# Autour des exposés n° 19, 20 du Séminaire Cartan 1949/50

## La catégorie des $\mathfrak{g}$-adg

Dans l'exposé n° 19 du séminaire Cartan (49-50), on introduit, pour une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, la catégorie des $\mathfrak{g}$-algèbres différentielles graduées ($\mathfrak{g}$-adg). Une $\mathfrak{g}$-adg est un quadruplet $E = (E, d, \theta, i)$ où $(E, d)$ est une algèbre différentielle positivement graduée, où $\theta : \mathfrak{g} \to \mathrm{Der}_0(E, d)$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie à valeurs dans l'algèbre de Lie des dérivations de degré 0 de $(E, d)$, et où $i : \mathfrak{g} \to \mathrm{Der}_{-1}(E)$ est une application linéaire à valeurs dans l'espace des (anti)dérivations de degré $-1$ de $E$, telles que

$$\bullet\ \iota([x, y]) = \theta(x)\iota(y) - \iota(y)\theta(x)\,, \qquad \bullet\ \theta(x) = \iota(x)d + d\iota(x)\,,$$

pour tout $x \in \mathfrak{g}$.

L'ensemble $\mathrm{Bas}(E)$ des éléments « *basiques* » de $E$, i.e. tués par toutes les dérivations $\theta(x)$ et $i(x)$, est une sous-algèbre différentielle de $(E, d)$, d'où l'inclusion d'adg's

$$(\mathrm{Bas}(E), d) \subset (E, d)\,. \tag{$*$}$$

Un « *morphisme de* $\mathfrak{g}$*-adg's de* $E_1 = (E_1, d, \theta, i)$ *vers* $E_2 = (E_2, d, \theta, i)$ » est un morphisme d'algèbres différentielles graduées de $(E_1, d)$ vers $(E_2, d)$ de degré 0 qui commute aux opérateurs $\{d, \theta(x), i(x) \mid x \in \mathfrak{g}\}$. On note $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{g}\text{-adg}}(E_1, E_2)$ l'ensemble de ces morphismes.

## Connexions algébriques des $\mathfrak{g}$-adg's et algèbre de Weil $W(\mathfrak{g})$

Un cas particulièrement important de $\mathfrak{g}$-adg est donné par « *l'algèbre de Weil* » $W(\mathfrak{g}) = (S(\mathfrak{g}) \otimes \Lambda(\mathfrak{g}), d, \theta, i)$, caractérisée par le fait de représenter le foncteur de « *connexions algébriques d'une* $\mathfrak{g}$*-adg* », *i.e.* le foncteur qui fait correspondre

$$\mathfrak{g}\text{-adg} \ni E \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{\theta,i}(\Lambda^1(\mathfrak{g}), E^1)$$

où $\mathrm{Hom}_{\theta,i}(\Lambda^1(\mathfrak{g}), E^1)$ est l'espace des « *connexions algébriques de E* », *i.e.* des applications linéaires $\xi : \Lambda^1(\mathfrak{g}) \to E^1$ vérifiant pour tout $x \in \mathfrak{g}$ les conditions :

$$\bullet\ \theta(x)(\xi(\phi)) = \xi(\theta(x)(\phi)) \qquad \bullet\ i(x)(\xi(\phi)) = \phi(x)\,.$$

Dans les paragraphes §5 et §6 de l'exposé n° 19, Cartan montre dans le détail comment le foncteur $E \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{\theta,i}(\Lambda^1(\mathfrak{g}), E^1)$ est représenté par la couple $(W(\mathfrak{g}), \Phi)$ où $\Phi$ est l'isomorphisme naturel

$$\Phi(\_) : \mathrm{Mor}_{\mathfrak{g}\text{-adg}}(W(\mathfrak{g}), \_) \xrightarrow[(\simeq)]{} \mathrm{Hom}_{\theta,\xi}(\Lambda^1(\mathfrak{g}), (\_)^1) \tag{$\ddagger$}$$

qui fait correspondre à un morphisme de $\mathfrak{g}$-adg's de $W(\mathfrak{g}) \to E$ sa restriction au sous-espace $1 \otimes \Lambda^1(\mathfrak{g}) \subseteq W(\mathfrak{g})$.

## Les $G$-variétés et les fibrés principaux

Soit $G$ un groupe de Lie connexe et compact ([1]) d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. L'exposé n° 19 introduit plusieurs concepts liés à la donnée d'une $G$-variété différentielle $M$.

C-1) L'algèbre des formes différentielles $\Omega(M)$ est munie d'une structure de $\mathfrak{g}$-adg, et lorsque la surjection canonique $p : M \to M/G$ est un fibré principal, le complexe $(\mathrm{Bas}(\Omega(M)), d)$ calcule $H(M/G)$. L'inclusion $(*)$ induit alors le morphisme image inverse $p^* : H(M/G) \to H(M)$.

C-2) Des arguments géométriques sur l'espace total d'un fibré principal de variétés différentielles $p : M \to B$ de groupe $G$ sont utilsés pour montrer que $(\Omega(M), d, \theta, i)$ admet des connexions $\xi : \Lambda^1(\mathfrak{g}) \to \Omega^1(M)$. L'équivalence $(\ddagger)$ donne alors un homomorphisme de $\mathfrak{g}$-adg's $\bar{\xi} : W(\mathfrak{g}) \to \Omega(M)$ et, par restriction, le morphisme canonique entre algèbres basiques

$$\bar{\xi} : (\mathrm{Bas}(W(\mathfrak{g})), d) \to (\mathrm{Bas}(\Omega(M)), d)\,. \qquad (**)$$

Comme on a $(\mathrm{Bas}(W(\mathfrak{g})), d) = (S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}, 0)$, ce morphisme induit en cohomologie « *le morphisme caractéristique* »

$$H(\bar{\xi}) : S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \to H(B)\,.$$

L'indépendance de $H(\bar{\xi})$ par rapport à $\xi$ sera établie par le théorème 3 de l'exposé n° 20 du même séminaire.

## Steenrod, Chern, Weil

Le diagramme suivant est un résumé des différentes approches pour définir le morphisme caractéristique $\mathrm{ch} : S(\mathfrak{g})^G \to H(B)$ pour un fibré principal de variétés différentielles $p : M \to B$ de groupe $G$, compact et connexe.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Mor}_{\mathfrak{g}\text{-adg}}(W(\mathfrak{g})), \Omega(M)) \arrow[r, equal, "\mathrm{Weil}"] \arrow[d, "\mathrm{Bas}"] & \big\{\text{connexions algébriques sur } \Omega(M)\big\} \\
\big\{\mathrm{ch} : S(\mathfrak{g})^G \to H(B)\big\} & \big\{\text{connexions infinitésimales sur } \Omega(M)\big\} \arrow[l, "\mathrm{Chern}"'] \arrow[u, hook] \arrow[d, two heads] \\
\mathrm{Hot}(B, \mathbb{B}G) \arrow[u] & \big\{\text{fibrés principaux } p : M \to B\big\} \arrow[l, two heads, "\mathrm{Steenrod}"']
\end{tikzcd}$$

Dans la première ligne, l'algèbre de Weil représente le foncteur covariant « *connexions algébriques* », tandis que dans la troisième, basée sur le théorème de que Steenrod, le classifiant $\mathbb{B}G$ représente le foncteur contravariant « *fibrés principaux de groupe $G$ à isomorphisme près* » dans la catégorie des variétés différentielles et applications continues à homotopie près.

1. La plupart des constructions dans l'exposé n° 19 sont indépendantes de ces hypothèses sur $G$, mais elles deviennent incontournables pour les résultats les plus intéressants.

**Le Complexe de Cartan pour la cohomologie équivariante**

On se donne une variété différentielle $M$ munie d'une action différentiable (pas nécessairement libre) de $G$ (connexe et compact). Bien que ce ne soit pas un objet central des exposés de Cartan, l'exposé n° 20 introduit le sous-complexe $(S(\mathfrak{g})^G \otimes \Omega(M), d_\mathfrak{g}) \subseteq \Omega_\mathfrak{g}(M) := \mathrm{Bas}(W(\mathfrak{g}) \otimes \Omega(M))$ des « *formes différentielles $G$-équivariantes de $M$* ». Bien des années plus tard, dans l'article d'Atiyah-Bott *The moment map and equivariant cohomology*, Topology, 23, 1984, le complexe $\Omega_\mathfrak{g}(M)$ réapparaît sous le nom « *modèle infinitésimal de de Rham pour l'espace $M_G := \mathbb{E}G \times_G M$* », où l'on trouve une ébauche de preuve du fait que ce complexe calcule la cohomologie singulière de $M_G$.

Pour montrer que le complexe de Cartan $(S(\mathfrak{g})^G \otimes \Omega(M), d_\mathfrak{g})$ calcule la cohomologie *singulière* de l'espace topologique $\mathbb{E}G \times_G M$ on peut procéder en deux étapes.

C-A) Monter que $H(\mathrm{Bas}(W(\mathfrak{g}) \otimes \Omega(M)), d) = H(\mathbb{E}G \times_G M)$.

C-B) Montrer que $(\mathrm{Bas}(W(\mathfrak{g}) \otimes \Omega(M), d) = (S(\mathfrak{g})^G \times \Omega(M), d_\mathfrak{g})$.

La question (C-A) est abordée par Cartan uniquement lorsque $M$ est l'espace total d'un fibré principal $p : M \to B$, auquel cas on applique (C-1). C'est le Théorème 3, donné sans démonstration en page 20-05 de l'exposé 20 du Séminaire Cartan (*loccit*), il donne l'égalité

$$H(B) = H(\mathrm{Bas}(W(\mathfrak{g}) \otimes \Omega(M)), d)\,.$$

L'assertion (C-A) résulte alors du fait que la projection $\mathbb{E}G \times_G M \to B$ est une équivalence d'homotopie.

Dans ses articles, Cartan ne discute pas du cas général où $M \to M/G$ n'est pas un fibré principal de variétés différentielles. En sont exclus notamment les deux cas importants suivants.

C-i) Le groupe $G$ n'opère pas librement sur la variété différentielle $M$. Par exemple, le groupe orthogonal $G := O(2)$ agissant sur $\mathbb{R}^2$.

C-ii) Le groupe $G$ opère librement sur $M$, mais $M$ n'est pas une variété différentielle. Par exemple, $M = \mathbb{E}G$, cas pour lequel Cartan donne seulement une heuristique justifiant du fait que $H(\mathrm{Bas}(W(\mathfrak{g})))$ doit s'identifier canoniquement à $H(\mathbb{B}G)$. ([2])

Dans "A propos du théorème de Cartan" je donne une preuve du Théorème 3 (*loccit*) dans les mêmes lignes argumentaires de l'exposé n° 20.

Pour (C-i), il faut un travail supplémentaire pour se ramener à des actions libres auxquelles on peut appliquer les idées de Cartan. Dans "Notes on the Cartan model" je donne l'approche qui consiste à réaliser *l'espace topologique*

2. Une idée de preuve pour l'identification $H(\mathrm{Bas}(W(\mathfrak{g}))) = H(\mathbb{B}G)$ est donnée en page 11 de l'article d'Atiyah-Bott.

$\mathbb{E}G\times_G M$ comme réunion croissante de variétés différentielles $\mathbb{E}G(m)\times_G M$. Je profite alors du fait que $G$ opère librement sur chaque $\mathbb{E}G(m)\times M$. ([3])

La proposition C dans ces Notes, qui est l'analogue du Théorème 3 (*loccit*), est prouvée en intégrant encore d'autres ingrédients permettant de sortir du cadre restreint où G opère librement sur $M$.

Une démarche légèrement différente, en filigrane dans ce qui précède, est basée sur la réalisation de l'espace classifiant $\mathbb{B}G$ comme réunion croissante de variétés différentielles $\mathbb{E}(m)/G$. Il est bien connu que les *approximations* $\mathbb{E}G(m)$ peuvent être choisies de sorte que l'on ait pour chaque $i\in\mathbb{N}$

$$H^i(\mathbb{B}G)=\varprojlim_m H^i(\mathbb{E}G(m)/G)=\varprojlim_m H^i(\mathrm{Bas}(\Omega(\mathbb{E}G(m))))\,,$$

ce qui nous conduit à introduire le complexe

$$(\Omega(\mathbb{E}G),d):=\varprojlim_m(\Omega(\mathbb{E}G(m)),d)$$

comme modèle de complexe pour remplacer le complexe des cochaînes simpliciales de $\mathbb{E}G$. L'intérêt, ce faisant, est que $(\Omega(\mathbb{E}G),d)$ est muni d'une structure de $\mathfrak{g}$-adg et d'une connexion (car limite de $\mathfrak{g}$-adg's à connexion). La théorie de Cartan peut alors s'appliquer et donne un *quasi-isomorphisme*

$$(W(\mathfrak{g}),d,\theta,i)\to(\Omega(\mathbb{E}G),d,\theta,i)\,.$$

La question (C-A) se réduit alors à montrer l'égalité

$$H^i(\mathrm{Bas}(W(\mathfrak{g})\otimes\Omega(M)))=H^i(\mathrm{Bas}(\Omega(\mathbb{E}G)\otimes\Omega(M)))\,,\quad\forall i\in\mathbb{N}\,,$$

ce pourquoi un raisonnement par suites spectrales de Leray permet de conclure.

Enfin, la question (C-B) est relativement formelle et ne comporte pas de difficulté majeure. Elle fait l'objet d'une étude détaillée dans le paragraphe 7 de l'exposé n° 20 du Séminaire Cartan (*loccit*, p. 20-05).

Paris, 21 décembre 2016
Alberto Arabia

3. C'est l'idée décrite dans le §4 de l'article d'Atiyah-Bott.