mathbb{F}_q)$. Il est de cardinal $(q+1)q(q-1)/6$. A une orbite γ, on a associé deux éléments (M, γ) de $SS_z(\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I(1)))$. Par conséquent,

$$Card(SS_z(\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G, I(1))) = (q+1)q(q-1)/3.$$

Remarque 4.6.2. La notation (M,γ) signifie que M est un module simple supersingulier pour la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre de Hecke de la représentation σ_γ. Nous avons vu par proposition 4.1.2, que si γ et γ' ont le même cardinal, alors les $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbres de Hecke de σ_γ et $\sigma_{\gamma'}$ sont isomorphes, de sorte que M a une structure de module simple supersingulier pour la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre de Hecke de $\sigma_{\gamma'}$. Ainsi, l'ensemble $SS_z(\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,I(1)))$ contient aussi (M,γ').

Action par torsion par un caractère $\chi_0 : F^* \to \overline{\mathbb{F}}_p^*$.

On définit l'action des $\overline{\mathbb{F}}_p$-caractères de F^* sur les $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,I(1))$-modules de façon à ce qu'elle soit compatible avec l'action par produit tensoriel sur les $\overline{\mathbb{F}}_p$-représentations de G.

En particulier, pour $(M,\gamma) \in SS_z(\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,I(1)))$, la torsion de (M,γ) par $\chi_0 = \mu^l \nu_{z_0}$ est donnée par :

$$\chi_0.(M,\gamma) = (\nu_{z_0}.M,\ \mu^l.\gamma)\ \in\ SS_{zz_0^3}(\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,I(1)))$$

où γ (resp. $\mu^l.\gamma$) est l'orbite sous l'action de $\mathfrak{S}_3$ du caractère $\chi : \mathbb{F}_q^{*3} \to \overline{\mathbb{F}}_p^*$ (resp $\mu^l\,\chi$), et ν_{z_0} agit sur M en multipliant l'action de Ω^3 par z_0^3.

Remarquons que Γ est paramétré par l'ensemble des triplets non-ordonnés $\{i,j,k\}$ d'éléments de $\mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}$ et que l'action de $\{\mu^l,\ l \in \mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}\}$ sur Γ se traduit par l'action suivante de $\mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}$ sur les triplets :

$$\forall\, i,j,k,l \in \mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}, \qquad l.\{i,j,k\} = \{i+l, j+l, k+l\}.$$

Cette description permet d'établir le lemme suivant.

Lemme 4.6.3. *L'action de $\{\mu^l,\ l \in \mathbb{Z}/(q-1)\mathbb{Z}\}$ partitionne Γ en :*

- $(q+1)q/6$ *orbites de cardinal $q-1$ si $q \neq 1\, mod\, 3$.*
- $3m(m+1)/2$ *orbites de cardinal $q-1$ et de 1 orbite de cardinal m si $q = 1+3m$. L'orbite de cardinal m est celle associée au caractère $\chi = \chi_1 \otimes \chi_1^2 \otimes \chi_1^3 : T(\mathbb{F}_q) \to \overline{\mathbb{F}}_p{}^*$ avec $\chi_1(x) = x^m$ $\forall x \in \mathbb{F}_q^*$.*

4.6.3. Correspondance de Langlands numérique pour la $\overline{\mathbb{F}}_p$-algèbre de Hecke du pro-p-Iwahori de $\mathrm{GL}_3(F)$. — Soit $z \in \overline{\mathbb{F}}_p{}^*$. D'après ce qui précède, l'action du caractère fondamental de F^* partitionne $Irr^z_{\overline{\mathbb{F}}_p}(W_F)$ d'une part et $SS_z(\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,I(1)))$ d'autre part, en :

- $(q+1)q/3$ orbites de cardinal $q-1$ si $q \neq 1\, mod\, 3$.
- $3m(m+1)$ orbites de cardinal $q-1$ et de 2 orbites de cardinal m si $q = 1+3m$.

On peut donc trouver une bijection

$$SS_z(\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(G,I(1))) \simeq Irr^z_{\overline{\mathbb{F}}_p}(W_F)$$

qui soit compatible avec l'action du caractère fondamental μ de F^*. Choisissons dans W_F le Frobenius correspondant par la théorie du corps de classes à l'uniformisante π.

Théorème 4.6.4. *Il existe une bijection compatible avec la torsion par le caractère fondamental de F^* entre*

- *l'ensemble des classes d'isomorphisme de $\mathcal{H}_{\overline{\mathbb{F}}_p}(\mathrm{GL}_3(F),I(1))$-modules simples supersinguliers tels que l'élément central inversible T_{ω^3} agit par multiplication par z d'une part,*
- *l'ensemble des classes d'isomorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p$- représentations irréductibles de dimension 3 du groupe de Weil de F, avec le déterminant du Frobenius égal à z, d'autre part.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] Barthel, L. ; Livné, R. Irreducible modular representations of GL_2 of a local field. Duke Math. J. 75, no. 2, 261-292 (1994).

[2] Barthel, L. ; Livné, R. Modular representations of GL_2 of a local field : the ordinary, unramified case. J. Number Theory 55 (1995).

[3] Bellaïche, J. ; Otwinowska, A. Platitude du module universel pour GL_3 en caractéristique non banale. Bull. Soc. Math. France 131, no. 4, 507–525 (2003).

[4] Benson, Benson, D. J. Representations and cohomology. I. Basic representation theory of finite groups and associative algebras. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 30. Cambridge University Press, Cambridge, (1998).

[5] Bernstein, J. ; Deligne, P. ; Kazhdan, D. ; Vignéras, M.-F. Représentations des algèbres centrales simples p-adiques. Representations of reductive groups over a local field, 33–117, Travaux en Cours, Hermann, Paris, (1984).

[6] Bernstein, I. N. ; Zelevinski, A. V. Representations of the group $GL(n, F)$, where F is a local non-Archimedean field. Russian Math. Surveys 31, 1-68 (1976).

[7] Bushnell, Colin J. ; Kutzko, Philip C. The admissible dual of $\mathrm{GL}(N)$ via compact open subgroups. Annals of Mathematics Studies, 129. Princeton University Press, Princeton, NJ, (1993).

[8] Borel, A. Admissible representations of a semi-simple group over a local field with vectors fixed under an Iwahori subgroup. Invent. Math. 35, 233–259 (1976).

[9] Bourbaki, N. Éléments de mathématique. Fascicule XXVII. Algèbre commutative. Chapitre 1 : Modules plats. Chapitre 2 : Localisation. Herman, Paris (1961).

[10] Breuil, C. Sur quelques représentations modulaires et p-adiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. I. Compositio Math. 138, no. 2, 165–188 (2003).

[11] Bruhat, F. ; Tits, J. Groupes réductifs sur un corps local. Inst. Hautes Études Sci. Publ Math. No. 41 5-251, (1972).

[12] Bump, D. Automorphic forms and representations. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 55. Cambridge University Press, Cambridge, (1997).

[13] Cabanes, M. ; Enguehard, M. Representation theory of finite reductive groups. New Mathematical Monographs, 1. Cambridge University Press, Cambridge, (2004).

[14] Carter, R. W. ; Lusztig, G. Modular representations of finite groups of Lie type. Proc. London Math. Soc. (3) 32, no 2, 347-384 (1976).

[15] Cherednik, I. A unification of Knizhnik-Zamolodchikov and Dunkl operators via affine Hecke algebras. Invent. Math. 106, no. 2, 411–431 (1991).

[16] Curtis, C. W. ; Reiner, I. Representation theory of finite groups and associative algebras. Wiley Classics Library. A Wiley-Interscience Publication. (1962).

[17] Curtis, C. W. ; Reiner, I. Methods of representation theory. Vol. I. With applications to finite groups and orders. Pure and Applied Mathematics. A Wiley-Interscience Publication. (1981).

[18] Dat, J.-F. Types et inductions pour les représentations modulaires des groupes p-adiques. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4), no.1, 1–38 (1999).

[19] Harder, G. Wittvektoren. Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. 99, no. 1, 18–48 (1997).

[20] Harris, M. ; Taylor, R. The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties. With an appendix by Vladimir G. Berkovich. Annals of Mathematics Studies, 151. Princeton University Press, Princeton, NJ, (2001).

[21] Henniart, G. Une preuve simple des conjectures de Langlands pour $\mathrm{GL}(n)$ sur un corps p-adique. Invent. Math. 139, no. 2, 439–455 (2000).

[22] Humphreys, J. E. Reflection groups and Coxeter groups. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 29. Cambridge University Press, Cambridge, (1990).

[23] Iwahori, N, Matsumoto, H. On some Bruhat decomposition and the structure of the Hecke rings of p-adic Chevalley groups. Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci. 25, 5-48 (1965).

[24] Laumon, G. ; Rapoport, M. ; Stuhler, U. $\mathcal{D}$-elliptic sheaves and the Langlands correspondence. Invent. Math. 113, no. 2, 217–338 (1993).

[25] Lazarus, X. Module universel en caractéristique $l > 0$ associé à un caractère de l'algèbre de Hecke de $\mathrm{GL}(n)$ sur un corps p-adique, avec $l \neq p$. J. Algebra 213, no. 2, 662–686. (1999).

[26] Lusztig, G. Affine Hecke algebras and their graded version. Journal of A.M.S. Vol. 2, No.3 (1989).

[27] Matsumoto, H. Analyse harmonique dans les systèmes de Tits bornologiques de type affine. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 590. Springer-Verlag, Berlin-New York, (1977).

[28] Paskunas, V. Coefficient systems and supersingular representations of $\mathrm{GL}_2(F)$. Mém. Soc. Math. Fr. (N.S.) No. 99, (2004).

[29] Rogawski, J.D. On modules over the Hecke algebra of a p-adic group. Invent. Math 79, 443-465 (1985)

[30] Rogawski, J.D. Representations of GL(n) over a p-adic field with an Iwahori-fixed vector Isr. J. Math 54, 242-256 (1986).

[31] Schneider, P. ; Stuhler, U. The cohomology of p-adic symmetric spaces. Invent. Math. 105, no. 1, 47–122 (1991).

[32] Schneider, P. ; Stuhler, U. Representation theory and sheaves on the Bruhat-Tits building. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 85, 97–191 (1997).

[33] Serre, J.-P. Corps locaux. Publications de l'Université de Nancago, No. VIII. Hermann, Paris, (1968).

[34] Serre, J.-P. Propriétés galoisiennes des points d'ordre fini des courbes elliptiques. (French) Invent. Math. 15, no. 4, 259–331 (1972).

[35] Serre, J.-P. Arbres, amalgames, SL_2. Astérisque, No. 46. Société Mathématique de France, Paris, (1977).

[36] Serre, J.-P. Représentations linéaires des groupes finis. Hermann, Paris, (1978).

[37] Tate, J. Number theoretic background. Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 2, pp. 3–26, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., (1979).

[38] Tits, J. Reductive groups over local fields. Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 1, pp. 29–69, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., (1979).

[39] Vignéras, M.-F. Représentations l-modulaires d'un groupe réductif p-adique avec $l \neq p$. Progress in Mathematics, 137. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, (1996).

[40] Vignéras, M.-F. A propos d'une conjecture de Langlands modulaire. Finite reductive groups : related structures and representations. Proceedings of an international conference, Luminy, France, 1994. Boston, MA : Birkhäuser. Prog. Math. 141, 415-452 (1996).

[41] Vignéras, M.-F. Induced representations of reductive p-adic groups in characteristic $\ell \neq p$. Preprint MPI 1996. Selecta Mathematica 4 549-623 (1998).

[42] Vignéras, M.-F. Correspondance de Langlands semi-simple pour $\mathrm{GL}(n, F)$ modulo $\neq p$. Invent. Math. 144, no. 1, 177–223 (2001).

[43] Vignéras, M.-F. Representations modulo p of the p-adic group $\mathrm{GL}(2, F)$. Compos. Math. 140, no. 2, 333–358 (2004).

[44] Vignéras, M.-F. Algèbres de Hecke affines génériques. ArXiv math.RT/0301058 (2002).

[45] Vignéras, M.-F. Pro-p-Iwahori Hecke ring and supersingular $\overline{\mathbf{F}}_p$-representations. Math. Ann. 331, no. 3, 523–556 (2005).