HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

présentée à

L'UNIVERSITÉ PARIS 7 - DENIS DIDEROT

par

Alberto ARABIA

Spécialité : Mathématiques

COHOMOLOGIE ÉQUIVARIANTE
COHOMOLOGIE DE MONSKY-WASHNITZER
ÉQUIVALENCE DE GREEN & QUASI-PROJECTIFS

Soutenue à Paris le 21 octobre 2002 devant le jury

Michèle Vergne	Paris 7
Zoghman Mebkhout	Paris 7
Michel Brion	*Institut Fourier*, Grenoble I
Michel Duflo	Paris 7
Patrick Polo	*LAGA*, Paris 13
Eric Vasserot	Cergy-Pontoise

Remerciements

À la mémoire de ma Mère

À Michel Brion, Michel Duflo, Zoghman Mebkhout, Patrick Polo, Éric Vasserot et Michèle Vergne, qui m'ont fait l'honneur de présider cette soutenance.

Zoghman Mebkhout, Michèle Vergne et Marie-France Vigneras ont présenté mes travaux lors de ma demande d'habilitation à diriger des recherches ; Michel Brion, Arthur Ogus et Patrick Polo les ont rapportés. Sur le plan de la recherche scientifique : Michèle Vergne, Marie-France Vigneras et Zoghman Mebkhout sont à l'origine de mes travaux en cohomologie équivariante, autour de l'équivalence de Green et en cohomologie de Monsky-Washnitzer respectivement.

Je suis heureux de leur exprimer publiquement ma reconnaissance.

Dans mes années de travail à Jussieu et à Chevaleret j'ai bénéficié de nombreux services généraux, indispensables à la recherche, dont le bon fonctionnement est le résultat d'un énorme travail fait par quelques personnes. Qu'elles trouvent toutes ici mes sincères remerciements. En ce sens, je voudrais citer Odile Vigeannel-Larive à qui nous devons notre excellente Bibliothèque de Mathématiques, et l'équipe des ingénieurs, dirigée par Joël Marchand, qui maintient notre réseau informatique à un degré de performances remarquable.

Dans le même ordre d'idées, je remercie Monique Douchez de s'occuper si admirablement de la gestion de notre équipe. C'est une aubaine et un bonheur de pouvoir compter sur elle.

Je remercie le CNRS, l'Institut de Mathématiques de Jussieu, l'UFR de Mathématiques de Paris 7 ainsi que l'équipe de "Théorie des Groupes" en la personne de son directeur Paul Gérardin.

Un clin d'œil à Michèle Wasse !

Il serait bien long de citer toutes les personnes auxquelles je me sens redevable ou lié d'amitié et je ne pourrais en citer une sans les citer toutes. Depuis des années, des projets, des discussions, des rencontres amicales, m'ont réuni avec beaucoup parmi vous au delà d'une simple relation professionnelle. Cela m'a apporté et m'apporte énormément. Je vous en suis très sincèrement reconnaissant. Merci...

Travaux et Perspectives

Alberto Arabia*

On trouvera dans ce mémoire une description des sujets qui représentent le mieux mes centres d'intérêt mathématique et de travail de recherche. Dans chaque sujet, je rappelle mes contributions dont j'indique des conséquences permettant de mieux juger de leur intérêt. Tout énoncé sans référence explicite rentrera dans cette catégorie.

On remarquera que le thème commun de mes travaux est celui de la cohomologie. C'est un thème qui m'a toujours intéressé, aussi bien comme cadre général de travail dans la conception de Grothendieck des catégories et foncteurs dérivés, que comme outil : en théorie des groupes et algèbres de Lie, en théorie des singularités, et pour ce qui se rapporte au programme des recherches de Zoghman Mebkhout autour de la factorisation de la fonction Zêta d'une variété affine non singulière sur un corps fini ; sujet auquel je m'intéresse seulement depuis quelques années suite aux fréquentes discussions avec Mebkhout, toujours éclairantes, dont j'ai pu bénéficier à l'occasion des séances de calcul sur ordinateur, d'un cours de troisième cycle et de certaines questions ouvertes dans sa recherche sur lesquelles je réfléchis actuellement.

Voici le sommaire du contenu proprement dit du mémoire.

*CNRS – Institut de Mathématiques de Jussieu – Université de Paris 7 - Denis Diderot.
Laboratoire de Théorie des Groupes, Représentations et Applications.
UFR de Mathématiques de l'Université Paris 7 – Denis Diderot.
175, rue du Chevaleret, 9e étage, bureau 9D11, 75013 Paris.
Adresse électronique : `arabia@math.jussieu.fr`

§ 1. Cohomologie équivariante

Mes contributions en cohomologie équivariante concernent les trois thèmes suivants :

- Interprétation en cohomologie de de Rham équivariante des variétés de drapeaux des opérateurs de Bernstein-Gelfand-Gelfand et des polynômes de Schubert.
- Anneau de cohomologie singulière $\boldsymbol{T}$-équivariante à coefficients entiers des sous-variétés de Schubert des variétés de drapeaux des groupes de Kač-Moody. Interprétation des opérateurs de Demazure et de Bernstein-Gelfand-Gelfand.
- Généralisation de la classe d'Euler équivariante pour un point fixe isolé d'une variété algébrique complexe munie de l'action d'un tore. Cette généralisation est indépendante des conditions de lissité locale et s'applique à des situations où la définition habituelle de la classe d'Euler n'a pas de sens.

  La classe d'Euler équivariante généralisée d'un point fixe isolé d'une variété algébrique complexe est représentée par une fraction rationnelle à un nombre fini de variables et coefficients rationnels. Ces fractions sont intéressantes à plusieurs titres. Je me suis particulièrement intéressé au rapport qui existe entre la forme de cette fraction rationnelle et le fait que la variété est ou n'est pas lisse au voisinage du point en question. Je donne quelques critères de lissités algébrique et rationnelle en termes de ces classes. Dans le cas des variétés de Schubert, les descriptions explicites des classes d'Euler équivariantes généralisées que j'avais donées dans ma thèse rendent ces critères de lissité effectifs.

La suite décrit avec beaucoup plus de précisions chacun de ces sujets.

1.1 Cohomologie singulière équivariante

Soit $\boldsymbol{G}$ un groupe topologique. Un « *$\boldsymbol{G}$-espace (à droite, à gauche)* » est un espace topologique muni d'une action continue de $\boldsymbol{G}$ (à droite, à gauche). Un « *fibré principal de groupe $\boldsymbol{G}$* » est un $\boldsymbol{G}$-espace à droite $\mathbb{E}$ sur lequel $\boldsymbol{G}$ opère librement ; le quotient $\mathbb{B} := \mathbb{E}/\boldsymbol{G}$ est la « *base du fibré principal* ». Un « *espace universel pour $\boldsymbol{G}$* », est un fibré principal $\mathbb{E}\boldsymbol{G}$, topologiquement contractile, sur lequel $\boldsymbol{G}$ opère librement (il en existe toujours d'après Milnor [Mil]) ; sa base $\mathbb{B}\boldsymbol{G}$ est un « *espace classifiant pour $\boldsymbol{G}$* ». Cette terminologie provient de la théorie des fibrés principaux. Un fibré universel pour $\boldsymbol{G}$ possède la propriété fondamentale suivante. *Pour tout fibré principal $\mathbb{E}$ de groupe $\boldsymbol{G}$ et base $\mathbb{B}$, il existe une application continue $f : \mathbb{B} \to \mathbb{B}\boldsymbol{G}$, unique à homotopie près, telle que $\mathbb{E} \simeq f^{-1}\mathbb{E}\boldsymbol{G}$:*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{E} \simeq f^{-1}\mathbb{E}\boldsymbol{G} \arrow[d, two heads, "\boldsymbol{G}"] & & \mathbb{E}\boldsymbol{G} \arrow[d, two heads, "\boldsymbol{G}"] \\ \mathbb{B} = \mathbb{B} \arrow[rr, "f"] & & \mathbb{B}\boldsymbol{G} \end{tikzcd}$$

L'ensemble des classes d'homotopie d'applications continues de $\mathbb{B}$ vers $\mathbb{B}\boldsymbol{G}$ paramètre ainsi les classes d'isomorphie de fibrés principaux de groupe $\boldsymbol{G}$ et base $\mathbb{B}$, ce qui justifie d'appeler « *classifiant* » l'espace $\mathbb{B}\boldsymbol{G}$.

Une conséquence de cette propriété universelle est que deux espaces classifiants pour $\boldsymbol{G}$ sont toujours homotopiquement équivalents et leurs cohomologies sont canoniquement isomorphes. Plus généralement, pour tout fibré principal $\mathbb{E}$ de groupe $\boldsymbol{G}$ et base $\mathbb{B}$, le homomorphisme $H^*(f) : H^*(\mathbb{B}\boldsymbol{G}) \to H^*(\mathbb{B})$ est canonique, c'est le « *homomorphisme caractéristique de* $\mathbb{E}$ », il sera noté :

$$\gamma_{\mathbb{E}}^{\boldsymbol{G}} : H^*(\mathbb{B}\boldsymbol{G}) \to H^*(\mathbb{B})\,.$$

L'image de $\gamma_{\mathbb{E}}^{\boldsymbol{G}}$ est la « *sous-algèbre caractéristique de* $\mathbb{E}$ *dans* $H^*(\mathbb{B})$ », ses éléments sont les « *classes caractéristiques de* $\mathbb{E}$ ».

Pour tout $\boldsymbol{G}$-espace $\boldsymbol{X}$, l'action « *diagonale* » de $\boldsymbol{G}$ sur $\mathbb{E}\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{X}$, *i.e.* l'action définie par $(m,x)\cdot g := (mg, g^{-1}x)$, fait de $\mathbb{E}\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{X}$ un fibré principal de groupe $\boldsymbol{G}$; la classe d'homotopie de sa base $\boldsymbol{X_G}$ (notée et aussi $\mathbb{E}\boldsymbol{G}\times_{\boldsymbol{G}}\boldsymbol{X}$) est indépendante du choix du fibré universel $\mathbb{E}\boldsymbol{G}$. Lorsque $\boldsymbol{X}$ est le $\boldsymbol{G}$-espace réduit à un point '$\bullet$', on a $\bullet_{\boldsymbol{G}} = \mathbb{B}\boldsymbol{G}$. Enfin, pour toute application continue $\boldsymbol{G}$-équivariante entre $\boldsymbol{G}$-espaces $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$, l'application $f_{\boldsymbol{G}} : \boldsymbol{X_G} \to \boldsymbol{Y_G}$ définie par $f_{\boldsymbol{G}}\big(\overline{(m,x)}\big) := \overline{(m, f(x))}$ est continue. On a des diagrammes commutatifs :

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{X} \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads, "c_{\boldsymbol{X}}"'] \arrow[dr, phantom, "\bigoplus"] & \boldsymbol{Y} \arrow[d, two heads, "c_{\boldsymbol{Y}}"] \\ \bullet \arrow[r, equal, "\mathrm{id}"'] & \bullet \end{tikzcd} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{tikzcd} \boldsymbol{X_G} \arrow[r, "f_G"] \arrow[d, two heads, "c_{\boldsymbol{X};G}"'] \arrow[dr, phantom, "\bigoplus"] & \boldsymbol{Y_G} \arrow[d, two heads, "c_{\boldsymbol{Y};G}"] \\ \bullet_{\boldsymbol{G}} \arrow[r, equal, "\mathrm{id}"'] & \bullet_{\boldsymbol{G}} \end{tikzcd}$$

La correspondance $\boldsymbol{X} \rightsquigarrow \boldsymbol{X_G}$, $f \rightsquigarrow f_{\boldsymbol{G}}$ est fonctorielle de la catégorie $\mathscr{T}\!op_{\bullet}(\boldsymbol{G})$ des $\boldsymbol{G}$-espaces (basés sur un point), où les morphismes sont les applications continues $\boldsymbol{G}$-équivariantes, vers la catégorie $\mathscr{T}\!op_{\bullet_{\boldsymbol{G}}}$ des espaces topologiques basés sur $\bullet_{\boldsymbol{G}}$.

La « *cohomologie (singulière)* $\boldsymbol{G}$*-équivariante à coefficients dans un anneau* $\boldsymbol{A}$ » est, par définition, la cohomologie singulière de $\boldsymbol{X_G}$ à coefficients dans $\boldsymbol{A}$, *i.e.*

$$\boxed{H_{\boldsymbol{G}}^*(\boldsymbol{X};\boldsymbol{A}) := H^*(\boldsymbol{X_G};\boldsymbol{A})}$$

La cohomologie $\boldsymbol{G}$-équivariante est un foncteur contravariant de $\mathscr{T}\!op_{\bullet}(\boldsymbol{G})$ vers la catégorie des $H_{\boldsymbol{G}}^*$-algèbres ; où $H_{\boldsymbol{G}}^*$ est une notation abrégée pour $H_{\boldsymbol{G}}^*(\bullet;\boldsymbol{A})$.

Remarques

- *Lorsque* $\boldsymbol{G} = \{1\}$, *on a trivialement* $H_{\{1\}}^*(\boldsymbol{X};\boldsymbol{A}) = H^*(\boldsymbol{X};\boldsymbol{A})$. *Plus généralement, la projection* $p_2 : \mathbb{E}\times\boldsymbol{X} \twoheadrightarrow \boldsymbol{X}$, $p_2(m,x) = x$, *induit une surjection* $\boldsymbol{X_G} \twoheadrightarrow \boldsymbol{G}\backslash\boldsymbol{X}$ *d'où l'homomorphisme canonique* $H^*(\boldsymbol{G}\backslash\boldsymbol{X};\boldsymbol{A}) \to H_{\boldsymbol{G}}^*(\boldsymbol{X};\boldsymbol{A})$ *qui relie la coho-*

mologie ordinaire de l'espace $\boldsymbol{G}\backslash\boldsymbol{X}$ des $\boldsymbol{G}$-orbites de $\boldsymbol{X}$ à la cohomologie $\boldsymbol{G}$-équivariante de $\boldsymbol{X}$. Ce morphisme est bijectif lorsque $\boldsymbol{G}$ opère librement sur $\boldsymbol{X}$.

- *Pour tout $\boldsymbol{G}$-espace $\boldsymbol{X}$, le morphisme structural de la $H^*_{\boldsymbol{G}}$-algèbre $H^*_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{A})$ est l'homomorphisme caractéristique $\gamma^{\boldsymbol{G}}_{\mathbb{E}\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{X}} : H^*(\mathbb{B}\boldsymbol{G};\boldsymbol{A}) \to H^*(\mathbb{E}\boldsymbol{G}\times_{\boldsymbol{G}}\boldsymbol{X};\boldsymbol{A})$.*

1.1.1 Restriction de groupes en cohomologie équivariante. Un fibré universel $\mathbb{E}\boldsymbol{G}$ pour $\boldsymbol{G}$ est également universel pour tout sous-groupe $\boldsymbol{G}'$ de $\boldsymbol{G}$. En particulier, pour tout $\boldsymbol{G}$-espace $\boldsymbol{X}$, on a une surjection canonique $\mathbb{E}\boldsymbol{G}\times_{\boldsymbol{G}'}\boldsymbol{X} \twoheadrightarrow \mathbb{E}\boldsymbol{G}\times_{\boldsymbol{G}}\boldsymbol{X}$ induisant l'« *homomorphisme de restriction* » entre les cohomologies équivariantes $H^*_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{A}) \to H^*_{\boldsymbol{G}'}(\boldsymbol{X};\boldsymbol{A})$

1.2 Cohomologie de de Rham équivariante

Lorsque $\boldsymbol{G}$ est un groupe de Lie agissant différentiablement sur une variété différentielle $\boldsymbol{M}$, on a la notion de la « *cohomologie de de Rham $\boldsymbol{G}$-équivariante de $\boldsymbol{M}$* » définie par les méthodes décrites par Henri Cartan dans [Crt].

Soient $S(\mathfrak{g}^*)$ l'algèbre des polynômes sur $\mathfrak{g}$ à coefficients complexes et $(\Omega^*(\boldsymbol{M}), d)$ le complexe des formes différentielles sur $\boldsymbol{M}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Le produit tensoriel $S(\mathfrak{g}^*) \otimes_{\mathbb{C}} \Omega^*(\boldsymbol{M})$ est l'algèbre des formes différentielles $\mu(Y) \in \Omega^*(\boldsymbol{M})$, dépendant polynomialement de $Y \in \mathfrak{g}$; elle est munie d'une graduation en posant $\deg(P \otimes \mu) = 2d(P) + d(\mu)$, pour $P \in S(\mathfrak{g}^*)$ et $\mu \in \Omega^*(\boldsymbol{M})$ homogènes de degrés $d(P)$ et $d(\mu)$ respectivement.

L'application $\delta_{\boldsymbol{G}} : S(\mathfrak{g}^*) \otimes \Omega^*(\boldsymbol{M}) \to S(\mathfrak{g}^*) \otimes \Omega^*(\boldsymbol{M})$, définie par :

$$\delta_{\boldsymbol{G}}(\mu)(Y) = d(\mu(Y)) + 2\pi i\, c_Y \mu(Y)\,, \qquad \text{pour chaque } Y \in \mathfrak{g},$$

où c_Y désigne la contraction par le champ de vecteurs associé à l'action infinitésimale de Y sur $\boldsymbol{M}$, est une antidérivation de degré $+1$ qui commute à l'action de $\boldsymbol{G}$ sur $S(\mathfrak{g}^*) \otimes \Omega^*(\boldsymbol{M})$ induite par l'action coadjointe sur $S(\mathfrak{g}^*)$ et par images inverses sur $\Omega^*(\boldsymbol{M})$. La restriction de $\delta_{\boldsymbol{G}}$ à la sous-algèbre des $\boldsymbol{G}$-invariants :

$$\Omega^*_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{M}) := [S(\mathfrak{g}^*) \otimes \Omega^*(\boldsymbol{M})]^{\boldsymbol{G}}\,,$$

c'est-à-dire à la sous-algèbre des formes différentielles $\mu(Y)$ vérifiant :

$$g\cdot(\mu(Y)) = \mu(\mathrm{ad}(g)(Y))\,, \qquad \text{pour tous } g \in \boldsymbol{G} \text{ et } Y \in \mathfrak{g},$$

vérifie $\delta^2_{\boldsymbol{G}} = 0$ puisque $\delta^2_{\boldsymbol{G}}(\mu(Y)) = 2\pi i\, L_Y(\mu(Y))$, où L_Y désigne la dérivée de Lie. Le couple $\big(\Omega^*_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{M}); \delta_{\boldsymbol{G}}\big)$ est une algèbre différentielle graduée, c'est l'« *algèbre des formes différentielles $\boldsymbol{G}$-équivariantes de $\boldsymbol{M}$* », sa cohomologie $H^*_{DR,\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{M};\mathbb{C})$, est l'« *algèbre de cohomologie de de Rham $\boldsymbol{G}$-équivariante de $\boldsymbol{M}$* ».

Les propriétés suivantes découlent aussitôt des définitions :

- $H^*_{DR,\boldsymbol{G}}(\bullet;\mathbb{C}) = S(\mathfrak{g}^*)^{\boldsymbol{G}}$.
- La structure de $H^*_{DR,\boldsymbol{G}}(\bullet;\mathbb{C})$-module de $H^*_{DR,\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{M};\mathbb{C})$ est celle induite par la structure de $S(\mathfrak{g}^*)^{\boldsymbol{G}}$-module de $\Omega^*_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{M})$.
- $H^*_{DR,\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{M};\mathbb{C}) = S(\mathfrak{g}^*)^{\boldsymbol{G}} \otimes_{\mathbb{C}} H_{DR}(\boldsymbol{M};\mathbb{C})$, lorsque $\boldsymbol{G}$ opère trivialement sur $\boldsymbol{M}$.
- $H^*_{DR,\{1\}}(\boldsymbol{M};\mathbb{C}) = H_{DR}(\boldsymbol{M};\mathbb{C})$.

Remarque. *Lorsque $\boldsymbol{G}$ est compact, l'identification classique pour une variété différentiable entre sa cohomologie de de Rham et sa cohomologie singulière (à coefficients complexes) se généralise au contexte équivariant à l'aide des méthodes de* [Crt] *; on a donc un isomorphisme canonique*

$$H^*_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{M};\mathbb{C}) \simeq H^*_{DR,\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{M};\mathbb{C})\,,$$

et en particulier $H^*_{\boldsymbol{G}}(\bullet;\mathbb{C}) \simeq S(\mathfrak{g}^*)^{\boldsymbol{G}}$.

1.2.1 Restriction de groupes en cohomologie de de Rham équivariante. Soit $\boldsymbol{G}'$ un sous-groupe fermé du groupe de Lie $\boldsymbol{G}$. La restriction des fonctions polynomiales sur $\mathfrak{g}$ à $\mathfrak{g}'$ induit un morphisme de complexes : $(\Omega^*_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X}),\delta_{\boldsymbol{G}}) \to (\Omega^*_{\boldsymbol{G}'}(\boldsymbol{X}),\delta_{\boldsymbol{G}'})$ qui donne lieu à l'« *homomorphisme de restriction de groupes en cohomologie de de Rham équivariante* » $\rho^{\boldsymbol{G}}_{\boldsymbol{G}'} : H^*_{DR,\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X}) \to H^*_{DR,\boldsymbol{G}'}(\boldsymbol{X})$ correspondant, modulo l'isomorphisme de le remarque précédente, à l'homomorphisme de restriction de groupes en cohomologie singulière équivariante de la section 1.1.1.

Lorsque $\boldsymbol{G}' = \{1\}$, on a $S(\mathfrak{g}') = \mathbb{C}$ et la restriction de $S(\mathfrak{g}^*)$ à $S(\mathfrak{g}'^*)$ coïncide avec le morphisme d'évaluation à l'origine $P \mapsto P(0)$, pour cette raison on notera 'v_0' ce qu'on aurait dû noter $\rho^{\boldsymbol{G}}_{\{1\}}$.

1.3 Cohomologie de de Rham équivariante des variétés de drapeaux

Soit $\boldsymbol{G}$ un groupe de Lie complexe semi-simple connexe, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Soient $\boldsymbol{K}$ un sous-groupe compact maximal de $\boldsymbol{G}$, d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$ et σ l'involution associée. Soient $\boldsymbol{H}$ un sous-groupe de Cartan de $\boldsymbol{G}$, σ-invariant, d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ et $\boldsymbol{B}$ un sous-groupe de Borel de $\boldsymbol{G}$ contenant $\boldsymbol{H}$, on note Δ_+ et Σ respectivement les systèmes de racines positives et simples correspondants à ces choix. Soient $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{K} \cap \boldsymbol{H}$, tore maximal de $\boldsymbol{K}$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{t}$, de normalisateur $\boldsymbol{T}' = N_{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{T})$, et $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{T}'/\boldsymbol{T}$ le groupe de Weyl muni de l'ordre de Bruhat-Ehresmann '$\preccurlyeq$' défini par Σ. On note $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{G}/\boldsymbol{B} = \boldsymbol{K}/\boldsymbol{T}$ la « *variété des drapeaux de $\boldsymbol{G}$* », elle est munie de l'action naturelle de $\boldsymbol{K}$ (et donc de $\boldsymbol{T}$ et $\boldsymbol{T}'$) à gauche. L'ensemble $\boldsymbol{X}^{\boldsymbol{T}}$ des points fixes de $\boldsymbol{X}$ sous l'action de $\boldsymbol{T}$ est $\boldsymbol{T}'/\boldsymbol{T} = \boldsymbol{W}$.

Dans [A_2,A_0], on généralise les constructions et théorèmes de l'article de Bernstein-Gelfand-Gelfand [BGG], qui concerne la cohomologie ordinaire de $\boldsymbol{X}$, au contexte de la cohomologie de de Rham équivariante de $\boldsymbol{X}$.

1.3.1 La famille des formes linéaires $\mathscr{L}_{\boldsymbol{w}}$. La décomposition $\boldsymbol{X} = \coprod_{w\in\boldsymbol{W}} \boldsymbol{X}_w$, où $\boldsymbol{X}_w = \boldsymbol{B}w\boldsymbol{B}/\boldsymbol{B}$ est une « *cellule de Schubert* » : espace affine isomorphe à $\mathbb{C}^{\ell(w)}$, munit $\boldsymbol{X}$ d'une structure de CW-complexe où toutes les cellules sont de dimension paire. L'adhérence $\overline{\boldsymbol{X}}_w$ d'une cellule $\boldsymbol{X}_w$ définit le « *cycle de Schubert* » $\sigma_w \in H_{2\ell(w)}(\boldsymbol{X};\mathbb{Z})$ et la famille $\{\sigma_w\}_{w\in\boldsymbol{W}}$ est une base (homogène) du $\mathbb{Z}$-module $H^*(\boldsymbol{X};\mathbb{Z})$.

Les formes $\mathbb{C}$-linéaires

$$\begin{aligned} H_{DR}^{2\ell(w)}(\boldsymbol{X};\mathbb{C}) &\xrightarrow{\langle\sigma_w,\text{—}\rangle} \mathbb{C} \\ \mu &\longmapsto \int_{\boldsymbol{X}_w} \mu|_{\boldsymbol{X}_w} \end{aligned}$$

jouent un rôle central dans [BGG] et leurs analogues en cohomologie de de Rham équivariante sont les formes $S(\mathfrak{t}^*)$-linéaires notées $\mathscr{L}_w$:

$$\begin{aligned} H_{DR,\boldsymbol{T}}^{*}(\boldsymbol{X};\mathbb{C}) &\xrightarrow[\langle\sigma_w,\text{—}\rangle]{\mathscr{L}_w} H_{DR,\boldsymbol{T}}^{*-2\ell(w)}(\bullet;\mathbb{C}) \subseteq S(\mathfrak{t}^*) \\ \mu(Y) &\longmapsto \int_{\boldsymbol{X}_w} \mu(Y)|_{\boldsymbol{X}_w} \end{aligned}$$

1.3.2 Homomorphisme de Chern-Weil en cohomologie équivariante. L'autre ingrédient fondamental dans [BGG] est l'homomorphisme de Chern-Weil qui réalise $H_{DR}^*(\boldsymbol{X};\mathbb{C})$ comme quotient de l'anneau $S(\mathfrak{t}^*)$. On rappelle à continuation sa définition habituelle et sa généralisation en cohomologie équivariante.

Soit θ une connexion $\boldsymbol{K}$-invariante de la fibration principale $\pi : \boldsymbol{K} \twoheadrightarrow \boldsymbol{K}/\boldsymbol{T} = \boldsymbol{X}$, de dérivée covariante ∇ et courbure $\nabla(\theta)$. Pour tout $P \in S(\mathfrak{t}^*)$ le cocycle $P(-\nabla(\theta)/2\pi i) \in \Omega^*(\boldsymbol{K})$ provient de $\boldsymbol{X}$, *i.e.* est de la forme $\pi^*\mu$ pour un (unique) cocycle $\mu \in \Omega^*(\boldsymbol{X})$. On note $\overline{P}(-\nabla(\theta)/2\pi i) \in H_{DR}^*(\boldsymbol{X};\mathbb{C})$ la classe de cohomologie déterminée par μ. L'application :

$$\begin{aligned} S(\mathfrak{t}^*) &\xrightarrow{\mathscr{Ch}} H_{DR}^*(\boldsymbol{X};\mathbb{C}) \\ P &\longmapsto \overline{P}\big(-\nabla(\theta)/2\pi i\big)\,, \end{aligned}$$

est un homomorphisme indépendant de la connexion θ choisie ; c'est l'« *homomorphisme de Chern-Weil* ».

Nicole Berline et Michèle Vergne généralisent cette construction au contexte équivariant en faisant intervenir l'application moment $\boldsymbol{K} \ni k \xmapsto{J_Y} \theta(Y_{\boldsymbol{K}})(k) \in \mathfrak{t}$, où $Y_{\boldsymbol{K}}$ dénote le champ de vecteurs associé à l'action infinitésimale à gauche de $Y \in \mathfrak{k}$ sur $\boldsymbol{K}$. Elles remarquent que pour $P \in S(\mathfrak{t}^*)$ et $Y \in \mathfrak{k}$, la forme différentielle $P\big(-J_Y - \nabla(\theta)/2\pi i\big) \in \Omega^*(\boldsymbol{K})$ est de la forme $\pi^*(\mu(Y))$, où $\mu(Y)$ est un cocycle du complexe $\big(\Omega^*_{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{X}),\delta_{\boldsymbol{K}}\big)$. Notons $\overline{P}\big(-J_Y - \nabla(\theta)/2\pi i\big)$ la classe de cohomologie de de Rham $\boldsymbol{K}$-équivariante de $\boldsymbol{X}$ déterminée par $\mu(Y)$. Comme dans le cas classique, l'application :

$$\begin{aligned} S(\mathfrak{t}^*) &\xrightarrow{\mathscr{Ch}_K} H_{DR,\boldsymbol{K}}^*(\boldsymbol{X};\mathbb{C}) \\ P &\longmapsto \overline{P}\big(-J_Y - \nabla(\theta)/2\pi i\big)\,, \end{aligned}$$

est un homomorphisme indépendant de la connexion choisie ([BV]) ; c'est l'« *homomorphisme de Chern-Weil en cohomologie $\boldsymbol{K}$-équivariante* ».

Pour tout sous-groupe fermé $\boldsymbol{K'} \subseteq \boldsymbol{K}$, le même procédé donne lieu à l'homomorphisme de Chern-Weil en cohomologie $\boldsymbol{K'}$-équivariante $\mathscr{C}\!\boldsymbol{h}_{\boldsymbol{K'}} : S(\mathfrak{t}^*) \to H^*_{DR,\boldsymbol{K'}}(\boldsymbol{X};\mathbb{C})$; il coïncide avec la composée

$$\begin{tikzcd} S(\mathfrak{t}^*) \arrow[r, "\mathscr{C}\!\boldsymbol{h}_{\boldsymbol{K}}"] \arrow[rr, bend right, "\mathscr{C}\!\boldsymbol{h}_{\boldsymbol{K'}}"'] & H^*_{DR,\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{X};\mathbb{C}) \arrow[r, "\rho^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{K'}}"] & H^*_{DR,\boldsymbol{K'}}(\boldsymbol{X};\mathbb{C}) \end{tikzcd}$$

En particulier, $\mathscr{C}\!\boldsymbol{h}$ et $\mathscr{C}\!\boldsymbol{h}_{\boldsymbol{K}}$ sont reliés par $v_0 : H^*_{DR,\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{X};\mathbb{C}) \to H^*_{DR}(\boldsymbol{X};\mathbb{C})$ et le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd} S(\mathfrak{t}^*) \arrow[r, "\mathscr{C}\!\boldsymbol{h}_{\boldsymbol{K}}"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\bigoplus"] & H^*_{DR,\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{X};\mathbb{C}) \ni \mu(Y) \arrow[d, "v_0"'] \\ S(\mathfrak{t}^*) \arrow[r, "\mathscr{C}\!\boldsymbol{h}"] & H^*_{DR}(\boldsymbol{X};\mathbb{C}) \ni \mu(0) \end{tikzcd}$$

1.3.3 Le programme de $[\mathbf{A_2},\mathbf{A_0}]$. Les éléments introduits dans les paragraphes précédents se retrouvent rassemblés dans le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} S(\mathfrak{t}^*) \arrow[r, "\mathscr{C}\!\boldsymbol{h}_{\boldsymbol{K}}"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\bigoplus"] & H^*_{DR,\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{X};\mathbb{C}) \arrow[r, "\rho^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{T}}"] \arrow[d, "v_0"] \arrow[dr, phantom, "\bigoplus"] & H^*_{DR,\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{X};\mathbb{C}) \arrow[r, "\mathscr{L}_w", "\langle\sigma_w{,}-\rangle"'] \arrow[d, "v_0"] \arrow[dr, phantom, "\bigoplus"] & S(\mathfrak{t}^*) \ni P(Y) \arrow[d, "v_0"] \\ S(\mathfrak{t}^*) \arrow[r, two heads, "\mathscr{C}\!\boldsymbol{h}"] & H^*_{DR}(\boldsymbol{X};\mathbb{C}) \arrow[r, equal] & H^*_{DR}(\boldsymbol{X};\mathbb{C}) \arrow[r, "\langle\sigma_w{,}-\rangle"] & \mathbb{C} \ni P(0)\,, \end{tikzcd} \qquad (\mathscr{D})$$

où la deuxième ligne, qui représente le cas classique (non équivariant) a été étudiée par Bernstein-Gelfand-Gelfand ([BGG]). L'objet principal de leur travail est la détermination d'une famille de polynômes $\{P^w\}_{w\in\boldsymbol{W}} \subseteq S(\mathfrak{t}^*)$, les « *polynômes de Schubert* », réalisant la base duale de la base des cycles de Schubert via l'homomorphisme de Chern-Weil $\mathscr{C}\!\boldsymbol{h}$ dont on connaissait la surjectivité et le noyau depuis la thèse de A. Borel ([B$_0$]). Les polynômes de Schubert vérifient :

$$\langle\sigma_v, \mathscr{C}\!\boldsymbol{h}(P^w)\rangle = \delta^w_v\,, \quad \text{pour tous } v,w \in \boldsymbol{W}.$$

Le but de [A$_2$,A$_0$] est l'étude du diagramme ($\mathscr{D}$) dans sa globalité en portant un intérêt particulier à la ligne équivariante où les généralisations équivariantes des définitions et théorèmes de [BGG] sont traitées. Le passage du cas équivariant au cas classique se fait à l'aide du résultat suivant :

Proposition ([$\mathbf{A_0}$]). *Soit $\boldsymbol{K}$ un groupe de Lie compact et connexe, d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$ opérant à gauche sur une variété $\boldsymbol{M}$ dont la cohomologie rationnelle est nulle en degrés* *impaires. L'homomorphisme :*

$$\begin{array}{ccc} H^*_{DR,\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{M};\mathbb{C}) & \xrightarrow{v_0} & H^*_{DR}(\boldsymbol{M};\mathbb{C}) \\ \mu(Y) & \longmapsto & \mu(0)\,, \end{array}$$

est alors surjectif *et* ker $\big(v_0\big) = S(\mathfrak{k}^*)^{\boldsymbol{K}}_0 \cdot H^*_{DR,\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{M};\mathbb{C})$, *où* $S(\mathfrak{k}^*)^{\boldsymbol{K}}_0$ *est l'idéal de* $S(\mathfrak{k}^*)^{\boldsymbol{K}}$ *des polynômes s'annulant à l'origine.*

Nous passons maintenant en revue les propriétés les plus remarquables des morphismes de la première ligne du diagramme ($\mathscr{D}$) dans les trois sections suivantes.

1.3.4 Homomorphisme $\mathscr{Ch}_{\boldsymbol{K}}$. A la différence du cas classique, cet homomorphisme est bijectif. A ce sujet, les méthodes de [Crt] appliquées à la définition de Berline-Vergne permettent de démontrer le résultat général suivant qui couvre le cas des groupes de Lie compacts.

Proposition ([$\mathbf{A_0}$]). *Soit* $\boldsymbol{G}$ *un groupe de Lie,* $\boldsymbol{H}$ *un Sous-groupe fermé de* $\boldsymbol{G}$*, d'algèbre de Lie* $\mathfrak{h}$*. On suppose que le fibré principal* $\boldsymbol{G} \twoheadrightarrow \boldsymbol{G}/\boldsymbol{H}$ *admet une connexion* $\boldsymbol{G}$*-invariante* θ*, de dérivée covariante* ∇ *et courbure* $\nabla(\theta)$*. Alors l'homomorphisme de Chern-Weil équivariant*

$$\begin{array}{ccl} S(\mathfrak{h}*)^{\boldsymbol{H}} & \xrightarrow{\mathscr{Ch}_{\boldsymbol{G}}} & H^*_{DR,\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{G}/\boldsymbol{H};\mathbb{C}) \\ P & \longmapsto & \overline{P}\big(-J_Y - \nabla(\theta)/2\pi i\big)\,, \end{array}$$

est un isomorphisme indépendant de la connexion choisie.

1.3.5 Morphisme de restriction de $\boldsymbol{K}$ à $\boldsymbol{T}$ en cohomologies de de Rham équivariante. Soit $\boldsymbol{M}$ une variété différentiable munie d'une action à gauche de $\boldsymbol{K}$. Le morphisme de restriction de groupes $\rho^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{T}}$ se factorise à travers $H^*_{DR,\boldsymbol{T}'}(\boldsymbol{M};\mathbb{C})$ en $\rho^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{T}} = \rho^{\boldsymbol{T}'}_{\boldsymbol{T}} \circ \rho^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{T}'}$:

$$\begin{tikzcd} H^*_{DR,\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{M};\mathbb{C}) \arrow[r, "\rho^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{T}'}"] \arrow[rr, bend right, "\rho^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{T}}"'] & H^*_{DR,\boldsymbol{T}'}(\boldsymbol{M};\mathbb{C}) \arrow[r, "\rho^{\boldsymbol{T}'}_{\boldsymbol{T}}"] & H^*_{DR,\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{M};\mathbb{C}) \end{tikzcd}$$

Les méthodes de [Crt] permettent de démontrent que $\rho^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{T}'}$ est bijectif ([A_0]) ([1]), et le $\rho^{\boldsymbol{T}'}_{\boldsymbol{T}}$ s'identifie, par ailleurs, à l'inclusion $H^*_{DR,\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{M};\mathbb{C})^{\boldsymbol{W}} \subseteq H^*_{DR,\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{M};\mathbb{C})$ dans la mesure où $\Omega^*_{\boldsymbol{T}'}(\boldsymbol{M})$ est homotope à $\Omega^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{M})^{\boldsymbol{W}}$ et donc $H^*_{DR,\boldsymbol{T}'}(\boldsymbol{M};\mathbb{C}) = H^*_{DR,\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{M};\mathbb{C})^{\boldsymbol{W}}$.

1.3.6 Applications $\mathscr{L}_{\boldsymbol{w}}$ et opérateurs de Bernstein-Gelfand-Gelfand. Le théorème suivant, résultat principal de [A_0,A_2], répond à une question de Michèle Vergne à propos des applications $\mathscr{L}_w$.

[1] Lorsque $\boldsymbol{M}$ est réduite à un point, on retrouve l'isomorphisme de Chevalley $S(\mathfrak{k}^*)^{\boldsymbol{K}} = H^*_{\boldsymbol{K}}(\bullet;\mathbb{C}) \simeq H^*_{\boldsymbol{T}'}(\bullet;\mathbb{C}) = S(\mathfrak{t}^*)^{\boldsymbol{W}}$, bien connu en théorie des groupes.

Théorème ([$\mathbf{A_0}$,$\mathbf{A_2}$])

a) *Soient $\alpha \in \Sigma$, $r_\alpha \in \boldsymbol{W}$ la réflexion associée à α et $w \in \boldsymbol{W}$. On suppose que $r_\alpha w > w$ avec, alors :*

$$\boxed{\mathscr{L}_{r_\alpha w} = A_\alpha \circ \mathscr{L}_w}$$

où A_α est l'opérateur agissant sur $S(\mathfrak{t}^*)$ défini dans [BGG] *par :*

$$A_\alpha(P) = \frac{r_\alpha{\cdot}P - P}{\alpha}\,, \quad \textit{pour tout } P \in S(\mathfrak{t}^*).$$

b) *Si $r_{\alpha_1}\cdots r_{\alpha_\ell}$ est une décomposition réduite de w, alors :*

$$\boxed{\mathscr{L}_w \circ \boldsymbol{\mathscr{C}h_T} = A_{\alpha_1} \circ \cdots \circ A_{\alpha_\ell}}$$

L'assertion (b) de ce théorème explique très simplement le résultat, démontré dans [BGG] par des méthodes combinatoires, qui établit l'égalité entre les composées

$$A_{\alpha_1} \circ \cdots \circ A_{\alpha_\ell} = A_{\alpha'_1} \circ \cdots \circ A_{\alpha'_\ell}$$

lorsque $r_{\alpha_1}\cdots r_{\alpha_\ell}$ et $r_{\alpha'_1}\cdots r_{\alpha'_\ell}$ sont des décompositions réduites d'un même $w \in \boldsymbol{W}$, ce qui justifie de noter A_w ces composées. Notons $A_e = \mathrm{id}_{S(\mathfrak{t}^*)}$. Les éléments de la famille $\{A_w\}_{w\in\boldsymbol{W}}$ sont les « *opérateurs de Bernstein-Gelfand-Gelfand* ». Les égalités encadrées du théorème précédent admettent donc la réécriture :

$$\boxed{\mathscr{L}_w = A_w \circ \mathscr{L}_e \quad \text{et} \quad \mathscr{L}_w \circ \boldsymbol{\mathscr{C}h_T} = A_w} \qquad \text{pour tout } w \in \boldsymbol{W}.$$

1.3.7 L'opérateur $\boldsymbol{A_s}$. Soit s l'élément de plus grande longueur de $\boldsymbol{W}$. Pour tout $P \in S(\mathfrak{t}^*)$, on a : $A_s(P) = \mathscr{L}_s \circ \boldsymbol{\mathscr{C}h_T}(P)$ d'après l'assertion (b) du théorème précédent. Mais $\mathscr{L}_s$ est l'intégrale sur la variété différentiable et compacte $\boldsymbol{X}$ et s'explicite à l'aide de la formule de localisation de Berline-Vergne ([BV]) en une somme finie ([A$_0$]) :

$$\boxed{A_s(P) = \frac{\sum_{w\in\boldsymbol{W}}(-1)^{\ell(w)}\, w{\cdot}P}{\prod_{\alpha\in\Delta_+} -\alpha} = \sum_{w\in\boldsymbol{W}} w\bigg(\frac{P}{\prod_{\alpha\in\Delta_+} -\alpha}\bigg)}$$

1.3.8 Polynômes de Schubert. La famille $\{P^w\}_{w\in\boldsymbol{W}} \subseteq S(\mathfrak{t}^*)$ des « *polynômes de Schubert* » est définie dans [BGG] par :

$$\begin{cases} P^s := \dfrac{\prod_{\alpha\in\Delta_+} -\alpha}{|\boldsymbol{W}|}\,, \\ P^w = A_{w^{-1}s}(P^s)\,, \quad \text{pour tout } w \in \boldsymbol{W}. \end{cases}$$

où $P^e = A_s(P^s) = 1$, d'après 1.3.7. La proposition suivante, transposition au contexte équivariant de résultat principal de [BGG], devient un corollaire immédiat du théorème 1.3.6.

Proposition ([BGG]). *Pour tous $v, w \in \boldsymbol{W}$, on a :*

$$\mathscr{L}_v(\mathscr{C}\!h_{\boldsymbol{T}}(P^w)) = A_v(P^w) = \begin{cases} P^{wv^{-1}} & \text{lorsque} \quad \ell(wv^{-1}) = \ell(w) - \ell(v), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En particulier :

$$\langle \sigma_v, \mathscr{C}\!h(P^w) \rangle = \langle \sigma_v, \mathscr{C}\!h_{\boldsymbol{T}}(P^w) \rangle(0) = A_v(P^w)(0) = P^{wv^{-1}}(0) = \delta_v^w \,.$$

Remarque. *La famille des polynômes de Schubert $\{P^w\}_{w \in \boldsymbol{W}}$ qui réalise la base de $H^*_{DR}(\boldsymbol{X};\mathbb{C})$ duale de la base des cycles de Schubert de $H_*(\boldsymbol{X};\mathbb{Z})$, n'est pas unique dans la mesure où le morphisme de Chern-weyl $\mathscr{C}\!h : S(\mathfrak{t}^*) \to H^*_{DR}(\boldsymbol{X};\mathbb{C})$ à un noyau non trivial égal à $S(\mathfrak{t}^*){\cdot}S(\mathfrak{t}^*)^{\boldsymbol{W}}_0$. La proposition précédente montre que cette famille est une base de $H^*_{DR,\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{X};\mathbb{C})$, pour sa structure de $S(\mathfrak{k}^*)^{\boldsymbol{K}}$-module. Le fait que $H^*_{DR,\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{X};\mathbb{C})$ est un $S(\mathfrak{k}^*)^{\boldsymbol{K}}$-module libre de rang $|\boldsymbol{W}|$, se traduit modulo l'isomorphisme $\mathscr{C}\!h_{\boldsymbol{K}} : S(\mathfrak{t}^*) \xrightarrow{\simeq} H^*_{DR,\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{X};\mathbb{C})$, par le théorème bien connu qui affirme que $S(\mathfrak{t}^*)$ est un $S(\mathfrak{t}^*)^{\boldsymbol{W}}$-module libre de rang $|\boldsymbol{W}|$.*

1.3.9 A propos de l'anneau des coefficients. Les résultats de [A$_0$,A$_2$] sont aussi vrais en cohomologie rationnelle où il convient de remplacer $H_{DR,\boldsymbol{K}}$ par $H_{\boldsymbol{T}'}(\bullet;\mathbb{Q})$ et $S(\mathfrak{t}^*)$ par $\mathbb{Q} \otimes \mathscr{R}(\boldsymbol{T})$, où $\mathscr{R}(\boldsymbol{T})$ $(\sim \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_{\dim \boldsymbol{T}}])$ désigne l'anneau des représentations de dimension finie de $\boldsymbol{T}$, canoniquement isomorphe à $H^*(\mathbb{B}\boldsymbol{T};\mathbb{Z})$ (*cf.* 1.4.1). Le cas des coefficients entiers mérite quelques commentaires. Le diagramme $(\mathscr{D})$ garde un sens en cohomologie entière, en effet, les applications $\langle \sigma_w, \_ \rangle$ et $\mathscr{L}_w$ sont définies sur $\mathbb{Z}$ (les opérateurs A_w laissent stable $\mathscr{R}(\boldsymbol{T})$) et les homomorphismes de Chern-Weil $\mathscr{C}\!h_{\boldsymbol{K}}$ et $\mathscr{C}\!h$ peuvent être remplacés par les homomorphismes caractéristiques des $\boldsymbol{T}$-espaces à droite $\mathbb{E}\boldsymbol{K} \times_{\boldsymbol{K}} \boldsymbol{K}$ $(\sim \mathbb{E}\boldsymbol{K})$ et $\boldsymbol{K}$ respectivement :

$$\begin{cases} \gamma^{\boldsymbol{T}}_{\mathbb{E}\boldsymbol{K}} : \mathscr{R}(\boldsymbol{T}) = H^*(\mathbb{B}\boldsymbol{T};\mathbb{Z}) \to H^*_{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{X};\mathbb{Z}) \\ \quad \gamma^{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{K}} : \mathscr{R}(\boldsymbol{T}) = H^*(\mathbb{B}\boldsymbol{T};\mathbb{Z}) \to H^*(\boldsymbol{X};\mathbb{Z}) \end{cases}$$

Mais si le morphisme $\gamma^{\boldsymbol{T}}_{\mathbb{E}\boldsymbol{K}}$ est toujours bijectif, le morphisme $\gamma^{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{K}}$ *n'est plus nécessairement surjectif* et on ne peut plus espérer paramétrer la base duale de la base des cycles de Schubert à l'aide des éléments de $\mathscr{R}(\boldsymbol{T})$. Il est d'autre part clair que le conoyau de $\gamma^{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{K}}$ est un $\mathbb{Z}$-module de torsion et que les points fermés de son support sont précisément les nombres premiers que l'on doit inverser pour donner un sens au polynôme de Schubert P^s. La torsion de $\operatorname{coker}(\gamma^{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{K}})$ a été étudiée par ailleurs par M. Demazure dans [Dem$_1$] et A. Borel dans [B$_1$].

1.3.10 Transformée de Fourier de la mesure de Liouville. Une autre application suggérée par Michèle Vergne du lien qui relie l'intégration sur les cycles de Schubert et les opérateurs A_w est donnée dans [A$_2$]. Soit f une forme réelle sur $\mathfrak{k}$ nulle sur $\mathfrak{t}^\perp$, telle que $-if$ soit dominante régulière, c'est-à-dire $-if(\check{h_\alpha}) > 0$ pour toute coracine $\check{h_\alpha}$. L'orbite $\boldsymbol{K}\cdot f$ de f dans la représentation coadjointe de $\boldsymbol{K}$ dans $\mathfrak{k}^*$, est munie d'une forme symplectique $\boldsymbol{K}$-invariante canonique σ_f qui est la forme fondamentale d'une structure kählérienne sur $\boldsymbol{K}\cdot f$. D'autre part, l'identification $\boldsymbol{K}\cdot f = \boldsymbol{K}/\boldsymbol{T} = \boldsymbol{X}$ permet de poser $(\boldsymbol{K}\cdot f)_w := \boldsymbol{X}_w$, et les couples $\big((\boldsymbol{K}\cdot f)_w, \sigma_f\big)$ sont des variétés complexes symplectiques. Notons $\widehat{\sigma}_f^w$ la transformée de Fourier de leur mesure de Liouville ([BV]) . On a alors pour tout $Y \in \mathfrak{t}$ ([A$_2$]) :

$$\boxed{\begin{aligned} \widehat{\sigma}_f^w(Y) &= \int_{(\boldsymbol{K}\cdot f)_w} e^{i\langle Y,x\rangle}\, e^{\sigma_f(x)} = \int_{(\boldsymbol{K}\cdot f)_w} e^{if(-J_Y - \frac{\omega}{2\pi i})} = \\ &= \mathscr{L}_w \mathscr{C}\!\boldsymbol{h}_{\boldsymbol{T}}\left(e^{if}\right) = A_w\big(e^{if}\big)(Y) \end{aligned}}$$

où le terme de droite fait apparaître le prolongement naturel de l'action de A_w à l'algèbre des fonctions entières sur $\mathfrak{t}$. Dans le cas particulier où $w = s$, on retrouve la formule d'Harish-Chandra ([Hrs]) (*cf.* 1.3.7) :

$$\int_{\boldsymbol{K}\cdot f} e^{i\langle Y,x\rangle}\, e^{\sigma_f(x)} = \frac{\sum_{w\in \boldsymbol{W}} (-1)^{\ell(w)}\, e^{if(w^{-1}Y)}}{\prod_{\alpha\in\Delta_+} -\alpha}\,.$$

1.4 Cohomologie singulière $\boldsymbol{T}$-équivariante des variétés de Schubert

1.4.1 Cohomologie singulière $\boldsymbol{T}$-équivariante. L'objet de [A$_2$,A$_0$] était l'étude des anneaux de cohomologie de de Rham $\boldsymbol{K}$-équivariante et ordinaire de $\boldsymbol{K}/\boldsymbol{T}$, ou, ce qui revient au même, des anneaux de cohomologie singulière $\boldsymbol{K}$-équivariante et ordinaire de $\boldsymbol{K}/\boldsymbol{T}$ à coefficients dans $\mathbb{Q}$. Dans ces travaux l'homomorphisme de Chern-Weil joue un rôle fondamental dans la mesure où il réalise ces anneaux comme quotients de l'algèbre $S(\mathfrak{t}^*)$ (resp. $\mathbb{Q}\otimes\mathscr{R}(\boldsymbol{T})$). Mais cette propriété cesse d'être vérifiée dans le cas des cohomologies $\boldsymbol{T}$-équivariante et ordinaire à coefficients entiers. L'article [A$_4$], qui s'intéresse à cette situation, fait alors appel au théorème de localisation de Borel-Atiyah-Segal qui permet de réaliser $H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{X};\mathbb{Z})$ plutôt comme *sous-anneau* d'un anneau de structure très simple. Le paragraphes suivant expliquent les bases de la méthode utilisée dans [A$_4$] qui mène la détermination de la loi multiplicative de $H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{X};\mathbb{Z})$ et plus généralement de $H^*_{\boldsymbol{T}}(\overline{\boldsymbol{X}}_w;\mathbb{Z})$, pour tout $w\in\boldsymbol{W}$.

1.4.2 L'anneau $\mathscr{R}(\boldsymbol{T})$ et le théorème de localisation. La cohomologie singulière $\boldsymbol{T}$-équivariante possède quelques propriétés qui la rendent particulièrement agréable. Tout d'abord, l'isomorphisme $S(\mathfrak{t}^*) \simeq H^*_{DR,\boldsymbol{T}}(\bullet,\mathbb{C}) = H^*_{\boldsymbol{T}}(\bullet;\mathbb{C})$ (*cf.* 1.2) résulte par changement de base d'un isomorphisme à coefficients entiers $ch : \mathscr{R}(\boldsymbol{T}) \xrightarrow{\equiv} H^*_{\boldsymbol{T}}(\bullet;\mathbb{Z})$, où

$\mathscr{R}(\boldsymbol{T}) \simeq \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_{\dim_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{T})}]$ désigne l'anneau des représentations de dimension finie de $\boldsymbol{T}$. Le morphisme *ch* fait correspondre à une représentation irréductible complexe $\mathbb{C}_\lambda$ de $\boldsymbol{T}$ de poids λ, la première classe de Chern du fibré en droites $\mathbb{E}\boldsymbol{T} \otimes_{\boldsymbol{T}} \mathbb{C}_\lambda \twoheadrightarrow \mathbb{B}\boldsymbol{T}$. Ensuite, on a une propriété considérablement plus intéressante qui relève du fait que pour tout sous-groupe fermé $\boldsymbol{H} \subseteq \boldsymbol{T}$ tel que $\dim \boldsymbol{H} < \dim \boldsymbol{T}$, le morphisme de restriction de groupe $H^*_{\boldsymbol{T}}(\bullet;\mathbb{Z}) \to H^*_{\boldsymbol{H}}(\bullet;\mathbb{Z})$ a un noyau non trivial, autrement dit, $H^*_{\boldsymbol{H}}(\bullet;\mathbb{Z})$ est un $H^*_{\boldsymbol{T}}(\bullet;\mathbb{Z})$-module de torsion. La propriété en question connue sous le nom de « *théorème de localisation* », est la suivante.

Théorème ([B-al,AS]). *Soit $\boldsymbol{Y}$ un $\boldsymbol{T}$-espace de dimension cohomologique finie, notons $\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}}$ le sous-espace des points fixes de $\boldsymbol{Y}$ sous l'action de $\boldsymbol{T}$. Alors, les noyau et conoyau de l'homomorphisme de restriction aux points fixes $H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{Y};\mathbb{Z}) \to H^*_{\boldsymbol{T}}\big(\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}};\mathbb{Z}\big)$ sont des $\mathscr{R}(\boldsymbol{T})$-modules de torsion. Autrement dit, le morphisme :*

$$\boxed{\mathscr{Q}(\boldsymbol{T}) \otimes_{\mathscr{R}(\boldsymbol{T})} H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{Y};\mathbb{Z}) \xrightarrow[\text{aux points fixes}]{\text{restriction}} \mathscr{Q}(\boldsymbol{T}) \otimes_{\mathscr{R}(\boldsymbol{T})} H^*_{\boldsymbol{T}}\big(\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}};\mathbb{Z}\big)}$$

où $\mathscr{Q}(\boldsymbol{T})$ désigne le corps de fractions de $\mathscr{R}(\boldsymbol{T})$, est un isomorphisme.

En particulier, lorsque $\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}}$ est discret, on a :

$$\mathscr{Q}(\boldsymbol{T}) \otimes_{\mathscr{R}(\boldsymbol{T})} H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{Y};\mathbb{Z}) \xrightarrow{\simeq} \mathscr{Q}(\boldsymbol{T}) \otimes_{\mathscr{R}(\boldsymbol{T})} H^*_{\boldsymbol{T}}\big(\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}};\mathbb{Z}\big) = \mathrm{App}(\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}};\mathscr{Q}(\boldsymbol{T}))$$

où $\mathrm{App}(\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}};\mathscr{Q}(\boldsymbol{T}))$ *désigne l'algèbre des applications de $\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}}$ à valeurs dans $\mathscr{Q}(\boldsymbol{T})$.*

1.4.3 Détermination de l'anneau de cohomologie ($\boldsymbol{T}$-équivariante) entière. Le théorème de localisation s'avère très utile lorsque le $\boldsymbol{T}$-espace $\boldsymbol{Y}$ est compact, que $\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}}$ est fini et que $\boldsymbol{Y}$ admet une décomposition en CW-complexe dont les cellules sont $\boldsymbol{T}$-stables, de dimension paire et possèdent un unique point fixe. Pour chaque $w \in \boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}}$, on note alors $\boldsymbol{Y}_w$ la cellule contenant w ; on a $\boldsymbol{Y} = \coprod_{w\in \boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}}} \boldsymbol{Y}_w$. Ces conditions sont vérifiées notamment dans le cas des variétés de Schubert et des variétés de Bott-Samelson. Dans ces cas :

D-1) $H^*(\boldsymbol{Y};\mathbb{Z})$ est un $\mathbb{Z}$-module libre de rang $|\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}}|$.

D-2) $H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{Y};\mathbb{Z})$ est un $\mathscr{R}(\boldsymbol{T})$-module libre de rang $|\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}}|$.

D-3) L'homomorphisme de restriction aux points fixes $\Theta : H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{Y};\mathbb{Z}) \to H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}};\mathbb{Z})$ est *injectif* de conoyau de $\mathscr{R}(\boldsymbol{T})$-torsion (théorème de localisation) ; il identifie donc $H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}};\mathbb{Z})$ à une certaine sous-algèbre de $\mathrm{App}(\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}};\mathscr{R}(\boldsymbol{T}))$.

D-4) L'accouplement naturel $\langle \_,\_ \rangle : H_d(\boldsymbol{Y};\mathbb{Z}) \otimes H^d(\boldsymbol{Y};\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$, entre les groupes d'homologie et cohomologie entières de $\boldsymbol{Y}$ de même degré d, s'étend à la cohomologie équivariante

$$\langle \_,\_ \rangle : H_d(\boldsymbol{Y};\mathbb{Z}) \otimes H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{Y};\mathbb{Z}) \to H^{*-d}_{\boldsymbol{T}}(\bullet;\mathbb{Z})\,.$$

On note $\mathscr{L}_\sigma : H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{Y};\mathbb{Z}) \to \mathscr{R}(\boldsymbol{T})$ la forme $\mathscr{R}(\boldsymbol{T})$-linéaire définie par un élément homogène $\sigma \in H_*(\boldsymbol{Y};\mathbb{Z})$.
Pour toute base homogène $\{\sigma_1,\dots,\sigma_s\}$ de $H_*(\boldsymbol{Y};\mathbb{Z})$, la famille $\{\mathscr{L}_{\sigma_1},\dots,\mathscr{L}_{\sigma_s}\}$ est une base du $\mathscr{R}(\boldsymbol{T})$-module $\mathrm{Hom}_{\mathscr{R}(\boldsymbol{T})}\big(H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{Y};\mathbb{Z}),\mathscr{R}(\boldsymbol{T})\big)$. Les formes linéaires $\mathscr{L}_\sigma$ se prolongent de manière unique, d'après le théorème de localisation, en des formes $\mathscr{Q}(\boldsymbol{T})$-linéaires $L_\sigma : \mathrm{App}\big(\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}};\mathscr{Q}(\boldsymbol{T})\big) \to \mathscr{Q}(\boldsymbol{T})$.

$$\begin{tikzcd}
H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{Y};\mathbb{Z}) \arrow[r, hook, "\Theta"] \arrow[d, "\mathscr{L}_\sigma"'] & H^*_{\boldsymbol{T}}\big(\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}};\mathbb{Z}\big) = \mathrm{App}\big(\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}};\mathscr{R}(\boldsymbol{T})\big) \subseteq \mathrm{App}\big(\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}},\mathscr{Q}(\boldsymbol{T})\big) \arrow[d, "L_\sigma"] \\
\mathscr{R}(\boldsymbol{T}) \arrow[r, hook, "\subseteq"] & \mathscr{Q}(\boldsymbol{T})
\end{tikzcd}$$

$$\mathscr{L}_\sigma(\mu) = L_\sigma(\Theta(\mu)),\ \text{pour tout } \mu \in H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{Y};\mathbb{Z})\,.$$

Proposition ([$\mathbf{A_4}$]). *L'image de Θ est la sous-algèbre de $\mathrm{App}(\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}};\mathscr{R}(\boldsymbol{T}))$ des éléments f vérifiant :*

$$L_\sigma(f) \in \mathscr{R}(\boldsymbol{T})$$

pour tout $\sigma \in H_*(\boldsymbol{Y};\mathbb{Z})$, ou, ce qui revient au même, pour tout σ dans une base (homogène) de $H_*(\boldsymbol{Y};\mathbb{Z})$.

D-5) L'ensemble $\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}}$ est muni d'un ordre partiel '$\preccurlyeq$' en posant $u \preccurlyeq w$ lorsque $u \in \overline{\boldsymbol{Y}}_w$. Pour chaque $w \in \boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}}$, l'adhérence $\overline{\boldsymbol{Y}}_w$ est $\boldsymbol{T}$-stable et définit le cycle $\sigma_w \in H_{\dim \boldsymbol{Y}_w}(\boldsymbol{Y};\mathbb{Z})$ et la famille $\{\sigma_w\}_{w\in \boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}}}$ est une base de $\mathbb{Z}$-module de $H_*(\boldsymbol{Y};\mathbb{Z})$. Pour chaque $w \in \boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}}$, la forme linéaire L_{σ_w}, notée désormais L_w, se factorise à travers le morphisme de restriction

$$\mathrm{App}\big(\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}};\mathscr{R}(\boldsymbol{T})\big) \xrightarrow[\text{de } \boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}} \text{ à } \overline{\boldsymbol{Y}}^{\boldsymbol{T}}_w]{\text{restriction}} \mathrm{App}\big(\overline{\boldsymbol{Y}}^{\boldsymbol{T}}_w;\mathscr{R}(\boldsymbol{T})\big) \subseteq \mathrm{App}\big(\overline{\boldsymbol{Y}}^{\boldsymbol{T}}_w;\mathscr{Q}(\boldsymbol{T})\big)$$

où $\overline{\boldsymbol{Y}}^{\boldsymbol{T}}_w = \{u \in \boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}} \mid u \preccurlyeq w\}$.

Pour chaque $u \preccurlyeq w$, notons $\lambda_u : \mathrm{App}\big(\overline{\boldsymbol{Y}}^{\boldsymbol{T}}_w;\mathscr{Q}(\boldsymbol{T})\big) \to \mathscr{Q}(\boldsymbol{T})$ l'évaluation au point u, *i.e.* $\lambda_u(f) = f(u)$. La famille $\{\lambda_u\}_{u\preccurlyeq w}$ est une base de l'espace des formes $\mathscr{Q}(\boldsymbol{T})$-linéaires sur $\mathrm{App}\big(\overline{\boldsymbol{Y}}^{\boldsymbol{T}}_w;\mathscr{Q}(\boldsymbol{T})\big)$ de sorte que pour chaque $w \in \boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}}$ donné, il existe une unique famille $\{q^u_w\}_{u\preccurlyeq w} \subseteq \mathscr{Q}(\boldsymbol{T})$, telle que, pour tout $f \in \mathrm{App}(\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}};\mathscr{Q}(\boldsymbol{T}))$,

$$\boxed{L_w(f) = \sum_{u\preccurlyeq w} q^u_w\,\lambda_u(f) = \sum_{u\preccurlyeq w} q^u_w\, f(u)}$$

Soit Q la matrice dont les lignes et colonnes sont indexées par les éléments de $\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}}$ et dans laquelle le coefficient $Q_{w,u}$ en ligne w et colonne u est

$$Q_{w,u} = \begin{cases} q^u_w & \text{lorsque } u \preccurlyeq w,\\ 0 & \text{autrement.}\end{cases}$$

D-6) La matrice Q est inversible d'inverse notée $R := Q^{-1}$.

Théorème. *Pour $w \in \boldsymbol{Y^T}$, soit $\tilde{P}^w : \boldsymbol{Y^T} \to \mathscr{Q}(\boldsymbol{T})$ l'application donnée par la colonne d'indice w de la matrice R,* i.e.

$$\boxed{\tilde{P}^w(u) = R_{u,w}}$$

Alors

a) *Pour tous $u, w \in \boldsymbol{Y^T}$, on a $L_u(\tilde{P}^w) = \delta_u^w$ et la famille $\{\Theta^{-1}(\tilde{P}^w)\}_{w\in \boldsymbol{W}}$ est duale de la base $\{\sigma_w\}_{w\in\boldsymbol{Y^T}}$ de $H_*(\boldsymbol{Y};\mathbb{Z})$.*

b) *La famille $\{\tilde{P}^w\}_{w\in\boldsymbol{Y^T}}$ est une base du $\mathscr{R}(\boldsymbol{T})$-module $\Theta(H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{Y};\mathbb{Z}))$; en particulier, les coefficients de la matrice R appartiennent à $\mathscr{R}(\boldsymbol{T})$.*

c) *Pour tous $u, w_1, w_2 \in \boldsymbol{Y^T}$, le coefficient du produit $\tilde{P}^{w_1}\tilde{P}^{w_2}$ en $\tilde{P}^u$ est donné par la formule :*

$$L_u(\tilde{P}^{w_1}\tilde{P}^{w_2}) = \sum_{v\preccurlyeq u} q_u^v\, \tilde{P}^{w_1}(v)\, \tilde{P}^{w_2}(v) = \sum_{v\preccurlyeq u} q_u^v\, R_{v,w_1}\, R_{v,w_2}$$

d) *Soient $A_{\boldsymbol{Y}}$ l'ensemble des variables $\{A_w\}_{w\in\boldsymbol{Y^T}}$ et $I_{\boldsymbol{Y}}$ l'idéal de l'anneau des polynômes $\mathbb{Z}[A_{\boldsymbol{Y}}]$ engendré par les relations*

$$\mathscr{R}(w_1, w_2) := A_{w_1}A_{w_2} - \sum\nolimits_{u\in\boldsymbol{Y^T}} L_u(\tilde{P}^{w_1}\tilde{P}^{w_2})\, A_u$$

L'homomorphisme de $\mathbb{Z}[A_{\boldsymbol{Y}}]$ vers $H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{Y};\mathbb{Z})$ qui associe $A_w \mapsto \tilde{P}^w$ induit un isomorphisme de $\mathbb{Z}[A_{\boldsymbol{Y}}]/I_{\boldsymbol{Y}}$ sur $H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{Y};\mathbb{Z})$.

L'anneau de cohomologie $\boldsymbol{T}$-équivariante de $\boldsymbol{Y}$ est donc entièrement déterminé par la connaissance de la famille des fractions rationnelles $\{q_w^u\}_{u\preccurlyeq w} \subseteq \mathscr{Q}(\boldsymbol{T})$.

Remarque. *La matrice Q est, dans notre convention, triangulaire inférieure, de même donc que la matrice R. Les applications $\tilde{P}^w$ sont par conséquent, nulles partout sauf au point w, lorsque w est maximal pour l'ordre '$\preccurlyeq$', en particulier lorsque la cellule $\boldsymbol{Y}_w$ est de dimension maximum.*

D-7) On a un isomorphisme canonique $H^*(\boldsymbol{Y};\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z} \otimes_{\mathscr{R}(\boldsymbol{T})} H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{Y};\mathbb{Z})$ (suite spectrale d'Eilenberg-Moore) et le cup produit de la cohomologie ordinaire $H^*(\boldsymbol{Y};\mathbb{Z})$ découle de celui de $H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{Y};\mathbb{Z})$.

1.4.4 Opérateurs de Demazure $\mathscr{D}_{\boldsymbol{w}}$. La démarche décrite dans la section précédente est appliquée dans [A$_4$] pour déterminer l'algèbre $H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{X};\mathbb{Z})$, où $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{G}/\boldsymbol{B}$ est la variété des drapeaux d'un groupe $\boldsymbol{G}$ de Kač-Moody (en particulier, d'un groupe semi-simple complexe) ([2]). Une partie important du travail concerne les applications $\mathscr{L}_w$ de (1.4.3 D-4), cas particuliers d'une opération plus générale abordée en appendice de [A$_4$]. Cette opération est l'opération π_* d'« *intégration sur les fibres* » pour une fibration $\boldsymbol{T}$-équivariante $\pi : M \twoheadrightarrow N$ dont la fibre F admet une structure de CW-complexe fini orienté mais où la base N n'est pas supposée de dimension cohomologique finie. L'intégration sur les fibres définit un morphisme de $H^*_{\boldsymbol{T}}(N)$-modules $\pi_* : H^*_{\boldsymbol{T}}(M) \to H^{*-\dim(F)}_{\boldsymbol{T}}(N)$, qui intervient dans la généralisation au contexte équivariant des opérateurs cohomologiques $\{\mathscr{D}_w\}_{w\in\boldsymbol{W}}$ de Demazure, eux mêmes intimement liés aux applications $\mathscr{L}_w$. Dans la suite on décrit la version équivariante de ces opérateurs.

Considérons $\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{X}$ muni de la structure produit de $\boldsymbol{G}$-espaces à gauche. Pour chaque $w \in \boldsymbol{W}$, notons $\mathfrak{T}_w$ l'adhérence de l'orbite $\boldsymbol{G}\cdot(e,w)$. Les projections canoniques $p_1, p_2 : \boldsymbol{X}\times\boldsymbol{X} \twoheadrightarrow \boldsymbol{X}$ sont $\boldsymbol{G}$-équivariantes et leurs restrictions à $\mathfrak{T}_w$ sont des fibrations de base $\boldsymbol{X}$ de fibres isomorphes aux variétés de Schubert $\overline{\boldsymbol{X}}_w$ et $\overline{\boldsymbol{X}}_{w^{-1}}$ respectivement. On définit l'opérateur
$$\mathscr{D}_w : H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{X};\mathbb{Z}) \to H^{*-2\ell(w)}_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{X};\mathbb{Z})$$
par $\mathscr{D}_w := p_{1*}\circ p_2^*$; c'est un opérateur $\mathscr{R}(\boldsymbol{T})$-linéaire homogène de degré $-2\ell(w)$.

Notons $\mathrm{App}_b(\boldsymbol{W};\mathscr{R}(\boldsymbol{T}))$ l'algèbre des applications $f : \boldsymbol{W} \to \mathscr{R}(\boldsymbol{T})$ de degrés bornés ([3]), *i.e.* telles qu'il existe $N_f \in \mathbb{N}$ vérifiant $\deg(f(w)) < N_f$ pour tout $w \in \boldsymbol{W}$. L'homomorphisme de restriction $\Theta : H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{X};\mathbb{Z}) \hookrightarrow H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{W};\mathbb{Z}) = \mathrm{Appl}_b(\boldsymbol{W};\mathscr{R}(\boldsymbol{T}))$ est injectif de conoyau de $\mathscr{R}(\boldsymbol{T})$-torsion (D-3). Les opérateurs $\mathscr{D}_w$ se prolongent donc de manière unique en des opérateurs $\tilde{A}_w$ agissant sur $\mathrm{App}(\boldsymbol{W};\mathscr{Q}(\boldsymbol{T}))$.

$$\begin{tikzcd}
\overline{\boldsymbol{X}}_w \arrow[dr] & & \boldsymbol{X} \\
& \mathfrak{T}_w \arrow[ur, "p_2"] \arrow[dr, "p_1"'] & \\
\overline{\boldsymbol{X}}_{w^{-1}} \arrow[ur] & & \boldsymbol{X}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{X};\mathbb{Z}) \arrow[dl, "p_2^*"'] \arrow[r, hook, "\Theta"] \arrow[dd, dashed, "\mathscr{D}_w"] & \mathrm{Appl}(\boldsymbol{W};\mathscr{Q}(\boldsymbol{T})) \arrow[dd, dashed, "\tilde{A}_w"] \\
H^*_{\boldsymbol{T}}(\mathfrak{T}_w;\mathbb{Z}) \arrow[dr, "p_{1*}"'] & & \\
& H^{*-2\ell(w)}_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{X};\mathbb{Z}) \arrow[r, hook, "\Theta"] & \mathrm{Appl}(\boldsymbol{W};\mathscr{Q}(\boldsymbol{T}))
\end{tikzcd}$$

Le théorème suivant donne les propriétés fondamentales des opérateurs $\mathscr{D}_w$ et précise leurs liens avec les applications $\mathscr{L}_w$ et L_w (*cf.* D-4).

1.4.4-1. Théorème ([A$_4$]). *Soient* $w, w_1, w_2 \in \boldsymbol{W}$, *alors*

[2] Comme dans le cas des groupes semi-simples complexes, la variété de drapeaux $\boldsymbol{X}$ d'un groupe de Kač-Moody admet une décomposition cellulaire $\boldsymbol{T}$-stable dont les cellules sont de dimension paire et contiennent un unique point fixe identifié à un élément du groupe de Weyl $\boldsymbol{W}$. En contrepartie, $\boldsymbol{X}$ peut ne pas être de dimension cohomologique finie, cela se produit exactement lorsque $\boldsymbol{W}$ est infini. Dans ces cas, $\boldsymbol{X}$ est néanmoins limite inductive de $\boldsymbol{T}$-espaces conformes aux hypothèses de 1.4.3 et la démarche en question s'applique moyennant de petites précautions.

[3] Condition toujours satisfaite lorsque $\boldsymbol{G}$ est un groupe semi-simple complexe ; $\boldsymbol{W}$ étant alors fini.

a) $\mathscr{D}_{w_1} \circ \mathscr{D}_{w_2} = \begin{cases} \mathscr{D}_{w_1 w_2} & \textit{lorsque } \ell(w_1 w_2) = \ell(w_1) + \ell(w_2)\,; \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$

b) $\mathscr{D}_w = \mathscr{D}_{r_{\alpha_1}} \circ \cdots \circ \mathscr{D}_{r_{\alpha_\ell}}$, *pour toute décomposition réduite* $r_{\alpha_1} \cdots r_{\alpha_\ell}$ *de* w.

c) *Pour* $w \in \boldsymbol{W}$, *soit* $\tilde{A}_w$ *l'opérateur sur* $\mathrm{App}(\boldsymbol{W}; \mathscr{Q}(\boldsymbol{T}))$ *vérifiant* $\Theta \circ \mathscr{D}_w = \tilde{A}_w \circ \Theta$.

i) *Pour chaque* $\alpha \in \Pi$, *l'opérateur* $\tilde{A}_{r_\alpha}$ *fait correspondre à* $f \in \mathrm{App}(\boldsymbol{W}; \mathscr{Q}(\boldsymbol{T}))$ *l'application*

$$\boldsymbol{W} \ni w \longmapsto \tilde{A}_{r_\alpha}(f)(w) := \frac{f(w r_\alpha) - f(w)}{w{\cdot}\alpha}.$$

ii) $\tilde{A}_{r_{\alpha_1}} \circ \cdots \circ \tilde{A}_{r_{\alpha_\ell}} = \begin{cases} \tilde{A}_{r_{\alpha_1} \cdots r_{\alpha_\ell}} & \textit{lorsque } r_{\alpha_1} \cdots r_{\alpha_\ell} \textit{ est une expression réduite}\,; \\ 0 & \textit{autrement.} \end{cases}$

d) $\mathscr{L}_w = \mathscr{L}_e \circ \mathscr{D}_w = L_w \circ \Theta = L_e \circ \tilde{A}_w \circ \Theta$.

Le théorème suivant, corollaire de l'assertion (d) ci-dessus, traduit la proposition de (D-4) qui décrit $H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{X}; \mathbb{Z})$ comme sous-algèbre de $\mathrm{App}(\boldsymbol{W}; \mathscr{R}(\boldsymbol{T}))$.

1.4.4-2. Théorème ([A$_4$]). *Le morphisme* $\Theta : H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{X}; \mathbb{Z}) \to \mathrm{App}_b(\boldsymbol{W}; \mathscr{R}(\boldsymbol{T}))$ *établit un isomorphisme entre* $H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{X}; \mathbb{Z})$ *et l'ensemble des applications* f *de* $\mathrm{App}_b(\boldsymbol{W}; \mathscr{R}(\boldsymbol{T}))$ *satisfaisant à l'une quelconque des deux conditions suivantes :*

A-a) $\tilde{A}_w(f)(e) \in \mathscr{R}(\boldsymbol{T})$, *pour tout* w *dans* $\boldsymbol{W}$, *où* e *désigne l'élément neutre de* $\boldsymbol{W}$;

A-b) $\tilde{A}_w(f) \in \mathrm{App}_b(\boldsymbol{W}; \mathscr{R}(\boldsymbol{T}))$, *pour tout* w *dans* $\boldsymbol{W}$.

En particulier, $\mathrm{im}(\Theta)$ *est la plus grande partie de* $\mathrm{App}_b(\boldsymbol{W}; \mathscr{R}(\boldsymbol{T}))$ *stable sous l'action des opérateurs* $\tilde{A}_{r_\alpha}$.

1.4.5 Base duale de la base des cycles de Schubert. Comme expliqué en (D-5), les applications L_w se décomposent suivant des sommes finies :

$$L_w(f) = \sum_{u \preccurlyeq w} q^u_w\, f(u)\,, \qquad \text{pour } f \in \mathrm{App}(\boldsymbol{W}; \mathscr{Q}(\boldsymbol{T})).$$

avec $\{q^u_w\} \subseteq \mathscr{Q}(\boldsymbol{T})$ uniquement déterminé. Dans le cas des variétés de drapeaux, des descriptions explicites de ces fractions sont obtenues à l'aide de désingularisations des variétés de Schubert par des variétés de Bott-Samelson. On a :

Théorème ([A$_4$,A$_0$]). *Soit* $r_{\alpha_1} \cdots r_{\alpha_\ell}$ *une décomposition réduite de* w. *Pour chaque* $i = 1, \ldots, \ell$, *notons* ε_i *l'un des éléments de* $\{1, r_{\alpha_i}\} \subseteq \boldsymbol{W}$. *Alors :*

$$\boxed{q^u_w = \sum_{(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_\ell)} \frac{1}{\prod_{j=1}^{\ell} -\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_j(\alpha_j)}}$$

où la sommation est indexée par les ℓ*-uplets* $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_\ell)$ *vérifiant* $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_\ell = u$.

Les coefficients de la matrice $Q = [\![q_w^u]\!]_{w,u}$ sont donc connus dans le cas des variétés de drapeaux. La colonne d'indice $u = s$ de Q est nulle sauf sur la dernière ligne $w = s$ où l'on trouve le coefficient :

$$q_s^s = \frac{1}{\prod_{\alpha\in\Delta_+}\alpha}\,.$$

Ceci étant, la base duale de la base des cycles de Schubert se lit dans les colonnes de la matrice inverse $R = Q^{-1}$ (*cf.* D-5). Pour $w \in \boldsymbol{W}$, notons $\tilde{P}^w \in \mathrm{App}(\boldsymbol{W};\mathscr{R}(\boldsymbol{T}))$ l'application donnée par la colonne d'indice w de R, *i.e.* $\tilde{P}^w : u \mapsto R_{u,w}$. On a :

$$\tilde{P}^s(u) = \left\{\begin{matrix} \prod_{\alpha\in\Delta_+}\alpha & \text{lorsque } u = s, \\ 0 & \text{autrement.}\end{matrix}\right\} \qquad \text{et} \quad \tilde{P}^e(u) = 1\,,\ \text{pour tout } u \ (^4).$$

Le théorème suivant, corollaire des théorèmes 1 et 2 de 1.4.4, est l'analogue exact du théorème de [BGG] concernant les polynômes de Schubert (*cf.* 1.3.8), il s'en distingue sur deux points qui nous semblent essentiels. Premièrement : les polynômes $P^w \in S(\mathfrak{t}^*)$ sont remplacés par des applications $\tilde{P}^w : \boldsymbol{W} \to S(\mathfrak{t}^*)$, et deuxièmement : nous nous intéressons maintenant à la cohomologie à coefficients *entiers* plutôt que rationnels.

Théorème. *La famille $\{\tilde{P}^w\}_{w\in\boldsymbol{W}}$ d'applications de $\boldsymbol{W}$ à valeurs dans $\mathscr{R}(\boldsymbol{T})$, caractérisée par les égalités :*

$$L_u(\tilde{P}^w) = \delta_u^w\,, \quad \textit{pour tous } u, w \in \boldsymbol{W}\,,$$

est stable sous l'action des opérateurs $\tilde{A}_v$. Pour tous $v, w \in \boldsymbol{W}$, on a :

$$\tilde{A}_v(\tilde{P}^w) = \begin{cases} \tilde{P}^{wv^{-1}} & \textit{lorsque} \quad \ell(wv^{-1}) = \ell(w) - \ell(v), \\ 0 & \textit{sinon.}\end{cases}$$

En particulier :

$$\boxed{\tilde{P}^w = \tilde{A}_{w^{-1}s}(\tilde{P}^s)}$$

1.4.6 Structure de $\boldsymbol{W}$-module de $\mathrm{App}(\boldsymbol{W};\mathscr{R}(\boldsymbol{T}))$. L'action diagonale du groupe de Weyl sur $\mathbb{E}\boldsymbol{K}\times_{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X}$, donnée par $w\cdot\overline{(m,x)} = \overline{(mw^{-1},wx)}$, induit une action sur $H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{X};\mathbb{Z})$. En faisant opérer $\boldsymbol{W}$ sur $\mathrm{App}(\boldsymbol{W};\mathscr{R}(\boldsymbol{T}))$ par l'action

$$(w\cdot f)(u) = w\cdot(f(w^{-1}u))\,,$$

l'application $\Theta : H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{X};\mathbb{Z}) \to \mathrm{App}(\boldsymbol{W};\mathscr{R}(\boldsymbol{T}))$ est un morphisme de $\boldsymbol{W}$-modules et l'image de la composée Ξ des homomorphismes :

$$\begin{tikzcd} \mathscr{R}(\boldsymbol{T}) \arrow[r, "\gamma^{\boldsymbol{T}}_{\mathbb{E}\boldsymbol{K}}", "\simeq"'] \arrow[rrr, bend right, "\Xi"'] & H^*_{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{X};\mathbb{Z}) \arrow[r, "\rho^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{T}}"] & H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{X};\mathbb{Z}) \arrow[r, hook, "\Theta"] & \mathrm{App}(\boldsymbol{W};\mathscr{R}(\boldsymbol{T})) \end{tikzcd}$$

est contenue dans $\mathrm{App}(\boldsymbol{W};\mathscr{R}(\boldsymbol{T}))^{\boldsymbol{W}}$.

[4] Inutile pour la suite (*cf.* 1.5.2-2).

Or, $f \in \mathrm{App}(\boldsymbol{W};\mathscr{R}(\boldsymbol{T}))^{\boldsymbol{W}}$, si et seulement si, $f(w) = w(f(e))$, pour tout $w \in \boldsymbol{W}$, autrement dit, une application invariante est entièrement déterminée par sa valeur au point $e \in \boldsymbol{W}$. Comme d'autre part $L_e \circ \Xi = \mathrm{id}_{\mathscr{R}(\boldsymbol{T})}$, l'homomorphisme Ξ est injectif et son image est la sous-algèbre $\mathrm{App}(\boldsymbol{W};\mathscr{R}(\boldsymbol{T}))^{\boldsymbol{W}}$. On a donc des identifications

$$\boxed{\mathscr{R}(\boldsymbol{T}) \underset{\gamma^{\boldsymbol{T}}_{\mathbb{E}\boldsymbol{K}}}{=\!=\!=} H^*_{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{X};\mathbb{Z}) \underset{\rho^{\boldsymbol{K}}_{\boldsymbol{T}}}{=\!=\!=} H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{X};\mathbb{Z})^{\boldsymbol{W}} \xrightarrow[\Theta]{\subseteq} \mathrm{App}_b(\boldsymbol{W};\mathscr{R}(\boldsymbol{T}))}$$

et l'égalité, pour tout $w \in \boldsymbol{W}$,

$$\boxed{\Xi \circ A_w = \tilde{A}_w \circ \Xi}$$

qui montre que $\tilde{A}_w$ prolonge l'action de l'opérateur A_w de Bernstein-Gelfand-Gelfand défini dans 1.3.6.

La proposition suivante explique maintenant le lien entre les familles

$$\{P^w\}_{w\in\boldsymbol{W}} \subseteq \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathscr{R}(\boldsymbol{T}) \quad \text{et} \quad \{\tilde{P}^w\}_{w\in\boldsymbol{W}} \subseteq \mathrm{App}_b(\boldsymbol{W};\mathscr{R}(\boldsymbol{T}))$$

Elle montre que d'un point de vue heuristique, P^w correspond, via l'homomorphisme de Chern-Weil $\mathscr{C}\!\mathscr{h}_{\boldsymbol{T}}$, au symétrisé de $\tilde{P}^w$ sous l'action de $\boldsymbol{W}$.

Proposition. *Pour tout $w \in \boldsymbol{W}$, on a :*

$$P^w = \Big(\frac{1}{|\boldsymbol{W}|}\sum_{u\in\boldsymbol{W}} u{\cdot}\tilde{P}^w\Big)(e) = \frac{1}{|\boldsymbol{W}|}\sum_{u\in\boldsymbol{W}} u\big(\tilde{P}^w(u^{-1})\big)\,.$$

Par exemple (*cf.* 1.3.8) :

$$P^s = \frac{1}{|\boldsymbol{W}|}\sum_{u\in\boldsymbol{W}} u\big(\tilde{P}^s(u^{-1})\big) = \frac{s\big(\prod_{\alpha\in\Delta_+}\alpha\big)}{|\boldsymbol{W}|} = \frac{\prod_{\alpha\in\Delta_+}-\alpha}{|\boldsymbol{W}|}\,.$$

1.4.7 Explicitation des opérateurs $\tilde{A}_w$. L'action du groupe de Weyl s'avère également très utile pour la description des opérateurs $\tilde{A}_w$. La proposition suivante est conséquence immédiate du fait que ces opérateurs sont $\boldsymbol{W}$-équivariants (il suffit de le vérifier pour les $\tilde{A}_{r_\alpha}$ ce qui est très simple).

Proposition ([A₄]). *Pour $w \in \boldsymbol{W}$ et $f \in \mathrm{App}(\boldsymbol{W};\mathscr{Q}(\boldsymbol{T}))$ on a :*

$$\boxed{\tilde{A}_w(f)(v) = v\big(L_w(v^{-1}{\cdot}f)\big) = \sum\nolimits_{u\preccurlyeq w} v(q^u_w)\, f(vu)} \text{ pour tout } v \in \boldsymbol{W}.$$

1.4.8 La matrice $\boldsymbol{R}$ et le cup produit de $H^*_{\boldsymbol{T}}(\boldsymbol{X};\mathbb{Z})$. Les remarques de 1.4.6 et la proposition précédente interviennent dans une jolie description des coefficients de la matrice $R = Q^{-1}$. En effet :

$$\begin{aligned}\delta_v^u = L_v(\tilde P^u) = \sum_a q_v^a\, \tilde P^u(a) &= \sum_a q_v^a\, \big(\tilde A_{u^{-1}s}(\tilde P^s)\big)(a)\\ &= \sum_a q_v^a \Big(\sum_b a\big(q^b_{u^{-1}s}\big)\,\tilde P^s(ab)\Big)\\ &= \sum_a q_v^a\, a\big(q^{a^{-1}s}_{u^{-1}s}\big)\,\tilde P^s(s)\end{aligned}$$

et le coefficient de la matrice R en ligne v et colonne w vaut ([5]) :

$$R_{v,w} = v(q^{v^{-1}s}_{w^{-1}s})\big(\textstyle\prod_{\alpha\in\Delta_+}\alpha\big)\,.$$

En appliquant le théorème de (D-6) le cup produit de $H_{\boldsymbol T}^*(\boldsymbol X;\mathbb Z)$ devient explicite.

Théorème. *Pour tous $w_1, w_2 \in \boldsymbol W$, on a*

$$\boxed{\tilde P^{w_1}\tilde P^{w_2} = \big(\textstyle\prod_{\alpha\in\Delta_+}\alpha\big)^2 \displaystyle\sum_{u\in\boldsymbol W}\Big(\sum_{v\in\boldsymbol W} q_u^v\, v(q^{v^{-1}s}_{w_1^{-1}s})\, v(q^{v^{-1}s}_{w_2^{-1}s})\Big)\,\tilde P^u}$$

où l'on convient que $q_u^v = 0$ pour tous $v \not\preccurlyeq u$.

1.4.9 Le cup produit de $H_{\boldsymbol T}^*(\overline{\boldsymbol X}_\varpi;\mathbb Z)$. Fixons un élément $\varpi \in \boldsymbol W$. Tout ce qui a été dit à propos de $H_{\boldsymbol T}^*(\boldsymbol X;\mathbb Z)$ s'applique à $H_{\boldsymbol T}^*(\overline{\boldsymbol X}_\varpi;\mathbb Z)$ à de petites modifications près.

1) Les éléments de la base $\{\tilde P^w_\varpi\}_{w\preccurlyeq\varpi}$ de $H_{\boldsymbol T}^*(\overline{\boldsymbol X})$, duale de la base $\{\sigma_w\}_{w\preccurlyeq\varpi}$ de cycles de Schubert de $\overline{\boldsymbol X}_\varpi$, sont les restriction des applications $\tilde P^w$ de 1.4.5 à l'ensemble $\{u \mid u \preccurlyeq \varpi\}$.
2) Le cup produit de $H_{\boldsymbol T}^*(\overline{\boldsymbol X}_\varpi;\mathbb Z)$ est donné par la même formule du théorème 1.4.8 dans laquelle les indices w_1, w_2, u, v parcourent maintenant l'ensemble $\{u \mid u \preccurlyeq \varpi\}$.

1.4.10 Liens avec l'article de Kostant-Kumar [KK$_1$]. Notons $\mathbb Z[\boldsymbol W]$ la $\mathbb Z$-algèbre de $\boldsymbol W$. On munit $\mathcal Q[\boldsymbol W] = \mathbb Z[\boldsymbol W]\otimes_{\mathbb Z}\mathcal Q(\boldsymbol T)$ de la structure d'algèbre donnée par le produit

$$(\delta_w\otimes Q_1)\cdot(\delta_v\otimes Q_2) = \delta_{wv}\otimes(v^{-1}{\cdot}Q_1)\,Q_2\,.$$

Kostant et Kumar s'intéressent au $\mathcal Q(\boldsymbol T)$-module à gauche $\Omega = \mathrm{Hom}^\delta_{\mathcal Q(\boldsymbol T)}(\mathcal Q[\boldsymbol W], \mathcal Q(\boldsymbol T))$ des homomorphismes de $\mathcal Q(\boldsymbol T)$-modules à *droite* sur lequel ils font opérer $\mathcal Q[\boldsymbol W]$ par la formule

$$(a{\cdot}\psi)(b) = \psi(a^t{\cdot}b)\,,\quad \text{pour tous } a, b\in\mathcal Q[\boldsymbol W],\ \psi\in\Omega,$$

[5] Je remercie Alain Lascoux de m'avoir fait part de ces égalités qu'il avait observées en 1986 dans le cas des variétés de drapeaux des groupes $\mathrm{SL}(n;\mathbb C)$.

où $a \mapsto a^t$ est l'anti-automorphisme de $\mathscr{Q}[\boldsymbol{W}]$ donné par $(\delta_w \otimes Q)^t = \delta_{w^{-1}} \otimes w{\cdot}Q$. Or, Ω est canoniquement isomorphe à $\mathrm{Appl}(\boldsymbol{W};\mathscr{Q}(\boldsymbol{T}))$ et l'action de $\tilde{A}_\alpha$ sur ce dernier correspond alors à l'action de l'élément $x_\alpha \in \mathscr{Q}[\boldsymbol{W}]$ définit par Kostant-Kumar :

$$x_\alpha := -(\delta_{r_\alpha} + \delta_e) \otimes \alpha^{-1}\,.$$

Grâce à cette observation simple, la proposition suivante, démontrée par des méthodes combinatoires dans [KK$_1$], apparaît comme corollaire immédiat du théorème 1.4.4-1-(b).

Proposition. *Soient $r_{\alpha_i}, r_{\beta_i}$ des réflexions simples.*

a) *Lorsque $\ell(r_{\alpha_1}\cdots r_{\alpha_\ell}) = \ell$, on a $x_{\alpha_1}\cdots x_{\alpha_\ell} = x_{\beta_1}\cdots x_{\beta_\ell}$, pour toute décomposition réduite $r_{\beta_1}\cdots r_{\beta_\ell}$ de $r_{\alpha_1}\cdots r_{\alpha_\ell}$.*

b) *Lorsque $\ell(r_{\alpha_1}\cdots r_{\alpha_\ell}) < \ell$, on a $x_{\alpha_1}\cdots x_{\alpha_\ell} = 0$.*

Pour chaque $w \in \boldsymbol{W}$, Kostant-Kumar notent x_w l'élément de $\mathscr{Q}[\boldsymbol{W}]$, défini d'après l'assertion (a), à l'aide d'une décomposition réduite quelconque $r_{\alpha_1}\cdots r_{\alpha_\ell}$ de w. L'action de x_w sur Ω correspond donc exactement à l'action de $\tilde{A}_w$ sur $\mathrm{Appl}(\boldsymbol{W};\mathscr{Q}(\boldsymbol{T}))$. Les opérateurs x_w, considérés pour la première fois dans la note [KK$_1$], apparaissent ainsi comme les localisations des opérateurs de Demazure $\mathscr{D}_w$ en cohomologie équivariante.

1.4.11 Sous-module $\boldsymbol{\Lambda}$ et cohomologie $\boldsymbol{T}$-équivariante de $\boldsymbol{X}$. Un objet important de [KK$_1$] est la partie $\Lambda \subseteq \Omega$ définie comme l'ensemble des $h \in \Omega$ satisfaisant aux deux conditions suivantes :

a) $h(x_w^t) \in \mathscr{R}(\boldsymbol{T})$, pour tout $w \in \boldsymbol{W}$;

b) $h(x_w^t) = 0$ pour presque tout $w \in \boldsymbol{W}$.

On reconnaît dans (a) la condition (A-b) du théorème 1.4.4-2 qui caractérise l'image du morphisme de restriction aux points fixes $\Theta : H_{\boldsymbol{T}}^*(\boldsymbol{X};\mathbb{Z}) \to H_{\boldsymbol{T}}^*(\boldsymbol{W};\mathscr{R}(\boldsymbol{T}))$. Par conséquent, $\Lambda = H_{\boldsymbol{T}}^*(\boldsymbol{X};\mathbb{Z})$ et le théorème suivant est immédiat.

Théorème ([KK$_1$]). *On munit Ω de la structure d'algèbre de $\mathrm{App}(\boldsymbol{W};\mathscr{Q}(\boldsymbol{T}))$.*

1) *Λ est une $\mathscr{R}(\boldsymbol{T})$-sous-algèbre de Ω ;*
2) *Λ est un $\mathscr{R}(\boldsymbol{T})$-module libre admettant une base $\{\xi^w\}_{w\in\boldsymbol{W}}$ vérifiant $\xi^w(x_v^t) = \delta_v^w$, pour tous $v, w \in \boldsymbol{W}$.*
3) *Λ est stable sous l'action des $x_w \in \mathscr{Q}[\boldsymbol{W}]$;*
4) *L'application $\theta : \Lambda \otimes_{\mathscr{R}(\boldsymbol{T})} \mathbb{Z} \to H^*(\boldsymbol{X};\mathbb{Z})$ définie par $\theta(\xi^w \otimes 1) = \mu^w$, où μ^w est la classe de cohomologie duale du cycle de Schubert σ_w, est un isomorphisme d'algèbres graduées.*

Remarque. L'identification faite dans [A$_4$] entre l'algèbre Λ et la cohomologie $\boldsymbol{T}$-équivariante de $\boldsymbol{X}$ est à la base de l'article [KK$_2$] consacré à la K-théorie $\boldsymbol{T}$-équivariante de $\boldsymbol{X}$.

1.5 Classes d'Euler équivariantes et singularités

1.5.1 Classes d'Euler équivariantes. Revenons sur l'expression des fractions rationnelles q_w^u de la section 1.4.5 :

$$q_w^u = \sum_{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_\ell)} \frac{1}{\prod_{j=1}^{\ell} -\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_j(\alpha_j)}\,, \qquad \text{pour tous } u \preccurlyeq w \in \boldsymbol{W}.$$

Ce qui nous intéresse dans ces expressions maintenant, c'est la fait qu'il s'agit d'une somme finie d'inverses de produits de $\ell(w)$ poids de $\boldsymbol{T}$. Il est *a priori* très surprenant que le résultat final d'une telle somme, qui comporte la plupart du temps beaucoup de termes additifs, puisse être l'inverse d'un seul produit de $\ell(w)$ poids. C'est pourtant bien ce que l'on constate lorsque $\overline{\boldsymbol{X}}_w = \boldsymbol{X}$, autrement dit, lorsque où $w = s$ (l'élément de plus grande longueur de $\boldsymbol{W}$). Dans ce cas, la formule localisation de Berline-Vergne donne :

$$q_s^u = (-1)^{\ell(u)} \frac{1}{\prod_{\alpha\in\Delta_+} -\alpha}\,, \qquad \text{pour tout } u \in \boldsymbol{W}.$$

La raison de cette simplification est intimement liée au fait que $\overline{\boldsymbol{X}}_s$ est une variété lisse. En effet, dans ce cas, $1/q_s^u$ correspond à la classe d'Euler $\boldsymbol{T}$-équivariante du plongement $\{u\} \subseteq \boldsymbol{X}$ dont je rappelle à continuation l'idée générale de la construction.

Pour fixer les idées, donnons-nous une variété algébrique complexe $\boldsymbol{Y}$ de dimension d munie de la topologie transcendante et orientée par sa structure complexe. Un point $y \in \boldsymbol{Y}$ est dit « *rationnellement lisse dans* $\boldsymbol{Y}$ » s'il existe un voisinage $U_y \subseteq \boldsymbol{Y}$ tel que, pour tout $z \in U_y$:

$$H_z^i\big(\boldsymbol{Y};\mathbb{Q}\big) = 0 \text{ si } i \neq 2d, \quad \text{et} \quad H_z^{2d}\big(\boldsymbol{Y};\mathbb{Q}\big) \equiv \mathbb{Q}\,.$$

Lorsque tout $y \in \boldsymbol{Y}$ est rationnellement lisse dans $\boldsymbol{Y}$, on dit que $\boldsymbol{Y}$ est « *rationnellement lisse* ».

Supposons $\boldsymbol{Y}$ munie d'une action de $\boldsymbol{T}$ à gauche (action continue pour la topologie transcendante suffit). Pour tout point fixe $y \in \boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}}$ rationnellement lisse dans $\boldsymbol{Y}$, le morphisme de Thom-Gysin : $\int_{\boldsymbol{Y}} : H^*_{\boldsymbol{T},y}(\boldsymbol{Y};\mathbb{Q})[2d] \equiv H^*_{\boldsymbol{T}}(\{y\};\mathbb{Q})$ est bien défini et c'est un isomorphisme. Notons $\Phi_{y,\boldsymbol{Y}}$ son inverse, puis $\tau(y,\boldsymbol{Y}) = \Phi_{y,\boldsymbol{Y}}(1)$ la « *classe de Thom* ».

$$
\begin{tikzcd}
\tau(y,\boldsymbol{Y}) \arrow[r, phantom, "\in"] & H^*_{\boldsymbol{T},y}(\boldsymbol{Y};\mathbb{Q}) \arrow[rr, "\text{restriction}", "\text{de } \boldsymbol{Y} \text{ à } \{y\}"'] \arrow[d, shift left, "\int_{\boldsymbol{Y}}"] & & H^*_{\boldsymbol{T}}(\{y\};\mathbb{Q}) \ni \mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\big(y,\boldsymbol{Y}\big) \\
1 \arrow[u, "\Phi_{y,\boldsymbol{Y}}"] \arrow[r, phantom, "\in"] & H^*_{\boldsymbol{T}}(\{y\};\mathbb{Q})[-2d] \arrow[u, shift left, "\equiv"] \arrow[urr, dashed, "\mathrm{m}(\mathrm{Eu}(y,\boldsymbol{Y}))"'] & &
\end{tikzcd}
$$

La « *classe d'Euler équivariante de y dans $\boldsymbol{Y}$* » est l'élément de $H_{\boldsymbol{T}}^{2\dim_{\mathbb{C}}\boldsymbol{Y}}(\{y\};\mathbb{Q})$ défini par la restriction de la classe de Thom au point y, *i.e.*

$$\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\big(y,\boldsymbol{Y}\big) := \tau(y,\boldsymbol{Y})|_y\,,$$

L'identification canonique entre $H^*_{\boldsymbol{T}}(\{y\};\mathbb{Q})$ et $\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathscr{R}(\boldsymbol{T})$ réalise la classe d'Euler équivariante d'un point fixe rationnellement lisse comme un polynôme homogène de degré $\dim_{\mathbb{C}}\boldsymbol{Y}$ à coefficients dans $\mathbb{Q}$. On a par construction

$$\mu|_y = \mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\big(y,\boldsymbol{Y}\big)\int_{\boldsymbol{Y}}\mu\,, \quad \text{pour tout } \mu\in H^*_{\boldsymbol{T},y}(\boldsymbol{Y}).$$

En particulier, lorsque $\boldsymbol{Y}=\overline{\boldsymbol{X}}_s$, on a $q_s^u = 1/\,\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\big(u,\boldsymbol{X}\big)$, pour tout $u\in\boldsymbol{W}$.

1.5.2 Classes d'Euler équivariantes généralisées. Lorsque y *n'est pas rationnellement lisse dans* $\boldsymbol{Y}$, l'application $\int_{\boldsymbol{Y}}: H^*_{\boldsymbol{T},y}(\boldsymbol{Y};\mathbb{Q})\to H^*_{\boldsymbol{T}}(\{y\};\mathbb{Q})$ n'est pas nécessairement surjective ou injective et le formalise précédent ne s'applique plus tel quel. Maintenant, ***si y est isolé dans*** $\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}}$, le théorème de localisation permet de prouver que $\int_{\boldsymbol{Y}}$ est néanmoins bijective modulo $\mathscr{R}(\boldsymbol{T})$-torsion, de même par ailleurs que la restriction $H^*_{\boldsymbol{T},y}(\boldsymbol{Y};\mathbb{Q})\to H^*_{\boldsymbol{T}}(\{y\};\mathbb{Q})$. Il s'ensuit que pour tout élément *sans torsion* $\mu\in H^*_{\boldsymbol{T},y}(\boldsymbol{Y})$, la fraction $\mu|_y{}^{-1}\int_{\boldsymbol{Y}}\mu\ \in\mathscr{Q}(\boldsymbol{T})$, est *non nulle et ne dépend pas du choix d'un tel* μ, d'où la définition suivante.

Définition ([A₈]). *Soit $\boldsymbol{Y}$ une variété algébrique complexe munie d'une action de $\boldsymbol{T}$ continue pour la topologie transcendante. Pour tout point $y\in\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}}$* ***isolé****, la fraction rationnelle :*

$$\boxed{\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\big(y,\boldsymbol{Y}\big) := \frac{\mu|_y}{\int_{\boldsymbol{Y}}\mu}\in\mathscr{Q}(\boldsymbol{T})}$$

où μ est un élément sans torsion arbitrairement choisi dans $H^*_{\boldsymbol{T},y}(\boldsymbol{Y})$, est appelée la « classe d'Euler $\boldsymbol{T}$-équivariante (généralisée) de y dans $\boldsymbol{T}$ ». Lorsque $\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\big(y,\boldsymbol{Y}\big)\in\mathbb{Q}\otimes\mathscr{R}(\boldsymbol{T})$ on dit que cette classe est « polynomiale ».

Il est clair que lorsque $y\in\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}}$ est rationnellement lisse dans $\boldsymbol{Y}$, la classe d'Euler équivariante généralisée est polynomiale et coïncide avec la classe d'Euler équivariante classique.

Avec cette définition l'égalité dans la proposition suivante, connue sous le nom de «*formule de localisation*» dans le contexte différentiable est toujours vérifiée lorsque $\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}}$ est discret, *même si* $\boldsymbol{Y}$ *est singulière*.

1.5.2-1. Proposition ([A$_8$]). *Les données étant comme ci-dessus,*

$$\int_{\boldsymbol{Y}} \mu = \sum_{y\in\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}}} \frac{\mu|_y}{\operatorname{Eu}_{\boldsymbol{T}}\big(y,\boldsymbol{Y}\big)}\,, \qquad \textit{pour tout } \mu \in H^*_{\boldsymbol{T},\mathrm{c}}(\boldsymbol{Y},\mathbb{Q}).$$

En particulier, si $\boldsymbol{Y}$ *est compacte connexe de dimension strictement positive*

$$0 = \sum_{y\in\boldsymbol{Y}^{\boldsymbol{T}}} \frac{1}{\operatorname{Eu}_{\boldsymbol{T}}\big(y,\boldsymbol{Y}\big)}\,.$$

1.5.2-2. Exemple. *Dans le cas où* $\boldsymbol{Y} = \overline{\boldsymbol{X}}_w$*, on a*

$$\begin{cases} q_w^u = 1/\operatorname{Eu}_{\boldsymbol{T}}\big(u,\overline{\boldsymbol{X}}_w\big) & \textit{pour tout } u \preccurlyeq w. \\ 0 = \sum_{u\preccurlyeq w} q_w^u & \textit{lorsque } w \neq e. \end{cases}$$

Et la fraction q_w^u *est l'inverse d'un polynôme homogène de degré* $\ell(w)$ *lorsque* u *est rationnellement lisse dans la variété de Schubert* $\overline{\boldsymbol{X}}_w$.

1.5.3 Critères de lissité. Dans [A$_8$] on introduit le formalise du morphisme de Thom-Gysin équivariant dans la catégorie de $\boldsymbol{T}$-pseudovariétés dans le but d'étudier les propriétés des classes d'Euler équivariantes généralisés liées à la géométrie des espaces sous-jacents. On obtient alors des conditions assurant l'équivalence, pour un point fixe isolé y d'une variété algébrique $\boldsymbol{Y}$ munie d'une action de $\boldsymbol{T}$, entre le fait d'être rationnellement lisse et le fait d'avoir une classe d'Euler équivariante polynomiale. L'un des principaux résultats de ce travail est le critère de lissité suivant.

Théorème ([A$_8$]). *Soit* $\boldsymbol{T} := (\mathbb{S}^1)^r \subseteq (\mathbb{C}^*)^r =: \boldsymbol{H}$. *On considère une représentation linéaire algébrique de* $\boldsymbol{H}$ *dans* $\mathbb{C}^n$ *à poids dans un même demi-espace ouvert, de multiplicité* 1 *et deux-à-deux non colinéaires. Soit* $\boldsymbol{Y}$ *un fermé de Zariski dans* $\mathbb{C}^n$*, équidimensionnel et* $\boldsymbol{H}$*-stable. Soit* $\mathbb{E}_{\boldsymbol{Y}}$ *le* $\mathbb{C}$*-sous-espace vectoriel de* $\mathbb{C}^n$ *engendré par les droites vectorielles* $\boldsymbol{H}$*-stables contenues dans* $\boldsymbol{Y}$. *Notons* $d_{\boldsymbol{Y}} := \dim_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{Y})$, $d_{\mathbb{E}} := \dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{E}_{\boldsymbol{Y}})$ *et* $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_{d_{\mathbb{E}}}\}$ *la liste des poids de* $\boldsymbol{T}$ *dans* $\mathbb{E}_{\boldsymbol{Y}}$.

a) *Alors :*
$$\frac{1}{\operatorname{Eu}_{\boldsymbol{T}}\big(0,\boldsymbol{Y}\big)} = (-1)^{d_{\mathbb{E}}}\frac{P}{\alpha_1\cdots\alpha_{d_{\mathbb{E}}}}\,, \qquad \textit{avec } P \in H_{\boldsymbol{T}}^{2(d_{\mathbb{E}}-d_{\boldsymbol{Y}})}.$$

De plus : $P = 1$, si et seulement si, 0 *est algébriquement lisse dans* $\boldsymbol{Y}$.

b) *Supposons qu'il existe un plongement* $\jmath : \mathbb{C}^* \hookrightarrow \boldsymbol{H}$ *tel que les poids* α_i *restreints à* $\mathbb{C}^*$ *soient* strictement positifs *et tel que le quotient* $(\boldsymbol{Y}\backslash\{0\})/\jmath(\mathbb{C}^*)$ *soit rationnellement* *lisse et sans cohomologie rationnelle en degrés impairs. Alors :*

$$\frac{1}{\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\big(0,\boldsymbol{Y}\big)} = (-1)^{d_{\mathbb{E}}}\,\frac{P}{\alpha_1\cdots\alpha_{d_{\mathbb{E}}}}\,,\qquad \textit{avec } P\in H_{\boldsymbol{T}}^{2(d_{\mathbb{E}}-d_{\boldsymbol{Y}})}\backslash\{0\} \textit{ sans facteur linéaire.}$$

De plus : P est scalaire, si et seulement si*, 0 est rationnellement lisse dans $\boldsymbol{Y}$.*

1.5.4 Critères de lissité pour les variétés de Schubert. Dans le cas des variétés de Schubert, la démarche de Kazhdan-Lusztig de l'appendice de [KL] conduit à une situation où l'on peut appliquer directement le critère 1.5.3-(b) pour démontrer le théorème suivant.

Théorème ([A$_8$]). *Soient $v \preccurlyeq w \in \boldsymbol{W}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) *Le point v est rationnellement lisse dans $\overline{\boldsymbol{X}}_w$.*
b) $\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\big(y,\overline{\boldsymbol{X}}_w\big)$ *est polynomiale, pour tout $y\in\boldsymbol{W}$ vérifiant $v\preccurlyeq y\prec w$.*

Les méthodes de [A$_8$] redémontrent les critères de lissité précédemment connus suivants.

Théorème. *Soient $v \preccurlyeq w \in \boldsymbol{W}$.*
On note $\boldsymbol{S}(v,w)$ l'ensemble des réflexions $r\in\boldsymbol{W}$ vérifiant $rv\preccurlyeq w$, et $\mathfrak{s}(v,w)$ le produit des racines $\gamma\in v\Delta_-$ telles que $r_\gamma\in\boldsymbol{S}(v,w)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

a) *Le point v est rationnellement lisse dans $\overline{\boldsymbol{X}}(w)$.*
b) $\mathrm{Card}(\boldsymbol{S}(y,w)) = \ell(w)$*, pour tout $y\in\boldsymbol{W}$ vérifiant $v\preccurlyeq y\prec w$.* ([Crl])
c) $\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\big(y,\overline{\boldsymbol{X}}(w)\big) = \star\,\mathfrak{s}(y,w)$*, pour tout $y\in\boldsymbol{W}$ vérifiant $v\preccurlyeq y\prec w$,* ([Kum])
où $\star$ est un scalaire non nul.

De même que :

d) *Le point v est algébriquement lisse dans $\overline{\boldsymbol{X}}(w)$.*
e) $\mathrm{Eu}_{\boldsymbol{T}}\big(v,\overline{\boldsymbol{X}}(w)\big) = (-1)^{\mathrm{Card}(\boldsymbol{S}(v,w))}\,\mathfrak{s}(v,w)$, ([Kum], [Bri])

§ 2. Cohomologie de Monsky-Washnitzer

2.1 Conjectures de Weil

Soit $\boldsymbol{X}$ une variété algébrique définie sur un corps fini $k=\mathbb{F}_q$ et soit $\overline{\boldsymbol{X}}$ la variété algébrique définie par $\boldsymbol{X}$ sur la clôture algébrique $\overline{k}$ de k. Pour chaque $r\in\mathbb{N}$, on note N_r le nombre de points de $\overline{\boldsymbol{X}}$ à coordonnées dans $\mathbb{F}_{q^r}\subseteq\overline{k}$. La fonction Zéta de $\boldsymbol{X}$ est définie par :

$$Z(\boldsymbol{X};t) := \exp\Big(\sum\nolimits_{r\geq 1} N_r\,\frac{t^r}{r}\Big)\,.$$

Vers la fin des années 40, André Weil énonce un certain nombre de conjectures à propos de $Z(\boldsymbol{X};t)$ qu'il vérifie dans des cas particuliers. La première, la «*rationalité de la fonction Zéta*», affirme que :

$Z(\boldsymbol{X};t)$ est le quotient de deux polynômes à coefficients rationnels

et la plus profonde : l'«*analogue de l'hypothèse de Riemann*», dans le cas où $\boldsymbol{X}$ est non singulière, projective, de dimension n sur $\mathbb{F}_q$, donne des précisions à propos de la factorisation du numérateur et du dénominateur de $Z(\boldsymbol{X};t)$. La conjecture dit qu'il est possible d'écrire

$$Z(\boldsymbol{X};t) = \frac{P_1(t)\,P_3(t)\cdots P_{2n-1}(t)}{P_0(t)\,P_2(t)\cdots\cdots\cdots P_{2n}(t)}$$

avec

$$\begin{cases} P_0(t) = 1 - t\,; \\ P_i(t) = \prod_j (1 - \alpha_{i,j}\,t) \in \mathbb{Z}[t]\,, \quad \text{pour } 0 < i < 2n\,; \\ P_{2n}(t) = 1 - q^n\,t; \end{cases}$$

où les nombres complexes $\alpha_{i,j}$ sont des entiers algébriques et vérifient $|\alpha_{i,j}| = q^{i/2}$.

De plus, Weil indique une voie de démonstration de ses conjectures basée sur l'existence d'une théorie cohomologique à coefficients dans un corps de caractéristique nulle, dans laquelle la formule des points fixes de Lefschetz est valable. Dans ce cas, le degré du polynôme P_i correspond exactement au i-ième nombre de Betti de $\boldsymbol{X}$ pour cette cohomologie.

Sans entrer dans les détails historiques des progrès successifs dans les démonstrations des conjectures de Weil (*cf.* [Har] p. 449), signalons que la première preuve générale de la rationalité de la fonction Zéta est due à Dwork ([Dw], 1960) par des méthodes d'analyse p-adique. La plupart des autres travaux sur le sujet sont plutôt centrés dans la recherche de théories cohomologiques à coefficients dans un corps de caractéristique nulle donnant des nombres de Betti tels que prédits par la conjecture. Parmi ces théories, la cohomologie ℓ-adique ($\ell \neq p$), introduite par Grothendieck en 1958, a effectivement permis de démontrer les conjectures de Weil : la rationalité de la fonction Zéta en 1965 (Grothendieck [G_2]), et le reste des conjectures en 1974 (Deligne [Del]). La cohomologie de Monsky-Washnitzer introduite en 1968 à les mêmes ambitions (cette fois pour $\ell = p$) et donne une preuve de la rationalité de la fonction Zéta en 1971 (Monsky [Mon]). Mais si ce premier résultat est d'un très bon augure, la théorie demeure insuffisante pour la partie des conjectures qui concernent les variétés projectives dans la mesure où la cohomologie de Monsky-Washnitzer est définie uniquement pour les variétés affines. Ce qui manque c'est une définition globale d'une cohomologie de de Rham p-adique pour une variété non singulière (affine ou non) qui soit canoniquement isomorphe à la cohomologie de Monsky-Washnitzer dans le cas affine. On y reviendra dans la section 5.1.

2.2 Cohomologie de Monsky-Washnitzer

L'idée de la cohomologie de de Rham p-adique de Monsky-Washnitzer pour une variété affine non singulière sur $\mathbb{F}_p$ est la suivante. En géométrie algébrique on sait associer fonctoriellement à une algèbre sur un anneau son complexe de de Rham, mais la cohomologie de ce complexe est un module sur l'anneau de base et dans les cas des algèbres sur un corps fini, la cohomologie de de Rham est de torsion sur $\mathbb{Z}$, ce qui l'exclut de la démarche proposée par Weil.

Très inspirés par les travaux de Grothendieck, Monsky-Washnitzer proposent alors d'associer à une algèbre $\overline{\boldsymbol{A}}$ sur $\mathbb{F}_p$ une certaine sous-algèbre $\boldsymbol{A}^\dagger$ du complété séparé p-adique $\widehat{\boldsymbol{A}}$ d'une algèbre $\boldsymbol{A}$ « *lisse* » sur $\mathbb{Z}_p$ dont la réduction modulo p est isomorphe à $\overline{\boldsymbol{A}}$. On savait depuis Grothendieck que la classe d'isomorphie des algèbres $\widehat{\boldsymbol{A}}$ était indépendante du « *relèvement* » $\boldsymbol{A}$ choisi, mais la cohomologie de de Rham de $\widehat{\boldsymbol{A}}$ ne donnant pas le bons nombres de Betti même sur des exemples très simples, Monsky-Washnitzer proposent la sous-algèbre $\boldsymbol{A}^\dagger \subseteq \widehat{\boldsymbol{A}}$ qui relève toujours $\overline{\boldsymbol{A}}$ et qui non seulement est dans une classe d'isomorphie indépendante du relèvement $\boldsymbol{A}$, mais qui en plus corrige le défaut des nombres de Betti. L'algèbre $\boldsymbol{A}^\dagger$ est la « *complétion p-adique faible* » de $\boldsymbol{A}$.

2.2.1 Complétion $\boldsymbol{I}$-adique faible. Soient $\boldsymbol{R}$ un anneau nœthérien et $\boldsymbol{I}$ un idéal dans $\boldsymbol{R}$. Notons $\overline{\boldsymbol{R}} := \boldsymbol{R}/\boldsymbol{I}$. Par réduction modulo $\boldsymbol{I}$, on fait correspondre à une $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$, la $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbre $\overline{\boldsymbol{A}} := \overline{\boldsymbol{R}} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{A}$ et à un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\alpha : \boldsymbol{A}_1 \to \boldsymbol{A}_2$ le morphisme $\overline{\alpha} : \overline{\boldsymbol{A}}_1 \to \overline{\boldsymbol{A}}_2$ donné par $\overline{\alpha}(x \otimes a) := x \otimes \alpha(a)$. Un « *relèvement d'une* $\overline{\boldsymbol{R}}$-*algèbre* $\overline{\boldsymbol{A}}$ » est alors la donnée d'un morphisme surjectif de $\boldsymbol{R}$-algèbres $p_{\boldsymbol{A}} : \boldsymbol{A} \to \overline{\boldsymbol{A}}$ dont la réduction $\overline{p}_{\boldsymbol{A}}$ est bijective. La notion de relèvement des morphismes de $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres est analogue.

Dans [G$_1$,SGA], Grothendieck introduit la notion de « *morphisme lisse* » dans la catégorie des schémas. Version relative de la notion de variété non singulière sur un corps, c'est une propriété stable par composition et par changement de base et donne lieu, dans le cas affine, à la notion d'« *algèbre lisse sur un anneau* » qui remplacera dans la suite l'expression "variété affine non singulière" des sections précédentes. La réduction modulo $\boldsymbol{I}$ d'une $\boldsymbol{R}$-algèbre lisse est une $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbre lisse.

Pour toute $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$, on note $\widehat{\boldsymbol{A}}$ l'algèbre complétée séparée de $\boldsymbol{A}$ pour la topologie $\boldsymbol{I}$-adique, *i.e.* $\widehat{\boldsymbol{A}} := \varprojlim_m \boldsymbol{A}/\boldsymbol{I}^m{\cdot}\boldsymbol{A}$. Le corps de fractions de $\widehat{\boldsymbol{R}}$ est noté $\boldsymbol{K}$.

Dans [MW], Monsky et Washnitzer associent à une $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$, la sous-algèbre $\boldsymbol{A}^\dagger$ de $\widehat{\boldsymbol{A}}$ des éléments z pouvant s'exprimer comme une somme infinie :

$$z = \sum\nolimits_{j\geqslant 0} p_j(x_1,\ldots,x_n) \tag{$*$}$$

où l'entier n et les éléments $x_1, \ldots, x_n$ sont indépendants de j, et dans laquelle :

$$\begin{cases} \bullet\ x_1, \ldots, x_n \in \boldsymbol{A}\,; \\ \bullet\ p_j \in \boldsymbol{I}^j \cdot \boldsymbol{R}[X_1, \ldots, X_n], \text{ pour tout } j \in \mathbb{N}\,; \\ \bullet\ \text{l'ensemble } \{\frac{\deg p_j}{j+1}\}_{j \in \mathbb{N}} \text{ est borné.} \end{cases}$$

L'algèbre $\boldsymbol{A}^\dagger$ est « *la complétion $\boldsymbol{I}$-adique faible de $\boldsymbol{A}$* » ([6]). De manière analogue, on fait correspondre à tout morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\alpha : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ un morphisme $\alpha^\dagger : \boldsymbol{A}^\dagger \to \boldsymbol{B}^\dagger$ et la correspondance $(\_)^\dagger$ est fonctorielle.

L'idée d'une cohomologie de de Rham $\boldsymbol{I}$-adique à coefficients dans $\boldsymbol{K}$ est alors la suivante. Soit $\overline{\boldsymbol{A}}$ une $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbre lisse pour laquelle il existe un relèvement $\boldsymbol{A}$, lisse sur $\boldsymbol{R}$. Soit $\Omega^1_{\boldsymbol{A}^\dagger/\boldsymbol{R}^\dagger}$ le module universel des différentielles relatives de $\boldsymbol{A}^\dagger$ sur $\boldsymbol{R}^\dagger$ et posons

$$\widetilde{\Omega}^1(\boldsymbol{A}^\dagger; \boldsymbol{K}) := \frac{\Omega^1_{\boldsymbol{A}^\dagger/\boldsymbol{R}^\dagger}}{\bar{0}} \otimes_{\boldsymbol{R}^\dagger} \boldsymbol{K}\,,$$

où $\bar{0}$ désigne l'adhérence de 0 pour la topologie $\boldsymbol{I}$-adique. Le complexe de de Rham $\Omega^*(\widehat{\boldsymbol{A}}; \widehat{\boldsymbol{R}})$ induit une différentielle canonique sur le module gradué

$$\widetilde{\Omega}^*(\boldsymbol{A}^\dagger; \boldsymbol{K}) := \textstyle\bigwedge^*_{\boldsymbol{K}} \widetilde{\Omega}^1(\boldsymbol{A}^\dagger; \boldsymbol{K}) \tag{$*$}$$

dont la cohomologie est le candidat proposé par Monsky-Washnitzer pour la « *cohomologie de de Rham $\boldsymbol{I}$-adique de $\overline{\boldsymbol{A}}$* », notée $H^*_{DR}(\overline{\boldsymbol{A}}/\boldsymbol{K})$.

Ensuite, pour tout morphisme de $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres lisses $\bar{\alpha} : \overline{\boldsymbol{A}}_1 \to \overline{\boldsymbol{A}}_2$ pour lequel il existe des relèvements $\boldsymbol{A}_i$ lisses sur $\boldsymbol{R}$ des $\overline{\boldsymbol{A}}_i$ et un relèvement $\alpha : \boldsymbol{A}_1 \to \boldsymbol{A}_2$ de $\bar{\alpha}$, on fait correspondre le morphisme induit $H^*_{DR}(\alpha^\dagger) : H^*_{DR}(\overline{\boldsymbol{A}}_1/\boldsymbol{K}) \to H^*_{DR}(\overline{\boldsymbol{A}}_2/\boldsymbol{K})$.

On voit déjà dans cette description hâtive quelques-unes des difficultés principales des fondements de cette cohomologie liées à l'existence et à l'ambiguïté des relèvements.

R-i) Il faut que chaque algèbre lisse sur $\overline{\boldsymbol{R}}$ admette un relèvement lisse sur $\boldsymbol{R}$.

R-ii) Il faut que pour tout morphisme entre deux $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres lisses $\bar{\alpha} : \overline{\boldsymbol{A}}_1 \to \overline{\boldsymbol{A}}_2$ il existe des relèvements $\boldsymbol{A}_i$ lisses sur $\boldsymbol{R}$ des $\overline{\boldsymbol{A}}_i$ et un relèvement $\alpha : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ de $\bar{\alpha}$.

R-iii) Il faut que les cohomologies de de Rham $\boldsymbol{I}$-adiques définies à l'aide de deux relèvements soient canoniquement isomorphes, ou, ce qui revient au même, que le morphisme

$$H^*_{DR}(\alpha^\dagger) : H^*\big(\widetilde{\Omega}^*(\boldsymbol{A}_1^\dagger; \boldsymbol{K})\big) \to H^*\big(\widetilde{\Omega}^*(\boldsymbol{A}_2^\dagger; \boldsymbol{K})\big)$$

soit indépendant du relèvement α de $\bar{\alpha}$ de (R-ii).

Il s'agit là des conditions nécessaires et suffisantes pour que les cohomologies des différents complexes $\widetilde{\Omega}^*(\boldsymbol{A}_1^\dagger; \boldsymbol{K})$ déterminent un objet canoniquement associé à $\overline{\boldsymbol{A}}$, à

---

[6] Dans le cas particulier où $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{R}$, on a $\boldsymbol{R}^\dagger = \widehat{\boldsymbol{R}}$. On démontre que $(\boldsymbol{A}^\dagger)^\dagger = \boldsymbol{A}^\dagger$ et une $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{B}$ est dite « *faiblement complète* » lorsque $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}^\dagger$.

savoir $H^*_{DR}(\overline{\boldsymbol{A}}/\boldsymbol{K})$, et pour que la correspondance

$$\begin{cases} \overline{\boldsymbol{A}} \rightsquigarrow H^*_{DR}(\overline{\boldsymbol{A}}/\boldsymbol{K}), \\ \mathrm{Homom}_{\overline{\boldsymbol{R}}}(\overline{\boldsymbol{A}}_1, \overline{\boldsymbol{A}}_2) \ni \overline{\alpha} \rightsquigarrow H^*_{DR}(\alpha^\dagger) \in \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{K}}\big(H^*_{DR}\big(\overline{\boldsymbol{A}}_1/\boldsymbol{K}\big), H^*_{DR}(\overline{\boldsymbol{A}}_2/\boldsymbol{K})\big) \end{cases}$$

soit fonctorielle.

Aucune de ces trois propriétés n'est facile à vérifier.

(R-i) et (R-ii). A la fin des années 50, Grothendieck démontre ces propriétés pour $\boldsymbol{R}$ nœthérien et $\boldsymbol{I}$ nilpotent ([G$_1$] et [SGA] III 6.10), il prouve également que deux relèvements lisses d'une même $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbre lisse sont isomorphes bien que non canoniquement. Dans [MW], Monsky et Washnitzer remarquent que ces propriétés sont intimement liées à l'existence d'un type particulier de relèvement des $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres lisses qu'ils qualifient des « *faiblement complets très lisses* ». C'est un point que l'article [MW] ne règle pas en dehors du cas, pour l'essentiel, où $\overline{\boldsymbol{A}}$ est une $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbre *intersection complète lisse*, ce qui suffisait pour les applications que les auteurs avaient en vue ([7]). Une généralisation importante du résultat de Grothendieck apparaît dans la thèse de Renée Elkik (1973), où la propriété (R-i) est prouvée pour tout couple $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{I})$ nœthérien hensélien, mais la question (R-ii) n'y est pas abordée et sera prouvée ultérieurement à l'aide du théorème « *d'approximation d'Artin* » ([Art]), en déformant un type particulier de relèvements introduit également par Grothendieck (*loc.cit.*) : les relèvements formels $\alpha^\infty : \boldsymbol{A}_1^\infty \to \boldsymbol{A}_2^\infty$ (*cf.* [vdP] 1986).

Au delà du cas affine, Grothendieck démontre que toute courbe lisse sur le corps résiduel $\overline{\boldsymbol{R}}$ d'un anneau nœthérien local complet $\boldsymbol{R}$, admet un relèvement en une courbe lisse sur $\boldsymbol{R}$ ([G$_1$]) et J.-P. Serre donne des exemples de schémas projectifs lisses sur $\mathbb{F}_p$ n'admettant pas de relèvements lisses en caractéristique nulle ([Ser]), ce qui, soit dit en passant, interdit la généralisation de la construction de Monsky-Washnitzer telle quelle au delà du cas affine.

(R-iii). Elle admet une réponse positive lorsque $\boldsymbol{R}$ est un anneau de valuation discrète de caractéristique nulle et que $\boldsymbol{I}$ est son idéal maximal ([8]). C'est le théorème d'homotopie de Monsky-Washnitzer ([MW]).

En définitive, tous les problèmes de relèvement sont réglés dans le cas d'un couple $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{I})$ de valuation discrète de caractéristique nulle, en particulier pour le couple $(\mathbb{Z}_p, (p))$. La construction de Monsky-Washnitzer fournit donc bien une théorie cohomologique à coefficients dans $\mathbb{Q}_p$ sur la catégorie des variétés algébriques ***affines*** lisses sur $\mathbb{F}_p$.

---

[7] La rationalité de la fonction Zéta est une propriété locale et toute algèbre lisse est localement intersection complète.

[8] Cas particulier de couple hensélien nœthérien.

2.3 Relèvements

2.3.1 Relèvements algébriques. Dans [A_{11}] on étudie les problèmes de relèvements évoqués dans la section précédente, en eux-mêmes. On y montre par exemple que l'utilisation du théorème d'approximation d'Artin (théorème d'existence non effectif) pour le relèvement au niveau †-adique des morphismes n'est pas nécessaire, ce qui représente une simplification importante dans la théorie de Monsky-washnitzer. On généralise aussi de manière uniforme les théorèmes de relèvement connus jusqu'à présent ; le cas le plus surprenant étant la propriété (R-i) qui est démontrée *sans aucune restriction* sur le couple $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{I})$, autrement dit :

2.3.1-1. Théorème ([$\mathbf{A_{11}}$]). *Pour tout anneau $\boldsymbol{R}$, tout idéal $\boldsymbol{I} \subseteq \boldsymbol{R}$ et toute $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbre lisse $\overline{\boldsymbol{A}}$, il existe une $\boldsymbol{R}$-algèbre lisse dont la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ est isomorphe à $\overline{\boldsymbol{A}}$.*

Pour démontrer cette généralisation, on utilise l'idée, sous-jacente dans la thèse de Elkik ([E]), de construire des relèvements lisses pour les $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres lisses à l'aide de relèvements projectifs de $\overline{\boldsymbol{R}}$-modules projectifs de type fini. Or, étant donnés une $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{B}$ et un $\overline{\boldsymbol{B}}$-module projectif $\overline{\boldsymbol{M}}$, le module $\overline{\boldsymbol{M}}$ n'est pas toujours la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ d'un $\boldsymbol{B}$-module projectif, cela est pourtant possible au voisinage étale de $\boldsymbol{I}$ dans $\boldsymbol{B}$ près ([9]), ce qui suffit pour faire marcher l'idée de Elkik moyennant quelques vérifications techniques. Plus précisément, on démontre :

2.3.1-2. Théorème ([$\mathbf{A_{11}}$]). *Pour tout anneau $\boldsymbol{R}$, tout idéal $\boldsymbol{I} \subseteq \boldsymbol{R}$, toute $\boldsymbol{R}$-algèbre de type fini $\boldsymbol{B}$ et toute présentation libre et finie d'un $\overline{\boldsymbol{B}}$- module projectif de type fini $\overline{\boldsymbol{M}}$:*

$$\overline{\boldsymbol{B}}^p \xrightarrow{\overline{L}} \overline{\boldsymbol{B}}^q \xrightarrow{\overline{\Pi}} \overline{\boldsymbol{M}} \to \mathbf{0}\,, \qquad (\diamond)$$

il existe une $\boldsymbol{B}$-algèbre $\boldsymbol{B}_\varepsilon$ intersection complète et voisinage étale de $\boldsymbol{I}$ dans $\boldsymbol{B}$, un $\boldsymbol{B}_\varepsilon$-module projectif de type fini $\boldsymbol{M}_\varepsilon$, et une présentation libre et finie de $\boldsymbol{M}_\varepsilon$:

$$\boldsymbol{B}_\varepsilon^p \xrightarrow{L} \boldsymbol{B}_\varepsilon^q \xrightarrow{\Pi} \boldsymbol{M}_\varepsilon \to \mathbf{0}\,,$$

de réduction modulo $\boldsymbol{I}$ isomorphe à $(\diamond)$.

Quant à la propriété (R-ii), elle est vraie toujours sans hypothèse supplémentaire sur le couple $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{I})$, mais uniquement au voisinage étale près :

2.3.1-3. Théorème ([$\mathbf{A_{11}}$]). *Étant donnés un morphisme de $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres $\overline{h} : \overline{\boldsymbol{A}} \to \overline{\boldsymbol{B}}$, et des relèvements $p_{\boldsymbol{A}} : \boldsymbol{A} \twoheadrightarrow \overline{\boldsymbol{A}}$ et $p_{\boldsymbol{B}} : \boldsymbol{B} \twoheadrightarrow \overline{\boldsymbol{B}}$, où $\boldsymbol{A}$ est lisse, il existe une $\boldsymbol{B}$-algèbre $\boldsymbol{B}_\varepsilon$ intersection complète et voisinage étale de $\boldsymbol{I}$ dans $\boldsymbol{B}$, et un morphisme de $\boldsymbol{R}$-*

[9] On appelle « *voisinage étale de $\boldsymbol{I}$ dans $\boldsymbol{B}$* » toute $\boldsymbol{B}$-algèbre $\boldsymbol{B}_\varepsilon$, **étale** sur $\boldsymbol{B}$ et telle que la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ du morphisme structural $\varepsilon : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{B}_\varepsilon$ est un isomorphisme.

algèbres $h : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}_\varepsilon$ qui relève $\overline{h}$. En d'autres termes, on a un diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{A} \arrow[r, dashed, "h"] \arrow[d, two heads, "p_{\boldsymbol{A}}"'] & \boldsymbol{B}_\varepsilon \arrow[dr, two heads, "p_{\boldsymbol{B}_\varepsilon}"'] & \boldsymbol{B} \arrow[l, hook', "\varepsilon"'] \arrow[d, two heads, "p_{\boldsymbol{B}}"] \\
\overline{\boldsymbol{A}} \arrow[rr, "\overline{h}"] & & \overline{\boldsymbol{B}}
\end{tikzcd}$$

où $\varepsilon : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{B}_\varepsilon$ désigne l'homomorphisme structural et où $p_{\boldsymbol{B}_\varepsilon}$ est l'homomorphisme induit par ε à partir de $p_{\boldsymbol{B}}$.

La propriété (R-iii) est prouvée dans [MW] à partir d'une propriété d'homotopie également généralisée dans [A_{11}]. On rappelle que deux morphismes de $\boldsymbol{R}$-algèbres $u_0, u_1 : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ sont dits « *homotopes* » lorsqu'il existe un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $h : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}[T]$ tel que $u_0(a) = h(a)(0)$ et $u_1(a) = h(a)(1)$. Le théorème suivant donne une idée assez précise de l'ambiguïté des relèvements des morphismes par l'existence d'une homotopie au voisinage étale près.

2.3.1-4. Théorème ([$\mathbf{A_{11}}$]). *Soient $\boldsymbol{A}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre lisse et $u_0, u_1 : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ deux morphismes de $\boldsymbol{R}$-algèbres dont les réductions modulo $\boldsymbol{I}$ sont homotopes (par exemple égales). Il existe alors une $\boldsymbol{B}[T]$-algèbre $\boldsymbol{B}[T]_\varepsilon$, intersection complète et voisinage étale de $\boldsymbol{I}$, de (T) et de $(1-T)$ dans $\boldsymbol{B}[T]$, et un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $h : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}[T]_\varepsilon$ tels que $p_{i,\varepsilon} \circ h = u_i$. En d'autres termes, on a un diagramme :*

$$\begin{tikzcd}
& \boldsymbol{B}[T]_\varepsilon \arrow[dr, shift left, two heads, "p_{0,\varepsilon}"] \arrow[dr, shift right, two heads, "p_{1,\varepsilon}"'] & \boldsymbol{B}[T] \arrow[l, hook', "\varepsilon"'] \arrow[d, shift right, two heads, "p_0"'] \arrow[d, shift left, two heads, "p_1"] \\
\boldsymbol{A} \arrow[ur, dashed, "h"] \arrow[rr, shift left, "u_0"] \arrow[rr, shift right, "u_1"'] & & \boldsymbol{B}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
T \arrow[d, mapsto, "p_0"'] & T \arrow[d, mapsto, "p_1"] \\
0 & 1
\end{tikzcd}$$

où l'on note $\varepsilon : \boldsymbol{B}[T] \to \boldsymbol{B}[T]_\varepsilon$ l'homomorphisme structural et $p_{0,\varepsilon}, p_{1,\varepsilon} : \boldsymbol{B}[T]_\varepsilon \to \boldsymbol{B}$ les morphismes de $\boldsymbol{B}[T]$-algèbres induits par ε à partir de p_0 et p_1 respectivement.

Les deux derniers théorèmes sont en fait des corollaires d'un théorème technique général, analogue *algébrique* de la propriété par laquelle Monsky-Washnitzer définissent les *algèbres faiblement complètes très lisses*, on y reviendra dans 2.3.2.

2.3.1-5. Théorème. *Soit $\boldsymbol{A}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre lisse et donnons-nous :*

- *Une paire d'homomorphismes de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\boldsymbol{A} \xrightarrow{\varphi} \boldsymbol{C} \overset{p}{\twoheadleftarrow} \boldsymbol{B}$, où p est surjectif de noyau noté $\boldsymbol{K}$ ($\boldsymbol{K} = \boldsymbol{B}$ compris).*
- *Un homomorphisme de $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres $\overline{h} : \overline{\boldsymbol{A}} \to \overline{\boldsymbol{B}}$ vérifiant $\overline{\varphi} = \overline{p} \circ \overline{h}$.*

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{A} \arrow[dr, "\varphi"'] & \boldsymbol{B} \arrow[d, two heads, "p"'] \\
& \boldsymbol{C}
\end{tikzcd}
\quad + \quad
\begin{tikzcd}
\overline{\boldsymbol{A}} \arrow[r, "\overline{h}"] \arrow[dr, "\overline{\varphi}"'] & \overline{\boldsymbol{B}} \arrow[d, two heads, "\overline{p}"'] \\
& \overline{\boldsymbol{C}}
\end{tikzcd}$$

Alors :

a) *Pour chaque entier strictement positif n, il existe une **application** $\eta_n : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ telle que :*

$$\left\{\begin{array}{l} \text{(i) } p_{\boldsymbol{B}} \circ \eta_n = \overline{h} \circ p_{\boldsymbol{A}}\,, \\ \text{(ii) } p \circ \eta_n = \varphi\,, \\ \text{(iii) } \nu_n \circ \eta_n \textit{ est un homomorphisme de } \boldsymbol{R}\text{-algèbres.} \end{array}\right. \qquad \begin{tikzcd} \boldsymbol{A} \arrow[r, dashed, "\exists\,\eta_n"] \arrow[d, two heads, "p_{\boldsymbol{A}}"'] & \boldsymbol{B} \arrow[d, two heads, "p_{\boldsymbol{B}}"] \\ \overline{\boldsymbol{A}} \arrow[r, "\overline{h}"] & \overline{\boldsymbol{B}} \end{tikzcd}$$

où $\nu_n : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{B}/((\boldsymbol{I}{\cdot}\boldsymbol{B}) \cap \boldsymbol{K})^n$ désigne la surjection canonique.

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{A} \arrow[dr, "\varphi"'] & \boldsymbol{B} \arrow[d, two heads, "p"] \\ & \boldsymbol{C} \end{tikzcd} \;+\; \begin{tikzcd} \overline{\boldsymbol{A}} \arrow[r, "\bar{h}"] \arrow[dr, "\bar{\varphi}"'] & \overline{\boldsymbol{B}} \arrow[d, two heads, "\bar{p}"] \\ & \overline{\boldsymbol{C}} \end{tikzcd} \;\Longrightarrow\; \begin{tikzcd} \boldsymbol{A} \arrow[r, dashed, "\exists\,\eta_n"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \boldsymbol{B} \arrow[r, two heads, "\nu_n"] \arrow[d, two heads, "p"] & \dfrac{\boldsymbol{B}}{((\boldsymbol{I}{\cdot}\boldsymbol{B}) \cap \boldsymbol{K})^n} \arrow[dl, two heads, "p_n"] \\ & \boldsymbol{C} & \end{tikzcd}$$

(L'homomorphisme p_n est celui induit par p.)

b) *Il existe un voisinage étale $\boldsymbol{B}_\varepsilon$ de $\boldsymbol{I}{\cdot}\boldsymbol{K}$ dans $\boldsymbol{B}$, intersection complète sur $\boldsymbol{B}$, dont on note $\varepsilon : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{B}_\varepsilon$ l'homomorphisme structural et $p_\varepsilon : \boldsymbol{B}_\varepsilon \twoheadrightarrow \boldsymbol{C}$ l'homomorphisme induit par p, et il existe un homomorphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $h_\varepsilon : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}_\varepsilon$ tels que $\overline{h}_\varepsilon = \bar{\varepsilon} \circ \overline{h}$ et $\varphi = p_\varepsilon \circ h_\varepsilon$. En d'autres termes, on a un diagramme :*

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{A} \arrow[dr, "\varphi"'] & \boldsymbol{B} \arrow[d, two heads, "p"] \\ & \boldsymbol{C} \end{tikzcd} \;+\; \begin{tikzcd} \overline{\boldsymbol{A}} \arrow[r, "\bar{h}"] \arrow[dr, "\bar{\varphi}"'] & \overline{\boldsymbol{B}} \arrow[d, two heads, "\bar{p}"] \\ & \overline{\boldsymbol{C}} \end{tikzcd} \;\Longrightarrow\; \begin{tikzcd} \boldsymbol{A} \arrow[rr, dotted, bend left, "\bar{h}"] \arrow[r, dashed, "\exists\,h_\varepsilon"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \boldsymbol{B}_\varepsilon \arrow[d, two heads, "p_\varepsilon"] & \boldsymbol{B} \arrow[l, "\varepsilon"'] \arrow[dl, two heads, "p"] \\ & \boldsymbol{C} & \end{tikzcd}$$

2.3.2 Relèvements faiblement complets très lisses. Les résultats de la section précédente concernent l'aspect « *algébrique* » du problème des relèvements dans la mesure où les algèbres lisses sur $\overline{\boldsymbol{R}}$ sont relevées en des algèbres lisses sur $\boldsymbol{R}$ donc de type fini sur $\boldsymbol{R}$. Dans la définition de la cohomologie de Monsky-Washnitzer on doit encore appliquer le foncteur de complétion faible qui nous fera ressortir du cadre des algèbres de type fini. A ce sujet, il est important de souligner que si $\varepsilon : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{B}_\varepsilon$ est un voisinage étale de $\boldsymbol{I}$ dans $\boldsymbol{B}$, la complétion faible $\varepsilon^\dagger : \boldsymbol{B}^\dagger \to \boldsymbol{B}_\varepsilon^\dagger$ est un isomorphisme, ce qui permet de simplifier les résultats de la section précédente. En particulier, le théorème 2.3.1-5 s'énonce maintenant de la manière suivante.

2.3.2-1. Proposition. *Soient $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ trois algèbres sur $\boldsymbol{R}$ où $\boldsymbol{A}$ est lisse sur $\boldsymbol{R}$. Pour toute paire de morphismes de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\boldsymbol{B}^\dagger \overset{p}{\twoheadrightarrow} \boldsymbol{C} \overset{\varphi}{\longleftarrow} \boldsymbol{A}^\dagger$, où p est surjectif (de noyau arbitraire), et pour chaque morphisme de $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres $\overline{h} : \overline{\boldsymbol{A}} \to \overline{\boldsymbol{B}}$ vérifiant $\overline{\varphi} = \overline{p} \circ \overline{h}$, il* *existe un relèvement* $h:\boldsymbol{A}^\dagger\to\boldsymbol{B}^\dagger$ *de* $\overline{h}$, *tel que* $\varphi=p\circ h$.

$$\begin{array}{ccc}\begin{tikzcd}\boldsymbol{A}^\dagger \arrow[dr, "\varphi"'] & \boldsymbol{B}^\dagger \arrow[d, two heads, "p"] \\ & \boldsymbol{C}\end{tikzcd} & + \begin{tikzcd}\overline{\boldsymbol{A}} \arrow[r, "\overline{h}"] \arrow[dr, "\overline{\varphi}"'] & \overline{\boldsymbol{B}} \arrow[d, two heads, "\overline{p}"] \\ & \overline{\boldsymbol{C}}\end{tikzcd} & \Longrightarrow \begin{tikzcd}\boldsymbol{A}^\dagger \arrow[r, dashed, "\exists\, h"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \boldsymbol{B}^\dagger \arrow[d, two heads, "p"] \\ & \boldsymbol{C}\end{tikzcd}\end{array}$$

Or, c'est très précisément par cette propriété de $\boldsymbol{A}^\dagger$ que Monsky-Washnitzer définissent les relèvements « *faiblement complets très lisses* ». L'existence de tels relèvements est établie dans [MW] pour une classe de $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres lisses restreinte, et l'existence en toute généralité y est énoncée de manière conjecturale. Le théorème suivant, simple paraphrase de la proposition 2.3.2-1, établit cette conjecture moyennant le théorème 2.3.1-1.

2.3.2-2. Théorème ([A$_{11}$]). *Soient* $\boldsymbol{R}$ *un anneau nœthérien et* $\overline{\boldsymbol{A}}$ *une* $\overline{\boldsymbol{R}}$*-algèbre lisse. Pour tout relèvement* $\boldsymbol{A}$ *lisse sur* $\boldsymbol{R}$ *de* $\overline{\boldsymbol{A}}$, *l'algèbre* $\boldsymbol{A}^\dagger$ *est un relèvement faiblement complet très lisse de* $\overline{\boldsymbol{A}}$.

§ 3. Équivalence de Green et objets quasi-projectifs

Dans certains travaux de Marie-France Vignéras apparaît la notion de module presque-projectif. On appelle ainsi un module $\mathcal{Q}$ admettant une présentation projective $\pi:\mathcal{P}\twoheadrightarrow\mathcal{Q}$ telle que $\ker(\pi)$ est stable sous l'action des endomorphismes de $\mathcal{P}$. Notons $E_{\mathcal{Q}}=\mathrm{End}(\mathcal{Q})$ et $\mathrm{Mod}^\delta(E_{\mathcal{Q}})$ la catégorie des $E_{\mathcal{Q}}$-modules à droite. Les modules presque-projectifs sont importants dans la mesure où ils vérifient l'« *équivalence de Green* » énoncée dans le théorème suivant.

3-1. Théorème. *Soit* $\mathcal{Q}$ *un* $\boldsymbol{A}$*-module de type fini presque-projectif.*

Le foncteur $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(\mathcal{Q},\_):\mathrm{Mod}(\boldsymbol{A})\rightsquigarrow\mathrm{Mod}^\delta(E_{\mathcal{Q}})$ *induit une bijection entre les classes d'isomorphie des* $\boldsymbol{A}$*-modules simples* $\mathcal{S}$ *tels que* $\mathrm{Hom}(\mathcal{Q},\mathcal{S})\neq 0$ *et les classes d'isomorphie des* $E_{\mathcal{Q}}$*-modules à droite simples.*

L'appendice de l'article [Vig] était destiné dans un premier temps à la démonstration d'un certain nombre d'équivalences de catégories liées aux modules presque-projectifs dans le cadre abstrait des catégories abéliennes. Cette recherche nous a permis de dégager une notion plus générale que la presque-projectivité : la « *quasi-projectivité* », vraiment au cœur des équivalences. Dans le cas d'une catégorie de modules sur un anneau $\boldsymbol{A}$, un module $\mathcal{Q}$ est quasi-projectif lorsque pour toute surjection $\nu:\mathcal{Q}\twoheadrightarrow\mathcal{N}$, le morphisme induit $\nu_*:E_{\mathcal{Q}}=\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(\mathcal{Q},\mathcal{Q})\to\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(\mathcal{Q},\mathcal{N})$ est aussi surjectif.

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{Q} \arrow[dl, dashed] \arrow[d] \\ \mathcal{Q} \arrow[r, two heads, "\nu"] & \mathcal{N}\end{tikzcd}$$

Un module presque-projectif est quasi-projectif et le théorème 3-1 est démontré dans [A_9] pour tout module quasi-projectif de type fini. De plus, on donne une caractérisation des quasi-projectifs en termes d'une équivalence de catégories significative dans la théorie des représentations modulaires.

Théorème ([A_9]). *Soit* $\mathfrak{Q}$ *un* $\boldsymbol{A}$*-module de type fini* sans $\mathfrak{Q}$-torsion. *Il y a équivalence entre :*

a) $\mathfrak{Q}$ *est quasi-projectif.*

b) $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(\mathfrak{Q},\_) : \mathfrak{C}'_{\mathfrak{Q}} \rightsquigarrow \mathrm{Mod}^{\delta}(E_{\mathfrak{Q}})$ *est une équivalence de catégories, où* $\mathfrak{C}'_{\mathfrak{Q}}$ *désigne la sous-catégorie pleine des* $\boldsymbol{A}$*-modules sans* $\mathfrak{Q}$*-torsion, quotients de sommes directes de* $\mathfrak{Q}$.

Où un $\boldsymbol{A}$-module $\mathfrak{M}$ est dit «*sans* $\mathfrak{Q}$*-torsion*» lorsque $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(\mathfrak{Q},\mathfrak{N}) \neq 0$ pour tout sous-module non nul $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$.

§ 4. Cours de troisième cycle

Depuis l'année 1995 j'ai participé ou fait des cours spécialisés de troisième cycle dont les notes rédigées constituent le prépublications [A_7,A_{10},A_{12},A_{14}]. Je passe en revue le contenu de chaque cours.

4.1 Cohomologie de de Rham

Sous une initiative de Zoghman Mebkhout, nous avons assuré pendant les années 95–96, 96–97 et 98–99 le cours spécialisé de DEA intitulé "Introduction à la cohomologie de de Rham des variétés algébriques". On y introduit la cohomologie de de Rham, progressivement dans les contextes : différentiable, analytique complexe, algébrique complexe et algébrique sur un corps fini. On démontre des théorèmes de comparaison, dont ceux de de Rham et de Grothendieck, pour les différentes cohomologies que l'on peut associer à un espace disposant simultanément de plusieurs structures. Par exemple, la donnée d'une variété algébrique complexe non singulière, vue avec sa structure analytique complexe, sa structure différentiable, et même sa structure d'espace topologique localement compact, ce qui donne lieu aux cohomologies à coefficients complexes : de de Rham algébrique, de de Rham analytique complexe, de de Rham différentiable, de Čech et singulière ; toutes canoniquement isomorphes.

Le but du cours est l'introduction de la cohomologie de de Rham p-adique pour une variété algébrique non singulière sur un corps fini suivant les lignes tracées par Monsky-Washnitzer ([MW]). C'est un sujet dans lequel Mebkhout a réalisé des progrès considérables ces dernières années (*cf.* [Meb]) et qui foisonne depuis de sujets de recherche.

Au delà de l'aspect de formation à la recherche, le cours nous a fourni également l'occasion d'organiser et parfois de simplifier ou compléter un ensemble d'articles datant des années 70. Nous espérons faire la synthèse de tout ce travail dans la rédaction d'un livre basé sur les notes du cours [A_7,A_{10}].

4.2 Faisceaux pervers et Correspondance de Springer

Il s'agit d'un minicours d'un mois que j'ai fait dans cadre du Groupe de travail "*Correspondance de Springer*" organisé par MICHEL DUFLO, CAROLINE GRUSON et MARC ROSSO à l'Institut de Mathématiques de Jussieu (février-mars 2001) ([A_{12}]). Le cours commence par une introduction rapide à la théorie des faisceaux pervers sur les espaces localement compacts singuliers (pseudovariétés, espaces analytiques, variétés algébriques complexes, ...) et pour la perversité moyenne. Le but du cours est l'explicitation de la démarche suivie par WALTER BORHO et ROBERT MACPHERSON dans [$BoMc_1$] pour démontrer la « *Correspondance de Springer* ».

4.3 Homologie d'intersection

Le cours "*Introduction à l'homologie d'intersection*" ([A_{14}]) du second semestre de l'année 2001–2002 est un complément du minicours précédent où l'accent est mis sur les fondements théoriques de :

- La dualité de Grothendieck-Verdier sur les espaces localement compacts.
- L'homologie d'intersection sur les pseudovariétés pour n'importe quelle perversité.
- La dualité de Poincaré pour l'homologie d'intersection.
- L'invariance topologique de l'homologie d'intersection.
- La formule de Künneth en homologie d'intersection.

§ 5. Perspectives de recherches

5.1 Globalisation de la cohomologie de Monsky-Washnitzer

C'est sur ce thème, qui répond à un certain nombre de suggestions de Mebkhout, que mon projet de recherches porte actuellement ([A_{13}]).

Comme il a déjà été indiqué à la fin de la section 2.1, il faut une définition 'globale' de la cohomologie de de Rham p-adique sur les variétés non singulières sur $\mathbb{F}_p$, affines ou non, redonnant la cohomologie de Monsky-Washnitzer dans le cas affine pour pouvoir aborder les conjectures de Weil concernant les variétés projectives. La question se pose plus généralement sur la catégorie des schémas lisses (séparés) sur l'anneau $\overline{\boldsymbol{R}}$ où il est naturel de considérer le « *site infinitésimal d'un schéma lisse et séparé sur* $\overline{\boldsymbol{R}}$ ».

5.1.1 La catégorie $\mathscr{X}^\dagger_{\mathbf{inf}}$. A tout schéma $\boldsymbol{X}$, séparé et lisse sur $\overline{\boldsymbol{R}}$, de faisceau structural $\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}$, on associe une catégorie $\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ définie comme suit :

- Un objet $\mathscr{U}^\dagger$ de $\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ est un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres

$$p_U : \mathscr{A}\big(\mathscr{U}^\dagger\big) \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow \Gamma(U;\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$$

avec :

$$\begin{cases} U & : \text{ouvert affine de } \boldsymbol{X}\,; \\ \mathscr{A}\big(\mathscr{U}^\dagger\big) & : \boldsymbol{R}\text{-algèbre faiblement complète très lisse}\,; \\ p_U & : \text{relèvement de } \boldsymbol{R}\text{-algèbre.} \end{cases}$$

- Pour toute paire d'objets $\mathscr{V}^\dagger$ et $\mathscr{U}^\dagger$ de $\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$, telle que $V \subseteq U$, un élément $\Phi \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}\big(\mathscr{V}^\dagger, \mathscr{U}^\dagger\big)$ est un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\phi : \mathscr{A}\big(\mathscr{U}^\dagger\big) \to \mathscr{A}\big(\mathscr{V}^\dagger\big)$ tel que le diagramme :

$$\begin{tikzcd} \mathscr{A}\big(\mathscr{U}^\dagger\big) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, two heads, "p_U"'] & \mathscr{A}\big(\mathscr{V}^\dagger\big) \arrow[d, two heads, "p_V"] \\ \Gamma(U;\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}) \arrow[r, "\rho"] & \Gamma(V;\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}) \end{tikzcd}$$

  où ρ désigne le morphisme de restriction canonique, est commutatif.

- On pose : $\mathrm{Mor}_{\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}\big(\mathscr{V}^\dagger, \mathscr{U}^\dagger\big) = \varnothing$, lorsque $\mathscr{V}^\dagger$ et $\mathscr{U}^\dagger$ sont tels que $V \not\subseteq U$.

5.1.2 Topologie de Grothendieck sur $\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$. On rappelle qu'une « *topologie de Grothendieck* » sur une catégorie $\mathscr{C}$ avec produits fibrés est la donnée de familles de morphismes $\{\Phi_{\mathfrak{a}} : \boldsymbol{O}_{\mathfrak{a}} \to \boldsymbol{O}\}$, appelées « *recouvrements (de $\mathscr{C}$)* », tels que :

a) Pour tout objet $\boldsymbol{O}$ de $\mathscr{C}$ et tout $\Phi \in \mathrm{Iso}_{\mathscr{C}}(\boldsymbol{O})$, $\{\Phi : \boldsymbol{O} \to \boldsymbol{O}\}$ est un recouvrement.

b) Pour tout recouvrement $\{\Phi_{\mathfrak{a}} : \boldsymbol{O}_{\mathfrak{a}} \longrightarrow \boldsymbol{O}\}$ et tous recouvrements $\{\Phi_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} : \boldsymbol{O}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \longrightarrow \boldsymbol{O}_{\mathfrak{a}}\}$, la famille des morphismes composés $\{\Phi_{\mathfrak{a}} \circ \Phi_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} : \boldsymbol{O}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \longrightarrow \boldsymbol{O}\}$ est un recouvrement.

c) Pour tout recouvrement $\{\Phi_{\mathfrak{a}} : \boldsymbol{O}_{\mathfrak{a}} \longrightarrow \boldsymbol{O}\}$ et tout morphisme $\Phi' : \boldsymbol{O}' \to \boldsymbol{O}$, la famille de morphismes $\{\Phi_{\mathfrak{a}} \times_{\boldsymbol{O}} \Phi' : \boldsymbol{O}_{\mathfrak{a}} \times_{\boldsymbol{O}} \boldsymbol{O}' \longrightarrow \boldsymbol{O}'\}$ est un recouvrement.

Dans le cas de la catégorie $\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$, on définit un « *recouvrement* » comme la donnée d'un objet $\mathscr{U}^\dagger$ et d'une famille $\mathscr{R} = \{\Phi_{\mathfrak{a}} : \mathscr{U}^\dagger_{\mathfrak{a}} \longrightarrow \mathscr{U}^\dagger\}$ de morphismes, tels que la famille $\{U_{\mathfrak{a}}\}$ des ouverts affines correspondants aux $\mathscr{U}^\dagger_{\mathfrak{a}}$ est un recouvrement dans $\boldsymbol{X}$ de l'ouvert U correspondant à $\mathscr{U}^\dagger$.

Proposition ([A$_{13}$]). *La catégorie $\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$, munie de ces recouvrements, est une topologie de Grothendieck.*

Le « *site infinitésimal du schéma $\boldsymbol{X}$* » est alors la donnée de la catégorie $\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ et de la classe de recouvrements 'affines' $\mathrm{Rec}(\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}})$.

5.1.3 Le faisceau $\mathscr{O}_{\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}$. Le foncteur de la catégorie $\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ vers la catégorie des $\boldsymbol{R}$-algèbres faiblement complètes très lisses, qui fait correspondre à $\mathscr{U}^\dagger$ l'algèbre $\mathscr{A}\big(\mathscr{U}^\dagger\big)$ et à un morphisme $\Phi : \mathscr{V}^\dagger \to \mathscr{U}^\dagger$ le morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\phi : \mathscr{A}\big(\mathscr{U}^\dagger\big) \to \mathscr{A}\big(\mathscr{V}^\dagger\big)$ associé, définit le préfaisceau « *structural* » de $\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ noté $\mathscr{O}_{\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}$.

Théorème ([$\mathbf{A_{13}}$]). *Le préfaisceau $\mathscr{O}_{\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}$ est un faisceau sur le site $\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$.*

Commentaire. D'un point de vue heuristique, on cherche à remplacer le schéma $(\boldsymbol{X}, \mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ défini sur $\overline{\boldsymbol{R}}$ par le site annelé $(\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}, \mathscr{O}_{\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}})$ de tous les relèvements faiblement complets très lisses des ouverts affines de $\overline{\boldsymbol{X}}$ sur lesquels la cohomologie de Monsky-Washnitzer est bien définie. Le problème de la globalisation se traduit alors dans la recherche d'un faisceau de complexes de de Rham sur le site recollant en catégorie dérivée les complexes de Monsky-Washnitzer sur chaque relèvement faiblement complet des ouverts affines de $\boldsymbol{X}$, *i.e.* sur chaque 'ouvert affine' du site $\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$.

Une autre question intéressante dans cette recherche que l'on peut qualifier de fondamentaliste est liée au théorème général concernant l'existence des relèvements très lisses 2.3.2-2. Ce théorème rend la définition du site infinitésimale possible pour tout couple $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{I})$ où $\boldsymbol{R}$ est nœthérien. La question alors est de voir dans quelle mesure une cohomologie de de Rham $\boldsymbol{I}$-adique pourrait exister.

§6. Publications et prépublications

Le sigle `(W3)` indique que le document concerné est accessible par internet à l'adresse :
`http://www.math.jussieu.fr/~arabia`

[A_0] "*Thèse de doctorat*" ; Université Paris 7 – Denis Diderot (1985).

[A_1] *'Cycles de Schubert et cohomologie équivariante de* $\boldsymbol{K/T}$*'*. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **301** (1985), no. 2, 45–48.

[A_2] *'Cycles de Schubert et cohomologie équivariante de* $\boldsymbol{K/T}$*'*. Invent. Math. **85** (1986), no. 1, 39–52.

[A_3] *'Cohomologie* $\boldsymbol{T}$*-équivariante de* $\boldsymbol{G/B}$ *pour un groupe* $\boldsymbol{G}$ *de Kac-Moody'*. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **302** (1986), no. 17, 631–634.

[A_4] *'Cohomologie* $\boldsymbol{T}$*-équivariante de la variété de drapeaux d'un groupe de Kac-Moody'*. Bull. Soc. Math. France **117** (1989), no. 2, 129–165.

[A_5] *'Conditions de Hiraï et chaînes sous-analytiques (d'après Masaki Kashiwara)'*. Notes d'exposés (27 pages), *prépublication* `(W3)` (mars 1990).

[A_6] *'Calcul formel et équations différentielles p-adiques'*. Aperçu des algorithmes utilisés dans les tests numériques des conjectures de Mebkhout. `(W3)` *prépublication* (juillet 1995).

[A_7] *'Introduction à la cohomologie de de Rham'*. Notes de cours (260 pages), `(W3)` *prépublication* (1997).

[A_8] *'Classes d'Euler équivariantes et points rationnellement lisses'*. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **48** (1998), no. 3, 861–912.

[A_9] *'Appendice à l'article de M.-F. Vignéras : "Induced R-representations of p-adic reductive groups"'*. Selecta Mathematica, new series, **4** (1998) 549–623.

[A_{10}] *'Cohomologie de de Rham dans la catégorie des schémas'*. Notes de cours (107 pages), `(W3)` *prépublication*, (sept. 1999).

[A_{11}] *'Relèvements des algèbres lisses et de leurs morphismes'*. Commentarii Mathematici Helvetici **76** (2001) 607–639.

[A_{12}] *'Faisceaux pervers sur les variétés algébriques complexes. Correspondance de Springer (d'après Borho-MacPherson)'*. Notes de cours (67 pages), `(W3)` *prépublication* (mai 2001).

[A_{13}] *'Cohomologie de Monsky-Washnitzer dans la catégorie des schémas lisses et séparés sur* $\overline{\boldsymbol{R}}$*'*. Travail en cours (2001).

[A_{14}] *'Introduction à l'homologie d'intersection'*. Notes du cours (102 pages), `(W3)` *prépublication* (septembre 2002).

Les textes [A_7,A_{10},A_{11},A_{13}] font partie du projet de livre "*Introduction à la cohomologie de de Rham*" en collaboration avec Z. Mebkhout.

§7. Références bibliographiques

[Art] M. Artin. *'On the solutions of analytique equations'* ; Invent. Math. **5** pp. 277–291 (1968).

[AS] M.F. Atiyah, G. Segal. "*Equivariant cohomology and localization*" ; Lecture notes, Warwick (1965).

[BV] N. Berline, M. Vergne. *'Classes caractéristiques équivariantes. Formule de localisation en cohomologie équivariante'* ; C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 295 (1982), no. 9, 539–541. — *'Zéros d'un champ de vecteurs et classes caractéristiques équivariantes'* ; Duke Math. J. 50 (1983), no. 2, 539–549. — *'Fourier transforms of orbits of the coadjoint representation'* ; Representation theory of reductive groups (Park City, Utah, 1982), 53–67, Progr. Math., 40, Birkhäuser Boston, Boston, MA, (1983).

[BGG] I.N. Bernšteĭn, I.M. Gel'fand, S.I. Gel'fand. *'Schubert cells, and the cohomology of the spaces G/P'* ; Uspehi Mat. Nauk 28 (1973), no. 3(171), 3–26.

[B_0] A. Borel. *'Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts'* ; Ann. of Math. (2) 57, 115–207 (1953).

[B_1] A. Borel. *'Sous-groupes commutatifs et torsion des groupes de Lie compacts connexes'* ; Tôhoku Math. J. (2) 13, 216–240 (1961).

[B-al] A. Borel & al. "*Seminar on transformation groups*" ; Annals of Mathematics Studies, No. 46 Princeton University Press, Princeton, N.J. (1960).

[$BoMc_1$] Borho, MacPherson. *'Représentations des groupes de Weyl et homologie d'intersection pour les variétés nilpotentes'* ; C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 292, no. 15, 707–710 (1981).

[Bri] M. Brion. *'Equivariant Chow groups for torus actions'* ; Birkhäuser. Transformation groups, Vol 2, n^{ro} 3, 1–43 (1997).

[Crl] J.B. Carrell. *'The Bruhat graph of a Coxeter group, a conjecture of Deodhar, and rational smoothness of Schubert varieties'* ; Algebraic groups and their generalizations: classical methods. University Park, PA, (1991), 53–61. Proc. Sympos. Pure Math. **56**, Part 1 (1994).

[Crt] H. Cartan. *'Notions d'algèbre différentielle ; application aux groupes de Lie et aux variétés où opère un groupe de Lie'* ; — *'La transgression dans un groupe de Lie et dans un espace fibré principal'* ; Colloque de topologie (espaces fibrés), Bruxelles, 1950, pp. 15–27 et 57–71. Georges Thone, Liège ; Masson et Cie., Paris, 1951.

[Del] P. Deligne. *'La conjecture de Weil. I'* ; Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 43 (1974), 273–307.

[Dem_1] M. Demazure. *'Invariants symétriques entiers des groupes de Weyl et torsion'* ; Invent. Math. 21, 287–301, (1973).

[Dem_2] M. Demazure. *'Une nouvelle formule des caractères'* ; Bull. Sci. Math. (2) 98 (1974), no. 3, 163–172.

[DH] J.J. Duistermaat, G.J. Heckman. *'On the variation in the cohomology of the symplectic form of the reduced phase space'* ; Invent. Math. 69 (1982), no. 2, 259–268. — *'Addendum to : On the variation in the cohomology of the symplectic form of the reduced phase space'* ; Invent. Math. 72 (1983), no. 1, 153–158.

[Dw] B. Dwork. *'On the rationality of the zeta function of an algebraic variety'* ; Amer. J. Math. 82, 631–648 (1960).

[E] R. Elkik. *'Solutions d'équations à coefficients dans un anneau hensélien'* ; Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, quatrième série, tome 6, pp. 553–604 (1973).

[G_1] A. Grothendieck. *'Géométrie formelle et géométrie algébrique'* ; Séminaire Bourbaki, exposé **182** (Mai 1959).

[G_2] A. Grothendieck. *'Formule de Lefschetz et rationalité des fonctions L'* ; Séminaire Bourbaki, Vol. 9, Exp. No. 279 (1965), 41–55, Soc. Math. France, Paris, 1995.

[Hrs] Harish-Chandra. *'Differential operators on a semisimple Lie algebra'* ; Amer. J. Math. 79, 87–120 (1957).

[Har] R. Hartshorne. "*Algebraic geometry*" ; Graduate Texts in Mathematics, No. 52. Springer-Verlag, New York-Heidelberg (1977).

[KL] D. Kazhdan, G. Lusztig. *'Representations of Coxeter groups and Hecke algebras'* ; Invent. Math. 53, no. 2, 165–184 (1979).

[KK_1] B. Kostant, S. Kumar. *'The nil Hecke ring and cohomology of G/P for a Kac-Moody group G'* ; Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 83, no. 6, 1543–1545 (1986). — *'The nil Hecke ring and cohomology of G/P for a Kac-Moody group G'* ; Adv. in Math. 62, no. 3, 187–237 (1986).

[KK_2] B. Kostant, S. Kumar. *'T-equivariant K-theory of generalized flag varieties'* ; Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 84, no. 13, 4351–4354 (1987). — J. Differential Geom. 32, no. 2, 549–603 (1990).

[Kum] S. Kumar. *'A connexion of equivariant $\boldsymbol{K}$-theory with the singularity of Schubert varieties'* ; prépublication (1986–87). — *'The nil-Hecke ring and singularity of Schubert varieties'* ; in "Lie Theory and geometry (in honor of Bertram Kostant)". Progress in Math. **123**, Birkhäuser, 497–507 (1994). — *'The nil-Hecke ring and singularity of Schubert varieties.'* ; Inventiones Mathematicae **123**, n^{ro} 3, 471–506 (1996).

[Meb] Z. Mebkhout. *'Sur le théorème de finitude de la cohomologie p-adique d'une variété affine non singulière.'* ; Amer. J. Math. 119, no. 5, 1027–1081 (1997).

[Mil] J. Milnor. *'Construction of universal bundles. II'* ; Ann. of Math. (2) 63, 430–436 (1956).

[Mon] P. Monsky. *'Formal cohomology. III. Fixed point theorems.'* ; Ann. of Math. (2) 93, 315–343 (1971).

[MW] P. Monsky, G. Washnitzer. *'Formal cohomology : I'* ; Ann. of Math. (2) **88**, pp. 181–217 (1968).

[Ser] J.-P. Serre. *'Exemples de variétés projectives en caractéristique p non relevables en caractéristique zéro'* ; Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **47**, pp. 108–109 (1961).

[SGA] "*Revêtements Étales et Groupe Fondamental (SGA 1)*" ; Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1960/61. Lecture Notes in Mathematics **224**. Springer-Verlag (1971).

[Vig] M.-F. Vignéras. *'Induced R-representations of p-adic reductive groups'* ; Selecta Mathematica 4 (1998), pp. 549–623.

[vdP] M. van der Put. *'The cohomology of Monsky and Washnitzer'* ; Société Mathématique de France. Deuxième série, Mémoire n^{ro} 23, pp. 33–60 (1986).

Alberto Arabia
CNRS
Institut de Mathématiques de Jussieu
Théorie des Groupes

Samedi 2 juin 2003