Dualité de Poincaré et Morphisme de Gysin équivariants

Alberto Arabia*

Résumé. On donne les fondements théoriques pour

- la dualité de Poincaré équivariante,
- le morphisme de Gysin en cohomologie de de Rham équivariante,

sur la catégorie des variétés différentiables (orientées) munies d'une action (différentiable) d'un groupe de Lie compact et connexe.

Table des matières

*CNRS – Institut de Mathématiques de Jussieu – Université de Paris 7 - Denis Diderot.
Laboratoire de Théorie des Groupes, Représentations et Applications.
UFR de Mathématiques de l'Université Paris 7 – Denis Diderot.
175, rue du Chevaleret, 9e étage, bureau 9D11, 75013 Paris.
Adresse électronique : `arabia@math.jussieu.fr`

Dimanche 10 septembre 2007

§1. Rappels

Est-ce que A est commutatif avec identité ?

On désigne par A un anneau. Dans la suite on appellera «*complexe*» un A-module gradué sur $\mathbb{Z}$ muni d'une différentielle de degré $+1$, il sera noté $C = (C^*, d_*)$. A continuation nous rappelons les conventions de signes dans la définition des différentielles.

1.1 Complexe $(-\otimes_A -)^\bullet$

Étant donnés $C_1 = (C_1^*, d_{1,*})$ et $C_2 = (C_2^*, d_{2,*})$, on note $C_1 \otimes_A C_2$ le A-module différentiel gradué de k-ième terme

$C_1 \quad C_2$

$$(C_1 \otimes_A C_2)^k = \bigoplus_{k=a+b} C^a \otimes_A C^b$$

muni de la différentielle $D_k : (C_1 \otimes_A C_2)^k \to (C_1 \otimes_A C_2)^{k+1}$ donnée par l'égalité

Ce n'est pas une bonne notation de noter d_1, d_2. Dans D_k, k est le degré, mais dans d_1, d_2 l'indice n'est pas le degré. J'utilise plutôt $\delta = d_1$, $d = d_2$.

$$D_k(\alpha_1 \otimes \alpha_2) = d_1(\alpha_1) \otimes \alpha_2 + (-1)^{\deg \alpha_1} \alpha_1 \otimes d_2(\alpha_2)$$

pour tous α_1, α_2 homogènes. On a alors $D_{k+1} \circ D_k = 0$.

Le complexe $C_1 \otimes_A C_2 := ((C_1 \otimes_A C_2)^\bullet; D_\bullet)$ est le «*produit tensoriel de* C_1 *et* C_2».

1.2 Complexe $\mathrm{Hom}_A^\bullet(-,-)$

Étant donnés $C_1 = (C_1^*, d_{1,*})$ et $C_2 = (C_2^*, d_{2,*})$, un élément de $\mathrm{Hom}^k(C_1, C_2)$ est une famille f_* d'applications A-linéaires $f_i : C_1^i \to C_2^{i+k}$; soit :

$$\mathrm{Hom}^k(C_1, C_2) := \textstyle\prod_i \mathrm{Hom}_A(C_1^i, C_2^{i+k}).$$

On note alors
$$D_k : \mathrm{Hom}_A^k(C_1, C_2) \to \mathrm{Hom}_A^{k+1}(C_1, C_2)$$
l'application $D_k(f_*) := d_2 \circ f_* - (-1)^k f_* \circ d_1$ (1). On a $D_{k+1} \circ D_k = 0$.

Explain the sign.

On note $\mathrm{Hom}(C_1, C_2) := \big(\mathrm{Hom}^\bullet(C_1, C_2), D_\bullet\big)$ le complexe ainsi défini.

Lorsque $C_2 := A[0]$ (complexe concentré en degré 0), on a le dual $\big(\mathrm{Hom}^\bullet(C, A); D_\bullet\big)$ d'un complexe C où

$$\begin{cases} \mathrm{Hom}^k(C, A) = \mathrm{Hom}_A(C^{-k}, A)\,, \text{ et où} \\ D_k : \mathrm{Hom}_A(C^{-k}, A) \to \mathrm{Hom}_A(C^{-k-1}, A) \text{ vaut } D_k = (-1)^{k+1}\, {}^t d_{-k-1}\,. \end{cases}$$

D est la differentielle.

1.3 Complexe décalé

D est un module

Étant donné $m \in \mathbb{Z}$ et un complexe C, on note $C[m]$ le complexe $(D^\bullet, \delta_\bullet)$ où $D^k = C^{k+m}$ et où $\delta_k = (-1)^m d_{k+m}$.

Pourquoi ~~cette~~ signe?

$C[m]^k = C^{k+m}$

§2. Dualité de Poincaré et morphisme de Gysin

Dans cette section et les suivantes «*variété*» sera synonyme de «*variété réelle différentiable*» et «*application*» d'application différentiable. Pour toute variété M on note $d_M = \dim_{\mathbb{R}}(M)$.

differentiable sur la page 11

2.1 Dualité de Poincaré

Soit M une variété différentielle réelle de dimension d_M orientée. On note $\Omega^*(M)$ (resp. $\Omega^*_c(M)$) le complexe des formes différentielles (resp. à support compact) sur M. On s'intéresse à l'application

$$\boxed{I\!D_M : \Omega^*(M)[d_M]^\bullet \longrightarrow \mathrm{Hom}^\bullet_{\mathbb{R}}(\Omega^*_c(M), \mathbb{R})} \qquad (\star)$$

définie pour $\varpi \in \Omega^*(M)[d_M]^{-i} = \Omega^{d_M - i}(M)$ par l'égalité :

$$I\!D_M(\varpi) = \Big(\Omega^i_c(M) \ni \omega \mapsto \int_M \varpi \wedge \omega\Big)$$

This has deg $-i$

On a :
$$I\!D_M(d\varpi) = \Big(\omega \mapsto \int_M d\varpi \wedge \omega = \int_M (-1)^{m-i+1} \varpi \wedge d\omega\Big)$$

$m = d_M$

$= d\left(\int_M \varpi \wedge (\;)\right)$

L'application $(\star)$ est donc un morphisme de complexes (de degré 0), c'est le «*morphisme de dualité de Poincaré*».

(1) Cette définition est à rapprocher de celle du super-crochet entre des éléments homogènes d et f, à savoir : $[d, f] = df - (-1)^{\deg d \times \deg f} fd$. L'égalité $[d, [d, f]] = 0$ est immédiate.

Il y a une application

$\mathrm{Hom}(C_1, C_2) \times C_1 \to C_2$

$(f, c_1) \in C_2$

$d_2(f, c_1) = (df, c_1) + (-1)^k (f, d_1 c_1)$

$\Rightarrow df = d_2 f - (-1)^k f d_1$

$$\begin{tikzcd} D^k \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\delta_k"'] & C^{k+m} \arrow[d, "d_{k+m}"] \\ D^k \arrow[r, "i"'] & C^{k+m} \end{tikzcd}$$

$i \circ \delta_k = (-1)^m d_{k+m} \circ i$

Quelles sont les hypothèses sur M ?

2.1.1. Théorème (Dualité de Poincaré). *$I\!D_M$ est un quasi-isomorphisme. Il induit l'isomorphisme canonique en cohomologie :*

$$\mathcal{D}_M : H^*_{\text{DR}}(M) \xrightarrow[\simeq]{} \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}\big(H^{d_M-*}_{\text{DR},c}(M),\mathbb{R}\big)$$

Preuve. *Cf.* [BT] p. 44. ∎

2.1.2. Un corollaire immédiat de 2.1.1 est que l'application

$$\begin{array}{ccc} \Omega^*_c(M)[d_M]^{\bullet} & \xrightarrow{I\!D'_M} & \operatorname{Hom}^{\bullet}_{\mathbb{R}}(\Omega^*(M),\mathbb{R}) \\ \omega & \longmapsto & \left(\varpi \mapsto \displaystyle\int_M \omega\wedge\varpi\right) \end{array}$$

qui est un morphisme de complexes pour les mêmes raisons que $I\!D_M$, est un quasi-isomorphisme si et seulement si $\dim_{\mathbb{R}} H^*_{\text{DR},c}(M) < +\infty$.

2.1.3. Lemme

a) *Une variété différentielle M vérifie $\dim_{\mathbb{R}} H^*_{\text{DR}}(M) < +\infty$ et $\dim_{\mathbb{R}} H^*_{\text{DR},c}(M) < +\infty$ si elle admet un bon recouvrement **fini**.*

b) *Toute variété différentielle est réunion d'une suite croissante d'ouverts $\mathcal{B} = (U_m)_{m\in\mathbb{N}}$ telle que $\dim_{\mathbb{R}} H^*_{\text{DR},c}(U_m) < +\infty$ pour tout m.*

Preuve. *Cf.* [BT] chap. I, props. 5.1, 5.2, 5.3.1, 5.3.1. Pour (b), si $\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ un bon recouvrement de M, la suite $U_m = V_1\cup\cdots\cup V_m$ convient. ∎

définition

2.1.4. Proposition. *Soient M une variété différentielle et $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert de M filtrant supérieurement.*

a) *Les morphismes canoniques suivants sont bijectifs :*

$$\varinjlim_{U\in\mathcal{U}} \Omega^*_c(U) \longrightarrow \Omega^*_c(M) \quad et \quad \varinjlim_{U\in\mathcal{U}} H^*_{\text{DR},c}(U) \longrightarrow H^*_{\text{DR},c}(M)$$

Supposons maintenant M orientée.

?

b) *L'application*

$$\begin{array}{ccc} \Omega^*_c(M)[d_M]^{\bullet} = \varinjlim_{U\in\mathcal{U}} \Omega^*_c(U)[d_M]^{\bullet} & \xrightarrow[\varinjlim_{\mathcal{U}} I\!D'_U]{I\!D'_{\mathcal{U}}} & \varinjlim_{U\in\mathcal{U}} \operatorname{Hom}^{\bullet}_{\mathbb{R}}(\Omega^*(U),\mathbb{R}) \\ \omega & \longmapsto & \left(\varpi \mapsto \displaystyle\int_M \omega\wedge\varpi\right) \end{array}$$

est un morphisme de complexes bien défini dont on note

$$\boxed{\mathcal{D}'_{\mathcal{U}} : H^i_{\text{DR},c}(M) \longrightarrow \varinjlim_{U\in\mathcal{U}} \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}\big(H^{d_M-i}_{\text{DR}}(U);\mathbb{R}\big)} \qquad (\star')$$

; ou)

le morphisme induit en cohomologie.

Est-ce que $h(\varinjlim C(n)) = \varinjlim h(C(n))$?

c) *Pour tout recouvrement $\mathcal{B} = (U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de M vérifiant les conditions de 2.1.3-b, le morphisme $I\!D'_{\mathcal{B}}$ est un **quasi-isomorphisme**. Le transposé de l'isomorphisme $\mathcal{D}'_{\mathcal{B}}$ s'identifie alors à $\mathcal{D}_M$ modulo l'isomorphisme canonique*

$$H^*_{\text{DR}}(M) \xrightarrow{\ \xi\ } \varprojlim_{U\in\mathcal{B}} H^*_{\text{DR}}(U) = \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}\Big(\varinjlim_{U\in\mathcal{B}} \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}\big(H^*_{\text{DR}}(U);\mathbb{R}\big)\Big)$$

, $\mathbb{R}$

Preuve

a) Pour tous $U_1 \subseteq U_2$ ouverts de M on a $\Omega_c^*(U_1) \subseteq \Omega_c^*(U_2) \subseteq \Omega_c^*(M)$ d'où l'injection canonique de complexes $\varinjlim_{U \in \mathcal{U}} \Omega_c^*(U) \to \Omega_c^*(M)$ d'image la réunion des $\Omega_c^*(U)$. D'autre part, si $\omega \in \Omega_c^*(M)$, son support, étant compact, est contenu dans la réunion d'une famille fini d'ouverts de $\mathcal{U}$, et donc dans un certain $U \in \mathcal{U}$ puisque $\mathcal{U}$ est filtrante ; il s'ensuit que $\omega \in \Omega^*(U)$. L'égalité $\Omega_c^*(M) = \bigcup_{\mathcal{U}} \Omega_c^*(U)$ en découle. Une démonstration analogue s'applique pour les chaînes singulières.

Expliquer. → b) Conséquence immédiate de (a).

c) Lorsque $\dim_{\mathbb{R}} H_{\text{DR,c}}(U) < +\infty$, le morphisme $\mathbb{D}'_U$ est un quasi-isomorphisme (*cf.* 2.1.2) et alors $\mathcal{D}'_{\mathcal{U}}$ l'est aussi car limite inductive *filtrante* des $\mathbb{D}'_U$. ∎

2.2 Morphisme de Gysin

2.2.1. Homologie et cohomologie à support compact. Ce paragraphe ne sera pas utilisé dans la suite, son but est de rappeler l'existence d'un isomorphisme canonique et fonctoriel pour les variétés différentielles M entre leur cohomologie à supports compacts $H_{\text{DR,c}}^{d_M - i}(M)$ et leur homologie singulière $H_i(M)$.

Pour tout espace topologique X on note notera $S_*(X)$ (resp. $S^*(X)$) le complexe des chaînes (resp. cochaînes) singulières sur X.

2.2.2. Proposition

a) *Pour tout recouvrement filtrant supérieurement $\mathcal{U}$ de X, les morphismes canoniques suivants sont bijectifs :*

$$\varinjlim_{U \in \mathcal{U}} S_*(U) \longrightarrow S_*(X) \quad \text{et} \quad \varinjlim_{U \in \mathcal{U}} H_*(U) \longrightarrow H_*(X)$$

b) *Pour tout recouvrement filtrant supérieurement $\mathcal{U}$ d'une variété M l'application $\mathbb{L}_{\mathcal{U}}$:*

$$\begin{array}{ccc} S_{-\bullet}(M) = \varinjlim_{U \in \mathcal{U}} S_*(U) & \xrightarrow{\ \mathbb{L}_{\mathcal{U}}\ } & \varinjlim_{U \in \mathcal{U}} \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}^{\bullet}(S^*(U), \mathbb{R}) \\ \sigma & \longmapsto & \big(\varpi \mapsto \langle \varpi, \sigma \rangle\big) \end{array}$$

est un morphisme de complexes bien défini ; on note

$$\boxed{H_{-\bullet}(M) \xrightarrow{\ \mathcal{L}_{\mathcal{U}}\ } \varinjlim_{U \in \mathcal{U}} \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}^{\bullet}(H^*(U); \mathbb{R})}$$

Est-ce $\varinjlim$ ou $\varprojlim$?

le morphisme induit en cohomologie.

c) *Pour tout recouvrement $\mathcal{B} = (U_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de M vérifiant les conditions de 2.1.3-b, le morphisme $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}$ est un* ***isomorphisme.***

d) *La composition $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}^{-1} \circ \mathcal{D}'_{\mathcal{B}} : H_{\text{DR,c}}(M)[d_M]^{\bullet} \to H_{-\bullet}(M)$ est indépendante du recouvrement $\mathcal{B}$ de M et c'est un isomorphisme de foncteurs définis sur la catégorie dont les objets sont les variétés différentielles orientées et les morphismes sont les applications différentiables.*

2.2.3. Existence et fonctorialité du morphisme de Gysin. La dernière proposition (2.2.2) montre que l'on peut faire correspondre à toute application différentiable entre variétés orientées $f : M \to N$ un morphisme de $H^*_{\mathrm{DR},c}(M)[d_M]$ vers $H^*_{\mathrm{DR},c}(N)[d_N]$ et ceci de manière fonctorielle. Cette correspondante est la correspondance de Gysin. Dans 2.2.2 son existence découle de l'existence du morphisme image directe en homologie singulière $f_* : H_{\mathrm{sing},*}(M) \to H_{\mathrm{sing},*}(N)$. Le but de cette section est de fonder l'existence et fonctorialité du morphisme de Gysin à l'aide de formes différentielles uniquement.

de degré 0

2.2.4. Théorème. *Soit $f : M \to N$ une application différentiable entre deux variétés différentielles orientées. Il existe un et un seul morphisme*

$$f_* : H^*_{\mathrm{DR},c}(M)[d_M] \xrightarrow{f_*} H^*_{\mathrm{DR},c}(N)[d_N] \qquad (\diamond)$$

dont le transposé s'identifie par dualité de Poincaré à $f^* : H^*_{\mathrm{DR}}(N) \to H^*_{\mathrm{DR}}(M)$, i.e.

$$\int_M \mu \wedge f^*\nu = \int_N (f_*\mu) \wedge \nu$$

Preuve. L'unicité étant claire, il suffit de prouver son existence. Soit $\mathcal{B}$ un recouvrement croissant de N par des ouverts à cohomologie à supports compacts de dimension finie. En appliquant 2.1.4(b) on a le diagramme

existe en cohom.

$$\begin{tikzcd}
\Omega^*_c(M)[d_M] \arrow[r, dashed, "f_*"] \arrow[d, "\mathbb{D}'_{f^{-1}\mathcal{B}}"'] & \Omega^*_c(N)[d_N] \arrow[d, "\mathbb{D}'_{\mathcal{B}}"] \\
\varinjlim_{U\in\mathcal{B}} \hom_{\mathbb{R}}(H_{\mathrm{DR}}(f^{-1}U),\mathbb{R}) \arrow[r, "\lim {}^t f^*"] & \varinjlim_{U\in\mathcal{B}} \hom_{\mathbb{R}}(H_{\mathrm{DR}}(U),\mathbb{R})
\end{tikzcd}$$

H Ω

où $\mathbb{D}'_{\mathcal{B}}$ est un quasi-isomorphisme (2.1.4(c)). Il existe donc bien un morphisme f_* rendant le diagramme commutatif en cohomologie. La fin de l'assertion 2.1.4(c) montre que le transposé de f_* est bien f^*. ∎

2.2.5. Définition. Étant donnée une application différentiable entre deux variétés différentielles orientées $f : N \to M$ on appelle « *morphisme de Gysin associé* » le morphisme $f_* : \Omega^*_c(M)[d_M] \to \Omega^*_c(N)[d_N]$ du théorème 2.2.4.

H^*_c

2.2.6. Théorème. *Notons **Diff** la catégorie dont les objets sont les variétés différentielles munies d'une orientation et dont les objets sont les applications différentiables. La correspondance de **Diff** vers la catégorie $\mathrm{Vec}(\mathbb{R})^{\mathbb{Z}}$ des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels $\mathbb{Z}$-gradués qui fait correspondre*

$$M \rightsquigarrow H^*_{\mathrm{DR},c}(M)[d_M], \quad \text{et} \quad f \rightsquigarrow f_*$$

est fonctorielle.

morphismes

First define le morphisme de Gysin pour une des variétés compact, orientable.

Preuve

a) Pour tous $U_1 \subseteq U_2$ ouverts de M on a $\Omega_c^*(U_1) \subseteq \Omega_c^*(U_2) \subseteq \Omega_c^*(M)$ d'où l'injection canonique de complexes $\varinjlim_{U\in\mathcal{U}} \Omega_c^*(U) \to \Omega_c^*(M)$ d'image la réunion des $\Omega_c^*(U)$. D'autre part, si $\omega \in \Omega_c^*(M)$, son support, étant compact, est contenu dans la réunion d'une famille fini d'ouverts de $\mathcal{U}$, et donc dans un certain $U \in \mathcal{U}$ puisque $\mathcal{U}$ est filtrante ; il s'ensuit que $\omega \in \Omega^*(U)$. L'égalité $\Omega_c^*(M) = \bigcup_{\mathcal{U}} \Omega_c^*(U)$ en découle. Une démonstration analogue s'applique pour les chaînes singulières.

Expliquer. b) Conséquence immédiate de (a).

c) Lorsque $\dim_{\mathbb{R}} H_{\mathrm{DR},c}(U) < +\infty$, le morphisme $\mathbb{D}'_U$ est un quasi-isomorphisme (*cf.* 2.1.2) et alors $\mathcal{D}'_{\mathcal{U}}$ l'est aussi car limite inductive *filtrante* des $\mathbb{D}'_U$. ∎

2.2 Morphisme de Gysin

2.2.1. Homologie et cohomologie à support compact. Ce paragraphe ne sera pas utilisé dans la suite, son but est de rappeler l'existence d'un isomorphisme canonique et fonctoriel pour les variétés différentielles M entre leur cohomologie à supports compacts $H_{\mathrm{DR},c}^{d_M - i}(M)$ et leur homologie singulière $H_i(M)$.

Pour tout espace topologique X on note notera $S_*(X)$ (resp. $S^*(X)$) le complexe des chaînes (resp. cochaînes) singulières sur X.

2.2.2. Proposition

a) *Pour tout recouvrement filtrant supérieurement $\mathcal{U}$ de X, les morphismes canoniques suivants sont bijectifs :*

$$\varinjlim_{U\in\mathcal{U}} S_*(U) \longrightarrow S_*(X) \quad et \quad \varinjlim_{U\in\mathcal{U}} H_*(U) \longrightarrow H_*(X)$$

b) *Pour tout recouvrement filtrant supérieurement $\mathcal{U}$ d'une variété M l'application $\mathbb{L}_{\mathcal{U}}$:*

$$\begin{array}{ccc} S_{-\bullet}(M) = \varinjlim_{U\in\mathcal{U}} S_*(U) & \xrightarrow{\mathbb{L}_{\mathcal{U}}} & \varinjlim_{U\in\mathcal{U}} \mathrm{Hom}^\bullet_{\mathbb{R}}(S^*(U), \mathbb{R}) \\ \sigma & \longmapsto & \big(\varpi \mapsto \langle \varpi, \sigma\rangle\big) \end{array}$$

est un morphisme de complexes bien défini ; on note

$$\boxed{H_{-\bullet}(M) \xrightarrow{\mathcal{L}_{\mathcal{U}}} \varinjlim_{U\in\mathcal{U}} \mathrm{Hom}^\bullet_{\mathbb{R}}(H^*(U); \mathbb{R})}$$

Est-ce $\varinjlim$ ou $\varprojlim$?

le morphisme induit en cohomologie.

c) *Pour tout recouvrement $\mathcal{B} = (U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de M vérifiant les conditions de 2.1.3-b, le morphisme $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}$ est un* **isomorphisme***.*

d) *La composition $\mathcal{L}_{\mathcal{B}}^{-1} \circ \mathcal{D}'_{\mathcal{B}} : H_{\mathrm{DR},c}(M)[d_M]^\bullet \to H_{-\bullet}(M)$ est indépendante du recouvrement $\mathcal{B}$ de M et c'est un isomorphisme de foncteurs définis sur la catégorie dont les objets sont les variétés différentielles orientées et les morphismes sont les applications différentiables.*

3.1 Catégorie des $\mathfrak{g}$-complexes différentiels gradués

3.1.1. Action de $\mathfrak{g}$ sur un complexe. On appelera « $\mathfrak{g}$-*complexe différentiel gradué*» la donnée d'un complexe différentiel gradué $C \doteq (C^*, d_*)$, d'un homomorphisme d'algèbres de Lie $\theta : \mathfrak{g} \to \mathrm{Endgr}_{\mathbb{R}}(C)$ (²) et d'une application linéaire $c : \mathfrak{g} \to \mathrm{Homgr}_{\mathbb{R}}(C, C[-1])$ tels que, pour tous $X, Y \in \mathfrak{g}$

deg 0

deg 0

$$\begin{cases} \text{i) } c(X) \circ c(Y) + c(Y) \circ c(X) = 0 \\ \text{ii) } d \circ c(X) + c(X) \circ d = \theta(X) \\ \text{iii) } \theta(Y) \circ c(X) - c(X) \circ \theta(Y) = c([Y, X]) \end{cases} \qquad (\diamond)$$

On a clairement $d \circ \theta(\_) = \theta(\_) \circ d$ et et l'action de $\mathfrak{g}$ induite en cohomologie est triviale suite à l'homotopie $(\diamond)$-(ii).

Morph de cx gradués deg 0

On notera $\mathcal{C}^*(\mathfrak{g})$ la catégorie dont les objets sont les $\mathfrak{g}$-complexes différentiels gradués et où $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}^*(\mathfrak{g})}(C, D)$ est l'ensemble des $\varphi \in \mathrm{Homgr}_{\mathbb{R}}(C, D)$ qui commutent aux actions θ et c de $\mathfrak{g}$, *i.e.* $\varphi \circ \theta(\_) = \theta(\_) \circ \varphi$ et $\varphi \circ c(\_) = c(\_) \circ \varphi$.

et avec d aussi? Oui

3.1.2. $\mathfrak{g}$-complexes scindés. Pour toute inclusion de $\mathfrak{g}$-modules $M \subseteq N$ on note « $M|N$ » le fait que l'application naturelle

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, N/M) \qquad (\ddagger)$$

Pourquoi cette définition?

est **surjective** pour tout $\mathfrak{g}$-module **de dimension finie** V.

$$\begin{array}{ccc} & & N \\ & \nearrow & \downarrow \\ V & \rightarrow & N/M \end{array}$$

Définition. Pour un complexe de $\mathfrak{g}$-modules $C = (C^*, d_*)$ on note $B^i = \mathrm{im}(d_{i-1})$, $Z^i = \ker(d_i)$ respectivement les $\mathfrak{g}$-modules des «*i-cobords et i-cocycles de C*». Un $\mathfrak{g}$-complexe $C = (C^*, d_*)$ sera dit «*scindé*» lorsque, pour tout $i \in \mathbb{Z}$ on a $B^i | Z^i | C^i$.

3.1.3. Exercises

1) La condition $B^i | Z^i$ équivaux (t) à la surjectivité de l'application $(Z^i)^{\mathfrak{g}} \to (Z^i/B^i)^{\mathfrak{g}}$. $(\ )^{\mathfrak{g}} = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathbb{R}, \ )$

2) Si $N|M$, la suite $0 \to N^{\mathfrak{g}} \to M^{\mathfrak{g}} \to (M/N)^{\mathfrak{g}} \to 0$ est exacte.

3) Un $\mathfrak{g}$-complexe dont les termes sont complètement réductibles est scindé.

4) Si $\mathfrak{g}$ est réductive complexe et C^i est de dimension finie, $C = (C^*, d_*)$ est scindé.

3.1.4. Proposition. *Soit C est un $\mathfrak{g}$-complexe scindé.*

a) *L'inclusion $C^{\mathfrak{g}} \subseteq C$ est un quasi-isomorphisme.*

b) *Si V est une représentation semi-simple de dimension finie de $\mathfrak{g}$, les inclusions*

$$\boxed{V^{\mathfrak{g}} \otimes C \supseteq V^{\mathfrak{g}} \otimes C^{\mathfrak{g}} \subseteq (V \otimes C)^{\mathfrak{g}}} \quad \textit{et} \quad \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V^{\mathfrak{g}}, C) \supseteq \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V^{\mathfrak{g}}, C^{\mathfrak{g}}) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, C)$$

sont des quasi-isomorphismes.

Preuve. Soit C est un $\mathfrak{g}$-complexe scindé.

a) Conséquence de (3.1.3-(2,3)).

² Étant données des espaces vectoriels $\mathbb{Z}$-gradués C et D, la notation $\mathrm{Homgr}_{\mathbb{R}}(C, D)$ désigne le groupe des homomorphismes gradués de degré 0, *i.e.* $\mathrm{Homgr}_{\mathbb{R}}(C, D) = \prod_{n \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(C^n, D^n)$. On note aussi $\mathrm{Endgr}_{\mathbb{R}}(C) := \mathrm{Homgr}_{\mathbb{R}}(C, C)$.

Il faut un exemple d'un cx scindé et un exemple d'un cx non-scindé.

b) Montrons que si W est une représentation simple de $\mathfrak{g}$ **différente** de la représentation triviale, les complexes $(W \otimes C)^{\mathfrak{g}}$ et $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(W, C)$ sont **exacts.** ? ←

En effet, par bidualité il suffit de le vérifier pour Hom. Un i-cocycle de $\mathrm{Hom}^{\bullet}_{\mathfrak{g}}(W, C)$ est un morphisme de $\mathfrak{g}$-module $\lambda : W \to C^i$ tel que $d \circ \lambda = 0$, donc tel que $\mathrm{im}(\lambda) \subseteq Z^i$. La composée de λ avec la surjection $Z^i \twoheadrightarrow Z^i/B^i$ étant nulle, car $\mathfrak{g}$ agit trivialement en cohomologie, on a $\mathrm{im}(\lambda) \subseteq B^i$. Or, $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(W, C^{i-1}) \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(W, B^i)$ est surjective et λ se relève encore en un morphisme de $\mathfrak{g}$-modules $\mu : W \to C^{i-1}$, *i.e.* $\lambda = \mu \circ d$.

Maintenant, si V est semi-simple on le décompose en $V^{\mathfrak{g}} \oplus W$ où W est une somme directe de modules simples et alors $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, C) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V^{\mathfrak{g}}, C) \oplus \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(W, C)$ est quasi-isomorphe à $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V^{\mathfrak{g}}, C)$ d'après ce qui précède. Or,

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V^{\mathfrak{g}}, C) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V^{\mathfrak{g}}, C^{\mathfrak{g}}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V^{\mathfrak{g}}, C^{\mathfrak{g}})$$

et l'injection $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V^{\mathfrak{g}}, C^{\mathfrak{g}}) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V^{\mathfrak{g}}, C)$ est un quasi-isomorphisme d'après la question (a). ∎

3.1.5. Cohomologie équivariante d'un $\mathfrak{g}$-complexe. On notera $S^*(\mathfrak{g}^\vee)$ l'algèbre symétrique sur $\mathfrak{g}^\vee := \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$ munie de la graduation de $\mathbb{R}$-algèbre qui double la graduation polynôme. La notation $S^d(\mathfrak{g}^\vee)$ désignera les éléments de degré d pour cette graduation, en particulier $S^2(\mathfrak{g}^\vee) = \mathfrak{g}^\vee$ et $S^m(\mathfrak{g}^\vee) = 0$ pour tout m impair. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ agit sur $S^*(\mathfrak{g}^\vee)$ par la représentation coadjointe. On notera $\{e_i\}$ une base de $\mathbb{R}$-espace vectoriel pour $\mathfrak{g}$, la notation $\{e^i\}$ désignera alors la base duale.

Pour $C = (C^*, d_*) \in C^*(\mathfrak{g})$, on s'intéresse aux applications $\mathfrak{g} \ni Y \mapsto \omega(Y) \in C^*$ polynomiales, *i.e.* aux éléments de $S^*(\mathfrak{g}^\vee) \otimes_{\mathbb{R}} C^*$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ agit sur chaque $S^a(\mathfrak{g}^\vee) \otimes C^b$ par la formule

$$\theta(Y)(P \otimes \mu) := \theta(Y)(P) \otimes \mu + P \otimes \theta(Y)(\mu), \qquad \forall Y \in \mathfrak{g}.$$

$\mathcal{L}_Y(P\otimes\mu)$
$= \mathcal{L}_Y P)\otimes\mu + P\otimes\mathcal{L}_Y\mu$

On note alors

$$C^k_{\mathfrak{g}} := \sum_{a+b=k} (S^a(\mathfrak{g}^\vee) \otimes_{\mathbb{R}} C^b)^{\mathfrak{g}}$$

le sous-espaces des $\mathfrak{g}$-invariants, *i.e.* des $\omega(Y)$ tels que $\theta(X)(\omega(Y)) + \omega([X, Y]) = 0$, pour tout $X \in \mathfrak{g}$. L'application $S^*(\mathfrak{g}^\vee)$-linéaire $D_{\mathfrak{g},*} : C^*_{\mathfrak{g}} \to C^{*+1}_{\mathfrak{g}}$, définie par

$$D_{\mathfrak{g},*}(1 \otimes \omega) = 1 \otimes d\omega + \textstyle\sum_i e^i \otimes c(e_i)\omega, \qquad (D_{\mathfrak{g}})$$

est homogène de degré $+1$ et vérifie $D^2_{\mathfrak{g}} = \sum_i e^i \otimes \theta(e_i)$ et donc $D^2_{\mathfrak{g}} \overset{-}{=} \sum_i e^i \theta(e_i) \otimes \mathrm{id}$ sur $C^*_{\mathfrak{g}}$. Or, l'opérateur $\sum_i e^i \theta(e_i)$ est nul sur $S^*(\mathfrak{g}^\vee)$. En effet, s'agissant d'une dérivation de $S^*(\mathfrak{g}^\vee)$ il suffit de vérifier qu'il annule toute forme linéaire $\lambda : \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$; on a, pour tout $Y \in \mathfrak{g}$,

$$\begin{aligned}(\textstyle\sum_i e^i \underbrace{\theta(e_i)(\lambda)}_{\in S(\mathfrak{g}^\vee)})(Y) &= \textstyle\sum_i e^i(Y)\lambda([e_i, Y]) = \sum_i e^i(Y)\lambda([e_i, \sum_j e^j(Y)e_j]) \\ &= \lambda(\textstyle\sum_{i,j} e^i(Y)e^j(Y)[e_i, e_j]) = 0\end{aligned}$$

Il faut montrer que la définition de $D_{\mathfrak{g},*}$ est indépendante de la base $\{e_i\}$.

Le couple $C_{\mathfrak{g}} := (C^*_{\mathfrak{g}}, D_{\mathfrak{g},*})$ est donc un complexe différentiel gradué, sa cohomologie notée :

$$\boxed{H^{\bullet}_{\mathfrak{g}}(C) := h^{\bullet}(C_{\mathfrak{g}})}$$

est la « *cohomologie* $\mathfrak{g}$*-équivariante de* C ».

Un morphisme $\varphi \in \mathrm{Mor}_{C^{\bullet}(\mathfrak{g})}(C, D)$ se prolonge par $S^{*}(\mathfrak{g}^{\vee})$-linéarité en un morphisme de complexes $\varphi_{\mathfrak{g}} : C_{\mathfrak{g}} \to D_{\mathfrak{g}}$; on a $\varphi_{\mathfrak{g},*} = \mathrm{id} \otimes \varphi_{*}$.

3.1.6. Théorème

a) *La correspondance* $C \rightsquigarrow C_{\mathfrak{g}}$, $\varphi \rightsquigarrow \varphi_{\mathfrak{g}}$ *est fonctorielle de la catégorie des* $\mathfrak{g}$*-complexes différentiels gradués vers la catégorie des complexes différentiels graduée.*

b) *Si* $C = (C^{*}, d_{*})$ *est un* $\mathfrak{g}$*-complexe, il existe une suite spectrale convergeant vers* $H_{\mathfrak{g}}(C)$ *avec*

$$(\mathbb{E}_0^{p,q} = (S^p(\mathfrak{g}^{\vee}) \otimes C^q)^{\mathfrak{g}}\ ,\ d_0 = 1 \otimes d_C) \Longrightarrow H^{p+q}_{\mathfrak{g}}(C)$$

c) *Soient* G *un groupe de Lie compact,* $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$ *et* C, D *des* $\mathfrak{g}$*-complexes* **scindés** (3.1.2)

i) *Le terme* $(\mathbb{E}_2, d_2)$ *de la suite spectrale de* (b) *est donné par*

$$(\mathbb{E}_2^{p,q} = S^p(\mathfrak{g}^{\vee})^{\mathfrak{g}} \otimes H^q(C)\,,\ d_2 = \textstyle\sum_i e^i \otimes c(e_i)) \Longrightarrow H^{p+q}_{\mathfrak{g}}(C)$$

ii) *Si* $H^m(C) = 0$ *pour tout* m *impair, alors* $H_{\mathfrak{g}}(C) = S^{*}(\mathfrak{g}^{\vee}) \otimes H^{*}(C)$

iii) *Si* $\varphi : C \to D$ *est un quasi-isomorphisme de* $\mathfrak{g}$*-complexes,* $\varphi_{\mathfrak{g}} : C_{\mathfrak{g}} \to D_{\mathfrak{g}}$ *est un quasi-isomorphisme.*

d) *Supposons l'algèbre de Lie* $\mathfrak{g}$ *abélienne.* G pas compacte?

i) *Pour tout* $\mathfrak{g}$*-complexe* C*, le complexe des* $\mathfrak{g}$*-invariants* $(C)^{\mathfrak{g}}$ *est un* $\mathfrak{g}$*-complexe.*

ii) *Si* $j : C^{\mathfrak{g}} \hookrightarrow C$ *est l'inclusion,* $j_{\mathfrak{g}}$ *est un quasi-isomorphisme.*

iii) *Le terme* $(\mathbb{E}_2, d_2)$ *de la suite spectrale de* (b) *est donné par*

$$(\mathbb{E}_2^{p,q} = S^p(\mathfrak{g}^{\vee})^{\mathfrak{g}} \otimes H^q(C^{\mathfrak{g}})\,,\ d_2 = \textstyle\sum_i e^i \otimes c(e_i)) \Longrightarrow H^{p+q}_{\mathfrak{g}}(C)$$

iv) *Si* $H^m((C)^{\mathfrak{g}}) = 0$ *pour tout* m *impair, alors* $H_{\mathfrak{g}}(C) = S^{*}(\mathfrak{g}^{\vee}) \otimes H^{*}((C)^{\mathfrak{g}})$

v) *Si* $\varphi : C^{\mathfrak{g}} \to D^{\mathfrak{g}}$ *est un quasi-isomorphisme,* $\varphi_{\mathfrak{g}}$ *l'est aussi.*

Est-ce qu'il y a une différence entre $C^{\mathfrak{g}}$ et $(C)^{\mathfrak{g}}$?

$\mathfrak{g}$ abel $\Rightarrow S^p(\mathfrak{g}^{\vee})^{\mathfrak{g}} = S^p(\mathfrak{g}^{\vee})$

Preuve

a) Vérification immédiate.

b) Pour $m \in \mathbb{N}$ on note $K_m = (S^{\geqslant m}(\mathfrak{g}^{\vee}) \otimes C)^{\mathfrak{g}}$ d'où une filtration décroissante régulière donnant lieu à la suite spectrale annoncée.

c-(i) Par l'hypothèse de compacité de G chaque $\mathfrak{g}$-module $S^n(\mathfrak{g}^{\vee})$ est semi-simple et la proposition 3.1.4 s'applique au complexe $(\mathbb{E}_0, d_0)$ de la question (b). Ce complexe est donc quasi-isomorphe à $(S^{*}(\mathfrak{g}^{\vee})^{\mathfrak{g}} \otimes C, 1 \otimes d_C)$ et $\mathbb{E}_1^{p,q} = S^p(\mathfrak{g}^{\vee}) \otimes H^q(C)$. Or, la différentielle $d_1 : \mathbb{E}_1^{p,q} \to \mathbb{E}_1^{p+1,q}$ est nulle pour une simple raison de parité des degrés dans $S^{*}(\mathfrak{g}^{\vee})$. Par conséquent $\mathbb{E}_2 = \mathbb{E}_1$ et l'assertion suit.

ii) Comme d_r est de degré 1 et que $\mathbb{E}_r^{p,q} = 0$ si p ou q est impair, on a $d_r = 0$ si $r \geqslant 2$.

iii) Conséquence immédiate de (c-i).

d-(i) On doit montrer que $C^{\mathfrak g}$ est stable par les opérateurs $c(X)$, *i.e.* $\theta(Y)c(X)C^{\mathfrak g}=0$ pour tous $X,Y\in\mathfrak g$, or sur $C^{\mathfrak g}$ on a $\theta(Y)c(X)=\theta(Y)c(X)+c(X)\theta(Y)=c([Y,X])=c(0)$.

ii,iii,iv,v) Exercice. ∎

3.1.7. Complexes G-scindés. Il est important de remarquer que la preuve de l'assertion (c) utilise seulement la propriété de scindage 3.1.2 pour les sous-$\mathfrak g$-modules de dimension finie $V\subseteq S^*(\mathfrak g^\vee)$ dont on sait par ailleurs que la structure de $\mathfrak g$-module s'obtient par différentiation de leur structure de G-modules naturelle.

La notion de scindage de 3.1.2 s'adapte de manière évidente au contexte de G-modules. Pour une inclusion de G-modules $M\subseteq N$ on note « $M|N$ » le fait que l'application naturelle

$$\mathrm{Hom}_G(V,N)\longrightarrow\mathrm{Hom}_G(V,N/M) \tag{‡}$$

est **surjective** pour tout G-module **de dimension finie** V.

Définition. Un complexe de G-modules $C=(C^*,d_*)$ sera dit « *G-scindé* » lorsque, pour tout $i\in\mathbb Z$ on a $B^i|Z^i|C^i$.

La proposition suivante se démontre comme 3.1.4.

3.1.8. Proposition. *Soit C un complexe de G-modules G-scindé et tel que l'action de G en cohomologie est triviale. Alors :*

a) *L'inclusion $C^G\subseteq C$ est un quasi-isomorphisme.*

b) *Si V est une représentation semi-simple de dimension finie de G, les inclusions*

$$V^G\otimes C\supseteq V^G\otimes C^G\subseteq(V\otimes C)^G,\quad \mathrm{Hom}_{\mathbb R}(V^G,C)\supseteq\mathrm{Hom}_{\mathbb R}(V^G,C^G)\subseteq\mathrm{Hom}_G(V,C)$$

sont des quasi-isomorphismes.

§ 4. Cohomologie équivariante des G-variétés

4.1 Formes différentielles équivariantes

4.1.1. Soit G un groupe de Lie **connexe**. Notons $\mathfrak g:=\mathrm{Lie}(G)=T_1G$ et $S^*(\mathfrak g^\vee):=$ l'algèbre des applications polynomiales réelles sur $\mathfrak g$ munie de la graduation qui double la graduation polynôme, *i.e.* $\deg\gamma=2$ pour toute forme linéaire $\gamma:\mathfrak g\to\mathbb R$.

Toute variété sera différentielle et munie d'une action différentiable de G. Pour une telle variété M un élément $v\in\mathfrak g$ définit un champ de vecteurs $\vec v$ sur M en posant

$$\vec v(m):=\frac{d}{dt}\Big(t\mapsto\exp(tv)\cdot m\Big)_{t=0}$$

L'action $c(v):\omega\mapsto\vec v\cdot\omega$ est une action de $\mathfrak g$ sur l'algèbre des formes différentielles $\Omega^*(M)$ (resp. $\Omega^*_c(M)$) par antidérivations d'algèbre de degré -1. La dérivée de Lie par rapport au champ $\vec{v}$ donne une action θ de $\mathfrak{g}$ sur $\Omega^*(M)$. Munis de ces actions (Ω^*, d_*) et (Ω_c^*, d_*) sont des $\mathfrak{g}$-complexes au sens de 3.1.1. Les « *complexes des formes différentielles G-équivariantes (à supports compacts) de M* » sont alors

$$\Omega_G(M) = (S^*(\mathfrak{g}^\vee) \otimes \Omega(M))^{\mathfrak{g}} = (S^*(\mathfrak{g}^\vee) \otimes \Omega(M))^G$$
$$\Omega_{G,c}(M) = (S^*(\mathfrak{g}^\vee) \otimes \Omega_c(M))^{\mathfrak{g}} = (S^*(\mathfrak{g}^\vee) \otimes \Omega_c(M))^G$$

leurs cohomologies, notées respectivement $H_G(M)$ et $H_{G,c}(M)$, sont les « *cohomologies G-équivariantes (à supports compacts) de M* »

Proposition. *Soit G un groupe de Lie* **compact et connexe**.

a) *Les complexes de G-modules $\Omega^*(M)$ et $\Omega_c^*(M)$ sont G-scindés (3.1.7). En particulier, si C désigne les complexes $(\Omega(M), d_M)$ ou $(\Omega_c(M), d_M)$, les inclusions*

$$S^*(\mathfrak{g}^\vee)^G \otimes C \supseteq S^*(\mathfrak{g}^\vee)^G \otimes C^G \subseteq (S^*(\mathfrak{g}^\vee) \otimes C)^G$$

sont des quasi-isomorphismes

b) *La correspondance $M \rightsquigarrow \Omega(M)$, $f \rightsquigarrow f^*$ est fonctorielle contravariante de la catégorie des G-variétés vers la catégorie des $\mathfrak{g}$-complexes G-scindés.*

c) *La correspondance $M \rightsquigarrow \Omega_c(M)$, $f \rightsquigarrow f^*$ est fonctorielle contravariante de la catégorie des G-variétés et morphismes* **propres** *vers la catégorie des $\mathfrak{g}$-complexes G-scindés.*

d) *Pour toute G-variété il existe des suite spectrale*

$$\begin{cases} E_2^{p,q} = S^p(\mathfrak{g}^\vee)^{\mathfrak{g}} \otimes H^q_{\mathrm{DR}}(M) \Longrightarrow H_G^{p+q}(M) \\ E_2^{p,q} = S^p(\mathfrak{g}^\vee)^{\mathfrak{g}} \otimes H^q_{\mathrm{DR},c}(M) \Longrightarrow H_{G,c}^{p+q}(M) \end{cases}$$

fonctorielles *par rapport à M.*

Esquisse de démonstration

a) On munit G d'une mesure de Haar dg de mesure totale égale à 1.

Soit V une représentation (différentiable) de dimension finie de G. Fixons $i \in \mathbb{N}$ et une application $\mathbb{R}$-linéaire $\lambda : V \to \Omega^i(M)$. Pour toute famille $\{\chi_1, \ldots, \chi_i\}$ de champs de vecteurs sur M, pour chaque $x \in M$ et pour chaque $v \in V$, la fonction

$$M \ni x \mapsto \Big(\int_G g^*\big(\lambda(g^{-1} \cdot v)\big)(x)\big(\chi_1(x), \ldots, \chi_i(x)\big)\, dg\Big) \in \mathbb{R}$$

est différentiable, dépend linéairement de $v \in V$ et de manière multi-linéaire alternée des champs χ_*. On est donc en présence d'une forme différentielle sur M qu'on notera

$$\Sigma_\lambda(v) := \int_G g^*\big(\lambda(g^{-1} \cdot v)\big)\, dg$$

et dont la propriété fondamentale est que l'application $\Sigma_\lambda : V \to \Omega^i(M)$ est un morphisme de G-modules, *i.e.* $\Sigma_\lambda(g \cdot v) = g^* \Sigma_\lambda(v)$.

• **Montrons $Z^i|\Omega^i(M)$.** En effet, étant donné un morphisme G-modules $\mu : V \to B^{i+1}$, il existe toujours une application $\mathbb{R}$-linéaire $\lambda : V \to \Omega^i(M)$ telle que $d\circ\lambda = \mu$. Or, on a, grâce à la compacité de G

$$d\Sigma_\lambda(v) = \int_G g^*\big(d\lambda(g^{-1}\cdot v)\big)\,dg = \int_G g^*\big(\mu(g^{-1}\cdot v)\big)\,dg = \int_G \mu(v)\,dg = \mu(v).$$

• **Montrons $B^i|Z^i$.** D'après 3.1.3-(1) il suffit de vérifier que tout cycle est homologue à un cycle G-invariant. Pour $\zeta\in\Omega^i(M)$ on pose :

$$\Sigma(\zeta) = \int_G g^*\zeta\,dg$$

de sorte que si $\lambda : \mathbb{R}\to\Omega^i(M)$ est l'application $\lambda(t) = tz$, on a $\Sigma(\zeta) = \Sigma_\lambda(1)$ et donc $\Sigma(Z^i(M)) \subseteq Z^i(M)^G$. Prouvons que $\zeta\sim\Sigma(\zeta)$.

Munissons G d'une métrique riemannienne G-invariante. Soit B une boule fermée centrée en l'élément neutre $\mathbf{1}\in G$, assez petite pour qu'il existe une isométrie $g : \mathbb{B}(0,\epsilon)\to B$ où $\mathbb{B}(0,\epsilon)$ est une boule de l'espace euclidien canonique. Soit $\mathbb{S} := \mathbb{S}(0,\epsilon)$ et considérons, pour chaque $x\in\mathbb{S}$, l'application

$$\mu_x :]0,1[\times M \to M\,,\qquad \mu_x(t,m) = g(t,x)(m)\,.$$

On a $\mu_x^*(\zeta)\in Z^i(]0,1[\times M)$ pour tout $\zeta\in Z^i(M)$. En séparant les variables on peut écrire

$$\mu_x^*(\zeta) = \omega(t,m) + \varpi(t,m)\wedge dt \quad \text{avec} \quad \begin{cases}\omega(t,m)\in 1\otimes\Omega^i(M)\\ \varpi(t,m)\in 1\otimes\Omega^{i-1}(M)\end{cases}$$

En explicitant l'égalité $d(\mu_x^*(\zeta)) = 0$, on obtient

$$\omega(t,m)\in Z^i(M)\ \forall t, \quad \text{et} \quad \tfrac{\partial}{\partial t}\omega(t,m) = d_M(\varpi(t,m))$$

Cela étant, on a pour tout $u\in\,]0,1[$

$$g(u,x)^*\zeta - \zeta = g(u,x)^*\zeta - g(0,x)^*\zeta = \int_0^u \frac{\partial}{\partial t}\omega(t,m)\,dt = d_M\int_0^u \varpi(t,m)\,dt$$

et alors, si $\rho : B\to\mathbb{R}$ est une fonction nulle au voisinage de $\mathbb{S}$, on a

$$\begin{aligned}\int_G \rho(g)g^*\zeta\,dg &= \int_{\mathbb{S}}\Big(\int_{-1}^1 \rho(g(u,x))\,g(u,x)^*\zeta\,du\Big)dx\\ &= \Big(\int_G\rho(g)\,dg\Big)\zeta + \int_{\mathbb{S}}\Big(\int_{-1}^1\rho(g(u,x))\,d_M\Big(\int_0^u\varpi(t)\,dt\Big)\,du\Big)dx\\ &\sim \Big(\int_G\rho(g)\,dg\Big)\zeta\end{aligned}$$

A partir de là on démontre le lemme suivant que nous laissons en exercice :

Lemme. Pour tout cycle $\zeta \in Z(M)$ et toute fonction $\rho : G \to \mathbb{R}$ à support étoilé "assez petit" le cycle $\int_G \rho(g) g^* \zeta$ est cohomologue à $\big(\int_G \rho(g)\big)\zeta$.

Si maintenant $\{\rho_k\}$ est une partition finie de l'unité sur G, on a

$$\int_G g^*\zeta = \sum_k \int_G \rho_k(g) g^*\zeta \sim \Big(\sum_k \int_G \rho_k(g)\, dg\Big)\zeta = \zeta$$

et ceci termine la démonstration du scindage $B^i|Z^i$.

On aura remarqué que grâce à la compacité de G ces constructions gardent un sens pour les formes différentielles à support compact de sorte que le même argument prouve que $\Omega^*_c(M)$ est G-scindé.

b,c,d) conséquences de (a) et 3.1.6 modulo l'échange $\mathfrak{g} \leftrightarrow G$ de 3.1.7 et 3.1.8. ∎

4.2 La construction de Borel

4.2.1. Étant donné un groupe de Lie connexe et compact G notons $\mathbb{E}_G$ un espace fibré universel pour G. On rappel que cet espace est limite inductive de variétés différentiables $\{\mathbb{E}_G(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, où $\mathbb{E}_G(n)$ est compacte n-acyclique et est munie d'une action libre de G à droite. On note $\mathbb{B}_G = \mathbb{E}/G$ *« l'espace classifiant de G »*. On a $\mathbb{B}_G = \varinjlim \mathbb{B}_G(n)$ où $\mathbb{B}_G(n) = \mathbb{E}_G(n)/G$ est simplement connexe puisque G est connexe. Pour toute G-variété M on note d'après A. Borel ([3]), M_G le quotient de l'espace $\mathbb{E}_G \times M$ par l'action diagonale de G. On a la fibration de fibre M :

$$M_G := \mathbb{E}_G \times_G M \xrightarrow{\ \pi\ } \mathbb{E}_G/G = \mathbb{B}_G$$

Pour $f : M \to N$ équivariante, l'application $f_G : M_G \to N_G$, $[u,m] \mapsto [u, f(m)]$, est bien définie et le diagramme

$$\begin{tikzcd} M_G \arrow[r, "f_G"] \arrow[d, "\pi_M"'] & N_G \arrow[d, "\pi_N"] \\ \mathbb{B}_G \arrow[r, equal] & \mathbb{B}_G \end{tikzcd}$$

est commutatif.

La *« construction de Borel »* est cette correspondance $(\_)_G$ qui est fonctorielle de la catégorie des G-espaces vers la catégorie des espaces fibrés au-dessus de $\mathbb{B}_G$.

4.2.2. L'espace M_G n'est pas une variété différentielle mais il est convenablement approché par de tels espaces. En effet, $M_G(n) = \mathbb{E}_G(n) \times_G M$ est une variété différentielle, orientable si M l'est, et on a $M_G = \varinjlim M_G(n)$ et même un système inductif de fibra-

[3] Confer § 3 du chapitre IV de [Bor] en particulier la remarque § 3.9, reproduite à la fin de cette note, où Borel cite d'autres travaux précurseurs pour cette construction dus à Conner et à Shapiro.

tions de même fibre M et de bases **compactes**

$$\begin{array}{ccccccc}
\dashrightarrow & M_G(n) & \xrightarrow{\mu_n} & M_G(n+1) & \dashrightarrow & \cdots & M_G \\
& \downarrow{\scriptstyle \pi_n} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{n+1}} & & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\
\dashrightarrow & \mathbb{B}_G(n) & \xrightarrow{\beta_n} & \mathbb{B}_G(n+1) & \dashrightarrow & \cdots & \mathbb{B}_G
\end{array}$$

On en déduit le système projectif de complexes de de Rham $\{\Omega^*(M_G(n)),\mu_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$ tel que, pour chaque $d\in\mathbb{N}$ donné, le système projectif $\{H^d(M_G(n))\}_n$ stationne sur $H^d(M_G)$. Le morphisme $\mu_n^*:\Omega_c(M_G(n+1))\to\Omega_c(M_G(n))$ est bien défini puisque μ_n est propre ; on a donc aussi le système projectif de complexes de de Rham à supports compacts $\{\Omega_c^*(M_G(n)),\mu_n^*\}_{n\in\mathbb{N}}$ et tout comme dans la situation précédente, pour chaque $d\in\mathbb{N}$ donné, le système projectif $H^d(M_G(n))$ stationne sur $H^d_{\mathrm{cv}}(M_G)$.

Les techniques de [C$_1$,C$_2$] donnent des isomorphismes canoniques

$$H_G(M)\simeq H(M_G) \quad\text{et}\quad H_{G,c}(M)\simeq H_{\mathrm{cv}}(M_G)$$

4.2.3. Suites spectrales de Serre. Les fibrations π_n de la section précédente sont des fibrations de Serre et donnent lieu à des suites spectrales dont la limite projective est la suite spectrale « *associée à* π_M ».

4.2.4. Proposition. *Les suites spectrales de Serre associées à la fibration* $\pi_M:M_G\to\mathbb{B}_G$ *convergeant vers* $H_G(M)$ *et* $H_{G,c}(M)$ *s'identifient canoniquement aux suites de* 4.1-d.

Indication. Implicite dans [C$_1$,C$_2$]. ∎

§ 5. Dualité de Poincaré équivariante

5.1 Intégration équivariante

On se donne un groupe de Lie **compact et connexe** G agissant sur une variété M orientée de dimension d_M. On prolonge $\int_M:\Omega_c^*(M)\to\mathbb{R}$ par $S^*(\mathfrak{g}^\vee)$-linéarité en une application

$$\int_M : S^*(\mathfrak{g}^\vee)\otimes_{\mathbb{R}}\Omega_c^*(M)\longrightarrow S^*(\mathfrak{g}^\vee) \tag{$\diamond$}$$

qui est G-équivariante lorsque G agit sur $S^*(\mathfrak{g}^\vee)\otimes\Omega_c^*(M)$ par $g\cdot(P\otimes\omega):=g\cdot P\otimes g\cdot\omega$. En effet, cela revient à vérifier l'égalité $\int_M g\cdot\omega=\int_M\omega$ conséquence de la connexité de G. L'application ($\diamond$) induit donc une application de $\Omega^*_{G,c}(M):=\big(S^*(\mathfrak{g}^\vee)\otimes_{\mathbb{R}}\Omega_c^*(M)\big)^G$ vers $H_G^*:=S^*(\mathfrak{g}^\vee)^G$ noté

$$\int_M:\Omega^*_{G,c}(M)\to H_G^* \tag{$\diamond\diamond$}$$

L'algèbre $\Omega^*_{G,c}(M)$ des formes différentielles G-équivariantes à supports compacts sur M est munie de la différentielle $D_{\mathfrak{g}}(P\otimes\omega)=P\otimes d\omega+\sum_i Pe^i\otimes c(e_i)\omega$ (*cf.* 3.1.5-($D_{\mathfrak{g}}$)).

D'autre part, une chaîne équivariante ζ homogène de degré total d s'écrit de manière **unique** sous la forme

$$\zeta = \sum_{0\leq i\leq d/2} \Big(\sum_{\Xi\in\mathcal{B}(i)} \Xi\otimes\omega_\Xi \Big)$$

où $\mathcal{B}(i)$ désigne une base de $S^i(\mathfrak{g}^\vee)$ et $\omega_\Xi \in \Omega^{d-2\deg\Xi}(M)$. Il s'en suit que lorsque ζ est un cobord équivariant, ses termes de degré forme différentielle d_M sont des cobords pour $1\otimes d$. La forme H_G^*-linéaire (∞) passe donc en cohomologie et donne l'« *intégration équivariante* » :

$$\int_M : H^*_{G,c}(M) \longrightarrow H^*_G \qquad (*)$$

5.1.1. Lien entre l'intégration équivariante et le morphisme de Gysin. Le complexe des formes différentielles G-équivariantes calcule la cohomologie de l'espace M_G limite inductive des variétés fibrées $\pi_n : M_G(n) = \mathbb{E}_G(n)\times_G M \twoheadrightarrow \mathbb{B}_G(n)$ (*cf.* 4.2.2). ?

$H^d(M_G)$

Enfin, pour chaque d donné le système projectif $H^d(M_G(n))$ est stationnaire et stationne sur $H^n(M_G)$. Cela dit, la projection π_n est de fibre M et lorsque M est orientée ← et compacte

on dispose du morphisme de Gysin $\pi_* : H(M_G(n))[d_M] \to H(\mathbb{B}_G(n))$ qui, par passage à ~~le~~ la limite, fournit un morphisme de $H(\mathbb{B}_G)$-modules $\pi_* : H(M_G)[d_M] \to H(\mathbb{B}_G)$.

? ⟹ **Proposition.** *Le morphisme de Gysin $\pi_* : H_G(M)[d_M] \to H_G$ coïncide avec le morphisme d'intégration $(*)$.*

5.2 Morphisme de dualité de Poincaré G-équivariante

A l'aide de $(*)$ on peut considérer l'analogue équivariant de l'application de dualité de Poincaré classique ; on considère :

et $H_{G,c}(M) \to \mathrm{Hom}_{H_G}(H_G(M), H_G)$?

$$\boxed{\mathbb{D}_{M,G} : \Omega_G(M)[d_M]^\bullet \longrightarrow \mathrm{Hom}^\bullet_{H_G}\big(\Omega_{G,c}(M), H_G\big)} \qquad (*)$$

définie pour $\varpi \in \Omega^*_G(M)[d_M]^{-i}$ par :

$$\mathbb{D}_{M,G}(\varpi) = \Big(\Omega^i_{G,c}(M) \ni \omega \mapsto \int_M \varpi\wedge\omega\Big)$$

Comme dans le cas non équivariant, $\mathbb{D}_{M,G}$ est un morphisme de complexes induisant « *le morphisme de dualité de Poincaré en cohomologie équivariante* »

$$\mathcal{D}_{M,G} : H_G(M)[d_M]^\bullet \longrightarrow \mathrm{Hom}^\bullet_{H_G}\big(H_{G,c}(M), H_G\big)$$

En général, qu'est ce qu'on peut dire à propo de ce morphisme ?

5.2.1. Théorème (Dualité de Poincaré G-équivariante)

a) *Le morphisme de complexes $\mathbb{D}_{M,G}$ est un quasi-isomorphisme.*

b) *Il existe une suite spectrale $\mathbb{E}_r^{*,*}$ telle que*

$$\mathbb{E}_2^{p,q} = \mathrm{Ext}^{p,q}_{H_G}\big(H_{G,c}(M), H_G\big) \Longrightarrow H_G^{p+q}(M)[d_M]$$

?

$\Big(\mathrm{Ext}^p_{H_G}\big(H_{G,c}(M), H_G\big)\Big)^{p+q}$

Preuve

a) Nous reprenons la filtration de $\Omega_G(M)$ introduite dans la preuve de 3.1.6-(b). Une forme différentielle équivariante est « *d'indice* m » si elle est de degré polynôme au moins m, *i.e.* si elle appartient à

$$\Omega_G(M)_m = (S^{\geqslant m}(\mathfrak{g}^\vee)\otimes\Omega(M))^G .$$

On constate que chaque $\Omega_G(M)_m$ est laissé stable par la différentielle équivariante $D_\mathfrak{g}$. On a $\Omega_G(M) = \Omega_G(M)_m$ pour tout $m \leqslant 0$ et une filtration décroissante de complexes

$$\Omega_G(M) = \Omega_G(M)_0 \supseteq \Omega_G(M)_1 \supseteq \Omega_G(M)_2 \supseteq \cdots$$

telle que, pour chaque $i\in\mathbb{Z}$, on a $\Omega^i_G(M)_m = 0$ dès que $m > i$; nous sommes donc en présence d'une filtration régulière.

Dans le même ordre d'idées, $\lambda \in \mathrm{Hom}^\bullet_{H_G}(\Omega_G(M), H_G)$ est « *d'indice* m » lorsque

$$\deg\lambda\Big(\big(S^a(\mathfrak{g}^\vee)\otimes\Omega_c(M)\big)^G\Big) \geqslant a+m\,, \qquad \forall a\in\mathbb{N}.$$

✗ Est-ce le degré polynôme?

Oui

On note $\mathrm{Hom}^\bullet_{H_G}(\Omega_{G,c}(M), H_G)_m$ l'ensemble de telles applications ; c'est un sous-complexe de $\mathrm{Hom}^\bullet_{H_G}(\Omega_{G,c}(M), H_G)$. Contrairement à la filtration de $\Omega_G(M)$, on n'a pas forcément $\mathrm{Hom}^\bullet_{H_G}(\Omega_{G,c}(M), H_G) = \mathrm{Hom}^\bullet_{H_G}(\Omega_{G,c}(M), H_G)_m$ pour m négatif, mais on a bien une filtration décroissante

$$\mathrm{Hom}^\bullet_{H_G}(\Omega_{G,c}, H_G) \supseteq \cdots \supseteq \mathrm{Hom}^\bullet_{H_G}(\Omega_{G,c}, H_G)_m \supseteq \mathrm{Hom}^\bullet_{H_G}(\Omega_{G,c}, H_G)_{m+1} \supseteq \cdots$$

dont la "trace" sur chaque $\mathrm{Hom}^i_{H_G}$ est **finie**. En effet, si λ est homogène de degré i, on a

$$a+\dim M + i \geqslant \deg\lambda\Big(\big(S^a(\mathfrak{g}^\vee)\otimes\Omega_c(M)\big)^G\Big) \geqslant a+i\,, \qquad \forall a\in\mathbb{N},$$

Quel est le degré de λ?

$\lambda \in \mathrm{Hom}^i_{H_G} \Leftrightarrow \deg\lambda = i$

nous sommes donc aussi en présence d'une filtration régulière.

L'application $\mathbb{D}_{M,G}$ est un morphisme de complexes gradués **filtrés**, *i.e.*

$$\mathbb{D}_{M,G}\big(\Omega_G(M)[d_M]_m\big) \subseteq \mathrm{Hom}^\bullet_{H_G}(\Omega_{G,c}(M), H_G)_m\,, \qquad \forall m\in\mathbb{Z},$$

et donne lieu, par conséquent, à un morphisme de suites spectrales associées aux filtrations par l'indice et dont les termes $\mathbb{E}_0$ sont respectivement

$$\begin{cases} \big((S^\bullet(\mathfrak{g}^\vee)\otimes\Omega(M))^G[d_M], (-1)^{d_M}\otimes d_M\big) \\ \mathrm{Hom}_{H_G}\big((S^\bullet(\mathfrak{g}^\vee)\otimes\Omega_c(M))^G, 1\otimes d_M), H_G\big) \end{cases}$$

Or, ces complexes sont respectivement quasi-isomorphes aux complexes

$$\begin{cases} H_G\otimes\big(\Omega(M), d_M\big)[d_M] \\ \mathrm{Hom}_{H_G}\big(H_G\otimes\big(\Omega_c(M), d_M\big), H_G\big) \end{cases}$$

En effet, le premier quasi-isomorphisme est celui de 4.1-a. Pour le second on remarque que, puisque G est compact, on a $\boxed{S^*(\mathfrak{g}^\vee) = H_G \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{H}}$, où $\mathcal{H}$ désigne l'espace des polynômes harmoniques sur $\mathfrak{g}$. On a donc

$$\Big((S^*(\mathfrak{g}^\vee) \otimes_{\mathbb{R}} \Omega_c(M))^G, 1 \otimes d_M \Big) = H_G \otimes_{\mathbb{R}} \Big((\mathcal{H} \otimes \Omega_c(M))^G, 1 \otimes d_M \Big)$$

et les quasi-isomorphisme induits par les inclusions :

$$H_G \otimes \big(\Omega_c(M), d_M\big) \supseteq H_G \otimes \big(\Omega_c(M)^G, d_M\big) \subseteq \big((S^*(\mathfrak{g}^\vee) \otimes \Omega_c(M))^G, 1 \otimes d_M\big)$$

(*cf.* 4.1-a) sont des quasi-isomorphismes de H_G-modules **libres** et ceci suffit pour conclure que leurs duaux sont aussi quasi-isomorphes.

En mettant bout à bout ces remarques, le morphisme induit par $\mathbb{D}_{M,G}$ entre les termes $\mathbb{E}_2$ des suites spectrales engendrées par la filtration par indices n'est autre que l'**isomorphisme** de la dualité de Poincaré non équivariante :

$$H_G \otimes H(M)[d_M]^\bullet \xrightarrow{1 \otimes \mathcal{D}_{M,\bullet}} H_G \otimes \operatorname{Hom}^\bullet_{\mathbb{R}}(H_c(M), \mathbb{R}) = \operatorname{Hom}_{H_G}\big((H_G \otimes H_c(M), H_G)\big)$$

b) La preuve est essentiellement la même que pour 5.3.1-b à laquelle nous renvoyons. ∎

5.3 Morphisme de dualité de Poincaré T-équivariante

Lorsque G est un tore compact et connexe $T = \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$, on a :

$$\begin{cases} H_T^* = S^*(\mathfrak{t}^\vee) \\ \Omega_T^*(M) = S^*(\mathfrak{t}^\vee) \otimes_{\mathbb{R}} \Omega^*(M)^T \\ \Omega_{T,c}^*(M) = S^*(\mathfrak{t}^\vee) \otimes_{\mathbb{R}} \Omega_c^*(M)^T \end{cases}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_{H_T^*}(\Omega_{T,c}^*, H_T^*) &= \operatorname{Hom}_{S^*(\mathfrak{t}^\vee)}\big(S^*(\mathfrak{t}^\vee) \otimes \Omega_c^*(M)^T, S^*(\mathfrak{t}^\vee)\big) \\ &= \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}\big(\Omega_c^*(M)^T, S^*(\mathfrak{t}^\vee)\big) = S^*(\mathfrak{t}^\vee) \otimes_{\mathbb{R}} \operatorname{Hom}_{\mathbb{R}}(\Omega_c^*(M)^T, \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Le morphisme de dualité équivariante $\mathbb{D}_{M,T}$ s'identifie ainsi à $\mathbf{1} \otimes \mathbb{D}_M$, on a :

$$\boxed{\begin{array}{ccc} S^*(\mathfrak{t}^\vee) \otimes \Omega^*(M)^T[d_M]^\bullet & \xrightarrow[\mathbf{1}\otimes \mathbb{D}_M]{\mathbb{D}_{M,T}} & S^*(\mathfrak{t}^\vee) \otimes \operatorname{Hom}^\bullet_{\mathbb{R}}(\Omega_c^*(M)^T, \mathbb{R}) \\ P \otimes \nu & \longmapsto & P \otimes \Big(\mu \mapsto \displaystyle\int_M \nu \wedge \mu\Big) \end{array}}$$

5.3.1. Théorème (Dualité de Poincaré T-équivariante)

a) *Le morphisme $\mathbb{D}_{M,T}$ est un quasi-isomorphisme.*

b) *Il existe une suite spectrale $\mathbb{E}_r^{*,*}$ telle que*

$$\mathbb{E}_2^{p,q} = \operatorname{Ext}^{p,q}_{S^*(\mathfrak{t}^\vee)}(H_{T,c}^*(M), S^*(\mathfrak{t}^\vee)) \Longrightarrow H_T^{p+q}(M)[d_M]$$

c) *Lorsque $H_T^*(M)$ est un $S^*(\mathfrak{t}^\vee)$-module libre de type fini, le morphisme $\mathbb{D}_{M,T}$ induit un isomorphisme*

$$H_T(M)[d_M]^\bullet \simeq \operatorname{Hom}^\bullet_{S^*(\mathfrak{t}^\vee)}(H_{T,c}^*(M), S^*(\mathfrak{t}^\vee))$$

Comment est-ce possible ?
~~S'il~~ n'y a
S'il
pas de pt. fixes,
$H_T(M)$ est torsion.

Preuve

a) Compte tenu de l'identification $\mathbb{D}_{M,T} = \mathbf{1} \otimes \mathbb{D}_M$, le résultat découle aussitôt de 3.1.6-d.

b) L'algèbre $\boldsymbol{S}^* := S^*(\mathfrak{t}^\vee)$ étant graduée, on considère la catégorie $\mathrm{Mod}^{\mathbb{Z}}(\boldsymbol{S})$ des $\boldsymbol{S}$-modules $\mathbb{Z}$-gradués $\boldsymbol{M} = \bigoplus_d \boldsymbol{M}^d$, notés aussi $\boldsymbol{M}^*$ lorsque l'on souhaite en souligner la graduation. Un morphisme de $\boldsymbol{S}$-modules gradués $\alpha : \boldsymbol{M}^* \to \boldsymbol{N}^*$ est dit homogène de degré $d \in \mathbb{Z}$ si $\alpha(\boldsymbol{M}^n) \subseteq \boldsymbol{N}^{n+d}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, leur ensemble est noté $\mathrm{Homgr}^d_{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N})$ et même $\mathrm{Homgr}^d(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N})$ lorsque la mention de $\boldsymbol{S}$ est inutile. L'ensemble $\mathrm{Homgr}^*(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}) = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} \mathrm{Homgr}^d(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N})$ est muni d'une structure naturelle de $\boldsymbol{S}$-module gradué.

La catégorie $\mathrm{Mod}^{\mathbb{Z}}(\boldsymbol{S})$ possède assez d'injectifs, il existe donc une résolution

$$0 \to \boldsymbol{S} \xrightarrow{\epsilon_{-1}} \boldsymbol{I}^0 \xrightarrow{\epsilon_0} \boldsymbol{I}^1 \xrightarrow{\epsilon_1} \boldsymbol{I}^2 \xrightarrow{\epsilon_2} \cdots \qquad (*)$$

où $\boldsymbol{I}^n$ est un $\boldsymbol{S}$-module gradué de degrés $\geqslant n$ et les morphismes $\epsilon_\bullet$ sont homogènes de degré 1. Si nous appliquons le foncteur $\mathrm{Homgr}(\boldsymbol{M}, \_)$ à (*) on obtient le complexe de $\boldsymbol{S}$-modules gradués

$$0 \to \mathrm{Homgr}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{S}) \xrightarrow{\epsilon_{-1}} \mathrm{Homgr}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{I}^0) \xrightarrow{\epsilon_0} \mathrm{Homgr}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{I}^1) \xrightarrow{\epsilon_1} \mathrm{Homgr}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{I}^2) \xrightarrow{\epsilon_2} \cdots \qquad (**)$$

qui sera exact si $\boldsymbol{M}$ est un $\boldsymbol{S}$-module libre (plus généralement projectif).

Soit maintenant un $\mathfrak{t}$-complexe différentiel (Ω^*, d_*) et posons $\boldsymbol{M} = \Omega^*_{\mathfrak{t}}$. Le $\boldsymbol{S}$-module $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{S} \otimes_{\mathbb{R}} (\Omega^*)^{\mathfrak{t}}$ est clairement libre et pour tout $\boldsymbol{S}$-module gradué $\boldsymbol{N}$ on a $\mathrm{Homgr}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}) = \mathrm{Homgr}_{\mathbb{R}}(\Omega, \boldsymbol{N})$. On munit le $\boldsymbol{S}$-module gradué $(\mathrm{Homgr}^*(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}), D_*)$ de la différentielle $D(f) = f \circ d$ et la suite (**) apparaît alors comme le bicomplexe aux lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Homgr}((\boldsymbol{S}\otimes\Omega)^0, \boldsymbol{S}) \arrow[r, "\epsilon_{-1}"] \arrow[u] & \mathrm{Homgr}((\boldsymbol{S}\otimes\Omega)^0, \boldsymbol{I}^0) \arrow[r, "\epsilon_0"] \arrow[u] & \mathrm{Homgr}((\boldsymbol{S}\otimes\Omega)^0, \boldsymbol{I}^1) \arrow[r, "\epsilon_1"] \arrow[u] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Homgr}((\boldsymbol{S}\otimes\Omega)^1, \boldsymbol{S}) \arrow[r, "\epsilon_{-1}"] \arrow[u, "d_0"] & \mathrm{Homgr}((\boldsymbol{S}\otimes\Omega)^1, \boldsymbol{I}^0) \arrow[r, "\epsilon_0"] \arrow[u, "d_0"] & \mathrm{Homgr}((\boldsymbol{S}\otimes\Omega)^1, \boldsymbol{I}^1) \arrow[r, "\epsilon_1"] \arrow[u, "d_0"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Homgr}((\boldsymbol{S}\otimes\Omega)^2, \boldsymbol{S}) \arrow[r, "\epsilon_{-1}"] \arrow[u, "d_1"] & \mathrm{Homgr}((\boldsymbol{S}\otimes\Omega)^2, \boldsymbol{I}^0) \arrow[r, "\epsilon_0"] \arrow[u, "d_1"] & \mathrm{Homgr}((\boldsymbol{S}\otimes\Omega)^2, \boldsymbol{I}^1) \arrow[r, "\epsilon_1"] \arrow[u, "d_1"] & \cdots \\
 & {} \arrow[u, "d_2"] & {} \arrow[u, "d_2"] & {} \arrow[u, "d_2"]
\end{tikzcd}$$

On a $\mathrm{Homgr}_{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{S} \otimes \Omega, \boldsymbol{I}^n) = \mathrm{Homgr}_{\mathbb{R}}(\Omega, \boldsymbol{I}^n)$, et donc, si la graduation de Ω est majorée par un entier d, la graduation de $\mathrm{Homgr}_{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{S} \otimes \Omega, \boldsymbol{I}^n)$ sera minorée par $(n-d)$. On en déduit, dans ce cas, que la filtration de ce bicomplexe par colonnes est régulière. La première colonne est quasi-isomorphe au complexe simple associé au sous-bicomplexe

$(\mathrm{Homgr}((S\otimes\Omega)^\ell,I^k),\epsilon_k,d_\ell)$ sur lequel la filtration donne lieu à une suite spectrale dont le premier terme s'identifie à

$$\mathbb{E}_1^{*,q}=\mathrm{Homgr}_S\left(H_T^*(\Omega),I^q\right)\xrightarrow{\mathrm{Homgr}(H_T(\Omega),\epsilon_q)}\mathrm{Homgr}_S\left(H_T^*(\Omega),I^{q+1}\right)=\mathbb{E}_1^{*,q+1}$$

et donc

$$\mathbb{E}_2^{*,\bullet}=\mathrm{Extgr}^{*,\bullet}_{S^\cdot(\mathfrak{t}^\vee)}\left(H_T^*(\Omega),S^*(\mathfrak{t}^\vee)\right)\Longrightarrow h^{*+\bullet}\left(\mathrm{Homgr}_{S^\cdot(\mathfrak{t}^\vee)}\left(\Omega_\mathfrak{t},S^*(\mathfrak{t}^\vee)\right)\right)$$

on conclut en appliquant (a).

c) Conséquence immédiate de (b). ∎

5.3.2. Remarque. On rappelle que $H_T^*(M)$ est une $S^*(\mathfrak{t}^\vee)$-module libre lorsque, par exemple, M ne possède pas de cohomologie en degrés impairs (*cf.* 3.1.6-d-iv). Idem, mais c'est inintéressant, lorsque l'action de $\mathfrak{t}$ sur M est triviale, *i.e.* $c(Y)=0$, et donc aussi $\theta(Y)=0$, pour tout $Y\in\mathfrak{g}$.

§ 6. Morphisme de Gysin G-équivariant

6.1 A propos des bons recouvrements

Dans 2.1 nous avons rappelé que toute variété différentielle M admet des bons recouvrements dénombrables, elle est ainsi réunion d'une famille croissante d'ouverts $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ où chaque U_i admet des bon recouvrements **finis** et donc $H(U_i)$ et $H_c(U_i)$ sont de dimension finie. Lorsque un groupe **G compact** agit sur M on a le résultat analogue suivant.

6.1.1. Proposition. *Lorsque un groupe compact G agit sur une variété M, il existe une famille croissante d'ouverts $\mathcal{B}=\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ qui recouvre M, et telle que chaque V_i est de type fini et est stable sous l'action de G.*

Preuve. L'idée de la démonstration est la suivante. D'après le théorème de la tranche (slice) il passe par chaque $x\in M$ une sous-variété localement fermée S_x stable sous l'action de $G_x:=\mathrm{Stab}_x(G)$ telle que que l'application $G\times_{G_x}S_x\to GS_x$, $(g,x)\mapsto gx$, est un isomorphisme sur un voisinage ouvert de l'orbite Gx. L'application $\pi:G\times_{G_x}S_x\to G\times_{G_x}\bullet=Gx$ est une fibration localement triviale de fibre S_x de sorte que pour tout tout voisinage assez petit W_x de x dans Gx, on a $U_x:=\pi^{-1}W_x=W_x\times S_x$ et il existe un ensemble **fini** $\{g_1,\dots,g_r\}\subseteq G$ tel que $\bigcup_{i=1}^r g_iU_x=GU_x$. Munissons maintenant M d'une métrique riemannienne G invariante (possible parce que G est compact). Pour chaque $x\in M$ la tranche S_x et W_x peuvent être choisis tels que U_x soit **convexe**, auquel cas ses translatés gU_x le sont aussi. Il s'ensuit que si U est une réunion finie des ouverts W_x l'ouvert GU admet un bon recouvrement **fini**. Soit donc $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tel que $\{U_x\}_{i\in\mathbb{N}}$ est un bon recouvrement de M. En posant $V_i=G(U_{x_1}\cup\cdots\cup U_{x_i})$ proposition est vérifiée. ∎

Le théorème suivant, analogue équivariant de la proposition 2.1.4, est corollaire de 5.2.1 dans le cas des groupes compactes généraux ou bien de 5.3.1 dans le cas des tores.

6.1.2. Théorème. *Sous les hypothèses en cours,*

a) *Pour tout recouvrement $\mathcal{U}$ de $\boldsymbol{M}$ par des ouverts $\boldsymbol{G}$-stables, le morphisme canonique*

$$\varinjlim_{U\in\mathcal{B}} \Omega_{\mathfrak{g},c}(\boldsymbol{U}) \longrightarrow \Omega_{\mathfrak{g},c}(\boldsymbol{M})$$

est bijectif et l'application

$$I\!D'_{\mathcal{U},G} : \Omega^*_{G,c}(\boldsymbol{M})[d_M]^\bullet \longrightarrow \varinjlim_{U\in\mathcal{U}} \mathrm{Hom}^\bullet_{H^*_G}\big(\Omega^*_G(\boldsymbol{U}), H^*_G\big) \qquad (\star')$$

analogue de $(\star)$ (5.2) *est bien définie et c'est un morphisme de complexes.*

b) *Pour tout recouvrement $\mathcal{B}$ vérifiant les conditions de* 6.1.1, *l'application*

$$I\!D'_{\mathcal{B},G} : \Omega^*_{G,c}(\boldsymbol{M})[d_M]^\bullet \longrightarrow \varinjlim_{U\in\mathcal{B}} \mathrm{Hom}^\bullet_{H^*_G}\big(\Omega^*_G(\boldsymbol{U}), H^*_G\big)$$

est un quasi-isomorphisme.

au

6.2 Morphisme de Gysin G-équivariant

Compte tenu du corollaire 6.1.2, nous pouvons introduire le morphisme de Gysin en cohomologie équivariante de manière formellement identique au cas classique (2.2).

Étant données deux $\boldsymbol{G}$-variétés $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}$ et une application $\boldsymbol{G}$-équivariante $f : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{N}$, on munit $\boldsymbol{N}$ d'un recouvrement dénombrable croissant par des ouverts $\boldsymbol{G}$-stables et de type fini $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{U}_n\}$. On considère alors le diagramme de complexes :

$$\begin{tikzcd}
\Omega_{G,c}(\boldsymbol{M})[d_M] \arrow[r, dashed, "f_{G,*}"] \arrow[d, "I\!D'_{G,f^{-1}\mathcal{B}}"'] & \Omega_{G,c}(\boldsymbol{N})[d_N] \arrow[d, "I\!D'_{\mathcal{B}}"] \\
\varinjlim_{U\in\mathcal{B}} \mathrm{Hom}_{S^*(\mathfrak{t}^\vee)}\big(\Omega_G(f_{-1}\boldsymbol{U}), S^*(\mathfrak{t}^\vee)\big) \arrow[r] & \varinjlim_{U\in\mathcal{B}} \mathrm{Hom}_{S^*(\mathfrak{t}^\vee)}\big(\Omega_G(\boldsymbol{U}), S^*(\mathfrak{t}^\vee)\big)
\end{tikzcd}$$

$f^{-1}(U)$

où $I\!D'_{\mathcal{B}}$ est un quasi-isomorphisme et induit le morphisme $f_{G,*}$ en cohomologie équivariante appelé « *morphisme de Gysin $\boldsymbol{G}$-équivariant* ».

$$H_{G,c}(\boldsymbol{M})[d_M] \xrightarrow{f_{G,*}} H_{G,c}(\boldsymbol{N})[d_N]$$

6.2.1. Théorème. *Notons $\boldsymbol{Diff_G}$ la catégorie dont les objets sont les $\boldsymbol{G}$-variétés différentielles munies d'une orientation et dont les objets sont les applications différentiables* morphismes
$\boldsymbol{G}$-équivariantes. La correspondance de $\boldsymbol{Diff_G}$ vers la catégorie $\mathrm{Mod}(H_G)^{\mathbb{Z}}$ *des H_G-modules vectoriels $\mathbb{Z}$-gradués qui fait correspondre*

$$\boldsymbol{M} \rightsquigarrow H_{G,c}(\boldsymbol{M})[d_M]\,, \quad \text{et} \quad f \rightsquigarrow f_{G,*}$$

est fonctorielle. On a

$$\boxed{\int_{\boldsymbol{M}} \mu \wedge (f^*\nu) = \int_{\boldsymbol{N}} (f_{G,*}\mu) \wedge \nu} \qquad (\diamond)$$

quels que soient $\mu \in H_{G,c}(\boldsymbol{M})$ et $\nu \in H_G(\boldsymbol{N})$.

6.2.2. Commentaire. Contrairement au cas non équivariant, il n'est pas clair que le morphisme de Gysin soit le seul à vérifier $(\diamond)$. En effet, dans ce cas, l'unicité est conséquence de l'injectivité du morphisme de dualité de Poincaré

Remplacer par l'analogue équiv. ?

$$\begin{aligned} I\!D : H_{\mathrm{DR},c}(M) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}\big(H_{\mathrm{DR}}(M),\mathbb{R}\big) \\ \nu &\longrightarrow \Big(\mu \to \int_M \nu\wedge\mu\Big) \end{aligned}$$

qui n'est pas toujours vérifiée dans le cas équivariant.

Soit G un tore T, puis M une T-variété orientée compacte sans point fixe et telle que $H_{T,c}(M)\neq 0$. On a $H_T(M)=H_{T,c}(M)$ et $H_T(M)$ est un $S(\mathfrak{t}^*)$-module de torsion. L'application d'intégration

$$\int_M : H_T(M)\longrightarrow S(\mathfrak{t}^*)$$

est donc ***nulle*** de même, par conséquent, que l'application de dualité équivariante

$G=T$
$\mathfrak{g}=\mathfrak{t}$?

$$\begin{aligned} I\!D : H_{G,c}(M) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{S^*(\mathfrak{g}^\vee)}\big(H_G(M),S^*(\mathfrak{g}^\vee)\big) \\ \nu &\longrightarrow \Big(\mu \to \int_M \nu\wedge\mu\Big) \end{aligned}$$

Toujours dans cet exemple, pour toute application $f: M\to M$ on a trivialement

$$\int_M \nu\wedge f^*(\mu) = \int_M \lambda(\nu)\wedge\mu \qquad (\diamond)$$

pour tous $\nu,\mu\in H_T(M)$ et quel que soit $\lambda\in\mathrm{End}_{S(\mathfrak{t}^*)}\big(H_T(M)\big)$.

Par exemple, si $T=\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$ agit sur $M=\mathbb{S}^1$ par $(t,u)(v)=uv$, on a

$$S(\mathfrak{t}^*)=\mathbb{R}[X,Y], \qquad H_T(M)=\mathbb{R}[X,Y]/(X)=\mathbb{R}[Y]$$

et $\mathrm{End}_{\mathbb{R}[X,Y]}(\mathbb{R}[Y])=\mathbb{R}[Y]$. Il y a donc beaucoup de solutions à $(\diamond)$.

§ 7. Morphismes de Gysin explicites

Le définition générale du morphisme de Gysin repose sur le fait que le morphisme de complexes $I\!D'_M : \Omega_c(M)[d_M]\to\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\Omega(M),\mathbb{R})$ est un quasi-isomorphisme mais il ne provient en général pas de l'existence d'un vrai morphisme de complexes de $\Omega_c(M)[d_M]$ vers $\Omega_c(N)[d_N]$. Nous étudions dans cette section des cas importants où c'est le cas.

7.1. Lemme. *Soit $f: M\to N$ une application entre deux variétés. Un morphisme de complexes $\varphi_*:\Omega_c^*(M)[d_M]\to\Omega_c^*(N)[d_N]$ induit le morphisme de Gysin f_* si et seulement si*

$$\int_M \mu\wedge f^*\nu = \int_N \varphi_*(\mu)\wedge\nu \qquad (\diamond)$$

quel que soient $\mu\in\Omega_c^*(M)$ et $\nu\in\Omega^*(N)$

7.2. Inclusions ouvertes

Proposition. *Soient U un ouvert de M et $\iota : U \to M$ l'inclusion. Le morphisme de Gysin $\iota_* : H^*_{\mathrm{DR},c}(U) \to H^*_{\mathrm{DR},c}(M)$ est le morphisme induit par l'inclusion $\Omega^*_c(U) \subseteq \Omega^*_c(M)$.*

Preuve. L'égalité ($\diamond$) du lemme 7.1 est immédiate. ■

7.3. Projection. On se donne deux variétés orientées M et N, on rappelle que le morphisme naturel du complexe produit tensoriel $\Omega^*_c(M) \otimes \Omega^*_c(N)$ vers le complexe $\Omega^*_c(M \times N)$ est un quasi-isomorphisme.

Proposition. *Avec les données en cours, l'application*

$$\begin{array}{rcl} \Omega^*_c(M) \otimes \Omega^*_c(N) & \xrightarrow{\varphi_*} & \Omega^*_c(N) \\ \nu \otimes \mu & \xmapsto{\varphi_*} & \Big(\int_M \nu\Big)\mu \end{array}$$

Il est mieux d'inverser ν et μ.

est un morphisme de complexes qui induit le morphisme de Gysin

$$\mathrm{pr}_* : H^*_{\mathrm{DR},c}(M \times N)[d_M] \to H^*_{\mathrm{DR},c}(N)$$

associé à la surjection canonique $\mathrm{pr} : M \times N \twoheadrightarrow N$, $\mathrm{pr}(x,y) = y$.

Preuve. L'application φ est un morphisme de complexes puisque :

$$\begin{aligned} \varphi(d(\nu \otimes \mu)) &= \varphi((d\nu) \otimes \mu) + (-1)^{\deg \nu} \varphi(\nu \otimes d\mu) \\ &= \Big(\int_M d\nu\Big)\mu + (-1)^{\deg \nu}\Big(\int_M \nu\Big) d\mu = (-1)^{d_M}\Big(\int_M \nu\Big) d\mu \end{aligned}$$

$d_M = \deg \nu$

Par le lemme 7.1, le morphisme de complexes φ_* induit le morphisme de Gysin pr_* si et seulement si on a

$$\int_{M\times N} (\nu \otimes \nu')\mathrm{pr}^*(\mu) = \int_N \Big(\int_M \nu\Big) \nu' \wedge \mu$$

Or,

$$\begin{aligned} \int_{M\times N} (\nu \otimes \nu')\mathrm{pr}^*(\mu) &= \int_{M\times N} (\nu \otimes \nu')(1 \otimes \mu) = \int_{M\times N} \nu \otimes (\nu' \wedge \mu) \\ &= \Big(\int_M \nu\Big)\Big(\int_N \nu' \wedge \mu\Big) = \int_N \Big(\int_M \nu\Big)\nu' \wedge \mu \end{aligned}$$

en appliquant l'identité de Fubini. ■

7.4. Projection d'un fibré vectoriel orienté sur sa base. Soit E un fibré vectoriel de fibre F orientée et de base une variété orientée B. Notons $\pi : E \twoheadrightarrow B$ la projection canonique.

Better notation: $\pi : E \to M$

Proposition. *Le morphisme de Gysin π_* est induit par le morphisme de complexes d'intégration sur les fibres*

$$\int_F : \Omega_c^*(E)[d_F] \to \Omega_c^*(B)$$

$\mu \in \Omega^*(B)$, $\nu \in \Omega_c^*(E)$

Preuve. Par 7.1 il suffit de vérifier que

$$\int_E \nu \wedge \pi^*(\mu) = \int_B \Big(\int_F \nu\Big) \wedge \mu$$

qui n'est autre que la «*formule de projection*» bien connue. ∎

7.5. Inclusion de la section nulle d'un fibré vectoriel orienté. On garde les notations du paragraphe précédent. On note $\sigma : B \to E$ l'application d'inclusion.

Proposition. *Le morphisme de Gysin σ_* est induit par le morphisme de complexes*

$$\begin{array}{ccc} \Omega_c^*(B) & \xrightarrow{\mathcal{T}} & \Omega_c^*(E)[d_F] \\ \nu & \longmapsto & \Phi \wedge \pi^*\nu \end{array}$$

où Φ désigne la classe de Thom.

Preuve. Par 7.1 on doit vérifier que pour tous $\nu \in \Omega_c(B)$ et $\mu \in \Omega(E)$ on a

$$\int_B \nu \wedge \mu|_B = \int_E (\Phi \wedge \pi^*\nu) \wedge \mu$$

mais comme $\pi^* : \Omega^*(B) \to \Omega^*(E)$ est un quasi-isomorphisme, il suffit de qu'on le vérifie pour μ de la forme $\pi^*\nu'$, soit :

$$\int_B \nu \wedge \nu' = \int_E (\Phi \wedge \pi^*\nu) \wedge \pi^*\nu' = \int_E \Phi \wedge \pi^*(\nu \wedge \nu')$$

Or, par la formule de projection on a :

$$\int_E \Phi \wedge \pi^*(\nu \wedge \nu') = \int_B \Big(\int_F \Phi\Big)(\nu \wedge \nu')$$

avec $\int_F \Phi = 1$ par définition de la classe de Thom. ∎

7.6. Factorisations du morphisme de Gysin. Une application $f : M \to N$ entre variétés se factorise en composant l'immersion fermée $\mathrm{gr}(f) : M \to M \times N$, $x \mapsto (x, f(x))$, et la projection $\mathrm{pr} : M \times N \to N$. L'immersion $\mathrm{gr}(f)$ se réalise alors comme composée de l'injection de la section nulle du fibré normal $\nu(M)$ de M dans $M \times N$, puis d'un difféomorphisme de $\nu(M)$ sur un voisinage tubulaire U de $\mathrm{Gr}(f)$ dans $M \times N$, et, enfin, de l'inclusion de U dans $M \times N$. On a donc la factorisation

$$M \xrightarrow{\sigma} \nu(M) \xrightarrow{\simeq} U \xrightarrow{\subseteq} M \times N \xrightarrow{\mathrm{pr}} N \qquad (\diamond)$$

Lorsque M et N sont orientées, les variétés dans $(\diamond)$ le sont aussi et le morphisme de Gysin f_* est donc composé des morphismes de Gysin associés aux applications de $(\diamond)$

dont il faut remarquer qu'ils proviennent tous de morphismes au niveau des complexes de formes différentielles à support compact. Cette remarque est très utile pour démontrer l'existence du morphisme de Gysin équivariant de manière explicite, ce que nous ferons dans la section suivante.

§ 8. Morphisme de Gysin équivariant explicites

On reprend les données des sections précédentes en munissant chaque variété d'une action (différentiable) d'un groupe de Lie connexe G. Les applications entre variétés sont supposées G-équivariantes.

8.1. Inclusions ouvertes. Soit $\iota : U \subseteq M$ l'inclusion d'un ouvert G-stable U de M. L'inclusion de complexes $\Omega_c(U) \subseteq \Omega_c(M)$ commute à la différentielle extérieure et aux opérateurs de contraction induits par l'action de G. L'inclusion

$$\big(S(\mathfrak{g}) \otimes \Omega_c(U)\big)^G \subseteq \big(S(\mathfrak{g}) \otimes \Omega_c(M)\big)^G$$

est trivialement un morphisme de complexes pour la différentielle de Cartan ; il induit le « *morphisme de Gysin équivariant* » en cohomologie équivariante

$$\iota_{G*} : H_c^*(U)[d_U] \longrightarrow H_c^*(M)[d_M]$$

et l'égalité caractéristique

$$\int_U \mu \wedge (f^*\nu) = \int_M (f_*\mu) \wedge \nu, \quad \forall \mu \in H_{G,c}(U),\ \forall \nu \in H_G(M),$$

est trivialement vérifiée.

8.2. Projection. Dans le cas de la projection $\mathrm{pr} : M \times N \twoheadrightarrow N$, le morphisme de complexes (*cf.* 7.3)

$$\begin{aligned} \Omega_c^*(M) \otimes \Omega_c^*(N) &\xrightarrow{\varphi_*} \Omega_c^*(N) \\ \nu \otimes \mu \quad &\xmapsto{\varphi_*} \Big(\int_M \nu\Big)\mu \end{aligned}$$

est G-équivariant et commute aux opérateurs de contraction. En effet, la G-équivariance résulte de

$$\int_M g^*\nu = \int_M \nu, \quad \forall \nu \in \Omega_c(M), \forall g \in G,$$

conséquence de la connexité de G. La compatibilité vis-à-vis des opérateurs de contraction résulte aisément de

$$\begin{aligned} \varphi_*\big(\iota(X)(\nu \otimes \mu)\big) &= \varphi_*\big(\iota(X)(\nu) \otimes \mu\big) + (-1)^{\deg \nu} \varphi_*\big(\nu \otimes \iota(X)(\mu)\big) \\ &= (-1)^{d_M} \varphi_*\big(\nu \otimes \iota(X)(\mu)\big) = (-1)^{d_M} \iota(X)\big(\varphi_*(\nu \otimes \mu)\big) \end{aligned}$$

puisque $\int_M \iota(X)\nu = 0$ pour une simple raison de degré.

Le morphisme φ_* se prolonge alors naturellement en un morphisme de complexes
$$\varphi_{G*} : \big(S(\mathfrak{g}) \otimes \Omega_c(M) \otimes \Omega_c(N)\big)^G \to \big(S(\mathfrak{g}) \otimes \Omega_c(N)\big)^G$$
d'où le morphisme de Gysin en cohomologie équivariante
$$\mathrm{pr}_{G,*} : H^*_{G,c}(M \times N)[d_M] \longrightarrow H^*_{G,c}(N)$$
vérifiant l'égalité caractéristique
$$\int_{M\times N} \nu \wedge (\mathrm{pr}^*\mu) = \int_N (\varphi_{G*}\nu) \wedge \mu\,, \quad \forall \nu \in H_{G,c}(M \times N)\,,\ \forall \mu \in H_G(N)\,,$$

8.3. Projection d'un fibré vectoriel orienté sur sa base. Soit (π, E, B) un fibré vectoriel orienté de fibre notée F. On rappelle que l'intégration sur les fibres est un morphisme de complexes $\int_F : \Omega_c(E) \to \Omega_c(B)$ tel que si $\psi : E \to E$ est un isomorphisme qui transforme fibre en fibre alors $\int_F \circ \psi^* = \psi^* \circ \int_F$. Donc, si (π, E, B) est un fibré G-équivariant, le morphisme de complexes $\int_F$ l'est aussi.

Le morphisme $\int_F$ commute aux opérateurs de contraction $\iota(X)$. En effet, comme ces opérateurs sont de nature locale, il suffit (modulo de partitions de l'unité) de le vérifier sur un ouvert de trivialisation de E, *i.e.* sur $\pi^{-1}(U)$ pour U ouvert tel que $\pi^{-1}U \sim F \times U$, auquel on est réduit au cas d'une projection et les raisonnements de 8.2 s'appliquent.

L'application $\int_F : S(G) \otimes \Omega_c(E) \to S(G) \otimes \Omega_c(B)$, définie par $\int_F P \otimes \omega := P \otimes \int_F \omega$ se restreint donc naturellement à une application
$$\int_F : \big(S(\mathfrak{g}) \otimes \Omega_c(E)\big)^G [d_F] \to \big(S(\mathfrak{g}) \otimes \Omega_c(B)\big)^G$$
et cette application est un morphisme de complexes pour la différentielle équivariante. Le morphisme induit en cohomologie équivariante est « *le morphisme de Gysin* π_* », il vérifie l'égalité :
$$\int_E \nu \wedge \pi_*\mu = \int_B \Big(\int_F \nu\Big) \wedge \mu$$
puisqu'il en est ainsi dans le cas non équivariant.

8.4. Inclusion de section nulle d'un fibré vectoriel orienté.

Thom

Classe de thom équivariante. Soit (π, E, B) un fibré vectoriel orienté de fibre notée F. On note $\iota : B \subseteq E$ l'inclusion de la section nulle. On rappelle que le morphisme de Gysin $\pi_* : H_{\mathrm{DR},c}(E)[d_F] \to H_{\mathrm{DR},c}(B)$ coïncide avec le morphisme d'intégration sur les fibres et c'est aussi un **isomorphisme**. En particulier
$$H^i_{\mathrm{DR},c}(E) = 0, \qquad \text{pour tout } i < d_F \tag{$\diamond$}$$

Proposition. *On suppose le groupe G compact et connexe.*

a) *Il existe un cocycle équivariant homogène de degré total d_F*

$$\tilde{\Phi} = \Phi^{[d_F]} + \Phi^{[d_F-2]} + \Phi^{[d_F-4]} + \cdots$$

avec $\Phi^{[i]} \in \big(S(\mathfrak{g}) \otimes \Omega_c^i(E)\big)^G$ et où $\Phi^{[d_F]} \in \Omega_c^{d_F}(E)^G$ est un cocycle représentant la classe de Thom de E.

b) *L'application*

$$\begin{array}{ccc} \big(S(\mathfrak{g}) \otimes \Omega_c^*(B)\big)^G & \xrightarrow{\varphi_{G,*}} & \big(S(\mathfrak{g}) \otimes \Omega_c^*(E)\big)^G[d_F] \\ \nu & \xmapsto{\varphi_{G,*}} & \tilde{\Phi} \wedge \pi^*\nu \end{array}$$

commute aux différentielles équivariantes.

Preuve. Notons $n = d_F$. Comme G est connexe et compact, il existe un représentant $\Phi^{[n]} \in \Omega_c^n(E)$ de la classe de Thom qui est G-invariant ; dans ce cas

$$D(\Phi^{[n]}) = d(\Phi^{[n]}) + c(X)\Phi^{[n]} = c(X)\Phi^{[n]}$$

Or, $c(X)\Phi \in \big(S(\mathfrak{g}) \otimes \Omega_c^{d_{M_\mathfrak{g}}-1}(E)\big)^G$ et même $dc(X)\Phi = L(X)\Phi = 0$. Or, d'après ($\diamond$) et toujours grâce à la compacité et connexité de G, il existe $\Phi^{[n-2]} \in \big(S(\mathfrak{g}) \otimes \Omega_c^{n-2}(E)\big)^G$ tel que $c(X)\Phi^n = d\Phi^{n-2}$. L'égalité ($\diamond$) nous permet donc de construire de proche en proche le cocycle G-équivariant $\tilde{\Phi}$. ∎

Définition. On appellera « *morphisme de Gysin équivariant associé à l'inclusion $\iota : B \subseteq E$* » l'application

$$H^*_{G,c}(B) \xrightarrow{\iota_{G,*}} H^*_{G,c}(E)[d_F]$$

induite par le morphisme de complexes $\varphi_{G,*}$ de l'assertion (b) dans la proposition précédente.

Remarque. L'égalité caractéristique

$$\int_B \nu \wedge (\iota^*\mu) = \int_E (\iota_*\nu) \wedge \mu, \quad \forall \nu \in H_{G,c}(B),\ \forall \mu \in H_G(E),$$

est vérifiée. En effet, comme le morphisme $\pi^* : H_{\mathrm{DR}}(B) \to H_{\mathrm{DR}}(E)$ est bijectif, on a $\mu = \pi^*\nu'$ avec $\nu' \in \Omega(B)$ auquel cas il suffit de vérifier

$$\int_B \nu \wedge \nu' = \int_E \tilde{\Phi} \wedge p^*(\nu \wedge \nu'), \quad \forall \nu \in H_{G,c}(B),\ \forall \nu' \in H_G(B),$$

égalité qui résulte aussitôt du cas non équivariant.

8.5. Factorisations du morphisme de Gysin équivariant. Nous supposons à partir de maintenant le groupe G connexe et compact.

Dans 7.6 nous avons expliqué comment factoriser une application $f : M \to N$ en composition d'applications pour lesquelles le morphisme de Gysin en cohomologie provient d'un morphisme au niveau de complexes de formes différentielles. Nous avions la factorisation $(\diamond)$:

$$M \xrightarrow{\sigma} U \xrightarrow[\subseteq]{\iota} M \times N \xrightarrow{\mathrm{pr}} N \qquad (\diamond)$$

Dans la cas équivariant, on fait opérer G sur $M \times N$ coordonnée par coordonnée, on munit $M \times N$ d'une métrique riemannienne G-invariante (G est compact !), on identifié M à la sous-variété $\mathrm{Gr}(f)$ qui est une sous-variété fermée G-stable de $M \times N$, et on fixe un voisinage tubulaire G-stable U de M. La factorisation $(\diamond)$ est alors G-équivariante et réalise f comme composée d'applications admettant, chacune, un morphisme de Gysin équivariant. Dans ce qui précède seul le choix de l'ouvert U est non canonique. Or, l'ensemble des voisinages tubulaires de M est filtrant inférieurement et si on a deux tels voisinages $M \subseteq U_1 \subseteq U_2 \subseteq M \times N$, d'injections canoniques notées $\iota_i : U_i \hookrightarrow M \times N$ et $\iota_1^2 : U_1 \hookrightarrow U_2$, on a

$$\iota_{1G*} := \iota_{2G*} \circ \iota^2_{1G*}$$

avec en plus ι^2_{1G*} est bijectif. Ceci suffit pour conclure que la composée

$$\boxed{f_{G*} := \mathrm{pr}_{G*} \circ \iota_{G*} \circ \sigma_{G*}} \qquad (\star\star)$$

est indépendante de U ; c'est le « *morphisme de Gysin équivariant associé à f* ». Nous avons ainsi prouvé

8.6. Théorème

a) *Pour toute application $f : M \to N$ le morphisme de Gysin*

$$f_{G*} : H_{G,c}(M)[d_M] \longrightarrow H_{G,c}(N)[d_N]$$

vérifie

$$\int_M \nu \wedge f^*(\mu) = \int_N f_{G*}(\nu) \wedge \mu \qquad (\diamond)$$

pour tous $\nu \in H_{G,c}(M)$ et $\mu \in H_G(N)$.

b) *Étant donnés $f : M \to N$ et $g : N \to L$, on a $g_{G*} \circ f_{G*} = (g \circ f)_{G*}$.*

c) $(\mathrm{id}_N)_{G*} = \mathrm{id}_{H_{G,c}(N)}$

Preuve. L'énoncé (a) est clair par construction. Pour (b), on complète le diagramme :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\mathrm{gr}(f)"] & M \times N \arrow[d, "\mathrm{pr}"] & \\ & N \arrow[r, "\mathrm{gr}(g)"] & N \times L \arrow[d, "\mathrm{pr}"] \\ & & L \end{tikzcd}$$

en

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\mathrm{gr}(f)"] & M \times N \arrow[r, "\mathrm{id} \times \mathrm{gr}(g)"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_2"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & M \times N \times L \arrow[d, "\mathrm{pr}_{23}"] \\ & N \arrow[r, "\mathrm{gr}(g)"'] & N \times L \arrow[d, "\mathrm{pr}_2"] \\ & & L \end{tikzcd}$$

où le sous-diagramme des morphisme de Gysin équivariants issu de ($\square$) est clairement commutatif. Il en est de même pour le diagramme des morphismes de Gysin issu du diagramme commutatif de projections

$$\begin{tikzcd} M \times N \times L \arrow[r, "\mathrm{pr}_{13}"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_{23}"'] & M \times L \arrow[d, "\mathrm{pr}_2"] \\ N \times L \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"] & L \end{tikzcd}$$

L'égalité

$$g_{G*} \circ f_{G*} = \mathrm{pr}_{2G*} \circ (f, g \circ f)_{G*} = (g \circ f)_{G*}$$

s'ensuit et la proposition est démontrée. ∎

§ 9. Miscellanées

Remarque de A. Borel dans le § 3 du chapitre IV de [Bor].

§ 10. Références bibliographiques

[BT] R. Bott, L.W. Tu. "*Differential forms in algebraic topology*" ; Graduate Texts in Mathematics, 82. Springer-Verlag, New York-Berlin (1982).

[Bor] A. Borel. "*Seminar on transformation groups*" ; With contributions by G. Bredon, E. E. Floyd, D. Montgomery, R. Palais. Annals of Mathematics Studies, No. 46. Princeton University Press, Princeton, N.J. (1960).

[C_1] H. Cartan. Notions d'algèbre différentielle ; application aux groupes de Lie et aux variétés où opère un groupe de Lie ; Colloque de topologie (espaces fibrés), Bruxelles 1950, pp. 15–27 (1951).

[C_2] H. Cartan. La transgression dans un groupe de Lie et dans un espace fibré principal ; Colloque de topologie (espaces fibrés), Bruxelles 1950, pp. 15–27 (1951).

———×———

J. L. Brylinski, Equivariant Intersection Cohomology, IHES, 1986