Thèse de doctorat en mathématiques

de l'Université

Paris 7 Denis-Diderot

Le problème de Brill-Noether

Présentée et soutenue par Vincent Mercat

le vendredi 13 décembre 1996

Directeur de thèse:

J.-M. Drézet

Jury:

J. -M. Drézet

Y. Laszlo

J. Le Potier

P.E. Newstead

C. Peskine

Rapporteurs:

A. Hirschowitz

P.E. Newstead

Sommaire:

Introduction

Tout au long de ce travail, nous considérons que C est une courbe algébrique lisse de genre g sur un corps algébriquement clos de caractéristique 0.

Le problème de Brill-Noether consistait à l'origine à déterminer à quelles conditions il existe un fibré vectoriel en droites L sur C, de degré d et possédant k sections globales indépendantes. On obtenait ainsi un morphisme de la courbe C dans l'espace projectif $^{k-1}$ et la résolution du problème de Brill-Noether dans ce cas a permis de faire considérablement avancer la classification des courbes et l'étude de la variété de modules de courbes $\mathcal{M}_g$. Les premiers résultats remontent à la fin du siècle dernier. On trouve une approche moderne de ce problème avec une démonstration de tous les théorèmes connus dans l'ouvrage de Arbarello, Cornalba, Griffiths et Harris (cf [**A-C-G-H**]).
Avec l'apparition des variétés de modules $U_{n,d}$ (resp. $\widetilde{U}_{n,d}$) de fibrés vectoriels stables (resp. semi-stables) de rang n et de degré d, le problème de Brill-Noether se généralisait: à quelles conditions existe-il des fibrés stables de rang n de degré d possédant k sections globales indépendantes?

En généralisant les constructions faites dans le cas des fibrés en droites, on est amené à poser (voir le **chapitre 0**):

$$W_{n,d}^{k-1} := \{E \in U_{n,d} \mid h^0(E) \geq k\}$$

$$\widetilde{W}_{n,d}^{k-1} := \{[E] \in \widetilde{U}_{n,d} \mid h^0(\mathrm{gr}\, E) \geq k\} \ .$$

L'apparition de l'exposant $k-1$ est due au cas des fibrés en droites: on cherchait un morphisme $C \to {}^{k-1}$. Mais pour les fibrés de rang supérieur, cette notation est particulièrement malheureuse.
On donne à $W_{n,d}^{k-1}$ (resp. $\widetilde{W}_{n,d}^{k-1}$) une structure de sous-schéma fermé de $U_{n,d}$ (resp. $\widetilde{U}_{n,d}$) (cf [**L**], [**A-C-G-H**] ou [**B-G-N**]). Le problème de Brill-Noether consiste alors à trouver quand ces espaces sont vides, quelle est leur dimension, s'ils sont irréductibles etc...
Il résulte de la construction que si $W_{n,d}^{k-1} \neq \emptyset$ et si $W_{n,d}^{k-1} \neq U_{n,d}$, alors on sait que

$$\dim\big(W_{n,d}^{k-1}\big) \geq \rho(g,d,n,k-1) = n^2(g-1) + 1 - k(k-d+n(g-1))$$

Jusqu'au début des années 90, nous avions très peu de résultats (cf [**Se**]) pour les fibrés de rang supérieur à un. Monserrat Teixidor i Bigas démontre en 1991 un théorème qui donne une solution assez générale au problème. La formulation de ce résultat était complexe et n'a été simplifiée que plus tard par Grzegorczyk, King, Newstead...: il fallait introduire une nouvelle notation. Nous poserons:

$$\mu = \frac{d}{n} \text{ et } \lambda = \frac{k}{n}$$

Les solutions du problème de Brill-Noether vont alors s'écrire sur un graphique avec μ en abscisse et λ en ordonnée: un fibré stable de rang n et de degré d possédant k sections globales indépendantes sera représenté par le point de coordonnées $(\frac{d}{n}, \frac{k}{n})$. La plupart des résultats vont parfaitement s'exprimer en fonction de ces deux variables. Par exemple, la dimension attendue des espaces $W_{n,d}^{k-1}$ est $\rho(g, d, n, k-1)$. Pour que ces espaces soient non vides, on peut demander que cette dimension soit plus grande que 0: on obtient alors

$$\rho(g, d, n, k-1) \geq 1 \Leftrightarrow \rho(g, \mu, 1, \lambda - 1) \geq 1$$

On appelle la courbe d'équation $\rho(g, \mu, 1, \lambda - 1) = 1$, la *courbe de Brill-Noether.* De plus, le théorème de Teixidor devient en fonction des variables μ et λ (cf théorème B-2 du chap. 0)

Théorème: *Soit C une courbe lisse générique.*
Si pour des valeurs entières λ_0 et μ_0, $\rho(g, \mu_0, 1, \lambda_0 - 1) > 1$, alors pour toutes valeurs $\mu = \frac{d}{n} \geq \mu_0$ et $\lambda = \frac{k}{n} \leq \lambda_0$, $W_{n,d}^{k-1}$ (resp. $\widetilde{W}_{n,d}^{k-1}$) est non vide et possède une composante irréductible de la bonne dimension.
Si $\rho(g, \mu_0, 1, \lambda_0 - 1) = 1$, l'assertion est encore vraie, sauf pour $\mu = \mu_0$ où l'on doit se restreindre aux fibrés semi-stables.

On se reportera à la figure c pour l'interprétation graphique. Ce théorème est encore aujourd'hui le résultat le plus général que nous possédons. Cependant il n'est pas entièrement satisfaisant: il n'est valable que pour une courbe générique (dans un sens très vague) et des résultats plus récents montrent qu'il ne donne pas une solution optimale. C'est le cas du théorème suivant qui est dû à Brambila-Paz, Grzegorczyk et Newstead (cf [**B-G-N**]):

Théorème: *Soit C une courbe lisse. On suppose que $0 \leq \frac{d}{n} \leq 1$.*
$W_{n,d}^{k-1}$ est non vide irréductible de la bonne dimension et vérifie

$$Sing\, W_{n,d}^{k-1} = W_{n,d}^{k}$$

si et seulement si $d > 0$, $n \leq d + (n-k)g$ et $(n, d, k) \neq (n, n, n)$.
$\widetilde{W}_{n,d}^{k-1}$ est non vide et irréductible si et seulement si $\big(d = 0$ et $k \leq n\big)$ ou $\big(d > 0$ et $n \leq d + (n-k)g\big)$.

L'inégalité $n \leq d + (n-k)g$ peut s'écrire $1 \leq \mu + g(\mu - \lambda)$, ou encore $\lambda \leq 1 + \frac{1}{g}(\mu - 1)$. On notera Δ la droite d'équation $\lambda = 1 + \frac{1}{g}(\mu - 1)$. La droite Δ est en fait la tangente à la courbe de Brill-Noether $\rho(g, \mu, \lambda, k-1) = 1$ au point $(1, 1)$. Pour $0 \leq \mu \leq 1$, les espaces de Brill-Noether correspondants à des points au-dessus de cette droite sont vides.

Une grande partie de ce travail consiste en fait à généraliser ce théorème au cas des fibrés stables de pente $1 < \mu < 2$. Nous nous inspirons très largement des idées contenues dans [**B-G-N**], pour démontrer le théorème suivant:

Théorème: *Soit C une courbe lisse. On suppose que $1 < \frac{d}{n} < 2$. Alors les espaces de Brill-Noether $W^{k-1}_{n,d}$ sont non vides et possèdent une composante de dimension $\rho(g,d,n,k-1)$ si et seulement si $k \leq n + \frac{1}{g}(d-n)$.*

En posant $\mu = \frac{d}{n}$ et $\lambda = \frac{k}{n}$, on reconnaît l'équation de la droite Δ, et le théorème de [**B-G-N**] se prolonge donc en quelque sorte au cas $1 < \mu < 2$.

Pour démontrer ce théorème, nous commençons dans le **chapitre 1** par étudier les fibrés vectoriels engendrés par leurs sections: si F est un fibré vectoriel de rang l et de degré d engendré par ses sections, alors on note $D(F)$ le dual du noyau du morphisme d'évaluation:

$$O \longrightarrow D(F)^* \longrightarrow \mathrm{H}^0(F) \otimes \mathcal{O} \longrightarrow F \longrightarrow 0$$

Alors, nous obtenons que si F est stable de rang l et de pente $\frac{d}{l} > 2g$, $D(F)$ est un fibré stable de rang $n = d - gl$ et de degré d possédant $n + l$ sections globales indépendantes. La condition $\frac{d}{l} < 2g$ implique que $\frac{d}{n} < 2$. Ces fibrés $D(F)$ se trouvent sur la droite Δ et on obtient un isomorphisme

$$W^{n+l-1}_{n,d} \simeq U_{l,d}$$

Ceci donne un plongement

$$U_{l,d} \hookrightarrow U_{d-gl,d}$$

A notre connaissance, l'existence de tels morphismes entre des variétés de modules de fibrés stables étaient inconnus jusque là: nous y consacrerons ultérieurement une étude.
De plus, on re-démontre que si K est le fibré canonique, alors $D(K)$ est un fibré stable si la courbe C est non hyperelliptique (semi-stable sinon). Une démonstration de cette assertion a déjà été faite par Paranjape et Ramanan (cf [**P-R**]), mais celle que nous donnons nous semble plus élémentaire. On en déduit la non-existence de fibré stables de pente < 2 au-dessus de la droite Δ.

Le chapitre 2 est le chapitre technique de ce travail: le chapitre 1 donne l'existence de fibrés stables correspondant à des points sur la droite Δ et alors le rang et le degré vérifient $d - n = gl$; il reste donc à traiter le cas des fibrés de rang n et de degré d tels que $d - n$ n'est pas divisible par g. Pour cela on va utiliser l'existence de fibrés stables sur la droite Δ; nous sommes conduits à faire des calculs de paramètres un peu lourds et complexes, mais nous n'avons pas trouvé d'échappatoire.

Dans le **chapitre 3**, nous nous intéressons aux fibrés vectoriels stables de pente 2. La situation est alors particulièrement délicate.

Enfin, le **chapitre 4** expose une conjecture qui pourrait donner une solution globale au problème de Brill-Noether du point de vue de l'existence de fibrés stables. Cette conjecture fera l'objet de toute notre attention pour les mois à venir.

Chapitre 0: Le problème de Brill-Noether

Dans ce chapitre nous définissons les espaces de Brill-Noether (partie A), puis nous donnons un panorama des différents résultats connus jusqu'à aujourd'hui (partie B). La partie C a pour objet de donner certains théorèmes dont nous aurons besoin par la suite.

A- Les espaces de Brill-Noether

Soit C une courbe algébrique lisse de genre $g \geq 2$ sur un corps algébriquement clos de caractéristique 0.

Notations: On notera $\mathcal{O} = \mathcal{O}_C$ le fibré trivial, K le fibré canonique sur C, et $L^k = L \oplus \cdots \oplus L$ (resp. $L^{\otimes k} = L \otimes \cdots \otimes L$) la somme (resp. le produit tensoriel) de k fois le fibré L.
Un g_d^k est un fibré vectoriel en droites de degré d possédant $k+1$ sections globales indépendantes.
Si E est un fibré vectoriel algébrique de rang n et de degré d sur C, $\mu(E) = \frac{d}{n}$ est la *pente* de E.
Si F est un fibré vectoriel sur C, on notera n_F et d_F le rang et le degré de F.
On pose $h^i(E) = \dim \mathrm{H}^i(E)$.

On rappelle qu'un fibré E sur C est dit *stable* (resp. *semi-stable*) si pour tout sous-faisceau propre F de E on a $\mu(F) < \mu(E)$ (resp. $\mu(F) \leq \mu(E)$).

Tout fibré E semi-stable admet une filtration

$$0 = E_0 \subset \cdots \subset E_p = E$$

telle que E_j/E_{j-1} est stable et $\mu(E_j/E_{j-1}) = \mu(E)$ pour $0 < j \leq p$. Le fibré gradué associé $\oplus_j E_j/E_{j-1}$ est appelé le *gradué* de E et est noté $\mathrm{gr}\, E$. La filtration est appelée *filtration de Harder-Narasimhan.* Pour les fibrés non semi-stables on a une filtration analogue où les quotients sont supposés semi-stables de pentes strictement décroissantes. Cette filtration est aussi appelée *filtration de Harder-Narasimhan.*

On note $U_{n,d}$ (resp. $\widetilde{U}_{n,d}$) la variété de modules des fibrés vectoriels stables (resp. semi-stables) de rang n et de degré d sur C. Les points de $U_{n,d}$ sont les classes d'isomorphisme de fibrés stables tandis que les points de $\widetilde{U}_{n,d}$ représentent les classes d'équivalences de fibrés semi-stables, où $E \sim F$ si et seulement si leurs gradués $\mathrm{gr}\, E$ et $\mathrm{gr}\, F$ sont isomorphes (cf **[Se]** ou**[L]**) . On notera $[E]$ la classe d'équivalence contenant E.

Les espaces de Brill-Noether: Les espaces de Brill-Noether $W^{k-1}_{n,d}$ et $\widetilde{W}^{k-1}_{n,d}$ sont définis en tant qu'ensembles par:

$$W^{k-1}_{n,d} := \{E \in U_{n,d} \mid h^0(E) \geq k\}$$
$$\widetilde{W}^{k-1}_{n,d} := \{[E] \in \widetilde{U}_{n,d} \mid h^0(\mathrm{gr}\, E) \geq k\}$$

On donne à $W^{k-1}_{n,d}$ (resp. $\widetilde{W}^{k-1}_{n,d}$) une structure de sous-schéma fermé de $U_{n,d}$ (resp. $\widetilde{U}_{n,d}$) (cf [**L**], [**A-C-G-H**] ou [**B-G-N**]). Le problème de Brill-Noether consiste à trouver quand ces espaces sont vides, quelle est leur dimension, s'ils sont irréductibles etc...
Il résulte de la construction que si $W^{k-1}_{n,d} \neq \emptyset$ et si $W^{k-1}_{n,d} \neq U_{n,d}$, alors:
- sa dimension est

$$\dim\bigl(W^{k-1}_{n,d}\bigr) \geq \rho(g,d,n,k-1) = n^2(g-1)+1-k(k-d+n(g-1))$$

- son espace des points singuliers $\mathrm{Sing}\, W^{k-1}_{n,d}$ vérifie

$$W^{k}_{n,d} \subset \mathrm{Sing}\, W^{k-1}_{n,d}$$

- son espace tangent en un point E tel que $h^0(E) = k$ est le noyau du morphisme

$$p^* : \mathrm{Ext}^1(E,E) \longrightarrow \mathrm{H}^0(E)^* \otimes \mathrm{H}^1(E)$$

dual du morphisme de Petri

$$p : \mathrm{H}^0(E) \otimes \mathrm{H}^0(E^* \otimes K) \longrightarrow \mathrm{H}^0(\mathrm{End}(E) \otimes K)$$

donné par la multiplication des sections.
On déduit de cette dernière propriété que si le morphisme de Petri est injectif en un tel point E, alors $W^{k-1}_{n,d}$ est lisse en ce point et que la composante irréductible contenant E est de dimension $\rho(g,d,n,k-1)$.
On ne sait pas en général quand $W^{k-1}_{n,d}$ est non vide, irréductible et quand le morphisme de Petri est injectif. On sait encore moins de choses sur $\widetilde{W}^{k-1}_{n,d}$. En fait, $\widetilde{W}^{k-1}_{n,d}$ n'est même pas la clôture de $W^{k-1}_{n,d}$ dans $\widetilde{U}_{n,d}$ (cf [**B-G-N**]).

Il est coutume de poser $\mu = \frac{d}{n}$ et $\lambda = \frac{k}{n}$. L'idée est due à A. King. Ceci permet de se ramener à un problème à deux variables (μ et λ) au lieu des trois variables d, n et k et donne une certaine analogie avec le cas des fibrés en droites, comme nous le verrons par la suite. De plus, les résultats vont pouvoir s'interpréter sur des graphiques (μ en abscisse et λ en ordonnée). Si E est un fibré sur C de rang n et de degré d possédant k sections globales indépendantes, on associe à E le point de coordonnées $(\frac{d}{n}, \frac{k}{n})$, et le problème de Brill-Noether devient:

en un point de coordonnées $(\frac{d}{n}, \frac{k}{n})$ existe-t-il des fibrés E de rang n, de degré d possédant k sections globales indépendantes? Et quelle est la stucture de l'espace de Brill-Noether $W^{k-1}_{n,d}$ constitués par tous ces fibrés?

Les théorèmes de Riemann-Roch et de Clifford permettent de dégager une zone où le problème n'est pas trivial:

A-1 Théorème de Riemann-Roch: *Soit E un fibré vectoriel de degré d et de rang n sur C, alors* $\mathrm{h}^0(E) - \mathrm{h}^1(E) = d + n(1-g)$.

D'où $\mathrm{h}^0(E) \geq d+n(1-g)$ ou encore $\lambda \geq \mu+1-g$. Donc en dessous de la droite $\lambda = \mu + 1 - g$, les espaces de Brill-Noether sont les espaces $U_{n,d}$ tout entiers.

A-2 Théorème de Clifford: *Soit E un fibré semi-stable de rang n et de degré d sur C, tel que $0 \leq \mu(E) \leq 2g-2$. Alors on a*

$$\mathrm{h}^0(E) \leq n + \frac{d}{2}$$

avec égalité si et seulement si l'on est dans l'un des cas suivants:

- *$E \simeq \mathcal{O}^n$*
- *$E \simeq K^n$*
- *C est hyperelliptique, $E \simeq L^{\otimes s} \oplus \cdots L^{\otimes s}$ et L l'unique g^1_2 et $0 < s < g-1$.*

Or, $\mathrm{h}^0(E) \leq n + \frac{d}{2} \Leftrightarrow \lambda \leq 1 + \frac{\mu}{2}$. Donc au-dessus de la droite d'équation $\lambda = 1 + \frac{\mu}{2}$, les espaces de Brill-Noether sont vides.
Notons que l'on trouve une démonstration du théorème de Clifford par G. Xiao dans [**B-G-N**] hormis la démonstration des cas d'égalité que l'on peut lire dans un article de R. Re (cf [**Re**]). Dans cet article l'auteur précise le théorème de Clifford. Nous donnons ici une version simplifiée des différents théorèmes:

A-3 Théorème: *Soit C une courbe non-hyperelliptique et soit E un fibré vectoriel semi-stable de rang n et de degré d tel que $1 < \mu(E) < 2g-2$. Alors on a*

$$\mathrm{h}^0(E) \leq \frac{d+n}{2}$$

qui peut aussi s'écrire $\lambda \leq \frac{\mu+1}{2}$.

D'autre part, il est clair qu'un fibré semi-stable de degré négatif n'a pas de sections globales: l'existence d'une section globale d'un fibré E implique un morphisme du fibré trivial de degré 0 dans E. Donc on peut se restreindre à $\mu > 0$ et bien sûr à $\lambda > 0$. De plus, si E est un fibré semi-stable de pente $\mu > 2g-2$, $\mathrm{H}^1(E) = \mathrm{H}^0(E^* \otimes K) = 0$ puisque la pente de $E^* \otimes K$ est strictement négative. D'après le théorème de Riemann-Roch on obtient dans ce cas $\mathrm{H}^0(E) = d - n(g-1)$. Donc si $\mu > 2g-2$ tous les fibrés se trouvent sur la droite de Riemann-Roch $\lambda = \mu - g + 1$.

On déduit de ce qui précède une première zone délimitée par la droite de Riemann-Roch, celle de Clifford, les axes et la droite $\mu = 2g-2$ (cf figure a). La droite de Re n'intervient que pour le cas non-hyperelliptique. En dehors de cette zone, les espaces de Brill-Noether sont soit vides soit la variété de modules $U_{n,d}$ toute entière.

Enfin, pour que $W^{k-1}_{n,d}$ soit non vide, on peut escompter que sa dimension théorique, $\rho(g,d,n,k-1) = n^2(g-1)+1-k(k-d+n(g-1))$, soit positive. En fait cette inégalité ne s'exprime pas qu'en fonction des variables μ et λ et dans la pratique l'inégalité $\rho(g,d,n,k-1) \geq 1$ a un rôle essentiel. Déjà elle s'exprime parfaitement avec les seules variables μ et λ:

$$\rho(g,d,n,k-1) \geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{n^2}\big(\rho(g,d,n,k-1)-1\big) \geq 0$$

et

$$\frac{1}{n^2}\big(\rho(g,d,n,k-1)-1\big) = g-1-\frac{k}{n}\big(\frac{k}{n}-\frac{d}{n}+g-1\big) = g-\lambda(\lambda-\mu+g-1)-1$$

Donc

$$\rho(g,d,n,k-1) \geq 1 \Leftrightarrow \rho(g,\mu,1,\lambda-1) \geq 1$$

On appelle la courbe d'équation $\rho(g,\mu,1,\lambda-1)=1$, la *courbe de Brill-Noether*. Cette équation est notée dans de nombreux articles $\widetilde{\rho}=0$. L'équivalence ci-dessus montre que l'existence d'un fibré stable de pente $\frac{d}{n}$ avec k sections est liée à l'existence de fibrés en droites de "degré" μ avec λ sections (il faudrait que ces valeurs soient entières): c'est dans ce sens qu'il faut comprendre le théorème de Teixidor (théorème B-2 de ce chapitre).
Sous cette courbe les espaces de Brill-Noether sont escomptés être non vides (cf figure a).
Remarquons ici que le théorème de Riemann-Roch et la dualité de Serre impliquent une certaine symétrie dans le graphique: si E de pente μ a k sections, alors $\mathrm{h}^0(K\otimes E^*) = \mathrm{h}^1(E) = k+n(g-1)-d$. Donc si E correspond à un point (μ,λ), alors $K\otimes E^*$ se place en $(2g-2-\mu, \lambda+g-1-\mu)$. Il suffit donc de traiter le cas $0 \leq \mu \leq g-1$, le reste se déduisant par symétrie.

Le problème de Brill-Noether se ramène ainsi à l'étude de la région que l'on a dégagée précédemment et il faut déterminer pour quels triplets (n,d,k) de cette région (et pour quelles courbes!) on a bien:

- $W^{k-1}_{n,d}$ (resp. $\widetilde{W}^{k-1}_{n,d}$) est non vide
- $W^{k-1}_{n,d}$ (resp. $\widetilde{W}^{k-1}_{n,d}$) est irréductible, de dimension $\rho(g,d,n,k-1)$.
- Le lieu des points singuliers de $W^{k-1}_{n,d}$ vérifie

$$\operatorname{Sing} W^{k-1}_{n,d} = W^{k}_{n,d}$$

Ceci a fait l'objet de nombreux articles et l'on possède déjà un certain nombre de résultats. Nous en donnons un panorama dans la partie suivante.

B- Panorama des résultats connus

Pour les fibrés en droites, la situation est particulièrement satisfaisante. Tous les résultats se trouvent dans [**A-C-G-H**] chap.V et sont dus à une liste impressionnante de mathématiciens. Les principaux résultats dont nous aurons besoin par la suite peuvent se mettre sous la forme du théorème suivant:

B-1 Théorème: *Si C est une courbe algébrique lisse de genre g et si $\rho(g,d,1,k-1) \geq 0$, alors $W_{1,d}^{k-1} \neq \emptyset$. Si C est une courbe algébrique lisse générique de genre g, alors*

$$W_{1,d}^{k-1} \neq \emptyset \Leftrightarrow \rho(g,d,1,k-1) \geq 0$$

et si $\rho(g,d,1,k-1) \geq 1$, on a $dim W_{1,d}^{k-1} = \rho(g,d,1,k-1)$ ainsi que $Sing W_{1,d}^{k-1} = W_{1,d}^{k}$.

Pour les fibrés de rang supérieur, le théorème le plus général que nous connaissons est dû à M. Teixidor i Bigas (cf [**Te-1**] 1990). La formulation en était fort complexe et n'a été "simplifiée" que ultérieurement (Grzegorczyk, King, Newstead...) avec l'introduction des paramètres λ et μ. Ici, nous en donnons une version plus courte, mais complète grâce à la symétrie de Riemann-Roch signalée à la fin de la partie A (cf figures b et c):

B-2 Théorème: *Soit C une courbe lisse générique.*
Si pour des valeurs entières λ_0 et μ_0, $\rho(g,\mu_0,1,\lambda_0-1) > 1$, alors pour toutes valeurs $\mu = \frac{d}{n} \geq \mu_0$ et $\lambda = \frac{k}{n} \leq \lambda_0$, $W_{n,d}^{k-1}$ (resp. $\widetilde{W}_{n,d}^{k-1}$) est non vide et possède une composante irréductible de la bonne dimension.
Si $\rho(g,\mu_0,1,\lambda_0-1) = 1$, l'assertion est encore vraie, sauf pour $\mu = \mu_0$ où l'on doit se restreindre aux fibrés semi-stables.

La démonstration de Teixidor utilise des techniques de dégénération de courbes. Elle construit une variété de modules $\mathcal{U}_{n,d}$ (resp. $\widetilde{\mathcal{U}}_{n,d}$ sa compactification) de familles de fibrés vectoriels stables (resp. semi-stables) de rang n et de degré d indexée par une famille de courbes "locale": on considère une famille projective et plate de courbes $\pi : X \to S$ avec X lisse et S le spectre d'un anneau de valuation discrète (complet ou Hensélien cf [**E-H-1**] p. 347 et suivantes) telle que la fibre générique soit non singulière et la fibre spéciale n'ait comme singularité que des points doubles ordinaires. Une famille de fibrés stables (resp. semi-stables) est alors un faisceau cohérent sur X tel que sa restriction à la fibre

générique soit un fibré stable (resp. semi-stable) et que sa restriction à la fibre spéciale soit un faisceau de profondeur 1 b-stable (resp. b-semi-stable) (cf [**Se**] Chap. 7). Ceci nécessite de polariser la courbe spéciale puisqu'elle n'est pas lisse. La construction ne diffère alors en rien de celle donnée dans [**Se**] Chap. 8. Puis elle suppose que la fibre spéciale T est composée d'une courbe rationnelle lisse intersectée par g courbes elliptiques. La partie technique est alors de donner des conditions pour qu'un fibré b-stable sur T avec k sections se prolonge en une famille de fibrés sans perdre de sections. C'est en fait la généralisation des séries linéaires limites introduites par Eisenbud et Harris (cf [**E-H-1-2-3**]).
Notons que la variété de modules $\widetilde{\mathcal{U}}_{n,d}$ étant projective, un fibré semi-stable $\mathcal{F}_g$ sur la fibre générique se prolonge en un faisceau $\mathcal{F}$ sans torsion sur X tel que sa restriction $\mathcal{F}_0$ à la fibre spéciale soit un faisceau de profondeur 1. Aux points singuliers, $\mathcal{F}_0$ peut ne pas être localement libre. Il faut alors utiliser des blowing up pour obtenir un fibré au-dessus de la courbe spéciale. Mais si l'on suppose que la courbe spéciale est lisse, $\mathcal{F}_0$ est immédiatement un fibré et le théorème de semi-continuité implique que $\mathrm{h}^0(\mathcal{F}_0) \geq \mathrm{h}^0(\mathcal{F}_g)$ (cf [**H**] théorème 12.8 p. 288). On en déduit le lemme suivant:

B-3 Lemme: *Soit g, n, d, k des entiers tels que, pour une courbe lisse générique de genre g, il existe un fibré semi-stable E de rang n, de degré d et possédant au moins k sections globales. Alors l'existence d'un tel E est vraie pour toutes les courbes lisses.*

Démonstration: Il faut alors comprendre le terme générique comme "il existe un ouvert V de la variété de modules de courbes $\mathcal{M}_g$ tel que sur toute courbe lisse dans V il existe un bon fibré". Soit C une courbe lisse, alors il existe une famille projective et plate de courbes $\pi : X \to S$ comme ci-dessus telle que la fibre générique géométrique soit dans V et la fibre spéciale égale à C. Alors le fibré semi-stable E sur la fibre générique se prolonge à X pour donner un fibré semi-stable sur la courbe C et il possède au moins autant de sections globales que E. $\diamondsuit$

Ce lemme est faux pour les fibrés stables: la variété $\mathcal{U}_{n,d}$ n'est pas compacte. Le lemme A-3 du chapitre 1 (cf plus loin) montre par exemple que pour C non-hyperelliptique il existe un fibré stable, noté E_K, de rang $g-1$ de degré $2g-2$ possédant g sections globales alors que si la courbe est hyperelliptique, il n'existe que des fibrés semi-stables non stables qui possèdent au moins g sections. Ce cas n'est pas unique.

L'existence de fibré stables dans le théorème de Teixidor, comme on vient de le voir, n'est valable que pour une courbe générique. Par contre, pour les fibrés de petite pente, de pente ≤ 1, on trouve une description précise et valable pour toutes les courbes des espaces de Brill-Noether de fibrés stables. Le théorème suivant est démontré dans [**B-G-N**] (cf graphique d):

B-4 Théorème: *Soit C une courbe lisse. On suppose que $0 \leq \frac{d}{n} \leq 1$.*
$W^{k-1}_{n,d}$ est non vide irréductible de la bonne dimension et vérifie

$$Sing\, W^{k-1}_{n,d} = W^{k}_{n,d}$$

si et seulement si $d > 0$, $n \leq d + (n-k)g$ et $(n,d,k) \neq (n,n,n)$.
$\widetilde{W}^{k-1}_{n,d}$ est non vide et irréductible si et seulement si $\big(d = 0$ et $k \leq n\big)$ ou $\big(d > 0$ et $n \leq d + (n-k)g\big)$.

L'inégalité $n \leq d + (n-k)g$ peut s'écrire $1 \leq \mu + g(\mu - \lambda)$, ou encore $\lambda \leq 1 + \frac{1}{g}(\mu - 1)$. On notera Δ la droite d'équation $\lambda = 1 + \frac{1}{g}(\mu - 1)$. La droite Δ est en fait la tangente à la courbe de Brill-Noether $\rho(g, \mu, \lambda, k-1) = 1$ au point $(1,1)$. Pour $0 \leq \mu \leq 1$, les espaces de Brill-Noether correspondants à des points au-dessus de cette droite sont vides.
De plus, la clef de voûte de la démonstration est: si E est un fibré semi-stable de pente ≤ 1 avec k sections globales indépendantes, alors il peut s'écrire comme une extension de fibrés

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^k \longrightarrow E \longrightarrow F \longrightarrow 0\ .$$

Et on vérifie que ces extensions sont paramétrées par une variété irréductible de dimension attendue (aux automorphismes près de $\mathcal{O}^k$). On voit que ce théorème donne une solution complète pour les courbes de genre 2 grace à la symétrie de Riemann-Roch (cf figure e). C'est la raison pour laquelle dans les chapitres suivants, nous supposerons que $g \geq 3$, même si les résultats restent le plus souvent valables dans le cas $g = 2$.
Enfin, le travail qui suit a en partie pour objet de montrer que l'inégalité ci-dessus est encore valable pour une pente μ comprise entre 1 et 2 (cf figure f).

Il existe de nombreux autres résultats moins généraux comme par exemple:
- Si $0 < d \leq g - 1$, $W^0_{n,d}$ est irréductible de la bonne dimension (cf [**Su**]) et $\mathrm{Sing}\, W^0_{n,d} = W^1_{n,d}$ (cf [**L**]).
- Le cas des fibrés de rang 2 est en partie traité dans [**Su**], [**Te-2-3**] et [**T**].
- Les variétés $W^{k-1}_{3,1}$ et $W^{k-1}_{3,2}$ sont décrites dans [**B-N**].

L'étude de ces cas particuliers fait apparaître que $W^{k-1}_{n,d}$ peut avoir une dimension plus grande que ρ, peut ne pas être réduit et avoir un lieu de singularité distincts de $W^k_{n,d}$, et ceci même pour C générique.

C- Préliminaires

On aura besoin par la suite de certains résultats plus ou moins connus sur les fibrés. Afin d'alléger les démonstrations des chapitres suivants, ils se trouvent réunis ici, mais n'ont pas de relations directes entre eux. Cependant, ils donnent, dans des cadres plus simples, une bonne idée des différentes méthodes que nous utiliserons. Les deux premiers lemmes sont très bien connus, mais nous les redonnons car nous y ferons appel à plusieurs reprises et ne connaissons pas de référence.

C-1 Lemme: *Soit E un fibré vectoriel de rang n engendré par ses sections. Alors E est engendré par $n+1$ sections globales.*

Démonstration: Si E est un fibré en droites, on montre que dans tout sous-espace de sections globales $V \subset \mathrm{H}^0(E)$ qui engendrent E, on peut trouver deux sections qui engendrent E. On peut supposer $\dim V \geq 3$. Soit $s \in V$ s'annulant aux points $x_1, \cdots, x_l$. On note $V_i \subset V$ l'espace des sections de V qui s'annulent en x_i. Comme V engendre E, $\dim V_i = \dim V - 1$, pour tout i. Donc $\cup_{i=1,\cdots,l} V_i \neq V$ et une section $t \in V \setminus \cup_{i=1,\cdots,l} V_i$ avec la section s conviennent. Si E est de rang supérieur, d'après un lemme de Serre, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^{n-1} \longrightarrow E \longrightarrow \det E \longrightarrow 0$$

On peut donc trouver deux sections globales de E qui engendrent $\det E$ et ces deux sections plus les $n-1$ correspondant à l'injection du fibré trivial $\mathcal{O}^{n-1}$ engendrent E. $\diamondsuit$

C-2 Définition et lemme: *Soit*

$$0 \longrightarrow H \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow 0$$

une extension de faisceaux cohérents. Cette extension est représentée par un élément $e \in Ext^1(G,H)$. On dit qu'un morphisme de faisceaux $s : M \to G$ remonte à E si et seulement si $s \in Im\big(Hom(M,E) \to Hom(M,G)\big)$.
En appliquant le foncteur $Hom\,(-,H)$, on obtient un morphisme ϕ induit par s de $Ext^1(G,H)$ dans $Ext^1(M,H)$. Le morphisme s remonte à E si et seulement si l'image de e par ce morphisme est nulle, c.-à-d. $\phi(e) = 0$.

Démonstration: On peut calculer $\phi(e)$ par une autre méthode. On applique le foncteur $\mathrm{Hom}\,(M,-)$ à l'extension ci-dessus pour obtenir une suite exacte longue

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(M,H) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M,E) \longrightarrow \mathrm{Hom}(M,G) \\ \xrightarrow{\psi} \mathrm{Ext}^1(M,H) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(M,E) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(M,G) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

et on a $\phi(e) = \psi(s)$. Et la suite exacte longue ci-dessus montre bien que $\psi(s) = 0$ si et seulement si s remonte à E. $\diamondsuit$

C-3 Lemme: *Soit C une courbe lisse complexe, V et W deux fibrés semi-stables. Alors $V \otimes W$ est semi-stable.*

Démonstration: La démonstration est due à Sundaram (cf **[Na]** lemme 2-3 p.181). Sundaram introduisait la condition $\mu(W) - \mu(V) \geq 0$, mais celle-ci ne joue aucun rôle dans la démonstration de la semi-stabilité (le lemme comporte d'autres assertions): en utilisant la correspondance entre les fibrés semi-stables sur C et les représentations unitaires du groupe fondamental de C, on montre que $W \otimes W^*$ et $V \otimes V^*$ sont semi-stables et que si V_1 et V_2 sont deux fibrés semi-stables tels que $\deg V_1 = \deg V_2 = 0$, alors $V_1 \otimes V_2$ est semi-stable (cf **[Na-Se]** et **[Se]** Théorème 39 p.41). Donc $V \otimes V^* \otimes W \otimes W^*$ est semi-stable. Soit $T \subset W \otimes V$ un sous-fibré. Alors $T \otimes W^* \otimes V^* \subset V \otimes W \otimes V^* \otimes W^*$. D'où $\mu(T \otimes W^* \otimes V^*) = \mu(T) - \mu(W) - \mu(V) \leq 0$ et $\mu(T) \leq \mu(V \otimes W)$. Ce qui termine la démonstration. $\diamondsuit$

C-4 Lemme: *Pour un fibré F générique dans $U_{n,d}$, toute extension non triviale*

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow E \longrightarrow \Theta \longrightarrow 0$$

d'un faisceau de torsion Θ de degré 1 et de support $x \in C$ par F vérifie E stable.

Démonstration: Ce résultat est déjà connu, mais en l'absence de référence, nous en redonnons une démonstration: supposons que E est non stable, il possède un quotient G stable de pente $\mu(G) = \frac{d_G}{n_G} \leq \mu(E) = \frac{d+1}{n}$. Soit H le noyau de ce morphisme:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 0 & & & & \\ & & & & \downarrow & & & & \\ & & & & H & & & & \\ & & & & \downarrow & & & & \\ 0 & \longrightarrow & F & \longrightarrow & E & \longrightarrow & \Theta & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow & & & & \\ & & & & G & & & & \\ & & & & \downarrow & & & & \\ & & & & 0 & & & & \end{array}$$

On a un morphisme non nul de F dans G et comme F est stable on en déduit que $\mu(G) = \frac{d_G}{n_G} > \frac{d}{n} = \mu(F)$ (car $F \not\simeq G$). L'inégalité

$$\frac{d}{n} < \frac{d_G}{n_G} \leq \frac{d+1}{n}$$

montre que pour n_G fixé, il ne peut y avoir au plus qu'une seule valeur possible pour d_G. Or le faisceau image du morphisme $F \to G$ est de rang celui de G et il doit aussi vérifier l'inégalité ci-dessus (il n'est pas isomorphe à F). On en déduit que ce morphisme est surjectif. Soit M son noyau. On obtient un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & H & \longrightarrow & \Theta & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & F & \longrightarrow & E & \longrightarrow & \Theta & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & G & \longrightarrow & G & \longrightarrow & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & & &
\end{array}$$

Pour conclure, il suffit de compter le nombre de paramètres Γ dont dépendent les extensions

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow 0$$

avec G stable et de montrer que ce nombre est inférieur à $n^2(g-1)+1$, la dimension de $U_{n,d}$.
On suppose n_G et d_G fixés. G dépend de $n_G^2(g-1)+1$ paramètres. Soient n_M et d_M le rang et le degré de M. La famille des M forme une famille limitée puisque celle-ci est incluse dans la famille des noyaux des morphimes entre deux familles limitées (cf [**LP**] lemme 7.3). D'après le lemme 4.1 de [**BGN**], cette famille dépend de au plus $n_M^2(g-1)+1$ paramètres. Et pour M et G fixés les extensions

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow F \longrightarrow G \longrightarrow 0$$

sont paramétrées par $\mathrm{Ext}^1(G,M) \simeq \mathrm{h}^1(G^* \otimes M)$. F et G étant stables, il n'existe pas de morphisme non nul $G \to F$, donc $\mathrm{h}^0(G^* \otimes M) = 0$. En appliquant le théorème de Riemann-Roch, on obtient:

$$\mathrm{h}^1(G^* \otimes M) = n_M d_G - n_G d_M + n_G n_M (g-1)$$

De plus dans le diagramme ci-dessus G contredit la stabilité de E, donc $\mu(H) = \frac{d_M+1}{n_M} \geq \frac{d_G}{n_G} = \mu(G)$. On en déduit

$$n_M d_G - n_G d_M \leq n_G$$

Ce qui donne

$$\mathrm{h}^1(G^* \otimes M) \leq n_G + n_G n_M (g-1)\ .$$

Le nombre de paramètres total Γ doit donc vérifier pour certaines valeurs de n_G, d_G, n_M et d_M:

$$\Gamma \leq n_G^2(g-1) + 1 + n_M^2(g-1) + 1 + n_G + n_M n_G (g-1) - 1$$

et avec $n = n_G + n_M$, on obtient

$$\Gamma \leq n^2(g-1) + 1 - n_G(n_M(g-1) - 1) < n^2(g-1) + 1$$

Ce qui termine la démonstration. $\diamondsuit$

C-5 Lemme: *Soient $n > 1$ et $d \geq 0$ deux entiers tels que $\frac{d+1}{n} < g$. Si L est un fibré en droites générique de degré d, alors une extension générique*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^{n-1} \longrightarrow E \longrightarrow L \longrightarrow 0$$

vérifie $h^0(E) = n-1$.

Démonstration: Soit une extension

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^{n-1} \longrightarrow E \longrightarrow L \longrightarrow 0 \qquad (*)$$

Il est clair que $\mathrm{h}^0(E) \geq n-1$. Si $\mathrm{h}^0(E) > n-1$, alors une section de L remonte à E. Si $d \leq g-1$, on peut supposer que L n'a pas de sections et c'est fini. Pour $d > g-1$, on peut supposer que $\mathrm{h}^1(L) = 0$ et alors $\mathrm{h}^0(L) = d + 1 - g$.
Soit donc une section s de L, $s : \mathcal{O} \to L$. Le conoyau de ce morphisme est un faisceau de torsion T de degré d:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{s} L \longrightarrow T \longrightarrow 0$$

En appliquant le foncteur $\mathcal{H}om\,(\mathcal{O}^{n-1}, -)$, on obtient une suite exacte longue

$$\begin{gathered} 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(T, \mathcal{O}^{n-1}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(L, \mathcal{O}^{n-1}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{O}, \mathcal{O}^{n-1}) \\ \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(T, \mathcal{O}^{n-1}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(L, \mathcal{O}^{n-1}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}, \mathcal{O}^{n-1}) \longrightarrow 0 \end{gathered}$$

qui devient

$$\begin{gathered} 0 \longrightarrow \mathrm{H}^0(\mathcal{O}^{n-1}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(T, \mathcal{O}^{n-1}) \\ \longrightarrow \mathrm{H}^1(L^* \otimes \mathcal{O}^{n-1}) \xrightarrow{\phi} \mathrm{H}^1(\mathcal{O}^{n-1}) \longrightarrow 0 \end{gathered}$$

La section s remonte à E si et seulement si l'élément dans $\mathrm{H}^1(L^* \otimes \mathcal{O}^{n-1})$ représentant l'extension $(*)$ a pour image 0 par ϕ (cf lemme C-2). Donc le sous-espace vectoriel de $\mathrm{H}^1(L^* \otimes \mathcal{O}^{n-1})$ représentant les extensions pour lesquelles la section s remonte est de dimension $\dim \operatorname{Ker} \phi$. Or, on calcule facilement $\dim \operatorname{Ker} \phi$ à partir de la suite exacte longue ci-dessus:

$$\dim \operatorname{Ker} \phi = d(n-1) - (n-1) = (d-1)(n-1)$$

Par hypothèse L a un espace de sections globales de dimension $d+1-g$. Donc le sous-espace de $\mathrm{H}^1(L^* \otimes \mathcal{O}^{n-1})$ constitué des extensions

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^{n-1} \longrightarrow E \longrightarrow L \longrightarrow 0$$

avec $\mathrm{h}^0(E) > n-1$ est de dimension au plus $(d-1)(n-1)+d+1-g$. Pour conclure, on montre que

$$\dim \mathrm{H}^1(L^* \otimes \mathcal{O}^{n-1}) > (d-1)(n-1) + d + 1 - g\ .$$

Or $\dim \mathrm{H}^1(L^* \otimes \mathcal{O}^{n-1}) = (n-1)(d+g-1)$, et on calcule que

$$\dim \mathrm{H}^1(L^* \otimes \mathcal{O}^{n-1}) - (d-1)(n-1) + d + 1 - g = ng - d - 1\ .$$

Par hypothèse $\frac{d+1}{n} < g$, ce qui termine la démonstration. $\diamondsuit$

Chapitre 1: La droite Δ

Nous montrons dans ce chapitre que pour une pente μ, $1 < \mu < 2$, les variétés de Brill-Noether $\widetilde{W}^{k-1}_{n,d}$ sont vides si le point de coordonnées $(\frac{d}{n}, \frac{k}{n})$ se trouve au dessus de la droite Δ. De plus, pour tout point ayant un sens sur cette droite, nous donnons une description complète des espaces de Brill-Noether correspondants. Il résulte de la partie B que les points sur la droite Δ correspondent à des fibrés de rang n de degré $n+gl$ possédant $n+l$ sections globales, où l est un entier. Nous montrons alors que pour tout entier k, $0 \leq k \leq n+l$, il existe une composante irréductible de $W^{k-1}_{n,n+gl}$ de la bonne dimension (cf figure f). Les points sous la droite Δ ne pouvant être atteints par cette méthode, c'est-à-dire si $d = n+gl+l'$ avec $0 < l' < g$, seront traités dans le chapitre 2.

La partie A traite la non-existence.
La partie B traite l'existence et décrit les espaces de Brill-Noether correspondants pour les points qui se trouvent sur la droite Δ.
La partie C traite l'existence aux points qui se déduisent de ceux de la partie B.

A- Non-existence de fibrés stables.

Rappelons tout d'abord que la droite Δ a pour équation $\lambda = 1 + \frac{1}{g}(\mu - 1)$. Le théorème ci-dessous implique qu'au dessus de cette droite les espaces de Brill-Noether sont vides.

A-1 Théorème: *Si E est un fibré semi-stable sur C de rang n et de pente μ, $0 < \mu = \frac{d}{n} < 2$, alors*

$$\mathrm{h}^0(E) \leq n + \frac{1}{g}(d-n)$$

ce qui s'écrit aussi

$$\lambda \leq 1 + \frac{1}{g}(\mu - 1)$$

où $k = \mathrm{h}^0(E)$ et $\lambda = \frac{k}{n}$.

Par la suite, nous aurons besoin d'un résultat plus général. L'hypothèse de la semi-stabilité du fibré E est souvent difficile à vérifier. La proposition ci-dessous permet de contourner ce problème dans certains cas. Le théorème A-1 s'en déduit immédiatement.

A-2 Proposition: *Soit E un fibré vectoriel de rang n et de degré d tel que:*

- *son sous-fibré semi-stable maximal est de pente < 2;*
- *$h^0(E^*) = 0$.*

Alors

$$\mathrm{h}^0(E) \leq n + \frac{1}{g}(d-n) \qquad (**) \quad .$$

Nous aurons besoin du lemme suivant qui est dû à Paranjape et Ramanan (cf [**P-R**]), dont nous donnons ici une autre démonstration:

A-3 Lemme: *Soit K le fibré canonique, E_K le fibré vectoriel de rang $g-1$ et de degré $2g-2$ dual du noyau du morphisme d'évaluation $\mathrm{H}^0(K) \otimes \mathcal{O} \to K$:*

$$0 \longrightarrow E_K^* \longrightarrow \mathrm{H}^0(K) \otimes \mathcal{O} \longrightarrow K \longrightarrow 0 \ .$$

Alors E_K est stable si la courbe C n'est pas hyperelliptique, sinon on a $E_K \simeq L \oplus \cdots \oplus L$ où L est l'unique g_2^1 de C. Dans ce cas, E_K est semi-stable, non stable.

Enfin, pour les fibrés de pente 2, on a le corollaire suivant de la proposition A-2:

A-4 Corollaire: *Si E est stable de pente 2, l'inégalité $(**)$ est toujours valable pour $E \not\simeq E_K$ et C non hyperelliptique ou $E \not\simeq L$ et C hyperelliptique de g_2^1 isomorphe à L.*

Démonstration du lemme: Dans le cas où C est non hyperelliptique, considérons la suite exacte

$$0 \longrightarrow E_K^* \longrightarrow \mathrm{H}^0(K) \otimes \mathcal{O} \longrightarrow K \longrightarrow 0 \ .$$

et supposons que E_K n'est pas stable. Il admet alors un fibré quotient stable de pente $\mu(G) = \frac{d_G}{n_G} \leq \mu(E_K) = \frac{2g-2}{g-1} = 2$. Le dual de la suite exacte ci-dessus montre que E_K, donc G, est engendré par ses sections, d'où $\mu(G) \geq 0$.
On a $\mathrm{h}^0(E_K^*) = 0$. Donc $\mathrm{h}^0(G^*) = 0$ et $\mu(G) > 0$ (le seul fibré stable de degré 0 engendré par ses sections est le fibré trivial). D'après le lemme C-1 du chap. 0, G est engendré par $n_G + 1$ sections. On obtient une suite exacte

$$0 \longrightarrow T^* \longrightarrow \mathcal{O}^{n_G+1} \longrightarrow G \longrightarrow 0$$

et T est un fibré en droites de degré $\deg T = d_G < \deg E_K = 2g-2$ et le dual de la suite exacte ci-dessus montre que $\mathrm{h}^0(T) \geq n_G + 1$. Or le théorème de Clifford (cf [**A-C-G-H**] p. 107) implique que

$$\mathrm{h}^0(T) \leq 1 + \frac{d_G}{2}$$

Donc

$$n_G + 1 \leq 1 + \frac{d_G}{2} \ ,$$

ce qui équivaut à

$$\mu(G) = \frac{d_G}{n_G} \geq 2 = \mu(E_K) \ ,$$

et E_K est au moins semi-stable.
De plus, les cas d'égalité du théorème de Clifford pour une courbe non-hyperelliptique sont:

- $T \simeq \mathcal{O}$ (impossible car $\deg T > 0$);
- $T \simeq K$ (impossible car $\deg T < 2g - 2$)

Et on obtient alors $\mu(G) > 2$, ce qui est impossible par hypothèse et E_K est stable.
Si la courbe est hyperelliptique de g_2^1 , L, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow K^* \longrightarrow \mathcal{O}^g \longrightarrow L \oplus \cdots \oplus L \longrightarrow 0$$

où la somme comporte $g-1$ termes et en prenant le dual de cette suite exacte, on voit que

$$E_K \simeq L \oplus \cdots \oplus L$$

puisqu'ils correspondent tous les deux au dual du noyau du morphisme d'évaluation

$$\mathcal{O} \otimes \mathrm{H}^0(K) \longrightarrow K \longrightarrow 0$$

ce qui termine la démonstration du lemme. $\diamondsuit$

Démonstation de la proposition A-2 et de son corollaire: Considérons la suite exacte

$$0 \longrightarrow E_K^* \longrightarrow \mathrm{H}^0(K) \otimes \mathcal{O} \longrightarrow K \longrightarrow 0$$

On tensorise cette suite par un fibré E

$$0 \longrightarrow E_K^* \otimes E \longrightarrow \mathrm{H}^0(K) \otimes E \longrightarrow K \otimes E \longrightarrow 0$$

pour obtenir une suite exacte longue:

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^0(E \otimes E_K^*) \longrightarrow \mathrm{H}^0(E) \otimes \mathrm{H}^0(K) \longrightarrow \mathrm{H}^0(E \otimes K)$$

$$\longrightarrow \mathrm{H}^1(E \otimes E_K^*) \longrightarrow \mathrm{H}^1(E) \otimes \mathrm{H}^0(K) \longrightarrow \mathrm{H}^1(E \otimes K) \longrightarrow 0$$

Supposons que $\mathrm{h}^0(E \otimes E_K^*) = 0$ et que $\mathrm{h}^1(E \otimes K) = 0$. Alors d'une part, on a $\mathrm{h}^0(E \otimes K) \geq gk$ avec $\mathrm{h}^0(E) = k$ et d'autre part, d'après le théorème de Riemann-Roch, on a

$$\begin{aligned} h^0(E\otimes K) &= h^1(E\otimes K)+n(2g-2)+d-n(g-1) \\ &= ng-n+d \end{aligned}$$

Donc,

$$kg \leq ng-n+d$$

d'où

$$k \leq n+\frac{d-n}{g}$$

Ce qui donne en divisant par n et en posant $\mu=\frac{d}{n}$ et $\lambda=\frac{k}{n}$:

$$\lambda \leq 1+\frac{1}{g}(\mu-1)$$

Ce que nous voulions.

Il reste donc à montrer que dans les conditions de la proposition on a bien $h^0(E\otimes E_K^*)=h^1(E\otimes K)=0$.
Si le sous-fibré maximal de E est de pente <2, alors il n'existe pas de morphisme non nul de E_K semi-stable de pente 2 dans E, donc $h^0(E_K^*\otimes E)=0$. Si E est stable de pente 2, le même raisonnement est valable dans les conditions du corollaire.
D'après le théorème de dualité de Serre, on a: $h^1(E\otimes K)=h^0(E^*)$. Par hypothèse $h^0(E^*)=0$, ce qui termine la démonstration. $\diamondsuit$

A-5 Remarque: Supposons $d>0$. On a montré en fait qu'en un point $(\frac{d}{n},\frac{k}{n})$ au-dessus de la droite Δ, il ne peut exister de fibré semi-stable E de rang n, de degré d et possédant k sections indépendantes que si $h^0(E\otimes E_K^*)\neq 0$ et que $h^0(E\otimes E_K^*)$ mesure en fait le nombre maximal de sections supplémentaires possibles.

B- Les points de la droite Δ

Un fibré vectoriel stable (resp. semi-stable) E de pente μ, $1<\mu<2$ correspondant à un point sur la droite Δ doit vérifier

$$kg=d+n(g-1)$$

On posera avantageusement $k=n+l$. Alors

$$kg=d+n(g-1)\Leftrightarrow g(n+l)=d+n(g-1)\Leftrightarrow d=n+gl$$

De plus, $1<\mu(E)=\frac{d}{n}=1+\frac{gl}{n}<2$ implique

$$0<\frac{gl}{n}<1\ ,$$

ce qui montre que $l > 0$ et $n > gl$.

Les espaces de Brill-Noether que l'on se propose de décrire ici sont donc $W^{n+l-1}_{n,n+gl}$ (resp. $\widetilde{W}^{n+l-1}_{n,n+gl}$), pour $l > 0$ et $n > gl$ (cf figure f).
Nous utiliserons la notation suivante: Soit F un fibré vectoriel engendré par ses sections, alors on notera

$$D(F) = \mathrm{Ker}\big(ev : \mathcal{O} \otimes \mathrm{H}^0(F) \longrightarrow F\big)^*$$

le dual du noyau du morphisme d'évaluation.
Le théorème suivant donne la description annoncée:

B-1 Théorème: *Soit n, l des entiers, $l > 0$ et $n > gl$. Alors on a des isomorphismes*

$$U_{l,n+gl} \xrightarrow{\sim} W^{n+l-1}_{n,n+gl}$$
$$F \mapsto D(F)$$

et

$$\widetilde{U}_{l,n+gl} \xrightarrow{\sim} \widetilde{W}^{n+l-1}_{n,n+gl}$$
$$F \mapsto D(F)$$

Démonstration: On donnera une démonstration du théorème essentiellement pour les fibrés stables. Le cas semi-stable est identique à quelques détails près, que nous nous efforcerons d'indiquer.
Soit F un fibré stable (resp. semi-stable) de degré $d = n + gl$ et de rang l. On a $\frac{d}{l} = \frac{n+gl}{l} > 2g$, puisque par hypothèse $n > gl$, F est engendré par ses sections, $\mathrm{h}^1(F) = 0$ et $\mathrm{h}^0(F) = d - l(g-1) = l + n$. On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow E^* \longrightarrow \mathcal{O} \otimes \mathrm{H}^0(F) \longrightarrow F \longrightarrow 0$$

où E est un fibré vectoriel de rang n, de degré d tel que $\mathrm{h}^0(E) \geq n + l$ et $\mathrm{h}^0(E^*) = 0$. De plus, comme $n > lg$, $\mu(E) = \frac{d}{n} = 1 + \frac{gl}{n} < 2$. L'énoncé du théorème est donc cohérent. On va d'abord montrer que E est stable (resp. semi-stable), puis on définit le morphisme $U_{l,n+gl} \to W^{n+l-1}_{n,n+gl}$ (resp. $\widetilde{U}_{l,n+gl} \to \widetilde{W}^{n+l-1}_{n,n+gl}$) et pour terminer on montre que c'est un isomorphisme (la stabilité de E a déjà été démontrée par David Butler dans [**Li**]).

Stabilité de E: On se restreint maintenant au cas F stable. Supposons que E n'est pas stable. Deux cas se présentent

i) E est semi-stable non stable, alors il existe une suite exacte

$$0 \longrightarrow H \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow 0$$

où G et H sont des fibrés semi-stables non nuls tels que $\mu(G) = \mu(H) = \mu(E)$;

ii) E n'est pas semi-stable, alors on considére la filtration de Harder-Narasimhan de E:

$$0 = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_p = E$$

et il existe un unique j tel que $\mu(E_j/E_{j-1}) \geq \mu(E)$ et $\mu(E_{j+1}/E_j) < \mu(E)$. On pose $H = E_j$ et $G = E/E_j$. On a une suite exacte:

$$0 \longrightarrow H \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow 0$$

et le sous fibré maximal semi-stable de G est par construction E_{j+1}/E_j, donc de pente $< \mu(E) < 2$. Notons ici que ceci implique que $\mu(G) \leq \mu(E)$ et donc $\mu(H) \geq \mu(E)$.

On a vu que $\mathrm{h}^0(E^*) = 0$, donc dans les deux cas $\mathrm{h}^0(G^*) = 0$. D'après la proposition A-2, on a, toujours dans les deux cas:

$$\mathrm{h}^0(G) \leq n_G + \frac{1}{g}(d_G - n_G) \quad .$$

Le fibré G est engendré par ses sections, on peut poser $\mathrm{h}^0(G) = n_G + l_G$, où l_G est un entier strictement positif. L'inégalité précédente s'écrit

$$l_G \leq \frac{1}{g}(d_G - n_G)$$

et donc

$$d_G \geq n_G + gl_G \quad .$$

Or $d_G = d - d_H$ et $n_G = n - n_H$. L'inégalité devient

$$d - d_H \geq n - n_H + gl_G$$

et avec $d = n + gl$

$$g(l - l_G) + n_H \geq d_H$$

$\Leftrightarrow$

$$\tfrac{g}{n_H}(l - l_G) + 1 \geq \tfrac{d_H}{n_H} \quad . \tag{$*$}$$

Par hypothèse $\mu(H) \geq \mu(E) = 1 + \frac{gl}{n} > 1$, donc $l > l_G$.

D'autre part le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & & & 0 & & \\
 & & & & & & \downarrow & & \\
 & & & & & & H & & \\
 & & & & & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & F^* & \longrightarrow & \mathcal{O}^{n+l} \simeq \mathrm{H}^0(F)^* \otimes \mathcal{O} & \longrightarrow & E & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & & & \downarrow & & \\
 & & & & & & G & & \\
 & & & & & & \downarrow & & \\
 & & & & & & 0 & &
\end{array}$$

peut se compléter en un diagramme commutatif de la manière suivante: on a un morphisme $\mathrm{H}^0(\mathcal{O}^{n+l}) \to \mathrm{H}^0(G)$ qui est la composée de $\mathrm{H}^0(\mathcal{O}^{n+l}) \hookrightarrow \mathrm{H}^0(E)$ et de $\mathrm{H}^0(E) \to \mathrm{H}^0(G)$. Soit V l'image de ce morphisme; comme $\mathcal{O}^{n+l}$ engendre E, on en déduit que V engendre G et donc que l'on peut écrire $\dim V = n_G + l'_G$ avec $l'_G > 0$. De plus $V \hookrightarrow \mathrm{H}^0(G)$, donc $l'_G \leq l_G < l$. Et le noyau du morphisme surjectif $\mathcal{O}^{n+l} \to V \otimes \mathcal{O}$ est un fibré trivial de la forme $\mathcal{O}^{n_H + l'_H}$, c'est un sous-espace de sections de $\mathrm{H}^0(H)$. Ce qui donne le diagramme:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & M^* & \longrightarrow & \mathcal{O}^{n_H + l'_H} & \longrightarrow & H & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & F^* & \longrightarrow & \mathcal{O}^{n+l} & \longrightarrow & E & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & N^* & \longrightarrow & \mathcal{O} \otimes V & \longrightarrow & G & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

où M^* et N^* sont les noyaux des morphismes d'évaluation correspondant aux espaces de sections. On a $l = l'_H + l'_G$, et comme $l_G \geq l'_G$, on obtient $l'_H \geq l - l_G > 0$.
De plus, $d_M \leq d_H$: en effet, $d_H - d_M$ est le degré du coker de $\mathcal{O}^{n_H + l'_H} \to H$; si H est semi-stable (cas i)) alors il est nécessairement positif, sinon (cas ii)) H a pour filtration de Harder-Narasimhan $E_0 \subset \cdots \subset E_j = H$ et $\mu(E_j/E_{j-1}) \geq \mu(E)$, et le lemme ci-dessous montre que c'est encore vrai (la démonstration en est triviale):

B-2 Lemme: *Soit E un fibré vectoriel de filtration de Harder-Narasimhan $0 = E_0 \subset \cdots \subset E_p = E$. Alors tout fibré quotient de E est de pente $\geq \mu(E_p/E_{p-1})$.*

Retournons au diagramme: F^* étant stable, on doit alors avoir l'inégalité $\mu(F) = \frac{d}{l} < \mu(M) = \frac{d_M}{n_M}$ (notons que $M \not\simeq 0$ car $l'_H > 0$ et $M \not\simeq F$ car N est non nul). Or $d_M \leq d_H$ et $n_M \geq l'_H$, donc $\frac{d}{l} < \mu(M) \leq \frac{d_H}{l'_H}$. D'où, avec $l'_H \geq (l - l_G)$ (cf plus haut),

$$(l - l_G) \leq l'_H < d_H \frac{l}{d}$$

Si l'on introduit cette inégalité dans l'inégalité $(*)$, on obtient

$$\frac{gl}{d}\frac{d_H}{n_H} + 1 > \frac{d_H}{n_H}$$

$\Leftrightarrow$

$$1 > (1 - \frac{gl}{d})\frac{d_H}{n_H}$$

Or $d = n + gl$, donc $1 - \frac{gl}{d} = \frac{n}{d}$ et l'inégalité ci-dessus devient

$$\frac{d}{n} > \frac{d_H}{n_H}$$

Ceci contredit l'hypothèse $\mu(H) \leq \mu(E)$. Donc E est stable.

Si F est semi-stable, on se place dans le cas ii) et le seul changement qui intervient remplace la dernière inégalité par:

$$\frac{d}{n} \geq \frac{d_H}{n_H}$$

et E est alors semi-stable.

Définition du morphisme $\mathbf{U_{l,n+gl}} \to \mathbf{W^{n+l-1}_{n,n+gl}}$: On considère la variété R^s qui paramètre une famille $\mathcal{E}$ de fibrés de rang l et de degré $n+gl$, et qui sert à construire la variété de modules $U_{l,n+gl}$ (cf [**LP**] ou [**Se**]): le morphisme déduit de $\mathcal{E}$

$$R^s \longrightarrow U_{l,n+gl}$$

est un bon quotient par un groupe du type $\mathrm{PGL}(N)$. Soit $\pi : R^s \times C \to R^s$ la projection. Alors $\pi_* \mathcal{E}$ est un fibré vectoriel de rang $n+l$, et le morphisme canonique sur $R^s \times C$

$$\pi^* \pi_* \mathcal{E} \xrightarrow{\psi} \mathcal{E}$$

est surjectif. On pose

$$\mathcal{F} = \mathrm{Ker}(\psi)^* \ .$$

C'est une famille de fibrés stables de rang n et de degré $n+gl$, paramétrée par R^s. On en déduit un morphisme

$$R^s \longrightarrow U_{n,n+gl}$$

qui est en fait dans $W^{n+l-1}_{n,n+gl}$. Ce morphisme étant $\mathrm{PGL}(N)$ invariant, on en déduit un morphisme (cf [**M-F**]):

$$U_{l,d} \to W^{n+l-1}_{n,d}$$

Le même raisonnement est valable pour les fibrés semi-stables et un raisonnement analogue permettra de définir le morphisme inverse.

Le morphisme $\mathbf{U_{l,n+gl}} \to \mathbf{W^{n+l-1}_{n,n+gl}}$ est un isomorphisme: Pour $n > gl$, on a donc par définition:

$$U_{l,n+gl} \longrightarrow W^{n+l-1}_{n,n+gl}$$
$$F \mapsto D(F)$$

Ce morphisme est injectif car si l'on a deux suites exactes

$$0 \to E^* \to \mathcal{O} \otimes \mathrm{H}^0(F) \to F \to 0$$

et

$$0 \to E^* \to \mathcal{O} \otimes \mathrm{H}^0(F') \to F' \to 0$$

alors $\mathrm{h}^0(E) = n+l$ et le dual du noyau du morphisme d'évaluation

$$\mathcal{O} \otimes \mathrm{H}^0(E) \to E \to 0$$

est isomorphe à F et à F', donc $F \simeq F'$.

Pour montrer que ce morphisme est un isomorphisme, il faut montrer que, pour tout E dans $W^{n+l-1}_{n,n+gl}$,

- E est engendré par ses sections,
- Le noyau F^* du morphisme d'évaluation $\mathcal{O}^{n+l} \to E$ est stable.

En utilisant les propriétés universelles des différents schémas, le morphisme réciproque est alors donné par

$$E \mapsto D(E)$$

et il en est de même pour les fibrés semi-stables.

Soit donc $E \in W^{n+l-1}_{n,n+gl}$ et supposons que E n'est pas engendré par ses sections. Soit Im le faisceau image du morphisme d'évaluation

$$\mathcal{O} \otimes \mathrm{H}^0(E) \longrightarrow E$$

On pose $Im \simeq Im' \oplus \mathcal{O}^s$ où $\mathrm{h}^0(Im'^*) = 0$ (comme Im est engendré par ses sections, c'est possible). On a $\mathrm{h}^0(Im') \geq n_{Im'} + l$.
De plus, tout sous-fibré de Im' est un sous-faisceau de E et donc de pente $< \mu(E) < 2$. On est donc dans les conditions de la proposition A-2, il en résulte que:

$$\mathrm{h}^0(Im') \leq n_{Im'} + \frac{1}{g}(d_{Im'} - n_{Im'})$$

Comme $\mathrm{h}^0(Im') \geq n_{Im'} + l$, on obtient

$$n_{Im'} + l \leq n_{Im'} + \frac{1}{g}(d_{Im'} - n_{Im'})$$

dont on déduit sans difficulté

$$\mu(Im') \geq 1 + \frac{gl}{n_{Im'}} \geq 1 + \frac{gl}{n_E} = \mu(E)$$

et ceci contredit la stabilité de E. Donc E est engendré par ses sections. Pour E semi-stable, on déduit $n_{Im'} = n$, donc $d_{Im'} = d$, d'où $Im' \simeq E$.

Il reste à montrer que le fibré $F = D(E)$ tel que

$$0 \to F^* \to \mathcal{O} \otimes \mathrm{H}^0(E) \to E \to 0$$

est un fibré stable.
On montre tout d'abord que $\mathrm{h}^0(F) = n+l$: il est clair que $\mathrm{h}^0(F) \geq n+l$ puisque $\mathrm{h}^0(E^*) = 0$ et que l'on a la suite exacte duale

$$0 \to E^* \to \mathcal{O} \otimes \mathrm{H}^0(E)^* \to F \to 0$$

De plus, $\mathrm{h}^0(F^*) = 0$.
Supposons que $\mathrm{h}^0(F) = n + l + s$; alors la suite exacte donnée par le morphisme d'évaluation

$$0 \to Q^* \to \mathcal{O} \otimes \mathrm{H}^0(F) \to F \to 0$$

a pour noyau un fibré vectoriel Q vérifiant:

- $\mathrm{rg}\, Q = n + s$ et $\deg Q = d$;
- Q est engendré par ses sections;
- $\mathrm{h}^0(Q^*) = 0$;
- $\mathrm{h}^0(Q) \geq n + l + s$ (car $\mathrm{h}^0(F^*) = 0$).

Cette suite exacte s'inscrit dans le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & E^* & \longrightarrow & \mathcal{O}^{n+l} & \longrightarrow & F & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & Q^* & \longrightarrow & \mathcal{O}^{n+l+s} & \longrightarrow & F & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{O}^s & \longrightarrow & \mathcal{O}^s & \longrightarrow & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & & &
\end{array}$$

qui nous donne une suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}^s \to Q \to E \to 0\ .$$

Notons que Q n'admet pas $\mathcal{O}$ comme facteur direct puisque $\mathrm{h}^0(Q^*) = 0$.
On déduit alors facilement de la suite exacte ci-dessus que le sous-fibré semi-stable maximal de Q est de pente strictement comprise entre 0 et $\mu(E)$. On est donc encore dans les conditions de la proposition A-2, il en découle que:

$$\mathrm{h}^0(Q) \leq n + s + \frac{1}{g}(d - (n + s))$$

Comme $\mathrm{h}^0(Q) \geq n + l + s$ et $d = n + gl$, on obtient

$$n + l + s \leq n + s + l - \frac{s}{g}$$

qui donne la contradiction attendue.

On vient de montrer que $\mathrm{h}^0(F) = n + l = d - l(g-1)$, donc $\mathrm{h}^1(F) = 0$.
Supposons maintenant que F n'est pas stable. On a alors une suite exacte

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow F \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

telle que N est semi-stable et $\frac{d_N}{n_N} = \mu(N) \geq \mu(F) = \frac{d}{l} > 2g$. N est engendré par ses sections et $\mathrm{h}^1(N) = 0$. On en déduit que

$$\mathrm{H}^0(F) \simeq \mathrm{H}^0(N) \oplus \mathrm{H}^0(M)$$

et donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & G^* & \longrightarrow & \mathcal{O} \otimes \mathrm{H}^0(N) & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & E^* & \longrightarrow & \mathcal{O}^{n+l} & \longrightarrow & F & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & H^* & \longrightarrow & \mathcal{O} \otimes \mathrm{H}^0(M) & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

avec H^* et G^* les noyaux des morphismes d'évaluation. Le rang de G, n_G, vérifie $n_G = \mathrm{h}^0(N) - n_N$. Mais on a vu que $\mathrm{h}^1(N) = 0$, donc $\mathrm{h}^0(N) = d_N - n_N(g-1)$.
Il en découle que $n_G = d_N - gn_N$.
Comme E est stable, on doit avoir $\mu(G) > \mu(E)$, ce qui s'écrit

$$\frac{d_N}{d_N - gn_N} > \frac{d}{n}$$

Or $n = d - lg$, l'inégalité précédente est équivalente à

$$1 + \frac{gn_N}{d_N - n_N g} > 1 + \frac{gl}{d - lg} \Leftrightarrow \frac{n_N}{d_N - n_N g} > \frac{l}{d - lg}$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{dn_N - ld_N}{(d_N - n_N g)(d - lg)} > 0 \Leftrightarrow dn_N - ld_N > 0$$

ce qui contredit l'hypothèse $\mu(N) = \frac{d_N}{n_N} \geq \frac{d}{l}$. Donc F est stable.

Pour E semi-stable, on obtient $dn_N - ld_N \geq 0$, mais l'hypothèse de non-semi-stabilité est $\frac{d_N}{n_N} > \frac{d}{l}$, ce qui est encore contradictoire.
Le théorème B-1 est entièrement démontré.
On a considéré que les espaces $W^{n+l}_{n,d}$ était réduit. En fait, c'est le cas, car on vŕifie facilement (cf partie C) que le morphisme de Petri en tout point de $W^{n+l}_{n,d}$ est injectif. $\diamondsuit$

C- Les fibrés stables de rang n de pente $\frac{\mathbf{n+gl}}{\mathbf{n}} < 2$.

Nous avons montré dans la partie B qu'il existe des fibrés stables de rang n, de degré $d = n + gl$ possédant $n + l$ sections globales. Un tel fibré s'inscrit dans une suite exacte

$$0 \longrightarrow F^* \longrightarrow \mathcal{O}^{n+l} \longrightarrow E \longrightarrow 0$$

avec F stable et l'espace de Brill-Noether $W^{n+l-1}_{n,n+gl}$ est isomorphe à $U_{l,n+gl}$. Nous traitons ici la structure des espaces $W^{k-1}_{n,n+gl}$ pour $0 \leq k < n + l$:

C-1 Théorème: *Soit n, l des entiers vérifiant $\frac{n+gl}{n} < 2$ et $0 \leq k \leq n + l$. Alors $W^{k-1}_{n,n+gl}$ a une composante de la bonne dimension.*

C-2 Corollaire: *On suppose que l'on a une suite exacte comme ci-dessus avec E et F stables mais les hypothèse sur le degré d et le rang n de E ne sont plus que $\mu(E) \leq g - 1$ et il faut $\mu(F) > 2g - 1$. Alors, l'assertion sur les espaces de Brill-Noether du théorème est encore vraie.*

Démonstration: Nous démontrons d'abord le théorème C-1. La démonstration se traite en trois parties, le cas $0 \leq k < n$, $k = n$ et le cas $n < k \leq n + l$, et utilise la suite exacte ci-dessus:

$$0 \longrightarrow F^* \longrightarrow \mathcal{O}^{n+l} \longrightarrow E \longrightarrow 0$$

Pour le cas $0 \leq k \leq n$: le fibré E est engendré par ses sections, donc en adaptant le lemme de Serre qui affirme que E s'inscrit dans une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^{n-1} \longrightarrow E \longrightarrow \det E \longrightarrow 0$$

on obtient que pour tout $k < n$, il existe un fibré H_k et une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^k \longrightarrow E \longrightarrow H_k \longrightarrow 0$$

et pour $k = n$, il existe un faisceau de torsion T et une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^n \longrightarrow E \longrightarrow T \longrightarrow 0 \ .$$

Dans ce dernier cas, on sait que la variété paramétrisant les faisceaux de torsion de degré d quotient de $\mathcal{O}^n$, $\mathrm{Quot}^d(n, C)$, est irréductible (cf [**Rego**] théorème A'). De plus, pour tout $T \in \mathrm{Quot}^d(n, C)$, $\mathrm{Ext}^1(T, \mathcal{O}^n) = nd$. On en déduit qu'il existe une variété irréductible paramétrisant toutes les extensions ci-dessus pour T décrivant $\mathrm{Quot}^d(n, C)$ (cf [**Se**]). Les extensions correspondant à des fibrés stables est un ouvert non vide (il contient au moins E). D'autre part, en prenant une somme de n fibrés en droites de degré 1 ou 2 ne possédant chacun qu'une seule section globale, on voit qu'il existe des extensions

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^n \longrightarrow E' \longrightarrow T \longrightarrow 0$$

avec $\mathrm{h}^0(E') = n$. D'après le théorème de semi-continuité, on peut supposer E' stable.
Alors $\mathrm{H}^0(E') \otimes \mathrm{H}^0(E'^* \otimes K) \simeq \mathrm{H}^0(\mathcal{O}^n) \otimes \mathrm{H}^0(E'^* \otimes K) \simeq \mathrm{H}^0(\mathcal{O}^n \otimes E'^* \otimes K)$ (cf [**B-G-N**]). Et comme $\mathrm{H}^0(\mathcal{O}^n \otimes E'^* \otimes K) \hookrightarrow \mathrm{H}^0(E' \otimes E'^* \otimes K)$, on en déduit que le morphisme de Petri associé à E' est injectif, et donc que $W^{n-1}_{n,n+gl}$ a une composante irréductible de la bonne dimension (cf chapitre 0 partie A).

Si $0 < k < n$, on procède exactement de la même manière. On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^k \longrightarrow E \longrightarrow H_k \longrightarrow 0 \ .$$

La famille des fibrés H de rang $n - k$ de degré $n + gl$ tels que $\mathrm{h}^0(H^*) = 0$ est limitée. Cette famille est donc paramétrée par une variété Z irréductible et les fibrés stables sont denses dans Z (cf [**Na-R**] proposition 2.6). On en déduit qu'il existe un fibré projectif sur Z, $\mathcal{F}$, qui paramétrise toutes les extensions de H par $\mathcal{O}^k$, H dans la famille ci-dessus (cf [**Se**] prop. 2 p.190). $\mathcal{F}$ contient l'extension donnée par E et donc il existe un ouvert de l'espace total de la fibration de $\mathcal{F}$ tel qu'en tout point l'extension correspondante donne un fibré stable (ces arguments se trouvent dans [**B-G-N**]).
Il suffit alors de montrer que parmi les extensions dans $\mathcal{F}$ il en existe une qui donne un fibré E'_k tel que $\mathrm{h}^0(E'_k) = k$: en effet, d'après le théorème de semi-continuité, on peut supposer que E'_k est stable et comme précédemment, le morphisme de Petri associé à E'_k est injectif.
Trouver les fibrés E'_k est un peu plus technique que dans le cas $k = n$. Les sections de E'_k doivent ne pas s'annuler et le conoyau doit vérifier $\mathrm{H}^0(H^*) = 0$. Si $\frac{d}{n-k} \leq (g - 1)$ on prend une extension

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^k \longrightarrow E'_k \longrightarrow H \longrightarrow 0$$

avec H stable sans section globale. On peut donc supposer que $\frac{d}{n-k} > g-1$. Alors on considère $n-k$ fibrés E_1^k,...,E_{n-k}^k de rang n_1,...,n_{n-k} et de degré d_1,...,d_{n-k} tels que:

- $\oplus_i n_i = n$
- $\oplus_i d_i = d$
- $\frac{d_i}{n_i}$ est inférieur à la partie entière de $\frac{d}{n}+1$

Pour cela on utilise la division euclidienne de n et d par $n-k$ et on "distribue" les restes: on suppose une première répartition faite. Si l'un des quotients $\frac{d_i}{n_i}$ est strictement supérieur à $\mu(E)$ alors il existe un rapport $\frac{d_j}{n_j} \leq \mu(E)$ et on peut remplacer $\frac{d_i}{n_i}$ par $\frac{d_i-1}{n_i}$ et $\frac{d_j}{n_j}$ par $\frac{d_j+1}{n_i}$ et donc on peut supposer que pour les pentes $\frac{d_i}{n_i} \geq \mu(E)$ alors $\frac{d_i-1}{n_i} \leq \mu(E)$ et que pour les pentes $\frac{d_j}{n_j} \leq \mu(E)$, alors $\frac{d_j+1}{n_j} \geq \mu(E)$. La nouvelle distribution vérifie alors toutes les conditions. Comme $\mu(E) < 2$, tous ces rapports sont inférieurs à deux.
Il résulte alors du lemme C-5 du chapitre 0, que si $n_i > 1$, alors on peut choisir les E_i^k comme des extensions

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^{n_i-1} \longrightarrow E_i^k \longrightarrow \det(E_i^k) \longrightarrow 0$$

avec $\mathrm{h}^0(E_i^k) = n_i - 1$.
Si $n_i = 1$, on choisit un fibré en droites sans section (comme son degré d_i est inférieur ou égal à $2 \leq g-1$, c'est toujours possible).
Et l'hypothèse $\frac{d}{n-k} > g-1$ implique que les E_i^k sont tous de degré strictement positif. On pose $E'_k = \oplus_i E_i^k$. Par construction, on a bien une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^k \longrightarrow E'^k \longrightarrow \oplus_i \det(E_i^k) \longrightarrow 0$$

et $\mathrm{h}^0(\oplus_i \det(E_i^k)^*) = 0$. Ce qui termine la démonstration du cas $0 \leq k < n$.

On suppose maintenant que $n+l > k > n$ et on considère à nouveau la suite exacte

$$0 \longrightarrow F^* \longrightarrow \mathcal{O}^{n+l} \longrightarrow E \longrightarrow 0$$

où E et F sont stables et $\mathrm{h}^0(E) = n+l$. On peut considérer que F est générique. Un sous-espace vectoriel générique $\mathcal{O}^k \subset \mathrm{H}^0(E)$ engendre E (cf lemme C-1 du chap. 0). On obtient un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & F'^* & \longrightarrow & \mathcal{O}^k & \longrightarrow & E & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & F^* & \longrightarrow & \mathcal{O}^{n+l} & \longrightarrow & E & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{O}^{n+l-k} & \longrightarrow & \mathcal{O}^{n+l-k} & \longrightarrow & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & & &
\end{array}$$

et la suite exacte verticale de gauche donne une extension

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^{n+l-k} \longrightarrow F \longrightarrow F' \longrightarrow 0$$

F étant générique, on peut supposer que F' est stable: comme dans la démonstration du cas $0 \leq k < n$, il existe un fibré projectif $\mathcal{F}'$, au dessus d'une variété irréductible Z' qui paramétrise la famille des fibrés F' avec $\mathrm{h}^0(F'^*) = 0$, tel que $\mathcal{F}'$ paramétrise toutes les extensions des fibrés F' par $\mathcal{O}^{n+l-k}$. F montre que parmi les fibrés ainsi obtenus, il en existe des stables. Donc sur un ouvert de l'espace total de la fibration de $\mathcal{F}$ les fibrés obtenus en chaque point sont stables et en projetant sur Z', c'est encore un ouvert; il contient des fibrés stables.

Dans le diagramme ci-dessus, la suite exacte horizontale supérieure

$$0 \longrightarrow F'^* \longrightarrow \mathcal{O}^k \longrightarrow E \longrightarrow 0$$

vérifie par hypothèse: E, F' stables, $\mu(F') > \mu(F) > 2g$.
On considère maintenant le schéma de Hilbert, $\mathrm{Quot}_{n,d}(\mathcal{O}^k)$, des quotients localements libres de $\mathcal{O}^k$ de rang n et de degré d (cf [**G**]). Soit un point χ de $\mathrm{Quot}_{n,d}(\mathcal{O}^k)$ représentant une extension

$$0 \longrightarrow M^* \longrightarrow \mathcal{O}^k \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

telle que M soit stable. Comme on a vu que $\mu(F') = \mu(M) > 2g$, tout fibré stable de rang $k-n$ et de degré d est engendré par ses sections et donc s'inscrit bien dans une suite exacte comme ci-dessus.
Par dualité de Serre $\mathrm{Ext}^1(M^*, N) \simeq \mathrm{H}^1(M \otimes N)^*$ et la suite exacte

$$0 \longrightarrow M \otimes M^* \longrightarrow M^k \longrightarrow M \otimes N \longrightarrow 0$$

montre que $\mathrm{h}^1(M \otimes N) = 0$, puisque $\mathrm{h}^1(M) = 0$. Il résulte alors de l'étude locale des schémas de Hilbert que le schéma $\mathrm{Quot}_{n,d}(\mathcal{O}^k)$ est lisse en χ de dimension $\mathrm{h}^0(M \otimes N) = (n+k-n)d - n(n-k)(g-1)$ (cf [**G**] ou [**LP**] théorème 9.9 p. 123). Et en fait, $(n+k-n)d - n(n-k)(g-1) = \rho(g,d,n,k-1) + (k^2-1)$.

Dans le même esprit que précédemment, on va montrer qu'il existe un fibré quotient stable E_k de rang n et de degré $n+gl$ avec un noyau M_k^* stable tel que $\mathrm{h}^0(E_k) = k$; on en déduit alors facilement que le morphisme de Petri associé à E_k est injectif: $\mathrm{H}^0(E_k) \otimes \mathrm{H}^0(E_k^* \otimes K) \simeq \mathrm{H}^0(\mathcal{O}^k) \otimes \mathrm{H}^0(E_k^* \otimes K) \simeq \mathrm{H}^0(\mathcal{O}^k \otimes E_k^* \otimes K)$, et la suite exacte

$$0 \longrightarrow M_k^* \longrightarrow \mathcal{O}^k \longrightarrow E_k \longrightarrow 0$$

tensorisée par $E_k^* \otimes K$

$$0 \longrightarrow M_k^* \otimes E_k^* \otimes K \longrightarrow \mathcal{O}^k \otimes E_k^* \otimes K \longrightarrow E_k \otimes E_k^* \otimes K \longrightarrow 0$$

montre que

$$\mathrm{H}^0(\mathcal{O}^n \otimes E'^* \otimes K) \hookrightarrow \mathrm{H}^0(E' \otimes E'^* \otimes K)$$

puisque $\mathrm{h}^0(M_k^* \otimes E_k^* \otimes K) = \mathrm{h}^1(M_k \otimes E_k) = 0$.

Il reste donc à montrer l'existence des E_k. On procède par récurrence décroissante sur k:

- Pour $k = n + l$, il existe un E tel que $\mathrm{h}^0(E) = n + l$ et E s'inscrit dans une extension

$$0 \longrightarrow F^* \longrightarrow \mathcal{O}^{n+l} \longrightarrow E \longrightarrow 0$$

où E et F sont stables.

- On suppose qu'il existe E_{k+1} tel que $\mathrm{h}^0(E_{k+1}) = k + 1$ et que E_{k+1} s'inscrit dans une suite exacte

$$0 \longrightarrow M_{k+1}^* \longrightarrow \mathcal{O}^{k+1} \longrightarrow E_{k+1} \longrightarrow 0$$

où E_{k+1} et M_{k+1} sont stables.

Alors on veut montrer que la même chose est vraie pour k. De la même manière que précédemment pour E, E_{k+1} s'inscrit dans une suite exacte

$$0 \longrightarrow M_{k+1}'^* \longrightarrow \mathcal{O}^k \longrightarrow E_{k+1} \longrightarrow 0$$

avec M'_{k+1} stable. Au voisinage de cette suite exacte le schéma de Hilbert $\mathrm{Quot}_{n,d}(\mathcal{O}^k)$ est de dimension $\rho(g, d, n, k-1) + (k^2 - 1)$ et un fibré donné par un quotient dans ce voisinage (assez petit) a au plus $k+1$ sections. De plus, pour un fibré R fixé dans un voisinage assez petit de E_{k+1} dans $W^k_{n,d}$ ($\mathrm{h}^0(R) = k+1$), les extensions

$$0 \longrightarrow S \longrightarrow \mathcal{O}^k \longrightarrow R \longrightarrow 0$$

correspondent à un choix de k sections globales dans $\mathrm{H}^0(R)$ de dimension $k + 1$, c'est-à-dire à un hyperplan dans $\mathrm{H}^0(R)$. Or, par récurrence, $W^k_{n,d}$ est de dimension $\rho(g, d, n, k)$ au voisinage de E_{k+1}, donc au voisinage du quotient

$$0 \longrightarrow M_{k+1}'^* \longrightarrow \mathcal{O}^k \longrightarrow E_{k+1} \longrightarrow 0$$

dans $\mathrm{Quot}_{n,d}(\mathcal{O}^k)$, les quotients stables avec $k + 1$ sections indépendantes dépendent de au plus $k - 1 + k^2 + \rho(g, d, n, k)$ paramètres (on ne considère pas l'action de $\mathrm{Gl}(k)$). On en déduit que si

$$\rho(g, d, n, k-1) + k^2 - 1 - \big(\rho(g, d, n, k) + k - 1 + k^2\big) > 0$$

il doit exister au voisinage de E_{k+1} un fibré E_k stable avec exactement k sections globales indépendantes et quitte à changer E_k, on peut supposer que son noyau M_k

$$0 \longrightarrow M_k \longrightarrow \mathcal{O}^k \longrightarrow E_k \longrightarrow 0$$

est stable, puisque M'^*_{k+1} l'était.
L'inégalité ci-dessus s'écrit

$$k - d + n(g-1) + 1 > 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{d-k-1}{n} < g - 1$$

Étant donné que par hypothèse $\frac{d}{n} < 2$, l'inégalité est vérifiée et la démonstration du théorème est terminée.

Remarquons que dans la démonstration ci-dessus nous avons utilisé les faits suivant:

- $\mu(E) = \frac{d}{n} \leq g - 1$;
- $\frac{d+1}{n} < g$ (lemme C-5 du chap. 0);
- $\frac{d-1}{n} < g - 1$ (inégalité ci-dessus avec $k = 0$);
- La partie entière de $\mu(E)$ plus un $\leq g - 1$ (choix des $\frac{d_i}{n_i}$);
- Tous les fibrés F sont engendrés par leurs sections et $\mathrm{h}^1(F) = O$ (c'est ce qui nous permet de calculer la dimension du schéma Quot$(\mathcal{O}^{k+1})$;

Les hypothèses du corollaire impliquent que toutes ces conditions sont satisfaites, sauf dans le cas $\mu(E) = g-1$: la partie entière de $\mu(E)$ plus un est égal à $g > g-1$. Mais alors il est clair que l'on peut choisir tous les rapports $\frac{d_i}{n_i}$ égaux à $g-1$ et on peut encore choisir les E_i^k comme on voulait. Ce qui termine la démonstration du corollaire. $\diamondsuit$

Le corollaire n'a pas les conditions optimales, mais nous suffira pour la suite.

Chapitre 2: Fibrés vectoriels de pente < 2

Nous avons vu que au-dessus de la droite Δ, il n'existe pas de fibrés stables de pente < 2 (Chap. 1 théorème A-1). De plus, pour une pente $1 < \mu < 2$, un fibré stable correspondant à un point sur la droite Δ est de rang n et de degré $d = n + gl$ et possède $n + l$ sections, pour un entier l. Le théorème B-1 du Chap.1 montre qu'il existe de tels fibrés. Il est maintenant naturel de se poser le problème de l'existence pour des fibrés stables de rang n et de degré $d = n + gl + l'$ avec $0 < l' < g$ possédant k sections globales indépendantes. Ces fibrés ont en fait au plus $n + l$ sections. Nous procéderons en deux étapes: on traite d'abord le cas où $l = 0$, c'est-à-dire $d < n + g$ (partie A), puis le cas où $l > 0$ (partie B). On aura ainsi traité tous les cas possibles pour $1 < \mu < 2$.

A- Fibrés vectoriels avec peu de sections.

Dans cette partie, on considère que $d < n + g$ et $1 < \frac{d}{n} < 2$. On montre alors qu'il existe des fibrés stables de rang n, de degré d possédant n sections globales et on donne une description des espaces de Brill-Noether associés:

A-1 Thérorème: *Si n, d et k vérifient $n < d < n + g$, $\frac{d}{n} < 2$ et $k \leq n$, alors $W^{k-1}_{n,d}$ est irréductible de la bonne dimension et le lieu des singularités est celui attendu. De plus, $W^{k-1}_{n,d}$ est dense dans $\widetilde{W}^{k-1}_{n,d}$.*

Démonstration: La démonstration reprend exactement les mêmes arguments que ceux donnés dans [**B-G-N**] pour démontrer le théorème B-4 du chapitre 0. On va montrer que si E est un fibré semi-stable de rang n et de degré d, n et d comme ci-dessus et si $\mathrm{h}^0(E) = k$, alors on a une suite exacte de faisceaux:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^k \longrightarrow E \longrightarrow S \longrightarrow 0$$

où S peut avoir de la torsion. Ensuite, le problème se ramène à compter ces extensions. Le lemme ci-dessous montre l'existence de telles suites exactes:

A-2 Lemme: *Soit E un fibré vectoriel semi-stable de rang n, de degré d tel que $d < n + g$ et $\frac{d}{n} < 2$. Soit $V \subset \mathrm{H}^0(E)$, un espace vectoriel de sections globales. Alors on a un morphisme injectif de faisceaux:*

$$V \otimes \mathcal{O} \hookrightarrow E$$

Démonstration du lemme: C'est une conséquence direct du théorème A-1 du chapitre 1. En effet, si M, le faisceau image du morphisme $V \otimes \mathcal{O} \to E$, n'est pas le faisceau trivial, alors il admet un sous-faisceau M' tel que $\mathrm{h}^0(M'^*) = 0$ et comme M' est un sous-faisceau de E, on a $\mu(M') = \frac{d'}{n'} < 2$. Le théorème A-1 du chap. 1 dit alors que

$$\mathrm{h}^0(M') \leq n' + \frac{1}{g}(d' - n')$$

Par hypothèse $\mathrm{h}^0(M') > n'$, donc $\frac{1}{g}(d' - n') \geq 1$, mais alors $\frac{d'}{n'} \geq 1 + \frac{g}{n'}$ et ceci contredit la semi-stabilité de E: $\mu(M') \geq 1 + \frac{g}{n'} \geq 1 + \frac{g}{n} > \mu(E)$. Ce qui termine la démonstration du lemme. $\diamondsuit$

Notons que si S est un faisceau cohérent, comme on est sur une courbe, S peut s'écrire $S \simeq G \oplus T$ où G est un fibré vectoriel et T est un faisceau de torsion (c'est le théorème de décomposition d'un module de type fini au-dessus d'un idéal principal).
On va donc étudier les extensions

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^k \longrightarrow E \longrightarrow G \oplus T \longrightarrow 0$$

où:

- E est un fibré stable de rang n et de degré d.
- G est un fibré vectoriel avec $\mathrm{h}^0(G^*) = 0$ car G est un quotient de E.
- T est un faisceau de points de degré δ.

Ces extensions sont paramétrées par $\mathrm{Ext}^1(G \oplus T, \mathcal{O}^k) \simeq k.\mathrm{Ext}^1(G \oplus T, \mathcal{O})$.
Pour calculer la dimension de $\mathrm{Ext}^1(G \oplus T, \mathcal{O})$, on utilise la dualité de Serre

$$\mathrm{Ext}^1(G \oplus T, \mathcal{O}) \simeq \mathrm{H}^0\big((G \oplus T) \otimes K\big)^* \simeq \mathrm{H}^1(G^*) \oplus \mathrm{H}^0(T)^*$$

Comme par hypothèse $\mathrm{h}^0(G^*) = 0$, et que $\mathrm{h}^0(T) = \delta$, on en déduit que

$$\dim \mathrm{Ext}^1(G \oplus T, \mathcal{O}) = d + (n-k)(g-1) \ .$$

Donc ces extensions sont paramétrées par des k-uplets $(e_1, \cdots, e_k)$, $e_i \in \mathrm{Ext}^1(G \oplus T, \mathcal{O})$ et deux de ces extensions donnent deux fibrés isomorphes si les k-uplets correspondants sont dans la même orbite par l'action naturelle du groupe $\mathrm{GL}(k)$. On en déduit que si $(e_1, \cdots, e_k)$ sont linéairement dépendants, on peut supposer que $e_k = 0$, mais alors $\mathcal{O}$ est un facteur direct de E, ce qui contredit la stabilité de E. On remarque que $(e_1, \cdots, e_k)$ sont nécessairement dépendants si $k > d + (n-k)(g-1)$ ou encore si $n > d + (n-k)g$. Ce qui ne peut arriver que si $n > d$, c.-à-d. si $\mu < 1$, cas traité dans **[B-G-N]**.
Les extensions telles que E n'admettent pas $\mathcal{O}$ comme quotient, sont donc classifiées par la grassmanienne des sous-espaces vectoriels de dimension k de $\mathrm{Ext}^1(G \oplus T, \mathcal{O})$. On a:

$$\dim\Big(\mathrm{Grass}_k\big(\mathrm{Ext}^1(G \oplus T, \mathcal{O})\big)\Big) = k(d + (n-k)g - n) \ .$$

Nous utiliserons cette grassmanienne pour la question de l'existence, mais pour le calcul de dimension, il faut diminuer le nombre de paramètres dont dépendent ces extensions. Il est alors nécessaire de préciser l'action du groupe $\mathrm{Aut}(\mathcal{O}^k) \times \mathrm{Aut}(G \oplus T)$ sur $\mathrm{Ext}^1(G \oplus T, \mathcal{O}^k)$:

Soit

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^k \longrightarrow E \longrightarrow G \oplus T \longrightarrow 0$$

une extension avec E stable. Alors le stabilisateur de cette action en ce point est l'ensemble $\{(\lambda \mathrm{Id}_{\mathcal{O}^k}, 1/\lambda \mathrm{Id}_{G\oplus T}) \mid \ \lambda \in \}$, donc il est de dimension 1.
En effet, soit $(l,h) \in \mathrm{Aut}(\mathcal{O}^k) \times \mathrm{Aut}(G \oplus T)$. L'action de (l,h) sur l'extension

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^k \xrightarrow{\ i\ } E \xrightarrow{\ j\ } G \oplus T \longrightarrow 0$$

donne l'extension

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^k \xrightarrow{i \circ l} E \xrightarrow{j \circ h} G \oplus T \longrightarrow 0\ .$$

Ces deux extensions représentent le même élément dans $\mathrm{Ext}^1(G \oplus T, \mathcal{O}^k)$ si et seulement si il existe un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{O}^k & \xrightarrow{\ i\ } & E & \xrightarrow{\ j\ } & G \oplus T & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \wr\big\downarrow \varphi & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{O}^k & \xrightarrow{i \circ l} & E & \xrightarrow{j \circ h} & G \oplus T & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

φ étant un automorphisme de E, donc $\varphi = \lambda \mathrm{Id}_E$ par hypothèse. Au niveau des fibres en un point x, on obtient le diagramme commutatif de $\mathcal{O}_x$-modules:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_x^k & \xrightarrow{\ i_x\ } & E_x & \xrightarrow{\ j_x\ } & G_x \oplus T_x & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \wr\big\downarrow \lambda.Id_x & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{O}_x^k & \xrightarrow{i_x \circ l_x} & E_x & \xrightarrow{j_x \circ h_x} & G_x \oplus T_x & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

et il est clair que $l_x = \lambda \mathrm{Id}_{\mathcal{O}_x^k}$ et que $h_x = 1/\lambda \mathrm{Id}_{(G\oplus T)_x}$, d'où le résultat.

Donc si U est l'ouvert de $\mathrm{Ext}^1(G\oplus T,\mathcal{O}^k)$ correspondant aux E stables, la propriété universelle de la variété de modules $U_{n,d}$ implique l'existence d'un morphisme

$$U \longrightarrow U_{n,d}$$

dont les fibres sont de dimension supérieure à

$$\dim \mathrm{Aut}\,\mathcal{O}^k + \dim \mathrm{Aut}\,(G\oplus T) - 1\ .$$

Pour G et T fixés, on en déduit que l'image de ce morphisme dépend de au plus

$$\chi = k(d+(n-k)g-n) - \dim \mathrm{Aut}(G\oplus T) + 1$$

paramètres, si elle est non vide. On va minorer $\dim \mathrm{Aut}(G\oplus T) = m$:

- Si $T=0$, $\dim \mathrm{Hom}(G,G)\geq 1$, donc $m\geq 1$ et $\chi \leq k(d+(n-k)g-n)$
- Si $T,G\neq 0$, on a: $\mathrm{Hom}(T,G)$=0, $\dim \mathrm{Hom}(G,G)\geq 1$, $\dim \mathrm{Hom}(G,T) = \delta(n-k)$ et les automorphismes de T sont réduits aux homothéthies en chaque point, c.-à-d. $\dim \mathrm{Aut}\,T\ \geq$ nombre de points du support de T. Donc $m\geq \delta(n-k)+2$ et $\chi\leq k(d+(n-k)g-n)-\delta(n-k)-1$
- Si $G=0$, alors $k=n$ et $m\geq$ nombre de points du support de T, et donc $\chi\leq n(d-n)-m+1$.

On peut alors montrer que l'espace de Brill-Noether, $W^{k-1}_{n,d}$, est irréductible, de la bonne dimension avec un bon lieu de singularité s'il est non vide.
En effet, le lemme A-2 montre que tout fibré stable E possédant k sections globales indépendantes s'écrit comme une extension

$$0\longrightarrow \mathcal{O}^k \longrightarrow E \longrightarrow G\oplus T \longrightarrow 0\ .$$

Supposons $k<n$, c'est-à-dire $G\neq 0$. Pour G et T fixés, ces extensions dépendent de au plus $k(d+(n-k)g-n)$ paramètres, $\big(k(d+(n-k)g-n)-\delta(n-k)-1$ paramètres si $T\neq 0\big)$, et comme $\mathrm{H}^0(G^*)=0$ pour d, k et T fixés l'ensemble des G considérés forment une famille limitée, cette famille dépend de au plus $(n-k)^2(g-1)+1$ paramètres (cf **[B-G-N]** lemme 4.1). Le choix de T pour δ fixé rajoute δ paramètres donc on obtient la majoration

$$\begin{array}{rcl}\dim W^{k-1}_{n,d} & \leq & (n-k)^2(g-1)+1+k(d+(n-k)g-n)\\ & \leq & \rho(g,d,n,k-1)\end{array}$$

et on en déduit que si $W^{k-1}_{n,d}$ est non vide alors il est de la bonne dimension.
De plus on remarque que si $T\neq 0$, alors les extensions dépendent de au plus $\rho(g,d,n,k-1)-1$ paramètres. Or on sait que toute composante irréductible de $W^{k-1}_{n,d}$ est de dimension au moins $\rho(g,d,n,k-1)$ donc toute composante de $W^{k-1}_{n,d}$ contient un sous-ensemble dense $\mathcal{V}$ contenant les extensions

$$0\longrightarrow \mathcal{O}^k \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow 0\ .$$

Ces extensions sont paramétrées par une variété projective irréductible (cf démonstration du théorème C-1 du Chap.1 ou **[N-R]** proposition 2.6 ou encore [**B-G-N**]). L'ouvert de cette variété correspondant aux fibrés stables s'envoie surjectivement sur $\mathcal{V} \subset W^{k-1}_{n,d}$. On en déduit l'irréductibilité de $W^{k-1}_{n,d}$. Pour un fibré stable tel que $\mathrm{h}^0(E) = k$, le morphisme de Petri est injectif (cf dém. du théorème C-1 du Chap. 1 ou [**B-G-N**]). Ce qui montre l'assertion sur les points singuliers de $W^{k-1}_{n,d}$ (cf Chap. 0).

Si $k = n$, alors $G = 0$, $\delta = d$ et on peut fixer le nombre p de points du support de T et le degré en chacun de ces points. Ces valeurs sont discrètes. Alors, d'après les calculs précédents, les suites exactes

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^k \longrightarrow E \longrightarrow T \longrightarrow 0$$

dépendent de au plus $n(d-n) - p + 1$ paramètres et le choix de T ajoute p paramètres. On retrouve bien

$$\dim W^{n-1}_{n,d} \leq n(d-n) + 1 = \rho \ .$$

L'injectivité du morphisme de Petri en un fibré stable E tel que $\mathrm{h}^0(E) = n$ est acquise (la démonstration est la même que ci-dessus). Pour l'irréductibilité, les arguments sont encore les mêmes: $\mathrm{Quot}^d(n, C)$ (cf démonstration du théorème C-1 du Chap. 1) est irréductible; on en déduit l'existence d'une variété irréductible qui paramétrise toutes les extensions ci-dessus et l'ouvert correspondant aux fibrés stables s'envoie surjectivement sur $W^{n-1}_{n,d}$.

Pour l'existence, on adapte encore des idées qui se trouvent dans [**BGN**].
On étudie les extensions

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^n \longrightarrow E \longrightarrow \Theta \longrightarrow 0$$

où:

- Θ est un faisceau de torsion de degré d: par exemple Θ est de support d points distincts.
- E est un fibré tel que $\mathcal{O}$ ne soit pas un facteur direct de E.

D'après ce qui précède, il existe de tels fibrés et ces extensions sont paramétrées par la grassmanienne

$$\mathrm{Grass}_n \mathrm{Ext}^1(\Theta, \mathcal{O})$$

qui est une variété de dimension $n(d-n) > 0$.

Si E est non stable, alors il existe un fibré stable F quotient de E tel que $\mu(F) \leq \mu(E)$. On obtient un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & F' & \longrightarrow & \Theta'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{O}^n & \longrightarrow & E & \longrightarrow & \Theta & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & F & \longrightarrow & \Theta' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

où M est l'image de $\mathcal{O}^n \to F$, M' et F' sont les noyaux des morphismes verticaux et Θ' et Θ'' sont des faisceaux de torsions de degré d' et $d - d'$.
F étant stable et $\mu(F) \leq \mu(E) = 1 + \frac{g}{n}$, le lemme A-2 implique que l'on a encore un morphisme injectif

$$\mathrm{H}^0(F) \otimes \mathcal{O} \hookrightarrow F \ .$$

M est un sous-faisceau de F engendré par ses sections, on doit donc avoir $M \simeq \mathcal{O}^l$. Notons que $F \not\simeq \mathcal{O}$ puisque $\mathcal{O}$ n'est pas un facteur direct de E.
Le diagramme devient:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{O}^{n-l} & \longrightarrow & F' & \longrightarrow & \Theta'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{O}^n & \longrightarrow & E & \longrightarrow & \Theta & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{O}^l & \longrightarrow & F & \longrightarrow & \Theta' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

Comme dans **[BGN]**, on a un morphisme surjectif

$$\mathrm{Ext}^1(\Theta, \mathcal{O}) \to \mathrm{Ext}^1(\Theta'', \mathcal{O})$$

et l'existence de la suite exacte horizontale supérieure implique que l'image du n-uplet $(e_1, \cdots, e_n) \in \mathrm{Ext}^1(\Theta, \mathcal{O})$ représentant l'extension

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^n \longrightarrow E \longrightarrow \Theta \longrightarrow 0$$

a pour image par ce morphisme un n-uplet dont au plus $n - l$ éléments sont indépendants. Ceci détermine une sous-variété Z de $\oplus^n \mathrm{Ext}^1(\Theta, \mathcal{O})$ de codimension $l(d - d' - n + l)$.
Or, par hypothèse, $d > n$ et $\frac{d}{n} \geq \frac{d'}{l}$. De plus, la suite exacte horizontale du bas montre que F est un fibré stable de rang l possédant l sections globales indépendantes donc que $d' > l$ (cf théorème A-1 du Chap. 1). Donc,

$$d - d' \geq (\frac{n}{l} - 1)d' = (n - l)\frac{d'}{l} > (n - l) \ .$$

On en déduit que

$$\mathrm{codim}\, Z > l$$

Il existe donc des extensions

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^n \longrightarrow E \longrightarrow \Theta \longrightarrow 0$$

qui ne peuvent se compléter en un diagramme comme ci-dessus pour aucune valeur de d' et le fibré E correspondant est stable et possède n sections globales indépendantes. Le théorème A-1 est ainsi entièrement démontré. $\diamondsuit$

B- Fibrés vectoriels avec beaucoup de sections.

Ici, on considère que $d = n + gl + l'$, avec $\frac{d}{n} < 2$, $0 < l' < g$ et $l > 0$. L'idée est de déduire l'existence de fibrés E, de rang n et de degré d, de l'existence de fibrés stables correspondant à des points sur la droite Δ (cf figure g). Notons tout d'abord que le théorème A-1 du Chap. 1 implique que

$$\mathrm{h}^0(E) \leq n + \frac{1}{g}(d - n)$$

et comme $d = n + gl + l'$, on en déduit que $\mathrm{h}^0(E) \leq n + l$. On va donc chercher des fibrés stables E tel que $\mathrm{h}^0(E) = n + l$. On déduira de l'existence de ces fibrés E le théorème ci-dessous, qui termine l'étude des fibrés vectoriels stables de pente < 2:

B-1 Théorème: *On suppose que $d = n + gl + l'$ où n, l, l' sont des entiers vérifiant $\frac{d}{n} < 2$, $0 < l' < g$ et $l > 0$. Alors $W^{k-1}_{n,d}$ est non vide et possède une composante irréductible de la bonne dimension, pour $1 \leq k \leq n + l$.*

Démonstration: Le théorème B-1 du Chap. 1 donne l'existence de fibrés stables E' de rang $m = n + l'$ et de degré $d = n + gl + l'$ tel que E' s'inscrit dans une suite exacte

$$0 \longrightarrow F'^{*} \longrightarrow \mathcal{O}^{m+l} \longrightarrow E' \longrightarrow 0$$

avec $F' \simeq D(E')$ stable.
On va en fait chercher les fibrés E comme des quotients de E' ($l' < \frac{n}{g}$):

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^{l'} \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow 0$$

Il est clair que si E est stable, alors E vérifie toutes les propriétés voulues.

Avant de s'occuper de la stabilité de E, nous allons préciser les propriétés des fibrés E'. Nous avons montré que l'on a un isomorphisme entre $W^{m+l-1}_{m,m+gl}$ et $U_{l,m+gl}$. Cet isomorphisme étant défini, avec les notations ci-dessus, par $E' \mapsto F'$. On dira que E' est générique dans $W^{m+l-1}_{m,m+gl}$ si F' est générique dans le sens habituel dans $U_{l,m+gl}$.
Pour illustrer cette correspondance, nous allons démontrer le lemme suivant:

B-2 Lemme: *Soit $E' \in W^{m+l-1}_{m,m+gl}$ un fibré stable générique et soit un fibré quotient M de E'*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(x_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(x_a) \longrightarrow E' \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

où $\mathcal{O}(x_i)$ est le fibré en droites de degré un associé au diviseur $x_i \in C$, les x_i étant distincts deux à deux et a vérifie $\frac{m+gl-a}{m-a} < 2$. Si les x_i sont assez généraux et si le quotient est générique, alors M est stable. Pour a=1, il suffit de supposer que E' est générique. Le résultat est alors vrai pour tous les quotients.

Remarque: Avec les notations précédentes, on peut prendre $a = l'$ et on obtient donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(x_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(x_{l'}) \longrightarrow E' \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

avec M stable. Ceci montre qu'un quotient de E' par un sous-espaces de sections engendrés par "l' sections qui s'annulent" est stable. Nous recherchons des quotients de E' par l' sections qui ne s'annulent pas.

Démonstration du lemme: En prenant les extensions duales, on déduit facilement du lemme C-4 du chapitre 0 que, pour F' générique dans $U_{l,d}$ et pour a points généraux $x_1, \cdots, x_a$ sur la courbe, il existe des extensions

$$0 \longrightarrow F'' \longrightarrow F' \longrightarrow \Theta \longrightarrow 0$$

où Θ est un faisceau de torsion de degré a et de support $x_1, \cdots, x_a$ tel que F'' soit stable (pour $a = 1$, F' générique, toutes les extensions non triviales ci-dessus vérifient F'' stable). L'hypothèse sur a implique que $\mu(F'') > 2g$. Par Riemann-Roch, on obtient que F' et F'' sont engendrés par leurs sections et que les a sections globales de Θ remontent à F'. On en déduit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & E''^* & \longrightarrow & E'^* & \longrightarrow & N^* & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{O} \otimes \mathrm{H}^0(F'') & \longrightarrow & \mathcal{O} \otimes \mathrm{H}^0(F') & \longrightarrow & \mathcal{O}^a & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & F'' & \longrightarrow & F' & \longrightarrow & \Theta & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

Toujours d'après le théorème B-1 du Chap.1, on sait que E'' est stable (puisque F'' est stable de pente $> 2g$). De plus, il est clair que le noyau N^*du morphisme d'évaluation associé à Θ est isomorphe à $\big(\mathcal{O}(x_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(x_a)\big)^*$. Donc le dual de la suite exacte horizontale supérieure termine la démonstration du lemme. $\diamondsuit$

Pour prouver l'existence des fibrés E, nous allons utiliser des arguments du même type. Soit une extension

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^{l'} \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow 0 \ .$$

Et supposons que E n'est pas stable. Soit G un fibré quotient stable de pente minimale:

$$0 \longrightarrow H \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow 0 \ .$$

Le fibré G est stable de pente $\mu(G) = \frac{d_G}{n_G} \leq \mu(E) = \frac{n+gl+l'}{n} = 1 + \frac{gl+l'}{n} < 2$. Le théorème A-1 du Chap. 1 implique que

$$\mathrm{h}^0(G) \leq n_G + \frac{1}{g}(d_G - n_G) \ .$$

En posant $\mathrm{h}^0(G) = n_G + l_G$, on obtient

$$\mu(G) \geq 1 + \frac{gl_G}{n_G} \ .$$

Et comme $\mu(G) \leq \mu(E) = 1 + \frac{gl+l'}{n}$, on en déduit que $l_G \leq l$ (on a $l' < g$).

Expliciter directement sur E le fait que E ne soit pas stable semble fort complexe et ne pas aboutir. L'idée est d'étudier les conséquences de E non stable sur les fibrés E' dont nous avons une bonne description. C'est ce que nous permet de faire le diagramme commutatif ci-dessous obtenu à partir des deux suites exactes précédentes:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & H & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{O}^{l'} & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & E & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & Q & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & G & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & H & \longrightarrow & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & & & & & \\
 & & 0 & & & & & &
\end{array}$$

Diagramme 1

où Q est le noyau du morphisme $E' \to G$ et l'apparition du fibré H en bas à gauche est donnée par le lemme d'algèbre appelé "*Le diagramme du serpent*" (cf [**Pe**]). Q est de pente $\mu(Q) = \frac{d_Q}{n_Q}$.

Pour démontrer l'existence de fibrés stables E comme annoncés, nous allons d'abord étudier les fibrés Q, ensuite les compter dans le cas $l' = 1$. On obtiendra que l'on n'a pas assez de fibrés Q pour "englober" toutes les sections de E'. Puis on fait une récurrence sur l'.

Étude des fibrés Q: L'objet essentiel de cette étude est de montrer que Q est génériquement engendré par ses sections. En fait on ne pourra le montrer directement. On donne ici tous les éléments nécessaires et il nous faudra reprendre cette étude quand on aura posé les hypothèses de la récurrence. On note $\mathrm{h}^0(Q) = n_Q + l_Q$. Comme $l_G \leq l$, on en déduit que $l_Q \geq 0$. Q a donc au moins n_Q sections.

Tout d'abord montrons que $\mathrm{h}^0(Q^*) = l'_Q < l'$: en effet, le fibré H a, par hypothèse, une filtration de Harder-Narasimhan (cf partie A du Chap. 0) dont les quotients sont tous de pente $\geq \mu(G) > 0$. Donc $\mathrm{h}^0(H^*) = 0$. Dans le diagramme 1, le dual de la suite exacte verticale de gauche

$$0 \longrightarrow H^* \longrightarrow Q^* \longrightarrow \mathcal{O}^{l'} \longrightarrow 0$$

montre que $\mathrm{h}^0(Q^*) \leq l'$. L'existence de l'_Q sections se traduit par un morphisme $\mathcal{O}^{l'_Q} \to Q^*$. Le schéma ci-dessous

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & \mathcal{O}^{l'_Q} & & & & \\ & & & & \downarrow & & & & \\ 0 & \longrightarrow & H^* & \longrightarrow & Q^* & \longrightarrow & \mathcal{O}^{l'} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

montre alors que $\mathcal{O}^{l'_Q} \hookrightarrow \mathcal{O}^{l'}$, puisque $\mathrm{h}^0(H^*) = 0$ et donc que Q admet $\mathcal{O}^{l'_Q}$ en facteur direct. On note $Q \simeq \mathcal{O}^{l'_Q} \oplus Q'$. Si $\mathrm{h}^0(Q^*) = l'$ alors on obtient $Q \simeq \mathcal{O}^{l'} \oplus H$. Or Q est un sous-fibré de E' stable et par hypothèse $\mu(H) \geq \mu(E) > \mu(E')$. H ne peut donc pas être un sous-fibré de E' et on a bien $\mathrm{h}^0(Q^*) < l'$.

On a deux suites exactes

$$0 \longrightarrow Q' \longrightarrow Q \longrightarrow \mathcal{O}^{l'_Q} \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow Q \longrightarrow E' \longrightarrow G \longrightarrow 0$$

qui s'imbriquent dans un diagramme commutatif

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}^{l'_Q} & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & Q' & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & G' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & Q & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & G & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \mathcal{O}^{l'_Q} & \longrightarrow & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & & & & & \\
 & & 0 & & & & & &
\end{array}
$$

Le fibré G' étant le conoyau du morphisme $Q' \to E'$. G' est un quotient de E', donc $\mathrm{h}^0(G'^*) = 0$. De plus, la suite exacte verticale de droite montre que le sous-fibré maximal de G' est de pente $\leq \mu(G) < 2$. D'après la proposition A-2 du Chap. 1, on obtient

$$h^0(G') \leq n_{G'} + \frac{1}{g}(d_{G'} - n_{G'}) \ .$$

On a la même inégalité pour Q' puisque par construction $\mathrm{h}^0(Q'^*) = 0$ et que Q' est un sous-fibré de E':

$$h^0(Q') \leq n_{Q'} + \frac{1}{g}(d_{Q'} - n_{Q'}) \ .$$

Dans le diagramme ci-dessus, la suite exacte horizontale du milieu

$$0 \longrightarrow Q' \longrightarrow E' \longrightarrow G' \longrightarrow 0$$

montre que

$$\mathrm{h}^0(E') \leq \mathrm{h}^0(G') + \mathrm{h}^0(Q') \leq n_{G'} + \frac{1}{g}(d_{G'} - n_{G'}) + n_{Q'} + \frac{1}{g}(d_{Q'} - n_{Q'}) \ .$$

Comme, par hypothèse, $\mathrm{h}^0(E') = m + \frac{1}{g}(d-m)$ (rappelons que $\operatorname{rg} E' = n + l' = m$), $m = n_{Q'} + n_{G'}$ et $d = d_{Q'} + d_{G'}$, l'inégalité ci-dessus implique que

$$h^0(Q') = n_{Q'} + \frac{1}{g}(d_{Q'} - n_{Q'})$$

et que

$$h^0(G') = n_{G'} + \frac{1}{g}(d_{G'} - n_{G'}) \ .$$

Les fibrés G' et Q' correspondent à des points sur la droite Δ. Comme $\mathrm{h}^0(Q') + l'_Q = \mathrm{h}^0(Q)$ et $d_{Q'} = d_Q$, on en déduit que $\mathrm{h}^0(Q') = n_{Q'} + l_Q$ et que $d_Q = n_Q - l'_Q + gl_Q$. De la même façon, on obtient $\mathrm{h}^0(G') = n_{G'} + l_G$ et $d_G = n_G + gl_G + l'_Q$.

Nous allons procèder de la façon suivante: on va donner Γ_1 une majoration du nombre de paramètres dont dépendent les fibrés Q'. Les sous-espaces $\mathcal{O}^{l'_Q} \hookrightarrow \mathrm{H}^0(E')$ sont classifiés par $\mathrm{Grass}_{l'_Q}\big(\mathrm{H}^0(E')\big)$, la grassmannienne des sous-espaces de dimension l'_Q dans $\mathrm{H}^0(E')$, et donc dépend de

$$l'_Q(m + l - l'_Q) = l'_Q(n_Q + n_G + l - l'_Q)$$

paramètres. On en déduit que les fibrés Q dépendent de au plus

$$\Gamma_1 + l'_Q(n_Q + n_G + l - l'_Q) \ ,$$

et chacun de ces fibrés Q a $n_Q + l_Q$ sections globales et donc engendrent dans $\mathrm{Grass}_{l'}\big(\mathrm{H}^0(E')\big)$ un sous-espace de dimension celle de la grassmanienne $\mathrm{Grass}_{l'}\big(\mathrm{H}^0(Q)\big)$, c'est-à-dire de dimension $l'(n_Q + l_Q - l')$.
Le sous-espace de $\mathrm{Grass}_{l'}\big(\mathrm{H}^0(E')\big)$ engendré par tous les fibrés Q dépend alors de au plus

$$\Gamma = \Gamma_1 + l'_Q(n_Q + n_G + l - l'_Q) + l'(n_Q + l_Q - l')$$

paramètres.
Or, la grassmanienne $\mathrm{Grass}_{l'}\big(\mathrm{H}^0(E')\big)$ est de dimension $l'(n_Q + n_G + l - l')$, donc si l'on montre que

$$l'(n_Q + n_G + l - l') > \Gamma \ ,$$

alors il existe des sous-espaces $\mathcal{O}^{l'} \subset \mathrm{H}^0(E')$ qui ne s'injectent pas dans un fibré Q comme ci-dessus et donc le conoyau de l'injection $\mathcal{O}^{l'} \hookrightarrow E'$ est génériquement un fibré stable, ce que nous voudrions. Comme $l = l_Q + l_G$, l'inégalité ci-dessus se simplifie:

$$l'(n_G + l_G) > \Gamma_1 + l'_Q(n_Q + n_G + l - l'_Q) \qquad (*)$$

Il faut donc trouver une bonne majoration Γ_1 du nombre de paramètres dont dépendent les fibrés Q'. Pour cela nous aurons besoin du fait que Q, donc Q', est génériquement engendré par ses sections.
Si $\mathbf{l' = 1}$, la première étape de la récurrence, alors $\mathrm{h}^0(Q^*) < l'$ donne $\mathrm{h}^0(Q^*) = 0$ et donc $Q = Q'$ et $G = G'$ et

- $d_Q = n_Q + gl_Q$; $d_G = n_G + gl_G$.
- $\mathrm{h}^0(Q) = n_Q + l_Q$; $\mathrm{h}^0(G) = n_G + l_G$.

De plus, dans ce cas, Q s'inscrit dans une suite exacte (cf diagramme 1)

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow Q \longrightarrow H \longrightarrow 0$$

où H contredit la stabilité de E, c'est-à-dire $\mu(H) \geq \mu(E) > \mu(E')$. Ceci implique que $\mu(H) = \frac{d_Q}{n_Q - 1} = 1 + \frac{gl_Q + 1}{n_Q - 1} > \mu(E')$.
Soit $\mathcal{F}$, le sous-faisceau de Q engendré par ses sections. On a $\mathrm{h}^0(\mathcal{F}) = n_Q + l_Q$. Si le rang de $\mathcal{F}$ est strictement inférieur à n_Q, on déduit de la proposition A-2 du Chap. 1 que $\mathcal{F}$ a un sous-faisceau $\mathcal{F}'$ de pente $\geq 1 + \frac{g(l_Q+1)}{\mathrm{rg}\,\mathcal{F}}$. $\mathcal{F}'$ serait alors un sous-faisceau de E' stable de pente $\geq 1 + \frac{g(l_Q+1)}{\mathrm{rg}\,\mathcal{F}} > \mu(H) > \mu(E')$, ce qui est absurde. Donc $\mathcal{F}$ est de rang n_Q. On obtient bien que Q est génériquement engendré par ses sections.

Pour éviter de faire deux fois les mêmes calculs, on va supposer que pour $l' < g$ quelconque et pour E' et $\mathcal{O}^{l'}$ assez généraux, alors Q est génériquement engendré par ses sections (ceci sera montré avec la récurrence). L'étude des fibrés Q peut alors être avantageusement complèter:
Remarquons tout d'abord que Q' est aussi génériquement engendré par ses sections et comme $\mathrm{h}^0(Q'^*) = 0$, on en déduit que tout fibré quotient de Q' est de pente ≥ 1.
Soit $\mathrm{gr}Q' = Q_1 \oplus \cdots \oplus Q_P$ le gradué de Q' (cf Chap. 0) où les Q_i sont semi-stables de pente strictement décroissante avec i. D'après le théorème A-1 du Chap. 1, chaque Q_i vérifie

$$\mathrm{h}^0(Q_i) \leq n_{Q_i} + \frac{1}{g}(d_{Q_i} - n_{Q_i}) \ ,$$

et l'on a $\mathrm{h}^0(Q') \leq \oplus_i \mathrm{h}^0(Q_i)$.
Mais, comme par hypothèse $\mathrm{h}^0(Q') = n_{Q'} + \frac{1}{g}(d_{Q'} - n_{Q'})$, on en déduit que

$$\mathrm{h}^0(Q_i) = n_{Q_i} + \frac{1}{g}(d_{Q_i} - n_{Q_i}) \ ,$$

et les Q_i étant semi-stables, on sait avec le théorème B-1 du Chap. 1 que si $\mu(Q_i) > 1$ alors Q_i est engendré par ses sections. Or toutes les sections des Q_i "remontent" à Q'.

Ceci implique que si $\mu(Q_p) > 1$, alors Q' est engendré par ses sections.
Si $\mu(Q_p) = 1$, alors on écrit la suite exacte

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow Q' \longrightarrow Q_p \longrightarrow O$$

et par hypothèse N est engendré par ses sections et on a un morphisme injectif $\mathrm{H}^0(Q_p) \otimes \mathcal{O} \hookrightarrow Q_p$, c'est-à -dire une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^0(Q_p) \otimes \mathcal{O} \longrightarrow Q_p \longrightarrow \Theta \longrightarrow O$$

où Θ est un faisceau de torsion de degré $d_\Theta = d_{Q_p} = n_{Q_p}$.

Aparté: Nous allons majorer d_Θ: le diagramme 1 nous donne une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^{l'} \longrightarrow Q \simeq \mathcal{O}^{l'_Q} \oplus Q' \longrightarrow H \longrightarrow O$$

dont on déduit la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^{l'-l'_Q} \longrightarrow Q' \longrightarrow H \longrightarrow O \ .$$

On obtient un morphisme $\mathcal{O}^{l'-l'_Q} \to Q_p$ dont on note le conoyau M:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & & & \\
 & & & & \downarrow & & & & \\
 & & & & N & & & & \\
 & & & & \downarrow & & & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{O}^{l'-l'_Q} & \longrightarrow & Q' & \longrightarrow & H & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \mathcal{O}^{l'-l'_Q} & \longrightarrow & Q_p & \longrightarrow & M & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

Et M est au plus de pente $\frac{d_\Theta}{d_\Theta-(l'-l'_Q)}$. Or, par hypothèse les quotients de H ont une pente $\geq \mu(G)$ (G et H participent à la filtration de Harder-Narasimhan de E). On doit donc avoir

$$\frac{d_\Theta}{d_\Theta - (l' - l'_Q)} = 1 + \frac{(l' - l'_Q)}{d_\Theta - (l' - l'_Q)} \geq 1 + \frac{gl_G + l'_Q}{n_G} \ ,$$

ce qui est équivalent à

$$(l' - l'_Q)n_G + (l' - l'_Q)(gl_G + l'_Q) \geq d_\Theta(gl_G + l'_Q)$$

où encore à

$$(l' - l'_Q)(1 + \frac{n_G}{(gl_G + l'_Q)}) \geq d_\Theta \qquad \textit{("majoration de } d_\Theta \textit{")}$$

ce qui termine l'aparté. Dans le cacul de paramètres qui va suivre, c'est cette inégalité qui va nous donner la bonne majoration quand $l_Q = 0$. Nous l'avons introduite dès maintenant, car toutes les notations sont ici en place.

Revenons au fibré Q': on déduit de ce qui précède que le morphisme d'évaluation de Q' s'inscrit dans une suite exacte

$$0 \longrightarrow F''^{*} \longrightarrow \mathrm{H}^0(Q') \otimes \mathcal{O} \longrightarrow Q' \longrightarrow \Theta \longrightarrow O$$

où $F'' = D(Q')$ est le fibré qui complète la suite.
On obtient alors un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & F''^{*} & \longrightarrow & F'^{*} & \longrightarrow & F^{*} & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{H}^0(Q') \otimes \mathcal{O} & \longrightarrow & \mathrm{H}^0(E') \otimes \mathcal{O} & \longrightarrow & \mathrm{H}^0(G') \otimes \mathcal{O} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & Q' & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & G' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \Theta & \longrightarrow & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & & & & & \\
 & & 0 & & & & & &
\end{array}$$

Diagramme 2

Le diagramme 2 montre que l'on peut établir une correspondance bijective entre les suites exactes

$$0 \longrightarrow Q' \longrightarrow E' \longrightarrow G' \longrightarrow 0$$

et les suites exactes

$$0 \longrightarrow F''^{*} \longrightarrow F'^{*} \longrightarrow F^{*} \longrightarrow \Theta \longrightarrow 0\ .$$

Pour majorer le nombre de paramètres dont dépendent les fibrés Q' comme-ci-dessus, on va calculer combien on peut avoir de telles suites exactes F, F', F'' et Θ variants.
Par construction, on a $n_F = l_G$, $n_{F'} = l$, $n_{F''} = l_Q$. De plus:

- $d_F = d_G = n_G + gl_G + l'_Q$
- $d_{F''} = n_Q + gl_Q - l'_Q - d_\Theta$

Il faut distnguer 2 cas: si $l_Q = 0$ ou si $l_Q > 0$.

si $\mathbf{l_Q} = \mathbf{0}$: alors $F'' = 0$ et il suffit de compter pour F' fixé les suites exactes

$$0 \longrightarrow F'^* \longrightarrow F^* \longrightarrow \Theta \longrightarrow 0 \ .$$

Pour Θ fixé, ces extensions sont classifiées par $\mathrm{Ext}^1(\Theta, F'^*)$ qui est de dimension $l_G d_\Theta$. Et le choix de Θ rajoute d_Θ paramètres. On va donc poser

$$\Gamma_1 = d_\Theta(l_G + 1) - 1 \ .$$

L'inégalité $(*)$ que l'on veut obtenir s'écrit alors

$$l'(n_G + l_G) > d_\Theta(l_G + 1) - 1 + l'_Q(n_Q + n_G + l - l'_Q)$$

ou encore avec $l_G = l$ et $d_\Theta = n_Q - l'_Q$, puisque $l_Q = 0$,

$$(l' - l'_Q)n_G > (l + l'_Q + 1)d_\Theta + (l'_Q - l')l - 1 \ .$$

Or, on a montré que

$$d_\Theta \leq (l' - l'_Q)(1 + \frac{n_G}{l'_Q + gl_G})$$

et donc faut vérifier si

$$n_G > (l + l'_Q + 1)(1 + \frac{n_G}{l'_Q + gl}) - l - \frac{1}{l' - l'_Q} \ ,$$

c'est-à dire, si

$$\big(g(l-1) - 1\big)\frac{n_G}{l'_Q + gl} > l'_Q + 1 - \frac{1}{l' - l'_Q} \ .$$

Mais $\mu(G) = 1 + \frac{l'_Q + gl}{n_G} < 2$, implique $\frac{n_G}{l'_Q + gl} > 1$; il suffit donc de montrer que

$$(g-1)l \geq l'_Q + 2 - \frac{1}{l' - l'_Q} \ ,$$

ou encore

$$l \geq \frac{l'_Q + 2}{g - 1} - \frac{1}{l' - l'_Q} \ ,$$

ce qui est vrai puisque $l'_Q < l' < g-1$ et $l \geq 1$.

On peut donc supposer que génériquement $\mathbf{l_Q} > \mathbf{0}$.
On scinde la suite exacte

$$0 \longrightarrow F''^* \longrightarrow F'^* \longrightarrow F^* \longrightarrow \Theta \longrightarrow 0$$

en deux:

$$0 \longrightarrow F''^* \longrightarrow F'^* \longrightarrow Im^* \longrightarrow 0$$

et

$$0 \longrightarrow Im^* \longrightarrow F^* \longrightarrow \Theta \longrightarrow 0$$

où Im^* est le conoyau du morphisme $F''^* \to F'^*$.
Il est clair que $n_{Im} = n_F = l_G$ et que $d_{Im} = d_F + d_\Theta = n_G + gl_G + l'_Q + d_\Theta$.
On commence par compter le nombre de paramètres dont dépendent les extensions

$$0 \longrightarrow Im \longrightarrow F' \longrightarrow F'' \longrightarrow 0 \ .$$

Comme les fibrés F' sont stables, les familles des F'' et des Im sont limitées. Le choix du fibré Im dépend de $l_G^2(g-1)+1$ paramètres; le choix du fibré F'' dépend de $l_Q^2(g-1)+1$ paramètres. Pour F et F'' fixés les extensions sont paramétrées par $\mathrm{Ext}^1(F'', Im) = \mathrm{h}^1(F''^* \otimes Im)$; F' devant être stable on a $\mathrm{h}^0(F''^* \otimes Im) = 0$.
Le théorème de Riemann-Roch implique alors que

$$\begin{aligned} \mathrm{h}^1(F''^* \otimes Im) &= l_G(n_Q + gl_Q - l'_Q - d_\Theta) - l_Q(n_G + gl_G + l'_Q + d_\Theta) + l_Q l_G(g-1) \\ &= l_G n_Q - l_Q n_G + l_Q l_G (g-1) - l(d_\Theta + l'_Q) \end{aligned}$$

Le nombre total de paramètres dont dépendent les extensions ci-dessus est donc inférieur ou égal à

$$l_G^2(g-1) + 1 + l_Q^2(g-1) + 1 + l_G n_Q - l_Q n_G + l_Q l_G (g-1) - l(d_\Theta + l'_Q) - 1 \ ;$$

après simplification et avec $l = l_G + l_Q$, l'expression ci-dessus est encore égale à

$$l^2(g-1) + 1 + l_G n_Q - l_Q n_G - l_Q l_G(g-1) - l(d_\Theta + l'_Q) \ ,$$

et pour une extension

$$0 \longrightarrow Im \longrightarrow F' \longrightarrow F'' \longrightarrow 0$$

fixée et Θ fixé, les extensions

$$0 \longrightarrow Im^* \longrightarrow F^* \longrightarrow \Theta \longrightarrow 0$$

sont paramétrées par $\mathrm{Ext}^1(\Theta, Im^*)$, qui est de dimension $l_G d_\Theta$. Le choix de Θ dépend de au plus d_Θ paramètres.

On en déduit que les suites exactes

$$0 \longrightarrow F''^* \longrightarrow F'^* \longrightarrow F^* \longrightarrow \Theta \longrightarrow 0$$

dépendent de au plus

$$l^2(g-1)+1+l_G n_Q - l_Q n_G - l_Q l_G (g-1) - d_\Theta (l - l_G - 1) - l l'_Q$$

paramètres.
Or F' dépend de $l^2(g-1)+1$ paramètres, donc pour un F' fixé assez général, les suites exactes comme ci-dessus doivent dépendre de au plus

$$l_G n_Q - l_Q n_G - l_Q l_G (g-1) - d_\Theta (l - l_G - 1) - l l'_Q$$

paramétres et comme $l = l_G + l_Q$ et que l'on suppose que $l_Q > 0$, on peut "oublier" le terme $d_\Theta(l - l_G - 1)$: on pose

$$\Gamma_1 = l_G n_Q - l_Q n_G - l_Q l_G (g-1) - l l'_Q \ .$$

On peut supposer que Γ_1 est positif car sinon il n'y a plus rien à faire; ceci donne une inégalité

$$l_G n_Q - l_Q n_G \geq l_Q l_G (g-1) + l l'_Q \qquad (**)$$

L'inégalité $(*)$ que l'on veut démontrer s'écrit

$$l'(n_G + l_G) > l_G n_Q - l_Q n_G - l_Q l_G (g-1) - l l'_Q + l'_Q (n_Q + n_G + l - l'_Q)$$

ou encore

$$(l' - l'_Q) n_G - l'_Q n_Q > l_G n_Q - l_Q n_G - l_Q l_G (g-1) - l_Q'^2 - l' l_G \ .$$

Or, $\mu(H) = \frac{d_Q}{n_Q - l'} = \frac{n_Q + g l_Q - l'_Q}{n_Q - l'} \geq 1 + \frac{g l_G + l'_Q}{n_G} = \mu(G)$ implique que

$$n_G (l' + g l_Q - l'_Q) \geq n_Q (g l_G + l'_Q) - l' (g l_G + l'_Q)$$

donc que

$$l_G n_Q - l_Q n_G \leq \frac{1}{g}[(l' - l) n_G - l'_Q n_Q] + l' l_G + \frac{l' l'_Q}{g} \qquad (***)$$

et il nous suffira de prouver

$$\frac{g-1}{g}[(l' - l) n_G - l'_Q n_Q] > l' l_G + \frac{l' l'_Q}{g} - l_Q l_G (g-1) - l'_Q - l' l_G$$

L'expression à droite du signe $>$ se simplifie en

$$\frac{l'l'_Q}{g} - l_Q l_G(g-1) - l'_Q$$

et est négative puisque $l'_Q < l' < g$.
On en déduit que pour démontrer l'inégalité $(*)$, il nous reste à prouver que

$$(l'-l)n_G - l'_Q n_Q \geq 0 \ ,$$

ce qui se fait facilement à partir des ingalités $(**)$ et $(***)$ mutipliées par g:

$$(l'-l)n_G - l'_Q n_Q + gl'l_G + l'l'_Q \geq gl_Q l_G(g-1) + gll'_Q$$

puisque $l' \leq g-1$, $l \geq 1$, $l_Q > 0$ et donc

$$(l'-l)n_G - l'_Q n_Q \geq gl_G[l_Q(g-1) - l'] + gl'_Q[l - \frac{l'}{g}] \geq 0$$

On vient donc de montrer que si le fibré Q est génériquement engendré par ses sections pour "Q assez général", alors génériquement un sous-espace de sections $\mathcal{O}^{l'} \in \mathrm{Grass}_{l'}\big(\mathrm{H}^0(E')\big)$ ne s'envoie dans aucun fibré Q comme ci-dessus et donc le conoyau E de l'injection serait stable.
Pour $l' = 1$, on a fini.

La récurrence: L'hypothèse de récurrence est: Soit E' un fibré générique comme ci-dessus et soit $\mathcal{O}^{l'-1} \subset \mathrm{H}^0(E')$ un sous-espace vectoriel de dimension $l'-1$ générique dans la grassmanienne, $\mathrm{Grass}_{l'-1}\big(\mathrm{H}^0(E')\big)$, des sous-espaces vectoriels de dimension $l'-1$ dans $\mathrm{H}^0(E')$. Alors, le conoyau E

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^{l'-1} \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow 0$$

est stable.
Maintenant, soit $\mathcal{O}^{l'} \subset \mathrm{H}^0(E')$ un sous-espace vectoriel de dimension l' générique dans la grassmanienne, $\mathrm{Grass}_{l'}\big(\mathrm{H}^0(E')\big)$, des sous-espaces vectoriels de dimension l' dans $\mathrm{H}^0(E')$. On veut montrer que le conoyau E

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^{l'} \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow 0$$

est stable.
On a vu que la non-stabilité de E impliquait l'existence d'une suite exacte

$$0 \longrightarrow H \longrightarrow E \longrightarrow G \longrightarrow 0$$

où G est stable de pente $\leq \mu(E)$ et donne, par le Diagramme 1, une suite exacte

$$0 \longrightarrow Q \longrightarrow E' \longrightarrow G \longrightarrow 0$$

D'après ce qui précède, il nous reste à montrer que si E' et $\mathcal{O}^{l'}$ sont assez généraux, alors Q est génériquement engendré par ses sections
On peut supposer que génériquement un sous-espace de sections $\mathcal{O}^{l'-1} \subset \mathcal{O}^{l'}$ vérifie: le conoyau R

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^{l'-1} \longrightarrow E' \longrightarrow R \longrightarrow 0$$

est stable.
Cette suite exacte se place dans un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & & & 0 & & \\
 & & & & & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & \longrightarrow & \mathcal{O} & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{O}^{l'-1} & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & R & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{O}^{l'} & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & E & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & \mathcal{O} & \longrightarrow & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & & & & & \\
 & & 0 & & & & & &
\end{array}$$

dont on retient la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow R \longrightarrow E \longrightarrow 0$$

qui, avec la suite exacte en E, G et H, donne un nouveau diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & & & 0 & & \\
 & & & & & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & \longrightarrow & H & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{O} & \longrightarrow & R & \longrightarrow & E & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & Q_0 & \longrightarrow & R & \longrightarrow & G & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & H & \longrightarrow & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & & & & & \\
 & & 0 & & & & & &
\end{array}$$

Diagramme 3

où Q_0 est le noyau du morphisme $R \to G$
Comme $\mu(H) \geq \mu(E) > \mu(R)$, on en déduit que $\mathrm{h}^0(Q_0^*) = 0$ (sinon, H serait un sous-fibré de R stable). On a encore un dernier diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & & & 0 & & \\
 & & & & & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & \longrightarrow & Q_0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{O}^{l'-1} & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & R & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & Q & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & G & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & Q_0 & \longrightarrow & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & & & & & \\
 & & 0 & & & & & &
\end{array}$$

dont on retient la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^{l'-1} \longrightarrow Q \longrightarrow Q_0 \longrightarrow 0 \ .$$

On en déduit que $\mu(Q_0) = 1 + \frac{gl_Q + l' - l'_Q - 1}{n_{Q_0}}$. Comme $\mathrm{h}^0(Q_0^*) = 0$ et que Q_0 est un sous-fibré de R stable de pente < 2, la proposition A-2 du chap. 1 implique que $\mathrm{h}^0(Q_0) = n_{Q_0} + l_Q$. Toutes les sections de Q_0 remontent donc à Q. On va montrer que Q_0 est génériquement engendré par ses sections et ce sera fini.
C'est la suite exacte donnée par le diagramme 3:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow Q_0 \longrightarrow H \longrightarrow 0$$

qui nous permet de conclure: d'après ce qui précède, on a $\mu(H) = 1 + \frac{gl_Q + l' - l'_Q}{n_H}$. et comme H contredit la stabilité de E, on a aussi par hypothèse $\mu(H) > \mu(R)$. Comme dans le cas $l' = 1$, on en déduit que Q_0 est génériquement engendré par ses sections (sinon Q_0 contient un sous-faisceau de pente $\geq 1 + \frac{g(l_Q+1)}{n_H}$ et ceci contredit la stabilité de R).

Pour terminer la démonstration du théorème, il suffit de remarquer que l'on a

$$0 \longrightarrow F'^* \longrightarrow \mathrm{H}^0(E) \otimes \mathcal{O} \longrightarrow E \longrightarrow 0$$

et F' est stable par hypothèse. Le corollaire C-2 du Chap. 1 permet de conclure. $\diamondsuit$

Pour terminer cette partie, nous donnons l'existence de fibrés E de rang n, de degré $d = n + gl + l'$ avec $n + l$ sections globales indépendantes et $l' > 0$ qui ne sont pas engendrés par leurs sections. La situation pour $l' = 0$ est donc vraiment différente de celle où $l' > 0$:

B-3 Théorème: *Pour tout entier positif $l > 0$ et $l' \geq 0$, il existe un fibré stable E de rang $n = gl + l' + 1$ et de degré $d = n + gl + l' = 2n - 1$ tel que $h^0(E) = n + l$ et E n'est pas engendré par ses sections si $l' > 0$.*

Démonstration: On suppose que l est fixé et on fait une récurrence sur l'.
pour $l' = 0$, on a $d - n = gl$ et donc l'existence d'un tel fibré E est démontrée dans la proposition B-1 du Chap. 1.
Supposons que l'assertion est vraie pour l', c'est-à-dire, qu'il existe un fibré $E_{l'}$ de rang $n_{l'} = gl + l' + 1$ et de degré $d_{l'} = n_{l'} + gl + l'$. On a $\mu(E_{l'}) = 2 - \frac{1}{n_{l'}}$.
On étudie les extensions non triviales d'un fibré en droites $\mathcal{O}(2)$ de degré 2 par $E_{l'}$

$$0 \longrightarrow E_{l'} \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{O}(2) \longrightarrow 0\ .$$

Notons que E est de rang $n = n_{l'} + 1 = gl + (l' + 1) + 1$ et de degré $d = d_{l'} + 2 = n_{l'} + 1 + gl + (l' + 1) = n + gl + (l' + 1)$. On va montrer que l'on peut choisir E tel que E soit stable et $\mathrm{h}^0(E) = n + l$.
Supposons que E n'est pas stable. Alors E admet un quotient stable G de pente $\mu(G) = \frac{d_G}{n_G} \leq \mu(E) = 2 - \frac{1}{n}$. Le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & E_{l'} & \longrightarrow & E & \longrightarrow & \mathcal{O}(2) & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow & & & & \\ & & & & G & & & & \\ & & & & \downarrow & & & & \\ & & & & 0 & & & & \end{array}$$

montre que le morphisme $\phi : E_{l'} \to G$ est non nul: sinon on aurait un morphisme non nul de $\mathcal{O}(2)$ dans G. $E_{l'}$ et G étant stables, on doit donc avoir $\mu(E_{l'}) < \mu(G)$ ou $E_{l'} \simeq G$. Cette deuxième éventualité est exclue, puisque l'extension est supposée non triviale. On obtient finalement une double ingalité pour $\mu(G)$

$$2 - \frac{1}{n_{l'}} = \mu(E_{l'}) < \mu(G) = \frac{d_G}{n_G} \leq \mu(E) = 2 - \frac{1}{n_{l'} + 1}$$

qui n'a pas de solution pour $n_G \leq n_{l'+1} - 1$. On a montré que E est stable pour toutes les extensions non triviales.
Il reste à montrer que pour certaines extensions, on a bien $\mathrm{h}^0(E) = n + l$. Comme $\mathrm{h}^0(E_{l'}) = n_{l'} + l = n - 1 + l$, il faut montrer qu'une section de $\mathcal{O}(2)$ peut remonter à E. On utilise le lemme C-2 du Chap. 0: Soit $s : \mathcal{O} \to \mathcal{O}(2)$ (on peut toujours supposer que $\mathcal{O}(2)$ a une section). On en déduit un morphisme:

$$\phi : \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}(2), E_{l'}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}, E_{l'})$$

et la section s remonte à E si et seulement si $\phi(e) = 0$ où $e \in \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}(2), E_{l'})$ représente l'extension

$$0 \longrightarrow E_{l'} \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{O}(2) \longrightarrow 0 \ .$$

Il suffit donc de montrer que ϕ n'est pas injective pour terminer.
On considère la suite exacte associée à s:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}(2) \longrightarrow T \longrightarrow 0 \ .$$

T est un faisceau de torsion de degré 2. En appliquant le foncteur $\mathrm{Hom}\,(-, E_{l'})$ à cette suite exacte on obtient (comme dans la démonstration du lemme C-5 du Chap. 0) une suite exacte longue

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}^0(E_{l'}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(T, E_{l'})$$

$$\longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathcal{O}(-2)^* \otimes E_{l'}) \xrightarrow{\ \phi\ } \mathrm{H}^1(E_{l'}) \longrightarrow 0$$

Or $\dim \mathrm{Ext}^1(T, E_{l'}) = 2n > n + l = \mathrm{H}^0(E_{l'})$. ϕ n'est pas injective et le théorème est démontré. $\diamondsuit$

Il semble que l'on devrait pouvoir assez simplement montrer l'irréductibilité des espaces $W^{n+l-1}_{n,n+gl+l'}$. En effet, avec la proposition A-2 du chap. 1, on vérifie facilement qu'un fibré dans l'un de ces espaces est génériquement engendré par ses sections. Le conoyau du morphisme d'évaluation est un faisceau de torsion et un calcul identique à la partie A devrait permettre de conclure.

Chapitre 3: Fibrés vectoriels de pente 2

Tous les résultats sur les fibrés de pente < 2 sont valables pour toutes les courbes. Le lemme A-3 du Chap. 1 montre déjà qu'il n'en est pas de même pour les fibrés stables de pente 2: le fibré E_K est stable si et seulement si la courbe C n'est pas hyperelliptique. On a aussi le phénomène inverse: il est déjà connu que l'existence d'un fibré en droites avec "plus" de sections globales (par exemple si la courbe est hyperelliptique) implique l'existence de fibrés stables avec plus de sections globales que dans le cas d'une courbe générique (cf [**Re**]). Ici, il va résulter de l'étude des fibrés stables de pente 2, que le cas du fibré E_K n'est pas isolé. Pour commencer nous allons énoncer les résultats que l'on peut déduire des précédents chapitres. Cela demande certaines précautions. Nous avons utilisé a maintes reprises que si E est un fibré semi-stable de rang n, de degré d de pente $\mu < 2$, alors

$$\mathrm{h}^0(E) \leq n + \frac{1}{g}(d-n)$$

(cf théorème A-1 du chap. 1), mais ce lemme n'est pas vrai pour les fibrés de pente 2, comme nous l'avons déjà indiqué dans le corollaire A-4 du chap. 1: il faut supposer $\mathrm{h}^0(E_K^* \otimes E) = 0$ pour une courbe non hyperelliptique et $\mathrm{h}^0(L^* \otimes E) = 0$ pour une courbe hyperelliptique de g_2^1 L. Pour une courbe non hyperelliptique, E_K est en fait l'unique fibré stable de pente 2 qui ne vérifie pas l'inégalité ci-dessus: ceci implique, entre autres, qu'un fibré stable de rang $< g-1$ ne peut pas être engendré par ses sections.
Dans la partie A, nous étudions les fibrés stables ou semi-stables de pente 2 qui correspondent au point de la droite Δ d'abscisse 2: E est un fibé de rang $n = gl$ et $\mathrm{h}^0(E) = n + l$. L'étude est complète.
Dans la patie B nous étudions le cas des fibrés E stables de rang $gl + l'$, de pente 2 avec $0 < l' < g$: on alors $\mathrm{h}^0(E) \leq gl + l$; c'est l'équivalent de l'étude faite au chapitre 2. Malheureusement, la situation est particulièrement délicate et les démonstrations n'ont pas toutes abouti.

A- Etude au point de la droite Δ d'abscisse 2

Comme dans le cas des fibrés semi-stables de pente < 2, on s'intéresse d'abord aux fibrés E qui correspondent au point de la droite Δ d'abscisse 2: E est de rang gl, de degré $2gl$ et $\mathrm{h}^0(E) = gl + l$ avec $l > 0$.
Les résultats se démontrent d'une manière absolument identique à celle que nous avons employée pour les fibrés stables ou semi-stables de pente < 2. Les modifications des énoncés sont dues à la remarque en introduction de ce chapitre.

A-1 Théorème: *Soit F un fibré semi-stable de pente $2g$ et de rang l, alors $D(F)$, le dual du noyau de son morphisme d'évaluation, est semi-stable:*

$$0 \longrightarrow D(F)^* \longrightarrow \mathcal{O} \otimes \mathrm{H}^0(F) \longrightarrow F \longrightarrow 0 \ .$$

Démonstration: Notons tout d'abord que d'après le théorème de Riemann-Roch, le fibré $D(F)$ est de rang gl, de degré $2gl$ et $\mathrm{h}^0(D(F)) \geq gl+l$: $D(F)$ correspond a un point qui est sur la droite Δ ou éventuellement au-dessus. Si $D(F)$ n'est pas semi-stable alors il admet un fibré quotient G stable de plus petite pente $\mu(G) < 2$; alors on peut appliquer le théorème A-1 du chap. 1 et tous les arguments donnés dans la démonstration du théorème B-1 du chap. 1 sont encore valables. $\diamondsuit$

Si on voulait montrer que pour F stable, $D(F)$ est stable, il faudrait envisager le cas $\mu(G) = 2$ et le théorème A-1 du chap. 1 n'est plus valable. On va en fait montrer que dans le cas d'une courbe hyperelliptique $D(F)$ ne peut pas être stable. Mais il existe quand même une sorte de réciproque au théorème ci-dessus. Nous avons d'abord besoin du lemme ci-dessous:

A-2 Lemme: *Soit E un fibré stable de rang gl, de pente $\mu = 2$ et tel que $\mathrm{h}^0(E) = n + l$. Alors E est engendré par ses sections.*

Démonstration: Soit Im le faisceau image du morphisme d'évaluation

$$\mathrm{H}^0 \otimes \mathcal{O} \to E \ .$$

Quitte à écrire $Im \simeq \mathcal{O}^s \oplus Im'$, on peut supposer que $\mathrm{h}^0(Im^*) = 0$. On a par définition $\mathrm{h}^0(Im) = n + l$ et $n = gl$. Si $Im \not\simeq E$, alors $\mu(Im) < 2$ et ceci contredit le théorème A-1 du chap. 1 ou plutôt la proposition A-2 du même chapitre. $\diamondsuit$

On peut maintenant montrer le théorème suivant qui donne d'une certaine manière une réciproque au théorème A-1:

A-3 Théorème: *Soit E un fibré stable de rang gl et de pente 2 tel que $h^0(E) = gl + l$, alors $D(E)$, le dual du noyau de son morphisme d'évaluation,*

$$0 \longrightarrow D(E)^* \longrightarrow \mathcal{O} \otimes \mathrm{H}^0(E) \longrightarrow E \longrightarrow 0$$

est stable.

Démonstration: Tout d'abord, d'après le lemme A-2, on sait que E est engendré par ses sections. Dans la démonstration du théorème B-1 du chap. 1, partie *le morphisme $U_{l,n+gl} \to W^{n+l-1}_{n,n+gl}$ est un isomorphisme*, nous démontrons un un résultat analogue pour les fibrés de rang n, de degré $n + gl$ et possédant

$n+l$ sections. Reprenons cette démonstration: sans changer une virgule nous aboutissons à une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}^s \longrightarrow Q \longrightarrow E \longrightarrow 0$$

et comme E est stable de pente 2, Q a encore un sous-fibré de pente maximal < 2 (on a montré que $\mathrm{h}^0(Q^*) = 0$). (Remarquons que si E n'était que semi-stable, ce ne serait plus vrai). On peut donc encore appliquer la proposition A-2 du chap. 1. Et on reprend la suite de la démonstration sans rien changer. La seule modification à faire est de comprendre que dans la démonstration on a $F = D(E)$. $\diamondsuit$

Notons qu'un fibré semi-stable de rang gl, de pente 2 et possèdant $gl+l$ sections n' a a priori aucune raison d'être engendré par ses sections (prendre une somme de E_K assez nombreux et d'un fibré stable de pente 2 sans section). De plus, il est clair que même si on suppose que E est un fibré semi-stable de pente 2 engendré par ses $gl+l$ sections, $D(E)$ n'est pas nécessairement semi-stable (prendre une somme de E_K et d'un fibré de pente 2 engendré par ses sections: le dual du noyau du morphisme d'évaluation est isomorphe à une une somme de K et d'un fibré de pente $2g$). Par contre, on a le lemme suivant:

A-4 Lemme: *Soit E un fibré semi-stable de rang gl, de pente 2 tel que $h^0(E) = gl + l$. Si le gradué de E (cf chap. 0) ne contient pas de terme isomorphe à E_K (L si la courbe est hyperelliptique), alors D(E), le dual du noyau du morphisme d'évaluation de E, est semi-stable.*

Démonstration: Soit $\mathrm{gr}\, E = \oplus_i E_i$ le gradué de E. On peut encore appliquer à E et aux E_i la proposition A-2 du chap. 0 (car $\mathrm{h}^0(E_K^* \otimes E_i) = 0$)

$$\mathrm{h}^0(E_i) \le n_{E_i} + \frac{1}{g}(d_{E_i} - n_{E_i})$$

et comme par hypothèse on est dans le cas d'égalité pour E, on en déduit que l'on a égalité pour E_i, quelque soit i. Le théorème A-3 implique alors que le gradué de $D(E)$ est $\oplus_i D(E_i)$: D(E) est semi-stable. $\diamondsuit$

La situation des fibrés de pente 2 est donc plus délicate que dans le cas d'une pente < 2. Le lemme ci-dessous en donne une illustration encore plus frappante:

A-5 Lemme: *Si la courbe C est hyperelliptique, alors il n'existe pas de fibrés stables de rang gl et de pente 2 possédant $gl+l$ sections globales indépendantes: $W^{gl+l-1}_{gl,2gl} = \emptyset$.*

Démonstration: Supposons qu'il existe un fibré E comme ci-dessus: alors il est engendré par ses sections et d'après le théorème A-3, il s'inscrit dans une suite exacte

$$0 \longrightarrow F^* \longrightarrow \mathcal{O} \otimes \mathrm{H}^0(E) \longrightarrow E \longrightarrow 0$$

où F est stable.
On prend la duale de cette suite exacte, que l'on tensorise par L, l'unique g_2^1 de la courbe C supposée hyperelliptique:

$$0 \longrightarrow L \otimes E^* \longrightarrow L \otimes \mathrm{H}^0(E)^* \longrightarrow L \otimes F \longrightarrow 0 \ .$$

On obtient une suite exacte longue

$$0 \to \mathrm{H}^0(L \otimes E^*) \to \mathrm{H}^0(L) \otimes \mathrm{H}^0(E)^* \to \mathrm{H}^0(L \otimes F) \to \cdots$$

et comme $L \otimes F$ est stable de pente $2g+2$, on a

$$\mathrm{h}^0(L \otimes F) = 2gl + 2l - l(g-1) = gl + 3l \ .$$

De plus, $\mathrm{h}^0(L) = 2$ et $\mathrm{h}^0(E) = gl + l$ et donc

$$\mathrm{h}^0(L).\mathrm{h}^0(E) = 2l(g+1) > \mathrm{h}^0(L \otimes F) \ .$$

Ceci implique que $\mathrm{h}^0(L \otimes E^*) \neq 0$, et donc qu'il existe un morphisme non nul $E \to L$ où E et L sont stables de pente 2; donc $E \simeq L$, c'est impossible par hypothèse. $\diamondsuit$

Remarquons que si l'on avait pris un fibré stable E de pente < 2 correspondant à un point sur la droite Δ, le même raisonnement montre que l'on a un morphisme surjectif $E \to L$ où il faut comprendre L comme un g_δ^1 de plus petit degré δ pour la courbe (il n'est pas nécessaire de se restreindre aux courbes hyperelliptiques).
Il est maintenant naturel de se poser le problème de l'existence de tels fibrés pour des courbes non hyperelliptiques:

A-6 Théorème: *Pour une courbe non hyperelliptique, les variétés de Brill-Noether $W_{gl,2gl}^{gl+l-1}$ sont non vides, irréductibles, de la bonne dimension et lisses.*

Démonstration: On a vu qu'un fibré stable de rang gl et de pente 2 a au plus $gl + l$ sections globales indépedantes et qu'il est nécessairement engendré par ses sections. Enfin, d'après le lemme A-3, $D(E)$ est stable. On est donc naturellement amené à étudier les quotients

$$0 \longrightarrow F^* \longrightarrow \mathcal{O}^{gl+l} \longrightarrow E \longrightarrow 0$$

où F est supposé stable de rang l et de pente $2g$. Comme nous l'avons déjà fait dans les chapitres précédents, nous allons déduire de l'étude du schéma $\mathrm{Quot}_{gl,2gl}(\mathcal{O}^{gl+l})$, que l'on peut trouver de tels quotients avec E stable. On sait déjà d'après le théorème A-1 que E est semi-stable. Comme dans la partie C du chap. 1, on montre que les quotients tels que F et E soient semi-stables correspondent à un ouvert irréductible et lisse du shéma $\mathrm{Quot}_{gl,2gl}(\mathcal{O}^{gl+l})$. On

en déduit que si les espaces de Brill-Noether sont non vides, ils sont irréductibles et on montre que les morphismes de Petri sont injectifs (cf partie C du chap. 1), donc ces espaces sont lisses.
Il ne reste plus qu'à démontrer que ces espaces de Brill-Noether sont non vides. Pour cela, on va procéder en deux étapes étapes:

- On résoud le problème pour $l = 1$. Ce qui donne l'existence d'un fibré E_1 stable de degré $2g$, de pente 2 et tel que $\mathrm{h}^0(E_1) = g + 1$.

- On en déduit que dans le cas général, on peut supposer que les quotients E vérifient $\mathrm{h}^0(E) = gl + l$ (ce n'était pas évident!) et alors on peut conclure simplement.

Première étape: Si $\mathcal{O}(2g)$ est un fibré en droites de degré $2g$, on sait que $\mathcal{O}(2g)$ est engendré par ses sections et que $\mathrm{h}^0(\mathcal{O}(2g)) = g + 1$. On a encore une suite exacte

$$0 \longrightarrow D(\mathcal{O}(2g))^* \longrightarrow \mathcal{O}^{g+1} \longrightarrow \mathcal{O}(2g) \longrightarrow 0$$

et $D(\mathcal{O}(2g))$est semi-stable d'après le théorème A-1. De plus, comme $D(\mathcal{O}(2g))$ est un fibré de rang g et est engendré par ses sections, il est clair que $D(\mathcal{O}(2g))$ n'est pas stable si et seulement si $D(\mathcal{O}(2g))$ admet E_K comme quotient (la courbe n'est pas hyperelliptique). Donc on va supposer que $D(\mathcal{O}(2g))$ s'écrit comme une extension

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(x + y) \longrightarrow D(\mathcal{O}(2g)) \longrightarrow E_K \longrightarrow 0$$

Et le morphisme $\mathcal{O}^g \longrightarrow E_K$ se prolonge en un morphisme $\mathcal{O}^g \longrightarrow D(\mathcal{O}(2g))$, puisque $\mathrm{h}^0(D(\mathcal{O}(2g))) = g + 1$. On en déduit que l'élément

$$e \in \mathrm{Ext}^1(E_K, \mathcal{O}(x + y))$$

représentant l'extension ci-dessus a pour image 0 dans $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}^g, \mathcal{O}(x + y))$ (cf lemme C-2 du chap. 0). Or la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow K^* \longrightarrow \mathcal{O}^g \longrightarrow E_K \longrightarrow 0$$

implique une suite exacte longue

$$0 \to \mathrm{H}^0\big(E_K^* \otimes \mathcal{O}(x + y)\big) \to \mathrm{H}^0\big(\mathcal{O}^g \otimes \mathcal{O}(x + y)\big) \to \mathrm{H}^0\big(K \otimes \mathcal{O}(x + y)\big) \to$$

$$\mathrm{H}^1\big(E_K^* \otimes \mathcal{O}(x + y)\big) \to \mathrm{H}^1\big(\mathcal{O}^g \otimes \mathcal{O}(x + y)\big) \to \mathrm{H}^1\big(K \otimes \mathcal{O}(x + y)\big) \to 0$$

et comme $\mathrm{h}^0\big(E_K^* \otimes \mathcal{O}(x + y)\big) = 0$, $\mathrm{h}^0\big(\mathcal{O}^g \otimes \mathcal{O}(x + y)\big) = g$ et que $\mathrm{h}^0\big(K \otimes \mathcal{O}(x + y)\big) = g + 1$, le noyau du morphisme

$$\mathrm{Ext}^1\big(E_K^*, \mathcal{O}(x + y)\big) \to \mathrm{Ext}^1\big(\mathcal{O}^g, \mathcal{O}(x + y)\big)$$

est de dimension 1. Ceci implique que pour x et y fixés, il existe au plus une extension de E_K par $\mathcal{O}(x+y)$ à isomorphisme près pour laquelle toutes les sections de E_K remontent. Or, on peut choisir $\mathcal{O}(2g)$ quelconque dans la jacobienne qui est de dimension $g > 2$. On en déduit que l'on peut choisir $\mathcal{O}(2g)$ tel que $D(\mathcal{O}(2g))$ soit stable. Soit E_1 l'un de ces $D(\mathcal{O}(2g))$.

Deuxième étape: On note U, l'ouvert irréductible du schéma $\mathrm{Quot}_{gl,2gl}(\mathcal{O}^{gl+l})$ constitué des quotients tels que les noyaux et les conoyaux soient semi-stables. Si l'on considère une somme de l fois le fibré E_1, ce nouveau fibré est semi-stable de pente 2, de rang gl , possède $gl+l$ sections globales indépendantes et est engendré par ses sections. De plus $D(E_1 \oplus \cdots \oplus E_1) = \mathcal{O}(2g) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(2g)$, donc $D(E)$ est semi-stable. Enfin, $\mathrm{h}^0(E_1 \otimes E_K^*) = 0$ et $\mathrm{h}^0(E_K \otimes E_1^*) = 0$. D'après le théorème de semi-continuité, on sait alors que l'ouvert $U' \subset U$ des quotients tel que $\mathrm{h}^0(E) = gl + l$, $\mathrm{h}^0(E \otimes E_K^*) = 0$ et $\mathrm{h}^0(E_K \otimes E^*) = 0$ est non vide. Soit donc un tel quotient dans U'

$$0 \longrightarrow F^* \longrightarrow \mathcal{O}^{gl+l} \longrightarrow E \longrightarrow 0$$

et supposons que E est semi-stable non stable: E admet un quotient E' stable de pente 2 et donc s'inscrit dans une suite exacte

$$0 \longrightarrow E'' \longrightarrow E \longrightarrow E' \longrightarrow 0 \ .$$

Par hypothèse, $E' \not\simeq E_K$ et $\mathrm{h}^0(E_K^* \otimes E'') = 0$. On en déduit que l'on a deux inégalité:

$$\mathrm{h}^0(E') \leq n_{E'} + \frac{1}{g}(d_{E'} - n_{E'})$$

et

$$\mathrm{h}^0(E'') \leq n_{E''} + \frac{1}{g}(d_{E''} - n_{E''})$$

qui doivent être en fait des égalités puisque l'on a aussi par hypothèse

$$\mathrm{h}^0(E) = n_E + \frac{1}{g}(d_E - n_E) \ .$$

Ceci montre que $\mathrm{H}^0(E) \simeq \mathrm{H}^0(E') \oplus \mathrm{H}^0(E'')$. On en déduit un morphisme $D(E') \to F$ et le théorème A-3 dit que $D(E')$ est stable de pente $2g$. Ceci implique que F ne peut pas être stable. On en déduit une contradiction: on a certes seulement supposé que les quotients de U' devaient vérifier F semi-stable; mais avec un calcul comme dans la partie C du chap. 1, on vérifie facilement que le schéma $\mathrm{Quot}_{gl,2gl}(\mathcal{O}^{gl+l})$ au voisinage d'un point de U' est de dimension $l^2(g-1)+1$ à l'action près du groupe des automorphismes de $\mathcal{O}^{gl+l}$. Si l'on n'avait que des fibrés semi-stables, on devrait avoir une dimension strictement inférieure. Ou encore, on peut utiliser l'existence d'un fibré stable R de rang $gl+1$, de degré $gl+1+gl$ possèdant $gl+1+l$ sections globales (cf chap. 1). Il existe une section non nulle de R qui s'annule, donc R possède un sous-fibré de la forme $\mathcal{O}(x)$. Le fibré $R/\mathcal{O}(x)$ est engendré par ses sections, semi-stable et $D(R/\mathcal{O}(x))$ est stable; c'est la méthode que nous allons employer dans la partie B. $\diamondsuit$

Les fibrés E que l'on vient d'exhiber sont donc engendrés par leurs sections et $D(E)$ est encore stable. Le corollaire C-2 du chap. 1 implique le corollaire suivant:

A-7 Corollaire: *Si C n'est pas une courbe hyperelliptique, alors pour tout $l>0$ et tout $k \leq gl+l$, les espaces de Brill-Noether $W^{k-1}_{gl,2gl}$ sont non-vides et possèdent une composante de la bonne dimension.*

B- Etude des fibrés de rang $\mathrm{gl}+\mathrm{l}'$ et de pente 2

Cette partie traite des fibrés stables stables de pente 2, qui ne peuvent atteindre le point d'abscisse 2 de la droite Δ. Nous allons utiliser des méthodes sensiblement identiques à celles de la partie précédente. Notons que l'on est dans le cas où $n = gl + l'$ avec $0 < l' < g$. Un fibré stable de rang n et de pente 2 non isomorphe à E_K (ou L si la courbe est hyperelliptique) possède au plus $n+l$ sections globales indépendantes. Comme dans la partie A, nous commençons par montrer qu'il existe des fibrés semi-stables de rang n de pente 2 avec $n+l$ sections.
En effet, nous avons montré qu'il existait des fibrés stables E' de rang $gl+l'+1$ et de degré $2gl+2l'+1$ qui s'inscrivent dans une suite exacte (cf partie B du chap. 2)

$$0 \longrightarrow D(E')^* \longrightarrow \mathcal{O}^{n+l} \longrightarrow E' \longrightarrow 0$$

où $D(E')$ est un fibré stable. En remarquant que $\mu(E') = 2 - \frac{1}{n_{E'}}$, on montre que tout quotient E

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(x) \longrightarrow E' \longrightarrow E \longrightarrow 0$$

est semi-stable: tout quotient G de E' (donc de E) a nécessairement une pente telle que $\mu(G) > \mu(E') = 2 - \frac{1}{n_{E'}}$ et donc $\mu(G) \geq 2 = \mu(E)$. De plus, on vérifie facilement que l'on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow D(E') \longrightarrow D(E) \longrightarrow \Theta \longrightarrow 0$$

où Θ est le faisceau de torsion de degré 1 et de support x. D'après le lemme C-4 du chap. 0, on peut supposer que $D(E)$ est stable. Ceci montre le lemme suivant

B-1 Lemme: *Pour toute courbe lisse C, pour tour tout choix des entiers $l > 0$ et $0 < l' < g$, il existe un fibré semi-stable E de rang $gl + l'$, de pente 2 et tel que $h^0(E) \geq gl + l$. On peut supposer de plus que $D(E)$ est stable.*

Ce résultat est valable pour toutes les courbes. Il est normal que l'existence d'un g_2^1 (si la courbe est hyperelliptique) modifie les conditions d'existence de fibrés stables. Mais, fait étonnant, nous obtenons encore dans ce cas la non existence de fibrés stables:

B-2 Lemme: *Si la courbe C est hyperelliptique, il n'existe pas de fibré stable E de rang n et de pente 2 génériquement engendré par ses sections et tel que $h^0(E) > n$, ormis L, l'unique g_2^1 de la courbe.*

Démonstration: C'est une généralisation du lemme A-5 de ce chapitre: supposons qu'il existe un tel fibré E. Alors il est génériquent engendré par $n+1$ sections. On en déduit une suite exacte

$$0 \longrightarrow N^* \longrightarrow \mathcal{O}^{n+1} \longrightarrow E \longrightarrow \Theta \longrightarrow 0$$

où Θ est un faisceau de torsion et N un fibré en droites. En dualisant, on obtient une suite exacte

$$0 \longrightarrow E^* \longrightarrow \mathcal{O}^{n+1} \longrightarrow N \oplus \Theta \longrightarrow 0$$

que l'on tensorise par L, le g_2^1 de la courbe, pour obtenir une suite exacte longue

$$0 \to \mathrm{H}^0(L \otimes E^*) \to \mathrm{H}^0(L) \otimes \mathrm{H}^0(\mathcal{O}^{n+1}) \to \mathrm{H}^0(L \otimes N \oplus \Theta) \to \cdots$$

et on a: $\mathrm{h}^0(\Theta) = d_\Theta$, $\mathrm{h}^0(L).(n+1) = 2(n+1)$ et $\mathrm{h}^0(L \otimes N)$ est majoré, d'après le théorème de Clifford, par $1 + \frac{d_N}{2}$, si $d_N \leq 2g-1$ et est égal à $d_N - (g-1)$ sinon. Comme $d_N + d_\Theta = d_E = 2n$, on en déduit que l'on a

$$\mathrm{h}^0(L).(n+1) > \mathrm{h}^0(L \otimes N \oplus \Theta)$$

sauf si $E = N = L$.
Donc, comme dans le lemme A-5, on a un morphisme non nul $E \to L$, ce qui contredit la stabilité de E. $\diamondsuit$

On en déduit par exemple le lemme suivant:

B-3 Lemme: *Si la courbe C est hyperelliptique et si $n \leq 2g+1$, alors $W^n_{n,2n} = \emptyset$.*

Démonstration: Supposons qu'il existe un fibré stable E de rang $n < 2g+2$, de pente 2 tel que $\mathrm{h}^0(E) > n$. Alors, d'après le lemme ci-dessus, E n'est pas génériquement engendré par ses sections. Donc le sous-faisceau Im de

E engendré par ses sections possède au moins $n_{Im} + 2$ sections globales indépendantes et on en déduit, (cf proposition A-2 du chap. 1), que $n_{Im} > 2g$ et donc $n \geq 2g + 2$, ce qui contredit l'hypothèse. $\diamondsuit$

En fait, il ne serait pas impossible que lemme ci-dessus soit valable pour n quelconque. On peut par exemple montrer que si $n = gl + l'$ avec $0 < l' < g$, alors les espaces $W^{n+l-1}_{n,2n}$ sont vides (s'ils ne l'étaient pas, les fibrés stables correspondants seraient génériquement engendrés par leurs sections).
Par contre, on a un théorème similaire au théorème A-1 du chap. 2 pour les fibrés de petit rang et pour une courbe non hyperelliptique:

B-4 Théorème: *Supposons C non hyperelliptique et soit n un entier tel que $1 < n < g - 1$. Alors, pour $k \leq n$, les espaces de Brill-Noether $W^{k-1}_{n,2n}$ sont non vides, irréductibles, de la bonne dimension et leur lieu de singularité est bien $W^k_{n,2n}$*

Démonstration: La démonstration est identique à celle du théorème A-1 du chap. 2 puisque l'on a l'équivalent du lemme A-1 du même chapitre: pour un fibré stable dans les conditions du théorème, on a toujours

$$\mathrm{H}^0(E) \otimes \mathcal{O} \hookrightarrow E$$

et il n'y a donc rien à changer. $\diamondsuit$

Il semble que pour les fibrés de rang supérieur (et pour une courbe non hyperelliptique), on doit avoir un résultat analogue au théorème B-1 du chapitre 2: si $n = gl + l'$ avec $0 < l' < g$, alors $W^{n+l-1}_{gl+l',2(gl+l')}$ est non vide et possède une composante de la bonne dimension. Le lemme B-1 ci-dessus donne un début de démonstration: on a l'existence de fibrés semi-stables E de rang $gl + l'$ et de pente 2 qui s'inscrivent dans une suite exacte

$$0 \longrightarrow D(E)^* \longrightarrow \mathcal{O}^{n+l} \longrightarrow E \longrightarrow 0$$

Comme dans la partie A, on étudie le schéma $\mathrm{Quot}_{n,2n}(\mathcal{O}^{n+l})$. On montre alors que l'on peut supposer $\mathrm{h}^0(E) = n+l$, $\mathrm{h}^0(E^*_K \otimes E) = \mathrm{h}^0(E^* \otimes E_K) = 0$; ensuite on devrait pouvoir conclure à l'aide d'une récurrence comme dans le chap. 2 partie B, mais n'avons pas encore abouti. La question sera réglée ultérieurement.

Chapitre 4: La conjecture

Nous allons dans ce chapitre exposer une conjecture qui pourrait donner une solution au problème de Brill-Noether pour ce qui est de l'existence de fibrés stables de rang n, de degré d possèdant k sections globales indépendantes. Le résultat ne serait pas vrai pour toutes les courbes, mais pour une courbe générique; nous préciserons ce que nous entendrons alors par générique. Avant de formuler la conjecture elle-même, nous allons revenir sur les résultats que nous avons déjà à notre disposition. Nous ne possèdons pas encore d'éléments pour une réelle démonstration de cette conjecture mais espérons aboutir à "court" terme.

Remarquons tout d'abord que les résultats de [**B-G-N**] ajoutés à ceux des chapitres précédents résolvent complètement le problème de l'existence pour les fibrés stables ou semi-stables de pente μ, $0 \leq \mu < 2$. La symétrie de Riemann-Roch permet alors de traiter le cas $g = 3$ (cf figure h). La zone d'existence est valable pour toutes les courbes, sauf en $\mu = 2$ et il apparaît déjà, même si l'étude n'est pas terminée, que les conditions d'existence de fibré stables avec un nombre de sections donné sont plus larges pour une courbe non hyperelliptique que pour une courbe hyperelliptique. Cette situation devrait être unique.

Il semble alors que la zone d'existence est déterminée par une ligne polygonale dont les pentes ont un coefficient directeur de la forme $\frac{a}{g}$.
De plus, comme le suggère le théorème de Teixidor, l'existence de fibrés stables de pente μ avec un certain nombre de sections ne devrait dépendre que du genre g de la courbe et de l'existence de fibrés en droites de degré inférieur à μ avec suffisamment de sections.
L'idée est donc de partir des cas résolus ($g = 2$, $g = 3$...) et d'utiliser la symétrie de Riemann-Roch pour trouver la valeur de $\frac{a}{g}$, le coefficient directeur de la ligne polygonale suivante (cf figures i et j). On obtient ainsi une ligne polygonale continue, qui est invariante par la symétrie de Riemann-Roch. De plus, la zone ainsi derteminée englobe la zone de Teixidor et semble particulièrement bien longer la courbe de Brill-Noether. Ceci nous conduit à faire la conjecture suivante:

Conjecture: *Soit C une courbe lisse de genre g.*
On pose $\alpha_k = 2k$ et $\beta_k = \beta_{k-1} + \frac{2k}{g}$ pour $0 < k \leq 2g-2$ et $\beta_0 = 1 - \frac{1}{g}$. Les points (α_k, β_k) définissent une ligne polygonale $\mathcal{P}$. Pour une courbe générique, la zone de Brill-Noether est exactement déterminée par la ligne $\mathcal{P}$, la droite de Riemann-Roch, et les axes $\mu = 0$, $\lambda = 0$. Aux points de coordonnées entières sur $\mathcal{P}$, une étude plus précise doit être faite: on ne devrait avoir que des fibrés semi-stables non-stables. Sous la ligne $\mathcal{P}$, les espaces de Brill-Noether ont toujours

une composante de la bonne dimension. Enfin, il faut comprendre par le terme générique la chose suivante: si la courbe C admet un g^1_δ, avec $\delta \leq \frac{1}{2}g$ (cf théorème B-1 du chap. O), la conjecture est encore vraie pour $\mu < \delta$ et pour $\mu > \delta$, il peut exister des fibrés stables correspondants à des points au-dessus de la ligne $\mathcal{P}$.

En effet, dans l'étude des fibrés stables E de rang n et de pente $1 < \mu < 2$, nous avons introduit la notation $\mathrm{h}^0(E) = n + l$, où l pourrait être appelé *l'excédent de sections* de E. Pour l et n fixés, on peut alors chercher le plus petit d, tel qu'il existe un fibré stable E de rang n, de degré d avec l comme excédent de sections. Nous pensons qu'avec des arguments du même type que dans les chapitres précédents, on peut montrer que sous certaines conditions E est engendré par ses sections et que $D(E)$ est stable; ce fibré devrait correspondre à un point sur la ligne $\mathcal{P}$ ou juste sous cette ligne (cf chap. 2). Le corollaire C-2 du chapitre 1 prouverait alors l'assertion sur une composante de la bonne dimension. Enfin, pour prouver qu'au-dessus de la ligne $\mathcal{P}$, il n'existe pas de fibrés stables, nous pensons qu'une étude plus précise du fibré E_K est nécessaire, afin d'obtenir une bonne majoration de $\mathrm{h}^0(E_K^* \otimes E)$ avec E stable (cf remarque A-5 du chap. 1). Notons que E_K est loin d'être un fibré quelconque, il contient des informations importantes sur la courbe (cf [**P-R**]). Ceci sera étudié plus en détails dans les mois à venir, afin de voir quelles modifications il faudrait faire pour obtenir la bonne description.

Annexe:

Les figures

Bibliographie

[A] **Atiyah, M.F.** : *Vector bundles on an elliptic curve.* Proc. Lond. Math.Soc. (3) **7**. (1982) pp. 414-452.

[A-C-G-H] **Arbarello, E., Cornalba, M., Griffiths, P., Harris, J.** : *Geometry of Algebraic curves I.* Grundlehren Math. Wiss. **267**, Springer verlag, New-York, (1984).

[B-G-N] **Brambila-Paz, L., Grzegorczyk, I., Newstead, P. E.** : *Geography of Brill-Noether loci for small slopes* Preprint Octobre 95.

[B-N] **Brambila-Paz, L, Newstead, P. E.** : *Subvariedades del espacio moduli* Memorias del XXVII Congreso de la Sociedad Matematica Mexicana, Comunicaciones, Aportaciones Matematicas **16** (1995), pp. 43-53.

[EGA] **Grothendieck, A.** : *Eléments de Géométrie Algébrique* Springer Verlag **166** (1971)

[E-H-1] **Eisenbud, D., Harris, J.** : *Limit linear series: Basic theory.* Invent. Math. **85** (1986) pp. 337-371.

[E-H-2] ——————— : *Divisors on general curves and cupsidal rational curves.* Invent. Math. **74** (1983) pp. 371-418.

[E-H-3] ——————— : *A simpler proof of Gieseker-Petri Theorem on special divisors.* Inventiones math. **74** (1983) pp. 269-280.

[G] **Grothendieck, A.** : *Technique de descente et théorème d'existence en géométrie algébrique. IV Les shémas de Hilbert.* Séminaire Bourbaki **221**, (1960/61).

[H] **Hartshorne, R.** : *Algebraic geometry.* Berlin-Heidelberg-New York Springer Verlag (1977) .

[L] **Laumon, G.** : *Fibrés vectoriels spéciaux.* Bull. Soc. Math. France **119** (1991) pp. 97-119.

[LP] **Le Potier, J.** : *Fibrés vectoriels sur les courbes algébriques.*, Publications Mathématiques de l'université Paris 7- Denis Diderot **35** (1996) .

[Li] **Li, Y.** : *Spectral curves, theta divisors and Picard bundles*, International J. Math. 2 (1991), pp. 525-550.

[M-F] **Mumford, D., Fogarty, J.** : *Geometric Invariant Theory.* Springer Verlag (1982) .

[Na-R] Narasimhan, M. S., Ramanan, S. : *Deformation of the moduli space of vector bundles over an algebraic curve* Ann.-Math. (2) **101** (1975), pp. 391-417.

[Na-Se] Narasimhan, M. S., Seshadri, C. S. : *Stable and unitary vector bundles on a compact Riemann surface* Ann.-of-Math. (2) **82** (1965) pp. 540-567.

[Pe] Peskine, C. : *Introduction algébrique à la géométrie projective* Cours de D.E.A (1993).

[P-R] Paranjape, P., Ramanan, S. : *On the canonical ring of a curve* Collection: Algebraic geometry and commutativ algebra, Vol. II, (1988) pp. 503-516

[Re] Re, R. : *Multiplication of sections and Clifford bounds for special stable bundles on curves* Preprint 96.

[Rego] Rego, C. J. : *Deformation of modules on curves and surfaces.* Singularities, Representatation of Algebras, and Vector Bundles. Proceedings, Lambrecht 1985, Springer Lect. Notes in Math. **1273** pp. 157-167

[Se] Seshadri, C. S. : *Fibrés vectoriels sur les courbes algébriques.* Astérisque **96**. (1982) .

[Su] Sundaram, N. : *Special divisor and vector bundles* Tôhoku Math. Journ. **39** (1987) pp.175-273.

[T] Tan, X. J. : *Some results on the existence of rank two special stable vector bundles* Manuscripta Math. **75** (1992), 365-373.

[Te-1] Monserrat Teixidor I Bigas : *Brill-Noether Theory for stable vector bundles.*, Duke math. Journal **62** (1991) .

[Te-2] ―――――――― : *Brill-Noether Theory for vector bundles of rank 2.* Tôhoku Math. journal **43** (1991) pp. 123-126.

[Te-3] ―――――――― : *On the Gieseker-Petri map for rank 2 vector bundles* Manuscripta Math. **75** (1992) pp. 375-382.