UFR de Mathématiques, Université de Paris 7 - Denis Diderot vendredi 14 juin 2002
DEA 2001/02 deuxième semestre
"Introduction à l'homologie d'intersection et aux faisceaux pervers"
Alberto Arabia

Examen FINAL

Notations. • k : un corps ; • $\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}}$: le faisceaux constant de fibre k sur $\boldsymbol{X}$; • $d_{\boldsymbol{X}} = \dim_{\mathrm{ch}}(\boldsymbol{X})$; • $\mathrm{c}_{\mathrm{pt}}(\mathbb{L})$: cône ouvert de $\mathbb{L}$ de sommet pt : • $\bar{p}, \bar{q}$: perversités ; • $\bar{p}'$: perversité complémentaire de $\bar{p}$, donc $p_k + p'_k = k-2$; • $\boldsymbol{U}^0_{\mathfrak{F}}$: réunion des strates ouvertes d'une stratification $\mathfrak{F}$; • $\boldsymbol{S}^k_{\mathfrak{F}}$: réunion des strates de codimension k d'une stratification $\mathfrak{F}$.

1) Homologie d'intersection du cône ouvert d'un tore

Soient $\mathbb{T}^n := \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$ le tore réel de dimension $n \geqslant 1$ et $\boldsymbol{X} := \mathrm{c}_{\mathbf{s}}(\mathbb{T}^n)$ son cône ouvert.
a) Montrer qu'il existe au plus n homologies d'intersection distinctes à coefficients dans $\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}}$.
b) Expliciter pour chacune des perversités possibles, les groupes $I_{\bar{p}}H^*(\boldsymbol{X};\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}})$.
c) Expliciter pour $\bar{p} \leqslant \bar{q}$ le morphisme naturel $I_{\bar{p}}H^*(\boldsymbol{X};\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}}) \to I_{\bar{q}}H^*(\boldsymbol{X};\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}})$.

2) Contrexemple à expliciter

Soient $\boldsymbol{X} := \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{S} = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$, avec $n \geqslant 1$, $\mathfrak{F} = \boldsymbol{X} \supseteq \boldsymbol{S} \supseteq \varnothing$ et $\boldsymbol{U} := \boldsymbol{X} \backslash \boldsymbol{S}$.

Montrer que $\big(\mathfrak{D}^{\bullet}_{\boldsymbol{X}}\, \underline{IC}^{\bullet}_{\mathfrak{F};\bar{0}}(\boldsymbol{X};\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}})\big)[-n]$ n'appartient pas à l'image essentielle du prolongement intermédiaire $i^{\mathfrak{G},\bar{p}}_{!*} : \mathrm{Loc}(\boldsymbol{U}^0_{\mathfrak{G}}) \to D^b_{\mathfrak{G}\text{-cc}}(\boldsymbol{X})$, quelles que soient la stratification $\mathfrak{G}$ et la suite croissante d'entiers naturels $\bar{p}$.

3) Pseudovariétés normales

Dans cette question $\boldsymbol{X}$ est une pseudovariété de dimension $d_{\boldsymbol{X}}$ « *normale* », *i.e.* telle que

$$\underline{\underline{\mathrm{Or}}}_{\boldsymbol{X}} := \mathscr{H}^{-d_X}\, \mathbb{D}^{\bullet}_{\boldsymbol{X}} \text{ est un système local de rang 1.}$$

a) Montrer que pour tout fermé $\boldsymbol{Z} \subseteq \boldsymbol{X}$ de codimension $\geqslant 2$, on a $H^1_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{X};\underline{\underline{\mathrm{Or}}}_{\boldsymbol{X}}) = 0$.
b) En déduite que pour tout $z \in \boldsymbol{Z}$, il existe une base de voisinages $\boldsymbol{V}$ de z dans $\boldsymbol{X}$ tel que $\boldsymbol{V} \backslash \boldsymbol{Z}$ est connexe.
c) Montrer que le cône d'une variété cohomologique équidimensionnelle $\mathbb{L}$ de dimension $\geqslant 1$ est une pseudovariété normale, si et seulement si, $\mathbb{L}$ est connexe et orientable.
(Les espaces $\boldsymbol{X}$ de la question **1** sont donc des pseudovariétés normales.)
d) Montrer que $I_{\bar{0}}H^*(\boldsymbol{X};\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}}) = H^*(\boldsymbol{X};k)$.
e) Que vaut $I_{\bar{t}}H^*(\boldsymbol{X};\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}})$ lorsque $\boldsymbol{X}$ est orientable, *i.e.* $\underline{\underline{\mathrm{Or}}}_{\boldsymbol{X}} \equiv \underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}}$.

4) Comparaisons d'homologies d'intersection

$\boldsymbol{X}$ désigne une pseudovariété quelconque et $\mathfrak{F}$ une stratification de pseudovariété pour $\boldsymbol{X}$.
a) Montrer que le groupe $I_{\bar{p}}H^0(\boldsymbol{X};\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}})$ est indépendant de la perversité. Que représente-t-il?
b) Étant données deux perversités $\bar{p} \leqslant \bar{q}$, on note $\bar{p} \overset{k}{\leftarrow} \bar{q}$ lorsqu'elles ne diffèrent qu'en k. Montrer que si $\bar{p} \overset{k}{\leftarrow} \bar{q}$, le morphisme canonique $I_{\mathfrak{F};\bar{p}}H^*(\boldsymbol{X};\mathscr{L}) \to I_{\mathfrak{F};\bar{q}}H^*(\boldsymbol{X};\mathscr{L})$ est un isomorphisme, si et seulement si, $I_{\bar{p}}H^{p_k+1}(\mathbb{L}(x),\mathscr{L}) = 0$, pour tout $x \in \boldsymbol{S}^k_{\mathfrak{F}}$.
c) Dans la question précédente, donner une condition équivalente ne faisant référence à aucune stratification.

5) Prolongement de complexes d'intersection et de faisceaux pervers

Soient $\boldsymbol{X}$ une variété algébrique complexe irréductible et $\varnothing \neq \boldsymbol{U} \subseteq \boldsymbol{X}$ un ouvert de Zariski.
a) Montrer que pour tout système local $\mathscr{L}_{\boldsymbol{V}}$ défini sur un ouvert de Zariski non vide $\boldsymbol{V} \subseteq \boldsymbol{U}$, le complexe d'intersection pour la perversité moyenne $\mathscr{F}^{\bullet} := \underline{IC}^{\bullet}(\boldsymbol{U},\mathscr{L}_{\boldsymbol{V}}) \in D^b_c(\boldsymbol{U})$, se prolonge d'une et une seule manière en un complexe d'intersection $\tilde{\mathscr{F}}^{\bullet}$ de $\boldsymbol{X}$.
b) Généraliser (a) au cas où $\boldsymbol{V} \subseteq \boldsymbol{U}$ sont des ouverts de Zariski non vides d'une sous-variété irréductible $\boldsymbol{Z} \subseteq \boldsymbol{X}$. Plus précisément, montrer qu'il existe un unique $\tilde{\mathscr{F}}^{\bullet} \in \mathscr{P}\!er(\boldsymbol{X})$ dont le support est contenu dans $\boldsymbol{Z}$, tel que $\tilde{\mathscr{F}}^{\bullet}[-\dim_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{Z})]|_{\boldsymbol{Z}}$ est un complexe d'intersection de $\boldsymbol{Z}$ dont la restriction à $\boldsymbol{U}$ est $\mathscr{F}^{\bullet}$.

c) On dira qu'une stratification $\mathfrak{F}$ de $\boldsymbol{X}$ est « *adaptée à* $\boldsymbol{U}$ » si elle est algébrique, si elle vérifie les conditions de Whitney, et si $\boldsymbol{U}$ est réunion de strates de $\mathfrak{F}$. De telles stratifications existent toujours et leur ensemble est filtrant supérieurement pour l'ordre de raffinement.

Pour toute $\mathfrak{F}$ adaptée à $\boldsymbol{U}$, la définition du foncteur de prolongement intermédiaire $i_{!*}^{\mathfrak{F}}$ (pour la perversité moyenne) a un sens sur toute la catégorie $D^b_{\mathfrak{F}\text{-cc}}(\boldsymbol{U})$ et est à valeurs dans $D^b_{\mathfrak{F}\text{-cc}}(\boldsymbol{X})$. Notons $n := \dim_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{X})$. Prouver les assertions suivantes :

1) Pour tout $\mathscr{F}^\bullet \in \mathscr{Per}(\boldsymbol{U})$, on a

$$\big(i_{!*}^{\mathfrak{F}}\big(\mathscr{F}^\bullet[-n]\big)\big)[n] \in \mathscr{Per}(\boldsymbol{X}) \quad \text{et} \quad \big(i_{!*}^{\mathfrak{F}}\big(\mathscr{F}^\bullet[-n]\big)\big)[n]|_{\boldsymbol{U}} \equiv \mathscr{F}^\bullet$$

2) Le foncteur $\big(i_{!*}^{\mathfrak{F}}\big(\_\,[-n]\big)\big)[n]$ est indépendant de la stratification $\mathfrak{F}$ adaptée à $\boldsymbol{U}$ choisie, on le notera $\big(i_{!*}\big(\_\,[-n]\big)\big)[n]$.

3) Dans les questions (a,b), montrer que $i_{!*}\big(\mathscr{F}^\bullet[\dim_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{Z})]\big) \equiv \tilde{\mathscr{F}}^\bullet[\dim_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{Z})]$.

———————×———————

Alberto Arabia
CNRS
Institut de Mathématiques de Jussieu
vendredi 14 juin 2002