Affinité des schémas †-adiques de réduction affine

Alberto Arabia*

Résumé. On se donne un anneau commutatif nœthérien $\boldsymbol{R}$ et un idéal $\boldsymbol{I} \subseteq \boldsymbol{R}$. On note $\overline{\boldsymbol{R}} := \boldsymbol{R}/\boldsymbol{I}$. Pour tout schéma affine lisse $(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ au-dessus de $\overline{\boldsymbol{R}}$, et toute $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$ lisse sur $\boldsymbol{R}$, relèvement de $\overline{\boldsymbol{A}} := \Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ et de complétion $\boldsymbol{I}$-adique faible notée $\boldsymbol{A}^\dagger$, Meredith associe un espace annelé $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{A}^\dagger})$ au-dessus du même espace topologique $\overline{\boldsymbol{X}}$ qu'il appelle *schéma faiblement formel affine* (*cf.* [M]) et que nous appelons *schéma* †*-adique affine-lisse*. Un *schéma* †*-adique lisse* est, par définition, tout espace annelé localement isomorphe à un *schéma* †*-adique affine-lisse*.

Étant donné un schéma †-adique lisse $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)$, notons $\overline{\mathscr{O}^\dagger}$ le faisceau sur $\overline{\boldsymbol{X}}$ associé au préfaisceau qui fait correspondre à l'ouvert $U \subseteq \boldsymbol{X}$, l'algèbre $\Gamma(U;\mathscr{O}^\dagger) \otimes_{\boldsymbol{R}} \overline{\boldsymbol{R}}$. L'espace annelé $(\overline{\boldsymbol{X}};\overline{\mathscr{O}^\dagger})$ est un schéma que nous appellerons *réduction (modulo* $\boldsymbol{I}$*) de* $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)$. Il est aisé de voir que la réduction d'un schéma †-adique affine-lisse est un schéma affine lisse. Le but de ce papier est de démontrer la réciproque de cette assertion ; question posée par Meredith dans son article (*loc.cit.*). Plus précisément, nous prouvons :

Théorème 2.1.8
a) *Pour tout ouvert affine* $\overline{U} \subseteq \overline{\boldsymbol{X}}$ *d'un schéma †-adique lisse* $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)$*, le sous-espace annelé* $(\overline{U};\mathscr{O}^\dagger|_{\overline{U}})$ *est un schéma †-adique affine-lisse.*
b) *Pour tout ouvert affine* $\overline{U} \subseteq \overline{\boldsymbol{X}}$ *d'un schéma †-adique lisse* $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)$*, le morphisme de* $\boldsymbol{R}$*-algèbres* $\alpha(\overline{U}) : \Gamma(\overline{U};\mathscr{O}^\dagger) \to \Gamma(\overline{U};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ *est un relèvement f.c.t.f. très lisse.*
c) *Un schéma †-adique lisse et de réduction affine est affine-lisse.*

Table des matières

*CNRS – Institut de Mathématiques de Jussieu – Université de Paris 7 - Denis Diderot.
Laboratoire de Théorie des Groupes, Représentations et Applications.
UFR de Mathématiques de l'Université Paris 7 – Denis Diderot.
175, rue du Chevaleret, 9e étage, bureau 9D11, 75013 Paris.
Adresse électronique : `arabia@math.jussieu.fr`

§1. A propos de recollements de schémas affines

1.1 Schéma non affine au-dessus du spectre d'un schéma affine

Soit $\boldsymbol{A}$ un anneau et notons $(\boldsymbol{X} := \mathrm{Spec}(\boldsymbol{A}); \mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ le schéma affine associé. Pour $f, g \in \boldsymbol{A}$ tels que $1 \in (f,g)$, l'espace $\boldsymbol{X}$ est réunion des ouverts principaux $\boldsymbol{U}_f := D(f)$ et $\boldsymbol{U}_g := D(g)$. Ces ouverts sont les espaces topologiques sous-jacents aux schémas affines $(\boldsymbol{U}_f; \mathscr{O}_f)$ et $(\boldsymbol{U}_g, \mathscr{O}_g)$ associés respectivement à $\boldsymbol{A}_f$ et à $\boldsymbol{A}_g$. Un recollement de ces deux espaces annelés est donné par un isomorphisme de sous-schémas affines au-dessus de l'ouvert principal $\boldsymbol{U}_{fg} := D(fg)$, autrement dit par un automorphisme φ de $\boldsymbol{A}_{fg}$, on notera alors $(\boldsymbol{X}; \mathscr{O}_\varphi)$ l'espace annelé obtenu par le recollement défini par φ.

1.1.1. Exemple de recollement non affine. Soient $\boldsymbol{A} := k[X]$, $f = X$ et $g = 1 - X$ et notons $\varphi : k[X] \to k[X]$ le morphisme de k-algèbres défini par $\varphi(X) = 1 - X$. Le morphisme φ est un automorphisme de $k[X]$ vérifiant aussi $\varphi(1 - X) = X$ de sorte qu'il induit :

- un isomorphisme de $\boldsymbol{A}_f$ sur $\boldsymbol{A}_g$,
- un isomorphisme de $\boldsymbol{A}_g$ sur $\boldsymbol{A}_f$,
- un automorphisme de $\boldsymbol{A}_{fg}$.

Notons $(\boldsymbol{X}; \mathscr{O}_\varphi)$ le schéma obtenu en recollant $(\boldsymbol{U}_f; \mathscr{O}_f)$ et $(\boldsymbol{U}_g; \mathscr{O}_g)$ à l'aide de φ. On a la suite exacte à gauche

$$\boldsymbol{0} \to \mathscr{O}_\varphi(\boldsymbol{X}) \xrightarrow{(\epsilon_f, \epsilon_g)} \boldsymbol{A}_f \oplus \boldsymbol{A}_g \xrightarrow{\delta_\varphi} \boldsymbol{A}_{fg} \tag{$\diamond$}$$

avec $\delta_\varphi(a, b) = a - \varphi(b)$. Le schéma $(\boldsymbol{X}; \mathscr{O}_\varphi)$ **n'est pas affine**.

Nous en donnons trois raisons.

i) On constate que le morphisme de restriction $\epsilon_f : \mathscr{O}_\varphi(\boldsymbol{X}) \to \mathscr{O}_\varphi(\boldsymbol{U}_f)$ est bijectif ce qui entraîne que $(\boldsymbol{X}; \mathscr{O}_\varphi)$ **n'est pas** un schéma affine car autrement on aurait $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{U}_f$ ce qui est contraire à la définition.

ii) On constate aussi que dans la suite $(\diamond)$ l'application δ_0 n'est pas surjective comme elle aurait dû être si $(\boldsymbol{X}; \mathscr{O}_\varphi)$ avait été affine.

iii) Enfin, on dispose aussi des suites exactes longues de cohomologie de faisceaux

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & H^i_{\boldsymbol{X} \smallsetminus \boldsymbol{U}_f}(\boldsymbol{X}; \mathscr{O}_\varphi) & \longrightarrow & H^i(\boldsymbol{X}; \mathscr{O}_\varphi) & \longrightarrow & H^i(\boldsymbol{U}_f; \mathscr{O}_\varphi) & \longrightarrow \\ & \| & & & & & \\ \longrightarrow & H^i_{\boldsymbol{U}_g \smallsetminus \boldsymbol{U}_{fg}}(\boldsymbol{U}_g; \mathscr{O}_{\boldsymbol{U}_g}) & \longrightarrow & H^i(\boldsymbol{U}_g; \mathscr{O}_{\boldsymbol{U}_g}) & \longrightarrow & H^i(\boldsymbol{U}_{fg}; \mathscr{O}_{\boldsymbol{U}_{fg}}) & \longrightarrow \end{array} \tag{$\mathscr{D}$}$$

Par l'acyclicité des faisceaux quasi-cohérents sur un schéma affine on a l'annulation de $H^i_{\boldsymbol{U}_g \smallsetminus \boldsymbol{U}_{fg}}(\boldsymbol{U}_g; \mathscr{O}_{\boldsymbol{U}_g})$ pour tout $i > 1$ (deuxième ligne de $(\mathscr{D})$) et donc l'annulation de $H^i(\boldsymbol{X}; \mathscr{O}_\varphi)$ pour tout $i > 1$ (première ligne de $(\mathscr{D})$). Le cas $i = 0$ est clair, et nous sommes réduits à la suite exacte

$$\mathbf{0} \longrightarrow H^0(\boldsymbol{X},\mathscr{O}_\varphi) \xrightarrow[\simeq]{\epsilon_f} \boldsymbol{A}_f \longrightarrow H^1_{\boldsymbol{U}_g \smallsetminus \boldsymbol{U}_{fg}}(\boldsymbol{U}_g;\mathscr{O}_{\boldsymbol{U}_g}) \longrightarrow H^1(\boldsymbol{X},\mathscr{O}_\varphi) \longrightarrow \mathbf{0}$$

où la bijectivité de ϵ_f a déjà été établie. On a donc

$$H^1(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_\varphi) = H^1_{\boldsymbol{U}_g \smallsetminus \boldsymbol{U}_{fg}}(\boldsymbol{U}_g;\mathscr{O}_{\boldsymbol{U}_g}) = \frac{\boldsymbol{A}_{fg}}{\boldsymbol{A}_g} = \frac{\boldsymbol{A}_f}{\boldsymbol{A}} \neq 0$$

et $(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_\varphi)$ n'est pas un schéma affine.

1.1.2. Le cas des schémas formels. Comme dans 1.1.1 nous considérons un recollement de deux schémas formels au-dessus de la droite affine $\big(\overline{\boldsymbol{X}} := \mathrm{Spec}(\overline{\mathbb{F}}_p[X]);\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}}\big)$. Les schémas affines faiblement complets $\big(D(X);\mathscr{O}^\dagger_{[X]}\big)$ et $\big(D(1-X);\mathscr{O}^\dagger_{[1-X]}\big)$ associés respectivement aux algèbres $\mathbb{Z}_p[X]^\dagger_{[X]}$ et $\mathbb{Z}_p[X]^\dagger_{[1-X]}$ sont recollés le long de l'ouvert $\boldsymbol{U}_{fg} := \boldsymbol{U}_f \cap \boldsymbol{U}_g$ à l'aide de l'automorphisme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_p[X]^\dagger_{[X(1-X)]} & \xrightarrow{\ \varphi\ } & \mathbb{Z}_p[X]^\dagger_{[X(1-X)]} \\ X & \xrightarrow{\ \varphi\ } & X + \dfrac{p}{X(1-X)} \end{array}$$

Notons $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger_\varphi)$ le schéma ainsi obtenu. On a la suite exacte à gauche

$$\mathbf{0} \to \mathscr{O}^\dagger_\varphi(\boldsymbol{X}) \xrightarrow{\ \epsilon\ } \mathbb{Z}_p[X]^\dagger_X \oplus \mathbb{Z}_p[X]^\dagger_{1-X} \xrightarrow{\ \delta_\varphi\ } \mathbb{Z}_p[X]^\dagger_{X(1-X)} \qquad (\diamond\diamond)$$

avec $\delta_\varphi(a,b) = \varphi(a) - b$.

Nous allons monter que $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger_\varphi)$ est isomorphe au schéma affine faiblement complet associé à $\mathbb{Z}_p[X]^\dagger$.

Comme l'automorphisme φ induit l'identité modulo p, on à un morphisme naturel de complexes de $\mathbb{Z}_p$-modules

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathbf{0} \to \mathscr{O}^\dagger_\varphi(\boldsymbol{X}) & \xrightarrow{\ \epsilon\ } & \mathbb{Z}_p[X]^\dagger_X & \oplus & \mathbb{Z}_p[X]^\dagger_{1-X} & \xrightarrow{\ \delta_\varphi\ } & \mathbb{Z}_p[X]^\dagger_{X(1-X)} & & \\ \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & {\scriptstyle q}\downarrow & \oplus & {\scriptstyle q}\downarrow & & {\scriptstyle q}\downarrow & & \\ \mathbf{0} \to \mathbb{F}_p[X] & \xrightarrow{\ \epsilon\ } & \mathbb{F}_p[X]^\dagger_X & \oplus & \mathbb{F}_p[X]^\dagger_{1-X} & \xrightarrow{\ \delta\ } & \mathbb{F}_p[X]^\dagger_{X(1-X)} & \to & \mathbf{0} \end{array}$$

où la deuxième ligne est exacte et où q désigne le morphisme canonique.

1.1.3. Proposition. *Le morphisme α est une* ***surjection*** *de $\boldsymbol{R}$-algèbres*

Preuve. Comme α est clairement un morphisme de $\mathbb{Z}_p$-algèbres, il suffira de vérifier que X est dans l'image de α. Autrement dit, il suffira de montrer qu'il existe $P \in p\mathbb{Z}_p[X]^\dagger_{[X]}$ et $Q \in p\mathbb{Z}_p[X]^\dagger_{[1-X]}$ tels que

$$\boxed{\varphi(X+P) = X+Q} \qquad (*)$$

La surjectivité du morphisme

$$\mathbb{Z}_p[X]^\dagger_X \oplus \mathbb{Z}_p[X]^\dagger_{1-X} \xrightarrow{\delta_{\mathbf{id}}} \mathbb{Z}_p[X]^\dagger_{X(1-X)}$$

étant connue, fixons deux applications $\mathbb{Z}_p$-linéaires

$$\begin{cases} \sigma_X : \mathbb{Z}_p[X]^\dagger_{X(1-X)} \longrightarrow \mathbb{Z}_p[X]^\dagger_X \\ \sigma_{1-X} : \mathbb{Z}_p[X]^\dagger_{X(1-X)} \longrightarrow \mathbb{Z}_p[X]^\dagger_{1-X} \end{cases}$$

vérifiant

$$\sigma_X(S) + \sigma_{1-X}(S) = S\,, \quad \forall S \in \mathbb{Z}_p[X]^\dagger_{X(1-X)}$$

Lemme. Les séries

$$P = \textstyle\sum_{k\geqslant 1} \big(\sigma_X(1-\varphi)\big)^k(X) \quad et \quad Q = -\sigma_{1-X}(1-\varphi)(X+P)$$

sont des solutions formelles de $(*)$.

Preuve du lemme. En effet, on a par construction :

$$\sigma_X(1-\varphi)(X+P) = P$$

et alors :

$$\begin{aligned} (1-\varphi)(X+P) &= P + \sigma_{1-X}(1-\varphi)(X+P) \\ X - \varphi(X+P) &= \sigma_{1-X}(1-\varphi)(X+P) \\ \varphi(X+P) &= X - \sigma_{1-X}(1-\varphi)(X+P) \end{aligned}$$ □

Nous allons monter maintenant que la série définissant P converge bien vers un élément de $\mathbb{Z}_p[X]^\dagger_{[X]}$. Il s'ensuivra que $Q \in \mathbb{Z}_p[X]^\dagger_{[1-X]}$ d'où la surjectivité de α.

Pour cela on utilisera le développement de φ en série de Taylor :

$$(1-\varphi) = -\sum_{1\leqslant m} \left(\frac{p}{X(1-X)}\right)^m \Delta^m$$

et l'égalité pour tous $a, b \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\}$:

$$\frac{1}{X^a(1-X)^b} = \left(\sum_{\ell=0}^{a-1} \binom{b+\ell-1}{\ell} \frac{1}{X^{a-\ell}}\right) + \left(\sum_{\ell=0}^{b-1} \binom{a+\ell-1}{\ell} \frac{1}{(1-X)^{b-\ell}}\right) \qquad (E)$$

dont on tire l'expression

$$\sigma_X(1-\varphi) = -\sum_{0\leqslant \ell < m} \binom{m+\ell-1}{\ell} \frac{p^m}{X^{m-\ell}}\, \Delta^m \qquad (\ddagger)$$

On remarque alors les égalités

$$\begin{aligned}\sigma_X(1-\varphi)(X) &= -\frac{p}{X}\\ \big(\sigma_X(1-\varphi)\big)^2(X) &= \sum_{0\leqslant \ell<m}\binom{m+\ell-1}{\ell}\frac{p^m}{X^{m-\ell}}\,\Delta^m\Big(\frac{p}{X}\Big)\\ &= \sum_{0\leqslant \ell<m}\binom{m+\ell-1}{\ell}\frac{p^m}{X^{m-\ell}}\,p\,\frac{(-1)^m}{X^{m+1}}\end{aligned}$$

qui nous amènent à vérifier que $\sigma_X(1-\varphi)$ laisse stable l'ensemble des séries de la forme

$$\sum_{n\geqslant 1} a_n\Big(\frac{1}{X}\Big)^n \quad \text{avec} \quad 2v_p(a_n)\geqslant n$$

Ceci résulte de l'égalité :

$$\begin{aligned}\sigma_X(1-\varphi)\Big(\frac{a_n}{X^n}\Big) &= -\sum_{0\leqslant \ell<m}\binom{m+\ell-1}{\ell}\frac{p^m}{X^{m-\ell}}\,a_n\,\Delta^m\Big(\frac{1}{X^n}\Big)\\ &= -\sum_{0\leqslant \ell<m}\binom{m+\ell-1}{\ell}\frac{p^m}{X^{m-\ell}}\,a_n\binom{n+m-1}{m}\frac{(-1)^m}{X^{m+n}}\end{aligned} \tag{‡‡}$$

où le coefficient du terme $1/X^{2m+n-\ell}$ est de valuation au moins égale à $m+v_p(a_n)$.

Ces remarques jointes au fait que $(\sigma_X(1-\varphi))^m(X)\in p^m\mathbb{Z}_p[X]^{\dagger}_{[X]}$ suffisent pour montrer que P est bien un élément de $p\mathbb{Z}_p[X]^{\dagger}_{[X]}$.

Montrons pour terminer l'égalité (E). Le développement en série de Taylor :

$$\frac{1}{(1-X)^b}=\sum_{0\leqslant \ell}\binom{b+\ell-1}{\ell}X^\ell$$

fournit la décomposition

$$\frac{1}{X^a}\frac{1}{(1-X)^b}=\sum_{\ell=0}^{a-1}\binom{b+\ell-1}{\ell}\frac{1}{X^{a-\ell}}+\sum_{0\leqslant n}c_nX^n$$

avec $c_n\in\mathbb{N}$ et la série $\sum_n c_nX^n$ de rayon de convergence égal à 1. Comme d'autre part un raisonnement inductif immédiat montre que l'on a une égalité de la forme

$$\frac{1}{X^a}\frac{1}{(1-X)^b}=\frac{u_0}{X^a}+\cdots+\frac{u_{a-1}}{X}+\frac{v_{b-1}}{1-X}+\cdots+\frac{v_0}{(1-X)^b}$$

avec $u_\ell, v_\ell\in\mathbb{Z}$, on conclut aussitôt que $u_\ell=\binom{b+\ell-1}{\ell}$. Un raisonnement symétrique donne les coefficients v_n. ∎

1.1.4. Remarque. Les valeurs explicites des coefficients dans les l'égalité $(E,‡,‡‡)$ n'interviennent pas dans la démonstration de la proposition.

§ 2. Schémas †-adiques à réduction affine

2.1 Rappels

Dans les paragraphes suivants nous rappelons brièvement des constructions et résultats de Meredith ([M]) et nous fixons quelques terminologies et notations nouvelles. Le couple $(\boldsymbol{R},\boldsymbol{I})$ est constitué d'un anneau commutatif et nœthérien et d'un idéal $\boldsymbol{I}\subseteq\boldsymbol{R}$ quelconque. Pour toute $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$, l'algèbre $\overline{\boldsymbol{A}}:=\boldsymbol{A}\otimes_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{R}/\boldsymbol{I})$ est « *sa réduction (modulo $\boldsymbol{I}$)* » et la surjection canonique $q:\boldsymbol{A}\twoheadrightarrow\overline{\boldsymbol{A}}$ « *le morphisme de réduction (modulo $\boldsymbol{I}$)* ». On dira que $f\in\boldsymbol{A}$ « *est un relèvement de* » ou « *relève* » $\overline{f}\in\overline{\boldsymbol{A}}$ lorsque $q(f)=\overline{f}$. Pour tout morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres (modules) $\eta:\boldsymbol{A}_1\to\boldsymbol{A}_2$, le morphisme induit $\overline{\eta}:\overline{\boldsymbol{A}}_1\to\overline{\boldsymbol{A}}_2$ est « *sa réduction (modulo $\boldsymbol{I}$)* ». Un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\eta:\boldsymbol{B}\to\overline{\boldsymbol{A}}$ est appelé « *un relèvement de* $\overline{\boldsymbol{A}}$ » lorsque sa réduction $\overline{\eta}:\overline{\boldsymbol{B}}\to\overline{\boldsymbol{A}}$ est bijective ; le relèvement est dit, f.c.t.f., plat, lisse, très lisse…, lorsqu'il en est ainsi de l'algèbre $\boldsymbol{B}$.

2.1.1. Schémas †-adiques affines. Étant donnée une $\boldsymbol{R}$-algèbre f.c.t.f. $\boldsymbol{A}^\dagger$ nous notons $\overline{\boldsymbol{A}}:=\overline{\boldsymbol{A}^\dagger}$, puis $\overline{\boldsymbol{X}}:=\operatorname{Spec}(\overline{\boldsymbol{A}})$ et $\big(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}}\big)$ le schéma affine associé à $\overline{\boldsymbol{A}}$.

Pour tout $\overline{f}\in\overline{\boldsymbol{A}}$ l'algèbre $\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f]}:=(\boldsymbol{A}^\dagger_f)^\dagger$ est indépendante du relèvement f de $\overline{f}$. On note $\nu_{\overline{f}}:\boldsymbol{A}^\dagger\to\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f]}$ le morphisme canonique. Pour toute inclusion d'ouverts principaux $D(\overline{f})\subseteq D(\overline{g})$ il existe un unique morphisme $\nu_{\overline{f}}^{\overline{g}}:\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[g]}\to\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f]}$ vérifiant $\nu_{\overline{f}}=\nu_{\overline{f}}^{\overline{g}}\circ\nu_{\overline{g}}$. La correspondance qui associe à un ouvert principal $D(\overline{f})$ l'algèbre $\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f]}$ et à l'inclusion $D(\overline{f})\subseteq D(\overline{g})$ le morphisme $\nu_{\overline{f}}^{\overline{g}}$ est un préfaisceau de $\boldsymbol{R}$-algèbres sur la catégorie des ouverts principaux de $\overline{\boldsymbol{X}}$ noté $\mathscr{P}_{\boldsymbol{A}^\dagger}$. On note $\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{A}^\dagger}$ le faisceau **sur** $\overline{\boldsymbol{X}}$ engendré à $\mathscr{P}_{\boldsymbol{A}^\dagger}$.

L'espace annelé $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{A}^\dagger})$ est « *le schéma †-adique affine associé à* $\boldsymbol{A}^\dagger$ ».

Rappels et remarques

a) Le morphisme canonique $\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f]}=\Gamma(D(\overline{f});\mathscr{P}_{\boldsymbol{A}^\dagger})\to\Gamma\big(D(\overline{f});\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{A}^\dagger}\big)$ est bijectif ([M]) et le morphisme de restriction $\Gamma\big(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{A}^\dagger}\big)\to\Gamma\big(D(\overline{f});\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{A}^\dagger}\big)$ s'identifie alors à $\nu_{\overline{f}}:\boldsymbol{A}^\dagger\to\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f]}$.
b) Pour tout ouvert **principal** $\overline{U}=D(\overline{f})\subseteq\overline{\boldsymbol{X}}$ le sous-espace annlelé $(\overline{U};\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{A}^\dagger}|_{\overline{U}})$ est isomorphe au schéma †-adique affine associé à $\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[\overline{f}]}$.
c) La famille des morphismes de réduction $q:\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f]}\to\overline{\boldsymbol{A}}_{\overline{f}}$ où $\overline{f}$ parcours $\overline{\boldsymbol{A}}$, définit un morphisme de préfaisceaux sur la catégorie des ouverts principaux de $\overline{\boldsymbol{X}}$ induisant un morphisme canonique de faisceau d'algèbres que nous notons $\alpha:\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{A}^\dagger}\to\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}}$. L'identification de (a) identifie $\alpha(D(\overline{f}))$ au morphisme $q:\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f]}\to\overline{\boldsymbol{A}}_{\overline{f}}$. Le morphisme α est une surjection de faisceaux d'algèbres sur $\overline{\boldsymbol{X}}$.

2.1.2. Schémas †-adiques. On appelle ainsi un espace annelé obtenu par recollement de schémas †-adiques affines. Plus précisément, il s'agit d'un espace annelé $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)$ dans lequel pour chaque $x\in\overline{\boldsymbol{X}}$ il existe un ouvert $\overline{U}_x\ni x$ et une $\boldsymbol{R}$-algèbre f.c.t.f. $\boldsymbol{A}^\dagger_x$ tels que le sous-espace annelé $(\overline{U}_x;\mathscr{O}^\dagger|_{\overline{U}_x})$ est isomorphe au schéma †-adique affine associé à $\boldsymbol{A}^\dagger_x$.

Rappels et remarques

a) Soit $\boldsymbol{I}\mathscr{O}^\dagger$ le sous-faisceau de $\mathscr{O}^\dagger$ engendré par le sous-préfaisceau qui fait correspondre à un ouvert $\overline{U} \subseteq \overline{\boldsymbol{X}}$ l'idéal $\boldsymbol{I} \cdot \Gamma(\overline{U};\mathscr{O}^\dagger)$, notons $\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}} := \mathscr{O}^\dagger/\boldsymbol{I}\mathscr{O}^\dagger$. L'espace annelé $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ est alors un schéma algébrique.

Le schéma $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ est « *la réduction (modulo $\boldsymbol{I}$) du schéma †-adique* $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)$ » Le morphisme canonique de faisceaux de $\mathscr{O}^\dagger$ vers $\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}}$ est noté $\alpha : \mathscr{O}^\dagger \to \mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}}$, il coïncide dans le cas des schémas affines avec le morphisme de 2.1.1-(c).

b) La réduction d'un schéma †-adique affine est un schéma algébrique affine.

c) La notation '$\overline{\boldsymbol{X}}$' désignera, par abus, le schéma algébrique $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$. Toute allusion à une propriété de '$\overline{\boldsymbol{X}}$' fait donc référence à ladite propriété de l'espace annelé $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$.

2.1.3. Schémas †-adiques lisses. On appellera « *schéma †-adique affine-lisse (sur $\boldsymbol{R}$)* » tout schéma †-adique affine $(\overline{\boldsymbol{X}},\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{A}^\dagger})$ associé à une algèbre f.c.t.f. $\boldsymbol{A}^\dagger$ **très lisse (sur $\boldsymbol{R}$)**. On appellera « *schéma †-adique lisse (sur $\boldsymbol{R}$)* » tout espace annelé localement isomorphe à un schéma †-adique affine-lisse (sur $\boldsymbol{R}$).

Rappel. L'hypothèse de lissité permet de généraliser le résultat de Meredith rappelé dans 2.1.1-(b). En effet, le sous-espace annelé $(\overline{U};\mathscr{O}^\dagger|_{\overline{U}})$ d'un schéma †-adique affine-lisse $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)$ est aussi affine-lisse pour peu que $\overline{U}$ soit un ouvert affine (prop. 3.2.16). Nous irons même plus loin dans le théorème 2.5 qui affirme que cette dernière affirmation est vraie en supposant le schéma †-adique $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)$ lisse (mais pas nécessairement affine).

Remarque. Si $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)$ est un schéma †-adique lisse sur $\boldsymbol{R}$, sa réduction $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ est un schéma lisse sur $\overline{\boldsymbol{R}}$. En particulier, si $\overline{\boldsymbol{X}}$ est affine l'algèbre $\overline{\boldsymbol{A}} := \Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ est lisse sur $\overline{\boldsymbol{R}}$ et admet par conséquent des relèvements f.c.t.f. très lisses $q : \boldsymbol{A}^\dagger \twoheadrightarrow \overline{\boldsymbol{A}}$.

Mise en garde. Nous n'avons pas encore prouvé qu'un schéma †-adique lisse et affine est affine-lisse. Ce sera une conséquence immédiate du théorème 2.5 qui affirme qu'un schéma †-adique lisse de réduction affine est affine-lisse.

2.2 Schémas †-adiques lisses de réduction séparée

Étant donné un schéma †-adique $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)$ de réduction $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ il existe, par définition,

- un recouvrement ouvert **affine** $\overline{\boldsymbol{X}} = \bigcup_{i\in\mathfrak{A}} \overline{U}_i$,
- une $\boldsymbol{R}$-algèbre f.c.t.f. $\boldsymbol{A}_i^\dagger$ et un relèvement $q_i : \boldsymbol{A}_i^\dagger \twoheadrightarrow \overline{\boldsymbol{A}}_i := \Gamma\big(\overline{U}_i;\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}}\big)$ pour chaque $i \in \mathfrak{A}$,
- un isomorphisme d'espaces annelés $\Phi_i : \big(\overline{U}_i;\mathscr{O}^\dagger|_{\overline{U}_i}\big) \simeq \big(\overline{U}_i;\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{A}_i^\dagger}\big)$ dont on rappelle que s'agissant de schémas †-adiques affines, il équivaut à la donnée de l'isomorphisme induit sur les algèbres des sections au-dessus de $\overline{U}_i$ des faisceaux structuraux, ce que nous notons

$$\Gamma(\overline{U}_i;\mathscr{O}^\dagger|_{\overline{U}_i}) \xrightarrow[\simeq]{\varphi_i} \boldsymbol{A}_i^\dagger \qquad (\varphi_*)$$

Pour chaque couple d'indices (i,j) notons $\overline{U}_{ij} := \overline{U}_i \cap \overline{U}_j$. Lorsque le schéma $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ est **séparé** l'ouvert $\overline{U}_{ij}$ est affine et le sous-espace annelé $(\overline{U}_{ij};\mathscr{O}^\dagger)$ est affine-lisse puisque $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)$ est **lisse**, (prop. 3.2.16). Dans ce cas, l'isomorphisme « *de transition* » défini par la composée $\Phi_j \circ \Phi_i^{-1}$ entre les sous-espaces annelés $(\overline{U}_{ij};\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{A}_i^\dagger}|_{\overline{U}_{ij}})$ et $(\overline{U}_{ij};\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{A}_j^\dagger}|_{\overline{U}_{ij}})$ (des schémas †-adiques affines) est entièrement déterminé par l'isomorphisme induit sur les sections au-dessus de $\overline{U}_{ij}$:

$$\varphi_{j,i} = \Phi_j(\overline{U}_{ij}) \circ \Phi_i^{-1}(\overline{U}_{ij}) : \Gamma(\overline{U}_{ij},\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{A}_i^\dagger}) \longrightarrow \Gamma(\overline{U}_{ij},\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{A}_j^\dagger})\,.$$

Un **schéma †-adique lisse de réduction séparée** équivaut donc à la donnée de :

i) Un $\overline{\boldsymbol{R}}$-schéma algébrique séparé $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$.

ii) Un recouvrement par des ouverts affines $\overline{\boldsymbol{X}} = \bigcup_{i\in\mathfrak{A}} \overline{U}_i$.

iii) Un relèvement f.c.t.f. très lisse $q_i : \boldsymbol{A}_i^\dagger \twoheadrightarrow \Gamma(\overline{U}_i,\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ pour chaque $i \in \mathfrak{A}$.

iv) Une famille d'isomorphismes $\{\varphi_{j,i} \mid i,j \in \mathfrak{A}\}$ telle que les diagrammes

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma(\overline{U}_{ij},\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{A}_i^\dagger}) & \xrightarrow[\simeq]{\varphi_{j,i}} & \Gamma(\overline{U}_{ij},\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{A}_j^\dagger}) \\
{\scriptstyle q_i}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle q_j} \\
\Gamma(\overline{U}_{ij},\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}}) & \xrightarrow{\mathbf{id}} & \Gamma(\overline{U}_{ij},\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})
\end{array}$$

sont commutatifs et vérifient les relations

$$\varphi_{i,i} = \mathbf{id}\,, \qquad \varphi_{j,i} = \varphi_{i,j}^{-1}\,, \qquad \varphi_{k,j} \circ \varphi_{j,i} = \varphi_{k,j}\,, \qquad (\varphi_{*,*})$$

sur les ouverts (affines) *ad hoc*.

2.3 Schémas †-adiques de réduction affine

Un cas particulier de ce qui précède est celui où $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ est affine. Dans ce cas les ouverts principaux de $\overline{\boldsymbol{X}}$ remplacent avantageusement les ouverts affines en ce sens que si $\overline{V}_1$ et $\overline{V}_2$ sont des ouverts principaux de $\overline{\boldsymbol{X}}$ tels que $\big(\overline{V}_i;\mathscr{O}^\dagger|_{\overline{V}_i}\big)$ sont des schémas †-adiques affines alors $\big(\overline{V}_1 \cap \overline{V}_2;\mathscr{O}^\dagger|_{\overline{V}_1\cap\overline{V}_2}\big)$ l'est également (2.1.1-(b)) et ceci **sans** hypothèse de lissité (*cf.* 2.1.3-*Rappel*). Nous avons donc une description analogue à celle de 2.2 pour un schéma †-adique seulement supposé de réduction affine.

Un **schéma †-adique de réduction affine** équivaut à la donnée de :

i) Un $\overline{\boldsymbol{R}}$-schéma algébrique affine $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$, associé donc à l'algèbre $\overline{\boldsymbol{A}} = \Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$.

ii) Un recouvrement fini princpal $\overline{\boldsymbol{X}} = \bigcup_{i\in\mathfrak{A}} \overline{U}_i$ avec $\mathfrak{A} = \{1,\ldots,r\}$. On peut supposer sans perte de généralité que $\overline{U}_i = D(\overline{f}_i)$ avec $\overline{f}_1 + \cdots + \overline{f}_r = 1$. On note $\overline{U}_{ij} := D(\overline{f_i f_j})$.

iii) Un relèvement f.c.t.f. $q : \boldsymbol{A}_i^\dagger = \Gamma(\overline{U}_i;\mathscr{O}^\dagger) \twoheadrightarrow \Gamma(\overline{U}_i,\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ pour chaque $i \in \mathfrak{A}$.

iv) Une famille d'isomorphismes $\{\varphi_{j,i} \mid i,j \in \mathfrak{A}\}$ telle que les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{A}^{\dagger}{}_{i[f_j]} = \Gamma(\overline{U}_{ij}, \mathscr{O}^{\dagger}_{\boldsymbol{A}^{\dagger}_i}) & \xrightarrow[\simeq]{\varphi_{j,i}} & \Gamma(\overline{U}_{ij}, \mathscr{O}^{\dagger}_{\boldsymbol{A}^{\dagger}_j}) = \boldsymbol{A}^{\dagger}{}_{j[f_i]} \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ \overline{\boldsymbol{A}}_{\overline{f_i f_j}} = \Gamma(\overline{U}_{ij}, \mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}}) & \xrightarrow{\mathbf{id}} & \Gamma(\overline{U}_{ij}, \mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}}) = \overline{\boldsymbol{A}}_{\overline{f_i f_j}} \end{array}$$

sont commutatifs et vérifient les relations $(\varphi_{*,*})$ sur les ouverts (principaux) *ad hoc*.

La condition de faisceau sur $\mathscr{O}^{\dagger}$ relative au recouvrement $\{\overline{U}_i\}_{i\in\mathfrak{A}}$ identifie $\Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^{\dagger})$ au noyau de l'application $\boldsymbol{R}$-linéaire :

$$\begin{array}{ccc} \prod_{\ell=1}^{r} \boldsymbol{A}^{\dagger}_{\ell} & \xrightarrow{\delta_{\varphi}} & \prod_{1\leqslant i<j\leqslant r} \boldsymbol{A}^{\dagger}{}_{j[f_i]} \\ (a_1,\ldots,a_r) & \longmapsto & (\ldots,b_{i,j},\ldots) \end{array} \quad \text{avec} \quad b_{i,j} = \varphi_{j,i}(a_i) - a_j\,.$$

On a donc la suite exacte à gauche :

$$\mathbf{0} \to \Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^{\dagger}) \xrightarrow{\epsilon_{\varphi}} \prod_{\ell=1}^{r} \boldsymbol{A}^{\dagger}_{\ell} \xrightarrow{\delta_{\varphi}} \prod_{1\leqslant i<j\leqslant r} \boldsymbol{A}^{\dagger}{}_{j[f_i]}\,,$$

où $\epsilon_{\varphi} = (\epsilon_{\varphi_1},\ldots,\epsilon_{\varphi_r})$ et $\epsilon_{\varphi,\ell} : \Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^{\dagger}) \to \boldsymbol{A}^{\dagger}_{\ell}$ est la composée du morphisme de restriction $\Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^{\dagger}) \to \Gamma\big(D(\overline{f}_{\ell});\mathscr{O}^{\dagger}\big)$ suivi par l'isomorphisme $\varphi_{\ell} : \Gamma(D(\overline{f}_{\ell});\mathscr{O}^{\dagger}) \to \boldsymbol{A}^{\dagger}_{\ell}$.

Cela étant, la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ de δ_{φ} s'identifie au morphisme $\delta_{\overline{\mathbf{id}}}$ du complexe de Čech associé au recouvrement $\{\overline{U}_{\ell}\}$ de $\overline{\boldsymbol{X}}$ à valeurs dans le faisceau $\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}}$. On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \prod_{\ell=1}^{r} \boldsymbol{A}^{\dagger}_{\ell} & \xrightarrow{\delta_{\varphi}} & \prod_{1\leqslant i<j\leqslant r} \boldsymbol{A}^{\dagger}{}_{j[f_i]} \\ {\scriptstyle q}\downarrow & \bigoplus & \downarrow{\scriptstyle q} \\ \prod_{\ell=1}^{r} \overline{\boldsymbol{A}}_{\overline{f}_{\ell}} & \xrightarrow[\delta_{\overline{\mathbf{id}}}]{} & \prod_{1\leqslant i<j\leqslant r} \overline{\boldsymbol{A}}_{\overline{f}_i\overline{f}_j} \end{array} \qquad (\mathscr{D}_r)$$

et le morphisme canonique de suites exactes à gauche :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{0} \to \Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^{\dagger}) & \xrightarrow{\epsilon_{\varphi}} & \prod_{\ell=1}^{r} \boldsymbol{A}^{\dagger}_{\ell} & \xrightarrow{\delta_{\varphi}} & \prod_{1\leqslant i<j\leqslant r}^{r} \boldsymbol{A}^{\dagger}{}_{j[f_i]} \\ {\scriptstyle \alpha}\downarrow & & {\scriptstyle q}\downarrow & (\mathscr{D}_r) & {\scriptstyle q}\downarrow \\ \mathbf{0} \to \Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}}) = \overline{\boldsymbol{A}} & \xrightarrow{\epsilon_{\overline{\mathbf{id}}}} & \prod_{\ell=1}^{r} \overline{\boldsymbol{A}}_{\overline{f}_{\ell}} & \xrightarrow{\delta_{\overline{\mathbf{id}}}} & \prod_{1\leqslant i<j\leqslant r}^{r} \overline{\boldsymbol{A}}_{\overline{f}_i\overline{f}_j} \end{array} \qquad (\Delta_r)$$

où α, induite par la commutativité de $(\mathscr{D}_r)$, est le morphisme $\alpha(\overline{\boldsymbol{X}})$ de 2.1.2-(a).

Le cas $\boldsymbol{r=2}$. Le cas le plus simple de recollement non trivial est celui où le recouvrement $\overline{\boldsymbol{X}} = \bigcup_i \overline{U}_i$ comporte seulement deux ouverts $\overline{U}_1 = D(\overline{f}_1)$ et $\overline{U}_2 = D(\overline{f}_2)$ avec $\overline{f}_1 + \overline{f}_2 = 1$. Le schéma †-adique $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^{\dagger})$ est alors entièrement déterminé par le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{A}^{\dagger}{}_{1[f_2]} & \xrightarrow[\simeq]{\varphi_{21}} & \boldsymbol{A}^{\dagger}{}_{2[f_1]} \\ {\scriptstyle q}\downarrow & \bigoplus & \downarrow{\scriptstyle q} \\ \overline{\boldsymbol{A}}_{\overline{f_1 f_2}} & \xrightarrow{\mathbf{id}} & \overline{\boldsymbol{A}}_{\overline{f_1 f_2}} \end{array}$$

On a alors :

$$\delta_{\varphi} : \boldsymbol{A}^{\dagger}{}_1 \oplus \boldsymbol{A}^{\dagger}{}_2 \longrightarrow \boldsymbol{A}^{\dagger}{}_{2[f_1]}\,, \quad \delta_{\varphi}(a_1,a_2) := \varphi_{21}(a_1) - a_2$$

et le diagramme commutatif Δ_2 est

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{0}\to\Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger) & \xrightarrow{\ \epsilon_\varphi\ } & \boldsymbol{A}^\dagger_1\oplus\boldsymbol{A}^\dagger_2 & \xrightarrow{\ \delta_\varphi\ } & \boldsymbol{A}^\dagger_{2[f_1]} \\ {\scriptstyle\alpha(\overline{\boldsymbol{X}})}\big\downarrow & & {\scriptstyle q}\big\downarrow & (\mathscr{D}_2) & {\scriptstyle q}\big\downarrow \\ \mathbf{0}\to\Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})=\overline{\boldsymbol{A}} & \xrightarrow{\ \epsilon_{\overline{\mathbf{id}}}\ } & \overline{\boldsymbol{A}}_{\overline{f}_1}\oplus\overline{\boldsymbol{A}}_{\overline{f}_2} & \xrightarrow{\ \delta_{\overline{\mathbf{id}}}\ } & \overline{\boldsymbol{A}}_{\overline{f}_1\overline{f}_2}\to\mathbf{0} \end{array}\qquad(\Delta_2)$$

où la deuxième ligne est exacte puisque $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ est affine.

2.4 Schémas †-adiques lisses de réduction affine

Lorsque $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)$ est **lisse** de réduction $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ affine la description de la section précédente peut encore être simplifiée. En effet, le schéma affine $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ étant lisse la $\boldsymbol{R}$-algèbre $\overline{\boldsymbol{A}}:=\Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ est lisse et nous pouvons fixer un relèvement $q:\boldsymbol{A}^\dagger\to\overline{\boldsymbol{A}}$ avec $\boldsymbol{A}^\dagger$ f.c.t.f. **très lisse**. Soit $\overline{\boldsymbol{X}}=\bigcup_{i\in\mathfrak{A}}\overline{U}_i$ la décomposition avec $\overline{U}_i:=D(\overline{f}_i)\subseteq\overline{\boldsymbol{X}}$ et $1=\overline{f}_1+\cdots+\overline{f}_r$ de 2.3, et fixons un relèvement $f_i\in\boldsymbol{A}^\dagger$ pour chaque $\overline{f}_i$. L'élément $c=f_1+\cdots+f_r$ est inversible dans $\boldsymbol{A}^\dagger$ puisque $c=1 \bmod \boldsymbol{I}$. Nous pouvons donc remplacer f_i par cf_i et supposer que $1=f_1+\cdots+f_r$.

L'algèbre $\boldsymbol{A}^\dagger_i=\Gamma(\overline{U}_i;\mathscr{O}^\dagger)$ est f.c.t.f. très lisse et $\alpha(\overline{U}_i):\boldsymbol{A}^\dagger_i\to\overline{\boldsymbol{A}}_{\overline{f}_i}$ est un relèvement de $\overline{\boldsymbol{A}}_{\overline{f}_i}$. Il s'ensuit que $\boldsymbol{A}^\dagger_i$ est isomorphe à $\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f_i]}$, on peut donc remplacer $\boldsymbol{A}^\dagger_i$ par $\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f_i]}$ dans la description de $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)$ de 2.3 ce qui nous conduit à la réecriture suivante :

Un **schéma †-adique lisse de réduction affine** équivaut à la donnée de :

i) Une $\boldsymbol{R}$-algèbre f.c.t.f. **très lisse** $\boldsymbol{A}^\dagger$.
ii) Une famille finie $\{f_1,\dots,f_r\}\subseteq\boldsymbol{A}^\dagger$ vérifiant $1=f_1+\cdots+f_r$.
iii) Une famille $\varphi=\big\{\varphi_{i,j}:\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f_if_j]}\to\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f_if_j]}\big\}$ d'automorphismes vérifiant les relations $(\varphi_{*,*})$ et tels que $\varphi_{i,j} \bmod \boldsymbol{I}=\mathbf{id}$.

La condition de faisceau sur $\mathscr{O}^\dagger$ relative au recouvrement proncipal $\{\overline{U}_\ell\}_{\ell\in\mathfrak{A}}$ identifie l'algèbre $\Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)$ au noyau de l'application $\boldsymbol{R}$-linéaire :

$$\begin{array}{ccc}\prod_{\ell=1}^r\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f_\ell]} & \xrightarrow{\ \delta_\varphi\ } & \prod_{1\leqslant i<j\leqslant r}\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f_if_j]} \\ (a_1,\dots,a_r) & \longmapsto & (\dots,b_{i,j},\dots)\end{array}\quad\text{avec}\quad b_{i,j}=\varphi_{j,i}(a_i)-a_j\,.$$

On a donc la suite exacte à gauche :

$$\mathbf{0}\to\Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)\xrightarrow{\ \epsilon_\varphi\ }\prod_{\ell=1}^r\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f_\ell]}\xrightarrow{\ \delta_\varphi\ }\prod_{1\leqslant i<j\leqslant r}^r\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f_if_j]}\,,$$

où $\epsilon_\varphi=(\epsilon_{\varphi_1},\dots,\epsilon_{\varphi_r})$ et $\epsilon_{\varphi,\ell}:\Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)\to\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f_\ell]}$ est la composée du morphisme de restriction $\Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)\to\Gamma\big(\overline{U}_\ell;\mathscr{O}^\dagger\big)$ suivi par l'isomorphisme $\varphi_\ell:\Gamma(\overline{U}_\ell;\mathscr{O}^\dagger)\to\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f_\ell]}$.

Cela étant, la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ de δ_φ s'identifie au morphisme $\delta_{\overline{\mathbf{id}}}$ du complexe de Čech associé au recouvrement $\{\overline{U}_\ell\}$ de $\overline{\boldsymbol{X}}$ à valeurs dans le faisceau $\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}}$. On a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\prod_{\ell=1}^{r} \boldsymbol{A}^{\dagger}_{[f_\ell]} \arrow[r, "\delta_\varphi"] \arrow[d, "q"', two heads] \arrow[dr, phantom, "\bigoplus"] & \prod_{1\leqslant i<j\leqslant r} \boldsymbol{A}^{\dagger}_{[f_i f_j]} \arrow[d, "q", two heads] \\
\prod_{\ell=1}^{r} \overline{\boldsymbol{A}}_{\overline{f}_\ell} \arrow[r, "\delta_{\overline{\mathrm{id}}}"'] & \prod_{1\leqslant i<j\leqslant r} \overline{\boldsymbol{A}}_{\overline{f}_i \overline{f}_j}
\end{tikzcd} \tag{$\mathscr{D}_r$}$$

et le morphisme canonique de suites exactes à gauche :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{0} \to \Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^{\dagger}) \arrow[r, "\epsilon_\varphi"] \arrow[d, "\alpha"', dashed] & \prod_{\ell=1}^{r} \boldsymbol{A}^{\dagger}_{[f_\ell]} \arrow[r, "\delta_\varphi"] \arrow[d, "q"', two heads] \arrow[dr, phantom, "(\mathscr{D}_r)"] & \prod_{1\leqslant i<j\leqslant r}^{r} \boldsymbol{A}^{\dagger}_{[f_i f_j]} \arrow[d, "q"', two heads] \\
\mathbf{0} \to \Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}}) = \overline{\boldsymbol{A}} \arrow[r, "\epsilon_{\overline{\mathrm{id}}}"] & \prod_{\ell=1}^{r} \overline{\boldsymbol{A}}_{\overline{f}_\ell} \arrow[r, "\delta_{\overline{\mathrm{id}}}"] & \prod_{1\leqslant i<j\leqslant r}^{r} \overline{\boldsymbol{A}}_{\overline{f}_i \overline{f}_j}
\end{tikzcd} \tag{Δ_r}$$

où α, induite par la commutativité de $(\mathscr{D}_r)$, est le morphisme $\alpha(\overline{\boldsymbol{X}})$ de 2.1.2-(a).

Le cas $r=2$. Le schéma †-adique $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^{\dagger})$ est entièrement déterminé par la donnée de l'automorphisme $\varphi_{21} \in \boldsymbol{G}^{\dagger}(\boldsymbol{A}^{\dagger}_{[f_1 f_2]})$. On a :

$$\delta_\varphi : \boldsymbol{A}^{\dagger}_{[f_1]} \oplus \boldsymbol{A}^{\dagger}_{[f_2]} \longrightarrow \boldsymbol{A}^{\dagger}_{[f_1 f_2]}, \quad \delta_\varphi(a_1,a_2) := \varphi_{21}(a_1) - a_2 \tag{δ_φ}$$

et le diagramme Δ_2 est

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{0} \to \Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^{\dagger}) \arrow[r, "\epsilon_\varphi"] \arrow[d, "\alpha(\overline{\boldsymbol{X}})"'] & \boldsymbol{A}^{\dagger}_{[f_1]} \oplus \boldsymbol{A}^{\dagger}_{[f_2]} \arrow[r, "\delta_\varphi"] \arrow[d, "q"', two heads] \arrow[dr, phantom, "(\mathscr{D}_2)"] & \boldsymbol{A}^{\dagger}_{[f_1 f_2]} \arrow[d, "q"', two heads] \\
\mathbf{0} \to \Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}}) = \overline{\boldsymbol{A}} \arrow[r, "\epsilon_{\overline{\mathrm{id}}}"] & \overline{\boldsymbol{A}}_{\overline{f}_1} \oplus \overline{\boldsymbol{A}}_{\overline{f}_2} \arrow[r, "\delta_{\overline{\mathrm{id}}}"] & \overline{\boldsymbol{A}}_{\overline{f}_1 \overline{f}_2} \to \mathbf{0}
\end{tikzcd} \tag{Δ_2}$$

où la deuxième ligne est exacte puisque $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ est affine.

La proposition suivante joue un rôle fondamental dans la démonstration du théorème 2.5 qui concerne les schémas †-adiques lisses, elle est pourtant vraie sans hypothèse de lissité. Le corollaire 2.5.5 de 2.5 généralisera 2.4.1 au cas d'un schéma †-adique de réduction affine **quelconque**.

2.4.1. Proposition. *Soit $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^{\dagger})$ un schéma †-adique de réduction $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ affine. On suppose qu'il existe $\overline{f}_1, \overline{f}_2 \in \overline{\boldsymbol{A}} := \Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ vérifiant $\overline{\boldsymbol{X}} = D(\overline{f}_1) \cup D(\overline{f}_2)$ et tels que chaque sous-espace annelé $(D(\overline{f}_i);\mathscr{O}^{\dagger}|_{D(\overline{f}_i)})$ est un schéma †-adique affine. Alors, le morphisme $\alpha(\overline{\boldsymbol{X}}) : \Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^{\dagger}) \to \Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ est **surjectif**.*

Démonstration

I. *Cas où $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^{\dagger})$ est lisse et $\overline{\boldsymbol{X}}$ est un ouvert principal d'un espace affine.* On note $\overrightarrow{X}$ la liste de variables $\{X_1,\ldots,X_t\}$, on se donne $\overline{c}, \overline{f}_1, \overline{f}_2 \in \overline{\boldsymbol{R}}[\overrightarrow{X}]$ vérifiant $\overline{c} = \overline{f}_1 + \overline{f}_2$, on note $\overline{\boldsymbol{A}} := \overline{\boldsymbol{R}}[\overrightarrow{X}]_{\overline{c}}$ l'algèbre des fonctions régulières sur de l'ouvert principal $D(\overline{c}) \subseteq \mathbb{A}^{t}_{\overline{\boldsymbol{R}}}$. Le schéma $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ est le schéma affine associé à $\overline{\boldsymbol{A}}$. On a $\overline{\boldsymbol{X}} = D(\overline{f}_1) \cup D(\overline{f}_2)$.

Soient $c, f_1, f_2 \in \boldsymbol{R}[\overline{\boldsymbol{X}}]$ des relèvements respectifs de $\overline{c}, \overline{f}_1, \overline{f}_2$, notons $\boldsymbol{A}^{\dagger} := (\boldsymbol{R}[\overrightarrow{X}]_c)^{\dagger}$ et reprenons les notations du cas $r=2$ de 2.4. La proposition résulte alors de montrer que pour chaque $z \in \boldsymbol{A}^\dagger$ donné il existe $P_z \in \boldsymbol{I}\boldsymbol{A}^\dagger_{[f_1]}$ et $Q_z \in \boldsymbol{I}\boldsymbol{A}^\dagger_{[f_2]}$ tels que

$$\boxed{\varphi(z+P_z) = z+Q_z}$$

Le morphisme $\delta_{\mathbf{id}} : \boldsymbol{A}^\dagger_{[f_1]} \oplus \boldsymbol{A}^\dagger_{[f_2]} \to \boldsymbol{A}^\dagger_{[f_1 f_2]}$ étant surjectif (3.2.7), soient

$$\begin{cases} \sigma_{f_1} : \boldsymbol{A}^\dagger_{[f_1 f_2]} \longrightarrow \boldsymbol{A}^\dagger_{[f_1]} \\ \sigma_{f_2} : \boldsymbol{A}^\dagger_{[f_1 f_2]} \longrightarrow \boldsymbol{A}^\dagger_{[f_2]} \end{cases}$$

des applications $\boldsymbol{R}$-linéaires vérifiant

$$\sigma_{f_1}(S) + \sigma_{f_2}(S) = S\,, \quad \forall S \in \boldsymbol{A}^\dagger_{[f_1 f_2]}$$

Lemme. Pour tout $z \in \boldsymbol{A}^\dagger$ les séries

$$P_z = \textstyle\sum_{k\geqslant 1} \big(\sigma_{f_1}(1-\varphi)\big)^k(z) \quad \textit{et} \quad Q_z = -\sigma_{f_2}(1-\varphi)(z+P_z) \tag{$\diamond$}$$

sont des solutions formelles de l'équation $\varphi(z+P_z) = z+Q_z$.

Preuve du lemme. On a par construction :

$$\sigma_{f_1}(1-\varphi)(z+P) = P$$

et alors :

$$\begin{aligned} (1-\varphi)(z+P) &= P + \sigma_{f_2}(1-\varphi)(z+P) \\ X - \varphi(z+P) &= \sigma_{f_2}(1-\varphi)(z+P) \\ \varphi(z+P) &= X - \sigma_{f_2}(1-\varphi)(z+P) \end{aligned} \qquad \square$$

Nous allons vérifier maintenant que la série ($\diamond$) définissant P_z converge vers un élément de $\boldsymbol{A}^\dagger_{[f_1]}$. Il s'ensuivra que $Q_z \in \boldsymbol{A}^\dagger_{[f_2]}$ et la surjectivité de $\alpha(\overline{\boldsymbol{X}})$ sera alors établie.

Pour cela on utilisera le développement de φ en série de Taylor :

$$(\varphi - 1) = \sum_{0\leqslant m_i} h_1^{m_1} \cdots h_t^{m_t}\, \Delta_1^{m_1} \cdots \Delta_t^{m_t} \tag{$\ddagger$}$$

où $h_i = (\varphi-1)(X_i) \in \boldsymbol{I}\boldsymbol{A}^\dagger_{[f_1 f_2]}$ puisque $\varphi = \mathbf{id} \bmod \boldsymbol{I}$. Chaque h_i s'écrit d'autre part comme somme d'une série de la forme

$$h_i = \sum_{n\geqslant 0} H_{i,n}\big(\overrightarrow{X}, \tfrac{1}{c}, \tfrac{1}{f_1 f_2}\big)\,, \qquad i = 1,\dots,t,$$

avec $H_{i,n} \in \boldsymbol{R}[\overrightarrow{X}, T, U]$ vérifiant, pour un certain $M \in \mathbb{N}$:

$$\deg(H_{i,n}) \leqslant M(\mathrm{val}_{\boldsymbol{I}}(H_{i,n}) + 1)\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}\,, \quad i = 1,\dots,t\,.$$

Les produits $h_1^{m_1} \cdots h_r^{m_r}$ ont alors des développements en séries de la forme :

$$h_1^{m_1} \cdots h_t^{m_t} = \sum_{n\geqslant 0} H_{\overrightarrow{m},n}(\overrightarrow{X}, \tfrac{1}{c}, \tfrac{1}{f_1 f_2})$$

telles que :

$$\deg(H_{\vec{m},n}) \leqslant M\big(\mathrm{val}_{\boldsymbol{I}}(H_{\vec{m},n}) + |\vec{m}|\big), \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

où on a noté $\vec{m} := m_1, \dots, m_t$ et $|\vec{m}| := m_1 + \dots + m_t$.

On obtient ainsi un développement de (‡) comme somme dénombrable de la forme

$$(\varphi - 1) = \textstyle\sum_{\vec{m},n} H_{\vec{m},n}\big(\vec{X}, \frac{1}{c}, \frac{1}{f_1 f_2}\big)\, \Delta_1^{m_1} \cdots \Delta_t^{m_t} \tag{‡‡}$$

avec

$$\begin{cases} \mathrm{val}_{\boldsymbol{I}}\big(H_{\vec{m},n}\big) \geqslant |\vec{m}| \\ \deg\big(H_{\vec{m},n}\big) < M\big(\mathrm{val}_{\boldsymbol{I}}(H_{\vec{m},n}) + |\vec{m}|\big) \end{cases}$$

Soit maintenant $z \in \boldsymbol{A}^{\dagger}_{[f_1]}$ donné par une série

$$\begin{cases} z = \sum_{\ell \geqslant 0} Z_\ell\big(\vec{X}, \frac{1}{c}, \frac{1}{f_1}\big), \text{ avec} \\ \deg(Z_\ell) < L(\mathrm{val}_{\boldsymbol{I}}(Z_\ell) + 1), \text{ pour tout } \ell \in \mathbb{N} \text{ et un certain } L \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{$\star_L$}$$

Notons $I = (i_1, \dots, i_t)$, puis $|I| = i_1 + \dots + i_t$ et $\vec{X}^I := X_1^{i_1} \cdots X_t^{i_t}$. On a $\deg(\vec{X}^I) = |I|$. Chaque polynôme Z_ℓ est somme de termes de la forme $\vec{X}^I\big(\frac{1}{c}\big)^a\big(\frac{1}{f_1}\big)^b$ avec $|I| + a + b \leqslant \deg(Z_\ell)$. On a

$$\Delta\Big(\vec{X}^I\big(\tfrac{1}{c}\big)^a\big(\tfrac{1}{f_1}\big)^b\Big) = \Delta\big(\vec{X}^I\big)\big(\tfrac{1}{c}\big)^a\big(\tfrac{1}{f_1}\big)^b - a\vec{X}^I\big(\tfrac{1}{c}\big)^{a+1}\Delta(c)\big(\tfrac{1}{f_1}\big)^b - b\vec{X}^I\big(\tfrac{1}{c}\big)^a\big(\tfrac{1}{f_1}\big)^{b+1}\Delta(f_1)$$

et

$$\deg \Delta_1^{m_1} \cdots \Delta_t^{m_t}\Big(\vec{X}^I\big(\tfrac{1}{c}\big)^a\big(\tfrac{1}{f_1}\big)^b\Big) \leqslant |I| + a + b + |\vec{m}| \sup\big(\deg(c), \deg(f_1)\big)$$

de sorte que si on pose $S := \sup(\deg(c), \deg(f_1))$, on a pour chaque $\vec{m} := (m_1, \dots, m_t)$:

$$\begin{cases} \Delta_1^{m_1} \cdots \Delta_t^{m_t}(z) = \sum_{\ell \geqslant 0} T_{\vec{m},\ell}\big(\vec{X}, \frac{1}{c}, \frac{1}{f_1}\big), \text{ avec} \\ \deg(T_{\vec{m},\ell}) < L\big(\mathrm{val}_{\boldsymbol{I}}(T_{\vec{m},\ell}) + 1\big) + |\vec{m}|S, \text{ pour tout } \ell \in \mathbb{N}, \end{cases} \tag{$\star\star_L$}$$

En rassemblant (‡‡) et $(\star\star_L)$ on obtient

$$\sigma_f(\varphi - 1)(z) = \sum_{\vec{m},n,\ell} \sigma_f\Big(H_{\vec{m},n}\big(\vec{X}, \tfrac{1}{c}, \tfrac{1}{f_1 f_2}\big) \cdot T_{\vec{m},\ell}\big(\vec{X}, \tfrac{1}{c}, \tfrac{1}{f_1}\big)\Big)$$

où les polynômes $H_{\vec{m},n}\big(\vec{X}, \frac{1}{c}, \frac{1}{f_1 f_2}\big) \cdot T_{\vec{m},\ell}\big(\vec{X}, \frac{1}{c}, \frac{1}{f_1}\big)$ sont des sommes finies de termes :

$$q\big(\vec{X}, \tfrac{1}{c}\big)\big(\tfrac{1}{f_1 f_2}\big)^a\big(\tfrac{1}{f_1}\big)^b \tag{$\triangle$}$$

avec $a \leqslant \deg H_{\vec{m},n}$ et $b \leqslant \deg T_{\vec{m},\ell}$.

Lemme. Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ on a dans $\boldsymbol{A}^{\dagger}_{[f_1 f_2]}$

$$\Big(\frac{1}{f_1}\Big)^\alpha\Big(\frac{1}{f_2}\Big)^\beta = \left(\sum_{k=0}^{\alpha-1} m_{f,k}\Big(\frac{1}{f_1}\Big)^{\alpha-k}\Big(\frac{1}{c}\Big)^{\beta+k}\right) + \left(\sum_{k=0}^{\beta-1} m_{g,k}\Big(\frac{1}{c}\Big)^{\alpha+k}\Big(\frac{1}{f_2}\Big)^{\beta-k}\right)$$

avec $m_{f,k}$ et $m_{g,k}$ des entiers naturels.

Preuve. L'égalité $c=f_2+f_1$ donne aussitôt $\dfrac{1}{f_1f_2}=\dfrac{1}{f_1c}+\dfrac{1}{cf_2}$ et le lemme en résulte par une induction élémentaire. □

L'application de ce lemme aux termes ($\triangle$) permet d'obtenir des majorations

$$\begin{aligned}\deg\sigma_f\Big(H_{\vec{m},n}\big(\vec{X},\tfrac{1}{c},\tfrac{1}{f_1f_2}\big)\cdot T_{\vec{m},\ell}\big(\vec{X},\tfrac{1}{c},\tfrac{1}{f_1}\big)\Big) &\leqslant 2\deg H_{\vec{m},n}+\deg T_{\vec{m},\ell}\\ &< 2M(\mathrm{val}_{\boldsymbol{I}}H_{\vec{m},n})+(2M+S)|\vec{m}|+L\big(\mathrm{val}_{\boldsymbol{I}}(T_{\vec{m},\ell})+1\big)\\ &< (4M+S)\big(\mathrm{val}_{\boldsymbol{I}}H_{\vec{m},n}\big)+L\big(\mathrm{val}_{\boldsymbol{I}}(T_{\vec{m},\ell})+1\big)\end{aligned}$$

en particulier, si $L>4M+S$ l'opérateur $\sigma_f(\varphi-1)$ préserve la classe des éléments $z\in\boldsymbol{A}^\dagger_{[f_1]}$ donnés par les séries de la forme $(\star_L)$. Comme d'autre part, la valuation augmente strictement à chaque application de $\sigma_{f_1}(\varphi-1)$ la série ($\diamond$) apparaît comme somme d'une famille dénombrable telle que pour chaque $N\in\mathbb{N}$ seul un nombre fini de ses termes est de valuation inférieure à N. En regroupant les termes de même valuation on obtient une nouvelle expression de P_z comme série de la forme $(\star_L)$. L'élément P_z appartient donc bien à $\boldsymbol{A}^\dagger_{f_1}$ quel que soit $z\in\boldsymbol{A}^\dagger_{f_1}$, donc quel que soit $z\in\boldsymbol{A}^\dagger$.

II. *Cas général.* On reprend les notations du cas $r=2$ de 2.3. Fixons une surjection de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\pi:\boldsymbol{R}[X_1,\dots,X_t]\twoheadrightarrow\overline{\boldsymbol{A}}:=\varGamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$, choisissons des éléments $F_i\in\boldsymbol{R}[\vec{X}]$ tels que $\pi(F_i)=f_i$, notons $\boldsymbol{B}^\dagger:=\boldsymbol{R}[\vec{X}]^\dagger_{[F_1+F_2]}$ et $\overline{\boldsymbol{B}}:=\overline{\boldsymbol{B}^\dagger}$. Le morphisme π induitles surjections $\overline{\pi}:\overline{\boldsymbol{B}}_{\overline{F}_i}\twoheadrightarrow\overline{\boldsymbol{A}}_{\overline{f}_i}$ et $\overline{\pi}\circ q:\boldsymbol{B}^\dagger_{[F_i]}\twoheadrightarrow\overline{\boldsymbol{A}}_{\overline{f}_i}$ et comme d'autre part $\alpha(\overline{U}_i):\boldsymbol{A}^\dagger_i\to\overline{\boldsymbol{A}}_{\overline{f}_i}$ est un relèvement avec $\boldsymbol{A}^\dagger_i$ f.c.t.f. et que $\boldsymbol{B}^\dagger_{[F_i]}$ est très lisse, il existe des morphismes $\pi^\dagger_i:\boldsymbol{B}^\dagger_{[F_i]}\to\boldsymbol{A}^\dagger_i$ (surjectifs car de réduction surjective th. 3.2 [MW]) rendant commutatif les diagrammes :

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{B}^\dagger_{[F_i]} \arrow[r, two heads, "\pi^\dagger_i"] \arrow[d, two heads, "q"'] & \boldsymbol{A}^\dagger_i \arrow[d, two heads, "q"', "\alpha(\overline{U}_i)"] \\ \overline{\boldsymbol{B}}_{\overline{F}_i} \arrow[r, two heads, "\overline{\pi}"] & \overline{\boldsymbol{A}}_{\overline{f}_i} \end{tikzcd}$$

On a, par réduction :

$$\left\{\begin{tikzcd} \boldsymbol{B}^\dagger_{[F_1F_2]} \arrow[r, dashed, "\psi", "\simeq"'] \arrow[d, two heads, "\pi^\dagger_1"'] & \boldsymbol{B}^\dagger_{[F_1F_2]} \arrow[d, two heads, "\pi^\dagger_2"'] \\ \boldsymbol{A}^\dagger_{1,[\pi^\dagger_1(F_2)]} \arrow[r, "\varphi", "\simeq"'] & \boldsymbol{A}^\dagger_{2,[\pi^\dagger_2(F_1)]} \end{tikzcd}\right\} \xmapsto[\text{modulo } \boldsymbol{I}]{\text{réduction}} \left\{\begin{tikzcd} \overline{\boldsymbol{B}}_{\overline{F}_1\overline{F}_2} \arrow[r, "\mathbf{id}"] \arrow[d, two heads, "\overline{\pi}"'] & \overline{\boldsymbol{B}}_{\overline{F}_1\overline{F}_2} \arrow[d, two heads, "\overline{\pi}"'] \\ \overline{\boldsymbol{A}}_{\overline{f}_1\overline{f}_2} \arrow[r, "\mathbf{id}"] & \overline{\boldsymbol{A}}_{\overline{f}_1\overline{f}_2} \end{tikzcd}\right\}$$

où le diagramme de droite est trivialement commutatif. Il existe alors un isomorphisme $\psi:\boldsymbol{B}^\dagger_{[F_1F_2]}\to\boldsymbol{B}^\dagger_{[F_1F_2]}$ congruent à l'identité modulo $\boldsymbol{I}$ fermant commutativement le diagramme de gauche car $\boldsymbol{B}^\dagger_{[F_1F_2]}$ est f.c.t.f. très lisse. On a le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{B}^\dagger_{[F_1]}\oplus\boldsymbol{B}^\dagger_{[F_2]} \arrow[r, "\delta_\psi"] \arrow[d, two heads, "\pi^\dagger_1"', "\pi^\dagger_2"] & \boldsymbol{B}^\dagger_{[F_1F_2]} \arrow[d, two heads, "\pi^\dagger_2"] \\ \boldsymbol{A}^\dagger_1\oplus\boldsymbol{A}^\dagger_2 \arrow[r, "\delta_\varphi"] & \boldsymbol{A}^\dagger_{2,[\pi^\dagger_2(F_1)]} \end{tikzcd} \tag{$\mathscr{D}$}$$

et le morphisme induit $\pi : \ker(\delta_\psi) \dashrightarrow \ker(\delta_\varphi)$; autrement dit, on a le morphisme de suites exactes à gauche :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{0} \to \Gamma(\overline{\boldsymbol{Y}};\mathscr{B}^\dagger) & \xrightarrow{\epsilon_\psi} & \Gamma(\overline{V}_1;\mathscr{B}^\dagger) \oplus \Gamma(\overline{V}_2;\mathscr{B}^\dagger) & \xrightarrow{\delta_\psi} & \Gamma(\overline{V}_{12};\mathscr{B}^\dagger) \\ {\scriptstyle \pi}\downarrow & & {\scriptstyle \pi^\dagger}\downarrow & (\mathscr{D}) & {\scriptstyle \pi^\dagger}\downarrow \\ \mathbf{0} \to \Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger) & \xrightarrow{\epsilon_\varphi} & \Gamma(\overline{U}_1;\mathscr{O}^\dagger) \oplus \Gamma(\overline{U}_2;\mathscr{O}^\dagger) & \xrightarrow{\delta_\varphi} & \Gamma(\overline{U}_{12};\mathscr{O}^\dagger) \end{array} \qquad (\mathscr{D}')$$

avec :

- $(\overline{\boldsymbol{Y}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{Y}}})$ schéma affine associé à $\overline{\boldsymbol{B}}$ (ouvert principal $D(\overline{F}_1+\overline{F}_2)$ dans $\mathbb{A}^{t}_{\overline{\boldsymbol{R}}}$) ;
- $\overline{V}_i = D(F_i)$, ouvert principal de $\overline{\boldsymbol{Y}}$;
- $(\overline{V}_i;\mathscr{B}_i^\dagger)$ le schéma †-adique affine associé à $\boldsymbol{B}^\dagger_{[F_i]}$,
- $(\overline{\boldsymbol{Y}};\mathscr{B}^\dagger)$ le recollement d'espaces annelés des $(\overline{V}_i;\mathscr{B}_i^\dagger)$ via l'isomorphisme ψ.

Le diagramme commutatif suivant relie le morphisme π à sa réduction :

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(\overline{\boldsymbol{Y}};\mathscr{B}^\dagger) & \xrightarrow{\pi} & \Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger) \\ {\scriptstyle \alpha(\overline{\boldsymbol{Y}})}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \alpha(\overline{\boldsymbol{X}})} \\ \Gamma(\overline{\boldsymbol{Y}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{Y}}}) & \xrightarrow{\overline{\pi}} & \Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}}) \end{array}$$

où $\overline{\pi}$ est la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ du morphisme $\pi : \boldsymbol{B}^\dagger \twoheadrightarrow \boldsymbol{A}^\dagger$ car $\overline{\boldsymbol{X}}$ est affine.

La surjectivité de $\alpha(\overline{\boldsymbol{X}})$ résulte maintenant de celle de $\alpha(\overline{\boldsymbol{Y}})$ déjà établie, CQFD. ■

2.5 Affinité des schémas †-adiques de réduction affine

Le but de cette section est de démontrer l'équivalence pour un schéma †-adique entre « *être affine-lisse* » et « *être lisse de réduction affine* » (cor. 2.5.4). Mais avant on rappelle deux cas précédemment connus qu'on utilisera.

2.5.1. Théorème ([M]). ([1]) *Soit $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)$ un schéma †-adique affine de type fini* (*affine-lisse*). *Si $\overline{U}$ est un ouvert* ***principal*** *de $\overline{\boldsymbol{X}}$, le sous-espace annelé $(\overline{U};\mathscr{O}^\dagger|_{\overline{U}})$ est un schéma †-adique affine de type fini* (*affine-lisse*).

2.5.2. Théorème ([Ar$_2$]). ([2]) *Soit $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)$ un schéma †-adique affine-lisse. Si $\overline{U}$ est un ouvert* ***affine*** *de $\overline{\boldsymbol{X}}$, le sous-espace annelé $(\overline{U};\mathscr{O}^\dagger|_{\overline{U}})$ est un schéma †-adique affine-lisse.*

Voici le principal résultat de cette section.

2.5.3. Théorème

a) *Pour tout ouvert affine $\overline{U} \subseteq \overline{\boldsymbol{X}}$ d'un schéma †-adique lisse $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)$, le sous-espace annelé $(\overline{U};\mathscr{O}^\dagger|_{\overline{U}})$ est un schéma †-adique affine-lisse.*

b) *Pour tout ouvert affine $\overline{U} \subseteq \overline{\boldsymbol{X}}$ d'un schéma †-adique lisse $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)$, le morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\alpha(\overline{U}) : \Gamma(\overline{U};\mathscr{O}^\dagger) \to \Gamma(\overline{U};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ est un relèvement f.c.t.f. très lisse.*

c) *Un schéma †-adique lisse et de réduction affine est affine-lisse.*

---

[1] Déjà rappelé dans 2.1.1-(b), c'est le théorème 8 de [M].

[2] Cest la proposition 3.2.16 de [Ar$_2$].

Preuve. Commençons par vérifier que les trois assertions sont équivalentes.
(a)⇒(b). Immédiat (presque par définition).
(b)⇒(c). Les conditions pour appliquer (b) sont vérifiées. L'algèbre $\Gamma(D(\overline{f});\mathscr{O}^\dagger)$ est f.c.t.f. très lisse et $\alpha(D(\overline{f})):\Gamma(D(\overline{f});\mathscr{O}^\dagger)\to\overline{\boldsymbol{A}}_{\overline{f}}$ est un relèvement quel que soit $\overline{f}\in\overline{\boldsymbol{A}}:=\Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)$. Par conséquent, le morphisme de restriction $\boldsymbol{A}^\dagger=\Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)\to\Gamma(D(\overline{f});\mathscr{O}^\dagger)$ induit un **isomorphisme canonique** $\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f]}\to\Gamma(D(\overline{f});\mathscr{O}^\dagger)$ d'où un isomorphisme de faisceaux de $\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{A}^\dagger}$ vers $\mathscr{O}^\dagger$ sur la catégorie des ouverts principaux de $\overline{\boldsymbol{X}}$ induisant l'isomorphisme d'espaces annelés annoncé.
(c)⇒(a). Immédiat.

Cela étant, on démontre à continuation l'assertion (c) pour un schéma †-adique lisse $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)$ de réduction modulo $\boldsymbol{I}$ notée $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$.

Comme le schéma $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ est lisse sur $\overline{\boldsymbol{R}}$ et est affine par hypothèse, l'algèbre $\overline{\boldsymbol{A}}:=\Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ est lisse sur $\overline{\boldsymbol{R}}$ et nous pouvons fixer un relèvement f.c.t.f. très lisse $q:\boldsymbol{A}^\dagger\twoheadrightarrow\overline{\boldsymbol{A}}$, $q:a\mapsto\bar a$. D'autre part, par définition de schéma †-adique, il existe une famille finie $\{f_1,\dots,f_r\}\subseteq\boldsymbol{A}^\dagger$ telle que $1=f_1+\cdots+f_r$ et telle que l'espace annelé $\big(\overline{U}_i;\mathscr{O}^\dagger|_{\overline{U}_i}\big)$, avec $\overline{U}_i:=D(\overline{f}_i)$, est isomorphe au schéma †-adique affine associé à $\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f_i]}$. L'espace annelé $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)$ apparaît ainsi comme le recollement de r schémas †-adiques affines-lisses tous sous-schémas ouverts (principaux) d'un **même** schéma †-adique affine-lisse d'après la discussion 2.4. Dans la suite on notera par $r(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)$ le plus petit des cardinaux de telles descriptions de $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)$.

Notons $g:=1-f_1$. On a $g=f_2+\cdots+f_r$ et un recouvrement ouvert principal :

$$D(\bar g)=D(\bar g\overline{f}_2)\cup\cdots\cup D(\bar g\overline{f}_r)$$

où $(D(\bar g\overline{f}_i);\mathscr{O}^\dagger|_{D(\bar g\overline{f}_i)})$ est †-adique affine-lisse (2.5.1). L'espace annelé $(D(\bar g);\mathscr{O}^\dagger|_{D(\bar g)})$ est donc le recollement ouvert de $r-1$ schémas †-adiques affines-lisses tous sous-schémas ouverts (principaux) d'un même schéma †-adique affine-lisse. En raisonnant par récurrence sur le nombre r nous pouvons conclure que $(D(\bar g);\mathscr{O}|_{D(\bar g)})$ est †-adique affine-lisse et que l'espace annelé $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)$ est le recollement des deux schémas †-adiques affines-lisses

$$\Big(D(\overline{f}_1);\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f]}}\Big)\quad\text{et}\quad\Big(D(\bar g);\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[g]}}\Big)$$

au-dessus du schéma algébrique affine $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ avec $\boldsymbol{X}=D(\overline{f}_1)\cup D(\bar g)$. Le théorème résultera maintenant de vérifier l'assertion (c) dans le cas où $r=2$ ou encore l'assertion (b) aussi pour $r=2$.

Lorsque $r(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)=2$ l'assertion (b) résulte de l'existence pour chaque ouvert affine $\overline{V}\subseteq\overline{\boldsymbol{X}}$ d'un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\gamma(\overline{V}):\boldsymbol{B}(\overline{V})^\dagger\to\Gamma(\overline{V};\mathscr{O}^\dagger)$rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}\boldsymbol{B}(\overline{V})^\dagger & \xrightarrow{\gamma(\overline{V})} & \Gamma(\overline{V};\mathscr{O}^\dagger)\\ \| & & \big\downarrow{\scriptstyle\alpha(\overline{V})}\\ \boldsymbol{B}(\overline{V})^\dagger & \xrightarrow{q} & \Gamma(\overline{V};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})\end{array}\qquad(*)$$

où $q:\boldsymbol{B}(\overline{V})^\dagger \to \Gamma(\overline{V};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ désigne un relèvement f.c.t.f. très lisse. En effet,

*Lemme. Sous les hypothèses en cours, tout morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\gamma(\overline{V}):\boldsymbol{B}(\overline{V})^\dagger \to \Gamma(\overline{V};\mathscr{O}^\dagger)$ vérifiant $\alpha(\overline{V})\circ\gamma(\overline{V})=q$ est nécessairement **bijectif**. Par conséquent, l'existence de $\gamma(\overline{V})$ implique que $\Gamma(\overline{V};\mathscr{O}^\dagger)$ est f.c.t.f. très lisse et que $\alpha(\overline{V})$ est un relèvement.*

Preuve du lemme. Posons pour simplifier $\gamma:=\gamma(\overline{V})$, $\boldsymbol{B}^\dagger:=\boldsymbol{B}(\overline{V})^\dagger$, $\overline{\boldsymbol{B}}:=\Gamma(\overline{V};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$. Notons $b_i\in\boldsymbol{B}^\dagger$ un relèvement de $\bar{b}_i:=\overline{f}_i\cdot\mathbf{1}_{\overline{\boldsymbol{B}}}$. Le schéma †-adique $(\overline{V};\mathscr{O}^\dagger|_{\overline{V}})$ est clairement recollement des deux schémas †-adiques affines-lisses $(\overline{V_1};\mathscr{O}^\dagger)$ et $(\overline{V_2};\mathscr{O}^\dagger)$ (2.5.2) via la restriction de l'isomorphisme $\varphi\in\boldsymbol{G}^\dagger(\boldsymbol{A}^\dagger{}_{f_1f_2})$ à $\boldsymbol{B}^\dagger{}_{b_1b_2}$ (3.4.5) que nous continueront de noter 'φ'.

Nous avons ainsi le diagramme commutatif qui complète le diagramme Δ_2 :

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{B}^\dagger \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, equal] & \Gamma(\overline{V};\mathscr{O}^\dagger) \arrow[r, hook, "\epsilon_\varphi"] \arrow[d, "\alpha(\overline{V})"'] & \boldsymbol{B}^\dagger{}_{[b_1]} \oplus \boldsymbol{B}^\dagger{}_{[b_2]} \arrow[r, "\delta_\varphi"] \arrow[d, two heads, "\alpha(\overline{V_1})"'] \arrow[d, two heads, "\alpha(\overline{V_2})"] & \boldsymbol{B}^\dagger{}_{[b_1b_2]} \arrow[d, two heads, "\alpha_{(\overline{V_1}\cap\overline{V_2})}"] & \\
\boldsymbol{B}^\dagger \arrow[r, two heads, "q"] & \overline{\boldsymbol{B}}=\Gamma(\overline{V};\mathscr{O}_{\overline{V}}) \arrow[r, hook, "\epsilon_{\overline{\mathbf{id}}}"] & \overline{\boldsymbol{B}}_{\bar{b}_1} \oplus \overline{\boldsymbol{B}}_{\bar{b}_2} \arrow[r, "\delta_{\overline{\mathbf{id}}}"] & \overline{\boldsymbol{B}}_{\bar{b}_1\bar{b}_2} \arrow[r] & \mathbf{0}
\end{tikzcd}$$

L'algèbre $\boldsymbol{B}^\dagger{}_{[b_i]}$ possède alors deux structures de $\boldsymbol{B}^\dagger$-algèbres, celle canonique en tant que localisation de $\boldsymbol{B}^\dagger$ que nous allons noter $\{\boldsymbol{B}^\dagger{}_{[b_i]}\}$ et celle induite par la composée $\epsilon_{\varphi,i}\circ\gamma$ que nous notons $[\boldsymbol{B}^\dagger{}_{[b_i]}]$. La réduction modulo $\boldsymbol{I}$ des morphismes structuraux de ces algèbres n'est autre que le morphisme associé à l'inclusion $\overline{V_i}\subseteq\overline{V}$ de sorte que ces morphismes appartiennent à l'ensemble $\mathrm{Homom}'_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{B}^\dagger,\boldsymbol{B}^\dagger{}_{[b_i]})$ sur lequel le groupe $\boldsymbol{G}^\dagger\big(\boldsymbol{B}^\dagger{}_{[b_i]}\big)$ opère à gauche de façon simplement transitive (3.4-a). Il existe donc un et un unique isomorphisme de $\boldsymbol{B}^\dagger$-algèbres $h^\dagger{}_i:\{\boldsymbol{B}^\dagger{}_{[b_i]}\}\to[\boldsymbol{B}^\dagger{}_{[b_i]}]$ congruent à $\mathbf{id}$ modulo $\boldsymbol{I}$ et tel que le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\{\boldsymbol{B}^\dagger{}_{[b_i]}\} \arrow[r, "h^\dagger_i"] \arrow[d, two heads, "\alpha(\overline{V_i})"'] & {[\boldsymbol{B}^\dagger{}_{[b_i]}]} \arrow[d, two heads, "\alpha(\overline{V_i})"] \\
\overline{\boldsymbol{B}}_{\bar{b}_i} \arrow[r, "\mathbf{id}"] & \overline{\boldsymbol{B}}_{\bar{b}_i}
\end{tikzcd}$$

est commutatif. On obtient ainsi un morphisme de suites exactes :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{0} \arrow[r] & \boldsymbol{B}^\dagger \arrow[r, "\epsilon_{\mathbf{id}}"] \arrow[d, "\gamma"'] \arrow[dr, phantom, "\bigoplus"] & \{\boldsymbol{B}^\dagger{}_{[b_1]}\} \oplus \{\boldsymbol{B}^\dagger{}_{[b_2]}\} \arrow[r, "\delta_{\mathbf{id}}"] \arrow[d, "h^\dagger{}_1"', "\simeq"] \arrow[d, "h^\dagger{}_2"', "\simeq"] & \{\boldsymbol{B}^\dagger{}_{[b_1b_2]}\} \arrow[r] \arrow[d, dashed, "h^\dagger{}_{12}"'] & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} \arrow[r] & \Gamma(\overline{V};\mathscr{O}^\dagger) \arrow[r, "\epsilon_\varphi"] & {[\boldsymbol{B}^\dagger{}_{[b_1]}] \oplus [\boldsymbol{B}^\dagger{}_{[b_2]}]} \arrow[r, "\delta_\varphi"] & {[\boldsymbol{B}^\dagger{}_{[b_1b_2]}]} &
\end{tikzcd} \tag{∇_2}$$

où $h^\dagger{}_{12}$ est le morphisme induit sur $\mathrm{coker}(\epsilon_{\mathbf{id}})=\{\boldsymbol{B}^\dagger{}_{[b_1b_2]}\}$ vers $\mathrm{coker}(\epsilon_\varphi)\subseteq[\boldsymbol{B}^\dagger{}_{[b_1b_2]}]$.

On constate alors que les structures de $\boldsymbol{B}^\dagger$-algèbres sur $[\boldsymbol{B}^\dagger{}_{[b_1b_2]}]$ provenant des morphismes $\varphi\circ h^\dagger{}_1$ et $h^\dagger{}_2$ coïncident et alors, le même raisonnement qui nous a conduit à l'existence et unicité des morphismes $h^\dagger{}_i$ prouve que l'application $h^\dagger{}_{12}$ n'est autre que l'unique **iso**morphisme de $\boldsymbol{B}^\dagger$-algèbre de $\{\boldsymbol{B}^\dagger{}_{[b_1b_2]}\}$ sur $[\boldsymbol{B}^\dagger{}_{[b_1b_2]}]$ congruent à $\mathbf{id}$ module $\boldsymbol{I}$. On en déduit la surjectivité de δ_φ et donc la bijectivité de γ. □

Il ne nous reste plus maintenant qu'à justifier l'existence de $\gamma(\overline{V}) : \boldsymbol{B}^\dagger(\overline{V}) \to \Gamma(\overline{V},\mathscr{O}^\dagger)$ vérifiant l'égalité $\alpha(\overline{V}) \circ \gamma(\overline{V}) = q$ pour tout ouvert affine $\overline{V} \subseteq \overline{\boldsymbol{X}}$ et lorsque $r(\overline{\boldsymbol{X}},\mathscr{O}^\dagger) = 2$. Or, $r(\overline{V};\mathscr{O}^\dagger|_{\overline{V}}) \leqslant r(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)$ (2.5.2) de sorte qu'il revient au même de justifier "seulement" l'existence de $\gamma : \boldsymbol{A}^\dagger \to \Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)$ vérifiant $\alpha(\overline{\boldsymbol{X}}) \circ \gamma = q$ pour **tout** schéma †-adique lisse $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)$ de réduction affine et tel que $r(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger) = 2$ ([3]). On reprend dans la suite les notations du début et montrons l'existence de γ en deux étapes.

I. *Cas où* $\overline{\boldsymbol{A}} = \overline{\boldsymbol{R}}[\vec{X}]_{\overline{C}}$

- Soit $C \in \boldsymbol{R}[\vec{X}]$ un relèvement de $\overline{C} \in \overline{\boldsymbol{R}}[\vec{X}]$.
- Soient $q_2 : \boldsymbol{R}[\vec{X}] \to \overline{\boldsymbol{A}}$ et $q_1 : \boldsymbol{R}[\vec{X}]_C \to \overline{\boldsymbol{A}}$ les morphismes induits par la surjection canonique $q : \boldsymbol{R}[\vec{X}]^\dagger_{[C]} \twoheadrightarrow \overline{\boldsymbol{R}}[\vec{X}]_{\overline{C}} = \overline{\boldsymbol{A}}$.
- Soit $\eta_2 : \boldsymbol{R}[\vec{X}] \to \Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)$ un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres vérifiant $\alpha(\overline{\boldsymbol{X}}) \circ \eta_2 = q_2$, son existence résulte de la surjectivité de $\alpha(\overline{\boldsymbol{X}})$ (2.4.1).

On a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{R}[X] \arrow[rrr, "\eta_2"] \arrow[dr] \arrow[ddrrr, bend right, "q_2"'] & & & \Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger) \arrow[r, "\epsilon_\varphi"] \arrow[dd, two heads, "\alpha(\overline{\boldsymbol{X}})"'] & \boldsymbol{A}^\dagger_{[f_1]} \oplus \boldsymbol{A}^\dagger_{[f_2]} \arrow[r, "\delta_\varphi"] \arrow[dd, two heads, "\alpha(\overline{U}_1)"', "\alpha(\overline{U}_2)"] & \boldsymbol{A}^\dagger_{[f_1 f_2]} \arrow[dd, two heads, "\alpha(\overline{U}_1 \cap \overline{U}_2)"] & \\
& \boldsymbol{R}[X]_C \arrow[urr, "\eta_1"] \arrow[dr] \arrow[drr, bend right, "q_1"'] & & & & & \\
& & \boldsymbol{R}[X]^\dagger_{[C]} \arrow[uur, "\gamma"] \arrow[r, two heads, "q"] & \Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}}) \arrow[r, "\bar\epsilon_{\mathrm{id}}"] & \overline{\boldsymbol{A}}_{\bar f_1} \oplus \overline{\boldsymbol{A}}_{\bar f_2} \arrow[r, "\bar\delta_{\mathrm{id}}"] & \overline{\boldsymbol{A}}_{\bar f_1 \bar f_2} \arrow[r] & \boldsymbol{0}
\end{tikzcd}$$

L'élément $u := \eta_2(C)$ est inversible dans $\Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)$. En effet, $\epsilon_{\varphi,i}(u) \in \boldsymbol{A}^\dagger_{[f_i]}$ est inversible puisque sa réduction modulo $\boldsymbol{I}$ l'est et que $\big(\boldsymbol{A}^\dagger_{[f_i]}, \boldsymbol{I}\boldsymbol{A}^\dagger_{[f_i]}\big)$ est de Zariski ; l'égalité $\varphi(\epsilon_{\varphi,1}(u)) = \epsilon_{\varphi,2}(u)$ implique alors la condition de recollement $\varphi(\epsilon_{\varphi,1}(u)^{-1}) = \epsilon_{\varphi,2}(u)^{-1}$ pour l'élément $z \in \Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)$ vérifiant $\epsilon_\varphi(z) = (\epsilon_{\varphi,1}(u)^{-1}, \epsilon_{\varphi,2}(u)^{-1})$ et on a $zu = 1$ par injectivité de ϵ_φ. Le morphisme η_2 induit donc un morphisme $\eta_1 : \boldsymbol{R}[\vec{X}]_C \to \Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)$ vérifiant l'égalité $\alpha(\overline{\boldsymbol{X}}) \circ \eta_1 = q_1$. Cela étant, chaque morphisme $\tau_i := \epsilon_{\varphi,i} \circ \eta_1 : \boldsymbol{R}[\vec{X}]_C \to \boldsymbol{A}^\dagger_{[f_i]}$ se prolonge en un morphisme $\tilde\tau_i : \boldsymbol{R}[\vec{X}]^\dagger_{[C]} \to \boldsymbol{A}^\dagger_{[f_i]}$ et l'égalité $\delta_\varphi\big(\tilde\tau_1(w), \tilde\tau_2(w)\big) = 0$ pour tout $w \in \boldsymbol{R}[\vec{X}]^\dagger$, résulte de la séparation $\boldsymbol{I}$-adique de $\boldsymbol{A}^\dagger_{[f_1 f_2]}$. Le morphisme $\gamma : \boldsymbol{R}[\vec{X}]^\dagger \to \Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)$ défini par $\gamma(w) = \big(\tilde\tau_1(w), \tilde\tau_2(w)\big)$ vérifie par construction l'égalité $\alpha(\overline{\boldsymbol{X}}) \circ \gamma = q$.

II. *Cas général.* Fixons une surjection de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\pi : \boldsymbol{R}[X_1, \ldots, X_t]^\dagger \twoheadrightarrow \boldsymbol{A}^\dagger$ et choisissons des éléments $F_i \in \boldsymbol{R}[\vec{X}]$ tels que $\pi(F_i) = f_i$, on a $\pi(F_1 + F_2) = 1$. Notons $\boldsymbol{B}^\dagger := \boldsymbol{R}[\vec{X}]^\dagger_{[F_1+F_2]}$, Le morphisme π induit par restriction, une surjection de $\boldsymbol{B}^\dagger$ sur $\boldsymbol{A}^\dagger$ et plus généralement une surjection de $\boldsymbol{B}^\dagger_{[G]}$ sur $\boldsymbol{A}^\dagger_{[\pi(G)]}$ quel que soit $G \in \boldsymbol{B}^\dagger$; on désignera tous ces morphismes par la même lettre π. D'autre part, comme la $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{B}^\dagger_{[F_1 F_2]}$ est f.c.t.f. très

[3] Il convient de remarquer que si dans ce cas l'application $\alpha(\overline{\boldsymbol{X}}) : \Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger) \to \Gamma(\overline{\boldsymbol{X}} : \mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ est surjective (2.4.1), on ne sait toujours pas (encore) si c'est un relèvement, faute de quoi l'existence de γ résulterait simplement de ce que $\boldsymbol{B}^\dagger$ est très lisse.

lisse, il existe un isomorphisme $\psi : \boldsymbol{B}^\dagger_{[F_1F_2]} \to \boldsymbol{B}^\dagger_{[F_1F_2]}$ congruent à l'identité modulo $\boldsymbol{I}$ et rendant le diagramme

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{B}^\dagger_{[F_1F_2]} \arrow[r, dashed, "\psi", "\simeq"'] \arrow[d, two heads, "\pi"'] & \boldsymbol{B}^\dagger_{[F_1F_2]} \arrow[d, two heads, "\pi"'] \\ \boldsymbol{A}^\dagger_{[f_1f_2]} \arrow[r, "\varphi", "\simeq"'] & \boldsymbol{A}^\dagger_{[f_1f_2]} \end{tikzcd}$$

commutatif. Il en résulte la commutativité du diagramme :

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{B}^\dagger_{[F_1]} \oplus \boldsymbol{B}^\dagger_{[F_2]} \arrow[r, "\delta_\psi"] \arrow[d, two heads, "\pi"'] & \boldsymbol{B}^\dagger_{[F_1F_2]} \arrow[d, two heads, "\pi"'] \\ \boldsymbol{A}^\dagger_{[f_1]} \oplus \boldsymbol{A}^\dagger_{[f_2]} \arrow[r, "\delta_\varphi"] & \boldsymbol{A}^\dagger_{[f_1f_2]} \end{tikzcd} \tag{$\mathscr{D}$}$$

et un morphisme induit $\pi : \ker(\delta_\psi) \dashrightarrow \ker(\delta_\varphi)$. Autrement dit, on a un morphisme de suites exactes **à gauche** :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{0} \arrow[r] & \Gamma(\overline{\boldsymbol{Y}};\mathscr{B}^\dagger) \arrow[r, "\epsilon_\psi"] \arrow[d, dashed, "\pi"'] & \Gamma(\overline{V}_1;\mathscr{B}^\dagger) \oplus \Gamma(\overline{V}_2;\mathscr{B}^\dagger) \arrow[r, "\delta_\psi"] \arrow[d, two heads, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathscr{D})"] & \Gamma(\overline{V}_1 \cap \overline{V}_2;\mathscr{B}^\dagger) \arrow[r] \arrow[d, two heads, "\pi"'] & 0 \\ \mathbf{0} \arrow[r] & \Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger) \arrow[r, "\epsilon_\varphi"] & \Gamma(\overline{U}_1;\mathscr{O}^\dagger) \oplus \Gamma(\overline{U}_2;\mathscr{O}^\dagger) \arrow[r, "\delta_\varphi"] & \Gamma(\overline{U}_1 \cap \overline{U}_2;\mathscr{O}^\dagger) \arrow[r] & \mathbf{0} \end{tikzcd} \tag{$\mathscr{D}'$}$$

Où :

- $(\overline{\boldsymbol{Y}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{Y}}})$ schéma affine associé à $\overline{\boldsymbol{B}} := \boldsymbol{B}^\dagger/\boldsymbol{I}\boldsymbol{B}^\dagger$, c'est l'ouvert principal $D(\overline{F}_1 + \overline{F}_2)$ de l'espace affine $\mathbb{A}^{\underline{t}}_{\overline{\boldsymbol{R}}}$;
- $\overline{V}_i = D(F_i)$, ouvert principal de $\overline{\boldsymbol{Y}}$;
- $(\overline{V}_i;\mathscr{B}^\dagger_i)$ le schéma †-adique affine associé à $\boldsymbol{B}^\dagger_{[F_i]}$,
- $(\overline{\boldsymbol{Y}};\mathscr{B}^\dagger)$ le recollement d'espaces annelés des $(\overline{V}_i;\mathscr{B}^\dagger_i)$ via l'isomorphisme ψ.

D'après $(\boldsymbol{I})$, le schéma †-adique $(\overline{\boldsymbol{Y}};\mathscr{B}^\dagger)$ est **affine** et la première ligne de $(\mathscr{D}')$ est exacte, de même alors que sa deuxième ligne de par la surjectivité de la troisième colonne. Le conoyau de ϵ_φ est donc le $\boldsymbol{R}$-module $\boldsymbol{A}^\dagger_{[f_1f_2]}$ tout entier dont on sait qu'il est **plat**. La réduction modulo $\boldsymbol{I}$ de la deuxième ligne de $(\mathscr{D}')$ reste donc exacte et coïncide avec la suite exacte courte

$$\mathbf{0} \to \overline{\boldsymbol{A}} \xrightarrow{\epsilon_{\overline{\mathbf{id}}}} \overline{\boldsymbol{A}}_{\overline{f}_1} \oplus \overline{\boldsymbol{A}}_{\overline{f}_2} \xrightarrow{\delta_{\overline{\mathbf{id}}}} \overline{\boldsymbol{A}}_{\overline{f}_1\overline{f}_2} \to \mathbf{0}$$

Autrement dit, la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ du morphisme $\alpha(\overline{\boldsymbol{X}}) : \Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger) \to \overline{\boldsymbol{A}}$ est **bijective**, *i.e.* $\alpha(\overline{\boldsymbol{X}})$ est un relèvement de $\overline{\boldsymbol{A}}$.

Cela étant la complétion faible du morphisme ϵ_φ donne la suite

$$\Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)^\dagger \xrightarrow{\epsilon^\dagger_\varphi} \Gamma(\overline{U}_1;\mathscr{O}^\dagger) \oplus \Gamma(\overline{U}_2;\mathscr{O}^\dagger) \xrightarrow{\delta_\varphi} \Gamma(\overline{U}_1 \cap \overline{U}_2;\mathscr{O}^\dagger) \to \mathbf{0}$$

dont l'exactitude au terme central résulte de mêmes arguments que ceux de la fin de $(\boldsymbol{I})$. On en déduit la factorisation $\mathbf{id} = \epsilon^\dagger_\varphi \circ \iota$:

$$\begin{tikzcd} \Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger) \arrow[r, "\iota"] \arrow[rr, bend right, "\mathbf{id}"'] & \Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)^\dagger \arrow[r, "\epsilon^\dagger_\varphi"] & \Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger), \end{tikzcd}$$

où ι désigne le morphisme canonique d'une algèbre vers sa complétion faible, et un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{A}^\dagger \arrow[rr, dashed, "\gamma^\dagger"] \arrow[d, two heads, "q"'] & & \Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)^\dagger \arrow[rr, "\epsilon^\dagger_\varphi"] \arrow[d, two heads, "q"'] & & \Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger) \arrow[d, two heads, "\alpha(\overline{\boldsymbol{X}})"'] \\
\overline{\boldsymbol{A}} \arrow[r, "\overline{\alpha}(\overline{\boldsymbol{X}})^{-1}", "\simeq"'] & \overline{\Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)} \arrow[r, "\overline{\iota}"] \arrow[rr, bend right, "\mathbf{id}"'] & \overline{\Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)^\dagger} \arrow[r, "\overline{\epsilon}^\dagger_\varphi"] & \overline{\Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)} \arrow[r, "\overline{\alpha}(\overline{\boldsymbol{X}})", "\simeq"'] & \overline{\boldsymbol{A}}
\end{tikzcd}$$

où l'existence de $\gamma^\dagger : \boldsymbol{A}^\dagger \to \Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)^\dagger$ résulte de la lissité de $\boldsymbol{A}^\dagger$. Le morphisme recherché est donc $\gamma = \epsilon^\dagger_\varphi \circ \gamma^\dagger$, CQFD. ∎

2.5.4. Corollaire. *Il y a équivalence pour un schéma †-adique entre être affine-lisse et être lisse et de réduction affine.*

Preuve. Clair d'après (c) de 2.5.3. ∎

Remarque. La terminologie « *affine-lisse* » est désormais obsolète et sera remplacée par l'expression « *lisse et affine* ».

2.5.5. Corollaire. *Pour tout schéma †-adique $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)$ de réduction $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$* ***affine de type fini*** *le morphisme $\alpha(\overline{\boldsymbol{X}}) : \Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger) \to \Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ est* ***surjectif****.*

Preuve. Le corollaire est conséquence évidente de l'assertion suivante

• *Soit $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)$ un schéma †-adique de réduction affine $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$. Notons $\overline{\boldsymbol{A}} := \Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ et supposons qu'il existe $\overline{f}_1,\dots,\overline{f}_r \in \overline{\boldsymbol{A}}$ vérifiant $1 = \overline{f}_1 + \cdots + \overline{f}_r$ et tels que les sous-espaces annelés $\big(D(\overline{f}_i);\mathscr{O}^\dagger|_{D(\overline{f}_i)}\big)$ sont des schéma †-adiques affines. Soit $\pi : \boldsymbol{B} \twoheadrightarrow \overline{\boldsymbol{A}}$ une surjection de $\boldsymbol{R}$-algèbres où $\boldsymbol{B}$ est lisse et telle qu'il existe une famille $\{F_i\} \subseteq \boldsymbol{B}$ vérifiant $\pi(F_i) = \overline{f}_i$ et $F_1 + \cdots + F_r = 1$. Il existe alors un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\pi^\dagger : \boldsymbol{B}^\dagger \to \Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)$ rendant commutatif le diagramme suivant :*

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{B}^\dagger \arrow[r, "\pi^\dagger"] \arrow[d, two heads, "q"'] & \Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger) \arrow[d, "\alpha(\overline{\boldsymbol{X}})"] \\
\overline{\boldsymbol{B}} \arrow[r, two heads, "\overline{\pi}"] & \overline{\boldsymbol{A}} = \Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})
\end{tikzcd} \tag{‡}$$

Lorsque le schéma †-adique $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)$ est lisse le morphisme $\alpha(\overline{\boldsymbol{X}})$ est un relèvement f.c.t.f. d'près 2.5.3, et l'existence de $\pi^\dagger$ résulte alors de ce que $\boldsymbol{B}^\dagger$ est très lisse.

Lorsque $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)$ n'est pas lisse on raisonne par récurrence sur le nombre r. La partie (***II***) de la démonstration de 2.4.1 règle déjà le cas où $r \leqslant 2$. Dans le cas général, on a le recouvrement principal $\boldsymbol{X} = \overline{V}_1 \cup \overline{V}_2$ avec $\overline{V}_1 = D(\overline{f}_1)$ et $\overline{V}_2 = D(1-\overline{f}_1)$ et des diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{B}^\dagger_{[F_1]} \arrow[r, two heads, "\pi^\dagger_1"] \arrow[d, two heads, "q"'] & \Gamma(\overline{V}_1;\mathscr{O}^\dagger) \arrow[d, "\alpha(\overline{V}_1)"] \\
\overline{\boldsymbol{B}}_{\overline{F}_1} \arrow[r, two heads, "\overline{\pi}"] & \overline{\boldsymbol{A}}_{\overline{f}_1}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\boldsymbol{B}^\dagger_{[1-F_1]} \arrow[r, "\pi^\dagger_2"] \arrow[d, two heads, "q"'] & \Gamma(\overline{V}_2;\mathscr{O}^\dagger) \arrow[d, "\alpha(\overline{V}_2)"] \\
\overline{\boldsymbol{B}}_{1-\overline{F}_1} \arrow[r, two heads, "\overline{\pi}"] & \overline{\boldsymbol{A}}_{1-\overline{f}_1}
\end{tikzcd}$$

Celui de gauche parce que $(\overline{V}_1;\mathscr{O}^\dagger)$ est †-adique affine ce qui entraîne que $\Gamma(\overline{V}_1;\mathscr{O}^\dagger)$ est f.c.t.f. et que $\alpha(\overline{V}_1)$ est un relèvement. L'existence de $\pi_1^\dagger$ résulte de ce que $\boldsymbol{B}^\dagger_{[F_1]}$ est très lisse, c'est même un morphisme surjectif car de réduction surjective ([MW] th. 3.2).

Celui de droite par hypothèse de récurrence puisque $D(\overline{V}_2)$ est recouvert par les $(r-1)$ ouverts principaux $D\big(\overline{f}_i(1-\overline{f}_1)^{-1}\big)$, $i=2,\ldots,r$, au-dessus desquels $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)$ est affine. Contrairement à $\pi_1^\dagger$, le morphisme $\pi_2^\dagger$ n'est pas *a priori* surjectif.

La composition des morphismes $\pi_i^\dagger$ avec les restrictions $\Gamma(\overline{V}_i;\mathscr{O}^\dagger)\to\Gamma(\overline{V}_{12};\mathscr{O}^\dagger)$ induit des morphismes de $\boldsymbol{B}^\dagger_{[F_1(1-F_1)]}$ qu'on note pareillement. On a, par réduction :

$$\left\{\begin{array}{ccc} \boldsymbol{B}^\dagger_{[F_1(1-F_1)]} & \overset{\psi}{\underset{\simeq}{\dashrightarrow}} & \boldsymbol{B}^\dagger_{[F_1(1-F_1)]} \\ {\scriptstyle\pi_2^\dagger}\big\downarrow & & {\scriptstyle\pi_1^\dagger}\big\downarrow \\ \Gamma(\overline{V}_{12};\mathscr{O}^\dagger) & \xrightarrow[=]{\mathbf{id}} & \Gamma(\overline{V}_{12};\mathscr{O}^\dagger)\end{array}\right\} \xmapsto[\text{modulo } \boldsymbol{I}]{\text{réduction}} \left\{\begin{array}{ccc} \overline{\boldsymbol{B}}_{\overline{F}_1(1-\overline{F}_1)} & \xrightarrow{\mathbf{id}} & \overline{\boldsymbol{B}}_{\overline{F}_1(1-\overline{F}_1)} \\ {\scriptstyle\overline{\pi}}\big\downarrow & \bigoplus & {\scriptstyle\overline{\pi}}\big\downarrow \\ \overline{\boldsymbol{A}}_{\overline{f}_1(1-\overline{f}_1)} & \xrightarrow{\mathbf{id}} & \overline{\boldsymbol{A}}_{\overline{f}_1(1-\overline{f}_1)}\end{array}\right\}$$

D'où l'existence d'un isomorphisme $\psi:\boldsymbol{B}^\dagger_{[F_1(1-F_1)]}\to\boldsymbol{B}^\dagger_{[F_1(1-F_1)]}$ trivial modulo $\boldsymbol{I}$, qui ferme commutativement le diagramme de gauche puisque $\boldsymbol{B}^\dagger_{[F_1(1-F_1)]}$ est très lisse.

La suite est maintenant connue : on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{B}^\dagger_{[1-F_1]} \;\oplus\; \boldsymbol{B}^\dagger_{[F_1]} & \xrightarrow{\delta_\psi} & \boldsymbol{B}^\dagger_{[F_1(1-F_1)]} \\ {\scriptstyle\pi_2^\dagger}\big\downarrow \qquad\quad \big\downarrow{\scriptstyle\pi_1^\dagger} & & {\scriptstyle\pi_1^\dagger}\big\downarrow \\ \Gamma(\overline{V}_2;\mathscr{O}^\dagger)\oplus\Gamma(\overline{V}_1;\mathscr{O}^\dagger) & \xrightarrow{\delta} & \Gamma(\overline{V}_{12};\mathscr{O}^\dagger)\end{array} \tag{$\mathscr{D}$}$$

induisant un morphisme d'algèbres $\pi^\dagger:\ker(\delta_\psi)\to\ker(\delta)$. Or, $\ker(\delta_\psi)=\boldsymbol{B}^\dagger$ d'après 2.5.3 et $\ker(\delta)=\Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)$. Nous avons donc bien $\pi^\dagger:\boldsymbol{B}^\dagger\to\Gamma(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)$ rendant commutatif le diagramme (‡) CQFD. ∎

2.5.6. Remarque. Le corollaire précédent suggère très fortement l'acyclicité cohomologique des faisceaux structuraux des schémas †-adiques à réduction affine de type fini. Cela est clair dans le cas lisse maintenant qu'on a 2.5.3 car c'est ainsi des schémas †-adiques affines d'après Meredith. On observera aussi que le diagramme $(\mathscr{D})$ à la fin de la démonstration montre aussi que δ est surjectif, car c'est ainsi de δ_ψ. Autrement dit, la cohomologie de Čech de $\mathscr{O}^\dagger$ relative à tout recouvrement principal à deux ouverts $\{\overline{V}_1,\overline{V}_2\}$ tel que $(\overline{V}_1;\mathscr{O}^\dagger|_{\overline{V}_1})$ est †-adique affine, est triviale.

Comme les ouverts principaux “affinissants” constituent une base pour la topologie de $\overline{\boldsymbol{X}}$, cela semble suffire, compte tenu de la proposition 3.2.10, pour prouver le :

Théorème. Pour tout schéma †-adique $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger)$, on a :

$$H^j(\overline{U};\mathscr{O}^\dagger)=0\,,\ \textit{pour tout}\ j>0.$$

quel que soit l'ouvert affine $\overline{U}\subseteq\overline{\boldsymbol{X}}$.

Cette remarque est à vérifier, bien entendu !

2.5.7. Un théorème de relèvement de morphismes. Cette section est destinée à prouver un corollaire du théorème de relèvement de morphismes à source lisse ([Ar]-**2.1.3**) qu'on a utilisé dans une première démonstration du théorème 2.5.3. Ce corollaire étant plus fort que nécessaire nous l'avons remplacé dans la dernière version de la démonstration. Nous pensons que ce corollaire est néanmoins intéressant même s'l n'est pas utilisé dans ces notes.

2.5.8. Rappel du théorème [Ar]-2.1.3. *Étant donnés un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\overline{h} : \overline{\boldsymbol{A}} \to \overline{\boldsymbol{B}}$, et des relèvements $p_{\boldsymbol{A}} : \boldsymbol{A} \twoheadrightarrow \overline{\boldsymbol{A}}$ et $p_{\boldsymbol{B}} : \boldsymbol{B} \twoheadrightarrow \overline{\boldsymbol{B}}$, où $\boldsymbol{A}$ est lisse, il existe une $\boldsymbol{B}$-algèbre $\boldsymbol{B}_\varepsilon$ intersection complète et voisinage étale de $\boldsymbol{I}$ dans $\boldsymbol{B}$, et un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $h_\epsilon : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}_\varepsilon$ qui relève $\overline{h}$. En d'autres termes, on a un diagramme :*

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{A} \arrow[r, dashed, "h_\varepsilon"] \arrow[d, two heads, "p_{\boldsymbol{A}}"'] & \boldsymbol{B}_\varepsilon \arrow[dr, two heads, "p_{\boldsymbol{B}_\varepsilon}"'] & \boldsymbol{B} \arrow[l, "\varepsilon"'] \arrow[d, two heads, "p_{\boldsymbol{B}}"] \\ \overline{\boldsymbol{A}} \arrow[rr, "\overline{h}"] & & \overline{\boldsymbol{B}} \end{tikzcd} \tag{$\mathscr{R}$}$$

où $\varepsilon : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{B}_\varepsilon$ désigne l'homomorphisme structural et où $p_{\boldsymbol{B}_\varepsilon}$ est l'homomorphisme induit par ε à partir de $p_{\boldsymbol{B}}$.

Dans la proposition qui suit on se donne une $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{E}$ et une $\boldsymbol{E}$-algèbre $\boldsymbol{A}$, dans un tel contexte la notation $\boldsymbol{A}^\dagger$ désigne la complétion faible de $\boldsymbol{A}$ relative au couple $(\boldsymbol{R},\boldsymbol{I})$ pour la structure de $\boldsymbol{R}$-module sur $\boldsymbol{A}$ induite par $\boldsymbol{E}$.

2.5.9. Proposition. *Soit $\boldsymbol{E}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre de type fini. On se donne des $\boldsymbol{E}$-algèbres de type fini $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ où $\boldsymbol{A}$ est $\boldsymbol{E}$-lisse. Pour tout morphisme de $\boldsymbol{E}$-algèbres $\overline{h} : \overline{\boldsymbol{A}} \to \overline{\boldsymbol{B}}$ il existe un morphisme de $\boldsymbol{E}^\dagger$-algèbres $h^\dagger : \boldsymbol{A}^\dagger \to \boldsymbol{B}^\dagger$ rendant commutatif le diagramme suivant.*

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{A}^\dagger \arrow[r, "h^\dagger"] \arrow[d, two heads, "p_{\boldsymbol{A}^\dagger}"'] & \boldsymbol{B}^\dagger \arrow[d, two heads, "p_{\boldsymbol{B}^\dagger}"] \\ \overline{\boldsymbol{A}} \arrow[r, "\overline{h}"] & \overline{\boldsymbol{B}} \end{tikzcd}$$

Preuve. En appliquant le théorème 2.5.8 on a :

i) la $\boldsymbol{E}$-algèbre $\boldsymbol{B}_\varepsilon$ et le morphisme étale de $\boldsymbol{E}$-algèbres $\varepsilon : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{B}_\varepsilon$, voisinage étale de $\boldsymbol{I}$ dans $\boldsymbol{B}$. Par complétion faible (relative à $(\boldsymbol{R},\boldsymbol{I})$) on a un **isomorphisme** de $\boldsymbol{E}^\dagger$-algèbres $\varepsilon^\dagger : \boldsymbol{B}^\dagger \to \boldsymbol{B}_\varepsilon^\dagger$ (*cf.* [Ar] prop. **3.2.5**).

ii) le morphisme de $\boldsymbol{E}$-algèbres $h : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}_\varepsilon$ de complétion faible : le morphisme de $\boldsymbol{E}^\dagger$-algèbres ${h^\dagger}_\varepsilon : \boldsymbol{A}^\dagger \to \boldsymbol{B}_\varepsilon^\dagger$.

La commutativité du diagramme $(\mathscr{R})$ étant préservée par complétion faible, la proposition résulte alors de prendre $h^\dagger = (\varepsilon^\dagger)^{-1} \circ h_\varepsilon^\dagger$. ∎

2.5.10. Remarque. Bien que le théorème 2.5.8 soit valable sous des hypothèses très faibles : l'anneau $\boldsymbol{R}$ commutatif avec identité multiplicative et l'idéal $\boldsymbol{I}$ quelconque, la proposition 2.5.9 est démontrée à l'aide de la proposition **3.2.5** de [Ar] où $\boldsymbol{R}$ est nœthérien et $\boldsymbol{B}$ est une $\boldsymbol{R}$-algèbre de type fini.

§ 3. Références bibliographiques

[Ar] A. Arabia. Relèvements des algèbres lisses et de leurs morphismes ; Commentarii Mathematici Helvetici 76 (2001) 607–639. (2000).

[Ar_2] A. Arabia. Cohomologie de Monsky-Washnitzer dans la catégorie des schémas lisses et séparés sur $\overline{\boldsymbol{R}}$; Prépublication (2004).

[M] D. Meredith. Weak formal schemes ; Nagoya Math. Journal. Vol. 45, pp. 1–38 (1971).

[MW] P. Monsky, G. Washnitzer. Formal cohomology : I ; Ann. of Math. (2) **88**, pp. 181–217 (1968).