A propos d'un théorème d'Henri Cartan

Alberto Arabia*

Ce texte concerne les articles de Henri Cartan suivants :

C1. *Notions d'algèbre différentielle ; application aux groupes de Lie et aux variétés où opère un groupe de Lie.* Colloque de topologie (espaces fibrés), Bruxelles, 1950, pp. 15–27.

C2. *La transgression dans un groupe de Lie et dans un espace fibré principal.* Colloque de topologie (espaces fibrés), Bruxelles, 1950, pp. 57–71.

On donne une preuve simple du Théorème 3 de [C2] (p. 62). Les notations seront celles de [C1,C2] à de petites différences près.

§ 1. Rappels

1.1 Objets et notations

- Dans la suite, les objets gradués le sont sur $\mathbb{N}$.
- $\mathfrak{g}$ algèbre de Lie (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de dual noté $\mathfrak{g}^\vee$.
- $\boldsymbol{S}^*(\mathfrak{g}^\vee)$ algèbre graduée des fonctions polynôme sur $\mathfrak{g}$.
- $\Lambda^*(\mathfrak{g}^\vee)$ algèbre graduée des formes multilinéaires alternées sur $\mathfrak{g}$.
- Pour chaque $x \in \mathfrak{g}$, l'endomorphisme $\operatorname{ad}(x) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ induit une action sur $\mathfrak{g}^\vee$ qui se prolonge en des dérivations de degré 0 sur $\boldsymbol{S}^*(\mathfrak{g}^\vee)$ et $\Lambda^*(\mathfrak{g}^\vee)$, notées $\theta(x)$. On a ainsi des homomorphisme d'algèbres de Lie
$$\theta : \mathfrak{g} \to \operatorname{Der}^0(\boldsymbol{S}^*(\mathfrak{g}^\vee), \boldsymbol{S}^*(\mathfrak{g}^\vee)) \quad \text{et} \quad \theta : \mathfrak{g} \to \operatorname{Der}^0(\Lambda^*(\mathfrak{g}^\vee), \Lambda^*(\mathfrak{g}^\vee))$$
- Pour chaque $x \in \mathfrak{g}$, la forme linéaire qui fait correspondre $\lambda \in \mathfrak{g}^\vee \mapsto \lambda(x)$ induit une antidérivation de degré -1 sur $\Lambda^*(\mathfrak{g}^\vee)$ notée $\boldsymbol{i}(x)$.
- $d_{\boldsymbol{K}} : \Lambda^*(\mathfrak{g}^\vee) \to \Lambda^*(\mathfrak{g}^\vee)$, « *différentielle de Koszul* », antidérivation de degré $+1$, définie par :
$$d_{\boldsymbol{K}}(\_) = \frac{1}{2} \sum_k x'_k \wedge \theta(x_k)(\_),$$
où $\{x'_k\}$ désigne la base duale d'une base $\{x_k\}$ de $\mathfrak{g}$ arbitrairement choisie.
- $\boldsymbol{W}^*(\mathfrak{g}) := \Lambda^*(\mathfrak{g}^\vee) \otimes \boldsymbol{S}^*(\mathfrak{g}^\vee)$, « *Algèbre de Weil de* $\mathfrak{g}$ », munie de la graduation définie par :
$$\boldsymbol{W}^d(\mathfrak{g}) := \bigoplus\nolimits_{d=a+2b} \Lambda^a(\mathfrak{g}^\vee) \otimes \boldsymbol{S}^b(\mathfrak{g}^\vee),$$
et d'une structure d'algèbre différentielle graduée par la donnée de l'antidérivation $d_{\boldsymbol{W}} : \boldsymbol{W}^*(\mathfrak{g}) \to \boldsymbol{W}^*(\mathfrak{g})$, de degré $+1$:
$$\begin{cases} d_{\boldsymbol{W}}(\lambda \otimes 1) := 1 \otimes \lambda + d_{\boldsymbol{K}}(\lambda) \otimes 1 \\ d_{\boldsymbol{W}}(1 \otimes \lambda) := \sum_k x'_k \otimes \theta(x_k)\lambda \end{cases}$$

La dérivation $\theta(x)$ sur $\Lambda^*(\mathfrak{g}^\vee)$ et $\boldsymbol{S}^*(\mathfrak{g}^\vee)$ se prolonge en une unique dérivation de degré 0 sur $\boldsymbol{W}^*(\mathfrak{g})$ notée également $\theta(x)$. L'antidérivation $\boldsymbol{i}(x)$ sur $\Lambda^*(\mathfrak{g}^\vee)$ se prolonge en une unique antidérivation de $\boldsymbol{W}^*(\mathfrak{g})$ dont la restriction à $\boldsymbol{S}^1(\mathfrak{g}^\vee)$ est nulle qui sera également notée $\boldsymbol{i}(x)$. On a ainsi le quadruplet $\big(\boldsymbol{W}^*(\mathfrak{g}), d_{\boldsymbol{W}}, \theta, \boldsymbol{i}\big)$.

*CNRS – Institut de Mathématiques de Jussieu – Université de Paris 7 - Denis Diderot.
Laboratoire de Théorie des Groupes, Représentations et Applications.
UFR de Mathématiques de l'Université Paris 7 – Denis Diderot.
175, rue du Chevaleret, 6e étage, bureau 6D15, 75013 Paris.
Adresse électronique : arabia@math.jussieu.fr

- Une « *algèbre différentielle graduée munie d'une action de* $\mathfrak{g}$ », $\mathfrak{g}$-ADG dans la suite, est la donnée d'une algèbre différentielle graduée $(\boldsymbol{E}^*, d_{\boldsymbol{E}})$, d'un homomorphisme d'algèbres de Lie, $\theta : \mathfrak{g} \to \mathrm{Der}^0(\boldsymbol{E}^*, \boldsymbol{E}^*)$, et d'un morphisme $\boldsymbol{i} : \mathfrak{g} \to \mathrm{Der}^{-1}(\boldsymbol{E}^*, \boldsymbol{E}^*)$ vérifiant les conditions :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{(I)} & \theta([x,y]) = \theta(x)\theta(y) - \theta(y)\theta(x); \\ \text{(II)} & \boldsymbol{i}([x,y]) = \theta(x)\,\boldsymbol{i}(y) - \boldsymbol{i}(y)\theta(x); \\ \text{(III)} & \theta(x) = \boldsymbol{i}(x)d_{\boldsymbol{E}} + d_{\boldsymbol{E}}\,\boldsymbol{i}(x) \end{array}}$$

Remarque. $\big(\Lambda^*(\mathfrak{g}^\vee), d_{\boldsymbol{K}}, \theta, \boldsymbol{i}\big)$ et $\big(\boldsymbol{W}^*(\mathfrak{g}), d_{\boldsymbol{W}}, \theta, \boldsymbol{i}\big)$ sont des $\mathfrak{g}$-ADG.

Un élément ω d'une $\mathfrak{g}$-ADG $(\boldsymbol{E}^*, \boldsymbol{d}_{\boldsymbol{E}}, \theta, \boldsymbol{i})$, est dit « *basique* » lorsque

$$\boldsymbol{i}(x)\omega = \theta(x)\omega = 0\,, \qquad \text{pour tout } x \in \mathfrak{g}\,.$$

L'ensemble $\mathbf{Bas}^*(\boldsymbol{E})$ des éléments basiques est alors une sous-algèbre différentielle graduée de $(\boldsymbol{E}^*, d_{\boldsymbol{E}})$.

- Une « *connexion* » d'une $\mathfrak{g}$-ADG $\big(\boldsymbol{E}^*, d_{\boldsymbol{E}}, \theta, \boldsymbol{i}\big)$ est la donnée d'une application linéaire $f : \Lambda^1(\mathfrak{g}^\vee) \to \boldsymbol{E}^1$ vérifiant, pour tout $x \in \mathfrak{g}$,

$$f \circ \theta(x) = \theta(x) \circ f \quad \text{et} \quad f \circ \boldsymbol{i}(x) = \boldsymbol{i}(x) \circ f\,.$$

- Pour $(\boldsymbol{E}^*, d_{\boldsymbol{E}})$ comme ci-dessus, on note $\overline{\boldsymbol{E}}^* := \boldsymbol{E}^* \otimes \boldsymbol{W}^*(\mathfrak{g})$, et

$$\begin{array}{rl} \bar{\boldsymbol{d}}_{\boldsymbol{E}} : \overline{\boldsymbol{E}}^* \to \overline{\boldsymbol{E}}^* : & \text{antidérivation de degré } +1 \text{ qui prolonge} \\ & d_{\boldsymbol{W}} : \boldsymbol{W}^*(\mathfrak{g}) \to \boldsymbol{W}^*(\mathfrak{g}) \text{ et } d_{\boldsymbol{E}} : \boldsymbol{E}^* \to \boldsymbol{E}^*. \\ \boldsymbol{i(x)} : \overline{\boldsymbol{E}}^* \to \overline{\boldsymbol{E}}^* : & \text{antidérivation de degré } -1 \text{ qui prolonge} \\ & \boldsymbol{i}(x) : \boldsymbol{W}^*(\mathfrak{g}) \to \boldsymbol{W}^*(\mathfrak{g}) \text{ et } \boldsymbol{i}(x) : \boldsymbol{E}^* \to \boldsymbol{E}^*. \\ \boldsymbol{\theta(x)} : \overline{\boldsymbol{E}}^* \to \overline{\boldsymbol{E}}^* : & \text{dérivation de degré 0 qui prolonge} \\ & \theta(x) : \boldsymbol{W}^*(\mathfrak{g}) \to \boldsymbol{W}^*(\mathfrak{g}) \text{ et } \theta(x) : \boldsymbol{E}^* \to \boldsymbol{E}^*. \end{array}$$

Le quadruplet $\big(\overline{\boldsymbol{E}}^*, \bar{d}_{\boldsymbol{E}}, \theta, \boldsymbol{i}\big)$ est à nouveau une $\mathfrak{g}$-ADG.

§ 2. Le théorème

Théorème (th. 3 [C2]). *Avec les données ci-dessus, l'application* $\omega \mapsto \omega \otimes 1 \otimes 1$ *est un homomorphisme injectif de* $\mathfrak{g}$*-ADG, noté* $\Xi : \boldsymbol{E}^* \hookrightarrow \overline{\boldsymbol{E}}^*$*, de restriction aux éléments basiques notée* $\xi : \mathbf{Bas}^*(\boldsymbol{E}) \hookrightarrow \mathbf{Bas}^*(\overline{\boldsymbol{E}})$.

Lorsque $(\boldsymbol{E}^*, d_{\boldsymbol{E}}, \theta, \boldsymbol{i})$ *admet une connexion, les morphismes de complexes* Ξ *et* ξ *sont des quasi-isomorphismes.*

Démonstration. Soit $f : \Lambda^1(\mathfrak{g}^\vee) \to \boldsymbol{E}^1$ une connexion et considérons, suivant Cartan, l'antidérivation κ sur $\overline{\boldsymbol{E}}^* = \boldsymbol{E}^* \otimes \boldsymbol{W}^*(\mathfrak{g})$, de degré -1, nulle sur $\boldsymbol{E}^* \otimes \Lambda^*(\mathfrak{g}^\vee) \otimes 1$ et dont la restriction à $\boldsymbol{S}^1(\mathfrak{g}^\vee)$ est définie par :

$$\kappa(1 \otimes 1 \otimes \lambda) = (1 \otimes \lambda \otimes 1) - (f\lambda \otimes 1 \otimes 1)\,.$$

Pour chaque $x \in \mathfrak{g}$, on a les égalités sur $\overline{\boldsymbol{E}}^*$

$$\boxed{\kappa\circ\theta(x)=\theta(x)\circ\kappa \quad \text{et} \quad \kappa\circ \boldsymbol{i}(x)=-\,\boldsymbol{i}(x)\circ\kappa} \tag{$*$}$$

En effet, $\kappa\circ\theta(x)-\theta(x)\circ\kappa$ et $\kappa\circ\boldsymbol{i}(x)+\boldsymbol{i}(x)\circ\kappa$ (‡) sont respectivement une antidérivation de degré -1 et une dérivation de degré -2. Leur action sur $\overline{\boldsymbol{E}}^*$ est donc déterminée par leurs restrictions à $1\otimes 1\otimes \boldsymbol{S}^1(\mathfrak{g}^\vee)$, à $1\otimes\Lambda^1(\mathfrak{g}^\vee)\otimes 1$ et à $\boldsymbol{E}^*\otimes 1\otimes 1$ qui sont trivialement nulles. ([1])

L'endomorphisme de $\overline{\boldsymbol{E}}^*$:

$$\boxed{h=\bar{d}_{\boldsymbol{E}}\circ\kappa+\kappa\circ\bar{d}_{\boldsymbol{E}}}$$

est une dérivation de degré 0 de $\overline{\boldsymbol{E}}^*$ qui vérifie :

$$\boxed{h\circ\theta(x)=\theta(x)\circ h\,,\quad h\circ\bar{d}_{\overline{\boldsymbol{E}}}=\bar{d}_{\overline{\boldsymbol{E}}}\circ h\,,\quad h\circ\boldsymbol{i}(x)=\boldsymbol{i}(x)\circ h\,,\quad h(\boldsymbol{E}^*\otimes 1\otimes 1)=0}$$

(immédiat d'après $(*)$ et (I,II,III)). Il induit donc un endomorphisme de module différentiel gradué sur $\mathbf{Bas}^*(\overline{\boldsymbol{E}})$ et sur les complexes quotients

$$\operatorname{coker}\Xi=\frac{\overline{\boldsymbol{E}}^*}{\boldsymbol{E}^*\otimes 1\otimes 1} \quad \text{et} \quad \operatorname{coker}\xi=\frac{\mathbf{Bas}^*(\overline{\boldsymbol{E}})}{\mathbf{Bas}^*(\boldsymbol{E})\otimes 1\otimes 1}$$

Notons $\mathcal{Z}^*(\operatorname{coker}\Xi)$, $\mathcal{B}^*(\operatorname{coker}\Xi)$, $\mathcal{Z}^*(\operatorname{coker}\xi)$, $\mathcal{B}^*(\operatorname{coker}\xi)$ respectivement les sous-algèbres de cocycles et les idéaux des cobords des complexes en question. On a

$$h(\mathcal{Z}^*(\operatorname{coker}\Xi))\subseteq\mathcal{B}^*(\operatorname{coker}\Xi) \quad \text{et} \quad h(\mathcal{Z}^*(\operatorname{coker}\xi))\subseteq\mathcal{B}^*(\operatorname{coker}\xi)$$

et les diagrammes de morphismes de modules gradués de degré 0 suivants, où l'on note Π et π les surjections canoniques, sont trivialement commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{Z}^*(\operatorname{coker}\Xi) \arrow[r, "h"] \arrow[d, two heads, "\Pi"'] \arrow[dr, phantom, "\oplus"] & \mathcal{Z}^*(\operatorname{coker}\Xi) \arrow[d, two heads, "\Pi"'] & \mathcal{Z}^*(\operatorname{coker}\xi) \arrow[r, "h"] \arrow[d, two heads, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\oplus"] & \mathcal{Z}^*(\operatorname{coker}\xi) \arrow[d, two heads, "\pi"'] \\
H^*(\operatorname{coker}\Xi) \arrow[r, "0"] & H^*(\operatorname{coker}\Xi) & H^*(\operatorname{coker}\xi) \arrow[r, "0"] & H^*(\operatorname{coker}\xi)
\end{tikzcd} \tag{$\mathcal{D}$}$$

Décomposition spectrale de $h:\overline{\boldsymbol{E}}^*\to\overline{\boldsymbol{E}}^*$. On commence par remarquer que $\overline{\boldsymbol{E}}^*$ est un $\boldsymbol{E}^*$-module gradué à gauche *libre* admettant comme base la famille des monômes

$$M_{\Lambda,P}:=1\otimes(x'_{j_1}\wedge\cdots\wedge x'_{j_r})\otimes(x'_{\ell_1}\cdots x'_{\ell_s})$$

où :

- $\{x_i\}$ est une base de $\mathfrak{g}$ de base duale $\{x'_i\}$,
- $\Lambda:=(j_1<\cdots<j_r)$ et $P:=(\ell_1\leqslant\cdots\leqslant\ell_s)$ avec la convention que lorsque $P=\varnothing$ (resp. $\Lambda=\varnothing$) le terme symétrique (resp. antisymétrique) vaut 1. On notera $|\Lambda|:=r$ et $|P|:=s$.

Étant données deux suite ordonnées d'entiers naturels P_1,P_2 on note « $P_1\preccurlyeq P_2$ » lorsque P_1 est une sous-suite de P_2. La notation « $P_1\prec P_2$ » équivaut à « $P_1\preccurlyeq P_2$ *et* $P_1\neq P_2$ ». La relation '$\preccurlyeq$' est un ordre partiel sur l'ensemble des suites finies croissantes d'entiers naturels. On munit l'ensemble des couples de suites finies $\{(\Lambda,P)\}$ de l'ordre partiel défini par l'ordre

[1] Il s'ensuit que κ respecte les éléments basiques, *i.e.* $\kappa(\mathbf{Bas}^*(\overline{\boldsymbol{E}}))\subseteq\mathbf{Bas}^*(\overline{\boldsymbol{E}})$, mais on n'aura pas besoin de ce résultat.

lexicographique inverse, autrement dit :

$$(\Lambda_1,P_1)\preccurlyeq(\Lambda_2,P_2)\Longleftrightarrow\begin{cases}P_1\prec P_2\,,\ \text{ou bien}\\ P_1=P_2\ \text{et}\ \Lambda_1\preccurlyeq\Lambda_2\,.\end{cases}$$

D'autre part, $h:\overline{\boldsymbol{E}}^*\to\overline{\boldsymbol{E}}^*$ est un endomorphisme de $\boldsymbol{E}^*$-module vérifiant :

- $h(1{\otimes}1{\otimes}\lambda){=}(\bar d_{\boldsymbol{E}}{\circ}\kappa{+}\kappa{\circ}\bar d_{\boldsymbol{E}})\big(1{\otimes}1{\otimes}\lambda\big)$

$$\begin{aligned}&=\bar d_{\boldsymbol{E}}(1{\otimes}\lambda{\otimes}1)-\bar d_{\boldsymbol{E}}\big(f\lambda{\otimes}1{\otimes}1\big)+\kappa\sum_k\big(1{\otimes}x'_k{\otimes}\theta(x'_k)\lambda\big)\\&=\big(1{\otimes}1{\otimes}\lambda\big)+(1{\otimes}d_{\boldsymbol{K}}\lambda{\otimes}1)-\big(d_{\boldsymbol{E}}f\lambda{\otimes}1{\otimes}1\big)-2(1{\otimes}d_{\boldsymbol{K}}\lambda{\otimes}1)+\sum_k\big(\theta(x_k)f\lambda{\otimes}x'_k{\otimes}1\big)\\&=\big(1{\otimes}1{\otimes}\lambda\big)-(1{\otimes}d_{\boldsymbol{K}}\lambda{\otimes}1)-\big(d_{\boldsymbol{E}}f\lambda{\otimes}1{\otimes}1\big)+\sum_k\big(\theta(x_k)f\lambda{\otimes}x'_k{\otimes}1\big)\end{aligned}$$

- $h(1{\otimes}\lambda{\otimes}1){=}(\bar d_{\boldsymbol{E}}{\circ}\kappa{+}\kappa{\circ}\bar d_{\boldsymbol{E}})(1{\otimes}\lambda{\otimes}1){=}\kappa\big(1{\otimes}1{\otimes}\lambda\big){=}(1{\otimes}\lambda{\otimes}1)-\big(f\lambda{\otimes}1{\otimes}1\big)$

et comme h est en plus une dérivation, on en déduit aussitôt l'égalité, pour tous (λ,P) :

$$\boxed{h(M_{\Lambda,P})=(|\Lambda|+|P|)M_{\Lambda,P}+\textstyle\sum_\ell\,\omega_{\Lambda,P}^{\Lambda_\ell,P_\ell}\cdot M_{\Lambda_\ell,P_\ell}}$$

avec $(\Lambda_\ell,P_\ell)\prec(\Lambda,P)$ et $\omega_{\Lambda,P}^{\Lambda_\ell,P_\ell}\in\boldsymbol{E}^*$. D'où la conséquence fondamentale suivante :

> - *L'endomorphisme $h:\overline{\boldsymbol{E}}^*\to\overline{\boldsymbol{E}}^*$ est trigonalisable.*
> - *$\mathbb{N}$ est l'ensemble des valeurs propres de $h:\overline{\boldsymbol{E}}^*\to\overline{\boldsymbol{E}}^*$.*
> - *Le sous-espace spectral de h dans $\overline{\boldsymbol{E}}^*$ associé à la valeur propre 0 est $\boldsymbol{E}^*\cdot M_{\varnothing,\varnothing}=\boldsymbol{E}^*\otimes1\otimes1$. Il coïncide donc avec $\ker h$.*

Enfin, comme h commute aux opérateurs $\bar d_{\boldsymbol{E}},\theta(x),\boldsymbol{i}(x)$, les espaces vectoriels

$$\mathcal{Z}^*(\mathrm{coker}(\xi))\subseteq\mathcal{Z}^*(\mathrm{coker}(\Xi))\subseteq\frac{\overline{\boldsymbol{E}}^*}{\boldsymbol{E}^*\otimes1\otimes1}$$

se décomposent en somme directe de sous-espaces spectraux de h associés à des valeurs propres **strictement positives**. En particulier, les surjections Π et π dans $(\mathcal{D})$ sont nécessairement nulles et alors

$$\boxed{H^*(\mathrm{coker}\,\Xi)=H^*(\mathrm{coker}\,\xi)=0}$$

Ces annulations reportées dans suites exactes longues de cohomologie

$$\longrightarrow H^{m-1}(\mathrm{coker}\,\Xi)\longrightarrow H^m(\boldsymbol{E}^*)\xrightarrow{H^m(\Xi)}H^m(\overline{\boldsymbol{E}}^*)\longrightarrow H^m(\mathrm{coker}\,\Xi)\longrightarrow$$

$$\longrightarrow H^{m-1}(\mathrm{coker}\,\xi)\longrightarrow H^m(\boldsymbol{B}^*)\xrightarrow{H^m(\xi)}H^m(\overline{\boldsymbol{B}}^*)\longrightarrow H^m(\mathrm{coker}\,\xi)\longrightarrow$$

où $\boldsymbol{B}^*:=\mathbf{Bas}^*(\boldsymbol{E})$ et $\overline{\boldsymbol{B}}^*:=\mathbf{Bas}^*(\overline{\boldsymbol{E}})$, terminent la preuve du théorème. ■

———————×———————

Alberto Arabia
CNRS
Institut de Mathématiques de Jussieu
Théorie des Groupes
Samedi 2 juin 2003