THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PARIS 6

Spécialité

Mathématiques

Présentée par

Yves Dutrieux

Pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université Paris 6

Sujet de la thèse

GÉOMÉTRIE NON LINÉAIRE DES ESPACES DE BANACH

Soutenue le 19 décembre 2002 devant le jury composé de

MM.	**Robert Deville**	**Examinateur**
	Gilles Godefroy	**Directeur de thèse**
	Nigel Kalton	**Rapporteur**
	Gilles Lancien	**Rapporteur**
	David Preiss	**Examinateur**
	Jean Saint-Raymond	**Examinateur**

A mes grands-parents

Cette thèse a été réalisée à l'Équipe d'Analyse de l'Université Pierre et Marie Curie sous la direction de M. Gilles Godefroy. Avec une rare humanité, il a partagé avec moi son désir et son respect pour les mathématiques. Son contact passionne l'élève et enrichit l'ami. Je veux simplement lui dire merci.

MM. Nigel Kalton et Gilles Lancien m'ont posé des questions, m'ont donné des réponses. Toujours avec bienveillance. Travailler quelques heures avec eux est un grand cadeau. Je suis touché qu'ils aient accepté d'être rapporteurs.

Une partie de cette thèse a été effectuée à l'University College of London. Je suis reconnaissant à M. David Preiss de m'avoir si bien accueilli.

Je remercie MM. Robert Deville, Nigel Kalton, Gilles Lancien, David Preiss et Jean Saint-Raymond de l'honneur qu'ils me font en participant au jury.

Les excellentes conditions de travail dont j'ai joui pendant trois ans et demi doivent beaucoup aux membres de l'Équipe d'Analyse. J'espère avoir encore l'occasion de déjeuner avec eux à douze heures trente précises.

Enfin, un grand merci à mes parents et amis. Ils ont participé à cette thèse plus activement qu'ils ne le croient.

Table des matières

1 Introduction **9**
1.1 Version française . . . 9
1.1.1 Présentation de la thèse . . . 9
1.1.2 Plan du texte . . . 16
1.2 English version . . . 17
1.2.1 Summary . . . 17
1.2.2 Structure of this memoir . . . 23

— 1e partie —

Relations non linéaires entre espaces de Banach généraux **25**

2 Rappels sur les relations linéaires **27**
2.1 Notations utilisées . . . 27
2.2 Relations linéaires . . . 30

3 Relations non linéaires **31**
3.1 Equivalences non linéaires . . . 31
3.1.1 Applications lipschitziennes . . . 31
3.1.2 Applications uniformément continues . . . 31
3.1.3 Réseaux équivalents . . . 32
3.1.4 Liens entre les équivalences non linéaires . . . 33
3.2 Relations de quotients non linéaires . . . 34
3.2.1 Quotients lipschitziens . . . 34
3.2.2 Quotients uniformes . . . 34
3.2.3 Résultats connus sur les quotients non linéaires . . . 35

4 Distances entre espaces de Banach **37**
4.1 Distances liées à une relation d'équivalence . . . 37
4.2 Distances géométriques . . . 38
4.3 Les $\mathcal{K}_0$-espaces . . . 41

5 Complexité topologique **43**
5.1 Rappels de théorie descriptive . . . 43
5.1.1 Ordinaux dénombrables . . . 43
5.1.2 Notions de théorie descriptive . . . 43
5.1.3 Arbres . . . 44
5.1.4 Structure borélienne d'Effros . . . 45
5.2 Analyticité . . . 46

5.3 Analyticité vraie 51

6 Conservation des indices **55**
6.1 Indices de dérivation 55
6.1.1 Définition des indices 55
6.1.2 Propriétés quantifiées par les indices 56
6.2 Contrôle universel 57
6.2.1 Propriété d'Asplund 57
6.2.2 Propriété de Radon-Nikodým 59
6.3 Contrôle géométrique 60
6.4 Modules asymptotiques 63

— 2e partie —

Relations non linéaires entre espaces de fonctions continues **73**

7 Quotients de c_0 et homéomorphismes lipschitziens **75**
7.1 Introduction 75
7.2 Quotients lipschitziens de dimension finie de c_0 75
7.3 Sous-espaces de c_0 et propriétés d'approximation 78
7.4 Stabilité lipschitzienne des quotients linéaires 79

8 Relations linéaires entre espaces $C(K)$ **81**
8.1 Rappels sur la théorie non quantitative 81
8.1.1 Isomorphismes 81
8.1.2 Sous-espaces et quotients linéaires 82
8.2 Théorie quantitative 82
8.2.1 Isométries 82
8.2.2 Quotients linéaires 82
8.2.3 Sous-espaces 86

9 Perturbations d'isométries **91**
9.1 Compilation des résultats précédents 91
9.1.1 Contrôle universel de l'indice de Cantor 91
9.1.2 Classification isomorphique 91
9.1.3 Classification isométrique 95
9.2 Le théorème de Jarosz 97
9.3 Distance de Gromov-Hausdorff 97
9.3.1 Homogénéité positive et quasi-linéarité 97
9.3.2 Mesurabilité universelle 98
9.3.3 Proximité géométrique 99

Chapitre 1

Introduction

1.1 Version française

1.1.1 Présentation de la thèse

Cette thèse s'inscrit dans la théorie de la classification non linéaire des espaces de Banach. Ceux-ci possèdent deux structures : linéaire et métrique. La classification non linéaire des espaces de Banach cherche à savoir dans quelle mesure la métrique d'un espace détermine sa structure linéaire. Les deux résultats « extrémaux » de cette théorie sont le théorème de Mazur-Ulam qui montre que toute isométrie surjective entre espaces de Banach est affine (voir le théorème 14.1 de [7]) et le théorème de Kadets [34] qui prouve que deux espaces de Banach séparables de dimension infinie sont homéomorphes. Entre ces deux extrêmes, il est naturel de se demander ce que donne la classification des espaces de Banach à homéomorphisme uniforme ou lipschitzien près. On peut également discrétiser le problème et considérer des réseaux dans chaque espace (c'est-à-dire des ensembles dont les points sont à une distance toujours supérieure à un nombre $\varepsilon > 0$ fixé et desquels tout point de l'espace est à une distance inférieure à un autre nombre $\eta > 0$) et se demander si l'équivalence (métrique) des réseaux entraîne l'isomorphisme entre les espaces. Ces questions amènent naturellement à définir quatre relations d'équivalence entre espaces de Banach :

Définition : Soit X et Y deux espaces de Banach.
- Les deux espaces X et Y sont isomorphes quand il existe une application linéaire continue bijective de X sur Y.
- S'il existe une bijection lipschitzienne d'inverse lipschitzien de X sur Y, on dit que ces deux espaces sont Lipschitz-homéomorphes.
- Deux espaces X et Y reliés par une bijection uniformément continue ainsi que sa réciproque sont dits uniformément homéomorphes.
- Quand X et Y admettent des réseaux Lipschitz-homéomorphes, on dit que X et Y ont des réseaux équivalents.

Les relations lipschitziennes ou de réseaux se quantifient aisément. La distance de Lipschitz d_L entre deux espaces X et Y est la borne inférieure des produits des constantes de Lipschitz de f et de f^{-1} pour $f : X \to Y$ un homéomorphisme lipschitzien. La distance de réseaux d_R est, quant à elle, égale à la borne inférieure des distances de Lipschitz entre des réseaux de X et de Y. Il est également possible de quantifier les relations uniformes. En effet, les applications uniformément continues vérifient une condition de Lipschitz aux grandes distances : si u est une application uniformément continue, il est licite de définir

sa constante de Lipschitz en l'infini par la formule

$$\mathrm{lip}_\infty(u) = \inf_{\eta>0} \sup_{\|x'-x\|\geqslant\eta} \frac{\|f(x')-f(x)\|}{\|x'-x\|}.$$

La distance uniforme d_U entre X et Y est la borne inférieure des produits $\mathrm{lip}_\infty(u)\cdot\mathrm{lip}_\infty(u^{-1})$ où u est un homéomorphisme uniforme de X sur Y.

En dehors des relations d'équivalence, on peut définir des relations d'ordre non linéaires. S. Bates, W.B. Johnson, J. Lindenstrauss, D. Preiss et G. Schechtman ont introduit [6] la notion de quotient non linéaire entre espaces de Banach. Ce sont des surjections uniformément continues ou lipschitziennes jouissant d'une propriété d'ouverture de même nature. Plus précisément, un quotient uniforme est une application $f : X \to Y$ telle que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta, \Delta > 0$ vérifiant :

$$\forall x \in X, \quad B_Y(f(x),\delta) \subset f\left(B_X(x,\varepsilon)\right) \subset B_Y(f(x),\Delta).$$

Lorsqu'on peut choisir $\delta \geqslant \varepsilon/C$ et $\Delta \leqslant l\varepsilon$, le quotient est dit lipschitzien. On dit alors que Y est un quotient uniforme ou lipschitzien de X.

Dans la suite du texte, on distingue deux types de problèmes : les relations non linéaires non quantifiées (c'est-à-dire avec une distance correspondante inconnue) et les problèmes à faible distance.

1.1.1.1 Relations non quantifiées

Au regard du théorème de Rademacher en dimension finie (une application lipschitzienne de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ est presque partout différentiable), il semble naturel de chercher à résoudre un problème de linéarisation d'application lipschitzienne par différentiation. Cette technique repose sur la propriété de Radon-Nikodým et devient donc délicate à utiliser en son absence. On peut tout de même tenter de raisonner par différentiation, soit en affaiblissant le sens donné au mot différentielle (notamment au moyen de mesures invariantes, voir le théorème 7.2 de [7] et le théorème 3.1 de [22]), soit en ne cherchant pas à dériver l'homéomorphisme de départ mais en se ramenant à des fonctions à valeurs réelles qu'on sait dériver. Cette dernière méthode amène à des considérations subtiles sur la négligeabilité en dimension infinie. Les deux résultats les plus spectaculaires dans cette direction sont le théorème de Preiss [52] (si X^* est séparable, toute application lipschitzienne de X dans $\mathbb{R}$ admet au moins un point de différentiabilité au sens de Fréchet) et les travaux de J. Lindenstrauss et D. Preiss [45] qui introduisent une notion de négligeabilité en dimension infinie pour laquelle il devient vrai que toute application lipschitzienne de c_0 dans un espace vérifiant la propriété de Radon-Nikodým est presque partout différentiable au sens de Fréchet. Ces techniques sont utilisées dans la suite du texte afin de prouver un résultat partiel de stabilité de la classe des quotients linéaires de c_0 par homéomorphisme lipschitzien.

G. Godefroy, N.J. Kalton et G. Lancien [23] ont démontré que la classe $\mathcal{G}(c_0)$ des sous-espaces de c_0 est stable par Lipschitz-homéomorphisme. Un résultat de D. Alspach [2] prouve que, à quasi-isométrie près, la classe $\mathcal{Q}(c_0)$ des quotients isométriques de c_0 peut être envisagée comme une partie de $\mathcal{G}(c_0)$. La question de la stabilité par homéomorphisme lipschitzien de $\mathcal{Q}(c_0)$ se pose alors naturellement. Pour résoudre ce problème, on utilise une représentation des sous-espaces de c_0 jouissant de la propriété d'approximation métrique sous forme de quotient d'une somme de leurs propres quotients de dimension finie [25]. On se ramène ainsi à des applications lipschitziennes de c_0 dans $\mathbb{R}^n$ qu'on peut dériver. La preuve repose sur un contrôle exact de toutes les constantes d'isomorphismes et de quotients qui apparaissent. On obtient ainsi le résultat suivant :

Théorème A :
Soit X un espace de Banach dont le dual a la propriété d'approximation. Si X est Lipschitz-homéomorphe à un quotient linéaire de c_0, alors X est lui-même un quotient linéaire de c_0.

Dans le cadre des relations non quantifiées, on peut également appliquer des techniques de théorie descriptive. Celles-ci donnent des contrôles universels (non explicites) de certains indices.

La catégorie des espaces de Banach séparables admet une représentation sous forme d'ensemble qu'il est possible de munir d'une structure borélienne standard (voir la thèse de B. Bossard [9]). On peut alors démontrer des résultats analogues à ceux que B. Bossard a obtenus pour les relations linéaires entre espaces de Banach :

Théorème B :
Sur l'ensemble des espaces de Banach séparables, les relations suivantes sont analytiques :
- *L'homéomorphisme lipschitzien.*
- *L'homéomorphisme uniforme.*
- *L'équivalence des réseaux.*
- *Le quotient lipschitzien.*
- *Le quotient uniforme.*

On pourrait poursuivre une étude descriptive poussée de ces relations en en minorant la complexité topologique ou combinatoire. Des résultats très partiels sont donnés en ce sens.

Théorème C :
Les relations d'homéomorphisme et de quotient lipschitziens ne sont pas boréliennes. De plus, il n'existe pas de groupe polonais G agissant boréliennement sur l'ensemble des espaces de Banach séparables de sorte que l'ensemble des espaces Lipschitz-homéomorphes à un espace X donné coïncide avec l'orbite de X sous l'action de G.

On déduit du théorème de Preiss que si un espace de Banach possède un dual séparable, il en est de même de tous ses quotients lipschitziens. W. Szlenk a introduit un indice ordinal qui permet de quantifier cette propriété.

Définition : Soit X un espace de Banach et B une partie préfaiblement fermée de son dual. Soit $\varepsilon > 0$ un nombre.
- La dérivation de Szlenk consiste à retirer à B les points x^* tels que tout ouvert préfaible contenant x^* a une trace sur B de diamètre supérieur ou égal à ε. On peut itérer transifiniment cette dérivation en prenant l'intersection aux ordinaux limites. On note $B_\varepsilon^{[\alpha]}$ les dérivés ainsi obtenus. Le premier ordinal α tel que $(B_{X^*})_\varepsilon^{[\alpha]} = \varnothing$ (s'il existe) est appelé l'indice de Szlenk de X relatif à ε. La borne supérieure de ces indices quand ε varie est l'indice de Szlenk de X et on le note $\mathrm{Sz}\,(X)$.
- En considérant uniquement les demi-espaces préfaiblement ouverts (et non pas tous les ouverts préfaibles) dans la définition précédente, on définit l'indice de dentabilité préfaible de X, noté $\delta^*(X)$.
- Enfin, en raisonnant non pas dans X^* mais dans X lui-même avec $B = B_X$ et des demi-espaces ouverts, on définit l'indice de dentabilité de X, qu'on désigne par $\delta(X)$.

Lorsque X est séparable, il est équivalent de dire que $\delta^*(X)$ (ou $\mathrm{Sz}\,(X)$) est dénombrable ou que X^* est séparable. En ce sens, les indices de Szlenk et de dentabilité préfaible quantifient la propriété de dual séparable. Le raisonnement de théorie descriptive tenu ci-dessus permet de montrer les résultats suivants :

Théorème D :
Il existe des fonctions universelles ψ_1, ψ_2 et ψ_3 de ω_1 dans lui-même tels que, si X, Y sont deux espaces de Banach, alors :

$$\left.\begin{array}{r} \mathrm{Sz}\,(X) < \omega_1 \\ Y \text{ est un quotient lipschitzien de } X \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \mathrm{Sz}\,(Y) \leqslant \psi_1(\mathrm{Sz}\,(X)) \\ \delta^*(Y) \leqslant \psi_2(\delta^*(X)). \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{r} \delta(X) < \omega_1 \\ Y \text{ est Lipschitz-homéomorphe à } X \end{array}\right\} \Longrightarrow \delta(Y) \leqslant \psi_3(\delta(X)).$$

On pourrait appeler structure asymptotique d'un espace X « l'ensemble des propriétés de l'espace qui deviennent vraies lorsqu'on oublie un nombre fini de dimensions ». Cette définition reste très floue car ce concept n'est pas rigoureusement défini et on ne s'en sert ici qu'à titre explicatif. L'indice de Szlenk est une donnée asymptotique de l'espace : calculé à l'aide de convergences préfaibles, il oublie un nombre fini de dimensions. Une idée générale serait de montrer que la structure asymptotique est un invariant lipschitzien. Le contrôle universel précédemment établi de l'indice de Szlenk va dans ce sens. Le module de lissité asymptotique uniforme de Milman fournit un autre exemple d'indice asymptotique conservé par homéomorphisme lipschitzien.

Définition : Soit X un espace de Banach et $\tau > 0$. Le module de lissité asymptotique uniforme de X est le nombre

$$\overline{\rho}_X(\tau) = \sup_{x \in B_X} \inf_{\dim(X/Y)<\infty} \sup_{y \in B_Y} \|x + \tau y\| - 1.$$

La norme est asymptotiquement uniformément lisse lorsque

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{\overline{\rho}_X(\tau)}{\tau} = 0.$$

Il a été démontré (voir [40] et [24]) qu'un espace admet une norme asymptotiquement uniformément lisse si et seulement si $\mathrm{Sz}\,(X) \leqslant \omega$. Dans [24], il est prouvé que cette dernière condition est stable par homéomorphisme uniforme. En suivant la même méthode, on montre que l'indice $\overline{\rho}$ est conservé par homéomorphisme lipschitzien. La technique suivie est celle du transfert de G. Godefroy, N.J. Kalton et G. Lancien : si f est un homéomorphisme lipschitzien de X sur Y, la formule

$$\forall y^* \in Y^*, \quad |y^*| = \sup\left\{\frac{|\langle y^*, f(x') - f(x)\rangle|}{\|x' - x\|} \; ; \; x \neq x' \text{ dans } X\right\}$$

définit une norme duale sur Y^* équivalente à la norme de départ. Celle-ci jouit de propriétés de lissité asymptotique grâce au principe de Gorelik (voir le théorème 10.12 de [7]) :

Lemme (Gorelik) :

Soit $f : X \to Y$ une bijection continue d'inverse uniformément continu. Soit X_0 un sous-espace de codimension finie de X et $b, d > 0$ des constantes telles que

$$d > \sup\Big\{ \big\|f^{-1}(y') - f^{-1}(y)\big\| \ ; \ \big\|y' - y\big\| \leqslant b \Big\}.$$

Il existe alors une partie compacte K de Y telle que

$$bB_Y \subset K + f\left(2dB_{X_0}\right).$$

Ce principe permet d'assurer que la composée par f d'une suite préfaiblement convergente est asymptotiquement normée par un sous-espace de codimension finie arbitraire. On peut ainsi démontrer le résultat suivant :

Théorème E :

Soit X et Y deux espaces de Banach tels que $d_L(X, Y) < M < \infty$. Il est alors possible de renormer Y de sorte que :

$$\forall \tau > 0, \quad \overline{\rho}_Y\Big(\frac{\tau}{4M}\Big) \leqslant 2\,\overline{\rho}_X(\tau).$$

Dans certains cas, la structure asymptotique permet de caractériser complètement un espace (ou tout du moins une classe d'espaces) de Banach. Ainsi, il est prouvé dans [23] (avec d'autres notations) que X admet une norme équivalente satisfaisant

$$\exists \tau_0 > 0, \quad \overline{\rho}_X(\tau_0) = 0$$

exactement lorsque X est isomorphe à un sous-espace de c_0. C'est cette caractérisation qui permet de montrer le résultat de stabilité des sous-espaces de c_0 par homéomorphisme lipschitzien mentionné ci-dessus.

1.1.1.2 Proximité non linéaire de deux espaces de Banach

La méthode suivie dans cette partie de la thèse est essentiellement géométrique. Partant d'une situation où la distance de Lipschitz, uniforme ou de réseau entre deux espaces X et Y est proche de 1, on plonge isométriquement B_X et B_Y dans un espace métrique commun de sorte que ces deux boules soient proches géométriquement.

Définition :

- Soit A et B deux parties non vides d'un espace métrique (M, d). La distance de Hausdorff entre A et B est égale à la quantité :

$$\max\left(\sup_{a\in A} \inf_{b\in B} d(a,b) \ , \ \sup_{b\in B} \inf_{a\in A} d(b,a) \right).$$

- La distance de Gromov-Hausdorff d_{GH} entre deux espaces de Banach X et Y est égale à la borne inférieure des distances de Hausdorff entre B_X et B_Y prise sur tous les plongements isométriques de B_X et B_Y dans un même espace métrique.
- La distance de Kadets d_K est calculée de façon similaire mais en se limitant aux plongements linéaires isométriques de X et Y dans un même espace de Banach.

La distance de Gromov-Hausdorff est plus faible que les distance non linéaires précédemment introduites :

Théorème F :
Soit X et Y deux espaces de Banach. On a :

$$1 + d_{GH}(X,Y) \leqslant d_R(X,Y) \leqslant d_U(X,Y) \leqslant d_L(X,Y)$$

$$\text{et} \qquad 1 + d_K(X,Y) \leqslant d_{BM}(X,Y).$$

Notons qu'on ajoute 1 au premier terme car d_R, d_U, d_L et d_{BM} sont des « distances multiplicatives » et non des distances usuelles. La méthode qui sera suivie dans toute l'étude des faibles distances non linéaires entre espaces de Banach sera de démontrer un résultat sur la distance de Gromov-Hausdorff. Celui-ci sera alors valable pour les autres distances. Le cadre des $\mathcal{K}_0$-espaces permet de se ramener à la distance de Kadets ce qui constitue une linéarisation partielle du problème.

Définition :
- Une forme quasi-linéaire sur un espace de Banach X est une application $h : X \to \mathbb{R}$ homogène, bornée sur B_X et telle que, pour tous $x, y \in B_X$, on ait :

$$|h(x+y) - h(x) - h(y)| \leqslant \|x\| + \|y\|.$$

- Un $\mathcal{K}_0$-espace est un espace de Banach X pour lequel il existe une constante κ telle que, pour toute forme quasi-linéaire $h : X \to \mathbb{R}$, il existe une forme linéaire x^* telle que :

$$\forall x \in X, \quad |h(x) - \langle x^*, x\rangle| \leqslant \kappa \|x\|.$$

On regroupe ci-dessous les deux résultats les plus utiles dans le cadre de l'étude de la proximité non linéaire de deux espaces de Banach. Ils sont dus à N.J. Kalton, J.W. Roberts et M. Ostrovskii (voir [37] et [36]) :

Théorème (Kalton, Ostrovskii et Roberts) :
- *Tout espace de classe $\mathcal{L}_{\infty,\lambda}$ est un $\mathcal{K}_0$-espace avec constante $\kappa < 100\lambda$. En particulier, les espaces de fonctions continues sur un compact sont des $\mathcal{K}_0$-espaces avec constante $\kappa < 100$.*
- *Il existe une fonction universelle ζ de limite nulle en 0 telle que, si X est un $\mathcal{K}_0$-espace de constante κ et Y un espace de Banach, alors*

$$d_K(X,Y) \leqslant \kappa \cdot \zeta(d_{GH}(X,Y)).$$

Supposons démontré un résultat sous l'hypothèse que $d_K(X,Y)$ est assez petite. Si X ou Y est un $\mathcal{K}_0$-espace alors cela se généralise dès que $d_{GH}(X,Y)$ (et donc d_R, d_U et d_L) est assez petite.

Si, maintenant, X et Y sont deux espaces de Banach séparables proches au sens de la distance de Kadets alors, à isométries près, on peut supposer que ce sont deux sous-espaces d'un même sur-espace E séparable et que leurs boules unité sont géométriquement proches. Si (x_n^*) est une suite de B_{X^*} convergeant préfaiblement vers x^*, le théorème de Hahn-Banach permet de relever chaque élément x_n^* en un élément $e_n^* \in B_{E^*}$. Comme E est séparable, la boule B_{E^*} est préfaiblement métrisable et compacte donc (e_n^*) admet une suite extraite préfaiblement convergente (qu'on confond avec la suite initiale pour alléger

la notation). Il est clair que sa limite e^* prolonge x^*. On peut simplement définir y_n^* et y^* comme les restrictions de e_n^* et e^* à Y. La convergence préfaible est évidemment respectée et la proximité géométrique de B_X et B_Y dans E assure que les normes des combinaisons des x_n^* ne sont pas trop modifiées quand on passe aux formes linéaires y_n^*. Ce raisonnement est au centre du résultat suivant :

Théorème G :

L'indice de Szlenk et l'indice de dentabilité préfaible sont semi-continus inférieurement pour la distance de Kadets.

La classification isomorphique des espaces de fonctions continues sur des compacts métrisables se ramenant au calcul de l'indice de Szlenk de l'espace [57], ce raisonnement permet de montrer :

Théorème H :

Soit K et L deux espaces compacts métrisables. Si la distance de Kadets séparant $C(K)$ de $C(L)$ est strictement inférieure à 1, alors ces deux espaces sont isomorphes.

Ce résultat est optimal puisque la distance de Kadets est trivialement majorée par 1. Dans le cas où les deux compacts sont dénombrables, la classification isométrique s'obtient par un raffinement de l'indice de Szlenk.

Définition : Soit K un compact dénombrable.

- Le dérivé de Cantor de K est l'ensemble de ses points d'accumulation. Par récurrence transfinie, on définit $K^{(\alpha)}$ pour tout α en prenant le dérivé de Cantor aux ordinaux successeurs et l'intersection aux ordinaux limites. Par compacité, il existe un plus grand ordinal α tel que $K^{(\alpha)} \neq \varnothing$. Il est nommé indice de Cantor[1] de K et noté $\sigma(K)$.
- Notant $\nu(K) = \#K^{(\sigma(K))}$, on introduit le système caractéristique de K. C'est le couple $\mathrm{sc}(K) = (\sigma(K), \nu(K))$. Munissant $\omega_1 \times \omega$ de son ordre lexicographique, on dit qu'un compact dénombrable L est plus simple que K lorsque $\mathrm{sc}(L) \leqslant \mathrm{sc}(K)$.
- La décomposition $\sigma(K) = \omega^{\alpha_k} + \cdots + \omega^{\alpha_1}$ avec $\alpha_k \geqslant \cdots \geqslant \alpha_1$ permet de définir le nombre de patriarches de K. C'est l'entier $p(K) = k$.

Ces notations permettent d'énoncer un équivalent quantitatif du résultat de C. Samuel [57]. Il se démontre par récurrence sur $p(K)$ en caractérisant les antécédents de fonctions atteignant leur maximum sur le dernier dérivé de Cantor non vide.

Théorème I :

Soit K et L deux compacts dénombrables. On suppose qu'il existe un sous-espace X de $C(K)$ tel que

$$d_{BM}(C(L), C(K)/X) < 1 + \frac{1}{2^{p(K)} - 1}.$$

Alors le compact L est plus simple que K.

[1] Usuellement, l'indice de Cantor est l'ordinal $\sigma(K) + 1$ mais cette notation convient mieux à notre étude.

En raffinant la démonstration du théorème H, on peut prouver que si la distance de Kadets entre $C(K)$ et $C(L)$ est assez petite, chacun des deux espaces $C(K)$ et $C(L)$ est quotient de l'autre (avec des constantes calculables explicitement en fonction de la distance de Kadets). Le théorème I permet alors de montrer :

Théorème J :
Il existe une fonction universelle $\mu : \omega^* \times \omega^* \to]0,1]$ telle que, si K et L sont deux compacts dénombrables, alors :

$$d_{GH}(C(K), C(L)) < \mu\big(p(K), p(L)\big) \implies K \text{ est homéomorphe à } L.$$

Ce résultat n'est toutefois pas tout à fait satisfaisant puisque la borne $\mu(p(K), p(L))$ n'est pas universelle. Une autre méthode, fondée sur l'étude directe des applications quasi-linéaires, donne un meilleur résultat. Supposons que K, L sont des compacts métrisables et que $C(K)$ et $C(L)$ sont proches en distance de Kadets. Quand on a plongé $C(K)$ et $C(L)$ dans un espace de Banach commun E, il est possible de construire des applications positivement homogènes $T : C(K) \to C(L)$ et $S : C(L) \to C(K)$ conservant la norme et telles que, pour tout $x \in B_{C(K)}$, le point Tx est proche de x (et respectivement, pour tout $y \in B_{C(L)}$, Sy est proche de y). Les applications T et S ainsi construites sont quasi-linéaires et leurs composées sont proches de l'identité. On développe alors une méthode qui permet de « transposer » T et S comme si elles étaient linéaires (sans dériver). Ceci amène à une situation similaire à celle du théorème de Banach-Stone : étant donné $k \in K$, l'image de la masse de Dirac en k par la transposée de S a une masse essentiellement concentrée en un point $l \in L$. L'application $k \mapsto l$ ainsi construite est un homéomorphisme de K sur L. On démontre alors le résultat suivant :

Théorème K (avec N.J. Kalton) :
Il existe une constante universelle $\varepsilon_1 > 0$ telle que, si K et L sont deux compacts métrisables vérifiant $d_{GH}(C(K), C(L)) < \varepsilon_1$, alors K et L sont homéomorphes.

1.1.2 Plan du texte

Le corps de cette thèse est séparé en deux parties. Dans la première sont regroupés les résultats valables sur des espaces de Banach généraux. Dans la seconde, on étudie plus précisément le cas des fonctions continues sur un compact.

Dans les chapitres 2 à 4, on introduit les principales notations utilisées dans cette thèse. Les relations non linéaires, les métriques correspondantes et les distances géométriques y sont définies. Ces chapitres ne contiennent pas de résultat nouveau.

Le chapitre 5 est dédié à l'estimation de la complexité topologique des relations non linéaires.

Dans le chapitre 6, on étudie les indices de dérivation Sz , δ^* et δ ainsi que les indices de Milman. On prouve le contrôle universel donné par la théorie descriptive développée au chapitre 5, la semi-continuité inférieure des indices de Szlenk et de dentabilité préfaible par rapport à la distance de Kadets ainsi que la conservation de l'indice $\overline{\rho}$ par homéomorphisme lipschitzien.

La seconde partie débute par le chapitre 7 où la stabilité des quotients de c_0 par homéomorphisme lipschitzien est démontrée (modulo l'hypothèse que l'espace dual a la propriété d'approximation). Il y est également prouvé que si X vérifie la propriété d'approximation métrique et que la distance de Lipschitz de X à l'ensemble des quotients isométriques de c_0

est assez petite, alors X est proche en distance de Banach-Mazur des quotients isométriques de c_0.

Le chapitre 8 contient des rappels et des compléments sur la classification linéaires des espaces $C(K)$ lorsque K est un compact dénombrable.

Enfin, le dernier chapitre étudie le cas où deux espaces de fonctions continues sur des compacts métrisables sont proches au sens des distances de Kadets, de Gromov-Hausdorff, de réseau, uniforme ou de Lipschitz.

L'étude de la complexité topologique des relations non linéaires et de ses conséquences sur le contrôle universel de l'indice de Szlenk est parue dans *Commentationes Mathematicæ Universitatis Carolinæ* [17]. Le contenu du chapitre 7 a fait l'objet d'une publication dans *Houston Journal of Mathematics* [18]. Enfin, la troisième section du chapitre 8 est le fruit d'une collaboration avec N.J. Kalton lors de son séjour à l'université Pierre et Marie Curie en mai 2002.

1.2 English version

1.2.1 Summary

The global frame of this work is the nonlinear classification of Banach spaces. This theory studies how much the linear structure is determined by the metric one. The two "extremal" results are Mazur-Ulam Theorem (see Theorem 14.1 of [7] : an onto isometry between two Banach spaces is affine) and Kadets Theorem (see [34] : two infinite dimensional separable Banach spaces are homeomorphic). Therefore, one can wonder what is the classification of Banach spaces up to Lipschitz or uniform homeomorphism. Nets are a discrete analogue of this problem. A net is a set A in a Banach space X such that every two points of A are uniformly far away and every point of X is uniformly near from A. One can investigate whether the metric equivalence between two nets implies the linear equivalence of the spaces. This leads us to four equivalence relations between Banach spaces.

Definition : Let X and Y be two Banach spaces.

- The spaces X and Y are isomorphic when there exists a linear continuous bijection between X and Y.
- If there is a Lipschitz bijection with Lipschitz inverse between X and Y, we say that these two spaces are Lipschitz equivalent.
- If there is a uniformly continuous bijection with uniformly continuous inverse between X and Y, we say that these two spaces are uniformly equivalent.
- When X and Y have Lipschitz homeomorphic nets, we say that they are net equivalent.

It is easy to quantify Lipschitz and net equivalences. The Lipschitz distance d_L between two spaces X and Y is the infimum of the product of the Lipschitz constants of f and f^{-1} when $f : X \to Y$ is a Lipschitz homeomorphism. The net distance d_R is the infimum of the Lipschitz distances between nets of X and Y. It is also possible to quantify uniform equivalence. Indeed, uniformly continuous maps satisfy a Lipschitz condition for large distances : when $u : X \to Y$ is uniformly continuous, one can define its Lipschitz constant at infinity by the formula

$$\mathrm{lip}_\infty(u) = \inf_{\eta>0} \sup_{\|x'-x\|\geqslant\eta} \frac{\|f(x') - f(x)\|}{\|x' - x\|}.$$

The uniform distance d_U between X and Y is the infimum of $\mathrm{lip}_\infty(u) \cdot \mathrm{lip}_\infty(u^{-1})$ when u is a uniform homeomorphism between X and Y.

Not only equivalence relations but also nonlinear orders can be defined between Banach spaces. S. Bates, W.B. Johnson, J. Lindenstrauss, D. Preiss and G. Schechtman introduced in [6] the notion of nonlinear quotient. A uniform quotient is a map $f : X \to Y$ such that, for every $\varepsilon > 0$, there exist $\delta > 0$ and $\Delta > 0$ such that

$$\forall x \in X, \quad B_Y(f(x), \delta) \subset f(B_X(x, \varepsilon)) \subset B_Y(f(x), \Delta).$$

When we can choose $\delta > \varepsilon/C$ and $\Delta \leqslant l\varepsilon$, then f is called a Lipschitz quotient.

Hereafter, we distinguish two kinds of problems : unquantified nonlinear relations (that is to say with no information about the relevant distance) and the short distance problems.

1.2.1.1 Unquantified relations

Considering the classical finite dimensional Rademacher Theorem (Lipschitz maps from $\mathbb{R}^n$ to $\mathbb{R}^p$ are almost everywhere differentiable), it seems natural to try to solve a Lipschitz problem by differentiation. This technique relies on the Radon-Nikodým property. When this property fails, the situation is not hopeless but it becomes tricky : we have to take a weaker definition of the notion of derivative (see, for example, the use of invariant means in Theorem 7.2 of [7] or Theorem 3.1 of [22]) or we have to differentiate only real-valued functions related to the original homeomorphism. This leads to subtle notions of infinite dimensional null sets. The most spectacular results in this direction are the Theorem of Preiss [52] (when X^* is separable, then every real-valued Lipschitz function on X is Fréchet-differentiable at some point) and the notion of Γ-null set due to J. Lindenstrauss and D. Preiss [45] : every Lipschitz map from c_0 to a space with the Radon-Nikodým property is Γ-almost everywhere differentiable. These techniques will be used to prove a partial result on the stability of linear quotient of c_0 under Lipschitz homeomorphism.

G. Godefroy, N.J. Kalton and G. Lancien showed [23] that the class $\mathcal{G}(c_0)$ of the subspaces of c_0 is stable under Lipschitz homeomorphism. A result of D. Alspach [2] proves that, up to quasi-isometry, the class $\mathcal{Q}(c_0)$ of the isometric quotients of c_0 can be seen as a subclass of $\mathcal{G}(c_0)$. Then, the question of the Lipschitz stability of $\mathcal{Q}(c_0)$ arises naturally. In order to solve this problem, we use a representation of subspaces of c_0 with the metric approximation property as linear quotients of a sum of their own finite dimensional linear quotients [25]. This lemma allows us to study only Lipschitz maps from c_0 to $\mathbb{R}^n$ which can be differentiated. The proof needs a complete control of all isomorphism and quotient constants that appear.

Theorem A :

Let X be a Banach space whose dual has the approximation property. If X is Lipschitz equivalent to a linear quotient of c_0, then X is actually a linear quotient of c_0.

When no quantification is needed, we can also use techniques of descriptive set theory. These ones give universal (but non explicit) controls of some indices. The category of separable Banach spaces admits a representation as a set on which it is possible to define a standard Borel structure [10]. We can prove results on nonlinear relations similar to those that B. Bossard obtained for linear equivalences.

Theorem B :

The following relations are analytic on the set of separable Banach spaces :

- *The Lipschitz equivalence.*
- *The uniform equivalence.*

- *The net equivalence.*
- *The Lipschitz quotient.*
- *The uniform quotient.*

A complete descriptive study of these relations could be carried out by giving a lower bound on their topological and combinatorial complexity. Very partial results are provided in this area.

Theorem C :
Lipschitz equivalence and Lipschitz quotient are non Borel. Moreover there exists no Polish group G which acts in a Borel measurable way on the set of separable Banach spaces such that Y is Lipschitz equivalent to X if and only if there is a $g \in G$ with $Y = g \cdot X$.

The Preiss Theorem that we recalled before implies that the property of having a separable dual is stable under Lipschitz quotient. W. Szlenk gave an ordinal characterization of this property.

Definition : Let X be a Banach space, B a weak*-closed subset of X^* and $\varepsilon > 0$.
- The ε-Szlenk derivative of B is the set of all $x^* \in B$ such that every weak*-neighbourghood of x^* in B has diameter greater than ε. We can iterate this derivation transfinitely by taking the intersection at the limit ordinals. We denote by $B_\varepsilon^{[\alpha]}$ the sets that we obtain. The first ordinal α such that $(B_{X^*})_\varepsilon^{[\alpha]} = \varnothing$ (if it exists) is called the ε-Szlenk index of X . The upper bound of these indices for positive ε is the Szlenk index of X and denoted by $\mathrm{Sz}\,(X)$.
- Considering weak*-slices of B containing x^* instead of any weak*-neighbourghood, we define the weak*-dentability index of X and we write $\delta^*(X)$.
- Proceeding similarly in X with the unit ball and open slices, we define the dentability index of X which is denoted by $\delta(X)$.

When X is separable, it is equivalent to say that $\mathrm{Sz}\,(X) < \omega_1$, $\delta^*(X) < \omega_1$ or X^* is separable. Then, in a sense, the Szlenk and the weak*-dentability indices quantify the separable dual property. The descriptive set theory gives

Theorem D :
There exist three universal functions ψ_1, ψ_2 and ψ_3 from ω_1 to itself so that, if X and Y are Banach spaces, then :

$$\left.\begin{array}{r} \mathrm{Sz}\,(X) < \omega_1 \\ Y \text{ is a Lipschitz quotient of } X \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \mathrm{Sz}\,(Y) \leqslant \psi_1(\mathrm{Sz}\,(X)) \\ \delta^*(Y) \leqslant \psi_2(\delta^*(X)). \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{r} \delta(X) < \omega_1 \\ Y \text{ is Lipschitz equivalent to } X \end{array}\right\} \Longrightarrow \delta(Y) \leqslant \psi_3(\delta(X)).$$

Roughly speaking, one can call asymptotic structure of the space X "all the properties on X which are true up to finitely many dimensions". This definition is very vague and we only use it as an explanation tool. The Szlenk index is a perfect example of an asymptotic data of the space X since it is computed using weak*-convergence. A general idea would be to show that the asymptotic structure is Lipschitz invariant. The universal control that we gave on the Szlenk index supports this feeling. Another example is given by the Milman moduli.

Definition : Let X be a Banach space and $\tau > 0$. The modulus of asymptotical uniform smothness of X is the number

$$\overline{\rho}_X(\tau) = \sup_{x \in B_X} \inf_{\dim(X/Y)<\infty} \sup_{y \in B_Y} \|x + \tau y\| - 1.$$

The norm is called asymptotically uniformly smooth when

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{\overline{\rho}_X(\tau)}{\tau} = 0.$$

It has been shown (see [40] and [24]) that a Banach space has an equivalent asymptotically uniformly smooth norm if and only if $\mathrm{Sz}\,(X) \leqslant \omega$. In [24], it is proved that this last condition is stable under uniform equivalence. This is done thanks to the transfer method of G. Godefroy, N.J. Kalton and G. Lancien : if f is a Lipschitz homeomorphism between X and Y, the formula

$$\forall y^* \in Y^*, \quad |y^*| = \sup \left\{ \frac{|\langle y^*, f(x') - f(x)\rangle|}{\|x' - x\|} \; ; \; x \neq x' \text{ in } X \right\}$$

defines a dual equivalent norm on Y^*. It has smoothness properties thanks to the Gorelik principle (see Theorem 10.12 of [7]) :

Lemma (Gorelik) :
Let $f : X \to Y$ be a homeomorphism with uniformly continuous inverse. Let X_0 be a finite codimensional subspace of X and b, d positive constants such that

$$d > \sup \left\{ \left\|f^{-1}(y') - f^{-1}(y)\right\| \; ; \; \left\|y' - y\right\| \leqslant b \right\}.$$

Then it exists a compact subset K of Y such that

$$bB_Y \subset K + f\left(2dB_{X_0}\right).$$

This principle ensures that the composition by f of a weak*-convergent sequence is asymptotically normed by any finite codimensional subspace. Using the technique from [24], we can prove

Theorem E :
Let X and Y be two Banach spaces such that $d_L(X, Y) < M < \infty$. It is possible to renorm Y in order to have

$$\forall \tau > 0, \quad \overline{\rho}_Y\left(\frac{\tau}{4M}\right) \leqslant 2\,\overline{\rho}_X(\tau).$$

In some cases, the asymptotic structure gives a complete characterization of a space (or, at least, of a class of spaces). For example, it is proved in [23] (with another notation) that X has an equivalent norm with

$$\exists \tau_0 > 0, \quad \overline{\rho}_X(\tau_0) = 0$$

if and only if X is isomorphic to a subspace of c_0. This equivalence is the key to show that $\mathcal{G}(c_0)$ is stable under Lipschitz homeomorphism.

1.2.1.2 Nonlinear proximity of two Banach spaces

In this part of the text, we follow an essentially geometric approach. Considering a situation where the Lipschitz (uniform or net) distance between two Banach spaces X and Y is almost 1, we construct a metric space containing isometrically B_X and B_Y such that these two balls are geometrically close to each other.

Definition :

- Let A and B be two nonempty subsets of a metric space (M, d). The Hausdorff distance between A and B is the number

$$\max\left(\sup_{a\in A}\inf_{b\in B} d(a,b)\ ,\ \sup_{b\in B}\inf_{a\in A} d(b,a)\right).$$

- The Gromov-Hausdorff distance d_{GH} between two Banach spaces X and Y is the infimum of all Hausdorff distances between B_X and B_Y when X and Y are isometrically embedded in a common metric space.
- The Kadets distance d_K is calculated similarly but we restric ourselves to Banach spaces M and linear isometric embeddings.

The Gromov-Hausdorff distance is weaker than the other nonlinear distances that we introduced before.

Theorem F :

Let X and Y be two Banach spaces. We have

$$1 + d_{GH}(X,Y) \leqslant d_R(X,Y) \leqslant d_U(X,Y) \leqslant d_L(X,Y)$$

$$\text{and} \qquad 1 + d_K(X,Y) \leqslant d_{BM}(X,Y).$$

It is not surprising that we add 1 to the Gromov-Hausdorff distance since d_R, d_U and d_L are multiplicative metrics. When studying small distances between Banach spaces, we use to prove the result for d_{GH} and it will then be automatically true for the other distances. The $\mathcal{K}_0$-spaces make it possible to linearize the problem by comparing the Kadets and the Gromov-Hausdorff distances.

Definition :

- A quasi-linear functional on a Banach space X is a map $h : X \to \mathbb{R}$ which is homogeneous, bounded on B_X and such that, for every $x, y \in B_X$, we have :

$$|h(x+y) - h(x) - h(y)| \leqslant \|x\| + \|y\|.$$

- A $\mathcal{K}_0$-space is a Banach space X for which there is a constant κ such that for any quasi-linear functional h, there exists a linear functional x^* with

$$\forall x \in X, \quad |h(x) - \langle x^*, x\rangle| \leqslant \kappa\,\|x\|.$$

The following theorem is the combination of different results about $\mathcal{K}_0$-spaces that will be useful to us. They were proved by N.J. Kalton, J.W. Roberts and M. Ostrovskii (see [37] and [36]).

Theorem (Kalton, Ostrovskii and Roberts) :

- *Every $\mathcal{L}_{\infty,\lambda}$-space is a $\mathcal{K}_0$-space with constant $\kappa < 100\lambda$. In particular, every $C(K)$-space is a $\mathcal{K}_0$-space with constant $\kappa < 100$.*
- *There is a universal function ζ which tends to 0 at 0 and such that, if X is a $\mathcal{K}_0$-space with constant κ and Y is a Banach space, then*

$$d_K(X,Y) \leqslant \kappa \cdot \zeta(d_{GH}(X,Y)).$$

Hence, if we show a result about $C(K)$-spaces with the Kadets-distance, then we have it for any of the preceeding nonlinear distances.

Now, suppose X and Y are Kadets close separable Banach spaces. Up to isometries, we can suppose that they are subspaces of a separable Banach space E such that B_X and B_Y are Hausdorff close. If (x_n^*) is a sequence in B_{X^*} weak*-converging to x^*, then we can extend each x_n^* as a linear functional $e_n^* \in B_{E^*}$. Since E is separable, it is possible, up to extraction, to suppose that (e_n^*) weak*-converges to some $e^* \in B_{E^*}$. It is clear that e^* extends x^*. We can define y_n^* and y^* as the restriction of e_n^* and e^* to Y. The weak*-convergence is preserved and the proximity of B_X and B_Y ensures that the norms of the combinations of the y_n^* have not changed too much. This argument is the center of the proof of the following result :

Theorem G :

The Szlenk index and the weak-dentability index are lower semi-continuous for the Kadets distance.*

The isomorphic classification of $C(K)$-spaces for metrizable K depending only on the Szlenk index [57], this allows us to prove

Theorem H :

Let K and L be two metrizable compact spaces. If the Kadets distance between $C(K)$ and $C(L)$ is smaller than 1, then these two spaces are isomorphic.

This result is optimal since the Kadets distance is always at most 1. When K is countable, the isometric classification of $C(K)$ relies on a refinement of the Szlenk index.

Definition : Let K be a countable compact space.

- The Cantor derivative of K is the set of all cluster points of K. By transfinite induction, we can define $K^{(\alpha)}$ by taking the Cantor derivative at successor ordinals and intersection at limit ones. By a compactness argument, there is a greatest ordinal α such that $K^{(\alpha)} \neq \varnothing$. It is called the Cantor index[2] of K and we denote it by $\sigma(K)$.
- Writing $\nu(K) = \#K^{(\sigma(K))}$, we define the characteristic system of K to be the couple $\mathrm{sc}(K) = (\sigma(K), \nu(K))$. We say that a countable compact space K is simpler than another one L when $\mathrm{sc}(K) \leqslant \mathrm{sc}(L)$ (we chose the lexicographic order on $\omega_1 \times \omega$).
- The Cantor normal form $\sigma(K) = \omega^{\alpha_k} + \cdots + \omega^{\alpha_1}$ with $\alpha_k \geqslant \cdots \geqslant \alpha_1$ allows us to define the number of patriarchs of K as the integer $p(K) = k$.

With this piece of notation, we can state a quantitative version of the result of C. Samuel [57]. It is proved by induction on $p(K)$ by finding the preimage of the functions on $C(L)$ which take their maximum on $L^{(\sigma(L))}$.

Theorem I :

Let K and L be two countable compact spaces. We suppose that there is a subspace X of $C(K)$ such that

$$d_{BM}(C(L), C(K)/X) < 1 + \frac{1}{2^{p(K)} - 1}.$$

Then L is simpler than K.

[2]The usual Cantor index is $\sigma(K) + 1$ but we find it more convenient for our purpose to chose this terminology.

By refining the proof of theorem H, we can prove that, if the Kadets distance between $C(K)$ and $C(L)$ is small enough, then each one of the spaces $C(K)$ and $C(L)$ is a linear quotient of the other one with small constants. Theorem I allows us to conclude that

Theorem J :
There exists a universal function $\mu : \omega \times \omega \to]0,1]$ such that, if K and L are countable compact spaces with

$$d_{GH}(C(K), C(L)) < \mu(p(K), p(L)),$$

then K and L are homeomorphic.

However, this result is not completely satisfactory since the constant $\mu(p(K), p(L))$ is not universal. Another argument using directly the quasi-linear maps gives a better result. Let us suppose that K, L are metrizable compact spaces and that $C(K)$ and $C(L)$ are Kadets close. When $C(K)$ and $C(L)$ are embedded in an appropriate separable Banach space E, it is possible to construct positively homogeneous maps $T : C(K) \to C(L)$ and $S : C(L) \to C(K)$ which are norm-preserving and such that, for every $x \in B_{C(K)}$, the point Tx is near from x (and respectively, for every $y \in B_{C(L)}$, Sy is near from y). The maps T and S are quasi-linear and their compositions are close to the identity. Then, we develop a way to take the "conjugate" of T and S as if they were linear, without differentiation. This leads us to a situation similar to the one of the Banach-Stone theorem : given any $k \in K$, the image of the Dirac mass in k by the transposition of S is concentrated almost exactly at a point $l \in L$. The map $k \mapsto l$ is a homeomorphism between K and L. This shows the result :

Theorem K (with N.J. Kalton) :
There exists a universal constant $\varepsilon_1 > 0$ such that, if K and L are metrizable compact spaces with $d_{GH}(C(K), C(L)) < \varepsilon_1$, then K and L are homeomorphic.

1.2.2 Structure of this memoir

This memoir has two parts. In the first one, we put the results which are true for general Banach spaces. In the second one, we study more precisely questions related to the spaces of continuous functions on compact spaces.

In chapters 2 to 4, we introduce the main notation. The nonlinear relations, the corresponding metrics and the geometric distances are defined here. These chapters contain no new result.

Chapter 5 is dedicated to the study of the topological complexity of the nonlinear relations. In chapter 6, we investigate the indices Sz, δ^*, δ and the Milman moduli. We show the universal control induced by the result of descriptive set theory that we proved in chapter 5, the lower semi-continuity of the Szlenk and weak*-dentability indices for the Kadets distance and the conservation of $\overline{\rho}$ under Lipschitz homeomorphism.

The second part begins with chapter 7 where the stability of the class of the linear quotients of c_0 is shown (under the additional assumption that the dual space has the approximation property). It is also proved that, if X has the metric approximation property and that the Lipschitz distance between X and the class of all isometric quotients of c_0 is small enough, then X is near to an isometric quotient of c_0 in the Banach-Mazur sense.

Chapter 8 contains complementary results on the linear classification of $C(K)$-spaces when K is countable.

The last chapter studies the case where two $C(K)$-spaces (with metrizable K) are close in a nonlinear sense.

The study of the topological complexity of the nonlinear relations and its consequences on the Szlenk index has appeared in *Commentationes Mathematicæ Universitatis Carolinæ* [17]. Chapter 7 has been published in *Houston Journal of Mathematics* [18]. Finally, the third section of chapter 9 has been written in collaboration with N.J. Kalton during his stay in the University Pierre et Marie Curie in May 2002.

Première partie

Relations non linéaires entre espaces de Banach généraux

Chapitre 2

Quelques rappels rapides sur les relations linéaires

2.1 Notations utilisées

Tous les espaces vectoriels de cette thèse seront réels. Par ailleurs, sauf en de très rares endroits où cela sera précisé, on ne considèrera que des espaces de Banach.

Soit X un espace de Banach. La norme sur X est usuellement notée $\|\cdot\|_X$. Plus simplement, on écrit $\|\cdot\|$ lorsqu'un seul espace est en jeu. La boule fermée de centre x et de rayon $r > 0$ dans l'espace X sera notée $B_X(x,r)$ ou $B(x,r)$ lorsque cela ne prête pas à confusion. La boule ouverte sera, quant à elle, désignée par $b_X(x,r)$ ou $b(x,r)$. Les notations B_X et b_X représenteront les boules unités fermée et ouverte de l'espace X. Enfin, S_X sera la sphère unité de X, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs de X de norme 1.

Si Y est un autre espace de Banach, on note $L(X,Y)$ l'ensemble des applications linéaires continues de X dans Y. La norme subordonnée aux normes de X et Y définie par

$$\forall T \in L(X,Y), \quad \|T\| = \sup\Big\{ \|Tx\|_Y \ ; \ \|x\|_X \leqslant 1 \Big\},$$

munit $L(X,Y)$ d'une structure d'espace de Banach.

Dans le cas particulier où $Y = \mathbb{R}$, on obtient le dual topologique de l'espace de Banach X. Il est noté X^*. On affaiblira parfois la topologie normique sur l'espace X à l'aide de la topologie faible. Celle-ci, notée w, est la topologie initiale de X^* (c'est-à-dire la topologie la moins fine qui rende continus tous les éléments de X^*). De même, on considèrera la topologie préfaible sur X^*. Notée $*$, elle est la topologie initiale de l'injection canonique de X dans X^{**}. Désigner les topologies à l'aide d'un symbole permet des notations plus compactes. Par exemple, pour dire que la suite de formes linéaires $(x_n^*)_{n\in\omega}$ converge préfaiblement vers la forme linéaire x^*, on écrira :

$$\lim{}^* x_n^* = x^* \quad \text{ou} \quad x_n^* \xrightarrow{*} x^*.$$

Les principaux espaces de Banach considérés dans la suite seront :

Les espaces de suites

Si E et Γ sont deux ensembles quelconques, les familles d'éléments de E indexées par Γ forment un ensemble désigné par E^Γ. On utilisera la notation $\underline{x}$ pour représenter la famille $(x_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$. Supposons ici $E = \mathbb{R}$. Pour $1 \leqslant p < \infty$, on écrit

$$\|\underline{x}\|_p = \left(\sum_{\gamma\in\Gamma} |x_\gamma|^p \right)^{1/p}.$$

De plus, on note

$$\|\underline{x}\|_\infty = \sup_{\gamma\in\Gamma} |x_\gamma| .$$

Dès lors, $\ell_p(\Gamma)$ (pour $1 \leqslant p \leqslant \infty$) représente l'espace des familles $\underline{x}$ telles que $\|\underline{x}\|_p$ soit finie (muni de cette norme). Par ailleurs, $c_0(\Gamma)$ est le sous-espace de $\ell_\infty(\Gamma)$ constitué des familles $\underline{x}$ qui convergent vers 0 à l'infini, c'est-à-dire telles que, pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\{\gamma \in \Gamma \ ; \ |x_\gamma| > \varepsilon\}$ est fini.

Dans le cas particulier où Γ est égal à l'ensemble ω des entiers naturels (ou parfois à l'ensemble ω^* des entiers naturels non nuls), les notations précédentes se simplifient en ℓ_p et c_0.

Les espaces de fonctions continues

Soit K un espace topologique compact. On désigne par $C(K)$ l'espace des fonctions continues de K dans $\mathbb{R}$ muni de la norme de la convergence uniforme

$$\|f\|_K = \sup_{k\in K} |f(k)| .$$

Parmi les compacts usuels, citons les ordinaux dénombrables successeurs ($1 = \{0\}$, $2 = \{0,1\}$, $\ldots$, $n+1 = \{0,\ldots,n\}$, $\ldots$, $\omega+1$, $\omega+2$, $\ldots$), le continuum $[0,1]$ et le compact dyadique de Cantor $\Delta = 2^\omega$. L'espace $C(\omega+1)$ est plus usuellement noté c.

Les espaces de fonctions intégrables

Soit $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré. Pour $1 \leqslant p < \infty$ et f une fonction $\mathcal{M}$-mesurable, on note

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f(t)|^p \, d\mu(t)\right)^{1/p} .$$

On écrit également

$$\|f\|_\infty = \inf\left\{m > 0 \ ; \ \mu\Big(f^{-1}\big(\mathbb{R}\backslash[-m,m]\big)\Big) = 0\right\} .$$

Pour $1 \leqslant p \leqslant \infty$, l'espace $L_p(\mu)$ représente alors l'ensemble des classes modulo l'égalité μ-presque sûre de fonctions $\mathcal{M}$-mesurables telles que $\|f\|_p < \infty$. Dans le cas particulier où $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{M}$ est la tribu de Lebesgue et μ est la mesure de Lebesgue, la notation $L_p(\mu)$ se simplifie en L_p.

L'espace de Tsirelson

Considérons l'espace vectoriel (non normé) c_{00} des suites de réels nulles à partir d'un certain rang. Sa base canonique est $(e_n)_{n\in\omega}$ où e_n est la fonction caractéristique du singleton $\{n\}$. Si A est une partie quelconque de ω, on note $P_A : \mathbb{R}^\omega \to \mathbb{R}^\omega$ la projection sur les coordonnées de A :

$$P_A(\underline{x}) = P_A\left(\sum_{n\in\omega} x_n e_n\right) = \sum_{n\in A} x_n e_n .$$

Une collection finie $B = \{A_1, \ldots, A_n\}$ de parties finies non vides de ω est dite admissible si les conditions suivantes sont remplies :

$$n \leqslant \min A_1 \leqslant \max A_1 < \min A_2 \leqslant \max A_2 < \min A_3 \leqslant \cdots \leqslant \max A_{n-1} < \min A_n .$$

L'ensemble des collections admissibles est noté $\mathcal{A}$. On peut alors définir par récurrence une famille de normes sur c_{00} par : $|\underline{x}|_0 = \|\underline{x}\|_\infty$ et

$$|\underline{x}|_{m+1} = \max\left\{|\underline{x}|_m \, , \, \frac{1}{2} \sup_{B\in\mathcal{A}} \sum_{A\in B} |P_A(\underline{x})|_m\right\} .$$

Etant croissante et majorée par $\|\underline{x}\|_1$, la suite $(|\underline{x}|_m)_{m\in\omega}$ converge. Soit $\|\underline{x}\|_{T^*}$ sa limite. Le dual de l'espace de Tsirelson est le complété de c_{oo} pour la norme ainsi obtenue (il s'agit bien d'un dual). Cet espace a été construit par B.S. Tsirelson [59] en 1974 dans le but de construire un espace qui ne contienne ni c_{o} ni aucun espace ℓ_p $(1 \leqslant p < \infty)$. La construction présentée ici est due à T. Figiel et W.B. Johnson [20]. Les principales propriétés de l'espace de Tsirelson sont regroupées dans la proposition ci-dessous :

Proposition 1 (Tsirelson) :

1. *T^* est réflexif.*
2. *$T = T^{**}$ est un espace de suites en identifiant $u \in X^{**}$ et la suite $(u(e_n))_{n\in\omega}$. Dès lors, T et T^* sont en dualité par l'application bilinéaire :*
$$\forall \underline{x} \in T,\ \forall \underline{y} \in T^*, \quad \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} x_n y_n.$$
La suite $\underline{e}$ est alors une base de Schauder de T et de T^*.
3. *La norme $\|\cdot\|_{T^*}$ vérifie l'identité suivante, pour tout $\underline{x} \in T^*$:*
$$\|\underline{x}\|_{T^*} = \max\left\{ \|\underline{x}\|_\infty\,,\, \frac{1}{2} \sup_{B\in\mathcal{A}} \sum_{A\in B} \|P_A(\underline{x})\|_{T^*} \right\}.$$
4. *T (et de même T^*) ne contient isomorphiquement ni c_{o} ni ℓ_p (pour tout $1 \leqslant p < \infty$).*
5. *T^* se « comporte asymptotiquement » comme ℓ_1. Plus précisément, si les supports des vecteurs $u_1, \ldots, u_n$ sur la base $\underline{e}$ forment une collection admissible, alors :*
$$\|u_1 + \cdots + u_n\|_{T^*} \geqslant \frac{1}{2}\Big(\|u_1\|_{T^*} + \cdots + \|u_n\|_{T^*} \Big).$$
6. *T se « comporte asymptotiquement » comme c_{o}. Plus précisément, si les supports des vecteurs $u_1, \ldots, u_n$ sur la base $\underline{e}$ forment une collection admissible, alors :*
$$\|u_1 + \cdots + u_n\|_T \leqslant 2 \max\Big(\|u_1\|_T\,, \ldots, \|u_n\|_T \Big).$$

Sommes selon un espace de suites :

Soit $(X_n)_{n\in\omega}$ une suite d'espaces de Banach. Soit $\underline{x} \in \prod X_n$. Notons $\widetilde{x}$ la suite $\big(\|x_n\|_{X_n}\big)_{n\in\omega}$. Soit Y un espace de suites, c'est-à-dire l'un des espaces, c_{o}, ℓ_p (avec $1 \leqslant p \leqslant \infty$) ou T. L'ensemble des $\underline{x}$ tels que $\widetilde{x} \in Y$ muni de la norme $\|\underline{x}\| = \|\widetilde{x}\|_Y$ est un espace de Banach noté
$$\left(\bigoplus_{n\in\omega} X_n \right)_Y .$$

2.2 Relations linéaires

Lorsque X et Y sont deux espaces de Banach et que $T \in L(X,Y)$ est bijectif, on dit que T est un isomorphisme. Le théorème de l'application ouverte assure que l'inverse T^{-1} de T est automatiquement continu. Lorsqu'il existe un isomorphisme de X sur Y, on dit que X et Y sont isomorphes et on note $X \simeq Y$.

Lorsqu'il existe un sous-espace fermé Z de Y tel que X et Z soient isomorphes, on dit que X s'injecte dans Y et on note $X \hookrightarrow Y$.

Soit $T \in L(X,Y)$. Si T est surjective, le théorème de l'application ouverte assure qu'il existe $r > 0$ tel que

$$T\big(B_X\big) \supset \frac{1}{r} B_Y.$$

La borne inférieure des quantités r admissibles ci-dessus est appelée la conorme de T et notée $\gamma(T)$. Si T_{o} désigne l'isomorphisme que T induit entre $X/\ker T$ et Y, alors $\big\|T_{\mathrm{o}}^{-1}\big\|$ et $\gamma(T)$ coïncident. Lorsqu'il existe une application linéaire surjective de X sur Y, on note $X \twoheadrightarrow Y$ et on dit que Y est un quotient linéaire de X.

Chapitre 3

Relations non linéaires

3.1 Equivalences non linéaires

3.1.1 Applications lipschitziennes

Soit (E, d) et (E', d') deux espaces métriques. Une application $u : E \to E'$ est dite lipschitzienne s'il existe un nombre $l \geqslant 0$ tel que

$$\forall x, y \in E, \quad d'\big(u(x), u(y)\big) \leqslant l \cdot d(x, y).$$

La plus petite constante l admissible ci-dessus est appelée constante de Lipschitz de u et notée $\mathrm{lip}(u)$.

Lorsque u est bijective et lipschitzienne ainsi que son inverse, on dit que u est bilipschitzienne, que E et E' sont Lipschitz-homéomorphes et on note $E \sim_L E'$. Le produit $\mathrm{lip}(u) \cdot \mathrm{lip}(u^{-1})$ est désigné par $\mathrm{Lip}(u)$.

3.1.2 Applications uniformément continues

Soit (E, d) et (E', d') deux espaces métriques. Une application $u : E \to E'$ est dite uniformément continue lorsqu'il existe une fonction continue croissante $c : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ nulle en 0 telle que

$$\forall x, y \in E, \quad d'\big(u(x), u(y)\big) \leqslant c\Big(d(x, y)\Big).$$

Bien que la propriété de continuité uniforme soit plus faible que la propriété de Lipschitz, la proposition suivante montre que, sur des espaces de Banach, elles coïncident aux grandes distances.

Proposition 2 :

Soit X et Y deux espaces de Banach. Toute application uniformément continue $u : X \to Y$ est lipschitzienne aux grandes distances, c'est-à-dire :

$$\forall \eta > 0, \quad \mathrm{lip}_\eta(u) = \sup\left\{ \frac{\|u(x) - u(x')\|_Y}{\|x - x'\|_X} \ ; \ \|x - x'\|_X \geqslant \eta \right\} < \infty.$$

On notera également $\mathrm{lip}_\infty(u) = \inf\limits_{\eta > 0} \mathrm{lip}_\eta(u)$.

Démonstration — Soit $x, x' \in X$ tels que $\|x - x'\|_X \geqslant \eta$. Posons :

$$m = \left\lfloor \frac{\|x - x'\|_X}{\eta} \right\rfloor + 1 \quad \text{et} \quad x = x_0, x_1, \ldots, x_m = x' \quad \text{tels que } \forall i \leqslant m, \ \|x_i - x_{i-1}\|_X \leqslant \eta.$$

Alors : $\|u(x) - u(x')\|_Y \leqslant m\, c(\eta) \leqslant (c(\eta)/\eta)\, \|x - x'\|_X + c(\eta) \leqslant 2(c(\eta)/\eta)\, \|x - x'\|_X$. □

Lorsque $u : E \to E'$ est bijective, uniformément continue ainsi que son inverse, on dit que u est un homéomorphisme uniforme, que E et E' sont uniformément homéomorphes et on note $E \sim_U E'$. Si, de plus, E et E' sont des espaces de Banach, alors on désigne par $\mathrm{Lip}_\eta(u)$ le produit $\mathrm{lip}_\eta(u) \cdot \mathrm{lip}_\eta(u^{-1})$ pour $0 < \eta \leqslant \infty$.

3.1.3 Réseaux équivalents

Soit (E, d) un espace métrique et R une partie de E. Fixons $\varepsilon \leqslant \eta$ deux nombres strictement positifs. La partie R est un réseau d'écartement ε et de précision η lorsque les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1. $\forall a, b \in R,\ a \neq b \implies d(a, b) \geqslant \varepsilon$.
2. $\forall x \in E,\ \exists a \in R,\ d(x, a) \leqslant \eta$.

Deux réseaux R dans (E, d) et S dans (E', d') sont équivalents lorsqu'il existe deux constantes c et C positives et une bijection σ de R sur S telles que

$$\forall a, b \in R, \quad c \cdot d(a, b) \leqslant d'(\sigma(a), \sigma(b)) \leqslant C \cdot d(a, b).$$

Cela signifie que les deux espaces métriques (R, d) et (S, d') sont Lipschitz-homéomorphes.

Dans un espace de Banach de dimension infinie, J. Lindenstrauss, E. Matoušková et D. Preiss ont montré (voir [43] et la proposition 10.22 de [7]) qu'il n'y a, à équivalence près, qu'un seul réseau.

Théorème 3 (Lindenstrauss, Matoušková et Preiss) :
Sur un espace de Banach de dimension infinie, tous les réseaux sont équivalents.

Dans toute la suite, dès qu'il s'agira de réseaux, il sera sous-entendu que les espaces considérés sont de dimension infinie.

Lorsque deux espaces de Banach X et Y possèdent des réseaux équivalents (ce qui est bien défini sans faire référence à des réseaux donnés d'après le théorème 3), on écrit $X \sim_R Y$. Cette relation est plus faible que les deux relations précédentes comme le prouve la proposition suivante :

Proposition 4 :
Soit X et Y deux espaces de Banach. Si $X \sim_U Y$, alors $X \sim_R Y$.

Démonstration — Soit R un réseau dans X d'écartement ε et de précision η. Soit $u : X \to Y$ un homéomorphisme uniforme. Soit c et γ deux fonctions strictement croissantes continues nulles en 0 telles que :

$$\begin{aligned} &\forall x, x' \in X,\ \left\|u(x) - u(x')\right\|_Y \leqslant c\left(\left\|x - x'\right\|_X\right) \\ \text{et}\quad &\forall y, y' \in Y,\ \left\|u^{-1}(y) - u^{-1}(y')\right\|_X \leqslant \gamma\left(\left\|y - y'\right\|_Y\right). \end{aligned}$$

On a alors, pour tous $a \neq b$ dans R, $\|a - b\|_X \leqslant \gamma(\|u(a) - u(b)\|_Y)$ d'où il résulte directement

$$\|u(a) - u(b)\|_Y \geqslant \gamma^{-1}(\varepsilon).$$

De même, étant donné $y \in Y$, soit $a \in R$ tel que $\left\|a - u^{-1}(x)\right\|_X \leqslant \eta$. On obtient immédiatement l'inégalité $\|u(a) - y\|_Y \leqslant c(\eta)$.

Par conséquent, $u(R)$ est un réseau dans Y d'écartement $\gamma^{-1}(\varepsilon)$ et de précision $c(\eta)$.

Par ailleurs, puisque u est lipschitzienne aux grandes distances, la restriction de u à R est $\mathrm{lip}_\varepsilon(u)$-lipschitzienne. De même, la restriction de u^{-1} à $u(R)$ est $\mathrm{lip}_{\gamma^{-1}(\varepsilon)}(u^{-1})$-lipschitzienne. Par suite, les deux réseaux sont équivalents. □

3.1.4 Liens entre les équivalences non linéaires

On peut classer les relations d'équivalence précédentes de la plus fine à la moins fine :
- L'isomorphisme linéaire ($\simeq$).
- L'homéomorphisme lipschitzien ($\sim_L$).
- L'homéomorphisme uniforme ($\sim_U$).
- L'équivalence entre réseaux ($\sim_R$).

Dans l'état actuel des connaissances, on sait que l'homéomorphisme lipschitzien n'implique pas l'isomorphisme linéaire et que l'homéomorphisme uniforme n'implique pas le lipschitzien. En revanche, la question de savoir si deux espaces de Banach possédant des réseaux équivalents sont uniformément homéomorphes reste ouverte.

Voici une liste non exhaustive de résultats frappants sur les liens entre ces différentes relations d'équivalence.

I. Aharoni et J. Lindenstrauss (1978, [1]) : Notons $2^{<\omega}$ l'ensemble des suites finies de 0 et de 1 (y compris la suite vide, notée $\varnothing$). Si $s \in 2^{<\omega}$, soit I_s l'ensemble des suites infinies de 0 et de 1 qui commencent par s et w_s la fonction caractéristique de I_s (w_s est définie sur 2^ω). Pour $t \in 2^\omega$, soit z_t la fonction caractéristique du singleton $\{t\}$. Muni de la topologie de la convergence ponctuelle, l'ensemble

$$K = \{w_s \ ; \ s \in 2^{<\omega}\} \cup \{z_t \ ; \ t \in 2^\omega\} \cup \{0\}$$

est compact. I. Aharoni et J. Lindenstrauss ont montré que $C(K)$ et $c_0(2^{\aleph_0})$ sont Lipschitz-homéomorphes sans être isomorphes.

R. Deville, G. Godefroy et V. Zizler [15] ont caractérisé les compacts K tels que l'espace $C(K)$ soit Lipschitz-homéomorphe à l'espace $c_0(\Gamma)$ correspondant (le cardinal de Γ étant nécessairement le caractère de densité de $C(K)$).

S. Heinrich et P. Mankiewicz (1982, [28]) : Considérons X et Y deux espaces de Banach séparables dont l'un a la propriété de Radon-Nikodým. Si X et Y sont Lipschitz-homéomorphes, alors X et Y sont tous deux isomorphes à un sous-espace complémenté de l'autre. En particulier, si X est isomorphe à ℓ_p ou à $L_p(\mu)$ pour $1 < p < \infty$ et μ une certaine mesure de probabilité, alors X et Y sont Lipschitz-homéomorphes si et seulement s'ils sont isomorphes.

G. Godefroy, N.J. Kalton, G. Lancien (2000, [23]) : Si X est un espace de Banach Lipschitz-homéomorphe à c_0, alors X est isomorphe à c_0.

W.B. Johnson, J. Lindenstrauss et G. Schechtman (1996, [32]) :

- Si X est un espace de Banach admettant un réseau équivalent à un réseau de ℓ_p ($1 < p < \infty$), alors X est isomorphe à ℓ_p. En revanche, si on se donne deux réels $1 \leqslant p < \infty$ et $1 < q < \infty$ ainsi qu'une suite $(p_n)_{n\in\omega}$ tendant vers p en décroissant strictement, alors les espaces ℓ_p et $\ell_p \oplus \left(\bigoplus \ell_{p_n}\right)_{\ell_q}$ sont uniformément homéomorphes sans être Lipschitz-homéomorphes. Le cas $p = 1$ avait été préalablement traité par M. Ribe [54].

- Si K est un espace topologique compact et que $C(K)$ est uniformément homéomorphe à c_0, alors $C(K)$ est isomorphe à c_0.

Parmi les très nombreux problèmes ouverts qui demeurent sur la question des relations non linéaires entre espaces de Banach, on peut citer les suivants :

1. Deux espaces de Banach séparables Lipschitz-homéomorphes sont-ils isomorphes ?
2. Deux espaces de Banach réflexifs Lipschitz-homéomorphes sont-ils isomorphes ?
3. Soit X un espace de Banach et K un espace topologique compact. Si X est Lipschitz-homéomorphe à $C(K)$, lui est-il nécessairement isomorphe ?

4. Soit K et L deux espaces topologiques compacts. Si $C(K)$ et $C(L)$ sont Lipschitz-homéomorphes, sont-ils isomorphes ?
5. On peut reformuler certaines des questions précédentes en remplaçant l'hypothèse de Lipschitz-homéomorphisme par celle d'homéomorphisme uniforme (ou encore par celle de l'équivalence de réseaux). En particulier, un espace de Banach uniformément homéomorphe à c_0 lui est-il nécessairement isomorphe ?
6. Deux espaces de Banach ayant des réseaux équivalents sont-ils uniformément homéomorphes ?

3.2 Relations de quotients non linéaires

3.2.1 Quotients lipschitziens

Considérons deux espaces métriques (E, d) et (E', d'). Une application $u : E \to E'$ est colipschitzienne de rapport c si, pour tout $x \in E$ et tout $r \geqslant 0$, on a :

$$f\Big(B_E(x,r)\Big) \supset B_{E'}\left(f(x), \frac{r}{c}\right).$$

Il s'agit de la propriété dont jouissent automatiquement les applications linéaires surjectives d'après le théorème de l'application ouverte. La borne inférieure des constantes c admissibles ci-dessus (non nécessairement atteinte) est désignée par $\gamma(u)$. Remarquons que ceci est cohérent avec la notation retenue pour la conorme d'une application linéaire.

Une application $u : E \to E'$ est un quotient lipschitzien (on dira alors également que E' est un quotient lipschitzien de E) lorsque u est lipschitzienne et colipschitzienne. Le produit de la constante de Lipschitz $\mathrm{lip}(u)$ par la constante $\gamma(u)$ est noté $\Gamma(u)$. Le nom de quotient lipschitzien est justifié car, dès que E est non vide, un quotient lipschitzien est automatiquement surjectif : si u est un tel quotient, $u(E)$ contient la réunion des boules centrées en $u(x)$ (où x est un point quelconque de E) et de rayon r/c (pour tout $r > 0$) donc $u(E) = E'$. Lorsque E' est un quotient lipschitzien de E, on écrit $E \twoheadrightarrow_L E'$.

On peut se demander pourquoi un quotient lipschitzien n'est pas simplement défini comme une application lipschitzienne et surjective. Dans la mesure où l'on souhaite appliquer cette notion à des espaces de Banach, une telle définition serait vide d'intérêt. En effet, S.M Bates a montré dans [5] (voir également le théorème 11.1 de [7]) que, si X et Y sont deux espaces de Banach séparables de dimension infinie, alors il existe une surjection lipschitzienne de classe C^1 de X sur Y.

3.2.2 Quotients uniformes

Considérons deux espaces métriques (E, d) et (E', d'). Une application $u : E \to E'$ est uniformément cocontinue lorsqu'il existe une fonction croissante $\rho : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et telle que, pour tout $x \in E$ et tout $r \geqslant 0$, on ait :

$$f\Big(B_E(x,r)\Big) \supset B_{E'}\Big(f(x), \rho(r)\Big).$$

Une application $u : E \to E'$ qui est à la fois surjective, uniformément continue et uniformément cocontinue est appelée un quotient uniforme (dans cette situation, on dira également que E' est un quotient uniforme de E). Ici, la surjectivité n'est plus automatique. En effet, prenons $E = \mathbb{R}$ et $E' = \{0, 2\}$ munis de la distance usuelle dans $\mathbb{R}$, $u = 0$ et $\rho = 1$; toutes les hypothèses sont vérifiées à l'exception de la surjectivité. Notons en revanche que la surjectivité est une conséquence de la cocontinuité uniforme dès que ρ diverge en l'infini ou que E' est connexe. En effet, dans ce dernier cas, il suffit de vérifier que $u(E)$ est à

la fois ouvert et fermé. La propriété de cocontinuité uniforme prouve que l'application u est ouverte (l'image directe d'un ouvert est un ouvert) donc $u(E)$ est ouvert. Montrons maintenant que $u(E)$ est fermé. Considérons une suite $\underline{x}$ dans E et un élément $y \in E'$ tels que $(u(x_n))_{n\in\omega}$ converge vers y. Puisque $\rho(1) > 0$, on a en particulier, pour n assez grand, $d'(y, u(x_n)) \leqslant \rho(1)$. Or, d'après la propriété de concontinuité uniforme, $u(E)$ contient les boules $B_{E'}(u(x_n), \rho(1))$. Par conséquent $y \in u(E)$.

A l'image de la proposition 2, le résultat suivant montre qu'une application uniformément cocontinue entre deux espaces de Banach est colipschitzienne aux grandes distances.

Proposition 5 (Bates, Johnson, Lindenstrauss, Preiss et Schechtman) :
Soit X et Y deux espaces de Banach et $u : X \to Y$ uniformément cocontinue. L'application u est colipschitzienne aux grandes distances, c'est-à-dire qu'elle vérifie :

$$\forall \delta > 0,\ \exists c > 0,\ \forall x \in E,\ \forall r \geqslant \delta, \quad f\Big(B_X(x,r)\Big) \supset B_Y\Big(f(x), \frac{r}{c}\Big).$$

La borne inférieure des constantes c valables ci-dessus est notée $\gamma_\delta(u)$ et la limite quand δ tend vers $+\infty$ de $\gamma_\delta(u)$ est $\gamma_\infty(u)$. Par ailleurs, si u est un quotient uniforme, on écrira $\Gamma_\infty(u) = \mathrm{lip}_\infty(u) \cdot \gamma_\infty(u)$.

Démonstration — Fixons $\delta > 0$. D'après la définition de la cocontinuité uniforme, on peut introduire $\varepsilon > 0$ fixé tel que

$$\forall x \in X, \quad u\left(B_X\Big(x, \frac{\delta}{2}\Big)\right) \supset B_Y\big(u(x), \varepsilon\big). \tag{3.1}$$

Soit $r \geqslant \delta$ et n la partie entière de $2r/\delta$. Fixons $x \in E$, posons $y_0 = u(x)$ et choisissons $y \in B_Y(y_0, (2r/\delta - 1)\varepsilon)$ arbitrairement. Introduisons alors $y_1, \ldots, y_n \in Y$ tels que $y_n = y$ et $\|y_i - y_{i-1}\|_Y \leqslant \varepsilon$. En appliquant la relation (3.1) en x, on peut choisir $x_1 \in B_X(x, \delta/2)$ tel que $u(x_1) = y_1$. De proche en proche, on construit des vecteurs $x_2, \ldots, x_n$ tels que $u(x_i) = y_i$ et $\|x_i - x_{i-1}\|_X \leqslant \delta/2$. Finalement, on a $u(x_n) = y$ et $\|x - x_n\|_X \leqslant n\delta/2 \leqslant r$. Comme $(2r/\delta - 1)\varepsilon \geqslant r\varepsilon/\delta$, on obtient :

$$\forall x \in E,\ \forall r \geqslant \delta, \quad u\Big(B_X(x,r)\Big) \supset B_Y\Big(u(x), r\frac{\varepsilon}{\delta}\Big).$$

□

Les notions de quotients lipschitzien et uniforme entre espaces de Banach ont été introduits par S.M. Bates, W.B. Johnson, J. Lindenstrauss, D. Preiss et G. Schechtman dans [6]. Les preuves des propositions 2 et 5 se trouvent dans cet article. Elles n'ont été rappelées ici qu'afin d'expliciter les constantes $\mathrm{lip}_\eta(u)$ et $\gamma_\delta(u)$.

3.2.3 Résultats connus sur les quotients non linéaires

On sait très peu de choses sur une « linéarisation » éventuelle des quotients non linéaires hormis qu'elle n'est pas automatique. En effet, dans le contre-exemple de I. Aharoni et J. Lindenstrauss du paragraphe 3.1.4, on peut montrer que $C(K)$ n'est pas un quotient linéaire de $c_0(2^{\aleph_0})$. De même, le contre-exemple de W.B. Johnson, J. Lindenstrauss et G. Schechtman montre que $\ell_1 \oplus (\bigoplus \ell_{1+1/n})_{\ell_2}$ est un quotient uniforme de $(\bigoplus \ell_{1+1/n})_{\ell_2}$. Toutefois, ce ne peut pas être un quotient linéaire puisque le deuxième espace est réflexif tandis que le premier ne l'est pas.

Parmi les rares résultats positifs connus, on trouve dans [6] la démonstration des deux théorèmes suivants :

Théorème 6 (Bates, Johnson, Lindenstrauss, Preiss et Schechtman) :
Soit H un espace de Hilbert et Y un quotient uniforme de H. L'espace Y est hilbertien. En particulier, à isomorphisme près, le seul quotient uniforme de dimension infinie de ℓ_2 est ℓ_2 lui-même.

Théorème 7 (Bates, Johnson, Lindenstrauss, Preiss et Schechtman) :
Soit $1 < p < \infty$ et X un espace de Banach. Si X est un quotient uniforme de L_p, alors X est un quotient linéaire de L_p.

Citons quelques questions générales qui restent ouvertes :
- Soit X un espace de Banach séparable et Y un quotient lipschitzien de X. Peut-on en déduire que Y est un quotient linéaire de X ?
- Soit $1 < p < \infty$. Tout quotient lipschitzien (uniforme) de ℓ_p est-il un quotient linéaire de ℓ_p ?
- Tout quotient lipschitzien (uniforme) de c_o est-il un quotient linéaire de c_o ?

Chapitre 4

Distances entre espaces de Banach

A chacune des relations définies au chapitre précédent, on peut associer une distance (l'exponentielle d'une pseudo-distance en fait) afin de quantifier l'équivalence.

4.1 Distances liées à une relation d'équivalence

Distance de Banach-Mazur

La distance de Banach-Mazur entre deux espaces de Banach X et Y est notée $d_{BM}(X,Y)$. C'est la quantité :

$$\inf\Big\{\|T\|\cdot\|T^{-1}\| \ ; \ T \text{ est un isomorphisme de } X \text{ sur } Y\Big\}.$$

Distance de Lipschitz

La distance de Lipschitz entre deux espaces de Banach X et Y est notée $d_L(X,Y)$. C'est la quantité :

$$\inf\Big\{\mathrm{Lip}(u) \ ; \ u \text{ est un homéomorphisme lipschitzien de } X \text{ sur } Y\Big\}.$$

Rappelons simplement que $\mathrm{Lip}(u)$ est le produit des constantes de Lipschitz de u et de u^{-1}. On pourrait définir sans aucun changement la distance de Lipschitz entre deux espaces métriques.

Distance uniforme

La distance uniforme entre deux espaces de Banach X et Y est notée $d_U(X,Y)$. C'est la quantité :

$$\inf\Big\{\mathrm{Lip}_\infty(u) \ ; \ u \text{ est un homéomorphisme uniforme entre } X \text{ et } Y\Big\}.$$

La notation $\mathrm{Lip}_\infty(u)$ représente le produit des constantes de Lipschitz à l'infini de u et de u^{-1}. Remarquons que, dans le calcul de la distance uniforme entre deux espaces de Banach, on peut considérer $\mathrm{Lip}_\eta(u)$ pour un nombre $\eta > 0$ quelconque au lieu de $\mathrm{Lip}_\infty(u)$. En effet, si u est un homéomorphisme uniforme tel que $\mathrm{Lip}_\infty(u) < a$, alors il existe $\delta > 0$ tel que $\mathrm{Lip}_\delta(u) < a$ et l'homéomorphisme uniforme

$$v : x \mapsto \frac{\eta}{\delta}\, u\left(\frac{\delta x}{\eta}\right)$$

vérifie $\mathrm{Lip}_\eta(v) < a$.

Distance de réseau

La distance de réseau entre deux espaces de Banach X et Y est notée $d_R(X,Y)$. C'est la quantité :

$$\inf\Big\{d_L(R,S)\ ;\ R \text{ et } S \text{ sont des réseaux dans } X \text{ et } Y \text{ respectivement}\Big\}.$$

Comme précédemment, en remarquant que la distance de Lipschitz entre les deux réseaux R et R/m (pour $m > 0$) égale 1, on peut ne considérer que des réseaux de précision donnée (ou d'écartement donné) pour le calcul de la distance de réseau entre X et Y.

Ces distances ont été rangées de la plus précise à la plus grossière. En effet, si X et Y sont deux espaces de Banach, on a :

$$d_R(X,Y) \leqslant d_U(X,Y) \leqslant d_L(X,Y) \leqslant d_{BM}(X,Y).$$

Les deux dernières inégalités sont évidentes. La première est une conséquence directe de la preuve de la proposition 4

Dans la suite, on considèrera souvent des classes d'espaces de Banach. En particulier, on utilisera la classe $\mathcal{S}$ des espaces de Banach séparables (on verra au chapitre 5 que cela ne pose pas de problèmes ensemblistes) et, pour tout espace de Banach X, les classes $\mathcal{G}(X)$ des sous-espaces de X et $\mathcal{Q}(X)$ des quotients isométriques de X, c'est-à-dire

$$\mathcal{Q}(X) = \{X/Y\ ;\ Y \text{ est un sous-espace fermé de } X\}.$$

Si $\mathcal{C}$ est une classe d'espaces de Banach, on écrira :

$$d_{BM}(X,\mathcal{C}) = \inf\{d_{BM}(X,Y)\ ;\ Y \in \mathcal{C}\}$$

et de même pour les autres distances introduites précédemment.

4.2 Distances géométriques

Les distances géométriques entre deux espaces de Banach X et Y qu'on va introduire permettent de plonger isométriquement X et Y dans un sur-espace de sorte que X et Y soient « bien placés ». Elles ont été étudiées en détail par N.J. Kalton et M. Ostrovskii dans [36].

Soit donc (M,d) un espace métrique et A, B deux parties de M. La distance de Hausdorff entre A et B est égale à

$$\max\left(\sup_{a\in A} d(a,B)\ ;\ \sup_{b\in B} d(b,A)\right).$$

On la note $d_H(A,B)$.

Soit E et F deux espaces métriques. La distance de Gromov-Hausdorff métrique entre E et F est égale à la borne inférieure des quantités $d_H(i(E),j(F))$ où i et j sont deux isométries de E et F dans un même espace métrique M. On la note $d_{gh}(E,F)$. Lorsque X et Y sont deux espaces de Banach, la distance de Gromov-Hausdorff vectorielle (qu'on appellera plus simplement la distance de Gromov-Hausdorff) entre X et Y est égale à la distance de Gromov-Hausdorff métrique entre B_X et B_Y. On la note $d_{GH}(X,Y)$.

Soit E un espace de Banach et G, H deux sous-espaces de E. L'écart entre G et H dans E, qu'on désignera par $\Lambda_E(G,H)$, est égal à la distance de Hausdorff entre B_X et B_Y (ou, de façon équivalente, entre S_X et S_Y). Si, maintenant, X et Y sont deux espaces de Banach quelconques, la distance de Kadets entre X et Y, notée $d_K(X,Y)$, est égale à la borne inférieure des quantités $\Lambda_E(i(X), j(Y))$ où i et j sont deux isométries linéaires de X et Y dans un même espace de Banach E.

Etant donnés deux espaces de Banach X et Y, on a toujours $d_K(X,Y) \leqslant 1$. En effet, il suffit de munir $X \oplus Y$ de la norme :

$$\forall (x,y) \in X \times Y, \quad \|(x,y)\| = \max(\|x\|_X, \|y\|_Y).$$

La distance de Gromov-Hausdorff est la moins fine des distances introduites jusqu'à présent comme le montre la proposition suivante :

Proposition 8 :
Soit X et Y deux espaces de Banach. On a :

$$d_{GH}(X,Y) \leqslant d_K(X,Y) \leqslant d_{BM}(X,Y) - 1 \quad \text{et} \quad d_{GH}(X,Y) \leqslant d_R(X,Y) - 1.$$

Avant de commencer la preuve de ce résultat, on remarque que « petit » pour les distances de Banach-Mazur, Lipschitz, uniforme ou de réseau signifie « proche de 1 » tandis que « petit » pour les distances de Gromov-Hausdorff ou de Kadets signifie « proche de 0 ». En effet, il faut prendre le logarithme de d_{BM}, d_L, d_U et d_R pour obtenir des pseudo-distances.

Démonstration — L'inégalité $d_{GH}(X,Y) \leqslant d_K(X,Y)$ est triviale.

Montrons $d_K(X,Y) \leqslant d_{BM}(X,Y) - 1$. Soit C une constante strictement supérieure à $d_{BM}(X,Y)$. Il existe un isomorphisme linéaire $T : X \to Y$ tel que

$$\forall x \in X, \quad \|Tx\|_Y \leqslant \|x\|_X \leqslant C\,\|Tx\|_Y\,.$$

On pose $S = T^{-1}/C$. On munit $X \oplus Y$ de la norme

$$\|(x,y)\| = \inf \left\{ \|x_0\|_X + \|y_0\|_Y + (C-1)\left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_X + \sum_{j=1}^{m} \|y_j\|_Y\right)\right\}$$

où la borne inférieure est prise sur toutes les familles $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ et $(y_j)_{0\leqslant j\leqslant m}$ telles que

$$x = \sum_{i=0}^{n} x_i + \sum_{j=1}^{m} Sy_j \qquad \text{et} \qquad y = \sum_{j=0}^{m} y_j + \sum_{i=1}^{n} Tx_i.$$

Ceci définit bien une norme. Vérifions qu'elle prolonge les normes de X et de Y. On le fait pour X, la démonstration étant la même pour Y. Soit $x \in X$. On introduit $(x_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ et $(y_j)_{0\leqslant j\leqslant m}$ deux familles telles que

$$x = \sum_{i=0}^{n} x_i + \sum_{j=1}^{m} Sy_j \qquad \text{et} \qquad 0 = \sum_{j=0}^{m} y_j + \sum_{i=1}^{n} Tx_i.$$

Alors, on peut écrire

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{j=1}^{m} Sy_j\right\|_X \leqslant \left\|\sum_{i=1}^{n} CTx_i + \sum_{j=1}^{m} y_j\right\|_Y \leqslant \left\|\sum_{i=1}^{n} Tx_i + \sum_{j=1}^{m} y_j\right\|_Y + (C-1)\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_X$$

puisque $\|S\| \leqslant 1$ et $\|T\| \leqslant 1$. Comme le premier terme vaut $\|x - x_o\|_X$ et que le dernier vaut $\|y_o\|_Y + (C-1)\sum \|x_i\|_X$, il vient :

$$\|x\|_X \leqslant \|x_o\|_X + \|y_o\|_Y + (C-1)\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_X \leqslant \|(x,0)\|\,.$$

L'autre inégalité étant évidente, cela montre que la nouvelle norme prolonge la norme initiale de X. Enfin, si $x \in S_X$, on choisit $i = 1$, $j = 0$, $x_o = 0$, $y_o = 0$, $x_1 = x$ ci-dessus pour montrer directement que $\|(x,0) - (0,Tx)\| \leqslant (C-1)$. Ainsi, $\Lambda_{X\oplus Y}(X,Y) \leqslant C-1$, ce qui démontre le résultat voulu.

Montrons maintenant que $d_{GH}(X,Y) \leqslant d_R(X,Y) - 1$. Fixons $\lambda > d_R(X,Y)$ quelconque et $\eta > 0$ arbitraire. Il existe un réseau $(e_i)_{i\in I}$ de précision η dans X et un réseau $(f_i)_{i\in I}$ de précision η dans Y tels que :

$$\forall i,j \in I, \quad \|e_i - e_j\|_X \leqslant \|f_i - f_j\|_Y \leqslant \lambda\,\|e_i - e_j\|_X\,.$$

Notons 0 l'un des éléments de I. Après translation, on peut supposer $e_o = 0$ et $f_o = 0$. Soit maintenant $J = \{i \in I\ ;\ \|e_i\|_X \leqslant 1+\eta\}$. Soit $x \in B_X$. Par définition du réseau $(e_i)_{i\in I}$, il existe $i \in I$ tel que $\|x - e_i\|_X \leqslant \eta$. Mais alors $\|e_i\|_X \leqslant 1+\eta$ donc $i \in J$. De même, si $y \in B_Y$, il existe $i \in I$ tel que $\|y - f_i\|_Y \leqslant \eta$. Mais alors

$$\|e_i\|_X = \|e_o - e_i\|_Y \leqslant \|f_o - f_i\|_Y = \|f_i\|_Y \leqslant 1+\eta.$$

A nouveau, on a $i \in J$. Posons $A = B_X \cup \{e_j\ ;\ j \in J\}$ et $B = B_Y \cup \{f_j\ ;\ j \in J\}$.

On définit sur M, réunion disjointe de A et B, une métrique prolongeant celles de A et B en posant, pour $x \in A$ et $y \in B$,

$$d(x,y) = \inf\Big\{\ \|x - e_j\|_X + \alpha + \|y - f_j\|_Y\ ;\ j \in J\Big\},$$

où α est un réel strictement positif qu'on va choisir afin que d soit bien une distance. La seule vérification à faire concerne l'inégalité triangulaire. Plusieurs cas sont à distinguer. On traite le plus compliqué d'entre eux. Soit $x \in A$ et $y, y' \in B$. On doit prouver que $d(y,x) + d(x,y') \geqslant \|y - y'\|_Y$. Il suffit de montrer qu'étant donnés $i,j \in J$ arbitraires, on a $\Delta_{ij} \geqslant \|y - y'\|_Y$ où

$$\Delta_{ij} = \|y - f_i\|_Y + \alpha + \|e_i - x\|_X + \|x - e_j\|_X + \alpha + \left\|y' - f_j\right\|_Y.$$

D'après l'équivalence des réseaux, on a

$$\Delta_{ij} \geqslant 2\alpha + \|y - f_i\|_Y + \left\|y' - f_j\right\|_Y + \frac{1}{\lambda}\,\|f_i - f_j\|_Y \geqslant 2\alpha + \frac{1}{\lambda}\,\left\|y - y'\right\|_Y.$$

Or, comme $e_o = 0$ et $f_o = 0$, la définition de J et l'équivalence entre les réseaux entraîne $B \subset \lambda(1+\eta)B_Y$ donc $\|y - y'\|_Y \leqslant 2\lambda(1+\eta)$. Par conséquent, l'inégalité $\Delta_{ij} \geqslant \|y - y'\|_Y$ est vraie dès que $\alpha \geqslant (\lambda - 1)(1+\eta)$. Le nombre η étant arbitraire, on trouve finalement $d_{GH}(X,Y) \leqslant d_R(X,Y) - 1$. □

Le cas particulier des $\mathcal{K}_o$-espaces offre un cadre où les distances de Gromov-Hausdorff et de Kadets sont topologiquement équivalentes.

4.3 Les $\mathcal{K}_{\mathrm{o}}$-espaces

Les notions de $\mathcal{K}$-espace (qu'on n'utilisera pas ici) et de $\mathcal{K}_{\mathrm{o}}$-espace ont été étudiées principalement par N.J. Kalton (on se reportera à [35], [37] et au chapitre 16 de [7]).

Définition : Soit X et Y deux espaces de Banach.

1. Pour toute application homogène $h : X \to Y$, on note
$$\|h\| = \sup \Big\{ \|h(x)\|_Y \ ; \ x \in B_X \Big\}.$$
2. Une application $h : X \to Y$ est dite quasi-linéaire lorsque les trois conditions suivantes sont réunies :
   (a) h est homogène.
   (b) $\|h\| < \infty$.
   (c) $\forall x_1, x_2 \in X, \quad \|h(x_1 + x_2) - h(x_1) - h(x_2)\|_Y \leqslant \|x_1\|_X + \|x_2\|_X$.
   Une forme quasi-linéaire est une application quasi-linéaire à valeurs réelles.
3. Soit $\kappa \geqslant 0$. Une application quasi-linéaire $h : X \to Y$ est κ-linéarisable s'il existe $T \in L(X, Y)$ telle que $\|f - T\| \leqslant \kappa$.
4. L'espace X est un $\mathcal{K}_{\mathrm{o}}$-espace lorsqu'il existe une constante $\kappa \geqslant 0$ telle que toutes les formes quasi-linéaires sur X sont κ-linéarisables. La borne inférieure des constantes κ admissibles ci-dessus est notée $\kappa_{\mathrm{o}}(X)$.

La définition retenue ici d'une application quasi-linéaire n'est pas homogène. C'est volontaire. La condition est plus forte pour les applications de grande norme. En effet, toute application homogène de norme inférieure ou égale à $1/2$ est quasi-linéaire. Toute application quasi-linéaire f est $\|f\|$-linéarisable (prendre $T = 0$). La propriété des $\mathcal{K}_{\mathrm{o}}$-espaces réside dans l'uniformité de la linéarisation.

Parmi les espaces classiques, nombreux sont les $\mathcal{K}_{\mathrm{o}}$-espaces. Le théorème suivant montre que $C(K)$ (pour tout espace topologique compact K), ℓ_p $(1 < p \leqslant \infty)$, c_{o} et leurs quotients sont des $\mathcal{K}_{\mathrm{o}}$-espaces.

Théorème 9 (Kalton et Roberts) :

1. *Tout espace de type non trivial est un $\mathcal{K}_{\mathrm{o}}$-espace.*
2. *Tout espace X de classe $\mathcal{L}_{\infty,\lambda}$ est un $\mathcal{K}_{\mathrm{o}}$-espace avec $\kappa_{\mathrm{o}}(X) < 100\lambda$.*
3. *Si X est un $\mathcal{K}_{\mathrm{o}}$-espace et que Y est un sous-espace de X, alors X/Y est un $\mathcal{K}_{\mathrm{o}}$-espace et $\kappa_{\mathrm{o}}(X/Y) \leqslant 2\,\kappa_{\mathrm{o}}(X)$.*
4. *L'espace ℓ_1 n'est pas un $\mathcal{K}_{\mathrm{o}}$-espace.*

1. La première assertion, due à N.J. Kalton, est prouvée dans [35]. On rappelle qu'un espace de Banach X est dit de type $p \geqslant 1$ lorsqu'il existe une constante $C \geqslant 0$ telle que :
$$\forall x_1, \ldots, x_n \in X, \qquad \left(\frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon \in \{\pm 1\}^n} \Big\| \sum_{j=1}^n \varepsilon_j \, x_j \Big\|^p \right)^{1/p} \leqslant C \left(\sum_{j=1}^n \|x_j\|^p \right)^{1/p}.$$
Par simple inégalité triangulaire, tout espace de Banach est de type 1. On dit donc qu'il est de type non trivial lorsqu'il est de type $p > 1$. Le type de ℓ_p étant égal à p si $p \leqslant 2$ et à 2 si $2 \leqslant p < \infty$, tous ces espaces sont des $\mathcal{K}_{\mathrm{o}}$-espaces.

2. La deuxième assertion a été démontrée par N.J. Kalton et J.W. Roberts dans [37]. On rappelle qu'un espace de Banach X est de classe $\mathcal{L}_{\infty,\lambda}$ lorsque tout sous-espace de dimension finie de X est inclus dans un autre sous-espace G de dimension finie tel que $d_{BM}\big(G, \ell_\infty(\dim G)\big) \leqslant \lambda$. Les espaces $C(K)$ (pour tout compact K), ℓ_∞ et c_0 étant de classe $\mathcal{L}_{\infty,1+\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon > 0$, ce sont des $\mathcal{K}_0$-espaces de constante 100.
3. La démonstration du troisième point se trouve en substance dans [37]. Toutefois, le résultat établi n'est pas exactement celui-ci. On en donne donc ici une preuve autonome.

   Démonstration — Soit $\kappa > \kappa_0(X)$ et $s : X \to X/Y$ la surjection canonique. Soit $h : X/Y \to \mathbb{R}$ une forme quasi-linéaire. La forme $h \circ s$ est quasi-linéaire donc il existe $x_1^* \in X^*$ telle que $\|h \circ s - x_1^*\| \leqslant \kappa$. Dès lors, la restriction de x_1^* à Y est de norme inférieure ou égale à κ. Par le théorème de Hahn-Banach, il existe $x_2^* \in X^*$ de norme inférieure ou égale à κ et coïncidant avec x_1^* sur Y. Comme la transposée de s identifie isométriquement $(X/Y)^*$ avec l'orthogonal $Y^\perp$ de Y, il existe $z^* \in (X/Y)^*$ tel que $x_1^* - x_2^* = z^* \circ s$. On fixe maintenant $\varepsilon > 0$ et $z \in B_{X/Y}$ arbitraires. Soit $x \in X$ tel que $z = s(x)$ et $\|x\|_X \leqslant 1 + \varepsilon$. On a alors :

   $$|h(z) - \langle z^*, z\rangle| \leqslant |h(s(x)) - \langle x_1^*, x\rangle| + |\langle x_2^*, x\rangle| \leqslant 2\kappa(1+\varepsilon).$$

   Lorsque ε tend vers 0 et κ vers $\kappa_0(X)$, on obtient le résultat. □
4. Ce contre-exemple est dû à M. Ribe [53].

Comme annoncé précédemment, les $\mathcal{K}_0$-espaces permettent de « linéariser » la distance de Gromov-Hausdorff.

Théorème 10 (Kalton et Ostrovskii) :
Il existe une fonction continue croissante $\zeta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ s'annulant en 0 telle que, si X est un $\mathcal{K}_0$-espace et Y un espace de Banach, alors :

$$d_K(X,Y) \leqslant \kappa_0(X) \cdot \zeta\big(d_{GH}(X,Y)\big).$$

En particulier, sur tout ensemble de $\mathcal{K}_0$-espaces, les distances de Kadets et de Gromov-Hausdorff sont topologiquement équivalentes.

Ce théorème est dû à N.J. Kalton et M. Ostrovskii [36]. On ne connaît aucune forme explicite pour la fonction ζ qui est obtenue par un argument de compacité.

Chapitre 5

Complexité topologique des relations non linéaires entre espaces de Banach séparables

5.1 Rappels de théorie descriptive

5.1.1 Ordinaux dénombrables

On utilisera les notations classiques de Cantor sur les ordinaux :
- 0 est l'ensemble vide.
- Pour tout n fini, $n+1 = \{0, \dots, n\}$.
- L'ensemble des ordinaux finis est ω. C'est le premier ordinal infini.
- L'ensemble des ordinaux dénombrables est noté ω_1. C'est le premier ordinal non dénombrable.

Ajoutons à ces notations classiques l'ensemble $\omega^* = \omega \setminus \{0\}$. On utilisera les écritures $\mathcal{P}(E)$, $\mathcal{P}_f(E)$ et $\mathcal{P}_\infty(E)$ pour désigner l'ensemble des parties, l'ensemble des parties finies et l'ensemble des parties infinies de E.

5.1.2 Notions de théorie descriptive

Un espace mesurable est un couple $(B, \mathcal{M})$ où $\mathcal{M}$ est une tribu de parties de B (c'est-à-dire une partie de $\mathcal{P}(B)$ contenant $\varnothing$ et stable par union dénombrable et passage au complémentaire). On dit de deux espaces mesurables $(B, \mathcal{M})$ et $(B', \mathcal{M}')$ qu'ils sont isomorphes lorsqu'il existe une bijection $f : B \to B'$ telle que f et f^{-1} soient mesurables pour $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}'$. Un espace borélien standard est un espace mesurable $(B, \mathcal{M})$ qui est soit dénombrable soit isomorphe à $[0, 1]$ muni de sa tribu de Borel. Si B et B' sont deux espaces boréliens standards, alors $B \times B'$ et B^ω (munis des tribus-produits) sont des espaces boréliens standards. Si $A \in \mathcal{M}$, alors la tribu trace munit A d'une structure d'espace borélien standard.

Soit $(B, \mathcal{M})$ un espace borélien standard :
- Les éléments de $\mathcal{M}$ sont communément appelés les boréliens de B.
- Une partie A de B est dite analytique s'il existe un espace borélien standard B' et un borélien H de $B \times B'$ tels que A soit la projection sur B de H.
- Une partie C de B est coanalytique lorsque son complémentaire est analytique.

Soit B un espace borélien standard et $\perp$ une relation binaire sur B. On dit que $\perp$

est borélienne (respectivement analytique) lorsque l'ensemble $\{(x,y) \in B^2 \ ; \ x \perp y\}$ est borélien (respectivement analytique). Lorsqu'une relation est analytique et non borélienne, on dit qu'elle est analytique vraie. Pour plus de précisions sur ces questions, on se reportera au livre de J.P.R. Christensen [14].

5.1.3 Arbres

Soit E un ensemble. Rappelons que E^ω est l'ensemble des suites d'éléments de E. La notation $E^{<\omega}$ désigne l'ensemble des suites finies d'éléments de E.

Soit $s = (s_1, \ldots, s_n) \in E^{<\omega}$. L'entier n est appelé la longueur de s et noté $|s|$. Rappelons que $|\varnothing| = 0$. Pour simplifier, lorsque $s = (a)$ est une suite de longueur 1, on écrit fréquemment $s = a$. Avec cette convention, E s'identifie à la partie de $E^{<\omega}$ constituée des suites de longueur 1. Si $t = (t_1, \ldots, t_m)$ est une autre suite finie, la concaténation de s et t est la suite $s^\frown t = (s_1, \ldots, s_n, t_1, \ldots t_m)$. Si A et B sont deux parties de $2^{<\omega}$, on définit $A^\frown B = \{s^\frown t \ ; \ s \in A, \ t \in B\}$. Lorsque A est le singleton s, l'ensemble $\{s\}^\frown B$ se note encore $s^\frown B$. Ceci permet de définir sur $E^{<\omega}$ une structure d'ordre en posant :

$$s \leqslant t \iff t \in s^\frown E^{<\omega}.$$

Un arbre sur E est une partie T de $E^{<\omega}$ qui vérifie :

$$\forall t \in T, \quad s \leqslant t \Longrightarrow s \in T.$$

Notons que tout arbre non vide contient la suite $\varnothing$. Deux arbres T et S sont dits isomorphes s'il existe une bijection croissante de T sur S. Un sous-arbre de T est une partie de T qui est un arbre. L'ensemble des arbres sur E est noté $\mathcal{T}(E)$ ou plus rapidement $\mathcal{T}$ lorsque $E = \omega$.

Si $s, t \in T$ sont tels que $s \leqslant t$ et $|t| = |s| + 1$, on dit que t est un successeur de s ou que s est le prédécesseur de t. L'ensemble des successeurs de s se note s^+ tandis que le prédécesseur de t se note t^-. Les feuilles de T sont les éléments de T sans successeur. L'ensemble T' égal à T privé de ses feuilles est appelé le premier effeuillé de T. C'est un sous-arbre de T. On peut itérer transfiniment cette dérivation (et définir ainsi les α-èmes effeuillés de T pour tout ordinal α) :

$$T^{(0)} = T, \quad T^{(\alpha+1)} = \left(T^{(\alpha)}\right)' \quad \text{et, lorsque } \alpha \text{ est un ordinal limite, } T^{(\alpha)} = \bigcap_{\beta<\alpha} T^{(\beta)}.$$

La hauteur de T est alors le plus petit ordinal (s'il existe) $\alpha < \omega_1$ tel que le α-ème effeuillé de T soit vide. On la note $ht(T)$. Lorsque cet ordinal n'existe pas, on écrit $ht(T) = \infty$ (ou, de façon équivalente $ht(T) = \omega_1$ lorsque E est dénombrable puisqu'une considération évidente de cardinal montre alors que si la hauteur existe, elle est dénombrable).

A toute partie coanalytique d'un espace borélien standard, on peut associer un Π^1_1-rang. Il s'agit d'une application à valeurs ordinales ayant un certain nombre de propriétés dont la proposition suivante ne précise que les plus utiles.

Proposition 11 (cf p. 140 de [38]) :

Soit C une partie coanalytique d'un espace borélien standard B et soit r un Π^1_1-rang pour C. Les assertions suivantes sont vérifiées :

- $\forall x \in B, \quad x \in C \iff r(x) < \omega_1$.
- *Pour tout ordinal dénombrable ξ, l'ensemble $C_\xi = r^{-1}(\xi)$ est borélien.*
- *Tout partie analytique de C est incluse dans l'un des ensembles C_ξ avec $\xi < \omega_1$.*

Un exemple fondamental d'ensemble coanalytique non borélien est l'ensemble des arbres bien fondés sur ω. Une branche d'un arbre T est une partie finie ou infinie $\{b_1, \ldots, b_n, \ldots\}$ de T telle que, pour tout i, on ait $b_{i+1} \in b_i^+$. Lorsqu'un arbre T ne possède aucune branche infinie, on dit que T est bien fondé et on écrit $T \in WF$. Dans le cas contraire, T est dit mal fondé. On peut démontrer l'équivalence suivante dans $\mathcal{T}$:

$$T \in WF \iff ht(T) < \omega_1.$$

En munissant l'ensemble $\mathcal{P}(\omega^{<\omega})$ de la topologie-produit naturelle, l'ensemble $\mathcal{T}$ des arbres sur ω apparaît comme un espace compact métrisable. Sa tribu de Borel fait de lui un espace borélien standard. Dans cette structure, l'ensemble WF est un coanalytique non borélien dont ht est un Π^1_1-rang.

5.1.4 Structure borélienne d'Effros

Soit E un espace polonais (c'est-à-dire dont la topologie est séparable et engendrée par une métrique complète). Soit Ω une base dénombrable de la topologie de E. L'ensemble $\mathcal{F}$ des fermés de E est muni d'une structure borélienne standard appelée structure borélienne d'Effros et engendrée par les ensembles

$$\{F \in \mathcal{F}\ ;\ F \cap \Omega \neq \varnothing\} \quad \text{où } \Omega \text{ décrit } \mathcal{O}.$$

La structure borélienne ainsi obtenue ne dépend pas de la base $\mathcal{O}$ choisie.

Bien que cela ne serve pas par la suite, on peut remarquer qu'un théorème de J. Saint-Raymond [56] prouve que la structure borélienne d'Effros est un espace borélien standard si et seulement si E est réunion d'une partie polonaise et d'une famille dénombrable de compacts.

Soit maintenant X un espace de Banach. Lorsque F est un sous-espace vectoriel fermé (ou plus rapidement un sous-espace) de X, on écrit $F \subseteq X$. L'ensemble des sous-espaces de X est appelé grassmannienne de X. On le notera $\mathcal{G}(X)$. Lorsque X est séparable, on peut munir l'ensemble $\mathcal{F}$ de ses fermés de sa structure borélienne d'Effros. La grassmannienne $\mathcal{G}(X)$ est alors un borélien de $\mathcal{F}$ et hérite de sa structure borélienne standard.

Parler sans plus de commentaire de la « classe des espaces de Banach séparables » pose un problème ensembliste. Ce problème est levé généralement de deux manières.

Un espace universel est un espace de Banach séparable contenant isométriquement tous les espaces de Banach séparables. Dans la suite, on fixe un espace universel E (par exemple $E = C(\Delta)$) et on considère la grassmannienne $\mathcal{G}(E)$ comme « l'ensemble » des espaces de Banach séparables. On écrit donc $\mathcal{G}(E) = \mathcal{S}$.

L'autre solution, qui n'a pas été retenue ici (mais qui mène aux mêmes résultats) serait de considérer $\mathcal{S}$ comme l'ensemble $\mathcal{Q}(\ell_1)$ des quotients linéaires de ℓ_1.

Lorsqu'on étudie une relation binaire entre espaces de Banach séparables, il est toujours sous-entendu qu'il s'agit de la relation induite sur la grassmanienne $\mathcal{G}(E)$.

Dans le prolongement des travaux de B. Bossard qui a démontré [10] que les relations $\simeq$ et $\twoheadrightarrow$ entre espaces de Banach séparables étaient analytiques vraies, nous montrons que les relations $\sim_U$, $\sim_R$ et $\twoheadrightarrow_U$ sont analytiques tandis que $\sim_L$ et $\twoheadrightarrow_L$ sont analytiques vraies. Nous conjecturons que les relations $\sim_U$, $\sim_R$ et $\twoheadrightarrow_U$ sont également non boréliennes.

5.2 Analyticité des relations non linéaires entre espaces de Banach séparables

Afin de démontrer que les relations considérées sont analytiques, il faut se ramener à des suites. Dans ce but, introduisons quelques notations :

Soit $\underline{x}$ et $\underline{y}$ deux suites de vecteurs.
- Lorsque tous les éléments de $\underline{x}$ sont dans X, on note $\underline{x} \subset X$.
- Soit $\eta \geqslant 0$. Lorsque tout élément de X est à distance inférieure ou égale à η de $\{x_n \ ; \ n \in \omega\}$, on écrit $X \subset \underline{x}[\eta]$. Avec ces notations, la suite $\underline{x}$ est dense dans X si et seulement si $\underline{x} \subset X \subset \underline{x}[0]$.
- Lorsqu'il existe un entier $k > 0$ tel que deux termes distincts de la suite $\underline{x}$ sont à une distance supérieure ou égale à $1/k$, on note $\mathrm{E}(\underline{x})$.
- Lorsqu'il existe une constante $l \in \omega$ telle que

$$\forall n, p \in \omega, \quad \|y_n - y_p\| \leqslant l \, \|x_n - x_p\| \, ,$$

  on écrit $\mathrm{L}(\underline{x}, \underline{y})$.
- Lorsqu'on a

$$\forall q \in \omega^*, \ \exists k \in \omega^*, \ \forall n, p \in \omega, \qquad \|x_n - x_p\| \leqslant \frac{1}{k} \Longrightarrow \|y_n - y_p\| \leqslant \frac{1}{q},$$

  alors on note $\mathrm{U}(\underline{x}, \underline{y})$.
- Si φ est une injection croissante de ω dans ω, on désigne par $\underline{x}_\varphi$ la suite extraite $(x_{\varphi(n)})_{n \in \omega}$.
- On écrit $\Gamma(\underline{x}, \underline{y})$ lorsqu'il existe une constante $\gamma \in \mathbb{Q}_+^*$ telle que, pour tout triplet $(n, p, r) \in \omega^2 \times \mathbb{Q}_+^*$ vérifiant $\|y_n - y_p\| \leqslant r/\gamma$, il existe une suite extraite convergente $\underline{x}_\varphi \in B_X(x_n, r)^\omega$ telle que $\underline{y}_\varphi$ converge vers y_p.
- Enfin, on note $\Upsilon(\underline{x}, \underline{y})$ lorsque, pour tout $q \in \omega^*$, il existe $k \in \omega^*$ tel que, pour tout couple $(n, p) \in \omega^2$ vérifiant $\|y_n - y_p\| \leqslant 1/k$, il existe une suite extraite convergente $\underline{x}_\varphi \in B_X(x_n, 1/q)^\omega$ telle que la suite $\underline{y}_\varphi$ converge vers y_p.

Remarquons qu'il est inutile de préciser dans quel espace on calcule les distances puisque tous les espaces de Banach séparables sont supposés isométriquement plongés dans E. Le lemme 12 fait le lien entre ces notions et les relations non linéaires.

Lemme 12 :

Soit X et Y deux espaces de Banach séparables.

1. *X et Y ont des réseaux équivalents si et seulement s'il existe deux suites de vecteurs $\underline{x}$ et $\underline{y}$ et un nombre $\eta > 0$ tels que $\underline{x} \subset X \subset \underline{x}[\eta]$, $\underline{y} \subset Y \subset \underline{y}[\eta]$, $\mathrm{E}(\underline{x})$, $\mathrm{E}(\underline{y})$, $\mathrm{L}(\underline{x}, \underline{y})$ et $\mathrm{L}(\underline{y}, \underline{x})$.*
2. *X et Y sont Lipschitz-homéomorphes si et seulement s'il existe deux suites de vecteurs $\underline{x}$ et $\underline{y}$ denses dans X et Y respectivement telles que $\mathrm{L}(\underline{x}, \underline{y})$ et $\mathrm{L}(\underline{y}, \underline{x})$.*
3. *X et Y sont uniformément homéomorphes si et seulement s'il existe deux suites de vecteurs $\underline{x}$ et $\underline{y}$ denses dans X et Y respectivement telles que $\mathrm{U}(\underline{x}, \underline{y})$ et $\mathrm{U}(\underline{y}, \underline{x})$.*
4. *Y est un quotient lipschitzien de X si et seulement s'il existe deux suites de vecteurs $\underline{x}$ et $\underline{y}$ denses dans X et Y respectivement telles que $\mathrm{L}(\underline{x}, \underline{y})$ et $\Gamma(\underline{x}, \underline{y})$.*

5. *Y est un quotient uniforme de X si et seulement s'il existe deux suites de vecteurs $\underline{x}$ et $\underline{y}$ denses dans X et Y respectivement telles que* $\mathrm{U}(\underline{x},\underline{y})$ *et* $\Upsilon(\underline{x},\underline{y})$.

DÉMONSTRATION — La preuve de l'affirmation 1 est évidente. Les preuves des assertions 2 et 3 sont identiques. Le sens direct est trivial, la suite $\underline{y}$ étant simplement l'image par l'homéomorphisme d'une suite arbitraire $\underline{x}$ dense dans X. Pour la réciproque, supposons qu'il existe deux telles suites $\underline{x}$ et $\underline{y}$. La condition $\mathrm{L}(\underline{x},\underline{y})$ (respectivement $\mathrm{U}(\underline{x},\underline{y})$) asssure qu'il existe une unique application lipschitzienne (respectivement uniformément continue) f telle que $f(x_n) = y_n$ pour tout $n \in \omega$. Cette application est clairement bijective et sa réciproque est lipschitzienne (respectivement uniformément continue).

Montrons maintenant l'assertion 4. Considérons donc f une application l-lispchitzienne et γ-colipschitzienne de X sur Y. Choisissons une suite dense quelconque $\underline{x}$ dans X et définissons la suite $\underline{y}$ comme l'image de la suite $\underline{x}$ par l'application f. La densité de $\underline{y}$ et la propriété $\mathrm{L}(\underline{x},\underline{y})$ sont évidemment vérifiées. Par ailleurs, soit $n, p \in \omega$ et $r \in \mathbb{Q}_+^*$ tels que $\|y_p - y_n\| \leqslant r/\gamma$. Alors $y_p \in B_Y(f(x_n), r/\gamma) \subset f\left(B_X(x_n, r)\right)$ donc y_p possède un antécédent $x \in B_X(x_n, r)$. Il existe alors une suite extraite $\underline{x}_\varphi$ dans $B_X(x_n, r)$ qui converge vers x. Puisque f est continue, on a $\lim \underline{y}_\varphi = y_p$. Par conséquent, la propriété $\Gamma(\underline{x},\underline{y})$ est vérifiée.

Réciproquement, supposons que $\underline{x}$ et $\underline{y}$ sont deux suites denses respectivement dans X et Y telles que $\mathrm{L}(\underline{x},\underline{y})$ avec constante l et $\Gamma(\underline{x},\underline{y})$ avec constante γ. On peut définir sans équivoque l'unique application l-lipschitzienne f qui vérifie

$$\forall n \in \omega, \quad f(x_n) = y_n.$$

Il est clair que f a la propriété suivante :

$$\forall n, p \in \omega,\ \forall r \in \mathbb{Q}_+^*, \quad \|y_p - y_n\| \leqslant \frac{r}{\gamma} \quad \Longrightarrow \quad \exists x \in B_X(x_n, r),\ f(x) = y_p. \tag{5.1}$$

On va montrer que f est colipschitzienne avec $\gamma(f) \leqslant \gamma$ en deux étapes.

Fait 13 :

Pour chaque $x \in X$, $p \in \omega$, $r > 0$ et $\gamma' > \gamma$ vérifiant $\|y_p - f(x)\| \leqslant r/\gamma'$, il existe un vecteur $z \in B_X(x, r)$ tel que $f(z) = y_p$.

Soit $\underline{x}_\varphi$ une suite extraite de $\underline{x}$ convergeant vers x et vérifiant

$$\forall n \in \omega, \quad \left\|x - x_{\varphi(n)}\right\| \leqslant kr$$

où $k > 0$ est choisi tel que $Lk + 1/\gamma' \leqslant 1/\gamma'' < 1/\gamma$ avec $r\gamma/\gamma'' \in \mathbb{Q}$. Pour tout $n \in \omega$, on a l'inégalité $\left\|y_p - f\left(x_{\varphi(n)}\right)\right\| \leqslant r/\gamma''$. D'après (5.1), il existe $z_n \in B_X(x_{\varphi(n)}, \gamma r/\gamma'')$ tel que $f(z_n) = y_p$. Puisque $\underline{x}_\varphi$ tend vers x, on a $z_n \in B_X(x, r)$ à partir d'un certain rang. En choisissant $z = z_n$ pour n assez grand, on obtient bien le résultat du fait 13.

Le fait suivant achèvera la démonstration de l'assertion 4.

Fait 14 :

Soit $\gamma' > \gamma$. f est γ'-colipschitzienne.

Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\gamma'/(1+\varepsilon) > \gamma$. Soit $x \in X$, $y \in Y$ et $r > 0$ tels que $\|y - f(x)\| \leqslant r/\gamma'$. Soit $\underline{y}_\varphi$ une suite extraite de $\underline{y}$ tendant vers y et telle que

$$\left\|y - y_{\varphi(0)}\right\| \leqslant \frac{\varepsilon r}{2\gamma'} \quad \text{et} \quad \forall n \in \omega,\ \left\|y_{\varphi(n+1)} - y_{\varphi(n)}\right\| \leqslant \frac{\varepsilon r}{2^{n+1}\gamma'}.$$

Posons alors $z_0 = x$. On a $\left\|y_{\varphi(1)} - f(x)\right\| \leqslant r/\gamma' + \varepsilon r/(2\gamma')$ donc, d'après le fait 13, il existe z_1 tel que

$$\|z_1 - z_0\| \leqslant \frac{1+\varepsilon/2}{1+\varepsilon} r \quad \text{et} \quad f(z_1) = y_{\varphi(1)}.$$

Par récurrence, on peut ensuite construire une suite $\underline{z}$ telle que

$$\forall n \geqslant 1, \quad \|z_{n+1} - z_n\| \leqslant \frac{2^{-n-1}\varepsilon}{1+\varepsilon} r \quad \text{et} \quad f(z_n) = y_{\varphi(n)}.$$

Soit alors $z = \lim \underline{z}$. On voit immédiatement que $\|z - x\| \leqslant r$ et $f(z) = y$, ce qui prouve que f est γ'-colipschitzienne et achève la preuve.

La preuve de l'assertion 5 est tout à fait similaire à celle de l'affirmation 4. Elle suit les mêmes étapes avec des changements mineurs. Elle est donc omise. □

Dans le lemme suivant, il est prouvé que chacune des conditions précédemment introduites définit un ensemble analytique.

Lemme 15 :

1. *L'ensemble* $\mathcal{A}_1 = \{\underline{x} \in E^\omega\ ;\ \mathrm{E}(\underline{x})\}$ *est borélien.*
2. *L'ensemble* $\mathcal{A}_2 = \{(X, \underline{x}) \in \mathcal{S} \times E^\omega\ ;\ \underline{x} \subset X\}$ *est borélien.*
3. *Soit* $\eta \geqslant 0$. *L'ensemble* $\mathcal{A}_3 = \{(X, \underline{x}) \in \mathcal{S} \times E^\omega\ ;\ X \subset \underline{x}[\eta]\}$ *est borélien.*
4. *L'ensemble* $\mathcal{A}_4 = \{(\underline{x}, \underline{y}) \in (E^\omega)^2\ ;\ \mathrm{L}(\underline{x}, \underline{y})\}$ *est borélien.*
5. *L'ensemble* $\mathcal{A}_5 = \{(\underline{x}, \underline{y}) \in (E^\omega)^2\ ;\ \mathrm{U}(\underline{x}, \underline{y})\}$ *est borélien.*
6. *L'ensemble* $\mathcal{A}_6 = \{(\underline{x}, \underline{y}) \in (E^\omega)^2\ ;\ \Gamma(\underline{x}, \underline{y})\}$ *est analytique.*
7. *L'ensemble* $\mathcal{A}_7 = \{(\underline{x}, \underline{y}) \in (E^\omega)^2\ ;\ \Upsilon(\underline{x}, \underline{y})\}$ *est analytique.*

Avant de démontrer ce lemme, introduisons quelques notations complémentaires.

- Soit $\mathcal{G} = \mathcal{P}_\infty(\omega)^{\omega\times\omega\times\mathbb{Q}_+^*}$ et $\mathcal{H} = \mathcal{P}_\infty(\omega)^{\omega^2\times(\omega^*)^2}$. L'ensemble $\mathcal{P}_\infty(\omega)$ étant un borélien du compact 2^ω, c'est un espace borélien standard. Il en est de même de $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$.
- Soit $\underline{x}$ et $\underline{y}$ deux suites de vecteurs et $W \in \mathcal{G}$. On écrit $C(\underline{x}, \underline{y}, W)$ pour signifier que la condition $\Gamma(\underline{x}, \underline{y})$ est vérifiée en choisissant comme extraction φ (dépendant de n, p et r) celle qui énumère les éléments de $W_{n,p,r}$, ce qui revient à dire qu'il existe $\gamma \in \mathbb{Q}_+^*$ tel que, pour tous $n, p \in \omega$ et $r > 0$ vérifiant $\|y_n - y_p\| \leqslant r/\gamma$, on ait :

$$\forall m \in W_{n,p,r},\ \|x_m - x_n\| \leqslant r \quad \text{et}$$

$$\forall q \in \omega^*, \quad \exists Q \in \mathcal{P}_f(\omega), \quad \forall m, m' \in W_{n,p,r} \backslash Q, \quad \|x_{m'} - x_m\| + \|y_m - y_p\| \leqslant \frac{1}{q}.$$

- Soit $\underline{x}$ et $\underline{y}$ deux suites de vecteurs et $W \in \mathcal{H}$. On écrit $\mathrm{Y}(\underline{x}, \underline{y}, W)$ pour signifier que la condition $\Upsilon(\underline{x}, \underline{y})$ est vérifiée en choisissant comme extraction φ (dépendant de n, p, q et k) celle qui énumère les éléments de $W_{n,p,q,k}$, ce qui revient à dire que, pour tout $q \in \omega^*$, il existe $k \in \omega^*$ tel que, pour tous $n, p \in \omega$ vérifiant $\|y_n - y_p\| \leqslant 1/k$, on ait :

$$\forall m \in W_{n,p,q,k},\ \|x_m - x_n\| \leqslant \frac{1}{q} \quad \text{et}$$

$$\forall j \in \omega^*, \quad \exists Q \in \mathcal{P}_f(\omega), \quad \forall m, m' \in W_{n,p,q,k} \backslash Q, \quad \|x_{m'} - x_m\| + \|y_m - y_p\| \leqslant \frac{1}{j}.$$

DÉMONSTRATION — Montrons l'assertion 1. L'ensemble $\mathcal{A}_1$ s'écrivant

$$\bigcup_{k\in\omega^*}\bigcap_{n\neq p}\left\{\underline{x}\ ;\ \|x_n-x_p\|\geqslant\frac{1}{k}\right\},$$

il est manifestement borélien.

Montrons l'assertion 2. Introduisons $\mathcal{O}$ une base dénombrable d'ouverts de la topologie normique de E. La condition $\underline{x}\subset X$ équivaut à :

$$\forall n\in\omega,\quad \forall\Omega\in\mathcal{O},\quad \Big[x_n\in\Omega\Big]\Longrightarrow\Big[X\cap\Omega\neq\varnothing\Big].$$

Par conséquent, on a :

$$\mathcal{A}_2=\bigcap_{n\in\omega}\bigcap_{\Omega\in\mathcal{O}}\Big(\Big\{(X,\underline{x})\ ;\ x_n\notin\Omega\Big\}\cup\Big\{(X,\underline{x})\ ;\ X\cap\Omega\neq\varnothing\Big\}\Big)$$

ce qui prouve que A_2 est borélien.

Montrons l'assertion 3. La condition $X\subset\underline{x}[\eta]$ équivaut à :

$$\forall\Omega\in\mathcal{O},\quad\Big[X\cap\Omega\neq\varnothing\Big]\Longrightarrow\Big[\exists n\in\omega,\ d(x_n,\Omega)\leqslant\eta\Big].$$

Par conséquent, on peut écrire $\mathcal{A}_3$ de la façon suivante :

$$\mathcal{A}_3=\bigcap_{\Omega\in\mathcal{O}}\Big(\Big\{(X,\underline{x})\ ;\ X\cap\Omega=\varnothing\Big\}\cup\bigcup_{n\in\omega}\Big\{(X,\underline{x})\ ;\ d(x_n,\Omega)\leqslant\eta\Big\}\Big)$$

d'où il résulte que $\mathcal{A}_3$ est borélien.

Montrons l'assertion 4. On peut écrire $\mathcal{A}_4$ de la façon suivante :

$$\mathcal{A}_4=\bigcup_{l\in\omega}\bigcap_{n,p\in\omega}\Big\{(\underline{x},\underline{y})\ ;\ \|y_n-y_p\|\leqslant l\,\|x_n-x_p\|\Big\}.$$

Cette forme montre que $\mathcal{A}_4$ est borélien.

Montrons l'assertion 5. On a :

$$\mathcal{A}_5=\bigcap_{q\in\omega^*}\bigcup_{k\in\omega^*}\bigcap_{n,p\in\omega}\left[\left\{(\underline{x},\underline{y})\ ;\ \|x_n-x_p\|>\frac{1}{k}\right\}\cup\left\{(\underline{x},\underline{y})\ ;\ \|y_n-y_p\|\leqslant\frac{1}{q}\right\}\right],$$

ce qui prouve que $\mathcal{A}_5$ est borélien.

Montrons l'assertion 6. Il est clair que la condition $\Gamma(\underline{x},\underline{y})$ est remplie si et seulement s'il existe $W\in\mathcal{G}$ tel que la condition $C(\underline{x},\underline{y},W)$ soit vérifiée. Comme $\mathcal{G}$ est un espace borélien standard, pour démontrer que $\mathcal{A}_6$ est analytique, il suffit de montrer que

$$\mathcal{A}_6'=\{(\underline{x},\underline{y},W)\in(E^\omega)^2\times\mathcal{G}\ ;\ C(\underline{x},\underline{y},W)\}$$

est borélien. Or on peut écrire $\mathcal{A}_6'$ comme la réunion selon $\gamma\in\mathbb{Q}_+^*$ des intersections selon $(n,p,r)\in\omega^2\times\mathbb{Q}_+^*$ des ensembles

$$A_{n,p,r,\gamma}\cup\left[\bigcap_{m\in\omega}\Big[B_{m,n,p,r}\cup C_{m,n,r}\Big]\cap\left(\bigcap_{q\in\omega^*}\bigcup_{Q\in\mathcal{P}_f(\omega)}\bigcap_{m,m'\in\omega\setminus Q}\Big[D_{m,m',n,p,r}\cup E_{m,m',q,p}\Big]\right)\right]$$

où l'on a posé :

$$\begin{aligned}
A_{n,p,r,\gamma} &= \left\{(\underline{x},\underline{y},W) \in (E^\omega)^2 \times \mathcal{G} \ ; \ \|y_n - y_p\| > \tfrac{r}{\gamma}\right\} \\
B_{m,n,p,r} &= \left\{(\underline{x},\underline{y},W) \in (E^\omega)^2 \times \mathcal{G} \ ; \ m \notin W_{n,p,r}\right\} \\
C_{m,n,r} &= \left\{(\underline{x},\underline{y},W) \in (E^\omega)^2 \times \mathcal{G} \ ; \ \|x_m - x_n\| \leqslant r\right\} \\
D_{m,m',n,p,r} &= \left\{(\underline{x},\underline{y},W) \in (E^\omega)^2 \times \mathcal{G} \ ; \ m \notin W_{n,p,r} \quad \text{ou} \quad m' \notin W_{n,p,r}\right\} \\
E_{m,m',q,p} &= \left\{(\underline{x},\underline{y},W) \in (E^\omega)^2 \times \mathcal{G} \ ; \ \|x_{m'} - x_m\| + \|y_m - y_p\| \leqslant \tfrac{1}{q}\right\}.
\end{aligned}$$

Les cinq ensembles ainsi définis sont manifestement boréliens donc l'ensemble $\mathcal{A}'_6$ est borélien et $\mathcal{A}_6$ est analytique.

Montrons l'assertion 7. La condition $\Upsilon(\underline{x},\underline{y})$ est remplie si et seulement s'il existe $W \in \mathcal{H}$ tel que la condition $\mathrm{Y}(\underline{x},\underline{y},W)$ soit vérifiée. Comme $\mathcal{H}$ est un espace borélien standard, pour montrer que $\mathcal{A}_7$ est analytique, il suffit de montrer que

$$\mathcal{A}'_7 = \{(\underline{x},\underline{y},W) \in (E^\omega)^2 \times \mathcal{H} \ ; \ \mathrm{Y}(\underline{x},\underline{y},W)\}$$

est borélien. Or $\mathcal{A}'_7$ s'écrit comme l'intersection selon $q \in \omega^*$ de la réunion selon $k \in \omega^*$ des intersections selon $(n,p) \in \omega^2$ des ensembles

$$A_{n,p,k} \cup \left[\bigcap_{m\in\omega}\left[B_{m,n,p,q,k} \cup C_{m,n,q}\right] \cap \left(\bigcap_{j\in\omega^*} \bigcup_{Q\in\mathcal{P}_f(\omega)} \bigcap_{m,m'\in\omega\setminus Q}\left[D_{m,m',n,p,q,k} \cup E_{m,m',p,j}\right]\right)\right]$$

où l'on a posé :

$$\begin{aligned}
A_{n,p,k} &= \left\{(\underline{x},\underline{y},W) \in (E^\omega)^2 \times \mathcal{H} \ ; \ \|y_n - y_p\| > \tfrac{1}{k}\right\} \\
B_{m,n,p,q,k} &= \left\{(\underline{x},\underline{y},W) \in (E^\omega)^2 \times \mathcal{H} \ ; \ m \notin W_{n,p,q,k}\right\} \\
C_{m,n,q} &= \left\{(\underline{x},\underline{y},W) \in (E^\omega)^2 \times \mathcal{H} \ ; \ \|x_m - x_n\| \leqslant \tfrac{1}{q}\right\} \\
D_{m,m',n,p,q,k} &= \left\{(\underline{x},\underline{y},W) \in (E^\omega)^2 \times \mathcal{H} \ ; \ m \notin W_{n,p,q,k} \quad \text{ou} \quad m' \notin W_{n,p,q,k}\right\} \\
E_{m,m',p,j} &= \left\{(\underline{x},\underline{y},W) \in (E^\omega)^2 \times \mathcal{H} \ ; \ \|x_{m'} - x_m\| + \|y_m - y_p\| \leqslant \tfrac{1}{j}\right\}.
\end{aligned}$$

Comme tous ces ensembles sont boréliens, $\mathcal{A}'_7$ est borélien et $\mathcal{A}_7$ est analytique. □

Grâce à ces préliminaires, l'analyticité des relations non linéaires entre espaces de Banach séparables se démontre aisément.

Théorème 16 :
Les relations binaires $\sim_L$, $\sim_U$, $\sim_R$, $\twoheadrightarrow_L$ et $\twoheadrightarrow_U$ sont analytiques.

Démonstration — D'après le lemme 12, l'ensemble $\{(X,Y) \in \mathcal{S}^2 \ ; \ X \twoheadrightarrow_L Y\}$ est la projection sur les deux premières coordonnées de l'ensemble

$$\{(X,Y,\underline{x},\underline{y}) \ ; \ \underline{x} \subset X \subset \underline{x}[0], \ \underline{y} \subset Y \subset \underline{y}[0], \ \mathrm{L}(\underline{x},\underline{y}), \ \Gamma(\underline{y},\underline{x})\}.$$

D'après le lemme 15, cet ensemble est analytique. Par conséquent, la relation $\twoheadrightarrow_L$ est analytique. La démonstration est totalement similaire pour les autres relations. □

5.3 Analyticité vraie

L'objet de ce paragraphe est de démontrer que les relations binaires $\sim_L$ et $\twoheadrightarrow_L$ sont non boréliennes. Pour ce faire, il suffit de trouver une classe non borélienne de $\sim_L$ et $\twoheadrightarrow_L$, c'est-à-dire un espace de Banach X_o tel que $\{X \in \mathcal{S}\ ;\ X \sim_L X_o\}$ et $\{X \in \mathcal{S}\ ;\ X \twoheadrightarrow_L X_o\}$ sont non boréliens. Pour trouver un tel espace X_o, on utilise une construction due à Bossard. On lira [9] ou [10] pour plus de détails.

Théorème 17 (Pełczyński) :

Il existe un espace universel U muni d'une base de Schauder $\underline{u} = (u_i)_{i\in\omega}$ telle que, pour toute suite basique $\underline{x}$ dans un espace de Banach X, il existe une sous-suite $\underline{u}_\varphi$ de $\underline{u}$ équivalente à $\underline{x}$ et telle que la projection naturelle sur $\overline{\text{vect}}\{u_{\varphi(i)}\ ;\ i \in \omega\}$ est bornée. De plus, U est, à isomorphisme près, le seul espace de Banach séparable contenant une copie complémentée de chaque espace de Banach séparable à base.

Cet espace a été construit par A. Pełczyński [51] (voir également la démonstration de G. Schechtman [58], le théorème 2.d.10 de [46] et l'appendice 1 de [9]). A partir de U_2, B. Bossard a introduit les espaces $U_2(T)$ pour $T \in \mathcal{T}$ dont il a démontré qu'ils étaient réflexifs si $T \in WF$ et isomorphes à U_2 sinon. La définition et le théorème suivants regroupent ces résultats.

Définition :

- Notons $c_{oo}(\omega^{<\omega})$ l'ensemble des fonctions de $\omega^{<\omega}$ dans $\mathbb{R}$ dont le support est fini.
- Pour $s \in \omega^{<\omega}$, soit χ_s la fonction caractéristique du singleton $\{s\}$, c'est-à-dire $\chi_s(t) = 1$ si $t = s$ et $\chi_s(t) = 0$ si $t \neq s$. L'espace $c_{oo}(\omega^{<\omega})$ est l'enveloppe vectorielle algébrique de $\{\chi_s\ ;\ s \in \omega^{<\omega}\}$.
- Un intervalle de $\omega^{<\omega}$ est une partie finie ou infinie $\{s_1, s_2, \ldots\}$ où $s_{i+1} \in s_i^+$ pour chaque i. Un *choix admissible d'intervalles* de $\omega^{<\omega}$ est un ensemble fini J d'intervalles de $\omega^{<\omega}$ tel que toute branche infinie de $\omega^{<\omega}$ rencontre au plus un de ces intervalles. Notons $\mathcal{J}$ l'ensemble des choix admissibles d'intervalles de $\omega^{<\omega}$.
- On munit $c_{oo}(\omega^{<\omega})$ de la norme suivante :

$$|||y||| = \sup_{J\in\mathcal{J}} \left(\sum_{I\in J} \left\| \sum_{s\in I} y(s) u_{|s|} \right\|_U^2 \right)^{1/2},$$

  où l'espace U et la suite $\underline{u}$ sont ceux du théorème précédent. Le complété de $c_{oo}(\omega^{<\omega})$ pour cette norme est noté U_2.
- Si $T \in \mathcal{T}$ est un arbre, $U_2(T)$ désigne le sous-espace $\overline{\text{vect}}\{\chi_s\ ;\ s \in T\}$ de U_2.

Théorème 18 (Bossard) :

Soit T un arbre.

- *Si T est bien fondé, alors $U_2(T)$ est réflexif.*
- *Si T est mal fondé, alors $U_2(T)$ est isomorphe à U_2.*

Par ailleurs, l'application $\Theta : \begin{cases} \mathcal{T} & \to & \mathcal{S} \\ T & \mapsto & U_2(T) \end{cases}$ *est borélienne.*

On en déduit directement le résultat sur les homéomorphismes et quotients lipschitziens.

Théorème 19 :
Les relations binaires $\sim_L$ et $\twoheadrightarrow_L$ sont analytiques vraies.

DÉMONSTRATION — Il reste seulement à montrer qu'elles sont non boréliennes. Raisonnons par l'absurde en supposant que $\sim_L$ [resp. $\twoheadrightarrow_L$] est borélienne. Alors, l'ensemble $\{X \in \mathcal{S}\ ;\ X \sim_L U_2\}$ [resp. $\{X \in \mathcal{S}\ ;\ X \twoheadrightarrow_L U_2\}$] est borélien. Par conséquent, il en est de même de $\{T \in \mathcal{T}\ ;\ U_2(T) \sim_L U_2\}$ [resp. de $\{T \in \mathcal{T}\ ;\ U_2(T) \twoheadrightarrow_L U_2\}$] puisque Θ est une application borélienne. Or, si $T \in \mathcal{T}$ est mal fondé, alors $U_2(T)$ et U_2 sont isomorphes donc Lipschitz-homéomorphes [resp. $U_2(T) \twoheadrightarrow_L U_2$]. Si T est bien fondé, alors $U_2(T)$ est réflexif. En particulier, $U_2(T)^*$ est séparable. D'après le théorème 3.18 de [6] (voir le théorème 23), il s'ensuit que tout espace Lipschitz-homéomorphe à $U_2(T)$ [resp. tout quotient lipschitzien de $U_2(T)$] a un dual séparable. Or, U_2 étant universel, U_2^* n'est pas séparable donc U_2 n'est pas Lipschitz-homéomorphe à $U_2(T)$ [resp. n'est pas un quotient lipschitzien de $U_2(T)$]. Par conséquent, il vient :

$$\{T \in \mathcal{T}\ ;\ \Theta(T) \sim_L U_2\} = \{T \in \mathcal{T}\ ;\ U_2(T) \twoheadrightarrow_L U_2\} = WF.$$

Comme WF est non borélien, on obtient une contradiction. □

Complétons cette partie par une remarque sur la complexité combinatoire de la relation d'homéomorphisme lipschitzien. La notion de complexité combinatoire d'une relation d'équivalence repose sur une relation d'ordre tenant compte de la structure borélienne (voir p. 15 de [29]).

Définition :

- Soit $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ deux relations d'équivalence sur des espaces boréliens standards B et B'. On dit que $\mathcal{R}$ se réduit boréliennement à $\mathcal{R}'$ et on note $\mathcal{R} \leqslant_B \mathcal{R}'$ lorsqu'il existe une application $f : B \to B'$ borélienne telle que

$$\forall x, y \in B, \quad x\,\mathcal{R}\,y \iff f(x)\,\mathcal{R}'\,f(y).$$

  Il s'agit d'une relation d'ordre sur les relations d'équivalence qui permet de discerner laquelle est la plus complexe combinatoirement. En effet, dire par exemple qu'une relation $\mathcal{R}$ se réduit boréliennement à l'égalité sur ω veut simplement dire que le calcul borélien d'un entier code intégralement la relation d'équivalence. Elle est donc très simple combinatoirement.
- Un peu plus complexe est la relation E_0 définie sur 2^ω par :

$$\forall s, t \in 2^\omega, \quad s\,E_0\,t \iff \exists n \in \omega,\ \forall m \geqslant n,\ s_m = t_m.$$

- La relation E_1 est définie sur $(2^\omega)^\omega$ par :

$$\forall \alpha, \beta \in (2^\omega)^\omega, \quad \alpha\,E_1\,\beta \iff \exists n \in \omega,\ \forall m \geqslant n,\ \alpha_m = \beta_m.$$

- Soit G un groupe polonais et B un espace borélien-standard. On dit que G agit boréliennement sur B lorsqu'il existe une action

$$\alpha : \left\{ \begin{array}{ccc} G \times B & \to & B \\ (g, b) & \mapsto & g \cdot b \end{array} \right.$$

  telle que l'application α soit borélienne. La relation induite par l'action de G sur B est la relation suivante :

$$x\,E_G^B\,y \iff \exists g \in G, \quad y = g \cdot x.$$

Lorsqu'il existe un groupe polonais G et un espace borélien standard B tels que la relation $\mathcal{R}$ se réduise boréliennement à E_G^B, on dit que $\mathcal{R}$ est réductible à une action de groupe. La réductibilité à une action de groupe est un critère de simplicité combinatoire de la relation. En effet, si $\mathcal{R}$ se réduit boréliennement à $\mathcal{R}'$ et que $\mathcal{R}'$ est réductible à une action de groupe, alors il en est de même de $\mathcal{R}$.

– Notons $(t_i)_{i\in\omega}$ la base canonique de l'espace de Tsirelson T et $(t_i^*)_{i\in\omega}$ sa base duale. Pour $A \subset \omega$, on écrit $X_A = \overline{\text{vect}}\,\{t_i\ ;\ i \in A\}$ et $Y_A = \overline{\text{vect}}\,\{t_i^*\ ;\ i \in A\}$.

La relation E_1, bien que borélienne, est de complexité combinatoire assez élevée. En effet, le théorème 4.2 de [39] de Kechris et Louveau montre que E_1 n'est pas réductible à une action de groupe.

Théorème 20 (Rosendal) :
Il existe une application borélienne f de $(2^\omega)^\omega$ dans $\mathcal{P}(\omega)$ telle que les assertions suivantes soient équivalentes pour tous $\alpha, \beta \in (2^\omega)^\omega$:

1. $Y_{f(\alpha)} \simeq Y_{f(\beta)}$.
2. *Les suites basiques $(t_i^*)_{i\in f(\alpha)}$ et $(t_i^*)_{i\in f(\beta)}$ sont équivalentes.*
3. $\alpha\, E_1\, \beta$.

Ce théorème, dû à C. Rosendal [55] montre en particulier que E_1 se réduit boréliennement à la relation d'isomorphisme entre espaces de Banach séparables.

Théorème 21 (Lindenstrauss et Preiss) :
Soit A une partie de ω. Si Y est un espace de Banach Lipschitz-homéomorphe à X_A, alors Y est isomorphe à X_A.

Ce résultat est une conséquence directe de la proposition 4.4 et du corollaire 3.12 de [45] dus à J. Lindenstrauss et D. Preiss.

Puisque la base canonique de l'espace de Tsirelson est inconditionnelle, X_A^* et Y_A sont isomorphes. Comme T est réflexif, il en est de même de ses sous-espaces donc X_A est isomorphe à X_B si et seulement si Y_A est isomorphe à Y_B. On en déduit le résultat suivant :

Proposition 22 :
Il existe une application borélienne $f : (2^\omega)^\omega \to \mathcal{P}(\omega)$ telle que, quels que soient α et β dans $(2^\omega)^\omega$, les espaces $X_{f(\alpha)}$ et $X_{f(\beta)}$ sont Lipschitz-homéomorphes si et seulement si $\alpha\, E_1\, \beta$.

Cette proposition montre que E_1 se réduit boréliennement à $\sim_L$. En particulier, la relation $\sim_L$ est non réductible à une action de groupes, c'est-à-dire qu'il n'existe aucun groupe polonais agissant boréliennement sur la grasmannienne de E en envoyant chaque sous-espace sur l'ensemble des espaces qui lui sont Lipschitz-homéomorphes.

Chapitre 6

Conservation des indices par les relations non linéaires

6.1 Indices de dérivation

6.1.1 Définition des indices

Soit X un espace de Banach et C une partie de X. On se donne un nombre $\varepsilon > 0$ et une collection τ d'ouverts de X. Le *ε-dérivé de C relatif à τ* est la partie

$$D_{\varepsilon,\tau}(C) = \Big\{x \in C \ ; \ [x \in A \in \tau] \Rightarrow [\mathrm{diam}(A \cap C) \geqslant \varepsilon]\Big\}.$$

L'opérateur $D_{\varepsilon,\tau}$ peut être itéré transfiniment en posant, pour tout ordinal α :

$$D^0_{\varepsilon,\tau}(C) = C, \quad D^{\alpha+1}_{\varepsilon,\tau}(C) = D_{\varepsilon,\tau}\left(D^{\alpha}_{\varepsilon,\tau}(C)\right)$$
$$\text{et, si } \alpha \text{ est un ordinal limite,} \quad D^{\alpha}_{\varepsilon,\tau}(C) = \bigcap_{\beta<\alpha} D^{\beta}_{\varepsilon,\tau}(C).$$

Lorsqu'il existe des ordinaux α tels que $D^{\alpha}_{\varepsilon,\tau}(C) = \varnothing$, on notera $I_{\varepsilon,\tau}(C)$ le plus petit d'entre eux. Dans le cas contraire, on écrira $I_{\varepsilon,\tau}(C) = \infty$ (c'est une convention, le symbole ∞ étant simplement supposé supérieur à tous les ordinaux). Cet ordinal est appelé indice de C relatif à τ et à ε. La borne supérieure des $I_{\varepsilon,\tau}(C)$ lorsque $\varepsilon > 0$ varie est notée $I_{\tau}(C)$ et appelée indice de C relatif à τ.

Les dérivations usuelles et les indices correspondants sont tous construits selon ce modèle.

Indice de dentabilité

Il est obtenu selon la construction précédente en choisissant $C = B_X$ et τ égal à la collection des demi-espaces affines ouverts de X, c'est-à-dire des ensembles de la forme

$$\{x \in X \ ; \ \langle x^*, x\rangle < m\}$$

où $x^* \in X^*$ et $m \in \mathbb{R}$. Les dérivés de la boule, nommés « dérivés édentés » sont notés $(B_X)^{(\alpha)}_{\varepsilon}$ et les indices $\delta(X;\varepsilon)$ et $\delta(X)$.

Indice de dentabilité préfaible

Il est calculé dans l'espace dual X^* en choisissant $C = B_{X^*}$ et τ égal à la collection des demi-espaces affines préfaiblement ouverts de X^*, c'est-à-dire des ensembles de la forme

$$\{x^* \in X^* \ ; \ \langle x^*, x\rangle < m\}$$

où $x \in X$ et $m \in \mathbb{R}$. Les dérivés de la boule duale, appelés « dérivés édentés préfaibles » sont notés $(B_{X^*})_\varepsilon^\alpha$ et les indices $\delta^*(X;\varepsilon)$ et $\delta^*(X)$.

Indice de Szlenk

Il est calculé dans l'espace dual en choisissant $C = B_{X^*}$ et $\tau = *$ (rappelons que $*$ est la collection des ouverts préfaibles de X^*). Les ensembles $(B_{X^*})_\varepsilon^{[\alpha]}$ ainsi obtenus sont les « dérivés de Szlenk ». Les indices correspondants sont notés $\mathrm{Sz}\,(X;\varepsilon)$ et $\mathrm{Sz}\,(X)$.

6.1.2 Propriétés quantifiées par les indices

La Propriété d'Asplund :

L'indice de Szlenk et l'indice de dentabilité préfaible permettent de quantifier la propriété d'Asplund dont on rappelle ci-dessous des formes équivalentes dans le cas séparable.

Définition : Un espace d'Asplund est un espace de Banach dont tous les sous-espaces séparables ont un dual séparable.

Soit X un espace de Banach séparable. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. X est un espace d'Asplund.
2. X^* est séparable.
3. Etant donnés un ouvert convexe non vide Ω de X et une fonction convexe u définie sur Ω, u est différentiable au sens de Fréchet sur une partie résiduelle de Ω.
4. Etant donnés un ouvert non vide Ω de X et une fonction lipschitzienne u définie sur Ω et à valeurs réelles, il existe au moins un point en lequel u est différentiable au sens de Fréchet.
5. Toute norme équivalente sur X admet au moins un point de différentiabilité au sens de Fréchet.
6. Il existe une norme équivalente sur X différentiable au sens de Fréchet en tout point de S_X.
7. L'identité de B_{X^*} munie de la topologie préfaible dans B_{X^*} munie de la topologie normique est de première classe de Baire.
8. $\mathrm{Sz}\,(X) < \omega_1$.
9. $\delta^*(X) < \omega_1$.

L'assertion 2 est une reformulation évidente de la définition. L'assertion 3, souvent utilisée comme définition, lui est équivalente sans l'hypothèse que X est séparable (de même que 4). Pour sa démonstration, on se reportera au paragraphe I.5 de [16]. L'assertion 4 constitue un théorème très profond de D. Preiss. La démonstration originale [52] a été simplifiée [44] mais reste ardue. Les propositions 5 et 6 montrent que la propriété d'Asplund est une propriété de lissité. Elles sont démontrées dans les paragraphes I.5 et II.3 de [16]. Enfin, l'équivalence des trois dernières assertions avec la définition est prouvée dans [9].

Il est à noter que l'hypothèse de séparabilité de l'espace est très importante. Si on abandonne cette hypothèse, la situation devient plus complexe et seules demeurent les implications et équivalences suivantes :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 3 & & \\ & & & & \Updownarrow & & \\ 9 & \Rightarrow & 8 & \Rightarrow & 1 & \Leftarrow & 6 \\ & & & & \Updownarrow & & \\ & & & & 4 & \Leftrightarrow & 5 \end{array}$$

La propriété de Radon-Nikodým :

L'indice de dentabilité est associé à la propriété de Radon-Nikodým dont on rappelle la définition.

Définition : On dit que l'espace de Banach X jouit de la propriété de Radon-Nikodým lorsque, pour tout espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ et toute mesure vectorielle $\nu : \mathcal{M} \to X$, la continuité absolue de ν par rapport à μ implique l'existence d'une densité $f : \Omega \to X$ vérifiant

1. La fonction $\omega \mapsto \|f(\omega)\|_X$ est dans $L_1(\mu)$.
2. Pour tout $A \in \mathcal{M}$, on a :

$$\nu(A) = \int_A f(\omega)\, d\mu(\omega).$$

La propriété de Radon-Nikodým a de nombreuses formulations. Contentons-nous d'énumérer quelques équivalences qui seront utiles.

Chacune des assertions suivantes est équivalente à la propriété de Radon-Nikodým de l'espace X. Dans certain cas, l'équivalence annoncée n'est vraie que modulo une hypothèse supplémentaire. Celle-ci est alors précisée entre parenthèses.

1. Toute fonction lipschitzienne de $[0,1]$ dans X est différentiable en au moins un point.
2. Toute fonction lipschitzienne d'un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ dans X est différentiable presque partout au sens de Lebesgue.
3. Y est un espace d'Asplund ..... (lorsque $X = Y^*$)
4. Pour tout $\varepsilon > 0$ et pour toute partie convexe fermée C de B_X, il existe un demi-espace affine ouvert S tel que $S \cap C \neq \varnothing$ et $\operatorname{diam}(S \cap C) \leqslant \varepsilon$.
5. $\delta(X) < \omega_1$ ..... (lorsque X est séparable)

6.2 Contrôle universel des indices de dérivation

6.2.1 Propriété d'Asplund et indices duaux

L'objet de ce paragraphe est de préciser le résultat suivant de S.M. Bates, W.B. Johnson, J. Lindenstrauss et D. Preiss (théorème 3.18 de [6]) :

Théorème 23 (Bates, Johnson, Lindenstrauss, Preiss et Schechtman) :
Tout quotient lipschitzien d'un espace d'Asplund a la propriété d'Asplund.

Ceci implique bien sûr que la propriété d'Asplund est conservée par homéomorphisme lipschitzien. En revanche, elle n'est pas conservée par homéomorphisme uniforme puisque $\ell_1 \oplus \left(\bigoplus \ell_{1+1/n}\right)_{\ell_2}$ est uniformément homéomorphe à $\left(\bigoplus \ell_{1+1/n}\right)_{\ell_2}$.

Au regard de ce théorème et de l'équivalence entre la propriété d'Asplund et la dénombrabilité des indices $\delta^*(X)$ et $\mathrm{Sz}\,(X)$, il semble naturel de se demander si ces indices sont conservés par quotient lipschitzien. Cette question reste ouverte. Seuls des cas particuliers ont été traités.

- Pour tout espace de Banach X, la condition $\delta^*(X) = \omega$ équivaut à la super-réflexivité de X. Par ailleurs, d'après les résultats de S. Heinrich et P. Mankiewicz pour les homéomorphismes lipschitziens [28] généralisés aux quotients lipschitziens dans [6] par S.M. Bates, W.B. Johnson, J. Lindenstrauss, D. Preiss et G. Schechtman, la super-réflexivité est conservée par quotient lipschitzien.
- La condition $\mathrm{Sz}\,(X) = 1$ équivaut à $\dim X < \infty$. Elle est donc conservée par quotient lipschitzien.
- La condition $\mathrm{Sz}\,(X) = \omega$ admet une caractérisation en termes de renormage uniformément asymptotiquement lisse. Ceci permet de montrer que, si $\mathrm{Sz}\,(X) = \omega$ et que $X \sim_L Y$, alors $\mathrm{Sz}\,(Y) \leqslant \omega$ (voir [24]). On reviendra sur ce cas particulier dans la suite du chapitre.

L'application de la théorie descriptive des ensembles va permettre de donner un contrôle universel (mais non explicite) de l'indice $\mathrm{Sz}\,(Y)$ [resp. $\delta^*(Y)$] en fonction de $\mathrm{Sz}\,(X)$ [resp. $\delta^*(X)$] lorsque Y est un quotient lipschitzien de X.

Théorème 24 :

Il existe deux fonctions universelles $\psi_1 : \omega_1 \to \omega_1$ et $\psi_2 : \omega_1 \to \omega_1$ telles que, si X et Y sont des espaces de Banach, que l'indice de Szlenk de X est dénombrable et que $X \twoheadrightarrow_L Y$, alors :

$$\mathrm{Sz}\,(Y) \leqslant \psi_1(\mathrm{Sz}\,(X)) \quad \textit{et} \quad \delta^*(Y) \leqslant \psi_2(\delta^*(X)).$$

Démonstration — Dans [41] et [42], G. Lancien a montré l'existence d'une fonction $\psi : \omega_1 \to \omega_1$ telle que, si $\mathrm{Sz}\,(X) < \omega_1$, alors $\delta^*(X) \leqslant \psi(\mathrm{Sz}\,(X))$. Il suffit donc de montrer le résultat pour l'indice de Szlenk.

Lemme 25 :

Il existe une fonction universelle croissante $\psi_1 : \omega_1 \to \omega_1$ telle que, si X est un espace de Banach à dual séparable et que Y est un quotient lipschitzien de X, alors $\mathrm{Sz}\,(Y) \leqslant \psi_1(\mathrm{Sz}\,(X))$.

Démonstration du lemme 25 — Puisque l'indice de Szlenk est un invariant isomorphique, on peut raisonner avec des sous-espaces d'un espace universel E. Dans [10], B. Bossard prouve que l'ensemble A des sous-espaces de E dont le dual est séparable est une partie coanalytique de la grassmannienne $\mathcal{S}$ de E et que l'indice de Szlenk est un Π^1_1-rang pour A. Si $\xi < \omega_1$ est un ordinal, on note A_ξ l'ensemble des sous-espaces de E dont l'indice de Szlenk est inférieur ou égal à ξ. On désigne ensuite par P_ξ l'ensemble des sous-espaces de E qui sont quotient lipschitzien d'un élément de A_ξ. D'après le théorème 23, l'ensemble P_ξ est inclus dans A. Par ailleurs, comme Sz est un Π^1_1-rang pour A, l'ensemble A_ξ est borélien. D'après le théorème 16, l'ensemble $\{(X,Y) \in \mathcal{S}^2 \ ; \ X \in A_\xi \text{ et } X \twoheadrightarrow_L Y\}$ est analytique. Il en est de même de sa projection sur la deuxième coordonnée, c'est-à-dire de $P_\xi \subset A$. Utilisant à nouveau que Sz est un Π^1_1-rang pour A, on en déduit qu'il existe un ordinal minimal $\zeta < \omega_1$ tel que $P_\xi \subset S_\zeta$. Ceci permet de définir $\psi_1(\xi) = \zeta$. La fonction ψ ainsi définie est clairement croissante. Ceci conclut la preuve du lemme 25. □

Soit X et Y deux espaces de Banach tels que $\mathrm{Sz}\,(X) < \omega_1$. Soit f un quotient lipschitzien de X sur Y. D'après la proposition 4.12 de [42], lorsque la borne supérieure des indices de Szlenk des sous-espaces séparables de Y est dénombrable, celle-ci est égale à $\mathrm{Sz}\,(Y)$. Soit Y_o un sous-espace séparable arbitraire de Y. D'après le corollaire 3.17 de [6], il existe des sous-espaces séparables $X_1 \subseteq X$ et $Y_o \subseteq Y_1 \subseteq Y$ tels que f induise un quotient lipschitzien de X_1 sur Y_1. On peut alors appliquer le lemme 25 :

$$\mathrm{Sz}\,(Y_o) \leqslant \mathrm{Sz}\,(Y_1) \leqslant \psi_1(\mathrm{Sz}\,(X_1)) \leqslant \psi_1(\mathrm{Sz}\,(X)).$$

La borne supérieure des indices $\mathrm{Sz}\,(Y_o)$ est donc dénombrable et on obtient par conséquent : $\mathrm{Sz}\,(Y) \leqslant \psi_1(\mathrm{Sz}\,(X))$. □

En particularisant le théorème 24 aux homéomorphismes lipschitziens, on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 26 :
Il existe des fonctions universelles $\psi_3 : \omega_1 \to \omega_1$ et $\psi_4 : \omega_1 \to \omega_1$ telles que, si X et Y sont deux espaces de Banach Lipschitz-homéomorphes et que l'indice de Szlenk de X est dénombrable, alors

$$\mathrm{Sz}\,(Y) \leqslant \psi_3(\mathrm{Sz}\,(X)) \quad \textit{et} \quad \delta^*(Y) \leqslant \psi_4(\delta^*(X)).$$

Le contre-exemple d'I. Aharoni et J. Lindenstrauss (voir page 33) fournit deux espaces de Banach d'indices de Szlenk dénombrables, Lipschitz-homéomorphes mais non isomorphes. Par conséquent, le corollaire 26 s'applique à des situations intrinsèquement non linéaires.

6.2.2 Propriété de Radon-Nikodým et indice de dentabilité

La démonstration du paragraphe précédent peut se décomposer comme suit :

1. La relation $\twoheadrightarrow_L$ est analytique.
2. La propriété d'Asplund est stable par $\twoheadrightarrow_L$.
3. Pour les espaces de Banach séparables, la propriété d'Asplund coïncide avec la dénombrabilité de l'indice de Szlenk.
4. L'indice de Szlenk est séparablement déterminé.
5. L'ensemble des espaces d'Asplund séparables est un coanalytique dont l'indice de Szlenk est un Π^1_1-rang.

Ces différentes conditions permettent d'assurer un contrôle universel de l'indice de Szlenk des quotients lipschitziens d'un espace ayant un indice de Szlenk dénombrable.

De même, en considérant la relation $\sim_L$, la propriété de Radon-Nikodým et l'indice de dentabilité, les conditions 1 à 3 sont vérifiées (voir [28] pour la condition 2).

Par ailleurs, l'indice de dentabilité est séparablement déterminé. En effet, on a le résultat classique suivant :

Fait 27 :
Soit X un espace de Banach et C une partie convexe fermée de X. Fixons $\varepsilon > 0$.
- *Si $x \in C_\varepsilon^{(1)}$, alors il existe une suite $\underline{x}$ d'éléments de $C \setminus b_X(x, \varepsilon/2)$ telle que x soit limite de combinaisons convexes des termes de $\underline{x}$.*
- *Si x est dans l'enveloppe convexe fermée des termes d'une suite $\underline{x}$ d'éléments de $C \setminus b_X(x, \varepsilon)$, alors $x \in C_\varepsilon^{(1)}$.*

La proposition suivante en découle par une récurrence transfinie directe.

Proposition 28 :

Soit X un espace de Banach et $\alpha < \omega_1$. Si $x \in (B_X)_\varepsilon^{(\alpha)}$, alors il existe un sous-espace séparable $Y \subseteq X$ tel que $x \in (B_Y)_{\varepsilon/2}^{(\alpha)}$.

En particulier, si $\sup\left\{\delta(Y)\ ;\ Y \subseteq X \text{ est séparable}\right\} < \omega_1$, *alors*

$$\delta(X) = \sup\left\{\delta(Y)\ ;\ Y \subseteq X \text{ est séparable}\right\}.$$

La condition 4 est donc satisfaite par l'indice de dentabilité. De plus, il est démontré dans [10] que l'ensemble des espaces séparables jouissant de la propriété de Radon-Nikodým et un coanalytique. Hélas, on ne sait pas si l'indice de dentabilité en est un Π_1^1-rang. Toutefois, les propriétés des Π_1^1-rangs rappelées à la proposition 11 (et qui sont les seules dont on ait besoin) sont vérifiées par δ (voir le théorème 4.16 de [10]). Par conséquent, le raisonnement du paragraphe précédent donne :

Théorème 29 :

Il existe une fonction universelle $\psi_5 : \omega_1 \to \omega_1$ telle que, si X et Y sont des espaces de Banach d'indices de dentabilité dénombrables et que Y est Lipschitz-homéomorphe à X, alors :

$$\delta(Y) \leqslant \psi_5(\delta(X)).$$

6.3 Contrôle géométrique des indices de dérivation

L'objet de cette section est de démontrer que les indices Sz et δ^* sont semi-continus inférieurement pour la distance de Kadets. Le théorème suivant précise cette affirmation.

Théorème 30 :

Soit $\eta > 0$ et $\varepsilon > 4\eta$ deux nombres. Si X et Y sont deux espaces de Banach séparables vérifiant $d_K(X,Y) < \eta$, alors

$$\mathrm{Sz}\left(Y; \frac{\varepsilon}{2} - 2\eta\right) \geqslant \mathrm{Sz}\,(X;\varepsilon) \quad \text{et} \quad \delta^*\left(X; \frac{\varepsilon}{2} - 2\eta\right) \geqslant \delta^*\,(X;\varepsilon)\,.$$

En particulier, si X et $(X_n)_{n\in\omega}$ sont des espaces de Banach séparables tels que $d_K(X_n, X) \to 0$, alors

$$\underline{\lim}\ \mathrm{Sz}\,(X_n) \geqslant \mathrm{Sz}\,(X) \qquad \text{et} \qquad \underline{\lim}\ \delta^*(X_n) \geqslant \delta^*(X).$$

L'application du théorème 10 donne immédiatement :

Corollaire 31 :

Soit X un $\mathcal{K}_0$-espace séparable et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'espaces de Banach tendant vers X pour la distance de Gromov-Hausdorff (c'est en particulier le cas si $d_L(X_n, X)$, $d_U(X_n, X)$ ou $d_R(X_n, X)$ tend vers 1). On a alors :

$$\underline{\lim}\ \mathrm{Sz}\,(X_n) \geqslant \mathrm{Sz}\,(X) \qquad \text{et} \qquad \underline{\lim}\ \delta^*(X_n) \geqslant \delta^*(X).$$

Pour démontrer ce théorème, une caractérisation en termes d'arbres des indices de Szlenk et de dentabilité préfaible est nécessaire.

On définit par induction transfinie la famille $(T_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ d'arbres sur ω en posant :

$$T_0 = \{\varnothing\} \quad \text{et} \quad T_{\alpha+1} = \{\varnothing\} \cup \bigcup_{n=0}^{\infty} n^\frown T_\alpha.$$

Pour chaque ordinal limite α, on choisit une suite strictement croissante $(\xi_n^\alpha)_{n\in\omega}$ d'ordinaux qui converge vers α. On achève la définition de la famille $(T_\beta)_{\beta<\omega_1}$ en posant alors

$$T_\alpha = \{\varnothing\} \cup \bigcup_{n=0}^{\infty} n^\frown T_{\xi_n^\alpha}.$$

A isomorphisme d'arbres près, la définition de la famille $(T_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ reste inchangée si on choisit d'autres suites $(\xi_n^\alpha)_{n\in\omega}$. Tous les arbres T_α sont bien fondés et $ht(T_\alpha) = \alpha$. Pour tout $s \in T_\alpha$, on note $h_\alpha(s)$ la hauteur de l'arbre $\{t \in \omega^{<\omega} \ ; \ s^\frown t \in T_\alpha\}$.

Ces arbres permettent d'introduire de nouveaux indices, semblables à Sz et δ^* mais mieux adaptés au propos de ce paragraphe.

Définition : Soit X un espace de Banach et $\varepsilon > 0$ un nombre.

- On note $S(X;\varepsilon)$ le plus petit ordinal α tel qu'il n'existe pas de famille $(x_s^*)_{s\in T_\alpha}$ dans B_{X^*} vérifiant :

$$\begin{array}{lll} (1) & \forall s \in T'_\alpha, & x_s^* \text{ est préfaiblement adhérent à } \{x_t^* \ ; \ t \in s^+\}. \\ (2)_\varepsilon & \forall s \in T'_\alpha, & \forall t \in s^+, \quad \|x_t^* - x_s^*\| > \varepsilon. \end{array}$$

- On note $D(X;\varepsilon)$ le plus petit ordinal α tel qu'il n'existe pas de famille $(x_s^*)_{s\in T_\alpha}$ dans B_{X^*} vérifiant :

[L] Si $h_\alpha(s)$ est un ordinal limite, alors pour tout $t \in s^+$, $x_t^* = x_s^*$.
[S] Si $h_\alpha(s)$ est un ordinal successeur, alors :

$$\begin{array}{lll} (\mathrm{S1}) & x_s^* \text{ est préfaiblement adhérent à } \operatorname{conv}\{x_t^* \ ; \ t \in s^+\}. \\ (\mathrm{S2})_\varepsilon & \forall t \in s^+, \quad \|x_t^* - x_s^*\| > \varepsilon. \end{array}$$

La proposition suivante est due à G. Lancien. Elle reformule les lemmes 2.7 à 2.10 de [41] à l'aide des indices S et D.

Proposition 32 (Lancien) :
Soit X un espace de Banach séparable et $\varepsilon > 0$. Les indices Sz *, S, δ^* et D sont liés par les inégalités :*

$$S(X;\varepsilon) \leqslant \mathrm{Sz}\,(X;\varepsilon) \leqslant S\Big(X;\frac{\varepsilon}{2}\Big) \quad \textit{et} \quad D(X;\varepsilon) \leqslant \delta^*(X;\varepsilon) \leqslant D\Big(X;\frac{\varepsilon}{2}\Big)\cdot$$

Dans les lemmes 2.7 et 2.8 de [41], la condition (1) est remplacée par la condition a priori plus forte :

$$(1') \quad \forall s \in T'_\alpha, \quad x_{s^\frown n}^* \xrightarrow{*} x_s^*.$$

Cependant, puisque l'espace X est séparable, la topologie préfaible sur B_{X^*} est métrisable et il est possible d'extraire des sous-suites. Ainsi, une récurrence transfinie sur α prouve que si la condition (1) est vérifiée, alors il existe un sous-arbre S_α de T_α isomorphe à celui-ci et

tel que la famille $(x_s^*)_{s\in S_\alpha}$ vérifie la condition $(1')$. On se contentera donc ici de la condition (1), mieux adaptée au cadre de cette étude.

Le lemme suivant étudie la possibilité, lorsque E est un espace de Banach et $X \subseteq E$, de relever un arbre dans X^* en un arbre de même nature dans E^*.

Lemme 33 :

Soit E un espace de Banach séparable et X un sous-espace de E. Soit $\varepsilon > 0$ et $\alpha < \omega_1$ un ordinal.

1. *On suppose qu'il existe dans B_{X^*} une famille $(x_s^*)_{s\in T_\alpha}$ vérifiant (1) et $(2)_\varepsilon$. Il existe alors dans B_{E^*} une famille $(e_s^*)_{s\in T_\alpha}$ prolongeant $(x_s^*)_{s\in T_\alpha}$ et satisfaisant les conditions (1) et $(2)_\varepsilon$.*
2. *On suppose qu'il existe dans B_{X^*} une famille $(x_s^*)_{s\in T\alpha}$ vérifiant [L], (S1) et $(\mathrm{S2})_\varepsilon$. Il existe alors dans B_{E^*} une famille $(e_s^*)_{s\in T_\alpha}$ prolongeant $(x_s^*)_{s\in T_\alpha}$ et satisfaisant les conditions [L], (S1) et $(\mathrm{S2})_\varepsilon$.*

Démonstration du lemme 33 — On montre les deux assertions par une récurrence transfinie sur α. L'initialisation est la même dans les deux cas et n'est qu'une simple reformulation du théorème d'Hahn-Banach.

1. La démonstration est la même que α soit un ordinal limite ou un successeur. Pour unifier les notations, on pose $\xi_n^\alpha = \beta$ si $\alpha = \beta + 1$. Pour chaque $n \in \omega$, comme $\xi_n^\alpha < \alpha$, l'hypothèse de récurrence assure qu'il existe une famille $(e_{s,n}^*)_{s\in T_{\xi_n^\alpha}}$ dans B_{E^*} prolongeant $(x_{n^\frown s}^*)_{s\in T_{\xi_n^\alpha}}$ et vérifiant (1) et $(2)_\varepsilon$. Comme X est séparable, il existe une suite extraite $\left(x_{k_n}^*\right)_{n\in\omega}$ convergeant préfaiblement vers $x_\varnothing^*$. Par compacité et métrisabilité de B_{E^*}, on peut, quitte à extraire à nouveau une sous-suite, supposer que $\left(e_{\varnothing,k_n}^*\right)_{n\in\omega}$ est préfaiblement convergente. On pose alors :
$$e_\varnothing^* = \lim_{n\to\infty}{}^* \, e_{\varnothing,k_n}^* \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \omega,\ \forall s \in \xi_n^\alpha, \quad e_{n^\frown s}^* = e_{s,n}^*.$$
Il est alors clair que $e_\varnothing^* \in B_{E^*}$ prolonge $x_\varnothing^*$. De plus, les conditions (1) et $(2)_\varepsilon$ sont trivialement vérifiées.
2. La construction est évidente si α est un ordinal limite. On suppose donc que $\alpha = \beta+1$ est un ordinal successeur. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe pour chaque $n \in \omega$ une famille $(e_{s,n}^*)_{s\in T_\beta}$ dans B_{E^*} prolongeant $(x_{n^\frown s}^*)_{s\in T_\beta}$ et vérifiant [L], (S1) et $(\mathrm{S2})_\varepsilon$. Comme X est séparable, il existe pour chaque n des poids positifs ou nuls $\lambda_1^n, \ldots, \lambda_{q(n)}^n$ tels que :
$$\sum_{p=1}^{q(n)} \lambda_p^n = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to\infty}{}^* \sum_{p=1}^{q(n)} \lambda_p^n \, x_p^* = x_\varnothing^*.$$
Comme E est séparable, on peut supposer, quitte à extraire à nouveau une sous-suite, que la limite suivante existe :
$$\lim_{n\to\infty}{}^* \sum_{p=1}^{q(n)} \lambda_p^n \, e_{\varnothing,p}^*$$
On note alors $e_\varnothing^*$ cette limite et
$$\forall n \in \omega,\ \forall s \in \xi_n^\alpha, \quad e_{n^\frown s}^* = e_{s,n}^*.$$

Il est alors clair que $e^*_\varnothing \in B_{E^*}$ prolonge $x^*_\varnothing$. De plus, les conditions [L], (S1) et $(S2)_\varepsilon$ sont trivialement vérifiées. □

Grâce au lemme 33, on va montrer que les indices S et D sont semi-continus inférieurement pour la distance de Kadets en « passant de X à Y » par un jeu de relèvement et de restriction des arbres.

Lemme 34 :
Soit $\eta > 0$ et $\varepsilon > 2\eta$ deux nombres. Si X et Y sont deux espaces de Banach séparables vérifiant $d_K(X,Y) < \eta$, alors

$$S(X;\varepsilon - 2\eta) \geqslant S(X;\varepsilon) \quad \text{et} \quad D(X;\varepsilon - 2\eta) \geqslant D(X;\varepsilon).$$

Démonstration — La démonstration est la même pour les indices S et D. On se contente donc de la rédiger pour S. Soit E un espace de Banach contenant des copies isométriques de X et Y (qu'on notera encore X et Y) telles que $\Lambda_E(X,Y) < \eta$. Soit $\alpha < S(X;\varepsilon)$. Il existe une famille $(x^*_s)_{s\in T_\alpha}$ dans B_{X^*} vérifiant (1) et $(2)_\varepsilon$. La famille $(e^*_s)_{s\in T_\alpha}$ étant donnée par le lemme 33, pour tout $s \in T_\alpha$, on note y^*_s la restriction de e^*_s à Y. L'application de restriction à un sous-espace étant préfaiblement continue, la famille $(y^*_s)_{s\in T_\alpha}$ vérifie toujours la propriété (1). Soit $s \in T'_\alpha$ et $t \in s^+$. On introduit $x \in S_X$ tel que $\langle x^*_t - x^*_s, x\rangle > \varepsilon$. Comme $\Lambda_E(X,Y) < \eta$, il existe $y \in S_Y$ tel que $\|x-y\|_E < \eta$. Alors :

$$\|y^*_t - y^*_s\| \geqslant \langle y^*_t - y^*_s, y\rangle = \langle x^*_t - x^*_s, x\rangle - \langle e^*_t - e^*_s, x-y\rangle > \varepsilon - 2\eta.$$

Par conséquent, la famille $(y^*_s)_{s\in T_\alpha}$ vérifie $(2)_{\varepsilon-2\eta}$ ce qui prouve que $S(Y;\varepsilon-2\eta) > \alpha$. Voilà qui achève la preuve du lemme. □

Le théorème 30 est une conséquence directe de la proposition 32 et du lemme 34.

Ajoutons deux remarques à ce paragraphe :

1. Cette technique ne permet pas de savoir si l'indice de dentabilité δ est semi-continu inférieurement pour la distance de Kadets (sauf évidemment dans le cas réflexif) par manque de compacité faible.
2. Il existe une autre « caractérisation » des dérivés édentés préfaibles de B_{X^*} lorsque X est séparable :
   - S'il existe une suite $(x^*_n)_{n\in\omega}$ dans $(B_{X^*})^{[\alpha]}$, restant à une distance supérieure ou égale à ε de x^* telle que, pour tout $x \in X$, $\overline{\lim}\,\langle x^*_n, x\rangle \geqslant \langle x^*, x\rangle$, alors $x^* \in (B_{X^*})^{[\alpha+1]}_\varepsilon$.
   - Réciproquement, si $x^* \in (B_{X^*})^{[\alpha+1]}_\varepsilon$, alors il existe une suite $(x^*_n)_{n\in\omega}$ dans $(B_{X^*})^{[\alpha]}$, restant à une distance supérieure ou égale à ε de x^* telle que, pour tout $x \in X$, $\overline{\lim}\,\langle x^*_n, x\rangle \geqslant \langle x^*, x\rangle$.

   Toutefois, cela n'est pas adapté à la démonstration du lemme de relèvement 33 car la propriété précédente ne passe pas aux suites extraites.

6.4 Contrôle des modules asymptotiques

On cherche dorénavant à préciser ce qui se passe dans le cas où les indices sont finis. Les conditions $\delta(X) = \omega$ et $\delta^*(X) = \omega$ sont équivalentes à la super-reflexivité de X. Les travaux de H. Knaust, E. Odell et T. Schlumprecht [40] ont permis de caractériser les espaces ayant des indices de Szlenk finis.

Définition : Soit X un espace de Banach.

1. On dit que la norme $\|\cdot\|$ a la propriété de Kadec-Klee préfaible uniforme lorsqu'il existe une fonction $\varphi : [0,\infty[\to [0,\infty[$ continue, strictement croissante et valant 0 en 0 telle que, si $(x_n^*)_{n\in\omega}$ est une suite de B_{X^*} convergeant préfaiblement vers x^*, alors :
$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \|x^* - x_n^*\| \leqslant \varphi\big(1 - \|x^*\|\big).$$
2. Lorsque la norme possède la propriété de Kadec-Klee préfaible uniforme et qu'il est possible de choisir φ linéaire, alors on dit que $\|\cdot\|$ possède la propriété de Lipschitz-Kadec-Klee préfaible.
3. Lorsque $\|\cdot\|$ possède la propriété de Lipschitz-Kadec-Klee préfaible avec $\varphi = \mathrm{Id}$, on dit que la norme possède la propriété de Kadec-Klee préfaible métrique.

Ces affirmations sont des propriétés de la norme $\|\cdot\|$ qui sont lues sur sa norme duale, encore notée $\|\cdot\|$. Le théorème suivant caractérise ces propriétés :

Théorème 35 (Godefroy, Kalton et Lancien) :
Soit X un espace de Banach.

1. *On a $\mathrm{Sz}\,(X) \leqslant \omega$ si et seulement s'il existe une norme équivalente sur X possédant la propriété de Kadec-Klee préfaible uniforme.*
2. *L'espace X admet une norme ayant la propriété de Lipschitz-Kadec-Klee préfaible si et seulement si X est isomorphe à un sous-espace de c_0.*
3. *On désigne par $\mathcal{G}(c_0)$ la classe des sous-espaces de c_0. Avec ces notations, la norme de l'espace X a la propriété de Kadec-Klee préfaible métrique si et seulement si $d_{BM}(X, \mathcal{G}(c_0)) = 1$.*

L'équivalence 1 est due à H. Knaust, E. Odell et T. Schlumprecht. Elle est prouvée dans [40]. Une autre méthode développée par G. Godefroy, N.J. Kalton et G. Lancien dans [24] fournit une version quantitativement optimale. Les assertions 2 et 3 sont dues à G. Godefroy, N.J. Kalton et G. Lancien. Elles constituent le théorème 2.4 de [23].

La propriété de Kadec-Klee préfaible uniforme peut se reformuler directement dans X à l'aide du comportement asymptotique de la norme. Pour cela, on introduit les modules de Milman :

Définition : Soit X un espace de Banach et $\tau > 0$.

– Pour $x \in S_X$ et $Y \subseteq X$, on note :
$$\overline{\rho}(\tau; x, Y) = \sup_{y\in S_Y} \|x + \tau y\| - 1 \qquad \text{et} \qquad \overline{\delta}(\tau; x, Y) = \inf_{y\in S_Y} \|x + \tau y\| - 1.$$
– Pour $x \in S_X$, on note :
$$\overline{\rho}(\tau; x) = \inf_{\dim(X/Y)<\infty} \overline{\rho}(\tau; x, Y) \qquad \text{et} \qquad \overline{\delta}(\tau; x) = \sup_{\dim(X/Y)<\infty} \overline{\delta}(\tau; x, Y).$$
– Enfin, on note :
$$\overline{\rho}(\tau) = \sup_{x\in S_X} \overline{\rho}(\tau; x) \qquad \text{et} \qquad \overline{\delta}(\tau) = \inf_{x\in S_X} \overline{\delta}(\tau; x).$$

Si plusieurs espaces sont en jeu, on peut écrire $\overline{\rho}_X(\tau)$ et $\overline{\delta}_X(\tau)$. Par ailleurs, ces modules étant des invariants isométriques, il est pratique d'écrire $\overline{\rho}_X(\tau, \|\cdot\|)$ lorsqu'on renorme l'espace.

Il s'agit, avec d'autres notations, des modules introduits pas V.D. Milman dans [49]. Selon sa terminologie, on a aussi :

Définition :

– Une norme $\|\cdot\|$ est dite asymptotiquement uniformément lisse lorsque

$$\lim_{\tau\to 0} \frac{\overline{\rho}(\tau)}{\tau} = 0.$$

– Une norme $\|\cdot\|$ est dite asymptotiquement uniformément convexe lorsque

$$\forall \tau > 0, \quad \overline{\delta}(\tau) > 0.$$

Les notations retenues ici sont celles de l'article [31] où sont démontrés les résultats de base sur ces indices. On définit un dernier indice dont l'introduction répond à des nécessités techniques :

Définition : Soit X un espace de Banach et $x \in S_X$. On note :

$$\eta(\tau; x) = \sup \overline{\lim_{n\to\infty}} \|x + x_n\| - 1$$

où la borne supérieure est prise sur l'ensemble des suites $(x_n)_{n\in\omega}$ convergeant faiblement vers 0 et telles que, pour tout $n \in \omega$, $\|x_n\| \leqslant \tau$. On pose également

$$\eta(\tau) = \sup_{x\in S_X} \eta(\tau; x).$$

La proposition suivante, essentiellement connue, fait le lien entre les propriétés de Kadec-Klee préfaible uniforme et la lissité uniforme asymptotique.

Proposition 36 :

Soit X un espace de Banach séparable. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. *La norme $\|\cdot\|$ possède la propriété de Kadec-Klee préfaible uniforme.*
2. *La norme $\|\cdot\|$ est asymptotiquement uniformément lisse.*

Commençons par quelques remarques préliminaires.

– Tout d'abord, si X est séparable et possède une norme ayant la propriété de Kadec-Klee préfaible uniforme, alors les topologies normiques et préfaibles coïncident sur S_{X^*}, ce qui entraîne que X^* est séparable.

– Le lemme suivant montre la place jouée par l'indice $\eta(\tau; x)$ dans la démonstration.

Lemme 37 :

Soit X un espace de Banach à dual séparable. Pour tout $x \in S_X$ et $\tau > 0$, on a l'égalité $\eta(\tau; x) = \overline{\rho}(\tau; x)$.

DÉMONSTRATION DU LEMME 37 —

– Montrons que $\eta(\tau;x) \leqslant \overline{\rho}(\tau;x)$.
Soit $(x_n)_{n\in\omega}$ convergeant faiblement vers 0 telle que, pour tout $n \in \omega$, $\|x_n\| \leqslant \tau$. Fixons $\varepsilon > 0$ et $Y \subseteq X$ de codimension finie. La suite $(d(x_n, Y))_{n\in\omega}$ tend vers 0 donc, pour n assez grand, il existe $y_n \in Y$ tel que $\|x_n - y_n\| \leqslant \varepsilon$. Alors $\|y_n\| \leqslant \tau + \varepsilon$ et
$$\|x_n + x\| - 1 \leqslant \|x + y_n\| - 1 + \|x_n - y_n\| \leqslant \overline{\rho}(\tau + \varepsilon; x, Y) + \varepsilon$$
Comme Y est quelconque, on a :
$$\|x_n + x\| - 1 \leqslant \overline{\rho}(\tau + \varepsilon; x) + \varepsilon.$$
Lorsque ε tend vers 0, on obtient le résultat.

– Montrons que $\eta(\tau;x) \geqslant \overline{\rho}(\tau;x)$.
Soit $(x_j^*)_{j\in\omega}$ une suite dense dans X^*. Pour tout $n \in \omega$, on pose
$$Y_n = \bigcap_{j=0}^{n} \ker x_j^*.$$
On fixe $\varepsilon > 0$. Soit $x_n \in Y_n$ tel que
$$\|x_n\| \leqslant \tau \qquad \text{et} \qquad \|x + x_n\| - 1 + \varepsilon \geqslant \overline{\rho}(\tau; x, Y_n) \geqslant \overline{\rho}(\tau; x).$$
Il suffit de montrer que $(x_n)_{n\in\omega}$ tend faiblement vers 0. Soit $x^* \in X^*$ et $\alpha > 0$. Soit $j \in \omega$ tel que $\|x_j^* - x^*\| \leqslant \alpha/\tau$. Alors $|\langle x^*, x_n\rangle| \leqslant \alpha$ pour tout $n \geqslant j$, ce qui achève la démonstration.

□

Le lemme suivant sera également utile pour prouver la proposition 36.

Lemme 38 :

1. *Soit X un espace de Banach et $Y \subseteq X$ un sous-espace de codimension finie. Pour tout ε, il existe une partie compacte K_ε telle que tout élément de B_X puisse s'écrire comme somme d'un élément de $(2+\varepsilon)B_Y$ et de K_ε.*
2. *Soit $(x_n^*)_{n\in\omega}$ une suite de X^* tendant préfaiblement vers 0 telle que $\|x_n^*\| \longrightarrow l$. Pour tout $Y \subseteq X$ de codimension finie, il existe une suite $(y_n)_{n\in\omega}$ dans B_Y telle que $\langle x_n^*, y_n\rangle \longrightarrow l/2$.*

DÉMONSTRATION DU LEMME 38 —

1. D'après le théorème de Bartle-Graves, la surjection canonique $s : B_X \to B_{X/Y}$ admet un inverse à droite continu S tel que $S(B_{X/Y}) \subset (1+\varepsilon)B_X$. On pose alors $K_\varepsilon = S(B_{X/Y})$. C'est bien un compact. Pour tout $x \in B_X$, on pose $y = x - S(s(x))$ et $k = S(s(x))$. Il est immédiat de vérifier que $y \in Y$ et $\|y\| \leqslant \|x\| + \|S(s(x))\| \leqslant 2+\varepsilon$. Par conséquent, on a bien $x = y + k \in (2+\varepsilon)B_Y + K_\varepsilon$.
2. On fixe $\varepsilon > 0$ et on introduit K_ε tel que ci-dessus. D'après le théorème d'Ascoli, $(x_n^*)_{n\in\omega}$ tend uniformément vers 0 sur K_ε. Etant donnée une suite $(x_n)_{n\in\omega}$ dans B_X telle que $\langle x_n^*, x_n\rangle \longrightarrow l$, on écrit $x_n = (2+\varepsilon)y_n^\varepsilon + k_n^\varepsilon$ avec $k_n^\varepsilon \in K_\varepsilon$ et $y_n^\varepsilon \in B_Y$. Alors $\langle x_n^*, y_n^\varepsilon\rangle \longrightarrow l/(2+\varepsilon)$. Soit donc, pour $p \in \omega^*$, $N(p)$ tel que, pour tout $n \geqslant N(p)$, on ait
$$\left|\left\langle x_n^*, y_n^{1/p}\right\rangle - \frac{l}{2+\frac{1}{p}}\right| \leqslant \frac{1}{p}.$$
On peut bien sûr supposer que, pour tout $p \in \omega^*$, $N(p+1) > N(p)$. Dès lors, la suite définie par $y_n = y_n^{1/p}$ avec $N(p) < n \leqslant N(p+1)$ convient.

Ceci achève la preuve du lemme 38 □

Enfin, le lemme suivant permet de se limiter aux formes linéaires atteignant leur norme pour démontrer que $\|\cdot\|$ a la propriété de Kadec-Klee préfaible uniforme.

Lemme 39 :

Si on suppose que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour toute forme linéaire $x^* \in X^*$ atteignant sa norme et pour toute suite $(x_n^*)_{n\in\omega}$ de B_{X^*} convergeant préfaiblement vers x^*, on a

$$\|x^*\| > 1-\delta \implies \overline{\lim_{n\to\infty}} \|x^* - x_n^*\| \leqslant \varepsilon,$$

alors $\|\cdot\|$ vérifie la propriété de Kadec-Klee préfaible uniforme.

Démonstration du lemme 39 — D'après le théorème de Bishop-Phelps, l'ensemble des formes linéaires atteignant leur norme est dense dans X^*. Soit donc $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ donnés par l'hypothèse. Soit $x^* \in X^*$ de norme strictement supérieure à $1-\delta/2$ et $(x_n^*)_{n\in\omega}$ une suite de B_{X^*} convergeant préfaiblement vers x^*. Soit $y^* \in X^*$ une forme linéaire atteignant sa norme telle que $\|x^* - y^*\| < \delta/2$. Alors $x_n^* + y^* - x^* \xrightarrow{*} y^*$ et $\|y^*\| > 1-\delta$. Par conséquent, on a :

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \|x_n^* + y^* - x^* - y^*\| = \overline{\lim_{n\to\infty}} \|x^* - x_n^*\| \leqslant \varepsilon,$$

ce qui prouve le lemme. □

Démonstration de la proposition 36 —

– Supposons que $\|\cdot\|$ possède la propriété de Kadec-Klee préfaible uniforme. Le dual X^* est alors séparable. D'après le lemme 37, il suffit donc de montrer que

$$\lim_{\tau\to 0} \frac{\eta(\tau)}{\tau} = 0.$$

Soit $(x_n)_{n\in\omega}$ une suite tendant faiblement vers 0 telle que $\|x_n\| \leqslant \tau$ pour tout entier n. Soit $x \in S_X$. On introduit $x_n^* \in S_{X^*}$ tel que $\langle x_n^*, x + x_n\rangle = \|x + x_n\|$. Quitte à changer x_n en $-x_n$ chaque fois que cela augmente la norme, on peut supposer $\|x + x_n\| \geqslant 1$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer $x_n^* \xrightarrow{*} x^*$ et $\|x_n^* - x^*\| \longrightarrow l$. Comme $\|\cdot\|$ a la propriété de Kadec-Klee préfaible uniforme, on a $l \leqslant \varphi(1 - \|x^*\|)$. Puisque $\langle x_n^*, x\rangle = \|x + x_n\| - \langle x_n^*, x_n\rangle$ et que $\|x + x_n\| \geqslant 1$, on obtient, en passant à la limite : $\|x^*\| \geqslant \langle x^*, x\rangle \geqslant 1 - \tau$. Puisque φ est croissante, il vient $l \leqslant \varphi(\tau)$. On a donc les inégalités asympotiques suivantes, valables lorsque n tend vers l'infini :

$$\begin{aligned}\|x + x_n\| &= \langle x_n^*, x + x_n\rangle = \langle x_n^* - x^*, x + x_n\rangle + \langle x^*, x + x_n\rangle \\ &= \langle x_n^* - x^*, x_n\rangle + \langle x^*, x\rangle + o(1) \\ &\leqslant l\tau + 1 + o(1) \leqslant 1 + \tau\varphi(\tau) + o(1).\end{aligned}$$

Il en résulte $\overline{\lim}\, \|x + x_n\| - 1 \leqslant \tau\varphi(\tau)$. Comme $\varphi(\tau) = o(1)$ au voisinage de $\tau = 0$, on en déduit que $\|\cdot\|$ est asymptotiquement uniformément lisse.

– Supposons maintenant que $\|\cdot\|$ est asymptotiquement uniformément lisse. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. On introduit $\tau > 0$ tel que $\overline{\rho}(\tau) < \delta = \tau\varepsilon/4$. D'après le lemme 39, il suffit de vérifier que la conjonction des conditions suivantes entraîne $\overline{\lim}\, \|x^* - x_n^*\| \leqslant \varepsilon$:
  - La suite $(x_n^*)_{n\in\omega}$ de B_{X^*} converge préfaiblement vers x^*.
  - La forme linéaire x^* atteint sa norme.
  - $\|x^*\| > 1 - \delta$.

  Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $\|x_n^* - x^*\| \longrightarrow l$. Soit $x \in S_X$ tel que $\langle x^*, x\rangle = \|x^*\|$. Comme $\overline{\rho}(\tau) < \varepsilon\tau/4$, il existe un sous-espace Z de X de codimension finie tel que

$$\forall z \in S_Z, \quad \|x + \tau z\| \leqslant 1 + \frac{\varepsilon}{4}\tau.$$

  On pose $Y = Z \cap \ker x^*$. D'après le lemme 38, on peut construire une suite $(y_n)_{n\in\omega}$ dans S_Y telle que $\langle x_n^* - x^*, y_n\rangle \longrightarrow l/2$. On a alors, d'une part :

$$\big|\, \langle x_n^*, x + \tau y_n\rangle \,\big| \leqslant \|x + \tau y_n\| \leqslant 1 + \frac{\varepsilon}{4}\tau,$$

  et, d'autre part, lorsque n tend vers l'infini :

$$\begin{aligned}\langle x_n^*, x + \tau y_n\rangle &= \langle x^*, x\rangle + \langle x_n^* - x^*, x\rangle + \langle x_n^* - x^*, \tau y_n\rangle + \langle x^*, \tau y_n\rangle \\ &= \|x^*\| + \frac{\tau l}{2} + o(1).\end{aligned}$$

  Par conséquent, il s'ensuit

$$1 - \delta + \frac{\tau l}{2} < \|x^*\| + \frac{\tau l}{2} \leqslant 1 + \frac{\varepsilon}{4}\tau \quad \text{d'où} \quad l \leqslant \varepsilon.$$

Ceci démontre que $\|\cdot\|$ a la propriété de Kadec-Klee préfaible uniforme et achève la démonstration. □

En combinant la proposition 36 et le théorème 35, on obtient directement le corollaire suivant :

Corollaire 40 :
Soit X un espace de Banach séparable. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *Les indices de Szlenk de X sont finis :* $\forall\varepsilon > 0, \quad \mathrm{Sz}\,(X;\varepsilon) < \infty$.
2. *Il existe une norme équivalente sur X asymptotiquement uniformément lisse.*

En particulier, si X est séparable et admet une norme asymptotiquement uniformément lisse, son dual X^* est séparable. La proposition 2.4 de [31] donne un bien meilleur résultat. On la rappelle ici :

Proposition 41 (Johnson, Lindenstrauss, Preiss et Schechtman) :
Si $\overline{\rho}(\tau, \|\cdot\|) < 1$ pour une certaine norme sur X et un certain $0 < \tau \leqslant 1$, alors X est un espace d'Asplund.

On ne connaît pas de caractérisation à l'aide de l'équivalent faible de l'indice de Szlenk du fait d'admettre une norme asymptotiquement uniformément convexe, la compacité

faisant une nouvelle fois défaut. La situation n'est pas totalement symétrique de toutes façons puisque M. Girardi a montré qu'il existe un espace de Banach séparable n'ayant pas la propriété de Radon-Nikodým mais admettant une norme asymptotiquement uniformément convexe [21].

G. Godefroy, N.J. Kalton et G. Lancien ont démontré que le fait d'admettre une norme équivalente ayant la propriété de Kadec-Klee préfaible uniforme est stable par homéomorphisme uniforme. La proposition suivante permet de redémontrer une partie de ce fait (à savoir la stabilité par homéomorphisme lipschitzien). En effet, elle permet de « transporter » une norme asymptotiquement uniformément lisse par homéomorphisme lipschitzien.

Proposition 42 :

Soit X et Y deux espaces de Banach. On suppose qu'il existe une norme $\|\cdot\|$ sur X qui est asymptotiquement uniformément lisse et que X et Y sont Lipschitz-homéomorphes. Soit $M > d_L(X,Y)$. Il existe une norme équivalente sur Y, notée $|\cdot|$ telle que :

$$\forall \tau \in]0,1], \quad \overline{\rho}_Y\Big(\frac{\tau}{4M}, |\cdot|\Big) \leqslant 2\,\overline{\rho}_X\big(\tau, \|\cdot\|\big).$$

Démonstration — La preuve utilise la technique de renormage développée dans la section 5 de [24]. On voit aisément que $\overline{\rho}(\cdot)$ est séparablement déterminé, c'est-à-dire que pour tout $0 < \tau \leqslant 1$, on a :

$$\overline{\rho}(\tau) = \sup\Big\{\overline{\rho}_Z(\tau)\ ;\ Z \text{ sous-espace séparable}\Big\}.$$

D'après le corollaire 3.17 de [6], étant donnés deux sous-espaces séparables $X_o \subseteq X$, $Y_o \subseteq Y$ et un homéomorphisme lipschitzien $f : X \to Y$, il existe deux sous-espaces séparables $X_1 \subseteq X$, $Y_1 \subseteq Y$ tels que $X_o \subseteq X_1$, $Y_o \subseteq Y_1$ et $f(X_1) = Y_1$. Par conséquent, on peut supposer que X et Y sont séparables dans la démonstration. Comme l'inégalité $\overline{\rho}(\tau) \leqslant \tau$ est toujours vraie et qu'il y a égalité pour tout $0 < \tau \leqslant 1$ lorsque l'espace n'a pas la propriété d'Asplund d'après la proposition 41, on peut supposer que X^* est séparable. Dans ce cas, le théorème 23 entraîne que Y^* aussi est séparable. Posons alors $\sigma = \tau/(4M)$. Soit $\eta(\sigma)$ l'indice η correspondant à une nouvelle norme $|\cdot|$ sur Y et $\overline{\rho}(\tau)$ l'indice $\overline{\rho}$ correspondant à la norme $\|\cdot\|$ sur X. D'après le lemme 37, il suffit de trouver une norme $|\cdot|$ telle que $\eta(\sigma) \leqslant 2\overline{\rho}(\tau)$. Soit $f : X \to Y$ un homéomorphisme lipschitzien tel que $\mathrm{lip}(f) \leqslant 1$ et $\mathrm{lip}(f^{-1}) \leqslant M$. Pour tout $y^* \in Y^*$, on pose :

$$|y^*| = \sup\left\{\frac{|\langle y^*, f(x) - f(x')\rangle|}{\|x - x'\|}\ ;\ x \neq x' \text{ dans } X\right\}.$$

On vérifie aisément que $|\cdot|$ est une norme équivalente sur Y^* et qu'elle est préfaiblement semi-continue inférieurement. Il en résulte aussitôt (voir le fait 5.4 de [16]) que $|\cdot|$ est la norme duale d'une norme équivalente sur Y, encore notée $|\cdot|$. Soit maintenant $y \in S_Y$ tel que $|y| = 1$ et $(y_n)_{n\in\omega} \in Y^\omega$ convergeant faiblement vers 0 et vérifiant $|y_n| \leqslant \sigma$ pour tout $n \in \omega$. Il suffit de montrer que

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, |y + y_n| - 1 \leqslant 2\,\overline{\rho}(\tau). \tag{6.1}$$

Soit maintenant, pour chaque $n \in \omega$, une forme linéaire $y_n^* \in Y^*$ telle que $|y_n^*| = 1$ et $\langle y_n^*, y + y_n\rangle = |y + y_n|$. Après extraction de sous-suites, on peut supposer que la suite

$(y_n^*)_{n\in\omega}$ converge préfaiblement vers y^* et que $l = \lim |y^* - y_n^*|$ existe. On a bien sûr $|y^*| \leqslant 1$. Fixons $\varepsilon > 0$ et introduisons $x \neq x'$ dans X tels que

$$\langle y^*, f(x) - f(x')\rangle \geqslant (1-\varepsilon)\,|y^*|\,\|x - x'\|\,.$$

Quitte à effectuer des translations sur f, on peut supposer $x' = -x$ (et donc $x \neq 0$) et $f(x') = -f(x)$. On a alors :

$$\langle y^*, f(x)\rangle \geqslant (1-\varepsilon)\,|y^*|\,\|x\|\,. \tag{6.2}$$

Soit maintenant $\beta > \overline{\rho}(\tau)$ arbitraire. Il existe alors un sous-espace de codimension finie $X_o \subseteq X$ tel que :

$$\forall z \in X_o \qquad \Big[\|z\| \leqslant \tau\,\|x\|\Big] \quad \Longrightarrow \quad \Big[\|x+z\| \leqslant (1+\beta)\,\|x\|\Big]. \tag{6.3}$$

On fixe $b < \tau\|x\|/(2M)$ arbitraire et $d = \tau\,\|x\|\,/2$. Rappelons le principe de Gorelik, énoncé sous cette forme dans la proposition 2.7 de [23] :

Lemme 43 (Gorelik) :
Soit $f : X \to Y$ une bijection continue d'inverse uniformément continu. Soit X_o un sous-espace de codimension finie de X et $b, d > 0$ des constantes telles que d soit strictement supérieure à $\omega(f^{-1}, b)$, oscillation uniforme de f^{-1} en b. Il existe alors une partie compacte K de Y telle que

$$bB_Y \subset K + f\left(2dB_{X_o}\right).$$

Comme f^{-1} est M-lipschitzienne (pour la norme $|\cdot|$), son oscillation en b est majorée par Mb donc on a bien $\omega(f^{-1}, b) < d$. En appliquant le principe de Gorelik, on voit qu'il existe $K \subset Y$ une partie compacte telle que $bB_Y \subset K + f\left(2dB_{X_o}\right)$. En raisonnant comme dans la preuve du lemme 38, on voit qu'il existe une suite $(z_n)_{n\in\omega}$ dans X_o telle que :

$$\forall n \in \omega, \quad |z_n| \leqslant \tau\,\|x\| \qquad \text{et} \qquad \langle y_n^* - y^*, f(z_n)\rangle \longrightarrow -bl. \tag{6.4}$$

On va estimer de deux façons différentes la quantité $W_n = \langle y_n^*, f(x) - f(z_n)\rangle$ lorsque n tend vers l'infini. Tout d'abord, d'après la définition de $|\cdot|$ et (6.3), on a :

$$W_n \leqslant |y_n^*|\,\|x - z_n\| \leqslant (1+\beta)\,\|x\|\,. \tag{6.5}$$

Par ailleurs, la décomposition

$$W_n = \langle y^*, f(x) - f(z_n)\rangle + \langle y_n^* - y^*, f(x)\rangle - \langle y_n^* - y^*, f(z_n)\rangle$$

entraîne, étant donné que $y_n^* \xrightarrow{*} y^*$, que $f(-x) = -f(x)$ et en utilisant (6.4) :

$$W_n = 2\,\langle y^*, f(x)\rangle - \langle y^*, f(z_n) - f(-x)\rangle + bl + o(1). \tag{6.6}$$

Comme

$$\langle y^*, f(z_n) - f(-x)\rangle \leqslant |y^*|\,\|z_n + x\| \leqslant |y^*|\,(1+\beta)\,\|x\|\,,$$

la combinaison des relations (6.6) et (6.2) donne

$$W_n \geqslant 2(1-\varepsilon)\,|y^*|\,\|x\| - |y^*|\,(1+\beta)\,\|x\| + bl + o(1) \tag{6.7}$$

Finalement, les deux estimations (6.5) et (6.7) fournissent l'inégalité :

$$(1+\beta)\,\|x\| \geqslant (1-\beta-2\varepsilon)\,|y^*|\,\|x\| + bl$$

qui, en faisant tendre ε vers 0, b vers $\tau\,\|x\|/(2M)$ et β vers $\overline{\rho}(\tau) < 1$, devient :

$$|y^*| \leqslant 1 + \frac{2\,\overline{\rho}(\tau)}{1-\overline{\rho}(\tau)} - \frac{\tau l}{2M}\frac{1}{1-\overline{\rho}(\tau)}. \tag{6.8}$$

Distinguons deux cas.

Premier cas : $2\,\overline{\rho}(\tau) < \dfrac{\tau l}{4M}$.

L'inégalité (6.8) donne alors

$$|y^*| \leqslant 1 - \frac{1}{1-\overline{\rho}(\tau)}\frac{\tau l}{4M} \leqslant 1 - \sigma l.$$

Ainsi, lorsque n tend vers l'infini, on obtient le développement asymptotique suivant :

$$\begin{aligned}
|y+y_n| &= \langle y_n^*, y+y_n\rangle \\
&= \langle y_n^*-y^*, y\rangle + \langle y_n^*-y^*, y_n\rangle + \langle y^*, y+y_n\rangle \\
&\leqslant |y^*|\,|y| + |y_n^*-y^*|\,|y_n| + o(1) \\
&\leqslant 1 - \sigma l + l\sigma + o(1) = 1 + o(1).
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que $\overline{\lim}\,|y+y_n| \leqslant 1$ et l'inégalité (6.1) est trivialement vérifiée.

Deuxième cas : $2\,\overline{\rho}(\tau) \geqslant \dfrac{\tau l}{4M}$.

D'après le même calcul que ci-dessus, on obtient

$$\begin{aligned}
\overline{\lim}\,|y+y_n| &\leqslant \sigma\,\overline{\lim}\,|y_n^*-y^*| + |y^*| \\
&\leqslant \frac{\tau l}{4M} + 1 \\
&\leqslant 1 + 2\overline{\rho}(\tau)
\end{aligned}$$

ce qui établit l'inégalité (6.1) recherchée et achève la démonstration. □

On ne sait pas en toute généralité si le module $\overline{\delta}$ est stable par homéomorphisme lipschitzien. Toutefois, on peut noter que cette conservation est triviale lorsque l'un des espaces possède la propriété de Radon-Nikodým.

Proposition 44 :

Soit X un espace de Banach ayant la propriété de Radon-Nikodým et admettant une norme $\|\cdot\|$ asymptotiquement uniformément convexe. Si Y est un espace de Banach Lipschitz-homéomorphe à X, alors il admet une norme équivalente $|\cdot|$ telle que, pour tout $0 < \tau \leqslant 1$:

$$\overline{\delta}_Y(\tau, |\cdot|) \geqslant \overline{\delta}_X(\tau, \|\cdot\|).$$

Démonstration — Comme précédemment, on peut supposer que X et Y sont séparables. Soit $f : Y \to X$ un homéomorphisme lipschitzien. D'après la généralisation en

dimension infinie du théorème de Rademacher (voir le théorème 48 ci-après), il existe un point de différentiabilité au sens de Gâteaux de f. La différentielle T est un isomorphisme de Y sur son image $Z \subseteq X$. Pour $y \in Y$, posons $|y| = \|Ty\|$. Il est clair que

$$\overline{\delta}_Y(\tau, |\cdot|) = \overline{\delta}_Z(\tau, \|\cdot\|) \geqslant \overline{\delta}_X(\tau, \|\cdot\|),$$

ce qui achève la preuve. □

Au regard des résultats de ce chapitre, il est tentant de formuler une conjecture générale sous cette forme : « la structure asymptotique d'un espace de Banach est invariante par homéomorphisme lipschitzien ». Pour autant qu'elle paraisse naturelle, cette conjecture est, pour l'instant du moins, mal posée puisqu'on ne dispose pas d'une définition générale de la structure asymptotique d'un espace de Banach.

Deuxième partie

Relations non linéaires entre espaces de fonctions continues

Chapitre 7

Quotients de c_0 et homéomorphismes lipschitziens

7.1 Introduction

Dans [23], G. Godefroy, N.J. Kalton et G. Lancien ont démontré que la classe des sous-espaces de c_0 est stable par homéomorphisme lipschitzien :

Théorème 45 (Godefroy, Kalton et Lancien) :
On rappelle que $\mathcal{G}(c_0)$ désigne la classe des sous-espaces de c_0. Soit X un espace de Banach.

1. *Si $d_L(X, \mathcal{G}(c_0)) < \infty$, alors $d_{BM}(X, \mathcal{G}(c_0)) < \infty$.*
2. *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, si $d_L(X, \mathcal{G}(c_0)) < 1 + \delta$, alors $d_{BM}(X, \mathcal{G}(c_0)) \leqslant 1 + \varepsilon$.*

Par ailleurs, W.B. Johnson et M. Zippin ont montré [33] que tout quotient linéaire de c_0 était isomorphe à un sous-espace de c_0. D. Alspach a prouvé [2] ensuite que tout quotient isométrique de c_0 était quasi-isométriquement un sous-espace de c_0. La notation $\mathcal{Q}(c_0)$ désignant la classe des quotients isométriques de c_0, on peut énoncer :

Théorème 46 (Johnson, Alspach et Zippin) :
Si $X \in \mathcal{Q}(c_0)$, alors $d_{BM}(X, \mathcal{G}(c_0)) = 1$.

A isomorphisme près, on peut donc voir $\mathcal{Q}(c_0)$ comme une partie de $\mathcal{G}(c_0)$ et il semble naturel de se demander si, à l'instar de $\mathcal{G}(c_0)$, la classe $\mathcal{Q}(x_0)$ est stable par homéomorphisme lipschitzien. Dans ce chapitre, un équivalent du théorème 45 est prouvé sous une hypothèse supplémentaire d'approximation.

7.2 Quotients lipschitziens de dimension finie de c_0

Dans [45], des méthodes extrêmement fines prouvent que toute application lipschitzienne de c_0 dans un espace vérifiant la propriété de Radon-Nikodým est presque partout (dans un sens précisé dans cet article) différentiable au sens de Fréchet. Tous les résultats de ce paragraphe sont donc une conséquence de [45]. Il semble toutefois utile d'en donner une démonstration élémentaire autonome.

Définition : Soit X et Y deux espaces de Banach. On dit qu'une application $f : X \to Y$ admet une différentielle de Fréchet approchée d'ordre $\varepsilon > 0$ en $x \in X$ lorsqu'il existe un nombre $\delta > 0$ et un opérateur $T \in L(X, Y)$ tels que :

$$\forall h \in B_X(0, \delta), \qquad \|f(x+h) - f(x) - Th\|_Y \leqslant \varepsilon \|h\|_X .$$

Lemme 47 :
Toute application lipschitzienne de c_0 dans un espace de dimension finie admet des différentielles de Fréchet approchées d'ordres quelconques.

DÉMONSTRATION — Soit E un espace de dimension finie et $f : c_0 \to E$ une application lipschitzienne. Quitte à renormer E, on peut supposer que $\|\cdot\|_E$ est hilbertienne et que $\operatorname{lip}(f) \leqslant 1$. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. On choisit $\alpha > 0$ tel que $13\alpha^2 + 12\alpha \leqslant \varepsilon^2$.

Le résultat suivant constitue une généralisation classique du théorème de Rademacher au cas de la dimension infinie (voir la page 155 de [7] et les préliminaires de [28]) :

Théorème 48 (Aronszajn, Christensen et Mankiewicz) :
Soit X et Y deux espaces de Banach. On suppose que X est séparable et que Y possède la propriété de Radon-Nikodým. Soit $f : X \to Y$ une application lipschitzienne. L'ensemble D des points où f est différentiable au sens de Gâteaux a un complémentaire négligeable au sens d'Aronszajn. De plus

$$\operatorname{lip}(f) = \sup_{x \in D} \|f'(x)\| .$$

En appliquant ce résultat, on trouve un point $x_0 \in c_0$ où f est différentiable au sens de Gâteaux et où la différentielle est de grande norme : $\|f'(x)\| > 1 - \alpha$. Par des translations dans c_0 et E, on peut se ramener au cas où $x_0 = 0$ et $f(0) = 0$. Soit maintenant $x \in S_{c_0}$ à support fini tel que $\|f'(0)(x)\|_E > 1 - \alpha$. On note U l'ensemble des vecteurs de c_0 dont le support est inclus dans celui de x et V son supplémentaire canonique. Pour tous $u \in U$ et $v \in V$, on a

$$\|u + v\|_\infty = \max\Big(\|u\|_\infty , \|v\|_\infty \Big). \tag{7.1}$$

Soit P la projection sur U parallèlement à V. On pose $T = f'(0) \circ P$. Puisque S_U est compacte, on voit immédiatement que la restriction $f|_U$ de f à U est différentiable au sens de Fréchet en l'origine et que $(f|_U)'(0) = T|_U$. Par conséquent, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall u \in B_U(0, 2\delta), \qquad \|f(u) - Tu\|_E \leqslant \alpha \|u\|_\infty . \tag{7.2}$$

Soit $y \in B_{c_0}(0, \delta)$ quelconque. On pose $t = \|y\|_\infty$, $u = Py$ et $v = y - Py$. On a alors $t = \max(\|u\|_\infty , \|v\|_\infty)$. En utilisant l'inégalité $\|T(tx)\|_E \geqslant (1 - \alpha)t$ et (7.2), on trouve

$$\|f(tx)\|_E \geqslant (1 - 2\alpha)t \quad \text{et} \quad \|f(tx) + f(-tx)\|_E \leqslant 2\alpha t.$$

En utilisant (7.2) puis (7.1), on remarque que :

$$\begin{aligned}
\|f(u+v) - Tu - f(\pm tx)\|_E &\leqslant \|f(u \pm tx) - T(u \pm tx)\|_E + \\
&\qquad \|T(\pm tx) - f(\pm tx)\|_E + \|f(u+v) - f(u \pm tx)\|_E \\
&\leqslant \alpha \|u \pm tx\|_\infty + \alpha \|tx\|_\infty + \|v \mp tx\|_\infty \\
&\leqslant (1 + 3\alpha)t.
\end{aligned}$$

On obtient par conséquent la majoration

$$\|f(u+v) - Tu + f(tx)\|_E \leqslant (1+5\alpha)t.$$

Comme $\|\cdot\|_E$ est hilbertienne, l'identité du parallélogramme donne :

$$\|f(u+v) - Tu - f(tx)\|_E^2 + \|f(u+v) - Tu + f(tx)\|_E^2 = \\ 2\,\|f(u+v) - Tu\|_E^2 + 2\,\|f(tx)\|_E^2\,.$$

Il s'ensuit alors

$$2\,\|f(u+v) - Tu\|_E^2 \leqslant t^2\Big[(1+3\alpha)^2 + (1+5\alpha)^2 - 2(1-2\alpha)^2\Big],$$

ce qui donne l'inégalité attendue

$$\|f(y) - Ty\|_E = \|f(u+v) - Tu\|_E \leqslant t(13\alpha^2 + 12\alpha)^{1/2} \leqslant \varepsilon\,\|y\|_\infty$$

et conclut la preuve du lemme. □

Proposition 49 :

Si E est un espace de dimension finie et que $f : c_0 \to E$ est un quotient lipschitzien, alors on a :

$$d_{BM}(E, \mathcal{Q}(c_0)) \leqslant \Gamma(f).$$

On rappelle[1] *que $\Gamma(f)$ est la constante de quotient lipschitzien de f.*

Démonstration — Soit $C > \Gamma(f)$ et $0 < \varepsilon < 1$ arbitraires. On peut supposer que $\operatorname{lip}(f) \leqslant C$ et $\gamma(f) \leqslant 1$. D'après le lemme 47, f admet une différentielle de Fréchet T approchée à l'ordre ε en un certain point $x \in c_0$. Après translations, on peut supposer $x = 0$ et $f(0) = 0$. Il existe alors $\delta > 0$ tel que

$$\forall h \in B_{c_0}(0,\delta), \qquad \|f(h) - Th\|_E \leqslant \varepsilon\,\|h\|_\infty\,. \tag{7.3}$$

On fixe $y \in B_E$. D'après le caractère colipschitzien de f, il existe $h \in B_{c_0}$ tel que $f(h) = y$. On pose alors $z_0 = h$. D'après (7.3), on a $\|y - Tz_0\|_E \leqslant \varepsilon$. En répétant ce raisonnement inductivement, on contruit une suite $(z_n)_{n\in\omega}$ dans c_0 telle que, pour tout $n \in \omega$, $\|y - T(z_0 + \cdots + z_n)\|_E \leqslant \varepsilon^{n+1}$ et $\|z_n\|_\infty \leqslant \varepsilon^n$. Dès lors, le vecteur $z = \sum z_n$ vérifie $\|z\|_\infty \leqslant (1-\varepsilon)^{-1}$ et $Tz = y$. Ceci prouve que T est surjective et $\gamma(T) \leqslant (1-\varepsilon)^{-1}$. L'inégalité $\|T\| \leqslant C + \varepsilon$ étant évidente, on obtient finalement

$$d_{BM}(E, c_0/\ker T) \leqslant \frac{C+\varepsilon}{1-\varepsilon}\cdot$$

Comme $C > \Gamma(f)$ et $\varepsilon > 0$ sont arbitraires, on trouve $d_{BM}(E, \mathcal{Q}(c_0)) \leqslant \Gamma(f)$. □

[1] Voir page 34

7.3 Sous-espaces de c_0 et propriétés d'approximation

Sans chercher à être exhaustif sur les propriétés d'approximation, on se contente ici de rappeler les résultats qui seront utiles par la suite.

Définition : Soit X un espace de Banach. On note I l'application identité de X dans lui-même et $\mathcal{R}$ l'ensemble des endomorphismes de X de rang fini.

1. La topologie de la convergence compacte sur $L(X)$ est notée τ_c. Elle est engendrée par les semi-normes $|\cdot|_K$ où K est une partie compacte quelconque de X et
$$\forall T \in L(X), \quad |T|_K = \sup\big\{\, \|Tx\|_X \ ; \ x \in K \big\}.$$
2. On dit que X a la propriété d'approximation lorsque I est adhérente à $\mathcal{R}$ selon τ_c.
3. On dit que X a la propriété d'approximation bornée lorsque I est séquentiellement adhérente à $\mathcal{R}$ selon τ_c. Si $(T_n)_{n\in\omega} \in \mathcal{R}^\omega$ tend vers I selon τ_c, le théorème de Banach-Steinhaus implique que $\lambda = \sup \|T_n\|$ est fini. On dit alors que X vérifie la propriété d'approximation avec borne λ.
4. La propriété d'approximation avec borne 1 est encore appelée propriété d'approximation métrique.
5. On dit que X vérifie la propriété d'approximation commutative avec borne λ lorsqu'il existe une suite $(T_n)_{n\in\omega}$ dans $\mathcal{R}$ vérifiant :
   (a) $T_p \xrightarrow{\tau_c} I$.
   (b) $\forall n \leqslant m, \quad T_m T_n = T_n T_m = T_n$.
   (c) $\forall n \in \omega, \quad \|T_n\| \leqslant \lambda$.

On a regroupé dans le théorème suivant les propositions qui seront utiles :

Théorème 50 (Grothendieck) :
Soit X et Y deux espaces de Banach.

1. *Si X^* est séparable et a la propriété d'approximation, alors X et X^* ont la propriété d'approximation métrique.*
2. *Si X a la propriété d'approximation métrique, alors X a la propriété d'approximation commutative avec borne 1.*
3. *Si X est un sous-espace de c_0 ayant la propriété d'approximation commutative avec borne $\lambda < 2$, alors X a la propriété d'approximation métrique.*

L'assertion 1 est due à A. Grothendieck. Elle est un corollaire direct du théorème 8 et de la proposition 40 de [27]. Elle est démontrée directement à la page 39 de [46]. L'affirmation 2 est due à P.G. Casazza et N.J. Kalton. Elle est prouvée au théorème 2.4 de [13]. Enfin, le 3 est une conséquence immédiate du corollaire 4.5 de [26] puisque les sous-espaces de c_0 sont des M-idéaux de leur bidual.

Sous l'hypothèse supplémentaire que l'espace vérifie la propriété d'approximation métrique, G. Godefroy, N.J. Kalton et D. Li ont établi une sorte de réciproque du théorème 46.

Lemme 51 (Godefroy, Kalton et Li) :
Soit X un sous-espace de c_0 jouissant de la propriété d'approximation métrique. Pour tout $C > 1$, il existe des espaces $(E_n)_{n\in\omega}$ de dimensions finies et des applications linéaires surjectives $Q_n : X \to E_n$ et $Q : \left(\bigoplus E_n\right)_{c_0} \to X$ telles que :

$$\forall n \in \omega, \quad \|Q_n\| \cdot \gamma(Q_n) \leqslant C \qquad \text{et} \qquad \|Q\| \cdot \gamma(Q) \leqslant C.$$

Il s'agit de l'affirmation duale du lemme 3.1 de [25].

7.4 Stabilité lipschitzienne des quotients linéaires

On peut maintenant énoncer et démontrer le résultat principal de ce chapitre.

Théorème 52 :

1. *Soit X un espace de Banach dont le dual jouit de la propriété d'approximation. Si $d_L(X, \mathcal{Q}(c_0)) < \infty$, alors $d_{BM}(X, \mathcal{Q}(c_0)) < \infty$.*
2. *Pour tout $\alpha > 1$, il existe $\beta > 1$ tel que, si X est un espace de Banach possédant la propriété d'approximation métrique et que $d_L(X, \mathcal{Q}(c_0)) < \beta$, alors $d_{BM}(X, \mathcal{Q}(c_0)) \leqslant \alpha$.*

Démonstration —

1. Soit $Z \in \mathcal{Q}(c_0)$ un quotient isométrique de c_0 et f un homéomorphisme lipschitzien de Z sur X. On introduit une constante β supérieure ou égale à $\operatorname{lip}(f) \cdot \operatorname{lip}(f^{-1})$. D'après le théorème 46, Z est isomorphe à un sous-espace de c_0. En appliquant le 1 du théorème 45, il existe donc un sous-espace Y de c_0 qui est isomorphe à X. Soit T un isomorphisme de X sur Y. On pose $\theta = \|T\| \cdot \|T^{-1}\|$. Puisque X et Y sont isomorphes, il en est de même de X^* et Y^*. Par conséquent, Y^* a la propriété d'approximation. L'assertion 1 du théorème 50 prouve alors que Y a la propriété d'approximation métrique. On est donc dans le cadre où s'applique le lemme 51. On pose $C > 1$ quelconque et on considère les espaces E_n et les quotients linéaires Q_n et Q tels que dans le lemme 51. Soit S la surjection canonique de c_0 sur Z. Les applications $f_n = Q_n \circ T \circ f \circ S : c_0 \to E_n$ sont des quotients lipschitziens et $\Gamma(f_n) \leqslant C\theta\beta$. Pour tout $K > C$, la proposition 49 assure alors l'existence de quotients linéaires $S_n : c_0 \to E_n$ tels que $\|S_n\| \cdot \gamma(S_n) \leqslant K\theta\beta$. On considère maintenant le schéma suivant :

$$V : \begin{cases} c_0 \xrightarrow{\varphi} \left(\bigoplus_{n=0}^{\infty} c_0\right)_{c_0} \longrightarrow \left(\bigoplus_{n=0}^{\infty} E_n\right)_{c_0} \xrightarrow{T^{-1}Q} X \\ x \longmapsto (x_n)_{n\in\omega} \longmapsto \big(S_n(x_n)\big)_{n\in\omega} \longmapsto T^{-1}Q\Big(\big(S_n(x_n)\big)\Big) \end{cases}$$

où φ est une isométrie de c_0 sur $\left(\bigoplus c_0\right)_{c_0}$. L'application V ainsi définie est linéaire et surjective, ce qui prouve la première assertion du théorème. Par ailleurs, on peut remarquer que :

$$\|V\| \cdot \gamma(V) \leqslant \Big[\|Q\| \cdot \gamma(Q)\Big] \cdot \Big[\|T\| \cdot \gamma(T)\Big] \cdot \Big[\sup_{n\in\omega} \|S_n\| \cdot \gamma(S_n)\Big] \leqslant CK\theta^2\beta.$$

Il peut paraître inutile de préciser toutes les constantes intervenant dans la démonstration puisque β (et donc θ) n'est pas connue. Cela va cependant servir pour le 2 puisqu'on va maintenant pouvoir contrôler θ et β.

2. Pour démontrer l'assertion 2, il suffit d'appliquer le raisonnement du 1 en contrôlant β et θ et en montrant que Y a la propriété d'approximation métrique afin d'être à même d'appliquer le lemme 51. Les $\mathcal{K}_0$-espaces vont être utiles dans ce contexte.
   On fixe $\alpha > 1$ arbitraire et on choisit $0 < \varepsilon < 1/4$ tel que
   $$\frac{1+5\varepsilon}{1-4\varepsilon} < \alpha^{1/3}. \tag{7.4}$$
   Comme c_0 est un espace de classe $\mathcal{L}_{\infty,2}$, les assertions 2 et 3 du théorème 9 montrent que tout quotient isométrique Z de c_0 est un $\mathcal{K}_0$-espace avec $\kappa_0(Z) \leqslant 400$. D'après le théorème 10, il existe alors $\beta < \alpha^{1/3}$ tel que, si X est un espace de Banach et que $d_L(X,Z) < \beta$, alors $d_K(X,Z) < \varepsilon$. L'hypothèse assure maintenant qu'il existe un quotient isométrique Z de c_0 tel que $d_L(X,Z) < \beta$. Dès lors, on peut injecter isométriquement X et Z dans un espace de Banach séparable E tel que $\Lambda_E(X,Z) < \varepsilon$. Comme Z est un quotient isométrique de c_0, le théorème 46 prouve qu'il existe $i : Z \to c_0$ qui est un isomorphisme sur son image avec $\|i\| \leqslant 1+\varepsilon$ et $\left\|i^{-1}\right\| \leqslant 1$. Le théorème de Sobczyk (voir le théorème 64) montre qu'il existe un prolongement j de i à E vérifiant $\|j\| \leqslant 2\|i\| < 4$. Soit $x \in S_X$. On introduit $z \in S_Z$ tel que $\|x-z\|_E \leqslant \varepsilon$. On a alors :
   $$\Big| \|j(z)\|_\infty - \|j(x)\|_\infty \Big| \leqslant 4\varepsilon \quad \text{et} \quad 1 \leqslant \|j(z)\|_\infty \leqslant 1+\varepsilon$$
   $$\text{d'où} \qquad 1-4\varepsilon \leqslant \|j(x)\|_\infty \leqslant 1+5\varepsilon.$$
   Soit alors T la restriction de j à X et $\theta = \|T\| \cdot \left\|T^{-1}\right\|$. L'inégalité précédente et (7.4) montrent que $Y = T(X)$ est un sous-espace de c_0 et $\theta^2\beta < \alpha$. On peut maintenant continuer le raisonnement tenu au 1. Il suffit pour cela de prouver que Y possède la propriété d'approximation métrique.

Puisque X a la propriété d'approximation métrique, l'assertion 2 du théorème 50 assure que X possède la propriété d'approximation commutative avec borne 1. Dès lors, Y jouit de cette même propriété avec borne θ. Comme $\theta < \alpha$ et qu'il est licite de supposer $\alpha < 2$, l'affirmation 3 du théorème 50 permet d'imposer que Y a la propriété d'approximation métrique. Les constantes C et K peuvent être choisies arbitrairement proches de 1 donc on peut supposer $CK\theta^2\beta < \alpha$, ce qui achève la preuve du résultat. □

Il faut remarquer qu'il existe des sous-espaces de c_0 n'ayant pas la propriété d'approximation [46]. Par conséquent, l'hypothèse faite au théorème 52 est réellement restrictive. On peut ajouter qu'un résultat récent de G. Godefroy et N.J. Kalton [22] prouve en toute généralité que si X a la propriété d'approximation bornée et que Y est Lipschitz-homéomorphe à X, alors Y a la propriété d'approximation bornée.

Chapitre 8

Relations linéaires entre espaces de fonctions continues

8.1 Rappels sur la théorie non quantitative

8.1.1 Isomorphismes

Définition : Soit K un espace topologique compact. Le dérivé de Cantor de K, noté K', est l'ensemble des points d'accumulation de K. On peut itérer transfiniment cette dérivation en posant, pour tout ordinal α :

$$K^{(\alpha+1)} = \left(K^{(\alpha)}\right)' \qquad \text{et, lorsque } \alpha \text{ est un ordinal limite,} \quad K^{(\alpha)} = \bigcap_{\beta<\alpha} K^{(\beta)}.$$

Un compact K est dit clairsemé lorsqu'il existe α tel que $K^{(\alpha)} = \varnothing$. Le plus petit de ces ordinaux est un successeur. On note $\sigma(K)$ son prédecesseur et on le nomme indice de Cantor[1] de K. Lorsque K n'est pas clairsemé, on convient d'écrire $\sigma(K) = \infty$. L'écriture normale de Cantor permet d'écrire $\sigma(K) = \omega^{\alpha_1} + \cdots + \omega^{\alpha_p}$ où $\alpha_1 \geqslant \cdots \geqslant \alpha_p$. L'ordinal α_1 est noté $o(K)$. Enfin, si $\sigma(K) < \omega_1$, on dit que K est dénombrablement clairsemé.

Un compact est dénombrable si et seulement s'il est à la fois métrisable et clairsemé. Il est alors dénombrablement clairsemé. L'espace de Banach $C(K)$ est séparable si et seulement si K est métrisable. C'est un espace d'Asplund si et seulement si K est clairsemé. Dans le cas séparable, la classification isomorphique des espaces de fonctions continues est connue depuis 1966.

Théorème 53 (Bessaga, Milutin et Pełczyński) :
Soit K et L deux compacts métrisables.

1. *Si K et L sont tous deux non dénombrables, alors $C(K)$ et $C(L)$ sont isomorphes.*
2. *Si K et L sont dénombrables, alors $C(K)$ est isomorphe à $C(L)$ si et seulement si $o(K) = o(L)$.*

La première assertion est due à A.A. Milutin (l'article original [50] étant en russe, on renvoit au théorème III.D.19 de [60]) et la seconde à C. Bessaga et A. Pełczyński [8].

[1] On appelle en général indice de Cantor de K l'ordinal $i(K) = \sigma(K) + 1$ mais cette notation convient mieux au propos de ce chapitre.

8.1.2 Sous-espaces et quotients linéaires

C. Samuel a étendu les travaux de C. Bessaga et A. Pełczyński aux cas des sous-espaces et des quotients linéaires [57].

Théorème 54 (Samuel) :
Soit K et L deux compacts dénombrables. Les trois assertions suivantes sont équivalentes :

1. *$C(K)$ est isomorphe à un sous-espace de $C(L)$.*
2. *$C(K)$ est un quotient linéaire de $C(L)$.*
3. *$o(K) \leqslant o(L)$.*

Ce théorème permet à C. Samuel de calculer l'indice de Szlenk des espaces de fonctions continues sur des compacts dénombrables. Ceci a par la suite été généralisé au cas des compacts dénombrablement clairsemés par G. Lancien [42].

Théorème 55 (Lancien) :
Soit K un compact dénombrablement clairsemé. L'indice de Szlenk de $C(K)$ est donné par la formule :

$$\mathrm{Sz}\,(C(K)) = \omega^{o(K)+1}.$$

Il est à remarquer que, d'après la proposition 5.4 de [42], l'indice de Szlenk d'un espace de Banach quelconque est toujours une puissance de ω.

8.2 Théorie quantitative

8.2.1 Isométries

Le théorème classique de Banach-Stone assure que toutes les isométries entre un espace $C(K)$ et un espace $C(L)$ proviennent d'un homéomorphisme entre K et L. Ceci a été étendu au cas où $d_{BM}(C(K), C(L)) < 2$ par D. Amir [3] et M. Cambern [11, 12] :

Théorème 56 (Amir et Cambern) :
Soit K et L deux espaces topologiques compacts. Si $d_{BM}(C(K), C(L)) < 2$, alors K est homéomorphe à L et $C(K)$ est donc isométrique à $C(L)$.

Dans un premier temps, on souhaite généraliser le théorème d'Amir-Cambern au cas des quotients linéaires et des sous-espaces. Dans le chapitre suivant, on étudiera une version non linéaire de ce théorème.

8.2.2 Quotients linéaires

Définition : Soit K un compact clairsemé. On note $\nu(K)$ le cardinal du dernier dérivé de Cantor non vide de K : $\nu(K) = \#K^{(\sigma(K))}$. On nomme classiquement *système caractéristique* du compact K le couple $\mathrm{sc}(K) = (\sigma(K), \nu(K))$. On dira que K est plus simple que L et on écrira $K \preccurlyeq L$ lorsque $\mathrm{sc}(K) \leqslant \mathrm{sc}(L)$ (selon l'ordre lexicographique sur $\omega_1 \times \omega^*$). Lorsque $\mathrm{sc}(K) < \mathrm{sc}(L)$, K est dit strictement plus simple que L et on note $K \prec L$.

Le théorème de Mazurkiewicz et Sierpiński [48] montre qu'un compact dénombrable infini de système caractéristique (α, n) est homéomorphe à l'ordinal $\omega^\alpha \cdot n + 1$ muni de sa topologie de l'ordre. Il s'ensuit que, modulo homéomorphisme, les compacts dénombrables sont bien ordonnés par la relation de simplicité et que cette relation coïncide avec « K est homéomorphe à un ouvert-fermé de L ». En particulier, on considèrera K comme un ouvert-fermé de L dès que $K \preccurlyeq L$.

Définition : Un compact dénombrable K est dit *patriarcal* lorsque son système caractéristique est de la forme $(\omega^{o(K)}, 1)$.

Une telle dénomination est choisie pour mettre en évidence le rôle particulier du patriarche (l'unique point de $K^{(\sigma(K))}$). Un compact patriarcal est le plus petit des compacts dont l'espace des fonctions continues est isomorphe à un espace $C(L)$ donné. On peut reformuler le théorème 54 en disant que si le compact K est patriarcal et que L est strictement plus simple que K, alors $C(K)$ n'est pas un quotient linéaire de $C(L)$.

Le but de ce paragraphe est de trouver une constante r telle que, si $C(L)$ est un quotient linéaire de $C(K)$ avec constante r, alors L est plus simple que K. On va obtenir un tel résultat par récurrence. Afin d'itérer cette récurrence, on a besoin du schéma suivant :

Définition :

- Soit X et Y deux espaces de Banach, $r > 0$ et $T : X \to Y$ un quotient linéaire tel que $\gamma(T) < r$. On dit que $x \in X$ est un *r-antécédent* si $\|x\|_X \leqslant r \|Tx\|_Y$.
- Pour $r > 1$, on note $\rho_0(r) = 1$ puis, par récurrence sur l'indice $j \in \omega$, on définit $\rho_{j+1}(r) = 2\rho_j(r) - r$. On obtient immédiatement :

$$\rho_j(r) = 2^j - (2^j - 1)r \qquad \text{donc} \qquad \rho_j(r) > 0 \iff 1 < r < A(j) = 1 + \frac{1}{2^j - 1}.$$

- Soit K, L, et R des compacts dénombrables. Soit $j \in \omega$ et $r > 1$. On affirme que le quintuplet (K, L, R, j, r) vérifie le schéma $\mathcal{H}$ lorsqu'il existe un quotient linéaire $T : C(R) \to C(L)$ tel que les conditions suivantes soient remplies :

  $\mathcal{H}_1$ – K est un ouvert-fermé de R.

  $\mathcal{H}_2$ – $\|T\| \leqslant 1$ et $\gamma(T) < r$.

  $\mathcal{H}_3$ – Tout r-antécédent $g \in C(R)$ satisfait $\|g|_K\|_K \geqslant \rho_j(r) \|Tg\|_L$.

  Ce schéma donne une quantification de la propriété suivante : K est *suffisamment gros* par rapport à L pour qu'il existe un *bon* quotient linéaire de $C(R)$ sur $C(L)$ pour lequel aucun *bon* antécédent n'est *trop petit* sur K. En particulier, il est immédiat de vérifier que $(K, L, K, 0, r)$ vérifie le schéma $\mathcal{H}$ si et seulement s'il existe un quotient linéaire $T : C(K) \to C(L)$ tel que $\|T\| \cdot \gamma(T) < r$.

Cette interprétation du schéma $\mathcal{H}$ trouve sa traduction exacte lorsque le compact K est fini.

Lemme 57 :

Soit R et L des compacts dénombrables et K une partie finie de R. Soit $j \in \omega$ et $r > 1$ tels que le quintuplet (K, L, R, j, r) satisfasse le schéma $\mathcal{H}$. Si $r < A(j)$, alors $\#L \leqslant \#K$.

DÉMONSTRATION — On commence par rappeler le lemme suivant (voir le lemme 2.c.8 de [46]) :

Lemme 58 :
Soit X un espace de Banach et E, F des sous-espaces de X tels que $\dim E < \infty$ *et* $\dim E < \dim F$. *Il existe alors $x \in F$ tel que $\|x\| = 1$ et $d(x, E) = 1$.*

Par dualité, on en déduit le fait suivant :

Fait 59 :
Soit X un espace de Banach, V un sous-espace de codimension finie et U un sous-espace de codimension strictement supérieure à celle de V. Pour tout $t > 1$, il existe un vecteur $v \in V$ tel que $\|v\| = 1$ et $d(v, U) \geqslant 1/t$.

Afin de démontrer ce fait, on considère les sous-espaces $E = V^\perp$ et $F = U^\perp$ de X^*. On a $\dim E < \infty$ et $\dim E < \dim F$. En appliquant le lemme 58, on voit qu'il existe $f \in F$ tel que $\|f\| = 1$ et $d(f, E) = 1$. On fixe $t > 1$ arbitraire. Comme X^*/E s'identifie isométriquement à V^*, il existe $v \in V$ tel que $\|v\| = 1$ et $\langle f, v\rangle \geqslant 1/t$. Comme f est de norme 1 et nulle sur U, cette assertion entraîne directement $d(v, U) \geqslant 1/t$. Cela achève la preuve du fait 59.

On considère maintenant un quotient linéaire T de $C(R)$ sur $C(L)$ vérifiant les hypothèses $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_3$ avec $r < A(j)$. On se donne un nombre $t > 1$ tel que $t\gamma(T) < r$. On suppose par l'absurde que $\#L > \#K$. Enfin, on pose $U = \ker T$ et V le sous-espace $\{g \in C(R)\ ;\ g|_K = 0\}$. La codimension de V est finie et celle de U est strictement supérieure à celle de V. En appliquant le fait 59, on trouve un vecteur $v \in V$ tel que $\|v\|_R = 1$ et $d(v, \ker T) \geqslant 1/t$. Dès lors, la factorisation canonique de T à travers son noyau donne :

$$\|Tv\|_L \geqslant \frac{1}{\gamma(T)}\, d(v, \ker T) \geqslant \frac{1}{t\gamma(T)} \geqslant \frac{1}{r}\, \|v\|_R .$$

En conséquence, v est un r-antécédent. D'après $\mathcal{H}_3$, on a $\left\|v|_K\right\|_K \geqslant \rho_j(r)$. Puisque $r < A(j)$, il vient $\rho_j(r) > 0$, ce qui contredit le fait que $v \in V$. □

Le lemme suivant va permettre de se ramener à la situation du lemme 57 après un nombre fini d'itérations.

Lemme 60 :
Soit K, L, R des compacts dénombrables, $j \in \omega$ et $r > 1$. On note $\alpha = \omega^{o(K)}$. Si (K, L, R, j, r) vérifie le schéma $\mathcal{H}$, alors il en est de même du quintuplet $(K^{(\alpha)}, L^{(\alpha)}, R, j+1, r)$.

DÉMONSTRATION — On introduit T un quotient linéaire de $C(R)$ sur $C(L)$ et on suppose vérifiées les propriétés $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_3$. Soit $P : C(L) \to C\left(L^{(\alpha)}\right)$ l'application de restriction et $T' = P \circ T$. On a $\|T'\| \leqslant 1$ et $\gamma(T') < r$. Il suffit de prouver que T' vérifie les hypothèses $\mathcal{H}_2$ et $\mathcal{H}_3$. Soit $f_1 \in C\left(L^{(\alpha)}\right)$ un vecteur de norme 1 et $g \in C(R)$ un r-antécédent de f_1 par T'. On veut prouver que

$$\left\|g|_{K^{(\alpha)}}\right\|_{K^{(\alpha)}} \geqslant \rho_{j+1}(r).$$

On fixe $\varepsilon > 0$ et $\eta > \|g|_{K^{(\alpha)}}\|_{K^{(\alpha)}}$ arbitraires. Il suffit de montrer que

$$\eta \geqslant (2-2\varepsilon)\rho_j(r) - r. \tag{8.1}$$

On pose $f = Tg$ et on introduit un réel s vérifiant $\gamma(T) < s < r$ tel que $r+s \leqslant (2-2\varepsilon)r$. Il existe un voisinage ouvert-fermé W de $K^{(\alpha)}$ dans K tel que $\|g|_W\|_W \leqslant \eta$. On définit $M = K \backslash W$. On sait que $M^{(\alpha)} = \varnothing$.

Par ailleurs on a $\|f\|_L \leqslant 1$ et $Pf = f_1$. Par conséquent, la fonction $|f|$ atteint la valeur $1 = \|f\|_L$ en un point $u \in L^{(\alpha)}$. On peut évidemment supposer $f(u) = 1$. Soit maintenant Λ un voisinage ouvert-fermé de u dans L tel que $f|_\Lambda \geqslant 1-\varepsilon$. Puisque $u \in \Lambda$ et $u \in L^{(\alpha)}$, on a $\sigma(\Lambda) \geqslant \alpha$. Par conséquent, il existe une partie ouverte-fermée Q de Λ qui est patriarcale et telle que $\sigma(Q) = \alpha$. Soit $P' : C(L) \to C(Q)$ l'application de restriction et $S = P' \circ T : C(R) \to C(Q)$. On a clairement $\|S\| \leqslant 1$ et $\gamma(S) < s$.

Fait 61 :

Il existe $h \in C(R)$ tel que $\|h\|_R \leqslant s$, $\|Sh\|_Q \geqslant 1-\varepsilon$ et $h|_M = 0$.

Démonstration du fait 61 — Par l'absurde, on suppose qu'il n'existe pas de tel vecteur h. Alors l'implication suivante est vraie pour tout vecteur $h \in C(R)$:

$$\left.\begin{array}{r} \|h\|_R \leqslant s \\ h|_M = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \|Sh\|_Q < 1-\varepsilon.$$

On fixe arbitrairement $f_\circ \in S_{C(Q)}$. Soit $h_1' \in C(R)$ tel que $\|h_1'\|_R \leqslant s$ et $Th_1' = f_\circ$. On définit la fonction $h_1 \in C(R)$ en posant :

$$h_1(v) = \left| \begin{array}{ll} h_1'(v) & \text{si } v \in M \\ 0 & \text{si } v \notin M. \end{array} \right.$$

La fonction h_1 est bien continue puisque M est ouvert-fermé. On a $\|h_1 - h_1'\|_R \leqslant s$ et $(h_1 - h_1')|_M = 0$. Par conséquent, on obtient $\|f_\circ - Sh_1\|_Q < 1-\varepsilon$. On peut ensuite aisément itérer cette construction et obtenir par récurrence une suite $(h_n)_{n\in\omega^*}$ de vecteurs de $C(R)$ tels que

$$\begin{aligned} &\|h_n\|_R \leqslant s, \\ &\|f_\circ - S(h_1 + \cdots + h_n)\|_Q < (1-\varepsilon)^n, \\ &\text{et } h_n|_{R\backslash M} = 0. \end{aligned}$$

Ceci étant fait, on définit $h = \sum h_n$. On a $h|_{R\backslash M} = 0$ et $Sh = f_\circ$. Cela montre que S induit un quotient linéaire de $C(M)$ sur $C(Q)$. Or $M < Q$ et Q est patriarcal donc, d'après le théorème 54, il n'existe aucun quotient linéaire de $C(M)$ sur $C(Q)$. Cette contradiction achève la preuve du fait 61. □

Soit maintenant h un vecteur donné par le fait 61. En considérant au besoin $-h$ à la place de h, on peut supposer qu'il existe $t \in Q$ tel que $Sh(t) \geqslant 1-\varepsilon$. Dès lors, on a

$$\|T(g+h)\|_L \geqslant f(t) + Sh(t) \geqslant 2-2\varepsilon.$$

Puisque, d'autre part, $\|g+h\|_R \leqslant r+s$, le choix de s permet d'assurer que $g+h$ est un r-antécédent pour T. D'après la condition $\mathcal{H}$, il s'ensuit que

$$\|(g+h)|_K\|_K \geqslant (2-2\varepsilon)\rho_j(r).$$

Par ailleurs, on a également :

$$\|(g+h)|_K\|_K \leqslant \max\left(\sup_W |g+h|, \sup_M |g+h|\right) \leqslant r+\eta.$$

Voilà qui établit l'inégalité 8.1 et achève la preuve du lemme 60. □

On peut maintenant énoncer le résultat principal sur les quotients entre espaces de fonctions continues. Celui-ci se démontre par récurrence.

Définition : Soit K un compact dénombrablement clairsemé. On écrit son indice de Cantor sous sa forme normale : $\sigma(K) = \omega^{\alpha_1} + \cdots + \omega^{\alpha_k}$ avec $\alpha_1 \geqslant \cdots \geqslant \alpha_k$. L'entier k est appelé *nombre de patriarches* de K et noté $p(K)$.

Si on définit une nouvelle dérivation en posant $K^{\langle 1\rangle} = K^{(\omega^{o(K)})}$, l'indice associé à cette dérivation est l'entier $p(K)$.

Théorème 62 :
Soit K et L deux compacts dénombrables. On suppose qu'il existe un quotient linéaire $T : C(K) \to C(L)$. Si $\|T\| \cdot \gamma(T) < A(p(K))$, alors L est plus simple que K.

DÉMONSTRATION — On va en fait montrer par récurrence sur $p(K)$ le résultat suivant :

Fait 63 :
Soit K, L, R trois compacts dénombrables, $j \in \omega$ et $r > 1$ tels que (K, L, R, j, r) vérifie le schéma $\mathcal{H}$. Si $r < A(j + p(K))$, alors $L \preccurlyeq K$.

Le théorème 62 est un cas particulier de ce résultat avec $R = K$ et $j = 0$.

Si $p(K) = 0$, alors $\sigma(K) = 0$ et K est fini. Par conséquent, le lemme 57 initialise la récurrence.

Pour démontrer l'hérédité, on écrit $\sigma(K)$ sous sa forme normale $\sigma(K) = \omega^{\alpha_1} + \cdots + \omega^{\alpha_k}$ avec $\alpha_1 \geqslant \cdots \geqslant \alpha_k$ et on pose $\alpha = \omega^{\alpha_1}$. Une récurrence transfinie immédiate montre que, pour tous ordinaux β et γ, on a : $\left(K^{(\beta)}\right)^{(\gamma)} = K^{(\beta+\gamma)}$. Il s'ensuit immédiatement que $\sigma(K^{(\alpha)}) = \omega^{\alpha_2} + \cdots + \omega^{\alpha_k}$ et $p\left(K^{(\alpha)}\right) = p(K) - 1$.

Or, d'après le lemme 60, le quintuplet $(K^{(\alpha)}, L^{(\alpha)}, R, j+1, r)$ vérifie le schéma $\mathcal{H}$. Selon l'hypothèse de récurrence, on a donc $L^{(\alpha)} \preccurlyeq K^{(\alpha)}$. On voit immédiatement que cela entraîne $L \preccurlyeq K$. □

8.2.3 Sous-espaces

On va ramener l'étude des sous-espaces à celle des quotients.

Définition : Soit $\mathcal{C}$ une classe d'espaces de Banach et $X \in \mathcal{C}$. On dit que X est injectif pour la classe $\mathcal{C}$ lorsque, dès que X est sous-espace d'un élément Y de $\mathcal{C}$, X est automatiquement complémenté dans Y.

Théorème 64 (Sobczyk et Zippin) :

L'espace c_0 est l'unique (à isomorphisme près) espace injectif pour la classe $\mathcal{S}$ des espaces de Banach séparables. Plus précisément, si $c_0 \subseteq X$ et que X est séparable, alors il existe une projection de norme au plus 2 de X sur c_0.

Le sens direct est un résultat classique dû à A. Sobczyk (voir, par exemple, le théorème 2.f.5 de [46]). L'unicité a été prouvée par M. Zippin [61]. Les espaces de fonctions continues autres que c_0 ne peuvent bien sûr pas être injectifs pour la classe des espaces séparables. F. Cabello Sánchez, J.M.F. Castillo, N.J. Kalton et D. Yost ont montré qu'il existe un espace de Banach X contenant une copie non complémentée Z de $C(\omega^\omega + 1)$ telle que X/Z soit isomorphe à c_0. De plus, la surjection ainsi construite de X sur c_0 est strictement singulière (c'est-à-dire qu'aucune de ses restrictions n'est inversible).

Proposition 65 :

Soit K un compact dénombrable et E un espace de Banach séparable. S'il existe un isomorphisme R d'un sous-espace de X sur $C(K)$, alors il existe un quotient linéaire S de E sur $C(K)$ vérifiant $\|S\| \cdot \gamma(S) \leqslant \|R\| \cdot \|R^{-1}\|$. On a donc :

$$d_{BM}(C(K), \mathcal{Q}(X)) \leqslant d_{BM}(C(K), \mathcal{G}(X)).$$

La démonstration se fait par dualité.

Définition : Soit K un espace topologique compact. Pour $k \in K$, on note $\delta(k)$ la masse de Dirac en k. L'application $\delta : K \to B_{C(K)^*}$ est un homéomorphisme sur son image lorsqu'on munit $B_{C(K)^*}$ de sa topologie préfaible.

Lemme 66 :

Soit X un espace de Banach et $K = \{x_n^* \ ; \ n \in \omega\}$ un compact dénombrable de B_{X^*}. On suppose que $(x_n^*)_{n\in\omega}$ est équivalente à la base canonique de ℓ_1 avec constante r. Alors il existe un quotient linéaire $T : X \to C(K)$ tel que $\|T\| \leqslant 1$ et $\gamma(T) \leqslant r$.

Démonstration — Si $x \in X$, on note Tx la restriction de $x \in X^{**}$ à K. Il est clair que T prend ses valeurs dans $C(K)$ et que $\|T\| \leqslant 1$. La transposée de T est l'application

$$T^* : \left\{ \begin{array}{ccc} \ell_1(K) & \to & X^* \\ (\lambda_n)_{n\in\omega} & \mapsto & \displaystyle\sum_{n\in\omega} \lambda_n x_n^*. \end{array} \right.$$

Puisque la suite (x_n^*) est équivalente à la base canonique de ℓ_1 avec constante r, on voit que $\|(T^*)^{-1}\| \leqslant r$. Par conséquent, $\gamma(T) \leqslant r$. □

Les deux lemmes suivants permettent de relever des compacts dénombrables en raffinant le raisonnement tenu au lemme 33.

Lemme 67 :

Soit E un espace de Banach séparable et X un sous-espace de E. On munit B_{E^*} d'une distance d^* qui engendre la topologie préfaible. On désigne par Δ^* le diamètre selon la distance d^*. Enfin, on note $P : E^* \to X^*$ l'application de restriction à X.

Soit K un sous-compact dénombrable de B_{X^*} munie de la topologie préfaible. On écrit $\alpha = \sigma(K)$ et on suppose que $K^{(\alpha)} = \{r\}$. On fixe un nombre $\varepsilon > 0$. Il existe une partie $\widetilde{K}$ de K et une partie L de B_{E^*} telles que :

(K1) *$\widetilde{K}$ est homéomorphe à K.*
(K2) *$\Delta^*(\widetilde{K}) \leqslant \varepsilon$.*
(K3) *$r \in \widetilde{K}$.*

(L1) *L est un sous-compact préfaible de B_{E^*}.*
(L2) *$\Delta^*(L) \leqslant \varepsilon$.*
(L3) *$L^{(\alpha)}$ est un singleton et, notant $L^{(\alpha)} = \{s\}$, on a $Ps = r$.*

(KL) *L'application P induit un homéomorphisme de L sur $\widetilde{K}$.*

Démonstration — On remarque tout d'abord que la condition (K2) est évidente. En effet, la boule fermée (pour la distance d^*) centrée en r de rayon $\varepsilon/2$ est homéomorphe à K. On peut donc supposer que le diamètre de K lui-même est majoré par ε.

Le résultat se montre par récurrence transfinie sur α. L'initialisation correspond au cas où $K = \{r\}$. Il suffit alors de construire, grâce au théorème de Hahn-Banach un relèvement s de même norme que r puis de poser $\widetilde{K} = \{r\}$ et $L = \{s\}$.

Montrons l'hérédité. D'après le résultat de S. Mazurkiewicz et W. Sierpiński [48], K est homéomorphe à l'ordinal $\omega^\alpha + 1$. Si $\alpha = \beta + 1$, on pose $\alpha_n = \beta$ pour tout $n \in \omega$. Si α est un ordinal limite, il s'écrit comme limite d'une suite strictement croissante d'ordinaux $(\alpha_n)_{n\in\omega}$. Dans l'un et l'autre cas, on peut aisément vérifier que $\omega^\alpha + 1$ est égal à :

$$\omega^\alpha + 1 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (\omega^{\alpha_n} + 1)\right) + 1.$$

Soit $\varphi : \omega^\alpha + 1 \to K$ un homéomorphisme. Pour $n \in \omega$, on pose

$$K_n = \varphi\left(\left\{t\,;\ \sum_{k=0}^{n-1} (\omega^{\alpha_k} + 1) < t \leqslant \sum_{k=0}^{n} (\omega^{\alpha_k} + 1)\right\}\right) \quad \text{et} \quad r_n = \varphi\left(\sum_{k=0}^{n} (\omega^{\alpha_k} + 1)\right).$$

Il est clair que K_n est une partie ouverte-fermée de K, homéomorphe à $\omega^{\alpha_n}+1$. Par ailleurs, la suite $(r_n)_{n\in\omega}$ converge vers r.

D'après l'hypothèse de récurrence transfinie, il existe des parties $\widetilde{K}_n$ de K_n et L_n de B_{E^*} vérifiant les conditions (K1) à (KL) avec $\varepsilon/2^{n+2}$ à la place de ε. Notant $\{s_n\} = L_n^{(\sigma(L_n))}$, la compacité de B_{E^*} permet d'affirmer qu'il existe une suite strictement croissante d'entiers $(n_k)_{k\in\omega}$ telle que $(s_{n_k})_{k\in\omega}$ vérifie $d^*(s_{n_k}, s_{n_{k+1}}) \leqslant \varepsilon/3^{k+1}$. Sa limite s appartient à B_{E^*}. On pose alors

$$\widetilde{K} = \{r\} \cup \bigcup_{k\in\omega} \widetilde{K}_{n_k} \quad \text{et} \quad L = \{s\} \cup \bigcup_{k\in\omega} L_{n_k}.$$

On vérifie maintenant les conditions (K1) à (KL).

(K1) Commençons par montrer que $\widetilde{K}$ est compact. Soit $(\theta_n)_{n\in\omega}$ une suite de $\widetilde{K}$. Deux situations (non incompatibles) peuvent se produire :

- Il existe un indice $k \in \omega$ tel que $\widetilde{K}_{n_k}$ contienne une infinité de termes de la suite $(\theta_n)_{n\in\omega}$. La compacité de l'ensemble $\widetilde{K}_{n_k}$ assure alors que la suite $(\theta_n)_{n\in\omega}$ a une valeur d'adhérence.
- On peut trouver deux suites strictement croissantes d'entiers $(p_k)_{k\in\omega}$ et $(q_k)_{k\in\omega}$ telles que $\theta_{p_k} \in \widetilde{K}_{n_{q_k}}$. Dès lors, on a :

$$d^*(\theta_{p_k}, r) \leqslant d^*(\theta_{p_k}, r_{n_{q_k}}) + d^*(r_{n_{q_k}}, r) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{n_{q_k}+2}} + d^*(r_{n_{q_k}}, r).$$

  Puisque la suite $(r_n)_{n\in\omega}$ converge vers r, la suite $(\theta_n)_{n\in\omega}$ admet r comme valeur d'adhérence. Ceci prouve la compacité de $\widetilde{K}$.

Puisque $\widetilde{K} \subset K$ et que $K^{(\alpha)}$ est un singleton, pour prouver que K et $\widetilde{K}$ sont homéomorphes, il suffit de montrer que $\sigma(\widetilde{K}) \geqslant \alpha$. Ceci est vrai puisque $\widetilde{K}$ contient les ensembles $\widetilde{K}_{n_k}$ dont les indices de Cantor tendent vers α.

(K2) C'est évident puisqu'on s'est préalablement ramené au cas où $\Delta^*(K) \leqslant \varepsilon$.

(K3) C'est clair.

(L1) Les ensembles L_{n_k} sont compacts et leurs diamètres tendent vers 0. La suite $(s_{n_k})_{k\in\omega}$ converge vers s. Ces éléments permettent de démontrer la compacité de L exactement comme on a démontré la compacité de $\widetilde{K}$.

(L2) Le diamètre de L est manifestement majoré par la quantité

$$\sup_{p<q} \left(\Delta^*(L_{n_p}) + \Delta^*(L_{n_q}) + d^*\left(s_{n_p}, s_{n_q}\right)\right) \leqslant \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{3^i} = \varepsilon.$$

(L3) Puisque s est la limite préfaible de la suite $(s_{n_k})_{k\in\omega}$ et que l'opérateur P est préfaiblement continu, Ps est la limite préfaible de la suite $(r_{n_k})_{k\in\omega}$, c'est-à-dire r.

(KL) L'application de restriction P induit un homéomorphisme de chaque ouvert-fermé L_{n_k} sur l'ouvert-fermé $\widetilde{K}_{n_k}$ et $Ps = r$. De plus, les ensembles K_{n_k} étant disjoints, il en est de même des ensembles $\widetilde{K}_{n_k}$ et L_{n_k}. Par conséquent, P est bijective. Elle est clairement préfaiblement continue. Comme $\widetilde{K}$ et L sont compacts, il s'agit d'un homéomorphisme.

Ceci achève la preuve du lemme 67. □

On peut s'affranchir de l'hypothèse qu'il n'y a qu'un seul point dans le dernier dérivé non vide du compact K.

Lemme 68 :

Soit E un espace de Banach séparable et X un sous-espace de E. Soit K un sous-compact dénombrable de B_{X^*} muni de la topologie préfaible. Il existe un sous-compact $\widetilde{K}$ de K, homéomorphe à K, et un sous-compact L de B_{E^*} tels que l'application de restriction à X induise un homéomorphisme de L sur $\widetilde{K}$.

Démonstration — Soit $\alpha = \sigma(K)$ et $n = \#K^{(\alpha)}$. Il existe une partition de K en n parties ouvertes-fermées $K_1, \ldots, K_n$ qui ont chacune un indice de Cantor égal à α et un seul point dans le dernier dérivé non vide. L'application du lemme 67 à chacune des parties K_i fournit des ensembles disjoints $\widetilde{K}_i$ et des parties disjointes L_i de B_{E^*} vérifiant, en particulier, les conditions (K1), (L1) et (KL). En définissant $\widetilde{K} = \widetilde{K}_1 \cup \cdots \cup \widetilde{K}_n$ et $L = L_1 \cup \cdots \cup L_n$, on obtient le résultat. □

La proposition 65 est une conséquence directe des trois lemmes précédents.

Démonstration de la proposition 65 — Soit K un compact dénombrable, E un espace de Banach, X un sous-espace de E et R un isomorphisme de X sur $C(K)$. L'ensemble $M = R^*(\delta(K))$ est un sous-compact de B_{X^*} munie de la topologie préfaible. Il est homéomorphe à K. On peut supposer $\|R\| = 1$ et on pose $\|R^{-1}\| = r$. Puisque les éléments de $\delta(K)$ forment une suite isométriquement équivalente à la base canonique de ℓ_1, il est clair que les éléments de M forment une suite équivalente à la base canonique de ℓ_1 avec constante r. En appliquant le lemme 68, on construit un sous-compact L de B_{E^*}, homéomorphe à M (et donc à K) et dont les éléments forment une suite équivalente à la base canonique de ℓ_1 avec constante r. Par conséquent, le lemme 66 et le fait que $C(K)$ et $C(L)$ soient isométriques fournissent un quotient linéaire S de E sur $C(K)$ tel que $\|S\| \cdot \gamma(S) \leqslant r$. □

La proposition 65 permet d'énoncer un résultat sur les sous-espaces semblable au théorème 62.

Corollaire 69 :
Soit K et L deux compacts dénombrables. Si $d_{BM}(C(K), \mathcal{G}(C(L))) < A(p(L))$, alors K est plus simple que L.

Démonstration — En vertu de la proposition 65, les hypothèses du corollaire assurent qu'il existe un quotient linéaire $S : C(L) \to C(K)$ tel que $\|S\| \cdot \gamma(S) < A(p(L))$. Par conséquent, le théorème 62 implique que K est plus simple que L. □

Chapitre 9

Perturbations d'isométries entre espaces de fonctions continues

L'objet de ce chapitre est d'étudier la situation où deux espaces de fonctions continues sont proches au sens de la distance de Gromov-Hausdorff. Ceci s'applique en particulier lorsque ces deux espaces sont proches au sens des distances de Lipschitz, uniforme ou de réseau, généralisant ainsi le résultat de K. Jarosz [30] rappelé au paragraphe 9.2. Ce travail a été réalisé en collaboration avec N.J. Kalton lors de son séjour à l'Université Pierre et Marie Curie en mai 2002. Avant de mener cette étude, on présente les conséquences qui découlent directement des faits établis dans les chapitres précédents.

9.1 Compilation des résultats précédents

9.1.1 Contrôle universel de l'indice de Cantor

Proposition 70 :
Il existe une fonction universelle $\psi : \omega_1 \to \omega_1$ telle que, si K est un compact dénombrablement clairsemé et L un compact, alors

$$C(K) \twoheadrightarrow_L C(L) \implies \sigma(L) \leqslant \psi\big(\sigma(K)\big).$$

Démonstration — D'après les théorèmes 24 et 55, l'existence d'un quotient lipschitzien de $C(K)$ sur $C(L)$ entraîne (on peut bien sûr supposer que la fonction ψ_1 donnée par le théorème 24 est croissante) :

$$\sigma(L) < \omega^{o(L)+1} = \mathrm{Sz}\,(C(L)) \leqslant \psi_1\big(\mathrm{Sz}\,(C(K))\big) = \psi_1\left(\omega^{o(K)+1}\right) \leqslant \psi_1\big(\sigma(K)\cdot\omega\big).$$

Il suffit donc de prendre, pour tout $\xi < \omega_1$, $\psi(\xi) = \psi_1(\xi \cdot \omega)$. □

9.1.2 Classification isomorphique

Proposition 71 :
Soit K et L deux espaces compacts métrisables. Si la distance de Kadets séparant $C(K)$ de $C(L)$ est strictement inférieure à 1, alors $C(K)$ et $C(L)$ sont isomorphes.

L'énoncé de cette proposition n'est pas totalement satisfaisant puisqu'on s'attend plutôt à ce qu'un seul des deux compacts soit supposé métrisable. Ce problème est grâce au fait 76 au prix d'une constante 1/2 à la place de 1 au niveau de la distance de Kadets.

DÉMONSTRATION — Si K et L sont tous deux non dénombrables, le théorème 53 de Milutin assure que $C(K)$ et $C(L)$ sont isomorphes. On peut donc supposer K dénombrable. Soit η un nombre tel que $d_K(C(K), C(L)) < \eta < 1$. En appliquant le lemme 34, on voit que

$$S(C(L); 2) \leqslant S(C(K); 2 - 2\eta).$$

D'après la proposition 32 et le théorème 55, on trouve

$$S(C(L); 2) \leqslant \mathrm{Sz}\,(C(K)) \leqslant \omega^{o(K)+1}. \tag{9.1}$$

Soit $\alpha = \sigma(L)$. Par une récurrence transfinie immédiate, on construit une famille $(l_s)_{s \in T_\alpha}$ dans L telle que :

1. $\forall s, t \in T_\alpha, \quad s \neq t \Longrightarrow l_s \neq l_t.$
2. $\forall s \in T'_\alpha, \quad l_{s^\frown n} \longrightarrow l_s.$

La famille $(\delta(l_s))_{s \in T_\alpha}$ vérifie les conditions (1) et $(2)_2$ définies page 61. Par conséquent, $S(C(L); 2) > \alpha$. En tenant compte de l'inégalité (9.1), ceci montre que L est dénombrablement clairsemé et que $o(L) \leqslant o(K)$. Comme L est métrisable, le compact L est lui aussi dénombrable. La situation est donc symétrique et $o(K) = o(L)$, ce qui implique que $C(K)$ et $C(L)$ sont isomorphes d'après le théorème 53. □

Ce résultat est optimal puisqu'une distance de Kadets est toujours inférieure ou égale à 1. Afin d'étendre ce résultat aux compacts dénombrablement clairsemés, on montre un lemme de saturation séparable.

Lemme 72 :

1. *Soit X et Y deux sous-espaces d'un espace de Banach E et $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$ des sous-espaces séparables. Pour tout $\varepsilon > \Lambda_E(X, Y)$, il existe des sous-espaces séparables A_ε et B_ε tels que $A \subseteq A_\varepsilon \subseteq X$, $B \subseteq B_\varepsilon \subseteq Y$ et $\Lambda_E(A_\varepsilon, B_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$.*
2. *Soit K, L deux compacts et $\varepsilon > 0$ un nombre tel que $d_K(C(K), C(L)) < \varepsilon$. Soit $A \subseteq C(K)$, $B \subseteq C(L)$ des sous-espaces séparables. Il existe deux compacts $\widetilde{K}$ et $\widetilde{L}$ tels que :*
   - *(a) Il existe des surjections continues ρ_K de K sur $\widetilde{K}$ et ρ_L de L sur $\widetilde{L}$.*
   - *(b) Le sous-espace $\left\{f \circ \rho_K \ ; \ f \in C(\widetilde{K})\right\}$ contient A tandis que B est inclus dans $\left\{g \circ \rho_L \ ; \ g \in C(\widetilde{L})\right\}$.*
   - *(c) $\widetilde{K}$ et $\widetilde{L}$ sont métrisables.*
   - *(d) $d_K(C(\widetilde{K}), C(\widetilde{L})) \leqslant \varepsilon$.*

DÉMONSTRATION —

1. Soit $\varepsilon > \Lambda_E(X, Y)$. On pose $A_0 = A$ et $B_0 = B$ puis, en supposant que A_n et B_n sont des sous-espaces séparables de X et Y déjà construits, on introduit une famille

$(x_{n,p})_{p\in\omega}$ dense dans S_{A_n}. Il existe alors $y_{n,p} \in S_Y$ tel que $\|x_{n,p} - y_{n,p}\|_E < \varepsilon$. On définit ensuite :

$$B_{n+1} = \overline{\text{vect}}\Big[B_n \cup \big\{y_{n,p}\ ;\ p \in \omega\big\}\Big].$$

L'espace B_{n+1} est séparable. Soit donc $(z_{n,p})_{p\in\omega}$ une suite dense dans $S_{B_{n+1}}$. Pour chaque $p \in \omega$, il existe $w_{n,p} \in S_X$ tel que $\|w_{n,p} - z_{n,p}\|_E < \varepsilon$. L'espace

$$A_{n+1} = \overline{\text{vect}}\Big[A_n \cup \big\{w_{n,p}\ ;\ p \in \omega\big\}\Big]$$

est séparable et on peut donc poursuivre la construction. Lorsque celle-ci est achevée, on pose :

$$A_\varepsilon = \overline{\bigcup_{n\in\omega} A_n} \qquad \text{et} \qquad B_\varepsilon = \overline{\bigcup_{n\in\omega} B_n}.$$

Il est alors clair que A_ε et B_ε sont des sous-espaces séparables de X et Y contenant A et B respectivement et tels que $\Lambda_E(A_\varepsilon, B_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$.

2. Soit ε un nombre tel que $d_K(C(K), C(L)) < \varepsilon < 1$. Soit E un espace de Banach contenant des copies isométriques de $C(K)$ et $C(L)$ (copies confondues avec les espaces eux-mêmes) de sorte que $\Lambda_E(C(K), C(L)) < \varepsilon$. Rappelons un lemme bien connu :

Lemme 73 :
Soit K un compact et $A \subseteq C(K)$ un sous-espace séparable. Il existe un compact métrisable K_1 et une surjection continue $r : K \to K_1$ telle que le sous-espace $\{f \circ r\ ;\ f \in C(K_1)\}$ contienne A.

On applique une première fois ce lemme et on note K_1 et L_1 les compacts ainsi obtenus, r et s les surjections continues et

$$A^1 = \{f \circ r\ ;\ f \in C(K_1)\}, \quad B^1 = \{g \circ s\ ;\ g \in C(L_1)\}.$$

On applique alors l'assertion 1 à ces deux sous-espaces, ce qui fournit $A^2 = A^1_\varepsilon$ et $B^2 = B^1_\varepsilon$ séparables, contenant A^1, B^1 et tels que $\Lambda_E(A^2, B^2) < \varepsilon$. Une nouvelle application du lemme 73 permet de construire A^3 et B^3. On poursuit par récurrence. On pose enfin

$$A' = \overline{\bigcup_{n\in\omega} A^{2n+1}} = \overline{\bigcup_{n\in\omega} A^{2n+2}} \qquad \text{et} \qquad B' = \overline{\bigcup_{n\in\omega} B^{2n+1}} = \overline{\bigcup_{n\in\omega} B^{2n+2}}.$$

Chaque sous-espace A^{2n+1} est une sous-algèbre unifère de $C(K)$. Il en est donc de même de A'. Soit $\sim$ la relation d'équvalence sur K :

$$\forall a, b \in K, \qquad a \sim b \iff \forall f \in A', \quad f(a) = f(b).$$

Soit $\widetilde{K}$ l'espace-quotient et $\rho_K : K \to \widetilde{K}$ la surjection canonique. Le théorème de Stone-Weierstrass prouve alors que $A' = \{f \circ \rho_K\ ;\ f \in C(\widetilde{K})\}$. Le même raisonnement peut être tenu avec B'. Enfin, A' et B' sont proches géométriquement : $\Lambda_E(A', B') \leqslant \varepsilon$. En effet, il suffit de calculer cet écart sur les familles de vecteurs $(x_{n,p})$ et $(z_{n,p})$ qui sont denses dans $S_{A'}$ et $S_{B'}$. Comme les espaces $C(\widetilde{K})$ et $C(\widetilde{L})$ sont isométriques à A' et B' respectivement, on obtient $d_K(C(\widetilde{K}), C(\widetilde{L})) \leqslant \varepsilon$. □

Corollaire 74 :
Soit K et L deux compacts. Si on suppose que K est dénombrablement clairsemé et que $d_K(C(K), C(L)) < 1$, alors $\mathrm{Sz}\,(C(K)) = \mathrm{Sz}\,(C(L))$.

DÉMONSTRATION — Soit ε un nombre tel que $d_K(C(K), C(L)) < \varepsilon < 1$. Soit E un espace de Banach contenant des copies isométriques de $C(K)$ et $C(L)$ (copies confondues avec les espaces eux-mêmes) de sorte que $\Lambda_E(C(K), C(L)) < \varepsilon$. Soit A et B des sous-espaces séparables arbitraires de $C(K)$ et $C(L)$ respectivement. D'après l'assertion 2 du lemme 72, il existe des compacts métrisables $\widetilde{K}$ et $\widetilde{L}$ et des sous-espaces A' de $C(K)$ et B' de $C(L)$ tels que :

1. $A \subseteq A'$ et $B \subseteq B'$.
2. A' est isométrique à $C(\widetilde{K})$ et B' est isométrique à $C(\widetilde{L})$.
3. $d_K\left(C(\widetilde{K}), C(\widetilde{L})\right) \leqslant \varepsilon < 1$.

D'après la proposition 71, les deux espaces $C(\widetilde{K})$ et $C(\widetilde{L})$ sont isomorphes. Il ont donc le même indice de Szlenk. En particulier, on trouve $\mathrm{Sz}\,(B) \leqslant \mathrm{Sz}\,(C(K))$. Puisque l'indice de Szlenk dénombrable est séparablement déterminé (voir la proposition 4.12 de [42]) et que le sous-espace B est arbitraire, on obtient $\mathrm{Sz}\,(C(L)) \leqslant \mathrm{Sz}\,(C(K))$. En particulier, L est dénombrablement clairsemé. La situation étant symétrique, un raisonnement identique fournit l'inégalité inverse et on obtient finalement $\mathrm{Sz}\,(C(K)) = \mathrm{Sz}\,(C(L))$. □

Corollaire 75 :
Il existe une constante universelle $\delta > 0$ ayant les propriétés suivantes dès que K et L sont compacts :

$$\left.\begin{array}{r} K \text{ est métrisable} \\ d_{GH}(C(K), C(L)) < \delta \end{array}\right\} \Longrightarrow C(K) \simeq C(L).$$

$$\left.\begin{array}{r} K \text{ est dénombrablement clairsemé} \\ d_{GH}(C(K), C(L)) < \delta \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathrm{Sz}\,(C(K)) = \mathrm{Sz}\,(C(L)).$$

DÉMONSTRATION — La fonction ζ ayant été introduite au théorème 10, on peut définir $\delta = \zeta^{-1}(1/200)$. D'après le théorème 9, les espaces de fonctions continues sur des compacts sont des $\mathcal{K}_0$-espaces avec constante 100 donc, lorsque K et L sont deux compacts quelconques, $d_{GH}(C(K), C(L)) < \delta$ implique $d_K(C(K), C(L)) < 1/2 < 1$. Dès lors, la seconde assertion résulte du corollaire 74. Pour établir la première, il suffit de montrer que L est métrisable (et donc que $C(L)$ est séparable) afin d'appliquer la proposition 71. Cela résulte immédiatement du fait suivant :

Fait 76 (Ostrovskii) :
Soit X et Y deux espaces de Banach. On suppose que X est séparable et que $d_K(X, Y) < 1/2$. Alors Y est séparable.

Pour montrer ce fait, supposons par l'absurde que Y n'est pas séparable. Soit $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$ deux nombres tels que $d_K(X, Y) < \varepsilon < 1/2$ et $1 - \eta - 2\varepsilon > 0$. Soit $(y_i)_{i \in I}$ une famille maximale dans B_Y telle que pour tous $i \neq j$ dans I, $\|y_i - y_j\|_Y \geqslant 1 - \eta$. Soit E un espace

de Banach contenant des copies isométriques de X et Y (encore notées X et Y) telles que $\Lambda_E(X,Y) < \varepsilon$. Pour chaque $i \in I$, on peut trouver $x_i \in B_X$ tel que $\|x_i - y_i\|_E < \varepsilon$. Alors, dès que $i \neq j$ dans I, il vient :

$$\|x_i - x_j\|_X \geqslant \|y_i - y_j\|_Y - 2\varepsilon > 1 - \eta - 2\varepsilon > 0.$$

Puisque X est séparable et que la famille $(x_i)_{i\in I}$ ne s'accumule pas, l'ensemble I est dénombrable. Le sous-espace Z de Y engendré par $\{y_i \ ; \ i \in I\}$ est alors séparable et est donc distinct de Y. Par le théorème de Hahn-Banach, il existe alors $y^* \in S_{Y^*}$ tel que $y^* = 0$ sur Z. Soit $y_o \in B_Y$ tel que $\langle y^*, y_o\rangle \geqslant 1 - \eta$. Cela entraîne immédiatement que la famille $(y_i)_{i\in I}$ n'était pas maximale. Cette contradiction prouve le fait 76. □

La méthode suivie ici est très détournée et ne fournit pas le meilleur théorème possible. Le corollaire 75 sera nettement amélioré dans la suite de ce chapitre. Toutefois, les résultats intermédiaires sur la distance de Kadets (proposition 71 et corollaire 74) sont optimaux.

9.1.3 Classification isométrique

Proposition 77 :
Il existe une fonction universelle $\mu : \omega^* \times \omega^* \to]0,1]$ telle que, si K et L sont deux compacts dénombrables, alors :

$$d_{GH}(C(K), C(L)) < \mu\big(p(K), p(L)\big) \implies K \text{ est homéomorphe à } L.$$

Démonstration —
Soit p et q deux entiers non nuls. La fonction A étant celle introduite au paragraphe 8.2.2 et la fonction ζ étant donnée par le théorème 10, on pose :

$$\mu(p,q) = \zeta^{-1}\left(\frac{1 - \big[A\big(\max(p,q)\big)\big]^{-1}}{200}\right).$$

Soit K et L deux compacts dénombrables tels que

$$d_{GH}(C(K), C(L)) < \mu(p(K), p(L)).$$

D'après le théorème 9, $C(K)$ et $C(L)$ sont des $\mathcal{K}_o$-espaces avec constante 100. En appliquant le théorème 10, on voit que

$$d_K(C(K), C(L)) < \frac{1 - \big[A\big(\max(p,q)\big)\big]^{-1}}{2} = \eta_o.$$

Il existe donc un espace de Banach séparable E et des copies isométriques X et Y de $C(K)$ et $C(L)$ dans E tels que $\Lambda_E(X,Y) < \eta_o$. En appliquant le lemme 68 au compact $\delta(K) \subset B_{X^*}$, on trouve un sous-compact $\widetilde{K}$ de $\delta(K)$ et un sous-compact L_o de B_{E^*} tels que la restriction $P : E^* \to X^*$ induise un homéomorphisme de L_o sur $\widetilde{K}$. Soit $Q : E^* \to Y^*$ l'application de restriction à Y et $\widetilde{L} = Q(L_o)$. Les propriétés vérifiées par $\widetilde{L}$ sont regroupées dans les faits suivants :

Fait 78 :
Q induit un homéomorphisme de L_o sur $\widetilde{L}$. En particulier, les compacts K, $\widetilde{K}$ et $\widetilde{L}$ sont homéomorphes.

DÉMONSTRATION DU FAIT 78 — La continuité et la surjectivité étant acquises, il suffit de démontrer que $Q|_{L_o}$ est injective. Soit e_1^* et e_2^* deux éléments distincts de L_o. Soit $y_1^* = Q(e_1^*)$, $y_2^* = Q(e_2^*)$, $x_1^* = P(e_1^*)$ et $x_2^* = P(e_2^*)$. Puisque P induit un homéomorphisme de L_o sur $\widetilde{K}$, les formes linéaires x_1^* et x_2^* sont distinctes. Comme $x_1^*,\ x_2^* \in \delta(K)$, on a $\|x_1^* - x_2^*\| = 2$. On fixe $\varepsilon > 0$. Il existe alors $x \in S_X$ tel que $\langle x_1^* - x_2^*, x\rangle > 2 - \varepsilon$. Soit maintenant $y \in S_Y$ tel que $\|x - y\|_E < \eta_o$. On trouve $\langle y_1^* - y_2^*, y\rangle > 2 - \varepsilon - 2\eta_o$. Puisque $\eta_o < 1/2$, il est possible de trouver $\varepsilon > 0$ tel que $2 - \varepsilon - 2\eta_o > 0$. Par conséquent, $y_1^* \neq y_2^*$. Cela prouve l'injectivité de $Q|_{L_o}$. □

Fait 79 :

Les éléments de $\widetilde{L}$ forment une suite équivalente à la base canonique de ℓ_1 avec constante strictement inférieure à $A\big(\max(p(K), p(L))\big)$.

DÉMONSTRATION DU FAIT 79 — On indexe les éléments de L_o en une suite $(e_n^*)_{n\in\omega}$ et, pour tout $n \in \omega$, on pose $x_n^* = P(e_n^*)$ et $y_n^* = Q(e_n^*)$. Soit $y \in S_Y$. On introduit $\eta < \eta_o$ et on fixe $\varepsilon > 0$. Soit $(\lambda_n)_{n\in\omega}$ une suite presque nulle de scalaires telle que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n| = 1.$$

Puisque $\{x_n^*\ ;\ n \in \omega\} \subset \delta(K)$, la suite $(x_n^*)_{n\in\omega}$ est isométriquement équivalente à la base canonique de ℓ_1. Par conséquent, il existe $x \in S_X$ tel que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \langle \lambda_n x_n^*, x\rangle \geqslant 1 - \varepsilon.$$

On introduit ensuite $y \in S_Y$ tel que $\|y - x\|_E \leqslant \eta$. Il vient :

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n y_n^*\right\| &\geqslant \sum_{n=0}^{\infty} \langle \lambda_n y_n^*, y\rangle \\ &\geqslant \sum_{n=0}^{\infty} \langle \lambda_n x_n^*, x\rangle - 2\eta \\ &\geqslant 1 - \varepsilon - 2\eta.\end{aligned}$$

En faisant tendre ε vers 0, on voit que la suite $(y_n^*)_{n\in\omega}$ est équivalente à la base canonique de ℓ_1 avec constante $(1 - 2\eta)^{-1} < A\big(\max(p(K), p(L))\big)$. □

En appliquant le fait 79 et le lemme 66, on voit qu'il existe un quotient linéaire T de $C(L)$ sur $C(\widetilde{L})$ tel que $\|T\| \cdot \gamma(T) < A\big(\max(p(K), p(L))\big) \leqslant A(p(L))$. Par conséquent, d'après le théorème 62, $\widetilde{L} \preccurlyeq L$. Comme K est homéomorphe à $\widetilde{L}$ d'après le fait 78, K est plus simple que L. La symétrie de la situation fournit donc l'égalité des systèmes caractéristiques de K et L. Enfin, le théorème de Mazurkiewicz et Sierpiński montre que K et L sont homéomorphes. □

Corollaire 80 :

On considère la même fonction μ qu'à la proposition 77. Si K et L sont des compacts dénombrablement clairsemés, alors :

$$d_{GH}(C(K), C(L)) < \mu\big(p(K), p(L)\big) \implies \mathrm{sc}(K) = \mathrm{sc}(L).$$

DÉMONSTRATION — Le corollaire 80 se déduit de la proposition 77 en se ramenant à des sous-espaces séparables. Cette généralisation se fait comme au corollaire 74 pour l'indice de Szlenk. On se contente de préciser les endroits où les deux preuves diffèrent. La proposition 4.12 de [42] sur la détermination séparable de l'indice de Szlenk ne sert plus. A sa place, on utilise le fait suivant sur la détermination séparable du système caractéristique :

Fait 81 (Baker) :
Soit K un compact dénombrablement clairsemé. Si K_0 est un compact dénombrable de même système caractéristique que K, alors K_0 est l'image continue de K.

Ce résultat est dû à J.W. Baker [4]. Il entraîne trivialement que $C(K)$ contient une copie isométrique de $C(K_0)$ et donc que le système caractéristique peut être calculé en ne considérant que les sous-espaces séparables. Le reste de la preuve est inchangé. □

Signalons un résultat de G.M. Lövblom [47] qui montre que, si K et L sont deux compacts métrisables et que $f : C(K) \to C(L)$ est une isométrie (non nécessairement surjective) telle que $f(0) = 0$, alors il existe un sous-compact M de K tel que l'application $x \mapsto f(x)|_M$ soit une isométrie linéaire de $C(K)$ dans $C(M)$. En particulier, lorsque K et L sont dénombrables, cela entraîne que K est plus simple que L. Ce résultat a été généralisé à tous les espaces de Banach séparables par G. Godefroy et N.J. Kalton [22] : si X est un espace de Banach séparable et Y un espace de Banach contenant une partie isométrique à X, alors Y contient un sous-espace isométrique à X.

9.2 Le théorème de Jarosz

K. Jarosz a démontré [30] que le théorème d'Amir-Cambern pouvait se généraliser au cas lipschitzien.

Théorème 82 (Jarosz) :
Il existe une constante universelle $\varepsilon_0 > 0$ telle que, si K et L sont deux compacts vérifiant $d_L(C(K), C(L)) < 1 + \varepsilon_0$, alors K et L sont homéomorphes.

Tous les résultats du paragraphe 9.1.3 sont des généralisations partielles de ce théorème. Certes, ceux-ci s'appliquent lorsque les espaces $C(K)$ et $C(L)$ sont uniformément homéomorphes (ou même encore lorsqu'ils possèdent des réseaux équivalents) mais ils ne fournissent pas de constante universelle. L'approche développée dans la partie suivante est plus directe et permet de résoudre ce problème.

9.3 Espaces de fonctions continues et distance de Gromov-Hausdorff (avec N.J. Kalton)

9.3.1 Homogénéité positive et quasi-linéarité

Définition : Soit X et Y deux espaces de Banach.

- On dit que $f : X \to Y$ est positivement homogène lorsque $f(tx) = tf(x)$ pour tout $t \geqslant 0$ et tout $x \in X$. La notion de norme d'une application homogène est étendue sans changement aux applications positivement homogènes :

$$\|f\| = \sup_{x \in B_X} \|f(x)\|_Y .$$

- Soit $\varepsilon > 0$. On dit d'une application $f : X \to Y$ qu'elle est de type $Q(\varepsilon)$ lorsqu'elle satisfait les trois propriétés suivantes :
  1. f est positivement homogène.
  2. $\|f\| \leqslant 1$.
  3. $\forall x_1, x_2 \in X, \quad \|f(x_1 + x_2) - f(x_1) - f(x_2)\|_Y \leqslant \varepsilon (\|x_1\|_X + \|x_2\|_X)$.

Lemme 83 :
Soit X un $\mathcal{K}_o$-espace et $\kappa > \kappa_o(X)$. Si $f : X \to \mathbb{R}$ est une application de type $Q(\varepsilon)$, alors il existe $x^* \in X^*$ telle que $\|f - x^*\| \leqslant (1 + \kappa)\varepsilon$.
En particulier, si K est un compact et que $f : C(K) \to \mathbb{R}$ est de type $Q(\varepsilon)$, alors il existe $\mu \in C(K)^*$ telle que $\|f - \mu\| \leqslant 101\,\varepsilon$.

Démonstration — Soit $f : X \to Y$ une application de type $Q(\varepsilon)$. Pour tout $x \in X$, on pose :

$$g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2\,\varepsilon}.$$

Des vérifications triviales montrent que g est quasi-linéaire. Par conséquent, puisque X est un $\mathcal{K}_o$-espace, il existe $y^* \in X^*$ telle que $\|g - y^*\| \leqslant \kappa$. La condition 3 de la définition du type $Q(\varepsilon)$ appliquée avec $x_1 = x \in B_X$ et $x_2 = -x$ donne $|f(x) + f(-x)| \leqslant 2\,\varepsilon$. En posant $x^* = \varepsilon y^*$, on obtient donc :

$$\|f - x^*\| \leqslant \|f - \varepsilon g\| + \varepsilon\,\|g - y^*\| \leqslant (1 + \kappa)\varepsilon.$$

Le cas de l'espace $C(K)$ est un conséquence triviale de cette première affirmation puisque, d'après le théorème 9, $C(K)$ est un $\mathcal{K}_o$-espace avec $\kappa_o(C(K)) < 100$. □

9.3.2 Mesurabilité universelle

Définition : Soit $(B, \mathcal{M})$ un espace borélien standard.
- Soit λ une mesure signée finie sur $\mathcal{M}$. Une partie A de B est dite négligeable lorsqu'elle est incluse dans un élément $M \in \mathcal{M}$ tel que $|\lambda|\,(M) = 0$.
- Pour toute mesure signée finie λ, on note $\mathcal{M}_\lambda$ la tribu formée par les réunions $M \cup N$ où $M \in \mathcal{M}$ et N est négligeable.
- On dit d'une partie A de B qu'elle est universellement mesurable lorsqu'elle est dans toutes les tribus $\mathcal{M}_\lambda$ pour λ une mesure signée finie quelconque sur $\mathcal{M}$. On peut montrer que toute partie analytique de B est universellement mesurable.
- Si B' est un autre espace borélien standard, on dit qu'une fonction $f : B \to B'$ est universellement mesurable lorsque l'image réciproque de tout borélien est universellement mesurable. Lorsque $B' = \mathbb{R}$, que f est universellement mesurable et bornée, on peut définir $\int_B f(b)\,d\lambda(b)$ pour toute mesure signée finie λ sur $\mathcal{M}$.

On rappelle le théorème suivant qui sera utile :

Théorème 84 :
Soit A et B deux espaces polonais et $A' \subset A$, $B' \subset B$ des parties analytiques de A et B. Si π est une surjection continue de A' sur B', alors π admet un inverse à droite universellement mesurable.

Il s'agit d'une forme légèrement simplifiée du théorème 4.3 de [14].

9.3.3 Proximité géométrique

Voici le résultat principal de ce chapitre.

Théorème 85 :
Soit K et L deux compacts métrisables et $\varepsilon > 0$ un nombre. On suppose qu'il existe deux applications continues $T : C(K) \to C(L)$ et $S : C(L) \to C(K)$ de type $Q(\varepsilon)$ vérifiant :

$$\forall (x,y) \in C(K) \times C(L), \quad \begin{cases} \|STx - x\|_K \leqslant \varepsilon \|x\|_K \\ \|TSy - y\|_L \leqslant \varepsilon \|y\|_L \end{cases} \tag{9.2}$$

Si $\varepsilon < a$, alors il existe un homéomorphisme $\theta : K \to L$ et une application continue $\psi : K \to \{\pm 1\}$ satisfaisant :

$$\forall y \in C(L), \quad \|Sy - \psi \cdot (y \circ \theta)\|_K \leqslant b\,\varepsilon \|y\|_L \tag{9.3}$$

où a et b sont des constantes universelles strictement positives.

En bref, ce théorème affirme que, entre des espaces de fonctions continues sur des compacts métrisables, les seuls couples d'applications *presque linéaires* de norme 1 qui sont *proches d'être inverses* l'une de l'autre sont des perturbations d'isométries linéaires inverses l'une de l'autre.

Démonstration — Dans un but de clarté, on rappelle que, pour $k \in K$, on note $\delta(k)$ la masse de Dirac au point k. En tant que mesure sur K, c'est un élément de $C(K)^*$ de norme 1. On considère de même $\delta(l)$ lorsque $l \in L$. La preuve se décompose en six étapes.

1. « Transposition » de T et S

Pour $\mu \in S_{C(K)^*}$, on peut introduire l'application $\mu \circ S : C(L) \to \mathbb{R}$. Elle est clairement de type $Q(\varepsilon)$. D'après le lemme 83, il existe des formes linéaires $\nu \in C(L)^*$ telles que

$$\|\nu - \mu \circ S\| \leqslant 101\,\varepsilon.$$

On note $\mathcal{N}(\mu)$ l'ensemble de ces formes linéaires ν. L'ensemble

$$W = \Big\{(\mu, \nu)\ ;\ \mu \in S_{C(K)^*},\ \nu \in \mathcal{N}(\mu)\Big\}$$

est normiquement fermé. Il est donc analytique pour la topologie préfaible (c'est l'image continue d'un fermé). Soit Π_1 et Π_2 les deux projections :

$$\forall (\mu, \nu) \in W, \qquad \Pi_1(\mu, \nu) = \mu \quad \text{et} \quad \Pi_2(\mu, \nu) = \nu.$$

Puisque W est analytique et que Π_1 est continue, le théorème 84 assure que Π_1 admet un inverse à droite universellement mesurable q. L'application $S^* : S_{C(K)^*} \to C(L)^*$ définie par $S^* = \Pi_2 \circ q$ est alors universellement mesurable.
On étend la définition de S^* à tout $C(K)^*$ par homogénéité positive. On définit de même $T^* : C(L)^* \to C(K)^*$, universellement mesurable et telle que :

$$\forall \nu \in C(L)^*, \quad \|T^*\nu - \nu \circ T\| \leqslant 101\,\varepsilon. \tag{9.4}$$

2. Représentation intégrale approchée

Comme les applications T^* et S^* sont universellement mesurables, on peut considérer, pour toute mesure $\mu \in C(K)^*$, l'intégrale

$$\int_K \left[S^*\delta(k)\right] d\mu(k).$$

Celle-ci est définie au sens préfaible, c'est-à-dire que la mesure intégrale est l'unique mesure vérifiant, pour tout $y \in C(L)$:

$$\left\langle \int_K \left[S^*\delta(k)\right] d\mu(k), y \right\rangle = \int_K \langle S^*\delta(k), y\rangle \, d\mu(k).$$

On a alors, pour tout $\mu \in C(K)^*$:

$$\begin{aligned}\left\| S^*\mu - \int_K \left[S^*\delta(k)\right] d\mu(k) \right\| &\leqslant \|S^*\mu - \mu \circ S\| + \\ &\qquad \left\| \int_K \left[\delta(k) \circ S\right] d\mu(k) - \int_K \left[S^*\delta(k)\right] d\mu(k) \right\| \\ &\leqslant 202\,\varepsilon\,\|\mu\|\end{aligned}$$

De même, lorsque $\nu \in C(L)^*$, on trouve :

$$\left\| T^*\nu - \int_L \left[T^*\delta(l)\right] d\nu(l) \right\| \leqslant 202\,\varepsilon\,\|\nu\|. \tag{9.5}$$

3. Fonctions multivaluées entre K et L

L'objet de cette partie est de démontrer que les mesures images des masses de Dirac par T^* et S^* ont une masse significative en au moins un point. Pour $l \in L$ et $k \in K$, on pose :

$$T^*\delta(l) = \alpha_k(l)\delta(k) + \mu_{lk} \quad \text{et} \quad S^*\delta(k) = \beta_l(k)\delta(l) + \nu_{kl}$$

avec $\mu_{lk}(\{k\}) = 0$ et $\nu_{kl}(\{l\}) = 0$. Comme S^* et T^* sont universellement mesurables, il en est de même des fonctions α_k et β_l. On cherche à minorer les bornes supérieures des fonctions $|\alpha_k|$ et $|\beta_l|$. Pour ce faire, on fixe $k \in K$ et on définit $\nu = S^*\delta(k)$. En utilisant les relations (9.4) puis (9.2), on obtient les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}\|T^*\nu - \delta(k)\| &\leqslant \|\nu \circ T - \delta(k)\| + 101\,\varepsilon \\ &\leqslant \|\delta(k) \circ ST - \delta(k)\| + 202\,\varepsilon \\ &\leqslant 203\,\varepsilon.\end{aligned}$$

L'application de la propriété (9.5) donne alors :

$$\left\| \delta(k) - \int_L \left[T^*\delta(l)\right] d\nu(l) \right\| \leqslant 405\,\varepsilon. \tag{9.6}$$

Puisque la mesure intégrale est définie au sens préfaible, il n'est pas *a priori* licite d'appliquer l'inégalité précédente en χ_k, fonction caractéristique du singleton $\{k\}$. Toutefois, puisque le compact K est métrique, il existe une suite $(f_n)_{n\in\omega}$ de fonctions continues sur K, positives, majorées par 1 et convergeant simplement vers χ_k. Le théorème de convergence dominé appliqué à cette suite permet d'écrire :

$$\left\langle \int_L \left[T^*\delta(l)\right] d\nu(l), \chi_k \right\rangle = \int_L \langle T^*\delta(l), \chi_k\rangle \, d\nu(l) = \int_L \alpha_k(l)\, d\nu(l).$$

L'inégalité (9.6) implique donc :

$$\left|1-\int_L \alpha_k\, d\nu(l)\right| \leqslant 405\,\varepsilon \quad \text{d'où} \quad \|\alpha_k\|_\infty \|\nu\| \geqslant \left|\int_L \alpha_k(l)\, d\nu(l)\right| \geqslant 1-405\,\varepsilon.$$

Comme $\|\nu\| \leqslant 1+101\,\varepsilon$ d'après la propriété (9.4), on obtient :

$$\|\alpha_k\|_\infty \geqslant \frac{1-405\,\varepsilon}{1+101\,\varepsilon} > 1-506\varepsilon. \tag{9.7}$$

Pour $k \in K$, on pose alors

$$\Theta(k) = \Big\{l \in L \ ; \ |\alpha_k(l)| \geqslant 1-506\varepsilon\Big\}.$$

L'application Θ est une fonction multivaluée de K dans $\mathcal{P}(L)\setminus\{\varnothing\}$. On définit de même $\Sigma : L \to \mathcal{P}(K)\setminus\{\varnothing\}$ par :

$$\Sigma(l) = \Big\{k \in K \ ; \ |\beta_l(k)| \geqslant 1-506\varepsilon\Big\}.$$

En utilisant la majoration $\|T^*\delta(l)\| \leqslant 1+101\,\varepsilon$, on remarque que si $l \in \Theta(k)$ $\Big[$respectivement $k \in \Sigma(l)\Big]$, alors :

$$\|\mu_{lk}\| \leqslant 607\,\varepsilon \quad \Big[\text{respectivement} \quad \|\nu_{kl}\| \leqslant 607\,\varepsilon\Big]. \tag{9.8}$$

4. Applications entre K et L

On fixe $k \in K$ et $l \in \Theta(k)$. D'après les inégalités (9.8) et (9.4), on a :

$$\|\alpha_k(l)\delta(k) - \delta(l)\circ T\| \leqslant \|\alpha_k(l)\delta(k) - T^*\delta(l)\| + \|T^*\delta(l) - \delta(l)\circ T\| \leqslant 708\,\varepsilon.$$

Comme $|\alpha_k(l)| \geqslant 1-506\varepsilon \geqslant 1/2$, on trouve :

$$\left\|\delta(k) - \frac{1}{\alpha_k(l)}\delta(l)\circ T\right\| \leqslant 1416\varepsilon. \tag{9.9}$$

Puisque

$$\|\delta(k)\circ S - S^*\delta(k)\| \leqslant 101\,\varepsilon \quad \text{et que} \quad \left\|\frac{1}{\alpha_k(l)}\delta(l)\circ TS - \frac{\delta(l)}{\alpha_k(l)}\right\| \leqslant 2\,\varepsilon,$$

l'inégalité (9.9) donne :

$$\left\|S^*\delta(k) - \frac{\delta(l)}{\alpha_k(l)}\right\| \leqslant 1519\,\varepsilon.$$

En utilisant (9.8), il s'ensuit aussitôt que

$$\left|\beta_l(k) - \frac{1}{\alpha_k(l)}\right| \leqslant \left\|S^*\delta(k) - \frac{\delta(l)}{\alpha_k(l)}\right\| + \|\nu_{kl}\| \leqslant 2128\,\varepsilon.$$

Par conséquent, l'hypothèse $l \in \Theta(k)$ entraîne :

$$|\beta_l(k)| \geqslant 1-2634\,\varepsilon. \tag{9.10}$$

On suppose maintenant que $l \neq l'$ sont deux éléments distincts de $\Theta(k)$. En écrivant $S^*\delta(k) = \beta_l(k)\delta(l) + \beta_{l'}(k)\delta(l') + \nu$ avec $\nu(\{l,l'\}) = 0$, la propriété (9.10) donne :

$$1+101\,\varepsilon \geqslant \|S^*\delta(k)\| \geqslant |\beta_l(k)| + |\beta_{l'}(k)| \geqslant 2-5268\,\varepsilon.$$

Si on impose $a \leqslant 1/5369$, cette inégalité est absurde. Cela prouve que $\Theta(k)$ est un singleton et permet de définir la fonction $\theta : K \to L$ en écrivant, pour tout $k \in K$: $\Theta(k) = \{\theta(k)\}$. De même, on peut définir une fonction $\sigma : L \to K$ en posant, pour tout $l \in L$: $\Sigma(l) = \{\sigma(l)\}$.

5. Bijectivité de θ et σ

Fait 86 :
Soit $l \in L$ et $k = \sigma(l)$. Alors $\theta(k) = l$.

DÉMONSTRATION DU FAIT 86 — On suppose par l'absurde que $l \neq \theta(k)$. On peut alors écrire :

$$S^*\delta(k) = \beta_l(k)\delta(l) + \beta_{\theta(k)}(k)\delta(\theta(k)) + \nu$$

où $\nu(\{l, \theta(k)\}) = 0$. La définition de σ et la propriété 9.10 entraînent :

$$1 + 101\,\varepsilon \geqslant \|S^*\delta(k)\| \geqslant |\beta_l(k)| + \left|\beta_{\theta(k)}(k)\right| \geqslant 2 - 3140\,\varepsilon.$$

Si on impose $a < 1/3241$, c'est absurde. Cette contradiction démontre le fait 86. □

Le fait 86 prouve que θ est l'inverse à gauche de σ. De même, on montrerait que σ est l'inverse à gauche de θ. Il s'ensuit que θ et σ sont bijectives et inverses l'une de l'autre.

6. Continuité de θ et σ

Soit F un fermé de K arbitraire. Pour montrer la continuité de σ, il suffit de montrer que $\theta(F)$ est fermé.

Considérons $l \notin \theta(F)$. Le point $k = \sigma(l)$ est alors en dehors de F. Puisque celui-ci est fermé, il existe une fonction f_k qui « sépare k et F » au sens suivant :

$$f_k \in C(K), \quad \|f_k\|_K = 1 = f(k), \quad f_k|_F = 0 \quad \text{et} \quad \int_K |f_k| \; d\,|\mu_{lk}| \leqslant \varepsilon.$$

Dans ce cas, il est possible de minorer $|Tf_k(l)|$.

$$\begin{aligned}
|Tf_k(l)| &= \left|\int_L Tf_k \, d\delta(l)\right| \geqslant \left|\int_K f_k \, d(T^*\delta(l))\right| - 101\,\varepsilon \\
&\geqslant \left|\alpha_k(l) f_k(k) + \int_K f_k \, d\mu_{lk}\right| - 101\,\varepsilon \\
&\geqslant 1 - 608\,\varepsilon
\end{aligned}$$

On considère maintenant au contraire $l' \in \theta(F)$ et $k' = \sigma(l)$. On majore $|Tf_k(l')|$:

$$\begin{aligned}
\left|Tf_k(l')\right| &= \left|\int_L Tf_k \, d\delta(l')\right| \leqslant \left|\int_K f_k \, d\big(T^*\delta(l')\big)\right| + 101\,\varepsilon \\
&\leqslant \left|\alpha_{k'}(l') f_k(k') + \int_K f_k \, d\mu_{l'k'}\right| + 101\,\varepsilon \\
&\leqslant \|\mu_{l'k'}\| + 101\,\varepsilon \leqslant 708\,\varepsilon.
\end{aligned}$$

Si on impose $a < 1/1316$, il apparaît que

$$\theta(F) = \bigcap_{k \notin F} \left\{ l' \in L \; ; \; \left|Tf_k(l')\right| \leqslant 708\,\varepsilon \right\}.$$

Comme T est continue, l'ensemble $\theta(F)$ est fermé donc σ est continue. Il en est de même de θ. Par conséquent, K et L sont homéomorphes.

7. Proximité avec une isométrie linéaire

Pout tout $k \in K$, on note $\psi(k) = \text{signe}\,(\beta_{\theta(k)}(k))$ et S_θ l'isométrie linéaire donnée par :

$$\forall y \in C(L), \quad S_\theta(y) = \psi \cdot (y \circ \theta).$$

Soit $y \in S_{C(L)}$, $k \in K$ et $l = \theta(k)$. A l'aide de l'écriture $S^*\delta(k) = \beta_l(k)\delta(l) + \nu_{kl}$ et la propriété (9.4) appliquée à S^*, on trouve :

$$\left|\beta_l(k)y(k) + \int_L y\, d\nu_{kl} - Sy(k)\right| \leqslant 101\,\varepsilon.$$

Selon la majoration (9.8), il vient par ailleurs :

$$\left|\int_L y\, d\nu_{kl}\right| \leqslant \|\nu_{kl}\| \leqslant 607\,\varepsilon.$$

Enfin, la définition de Σ prouve que

$$|\beta_l(k)y(l) - \psi(k)y(l)| \leqslant 506\varepsilon\,|y(l)|\,.$$

En regroupant ces trois inégalités, il vient :

$$|Sy(k) - S_\theta(y)(k)| \leqslant 1214\,\varepsilon.$$

En choisisant g identiquement égal à 1 ci-dessus, on obtient :

$$|\psi(k) - Sg(k)| \leqslant 1214\,\varepsilon,$$

ce qui entraîne que ψ est continue puisqu'elle est à valeurs dans $\{\pm 1\}$. On obtient finalement :

$$\|S - S_\theta\| \leqslant 1214\,\varepsilon.$$

Cette septième étape achève la preuve du théorème. La démonstration donne les valeurs $a = 1/5369$ et $b = 1214$. □

Corollaire 87 :

Il existe une constante universelle $\varepsilon_1 > 0$ telle que, si K et L sont deux compacts métrisables vérifiant $d_{GH}(C(K), C(L)) < \varepsilon_1$, alors K et L sont homéomorphes.

Il faut remarquer qu'on ne connaît pas la valeur de la constante ε_1 puisque celle-ci est obtenue via la fonction ζ, elle-même non explicite.

Démonstration — Soit a la constante du théorème précédent et ζ la fonction universelle définie au théorème 10. On pose $\varepsilon_1 = \zeta^{-1}(a/400)$. On introduit $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$. Soit K et L deux compacts métrisables tels que $d_{GH}(C(K), C(L)) < \varepsilon$. Comme $C(K)$ et $C(L)$ sont des $\mathcal{K}_0$-espaces, il existe un espace de Banach E contenant des copies isométriques de $C(K)$ et $C(L)$ (encore notées $C(K)$ et $C(L)$) telles que $\Lambda_E(C(K), C(L)) < \varepsilon/4$. On note $\|\cdot\|$ la norme sur E. Elle prolonge les normes $\|\cdot\|_K$ et $\|\cdot\|_L$.

Pour tout $x \in S_{C(K)}$, on note $c(x) = \{y \in C(L)\ ;\ \|x - y\| \leqslant \varepsilon/4\}$. L'ensemble $c(x)$ est un convexe fermé et la fonction $c : S_{C(K)} \to \mathcal{P}(C(L))$ est semi-continue inférieurement. D'après le théorème de sélection de Michael (voir le théorème 1.16 page 22 de [7]), il existe une fonction continue $\varphi : S_{C(K)} \to C(L)$ telle que

$$\forall x \in S_{C(K)}, \quad \|x - \varphi(x)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}\cdot$$

Cela implique en particulier que la norme de $\varphi(x)$ est toujours supérieure ou égale à $1-\varepsilon/4$ et donc que $\left\|x - \varphi(x)/\left\|\varphi(x)\right\|\right\| \leqslant \varepsilon/2$. On pose alors, pour tout $x \in C(K)$:

$$Tx = \|x\| \frac{\varphi\left(x/\|x\|\right)}{\left\|\varphi\left(x/\|x\|\right)\right\|}.$$

Ceci définit une application positivement homogène de norme 1 vérifiant :

$$\forall x \in C(K), \quad \|x - Tx\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\|x\|.$$

Si $x, x' \in C(K)$, on trouve :

$$\left\|T(x+x') - Tx - Tx'\right\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\left\|x+x'\right\| + \frac{\varepsilon}{2}\|x\| + \frac{\varepsilon}{2}\left\|x'\right\| \leqslant \varepsilon(\|x\| + \left\|x'\right\|).$$

Par conséquent, T est de type $Q(\varepsilon)$. On définit de même l'application $S : C(L) \to C(K)$ de type $\mathcal{Q}(\varepsilon)$ telle que

$$\forall y \in C(L), \quad \|y - Sy\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\|y\|.$$

La propriété (9.2) est facile à vérifier. Dès lors, on peut appliquer le théorème 85, ce qui montre que K et L sont homéomorphes. □

Terminons par quelques remarques et questions :

- L'hypothèse de métrisablité des compacts K et L sert à plusieurs reprises (mesurabilité des « transposées », théorème de convergence dominée dans la troisième étape de la preuve). Toutefois, cette hypothèse apparaît plus comme techniquement simplificatrice que comme réellement nécessaire. On peut donc naturellement conjecturer que le théorème 85 et son corollaire 87 restent valables lorsque K et L ne sont plus supposés métrisables. Une technique similaire à celle du corollaire 80 montre que si K et L sont deux compacts dénombrablement clairsemés tels que $d_{GH}(C(K), C(L)) < \varepsilon_1$, alors $\mathrm{sc}(K) = \mathrm{sc}(L)$.
- La partie de la conclusion du théorème 85 qui permet de contrôler la taille de la perturbation entre l'isométrie linéaire et T n'a pas de traduction dans le corollaire 87 puisque la distance de Gromov-Hausdorff ne donne pas naturellement d'applications T et S. Toutefois, lorsqu'il existe un homéomorphisme uniforme $u : C(K) \to C(L)$ tel que $\mathrm{Lip}_\infty(u)$ soit proche de 1, il semble naturel de se demander s'il est possible de trouver une isométrie linéaire $v : C(K) \to C(L)$ telle que

$$\left\|\frac{1}{s}u(sx) - v(x)\right\|_L \leqslant M\varepsilon$$

  pour une constante universelle M, s assez grand et $x \in B_{C(K)}$. Il y a *a priori* une obstruction qui vient de l'utilisation de la fonction universelle ζ dont on ignore les valeurs. Cela est-il dans la nature des choses ?
- Soit M un espace métrique et A, G deux parties non vides de M. On suppose que A est bornée. Le rayon de Chevyshev de A relativement à G est noté $r_G(A)$. C'est la borne inférieure des nombres $r > 0$ tels qu'il existe $y \in G$ vérifiant $A \subset B_M(y, r)$. Lorsque $G = M$, on note plus simplement $r_G(A) = r(A)$. Les points $e \in M$ tels que $A \subset B_M(e, r)$ sont appelés les r-centres de Chebyshev de A. Ils forment un ensemble éventuellement vide qu'on désigne par $E^r(A)$. L'intersection des $E^r(A)$ pour $r > r(A)$ est noté $E(A)$. R. Espínola, A. Wiśnicki et J. Wośko ont montré [19] qu'un espace de Banach X était isométrique à l'espace $C_0(Q)$ des fonctions continues tendant vers 0

en l'infini sur un espace localement compact Q si et seulement si, pour toute partie non vide $G \subset X$ et tout ensemble borné non vide $A \subset X$, on a :

$$r_G(A) = r(A) + \inf \big\{ d(e,g) \ ; \ e \in E(A), \ g \in G \big\}.$$

Cette caractérisation permet de prouver que si Q est localement compact, que X est un espace de Banach et que $d_L(C_0(Q), X) = 1$, alors X est isométrique à $C_0(R)$ pour un certain R localement compact. Les deux espaces Q et R sont-ils homéomorphes ?

Bibliographie

Les caractères gras renvoient aux pages du texte où la référence est citée.

[1] I. Aharoni et J. Lindenstrauss.
Uniform equivalence between Banach spaces.
Bulletin of the American Mathematical Society, 84(2), pp. 281–283, 1978. .... **p. 33**

[2] D. Alspach.
Quotients of c_0 are almost isometric to subspaces of c_0.
Proceedings of the American Mathematical Society, 76, pp. 285–288, 1979. . **pp. 10, 18, 75**

[3] D. Amir.
On isomorphisms of continuous function spaces.
Israel Journal of Mathematics, 3, pp. 205–210, 1965. ..... **p. 82**

[4] J. Baker.
Dispersed images of topological spaces and uncomplemented subspaces of $C(X)$.
Proceedings of the American Mathematical Society, 41(1), pp. 309–314, 1973. . **p. 97**

[5] S.M. Bates.
On smooth, nonlinear surjections of Banach spaces.
Israel Journal of Mathematics, 100, pp. 209–220, 1997. ..... **p. 34**

[6] S.M. Bates, W.B. Johnson, J. Lindenstrauss, D. Preiss et G. Schechtman.
Affine approximation of Lipschitz functions and nonlinear quotients.
Geometric and Functional Analysis, 9, pp. 1092–1127, 1999. .. **pp. 10, 18, 35, 36, 52, 57–59, 69**

[7] Y. Benyamini et J. Lindenstrauss.
Geometric nonlinear functional analysis, volume 1. Colloquium Publications of the American Mathematical Society n° 48, 2000. .. **pp. 9, 10, 12, 17, 18, 20, 32, 34, 41, 76, 103**

[8] C. Bessaga et A. Pełczyński.
Spaces of continuous functions (IV).
Studia Mathematica, 19, pp. 53–62, 1960. ..... **p. 81**

[9] B. Bossard.
Théorie descriptive des ensembles en géométrie des espaces de Banach.
Thèse de doctorat, Université Paris 6, 1994. ..... **pp. 11, 51, 56**

[10] B. Bossard.
A coding of separable Banach spaces. Analytic and coanalytic families of Banach spaces.
Fundamenta Mathematicæ, 172, pp. 117–152, 2002. ..... **pp. 18, 45, 51, 58, 60**

[11] M. Cambern.
A generalized Banach-Stone theorem.
Proceedings of the American Mathematical Society, 17, pp. 396–400, 1966. ... **p. 82**

[12] M. Cambern.
On isomorphisms with small bound.
Proceedings of the American Mathematical Society, 18, pp. 1062–1066, 1967. . **p. 82**

[13] P.G. Casazza et N.J. Kalton.
Notes on approximating properties in separable Banach spaces.
Geometry of Banach spaces. Proceedings of the conference held in Strobl, Austria 1989. London Mathematical Society Lecture Note Series, 158, pp. 49–63, 1990. ..... **p. 78**

[14] J.P.R. Christensen.
Topology and Borel structures. North-Holland Mathematics studies, 1974. . **pp. 44, 98**

[15] R. Deville, G. Godefroy et V. Zizler.
The three space problem for smooth partitions of unity and $C(K)$ spaces.
Mathematische Annalen, 288, pp. 613–625, 1990. ..... **p. 33**

[16] R. Deville, G. Godefroy et V. Zizler.
Smoothness and renormings in Banach spaces. Pitman Monographs and surveys in pure and applied Mathematics (64), 1993. ..... **pp. 56, 69**

[17] Y. Dutrieux.
Lipschitz quotients and the Kunen-Martin theorem.
Commentationes Mathematicæ Universitatis Carolinæ, 42(4), pp. 641–648, 2001. **pp. 17, 24**

[18] Y. Dutrieux.
Quotients of c_0 and Lipschitz-homeomorphisms.
Houston Journal of Mathematics, 27(3), pp. 593–599, 2001. ..... **pp. 17, 24**

[19] R. Espínola, A. Wiśnicki et A. Wośko.
A geometrical characterization of the $C(K)$ and $C_0(K)$ spaces.
Journal of Approximation Theory, 105, pp. 87–101, 2000. ..... **p. 104**

[20] T. Figiel et W.B. Johnson.
A uniformly convex Banach space which contains no ℓ_p.
Compositio Mathematica, 29(2), pp. 179–190, 1974. ..... **p. 29**

[21] M. Girardi.
The dual of James tree space is asymptotically uniformly convex.
Studia Mathematica, 147(2), pp. 119–130, 2001. ..... **p. 69**

[22] G. Godefroy et N.J. Kalton.
Lipschitz-free Banach spaces.
Preprint, 2002. ..... **pp. 10, 18, 80, 97**

[23] G. Godefroy, N.J. Kalton et G. Lancien.
Subspaces of $c_0(\mathbb{N})$ and Lipschitz isomorphisms.
Geometric and Functional Analysis, 10, pp. 798–820, 2000. **pp. 10, 13, 18, 20, 33, 64, 70, 75**

[24] G. Godefroy, N.J. Kalton et G. Lancien.
Szlenk indices and uniform homeomorphisms.
Transactions of the American Mathematical Society, 353(10), pp. 3895–3918, 2001. **pp. 12, 20, 58, 64, 69**

[25] G. Godefroy, N.J. Kalton et D. Li.
On subspaces of L^1 which embed into ℓ_1.
Journal für die reine und angewandte Mathematik, 471, pp. 43–75, 1996. ... **pp. 10, 18, 79**

[26] G. Godefroy et P.D. Saphar.
Duality in spaces of operators and smooth norms on Banach spaces.
Illinois Journal of Mathematics, 32(4), pp. 672–695, 1988. ..... **p. 78**

[27] A. Grothendieck.
Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. Memoirs of the American Mathematical Society, 16, 1955. ..... **p. 78**

[28] S. Heinrich et P. Mankiewicz.
Applications of ultrapowers to the uniform and Lipschitz classifications of Banach spaces.
Studia Mathematica, 73, pp. 225–251, 1982. ..... **pp. 33, 58, 59, 76**

[29] G. Hjorth.
Classification and orbit equivalence relations. Mathematical surveys and Monographs of the American Mathematical Society, 2000. ..... **p. 52**

[30] K. Jarosz.
Nonlinear generalization of the Banach-Stone theorem.
Studia Mathematica, 93, pp. 97–107, 1989. ..... **pp. 91, 97**

[31] W.B. Johnson, J. Lindenstrauss, D. Preiss et G. Schechtman.
Almost Fréchet differentiability of Lipschitz mappings between some classes of infinite dimensional Banach spaces.
Proceedings of the London Mathematical Society, 84(3), pp. 711–746, 2002. . **pp. 65, 68**

[32] W.B. Johnson, J. Lindenstrauss et G. Schechtman.
Banach spaces determined by their uniform structures.
Geometric and Functional Analysis, 6(3), pp. 430–470, 1996. ..... **p. 33**

[33] W.B. Johnson et M. Zippin.
Subspaces of $(\sum G_n)_{\ell_p}$ and $(\sum G_n)_{c_0}$.
Israel Journal of Mathematics, 17, pp. 50–55, 1974. ..... **p. 75**

[34] M.I. Kadets.
A proof of topological equivalence of all separable infinite-dimensional Banach spaces.
Funktsional'nyj Analiz i ego Priloženija, 1, pp. 61–70, 1967. ..... **pp. 9, 17**

[35] N.J. Kalton.
Convexity type and the three space problem.
Studia Mathematica, 69, pp. 247–287, 1981. ..... **pp. 41**

[36] N.J. Kalton et M. Ostrovskii.
Distances between Banach spaces.
Forum Mathematica, 11, pp. 17–48, 1999. ..... **pp. 14, 21, 38, 42**

[37] N.J. Kalton et J.W. Roberts.
Uniformly exhaustive submeasures and nearly additive set functions.
Transactions of the American Mathematical Society, 278(2), pp. 803–816, 1983. **pp. 14, 21, 41, 42**

[38] A. Kechris et A. Louveau.
Descriptive set theory and the structure of sets of uniqueness. London Mathematical Society Lecture Notes Series, 1987. ..... **p. 44**

[39] A. Kechris et A. Louveau.
The classification of hypersmooth Borel equivalence relations.
Journal of the American Mathematical Society, 10(1), pp. 215–242, 1997. .... **p. 53**

[40] H. Knaust, E. Odell et T. Schlumprecht.
On asymptotic structure, the Szlenk index and UKK properties in Banach spaces.
Positivity, 3, pp. 173–199, 1999. ..... **pp. 12, 20, 63, 64**

[41] G. Lancien.
Théorie de l'indice et problèmes de renormage en géométrie des espaces de Banach.
Thèse de doctorat, Université Paris 6, 1992. ..... **pp. 58, 61**

[42] G. Lancien.
On the Szlenk index and the weak*-dentability index.
Oxford Quarterly Journal of Mathematics, 47(2), pp. 59–71, 1996. . **pp. 58, 59, 82, 94, 97**

[43] J. Lindenstrauss, E. Matoušková et D. Preiss.
Lipschitz image of a measure-null set can have a null complement.
Israel Journal of Mathematics, 118, pp. 207–219, 2000. ..... **p. 32**

[44] J. Lindenstrauss et D. Preiss.
A new proof of Fréchet differentiability of Lipschitz functions.
Journal of the European Mathematical Society, 2, pp. 199–216, 2000. ..... **p. 56**

[45] J. Lindenstrauss et D. Preiss.
Fréchet differentiability of Lipschitz maps between Banach spaces.
Annals of Mathematics, à paraître. ..... **pp. 10, 18, 53, 75**

[46] J. Lindenstrauss et L. Tzafriri.
Classical Banach spaces, volume 1. Springer-Verlag, 1977. . **pp. 51, 78, 80, 84, 87**

[47] G.M. Lövblom.
Isometries and almost isometries between spaces of continuous functions.
Israel Journal of Mathematics, 56(2), pp. 143–159, 1986. ..... **p. 97**

[48] S. Mazurkiewicz et W. Sierpiński.
Contributions à la topologie des ensembles énumérables.
Fundamenta Mathematicæ, 1, pp. 17–27, 1920. ..... **pp. 83, 88**

[49] V.D. Milman.
Geometric theory of Banach spaces II.
Russian Mathematical Surveys, 26(6), pp. 79–163, 1971. ..... **p. 65**

[50] A.A. Milutin.
Isomorphism of spaces of continuous functions on compacta of cardinality continuum.
Teoria Funktsii, Funktsional'nyj Analiz i ego Priloženija, 2, pp. 150–156, 1966. **p. 81**

[51] A. Pełczyński.
Universal bases.
Studia Mathematica, 32, pp. 247–268, 1969. ..... **p. 51**

[52] D. Preiss.
Differentiability of Lipschitz functions on Banach spaces.
Journal of Functional Analysis, 91, pp. 312–345, 1990. ..... **pp. 10, 18, 56**

[53] M. Ribe.
Examples for the nonlocally convex three space problem.
Proceedings of the American Mathematical Society, 73, pp. 351–355, 1979. ... **p. 42**

[54] M. Ribe.
Existence of separable uniformly homeomorphic nonisomorphic Banach spaces.
Israel Journal of Mathematics, 48, pp. 139–147, 1984. ..... **p. 33**

[55] C. Rosendal.
Complete analytic equivalence relations and analytic equivalence relations on the space

of separable Banach spaces.
Thèse de doctorat, Université d'Oslo, 2001. ..... **p. 53**

[56] J. Saint-Raymond.
La structure borélienne d'Effros est-elle standard ?
Fundamenta Mathematicæ, 100(3), pp. 201–210, 1978. ..... **p. 45**

[57] C. Samuel.
Indice de Szlenk des $C(K)$.
Publications Mathématiques de l'Université Paris 6 : séminaire de géométrie des espaces de Banach, 1, pp. 81–91, 1983. ..... **pp. 15, 22, 82**

[58] G. Schechtman.
On Pełczyński's paper "Universal bases".
Israel Journal of Mathematics, 22, pp. 181–184, 1975. ..... **p. 51**

[59] B.S. Tsirelson.
Not every Banach space contains an imbedding of ℓ_p or c_0.
Functional Analysis and Applications, 8(2), pp. 138–141, 1974. ..... **p. 29**

[60] P. Wojtaszczyk.
Banach spaces for analysts. Cambridge studies in advanced Mathematics, 25. Cambridge University Press, 1991. ..... **p. 81**

[61] M. Zippin.
The separable extension problem.
Israel Journal of Mathematics, 26, pp. 372–387, 1977. ..... **p. 87**