Cohomologie de Monsky-Washnitzer dans la catégorie des schémas lisses et séparés sur $\overline{R}$

Alberto Arabia*

Sommaire

§ 0. Introduction

Travail en cours…

*CNRS – Institut de Mathématiques de Jussieu – Université de Paris 7 - Denis Diderot.
Laboratoire de Théorie des Groupes, Représentations et Applications.
UFR de Mathématiques de l'Université Paris 7 – Denis Diderot.
175, rue du Chevaleret, 9e étage, bureau 9D11, 75013 Paris.
Adresse électronique : `arabia@math.jussieu.fr`

§ 1. Préliminaires algébriques

On désignera par $\boldsymbol{R}$ et $\boldsymbol{I}$ respectivement la donnée d'un anneau avec identité multiplicative, commutatif et nœthérien et d'un idéal $\boldsymbol{I} \subseteq \boldsymbol{R}$.

1.1 Rappel : complétion †-adique

Pour toute $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$, Monsky et Washnitzer définissent dans [MW] « *sa complétion $\boldsymbol{I}$-adique faible $\boldsymbol{A}^\dagger$* » que nous appellerons aussi « *complétion †-adique* ». Il s'agit de la sous-algèbre du complété séparé $\boldsymbol{I}$-adique $\widehat{\boldsymbol{A}}$ de $\boldsymbol{A}$ des éléments z admettant une représentation comme somme infinie :

$$z = \sum_{j \geqslant 0} p_j(x_1, \ldots, x_n) \qquad (*)$$

(l'entier n et les éléments $x_1, \ldots, x_n$ sont fixes et indépendants de j) dans laquelle :

$$\begin{cases} \bullet\ x_1, \ldots, x_n \in \boldsymbol{A}\,; \\ \bullet\ p_j \in \boldsymbol{I}^j \cdot \boldsymbol{R}[X_1, \ldots, X_n], \text{ pour tout } j \in \mathbb{N}\,; \\ \bullet\ \text{l'ensemble } \{\frac{\deg p_j}{j+1}\}_{j \in \mathbb{N}} \text{ est borné.} \end{cases}$$

Définition ([MW]). Une $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$ est dite « *faiblement complète* » (f.c.) lorsque l'application canonique $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}^\dagger$ est bijective. Une $\boldsymbol{R}$-algèbre faiblement complète $\boldsymbol{A}$ est dite de « *type fini* » (f.c.t.f.) lorsqu'il existe un sous-ensemble fini $S \subseteq \boldsymbol{A}$ tel que $\boldsymbol{A}$ est l'unique sous-algèbre faiblement complète de $\boldsymbol{A}$ qui contient $\boldsymbol{S}$.

Théorème ([MW]). *La complétion †-adique d'une $\boldsymbol{R}$-algèbre (de type fini) est faiblement complète (de type fini).*

Notation. On notera $\mathrm{Alg}_{\mathrm{fc}}(\boldsymbol{R})$ (resp. $\mathrm{Alg}_{\mathrm{fctf}}(\boldsymbol{R})$) la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Alg}(\boldsymbol{R})$ dont les objets sont les algèbres faiblement complètes (resp. de type fini).

1.2 Rappel : algèbres très lisses

Pour toute $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$, on note $\overline{\boldsymbol{A}}$ la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ de $\boldsymbol{A}$, *i.e.* $\overline{\boldsymbol{A}} := \boldsymbol{A}/\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{A}$. Pour toute algèbre $\overline{\boldsymbol{B}}$ (lisse) sur $\overline{\boldsymbol{A}}$, on appelle « *relèvement de $\overline{\boldsymbol{B}}$ (lisse) sur $\boldsymbol{A}$* » la donnée d'une algèbre $\boldsymbol{B}$ (lisse) sur $\boldsymbol{A}$, et d'une surjection de $\boldsymbol{A}$-algèbres $p : \boldsymbol{B} \to \overline{\boldsymbol{B}}$ dont la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ est bijective.

La propriété d'algèbres suivante a été introduite par Monsky et Washnitzer dans [MW].

Définition. Une $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$ est dite « *très lisse* » lorsque les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- L'algèbre $\overline{\boldsymbol{A}}$ est lisse sur $\overline{\boldsymbol{R}}$.

- Pour toute paire de morphismes de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\boldsymbol{B} \xrightarrow{p} \boldsymbol{C} \xleftarrow{\varphi} \boldsymbol{A}$, où $\boldsymbol{B}$ est f.c., $\boldsymbol{C}$ est séparée et p est surjectif (de noyau arbitraire), et pour chaque morphisme de $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres $\bar{h} : \overline{\boldsymbol{A}} \to \overline{\boldsymbol{B}}$ vérifiant $\overline{\varphi} = \overline{p} \circ \bar{h}$, il existe un relèvement $h : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ de $\bar{h}$, tel que $\varphi = p \circ h$.

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{A} \arrow[dr, "\varphi"'] & \boldsymbol{B} \arrow[d, two heads, "p"] \\ & \boldsymbol{C} \end{tikzcd} + \begin{tikzcd} \overline{\boldsymbol{A}} \arrow[r, "\bar{h}"] \arrow[dr, "\overline{\varphi}"'] & \overline{\boldsymbol{B}} \arrow[d, two heads, "\overline{p}"] \\ & \overline{\boldsymbol{C}} \end{tikzcd} \Longrightarrow \begin{tikzcd} \boldsymbol{A} \arrow[r, dashed, "\exists\, h"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \boldsymbol{B} \arrow[d, two heads, "p"] \\ & \boldsymbol{C} \end{tikzcd}$$

Pour toute $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbre $\overline{\boldsymbol{B}}$ lisse, on appelle « *relèvement très lisse de* $\overline{\boldsymbol{B}}$ » la donnée d'une $\boldsymbol{R}$-algèbre très lisse $\boldsymbol{B}$ et d'une surjection de $\boldsymbol{R}$-algèbres $p : \boldsymbol{B} \to \overline{\boldsymbol{B}}$ dont la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ est bijective.

L'énoncé suivant rassemble les principaux résultats de [Ar].

Théorème. *Soit $\overline{\boldsymbol{A}}$ une $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbre lisse.*

a) *$\overline{\boldsymbol{A}}$ admet des relèvements lisses sur $\boldsymbol{R}$.*

b) *Pour tout relèvement $\boldsymbol{A}$ de $\overline{\boldsymbol{A}}$, lisse sur $\boldsymbol{R}$, l'algèbre $\boldsymbol{A}^\dagger$ est un relèvement très lisse de $\overline{\boldsymbol{A}}$ dans $\mathrm{Alg}_{\mathrm{fc}}(\boldsymbol{R})$. Pour tout autre relèvement $\boldsymbol{A}'$ de $\overline{\boldsymbol{A}}$ lisse sur $\boldsymbol{R}$, les algèbres $\boldsymbol{A}^\dagger$ et $\boldsymbol{A}'^\dagger$ sont isomorphes.*

1.2.1. Algébricité des relèvements de morphismes lisses.

Proposition. *Soit $\beta : \boldsymbol{B}_1 \to \boldsymbol{B}_2$ un morphisme entre deux $\boldsymbol{R}$-algèbres f.c.t.f.* très lisses *dont la réduction modulo $\boldsymbol{I}$, $\overline{\beta} : \overline{\boldsymbol{B}}_1 \to \overline{\boldsymbol{B}}_2$, est un morphisme **lisse**. Soit $q_1 : \boldsymbol{A}_1 \twoheadrightarrow \overline{\boldsymbol{B}}_1$, un relèvement lisse sur $\boldsymbol{R}$ et munissons $\overline{\boldsymbol{B}}_2$ de la structure de $\boldsymbol{A}_1$-algèbre induite par $\overline{\beta} \circ q_1$. Alors, pour tout relèvement $q_2 : \boldsymbol{A}_2 \twoheadrightarrow \overline{\boldsymbol{B}}_2$, **lisse sur $\boldsymbol{A}_1$** (donc sur $\boldsymbol{R}$), il existe des isomorphismes $\varphi_i : \boldsymbol{A}_i^\dagger \to \boldsymbol{B}_i$ relevant l'identité sur $\overline{\boldsymbol{B}}_i$ tels que le diagramme ci-après est commutatif. Dans ce diagramme, σ désigne le morphisme structural, et ι le morphisme naturel canonique d'une algèbre dans sa complétion faible.*

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{B}_1 \arrow[r, "\beta"] & \boldsymbol{B}_2 \\ \boldsymbol{A}_1^\dagger \arrow[u, "\varphi_1", "\simeq"'] \arrow[r, "\sigma^\dagger"] & \boldsymbol{A}_2^\dagger \arrow[u, "\varphi_2"', "\simeq"] \\ \boldsymbol{A}_1 \arrow[u, "\iota_1"] \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "q_1"'] & \boldsymbol{A}_2 \arrow[u, "\iota_2"'] \arrow[d, "q_2"] \\ \overline{\boldsymbol{B}}_1 \arrow[r, "\overline{\beta}"] & \overline{\boldsymbol{B}}_2 \end{tikzcd}$$

Le morphisme β est donc isomorphe à la complétion faible d'un morphisme lisse entre des relèvements des $\overline{\boldsymbol{B}}_i$, lisses sur $\boldsymbol{R}$.

De plus, pour tout isomorphisme φ_1 relevant $\mathrm{id}_{\overline{\boldsymbol{B}}_1}$ (resp. φ_2 relevant $\mathrm{id}_{\overline{\boldsymbol{B}}_2}$), il existe un isomorphisme φ_2 relevant $\mathrm{id}_{\overline{\boldsymbol{B}}_2}$ (resp. φ_1 relevant $\mathrm{id}_{\overline{\boldsymbol{B}}_1}$) tels que le couple (φ_1, φ_2) vérifie la proposition.

Démonstration. D'après le théorème d'existence de relèvements lisses (1.3.1 [Ar]) appliqué au couple $(\boldsymbol{R},\boldsymbol{I})$, il existe un relèvement lisse $q_1 : \boldsymbol{A}_1 \to \overline{\boldsymbol{B}}_1$, et, appliqué au couple $(\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{A}_1)$, un relèvement $q_2 : \boldsymbol{A}_2 \twoheadrightarrow \overline{\boldsymbol{B}}_2$ lisse *sur* $\boldsymbol{A}_1$. Les $\boldsymbol{R}$-algèbres $\boldsymbol{A}_i^\dagger$ sont f.c.t.f. très lisses (3.3.1 *loc. cit.*) de sorte qu'il existe des morphismes $\varphi_i : \boldsymbol{A}_i^\dagger \to \boldsymbol{B}_i$ relevant l'identité sur $\overline{\boldsymbol{B}}_i$; de tels morphismes sont automatiquement bijectifs (th. 3.2 [MW]).

Pour φ_1 donné, munissons $\boldsymbol{B}_2$ de la structure de $\boldsymbol{A}_1$-algèbre induite par $\beta\circ\varphi_1\circ\iota_1$, et considérons les données :

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{A}_2 \arrow[d, two heads, "q_2"'] & & \boldsymbol{B}_2 \arrow[d, two heads, "p_2"] \\ \overline{\boldsymbol{B}}_2 \arrow[rr, leftrightarrow, "\mathrm{id}"] & & \overline{\boldsymbol{B}}_2 \end{tikzcd}$$

dans la catégorie des $\boldsymbol{A}_1$-algèbres. Comme $\boldsymbol{A}_2$ est lisse sur $\boldsymbol{A}_1$, il existe un voisinage étale $(\boldsymbol{B}_2)_\varepsilon$ de $\boldsymbol{I}$ dans $\boldsymbol{B}_2$ et un morphisme $\phi_2 : \boldsymbol{A}_2 \to (\boldsymbol{B}_2)_\varepsilon$ tels que :

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{A}_2 \arrow[r, "\phi_2"] \arrow[d, two heads, "q_2"'] & (\boldsymbol{B}_2)_\varepsilon \arrow[d, two heads, "p_{2\varepsilon}"] & \boldsymbol{B}_2 \arrow[l, "\varepsilon"'] \arrow[d, two heads, "p_2"] \\ \overline{\boldsymbol{B}}_2 \arrow[r, leftrightarrow, "\mathrm{id}"] & \overline{\boldsymbol{B}}_2 \arrow[r, leftrightarrow, "\mathrm{id}"] & \overline{\boldsymbol{B}}_2 \end{tikzcd}$$

est un diagramme commutatif de $\boldsymbol{A}_1$-algèbres (2.1.3 [Ar]).

Par complétion faible, $\varepsilon^\dagger$ est un isomorphisme (3.2.4 *loc. cit.*) et $\varphi_2 := (\varepsilon^\dagger)^{-1}\circ\phi_2^\dagger$ vérifie, par construction, l'égalité $\beta\circ\varphi_1 = \varphi_2\circ\sigma^\dagger$, ce qui prouve une partie de la proposition.

Inversement, donnons-nous φ_2. On a les morphismes des $\boldsymbol{R}$-algèbres f.c.t.f. très lisses :

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{B}_1 \arrow[r, "\beta"] & \boldsymbol{B}_2 \\ \boldsymbol{A}_1^\dagger \arrow[r, "\sigma^\dagger"] & \boldsymbol{A}_2^\dagger \arrow[u, "\simeq"', "\varphi_2"] \end{tikzcd}$$

La sous-algèbre $\boldsymbol{C}$ de $\boldsymbol{B}_2$ engendrée par les images de β et $\varphi_2\circ\sigma^\dagger$ est f.c.t.f. d'après le corollaire du th. 2.1 de [MW]. Il en est de même de la sous-algèbre $\mathrm{im}(\beta)$ et comme l'inclusion $\mathrm{im}(\beta)\subseteq\boldsymbol{C}$ est une égalité modulo $\boldsymbol{I}$, on déduit que $\mathrm{im}(\beta)=\boldsymbol{C}=\mathrm{im}(\varphi_2\circ\sigma^\dagger)$ (th. 3.1 [MW]). L'existence de φ_1 vérifiant $\beta\circ\varphi_1=\varphi_2\circ\sigma^\dagger$ résulte alors de ce que $\boldsymbol{A}_1^\dagger$ est très lisse. ■

§ 2. Site des relèvements très lisses associé à un schéma lisse sur $\overline{\boldsymbol{R}}$

2.1 La catégorie $\mathscr{X}_{\mathrm{inf}}^\dagger$ des relèvements affines très lisses

À un schéma $\left(\overline{\boldsymbol{X}},\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}}\right)$ séparé et lisse sur $\overline{\boldsymbol{R}}$, on associe la catégorie $\mathscr{X}_{\mathrm{inf}}^\dagger$ suivante :

- Un objet $\boldsymbol{\mathscr{U}}$ de $\mathscr{X}_{\mathrm{inf}}^\dagger$ est un morphisme surjectif de $\boldsymbol{R}$-algèbres

$$p_{\mathscr{U}} : \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\mathscr{U}})^\dagger \twoheadrightarrow \Gamma\left(\overline{\boldsymbol{\mathscr{U}}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}}\right)$$

avec :
$$\begin{cases} \overline{\boldsymbol{\mathscr{U}}} & : \text{ouvert affine de } \overline{\boldsymbol{X}}\,; \\ \boldsymbol{A}(\mathscr{U})^\dagger & : \boldsymbol{R}\text{-algèbre f.c.t.f. très lisse}\,; \\ p_{\mathscr{U}} & : \text{relèvement de } \boldsymbol{R}\text{-algèbres.} \end{cases}$$

L'ouvert $\overline{\boldsymbol{\mathscr{U}}}$, l'algèbre très lisse $\boldsymbol{A}(\mathscr{U})^\dagger$ et le morphisme $p_{\mathscr{U}}$, seront respectivement appelés « *l'ouvert (de $\overline{\boldsymbol{X}}$), l'algèbre et le relèvement très lisses correspondants à* $\mathscr{U}$ ».

- Étant donnés deux objets $\mathscr{V}$ et $\mathscr{U}$ de $\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$, tels que $\overline{\mathscr{V}} \subseteq \overline{\boldsymbol{\mathscr{U}}}$, un élément $\varPhi$ de l'ensemble $\mathrm{Mor}_{\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}\big(\mathscr{V},\mathscr{U}\big)$ est un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\phi : \boldsymbol{A}(\mathscr{U})^\dagger \to \boldsymbol{A}(\mathscr{V})^\dagger$ tel que le diagramme :
$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{A}(\mathscr{U})^\dagger & \xrightarrow{\ \phi\ } & \boldsymbol{A}(\mathscr{V})^\dagger \\ {\scriptstyle p_{\mathscr{U}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_{\mathscr{V}}} \\ \varGamma(\overline{\boldsymbol{\mathscr{U}}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}}) & \xrightarrow{\ \bar\rho\ } & \varGamma(\overline{\mathscr{V}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}}) \end{array}$$
où $\bar\rho$ désigne le morphisme de restriction canonique, est commutatif.

  Le morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\phi : \boldsymbol{A}(\mathscr{U})^\dagger \to \boldsymbol{A}(\mathscr{V})^\dagger$ est appelé « *le morphisme de* $\boldsymbol{R}$-*algèbres associé à* $\varPhi$ ».
- Lorsque $\mathscr{V}$ et $\mathscr{U}$ sont tels que $\overline{\mathscr{V}} \not\subseteq \overline{\boldsymbol{\mathscr{U}}}$, on pose : $\mathrm{Mor}_{\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}\big(\mathscr{V},\mathscr{U}\big) = \varnothing$.

2.1.1. Remarques

a) Avec les notations précédentes, $\mathrm{Mor}_{\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}(\mathscr{V},\mathscr{U}) \neq \varnothing$, si et seulement si, $\overline{\mathscr{V}} \subseteq \overline{\boldsymbol{\mathscr{U}}}$. La suffisance de cette dernière condition est conséquence de ce que $\boldsymbol{A}(\mathscr{U})^\dagger$ est très lisse.

b) Pour tout ouvert affine $\overline{U} \subseteq \overline{\boldsymbol{X}}$, il existe des relèvements $\boldsymbol{B} \twoheadrightarrow \varGamma(\overline{U};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ lisses sur $\boldsymbol{R}$ (1.3.1 [Ar]) et le morphisme induit $\boldsymbol{B}^\dagger \twoheadrightarrow \varGamma(\overline{U};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ est un relèvement très lisse (3.3.1 *loc. cit.*). Pour tout ouvert affine $\overline{U} \subseteq \overline{\boldsymbol{X}}$ il existe donc un objet $\mathscr{U}$ de $\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ dont l'ouvert correspondant est $\overline{U}$; un tel $\mathscr{U}$ sera appelé « *un relèvement* (†-*adique*) *de* $\overline{U}$ ».

c) Pour tout $\mathscr{U} \in \mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$, le semi-groupe $\big(\mathrm{End}_{\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}(\mathscr{U}), \circ, \mathbf{1}_{\mathscr{U}}\big)$ est un groupe (th. 3.2 [MW]), il s'identifie à l'opposé du groupe des automorphismes de $\boldsymbol{R}$-algèbre de $\boldsymbol{A}(\mathscr{U})^\dagger$ dont la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ est l'identité.

2.2 Existence de produits fibrés dans $\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$

Proposition. *La catégorie $\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ possède des produits fibrés.*

Démonstration. À un diagramme commutatif dans $\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$:
$$\begin{array}{ccc} \mathscr{W} & \longrightarrow & \mathscr{V}_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathscr{V}_2^\dagger & \longrightarrow & \mathscr{U} \end{array}$$
correspondent les diagrammes commutatifs :
$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{A}(\mathscr{U})^\dagger & \longrightarrow & \boldsymbol{A}(\mathscr{V}_1)^\dagger \\ \downarrow & (\mathscr{D}) & \downarrow \\ \boldsymbol{A}(\mathscr{V}_2)^\dagger & \longrightarrow & \boldsymbol{A}(\mathscr{W})^\dagger \end{array} \quad \xrightarrow{\ \bmod \boldsymbol{I}\ } \quad \begin{array}{ccc} \varGamma(\overline{\boldsymbol{\mathscr{U}}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}}) & \xrightarrow{\ \bar\rho\ } & \varGamma(\overline{\mathscr{V}}_1;\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}}) \\ {\scriptstyle \bar\rho}\downarrow & (\overline{\mathscr{D}}) & \downarrow{\scriptstyle \bar\rho} \\ \varGamma(\overline{\mathscr{V}}_2;\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}}) & \xrightarrow{\ \bar\rho\ } & \varGamma(\overline{\mathscr{W}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}}) \end{array}$$

respectivement de $\boldsymbol{R}$-algèbres f.c.t.f. très lisses et de $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres, où nous pouvons supposer (prop. 1.2.1) que le diagramme de $\boldsymbol{A}(\mathscr{U})^\dagger$-algèbres $(\mathscr{D})$ résulte de compléter faiblement un diagramme de morphismes de $\boldsymbol{A}(\overline{\mathscr{U}})$-algèbres :

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{A}(\overline{\mathscr{U}}) \arrow[r, "\sigma_1"] \arrow[d, "\sigma_2"'] \arrow[dr, phantom, "(\mathscr{D}')"] & \boldsymbol{A}(\overline{\mathscr{V}}_1) \arrow[d, "\xi_1"] \\
\boldsymbol{A}(\overline{\mathscr{V}}_2) \arrow[r, "\xi_2"'] & \boldsymbol{A}(\mathscr{W})^\dagger
\end{tikzcd}$$

où $\boldsymbol{A}(\overline{\mathscr{U}})$ est un relèvement de $\Gamma(\overline{\mathscr{U}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ lisse sur $\boldsymbol{R}$; $\boldsymbol{A}(\overline{\mathscr{V}}_i)$ est un relèvement de $\Gamma(\overline{\mathscr{V}}_i;\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ lisse sur $\boldsymbol{A}(\overline{\mathscr{U}})$ (σ_i désigne alors morphisme structural) et $(\mathscr{D}')$ est un relèvement de $\overline{\mathscr{D}}$.

Le diagramme $(\mathscr{D}')$ admet une factorisation unique en :

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{A}(\overline{\mathscr{U}}) \arrow[r, "\sigma_1"] \arrow[d, "\sigma_2"'] & \boldsymbol{A}(\overline{\mathscr{V}}_1) \arrow[d] \arrow[ddr, bend left, "\xi_1"] & \\
\boldsymbol{A}(\overline{\mathscr{V}}_2) \arrow[r] \arrow[drr, bend right, "\xi_2"'] & \boldsymbol{A}(\overline{\mathscr{V}}_1)\otimes_{\boldsymbol{A}(\overline{\mathscr{U}})}\boldsymbol{A}(\overline{\mathscr{V}}_2) \arrow[dr, "\xi"] & \\
& & \boldsymbol{A}(\mathscr{W})^\dagger
\end{tikzcd} \qquad (\mathscr{D}'')$$

où les morphismes de $\boldsymbol{A}(\overline{\mathscr{V}}_i)$ vers $\boldsymbol{A}(\overline{\mathscr{V}}_1)\otimes_{\boldsymbol{A}(\overline{\mathscr{U}})}\boldsymbol{A}(\overline{\mathscr{V}}_2)$ sont les morphismes canoniques.

Ceci étant, $\boldsymbol{A}(\overline{\mathscr{V}}_{12}) := \boldsymbol{A}(\overline{\mathscr{V}}_1)\otimes_{\boldsymbol{A}(\overline{\mathscr{U}})}\boldsymbol{A}(\overline{\mathscr{V}}_2)$ est un relèvement lisse sur $\boldsymbol{A}(\overline{\mathscr{U}})$ (donc sur $\boldsymbol{R}$) de $\Gamma(\overline{\mathscr{V}}_{12};\mathscr{O}_{\overline{\mathscr{V}}_{12}})$ où $\overline{\mathscr{V}}_{12} := \overline{\mathscr{V}}_1 \times_{\overline{\mathscr{U}}} \overline{\mathscr{V}}_2$ est canoniquement isomorphe à l'ouvert affine $\overline{\mathscr{V}}_1 \cap \overline{\mathscr{V}}_2$ puisque $\overline{\boldsymbol{X}}$ est supposée séparée. La complétion faible $\boldsymbol{A}(\overline{\mathscr{V}}_{12})^\dagger$ de $\boldsymbol{A}(\overline{\mathscr{V}}_{12})$ est f.c.t.f. très lisse (3.3.1 [Ar]) et le couple $\big(\overline{\mathscr{V}}_{12};\boldsymbol{A}(\overline{\mathscr{V}}_{12})^\dagger \twoheadrightarrow \Gamma(\overline{\mathscr{V}}_{12};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})\big)$ est un objet de $\mathscr{K}^\dagger_{\mathrm{inf}}$.

L'existence du produit fibré $\mathscr{V}_1 \times_{\mathscr{U}} \mathscr{V}_2$ dans $\mathscr{K}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ résulte alors de compléter faiblement le diagramme $(\mathscr{D}'')$. ∎

2.2.1. Remarque. La démonstration précédente montre que l'ouvert affine correspondant au produit fibré $\mathscr{V}_1 \times_{\mathscr{U}} \mathscr{V}_2$ est précisément $\overline{\mathscr{V}}_1 \times_{\overline{\mathscr{U}}} \overline{\mathscr{V}}_2 = \overline{\mathscr{V}}_1 \cap \overline{\mathscr{V}}_2$.

2.3 Topologie de Grothendieck sur $\mathscr{K}^\dagger_{\mathrm{inf}}$

2.3.1. Rappel. Une « *topologie de Grothendieck* » sur une catégorie $\mathscr{C}$ avec produits fibrés est la donnée de familles de morphismes $\{\Phi_i : \boldsymbol{O}_i \to \boldsymbol{O}\}_{i\in\mathfrak{A}}$, appelées « *recouvrements (de $\mathscr{C}$)* », telles que :

a) Pour tout objet $\boldsymbol{O}$ de $\mathscr{C}$ et tout $\Phi \in \mathrm{Iso}_{\mathscr{C}}(\boldsymbol{O})$, $\{\Phi : \boldsymbol{O} \to \boldsymbol{O}\}$ est un recouvrement.
b) Étant donné un recouvrement $\{\Phi_i : \boldsymbol{O}_i \longrightarrow \boldsymbol{O}\}_{i\in\mathfrak{A}}$ et pour chaque $i \in \mathfrak{A}$, un recouvrement $\{\Phi_{i,i'} : \boldsymbol{O}_{i,i'} \longrightarrow \boldsymbol{O}_i\}_{i'\in\mathfrak{B}}$, la famille des composés $\{\Phi_i \circ \Phi_{i,i'} : \boldsymbol{O}_{i,i'} \longrightarrow \boldsymbol{O}\}_{i\in\mathfrak{A},i'\in\mathfrak{B}}$ est un recouvrement.
c) Pour tout recouvrement $\{\Phi_i : \boldsymbol{O}_i \longrightarrow \boldsymbol{O}\}$ et tout morphisme $\Phi' : \boldsymbol{O}' \to \boldsymbol{O}$, la famille de morphismes $\{\Phi_i \times_{\boldsymbol{O}} \Phi' : \boldsymbol{O}_i \times_{\boldsymbol{O}} \boldsymbol{O}' \longrightarrow \boldsymbol{O}'\}$ est un recouvrement.

2.3.2. Définition. Un « *recouvrement de* $\mathscr{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ » est la donnée d'un objet $\mathscr{U}$ et d'une famille $\mathscr{R} = \{\Phi_i : \mathscr{U}_i \longrightarrow \mathscr{U}\}_{i\in\mathfrak{A}}$ de morphismes, tels que la famille $\{\overline{\mathscr{U}}_i\}_{i\in\mathfrak{A}}$ des ouverts de $\overline{X}$ correspondants est un recouvrement de l'ouvert $\overline{\mathscr{U}}$ dans $\overline{X}$. Le recouvrement $\overline{\mathscr{U}} = \bigcup_i \overline{\mathscr{U}}_i$ est « *le recouvrement de* $\overline{\mathscr{U}}$ *dans* $\overline{X}$ *correspondant à* $\mathscr{R}$ »

2.3.3. Remarque et terminologie. Soit $\mathscr{U}$ un objet de $\mathscr{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$. Tout recouvrement affine $\overline{\mathscr{U}} = \bigcup_i \overline{U}_i$ dans $\overline{X}$ correspond à un recouvrement $\{\mathscr{U}_i \to \mathscr{U}\}$ de $\mathscr{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ (*cf.* 2.1.1-b), un tel recouvrement est « *un relèvement* (†*-adique*) *du recouvrement* $\overline{\mathscr{U}} = \bigcup \overline{U}_i$ ».

2.3.4. Notations et terminologie

- On note $\mathrm{Rec}(\mathscr{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}})$ la classe des recouvrements de $\mathscr{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$.
- Un recouvrement $\{\mathscr{U}_i \to \mathscr{U}\}_{i\in\mathfrak{A}}$ est dit « *fini* » lorsque l'ensemble d'indices $\mathfrak{A}$ est de cardinal fini.
- Un recouvrement $\{\mathscr{U}_i \to \mathscr{U}\}$ est dit « *principal* » lorsque les ouverts $\overline{\mathscr{U}}_i$ sont principaux dans l'ouvert $\overline{\mathscr{U}}$ correspondant à $\mathscr{U}$, *i.e.* des complémentaires d'hypersurfaces de $\overline{\mathscr{U}}$.
- Deux recouvrements $\mathscr{R}_1 = \{\Phi_i : \mathscr{U}_i \to \mathscr{U}\}_{i\in\mathfrak{A}}$ et $\mathscr{R}_2 = \{\Phi_{i'} : \mathscr{V}_i \to \mathscr{V}\}_{i'\in\mathfrak{B}}$ seront dits « *isomorphes* » lorsqu'il existe une bijection $\beta : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ et des isomorphismes $\Psi \in \mathrm{Iso}_{\mathscr{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}}(\mathscr{U}, \mathscr{V})$ et $\Psi_i \in \mathrm{Iso}_{\mathscr{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}}\big(\mathscr{U}_i, \mathscr{V}_{\beta(i)}\big)$ tels que les diagrammes :
$$\begin{array}{ccc} \mathscr{U}_i & \xrightarrow{\Phi_i} & \mathscr{U} \\ {\scriptstyle\Psi_i}\downarrow\simeq & & \simeq\downarrow{\scriptstyle\Psi} \\ \mathscr{V}_{\beta(i)} & \xrightarrow{\Phi_{i'}} & \mathscr{V} \end{array}$$
sont commutatifs pour tout $i \in \mathfrak{A}$. La famille $\{\Psi_i; \Psi\}$ est alors « *un isomorphisme de recouvrements de* $\mathscr{R}_1$ *vers* $\mathscr{R}_2$ ».

2.3.5. Proposition. *La classe de recouvrements* $\mathrm{Rec}(\mathscr{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}})$ *munit la catégorie* $\mathscr{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ *d'une topologie de Grothendieck.*

Démonstration. Résulte de la proposition 2.2 et de la remarque 2.2.1. ∎

2.3.6. Définition. La catégorie $\mathscr{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ munie de la classe de recouvrements $\mathrm{Rec}(\mathscr{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}})$ est « *le site des relèvements affines très lisses* » associé au schéma lisse et séparé $(\overline{X}; \mathscr{O}_{\overline{X}})$.

2.3.7. Notations et terminologie

- Les objets de $\mathscr{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ seront appelés « *les ouverts du site* $\mathscr{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ ».
- On dira de deux ouverts $\mathscr{V}$ et $\mathscr{U}$ de $\mathscr{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$, que « $\mathscr{V}$ *est contenu dans* $\mathscr{U}$ », et l'on notera $\mathscr{V} \subseteq \mathscr{U}$, lorsqu'il en est ainsi des ouverts de $\overline{X}$ correspondants. On a donc $\mathscr{V} \subseteq \mathscr{U}$, si et seulement si, $\overline{\mathscr{V}} \subseteq \overline{\mathscr{U}}$.

2.4 Algébricité des recouvrements principaux de $\mathscr{X}^\dagger_{\mathbf{inf}}$

Soient $\overline{U}$ un ouvert affine de $\overline{\boldsymbol{X}}$ et $\boldsymbol{B} \twoheadrightarrow \Gamma(\overline{U};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ un relèvement lisse sur $\boldsymbol{R}$. Notons $(U;\mathscr{O}_U)$ le schéma affine associé à $\boldsymbol{B}$. Tout recouvrement affine $U = \bigcup_i V_i$ induit, par réduction modulo $\boldsymbol{I}$, un recouvrement affine $\overline{U} = \bigcup_i \overline{V_i}$ dans $\overline{\boldsymbol{X}}$. Les complétions faibles des morphismes canoniques de relèvements :

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(U;\mathscr{O}_U) & \xrightarrow{\rho_i} & \Gamma(V_i;\mathscr{O}_U) \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \Gamma(\overline{U};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}}) & \xrightarrow{\overline{\rho}_i} & \Gamma(\overline{V_i};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}}) \end{array}$$

donnent des morphismes de relèvements

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{A}(\mathscr{U})^\dagger & \xrightarrow{\rho_i^\dagger} & \boldsymbol{A}(\mathscr{V}_i)^\dagger \\ {\scriptstyle p_{\mathscr{U}}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle p_{\mathscr{V}_i}} \\ \Gamma(\overline{U};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}}) & \xrightarrow{\overline{\rho}_i} & \Gamma(\overline{V_i};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}}) \end{array}$$

où l'on a noté $\boldsymbol{A}(\mathscr{U})^\dagger := \Gamma(U;\mathscr{O}_U)^\dagger$ et $\boldsymbol{A}(\mathscr{V}_i)^\dagger := \Gamma(V_i;\mathscr{O}_U)^\dagger$. Ces algèbres sont f.c.t.f. très lisses et les relèvements $p_{\mathscr{U}}$ et $p_{\mathscr{V}_i}$ sont des ouverts de $\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$, notés $\mathscr{U}$ et $\mathscr{V}_i$ respectivement. La famille $\{\Phi_i : \mathscr{V}_i \longrightarrow \mathscr{U}\}$ définie par les morphismes $\rho_i^\dagger$ est donc un recouvrement de $\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$; il sera appelé « *la complétion faible du recouvrement (algébrique)* $\{V_i\}$ *de* U ».

2.4.1. Définition. Un recouvrement de $\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ isomorphe à la complétion faible d'un recouvrement affine d'un relèvement lisse d'un ouvert affine de $\overline{\boldsymbol{X}}$ sera dit « *algébrique* ».

2.4.2. Proposition. *Tout recouvrement principal de* $\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ *est algébrique.*

Démonstration. Soit $\mathscr{R} = \{\mathscr{U}_i \to \mathscr{U}\}_{i\in\mathfrak{A}}$ un recouvrement principal de $\overline{\boldsymbol{X}}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ et notons $\{\overline{U}_i \subseteq \overline{U}\}$ le recouvrement induit dans $\overline{\boldsymbol{X}}$. Pour chaque ouvert $\overline{U}_i$, on choisit $f_i \in \Gamma(\overline{U};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ tel que $\overline{U}_i = D(f_i)$. Fixons un relèvement $p : \boldsymbol{B} \twoheadrightarrow \Gamma(\overline{U};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ lisse sur $\boldsymbol{R}$ et, pour chaque $i \in \mathfrak{A}$, un élément $g_i \in \boldsymbol{B}$ tel que $p(g_i) = f_i$. Comme $\overline{U} = \bigcup_i D(f_i)$, l'idéal de $\Gamma(\overline{U};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ engendré par les f_i contient 1 ; il existe, par conséquent, un élément g de l'idéal de $\boldsymbol{B}$ engendré par les g_i vérifiant $p(g) = 1$ et le morphisme p induit un relèvement lisse $\boldsymbol{B}_g \twoheadrightarrow \Gamma(\overline{U};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$. La famille $\{D(g_i)\}$ est maintenant un recouvrement (principal) du schéma affine $(U;\mathscr{O}_U)$ associé à $\boldsymbol{B}_g$ qui relève, par construction, le recouvrement $\{D(f_i)\}$ de $\overline{U}$. Notons $\mathscr{R}' = \{\mathscr{V}_i \longrightarrow \mathscr{V}\}$ le recouvrement de $\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ obtenu par complétion faible de la famille d'inclusions $\{D(g_i) \subseteq U\}$. On a $\mathscr{V}_i \simeq \mathscr{U}_i$ et $\mathscr{V} \simeq \mathscr{U}$ et la proposition 1.2.1 établit l'existence, pour tout $\Psi \in \mathrm{Iso}_{\overline{\boldsymbol{X}}^\dagger_{\mathrm{inf}}}(\mathscr{V},\mathscr{U})$ donné, d'une famille $\{\Psi_i \in \mathrm{Iso}_{\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}(\mathscr{V}_i,\mathscr{U}_i)\}$ telle que $\{\Psi_i;\Psi\}$ est un isomorphisme de $\mathscr{R}'$ vers $\mathscr{R}$. Le recouvrement $\mathscr{R}$ est donc bien algébrique. ∎

2.4.3. Commentaire. La proposition 1.2.1 montre que tout morphisme entre deux ouverts $\mathscr{V} \subseteq \mathscr{U}$ de $\mathscr{X}^\dagger_{\inf}$, d'ouverts correspondants $\overline{\mathscr{V}} \subseteq \overline{\mathscr{U}}$, est isomorphe à la complétion faible d'un morphisme lisse $\alpha : V \to U$ entre deux relèvements lisses sur $\boldsymbol{R}$ de $\overline{\mathscr{V}}$ et $\overline{\mathscr{U}}$ respectivement, mais cette proposition n'établit pas l'existence d'un tel α qui soit, en plus, un plongement ouvert. La démonstration précédente prouve que c'est toujours le cas lorsque $\overline{\mathscr{V}}$ est principal dans $\overline{\mathscr{U}}$.

2.5 Préfaisceaux et faisceaux sur $\mathscr{X}^\dagger_{\mathbf{inf}}$

Soit $\boldsymbol{Z}$ un anneau arbitraire. Un préfaisceaux de $\boldsymbol{Z}$-modules sur $\mathscr{X}^\dagger_{\inf}$ est un foncteur contravariant de $\mathscr{X}^\dagger_{\inf}$ vers la catégorie $\mathrm{Mod}(\boldsymbol{Z})$ des $\boldsymbol{Z}$-modules (à gauche). Pour tout préfaisceau $\mathscr{P} : \mathscr{X}^\dagger_{\inf} \rightsquigarrow \mathrm{Mod}(\boldsymbol{Z})$ et tout morphisme $\Phi \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{X}^\dagger_{\inf}}(\mathscr{V}, \mathscr{U})$, le morphisme de $\boldsymbol{Z}$-modules $\mathscr{P}(\Phi) : \mathscr{P}(\mathscr{U}) \to \mathscr{P}(\mathscr{V})$ est « *le morphisme de restriction associé à Φ par $\mathscr{P}$* ».

Un préfaisceau $\mathscr{P}$ sur $\mathscr{X}^\dagger_{\inf}$ est dit « *faisceau sur le site $\mathscr{X}^\dagger_{\inf}$* » lorsque pour tout recouvrement $\mathscr{R} = \{\Phi_i : \mathscr{U}_i \to \mathscr{U}\}_{i \in \mathfrak{A}}$ du site $\mathscr{X}^\dagger_{\inf}$, la suite de $\boldsymbol{Z}$-modules :

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{0} \to \mathscr{P}(\mathscr{U}) \xrightarrow{\ \Pi_{\mathscr{R}}\ } \prod_{i\in\mathfrak{A}} \mathscr{P}(\mathscr{U}_i) & \xrightarrow{\ \Delta_{\mathscr{R}}\ } & \prod_{i,i'\in\mathfrak{A}} \mathscr{P}(\mathscr{U}_i \times_{\mathscr{U}} \mathscr{U}_{i'}) \\ m \xmapsto{\ \Pi_{\mathscr{R}}\ } \big(\mathscr{P}(\Phi_i)(m)\big)_i & & \\ (m_i)_i & \xmapsto{\ \Pi_{\mathscr{R}}\ } & \big(\mathscr{P}(\xi_i)(m_i) - \mathscr{P}(\xi_{i'})(m_{i'})\big)_{i,i'} \end{array} \qquad (\mathscr{P}(\mathscr{R}))$$

où $\xi_i : \mathscr{U}_i \times_{\mathscr{U}} \mathscr{U}_{i'} \to \mathscr{U}_i$ (resp. $\xi_{i'}$) désigne le morphisme de 2.2, est **exacte**.

2.5.1. Proposition. *Un préfaisceau $\mathscr{P}$ est un faisceau, si et seulement si, la suite $\mathscr{P}(\mathscr{R})$ est exacte pour tout recouvrement **fini et principal** $\mathscr{R}$ de $\mathscr{X}^\dagger_{\inf}$.*

Démonstration. Soit $\mathscr{P}$ un préfaisceau vérifiant la condition de la proposition. Nous devons prouver que pour tout recouvrement $\mathscr{R} = \{\Phi_i : \mathscr{U}_i \longrightarrow \mathscr{U}\}_{i\in\mathfrak{A}}$, la suite de $\boldsymbol{A}$-modules :

$$\mathbf{0} \to \mathscr{P}(\mathscr{U}) \xrightarrow{\Pi_{\mathscr{R}}} \prod_{i\in\mathfrak{A}} \mathscr{P}(\mathscr{U}_i) \xrightarrow{\Delta_{\mathscr{R}}} \prod_{i,i'\in\mathfrak{A}} \mathscr{P}(\mathscr{U}_i \times_{\mathscr{U}} \mathscr{U}_{i'}) \qquad (*)$$

est exacte.

Remarquons pour commencer que l'exactitude des suites $(*)$ associées aux recouvrements *finis* de $\mathscr{X}^\dagger_{\inf}$ implique l'exactitude des suites $\mathscr{P}(\mathscr{R})$ en toute généralité. En effet, comme l'ouvert $\overline{\mathscr{U}}$ est affine, il existe une partie finie $\mathfrak{A}' = \{i_1, \ldots, i_r\} \subseteq \mathfrak{A}$ telle que $\mathscr{R}' = \{\Phi_{i_i} : \mathscr{U}_{i_i} \longrightarrow \mathscr{U}\}_{i=1,\ldots,r}$ est un recouvrement de $\mathscr{X}^\dagger_{\inf}$ et la suite $(*)$ associée à $\mathscr{R}'$ est exacte. L'injectivité de $\Pi_{\mathscr{R}'}$ entraîne celle de $\Pi_{\mathscr{R}}$ et lorsque $\vec{x} := (x_i)$ (‡) est un élément de $\prod_i \mathscr{P}(\mathscr{U}_i)$ annulé par $\Delta_{\mathscr{R}}$, l'élément $\vec{x}' := (x_{i_i}) \in \prod_{i=1,\ldots,r} \mathscr{P}(\mathscr{U}_{i_i})$ est annulé par $\Delta_{\mathscr{R}'}$ et il existe $y_{\mathscr{R}'} \in \mathscr{P}(\mathscr{U})$ (unique) tel que $\phi_{i_i}(y_{\mathscr{R}'}) = x_{i_i}$, pour tout $i = 1, \ldots, r$. Ces raisonnements s'appliquent évidemment à tout sous-recouvrement fini $\mathscr{R}''$ de $\mathscr{R}$, en particulier à ceux indexés par les parties $\mathfrak{A}'' \subseteq \mathfrak{A}$ de la forme $\mathfrak{A}'' := \mathfrak{A}' \cup \{i\}$, avec $i \in \mathfrak{A}$. L'élément $y_{\mathscr{R}''} \in \mathscr{P}(\mathscr{U})$, correspondant au même choix (‡) de $\vec{x}$, est alors nécessairement égal à $y_{\mathscr{R}'}$

puisque $\Pi_{\mathscr{R}'}$ est injective. Il s'ensuit que $\phi_i(y_{\mathscr{R}'}) = x_i$ pour tout $i \in \mathfrak{A}$, et la suite $(*)$ est exacte.

Lorsque $\mathscr{R} = \{\mathscr{U}_i \to \mathscr{U}\}_{i\in\mathfrak{A}}$ est un recouvrement fini quelconque de recouvrement correspondant $\overline{\mathscr{U}} = \bigcup_i \overline{\mathscr{U}}_i$, on se donne pour chaque $i \in \mathfrak{A}$ un recouvrement fini $\overline{\mathscr{U}}_i = \bigcup_{i'\in\mathfrak{B}} \overline{U}_{i,i'}$ par des ouverts *principaux dans* $\overline{\mathscr{U}}$ et un recouvrement $\mathscr{R}_i = \{\Phi_{i,i'} : \mathscr{U}_{i,i'} \to \mathscr{U}_i\}$ de $\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ le relevant. Le recouvrement $\mathscr{R}_i$ est alors fini et principal de même que le recouvrement composé $\mathscr{R}_* = \{\mathscr{U}_{i,i'} \to \mathscr{U}\}$ et les suites $\mathscr{P}(\mathscr{R}_i)$ et $\mathscr{P}(\mathscr{R}_*)$ sont exactes par hypothèse. On considère alors le morphisme de complexes :

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbf{0} \to \mathscr{P}(\mathscr{U}) & \xrightarrow{\Pi_{\mathscr{R}}} & \prod_{i\in\mathfrak{A}} \mathscr{P}(\mathscr{U}_i) & \xrightarrow{\Delta_{\mathscr{R}}} & \prod_{i,i'\in\mathfrak{A}} \mathscr{P}(\mathscr{U}_i \times_{\mathscr{U}} \mathscr{U}_{i'}) \\
\Big\| & & \Big\downarrow {\textstyle\prod} \phi_{i,i'} & & \Big\downarrow \\
\mathbf{0} \to \mathscr{P}(\mathscr{U}) & \xrightarrow{\Pi_{\mathscr{R}_*}} & \prod_{i\in\mathfrak{A};i'\in\mathfrak{B}} \mathscr{P}(\mathscr{U}_{i,i'}) & \xrightarrow{\Delta_{\mathscr{R}_*}} & \prod_{i,i'\in\mathfrak{A};i',i''\in\mathfrak{B}} \mathscr{P}(\mathscr{U}_{i,i'} \times_{\mathscr{U}} \mathscr{U}_{i',i''})
\end{array}$$

où les morphismes verticaux sont donnés par les produits des morphismes de restriction. Pour tout $(x_i) \in \ker(\Delta_{\mathscr{R}})$, l'élément $(y_{i,i'}) := \prod \phi_{i,i'}((x_i))$ appartient à $\ker(\Delta(\mathscr{R}_*))$ et il existe un élément de $x \in \mathscr{P}(\mathscr{U})$ tel que $\Pi_{\mathscr{R}_*}(x) = (y_{i,i'})$. L'égalité $\Pi_{\mathscr{R}}(x) = (x_i)$ découle alors de l'injectivité de $\prod \phi_{i,i'}$ (pour chaque i donné). ∎

2.5.2. Notation. On notera $\mathrm{Préf}_{\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}(\boldsymbol{Z})$ et $\mathrm{Mod}_{\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}(\boldsymbol{Z})$ respectivement la catégorie des préfaisceaux et des faisceaux de $\boldsymbol{Z}$-modules sur le site $\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$.

§ 3. Sous-sites de Meredith

3.1 Rappel de résultats

Dans les sections suivantes nous allons utiliser quelques résultats de base établis dans les articles de Monsky-Washnitzer ([MW]) et de Meredith ([M]) parfois sous des hypothèses générales plus fortes que celles requises pour leur démonstration. Nous donnons maintenant la liste de ces résultats valables uniquement sous l'hypothèse que l'anneau $\boldsymbol{R}$ est nœthérien([1]).

a) Pour toute $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$ le morphisme canonique $\varphi_j : \boldsymbol{A}/\boldsymbol{I}^j{\cdot}\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}^\dagger/\boldsymbol{I}^j{\cdot}\boldsymbol{A}^\dagger$ est bijectif, quel que soit $j \in \mathbb{N}$.

b) Soit $\boldsymbol{A}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre f.c.t.f.
   i) $\boldsymbol{A}$ est quotient de $\boldsymbol{R}[\overrightarrow{X}]^\dagger$ où $\overrightarrow{X}$ désigne une liste finie de variables.
   ii) $\boldsymbol{A}$ est noethérienne.

c) Si $\boldsymbol{A}$ est f.c.t.f. $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{I}{\cdot}\boldsymbol{A})$ est un anneau de Zariski.

d) Soit $\boldsymbol{A}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre. Si $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{A}^\dagger$ sont nœthériennes, $\boldsymbol{A}^\dagger$ est plate sur $\boldsymbol{A}$.

e) Soit $\boldsymbol{A}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre de type fini ou f.c.t.f.
   i) Pour tout $f \in \boldsymbol{A}$, l'algèbre $(\boldsymbol{A}_f)^\dagger = ((\boldsymbol{A}^\dagger)_f)^\dagger$ est plate sur $\boldsymbol{A}$.

[1] Voir [MW] pour les assertions (a,b,c) et [M] pour les autres.

ii) Soient $f, g \in \boldsymbol{A}$ tels que $\overline{f}$ est inversible dans $\overline{\boldsymbol{A}}_{\overline{g}}$.
L'application naturelle $\overline{\boldsymbol{A}}_{\overline{f}} \to \overline{\boldsymbol{A}}_{\overline{g}}$ est la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ d'un et d'un unique morphisme de $\boldsymbol{A}$-algèbres $(\boldsymbol{A}_f)^\dagger \to (\boldsymbol{A}_g)^\dagger$.

3.1.1. Notation. Pour toute $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$ et tout $f \in \boldsymbol{A}^\dagger$, on notera $\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f]} := ((\boldsymbol{A}^\dagger)_f)^\dagger$.

3.1.2. Convention. Dans la suite une $\boldsymbol{R}$-algèbre sera toujours de type fini ou f.c.t.f. sauf mention expresse du contraire.

3.2 Rappel sur les schémas formels faibles affines de Meredith

3.2.1. Soit $\boldsymbol{A}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre de type fini. Notons $\boldsymbol{X} := \mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$ et $\overline{\boldsymbol{X}} := \mathrm{Spec}(\overline{\boldsymbol{A}})$ de schémas affines respectivement notés $(\boldsymbol{X}, \mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ et $(\overline{\boldsymbol{X}}, \mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$. Dans [M], Meredith introduit un nouvel espace annelé : « *le schéma formel faible affine associé à* $\boldsymbol{A}$ », noté $(\overline{\boldsymbol{X}}, \mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}^\dagger)$, où

$$\begin{cases} \mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}^\dagger := \text{faisceau associé au préfaisceau défini sur la base des ouverts} \\ \text{principaux de } \overline{\boldsymbol{X}} \text{ par } D(\overline{f}) \rightsquigarrow (\boldsymbol{A}_f)^\dagger, \text{ où } f \in \boldsymbol{A} \text{ est un relèvement} \\ \text{arbitrairement choisi de } \overline{f} \in \overline{\boldsymbol{A}}. \end{cases}$$

L'énoncé (e-ii) de 3.1 justifie cette définition.

Terminologie. Dans la suie l'expression « *schéma* (*affine*) *de Meredith associé à* $\boldsymbol{A}$ » sera synonyme de « *schéma formel faible affine associé à* $\boldsymbol{A}$ ».

3.2.2. Meredith s'intéresse plus généralement au foncteur de la catégorie des $\boldsymbol{A}^\dagger$-modules (à gauche) vers la catégorie des $\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}^\dagger$-modules (à gauche), noté $\widetilde{(\ )} : \mathrm{Mod}(\boldsymbol{A}^\dagger) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}(\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}^\dagger)$, qui fait correspondre au module $\boldsymbol{M}$ le faisceau $\widetilde{\boldsymbol{M}}$ sur $\overline{\boldsymbol{X}}$ associé au préfaisceau défini sur la base des ouverts principaux de $\overline{\boldsymbol{X}}$ par $D(\overline{f}) \rightsquigarrow (\boldsymbol{A}_f)^\dagger \otimes_{\boldsymbol{A}^\dagger} \boldsymbol{M}$.

Le théorème suivant rassemble plusieurs résultats de [M].

3.2.3. Théorème ([M]). *Si* $\boldsymbol{R}$ *est un anneau local nœthérien d'idéal maximal* $\boldsymbol{I}$ *et si* $\boldsymbol{A}$ *est une* $\boldsymbol{R}$-*algèbre de type fini :*

a) *Le foncteur* $\widetilde{(\ )} : \mathrm{Mod}(\boldsymbol{A}^\dagger) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}(\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}^\dagger)$ *est exact.*

Pour tout $\boldsymbol{A}^\dagger$-*module de type fini* $\boldsymbol{M}$ *et tout ouvert principal* $\overline{U} \subseteq \overline{\boldsymbol{X}}$ *:*

b) *Le morphisme canonique* $\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}^\dagger(\overline{U}) \otimes_{\boldsymbol{A}^\dagger} \boldsymbol{M} \to \Gamma(\overline{U}; \widetilde{\boldsymbol{M}}) = H^0(\overline{U}; \widetilde{\boldsymbol{M}})$ *est bijectif.*

c) $H^i(\overline{U}; \widetilde{\boldsymbol{M}}) = 0$, *pour tout* $i > 0$.

3.2.4. Généralisation des résultats de Meredith. Nous allons redémontrer le théorème 3.2.3 avec comme seule condition sur $\boldsymbol{R}$ d'être nœthérien et en supprimant l'hypothèse de finitude sur le $\boldsymbol{A}^\dagger$-module $\boldsymbol{M}$. Nous suivrons de près une approche classique du théorème d'acyclicité de Serre pour les faisceaux quasi-cohérents sur un schéma affine dont nous rappelons maintenant le point central en guise de motivation pour la suite.

• *Étant donnés une $\boldsymbol{R}$-algèbre de type fini $\boldsymbol{A}$ et $f_1, f_2 \in \boldsymbol{A}$, le complexe de Mayer-Vietoris*

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{0} \to \boldsymbol{A} & \xrightarrow{\ \epsilon\ } & \boldsymbol{A}_{f_1} \oplus \boldsymbol{A}_{f_2} & \xrightarrow{\ \delta_0\ } & \boldsymbol{A}_{f_1 f_2} \to \mathbf{0} \\ a & \longmapsto & (a,a) & & \\ & & (x_1,x_2) & \longmapsto & (x_1 - x_2) \end{array} \tag{$\diamond$}$$

est exact lorsque $(f_1, f_2) = \boldsymbol{A}$.

L'énoncé résulte pour l'essentiel du fait que le noyau du morphisme canonique $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}_{f_i}$ est l'idéal des éléments $a \in \boldsymbol{A}$ tels $f_i^N a = 0$ pour $N \in \mathbb{N}$ assez grand. À l'aide d'une égalité $1 = \xi_1 f_1^N + \xi_2 f_2^N$, obtenue par exemple à partir de $1 = \zeta_1 f_1 + \zeta_2 f_2$ en développant $1 = \big(\zeta_1 f_1 + \zeta_2 f_2\big)^{2N}$, on déduit que $a = \xi_1 f_1^N a + \xi_2 f_2^N a$, d'où l'injectivité de ϵ. Ensuite, lorsque l'on se donne des éléments $x_i = a_i / f_i^N \in \boldsymbol{A}_{f_i}$ avec $a_i \in \boldsymbol{A}$, la condition $x_1 = x_2$ dans $\boldsymbol{A}_{f_1 f_2}$, équivaut à la condition sur $\boldsymbol{A}$:

$$(f_1 f_2)^M \big(f_2^N a_1 - f_1^N a_2\big) = 0 \,, \text{ pour } M \in \mathbb{N} \text{ assez grand.} \tag{$\star$}$$

On choisit maintenant une égalité de la forme $1 = \xi_1 f_1^{M+N} + \xi_2 f_2^{M+N}$ et l'élément

$$a := \xi_1 f_1^M a_1 + \xi_2 f_2^M a_2 \in \boldsymbol{A} \tag{$\star\star$}$$

vérifie $a = x_i$ dans $\boldsymbol{A}_{f_i}$ pour $i = 1, 2$, d'où l'exactitude à gauche de ($\diamond$). Enfin, à partir de l'égalité évidente dans $\boldsymbol{A}_{f_1 f_2}$

$$\frac{1}{f_1 f_2} = \frac{\zeta_1 f_1 + \zeta_2 f_2}{f_1 f_2} = \frac{\zeta_1}{f_2} + \frac{\zeta_2}{f_1}$$

on obtient par induction des décompositions

$$\Big(\frac{1}{f_1 f_2}\Big)^m = R_{1,m}\Big(\zeta_1, \zeta_2, \frac{1}{f_1}\Big) + R_{2,m}\Big(\zeta_1, \zeta_2, \frac{1}{f_2}\Big)$$

pour tout $m \in \mathbb{N}$ avec $R_{i,m} \in \mathbb{Z}[X, Y, Z]$. En particulier, un élément de $\boldsymbol{A}_{f_1 f_2}$ est toujours de la forme

$$\frac{a}{(f_1 f_2)^N} = R_{1,m}\Big(\zeta_1, \zeta_2, \frac{1}{f_1}\Big)\, a + R_{2,m}\Big(\zeta_1, \zeta_2, \frac{1}{f_2}\Big)\, a$$

avec $a \in \boldsymbol{A}$ et il appartient bien à l'image de δ_0.

Une fois établie l'exactitude des suites ($\diamond$), des considérations générales sur la cohomologie de Čech que nous rappellerons dans 3.2.9 donnent l'acyclicité des faisceaux des $\mathscr{O}$-modules engendrés par leurs sections globales. C'est par cette démarche que nous allons généraliser le théorème 3.2.3. Nous montrerons donc dans un premier temps que l'analogue †-adique de $(\diamond)$, la suite

$$\mathbf{0} \to \boldsymbol{A}^\dagger \xrightarrow{\epsilon^\dagger} (\boldsymbol{A}_{f_1})^\dagger \oplus (\boldsymbol{A}_{f_2})^\dagger \xrightarrow{\delta_0^\dagger} (\boldsymbol{A}_{f_1 f_2})^\dagger \to \mathbf{0}\,,$$

est exacte ce pourquoi il nous faudra, comme dans le rappel ci-dessus, la description du noyau du morphisme canonique $\boldsymbol{A}^\dagger \to (\boldsymbol{A}_f)^\dagger$ (lemme 3.2.5) et plus important encore des estimations des degrés M et N dans $(\star)$ et $(\star\star)$ nécessaires pour l'étude de la convergence †-adique (lemme technique 3.2.6).

3.2.5. Lemme. *Soit f un élément d'une $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$ supposée de type fini (ou f.c.t.f.). Pour tout $\boldsymbol{A}^\dagger$-module $\boldsymbol{M}$, le noyau du morphisme canonique $\nu^\dagger_{f,\boldsymbol{M}} : \boldsymbol{M} \to (\boldsymbol{A}_f)^\dagger \otimes_{\boldsymbol{A}^\dagger} \boldsymbol{M}$ est le sous-module des éléments $m \in \boldsymbol{M}$ tels que $(f^N + w)\cdot m = 0$, pour certain $w \in \boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{A}^\dagger$ et pour $N \in \mathbb{N}$ assez grand.*

En particulier, si $m \in \ker(\nu^\dagger_{f,\boldsymbol{M}})$, on a $f^N m \in (\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{A}^\dagger)\cdot m$ pour tout $N \in \mathbb{N}$ assez grand.

Démonstration. Supposons dans un premier temps le module $\boldsymbol{M}$ de type fini sur $\boldsymbol{A}^\dagger$. Le $(\boldsymbol{A}_f)^\dagger$-module $(\boldsymbol{A}_f)^\dagger \otimes_{\boldsymbol{A}^\dagger} \boldsymbol{M}$ est alors de type fini, donc séparé, pour le topologie $\boldsymbol{I}$-adique (3.1-c) et le noyau du morphisme canonique :

$$\boldsymbol{M}_f := (\boldsymbol{A}^\dagger)_f \otimes \boldsymbol{M} \xrightarrow{\mu} (\boldsymbol{A}_f)^\dagger \otimes \boldsymbol{M}$$

contient, par conséquent, l'adhérence $\bar{0}$ de 0 dans $\boldsymbol{M}_f$ pour la topologie $\boldsymbol{I}$-adique. D'autre part, les réductions modulo $\boldsymbol{I}^m$ sont des isomorphismes et un élément du noyau de μ appartient à $\bar{0}$. Donc $\ker(\mu) = \bar{0}$. Or, comme $(\boldsymbol{A}^\dagger)_f$ est nœthérien et que $\boldsymbol{M}_f$ est un $(\boldsymbol{A}^\dagger)_f$-module de type fini, on a $\boldsymbol{I}\cdot\bar{0} = \bar{0}$ et $(1+w)\cdot\ker(\mu) = 0$ pour un certain $w \in \boldsymbol{I}\cdot(\boldsymbol{A}^\dagger)_f$; autrement dit, $(f^N + w)\cdot\ker(\mu) = 0$ pour certains $N \in \mathbb{N}$ et $w \in \boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{A}^\dagger$. On conclut en remarquant que $\nu^\dagger_{f,\boldsymbol{M}}$ se factorise à travers le morphisme canonique $\nu_{f,\boldsymbol{M}} : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{M}_f$, *i.e.* $\nu^\dagger_{f,\boldsymbol{M}} = \mu \circ \nu_{f,\boldsymbol{M}}$, de sorte que $\nu^\dagger_{f,\boldsymbol{M}}(m) = 0$, si et seulement si, $\nu_{f,\boldsymbol{M}}(m) \in \bar{0}$, autrement dit, si et seulement si, $\nu_{f,\boldsymbol{M}}\big((f^N + w)m\big) = 0$, ou encore $f^M\big((f^N + w)m\big) = 0$ pour certains $M, N \in \mathbb{N}$ et $w \in \boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{A}^\dagger$.

Dans le cas où $\boldsymbol{M}$ est un $\boldsymbol{A}^\dagger$-module arbitraire, notons (m) le sous-module de $\boldsymbol{M}$ engendré par un élément $m \in \boldsymbol{M}$. On a alors le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} (m) \arrow[r, hook, "\subseteq"] \arrow[d, "\nu^\dagger_{f,(m)}"'] & \boldsymbol{M} \arrow[d, "\nu^\dagger_{f,\boldsymbol{M}}"] \\ (\boldsymbol{A}_f)^\dagger \otimes (m) \arrow[r, hook, "\mathrm{id}\otimes\subseteq"] & (\boldsymbol{A}_f)^\dagger \otimes \boldsymbol{M} \end{tikzcd}$$

où $(\mathrm{id}\otimes\subseteq)$ est injectif puisque l'algèbre $(\boldsymbol{A}_f)^\dagger$ est plate sur $\boldsymbol{A}^\dagger$ (3.1-e-i). Il s'ensuit que m appartient au noyau de $\nu^\dagger_{f,\boldsymbol{M}}$, si et seulement si, il appartient au noyau de $\nu^\dagger_{f,(m)}$ déjà étudié dans le paragraphe précédent. ■

3.2.6. Lemme technique. *On se donne un élément P et un idéal $\boldsymbol{K}$ de l'algèbre de polynômes $\boldsymbol{R}[\overrightarrow{X}] := \boldsymbol{R}[X_1, \ldots, X_\ell]$. Pour tous $m, n \in \mathbb{N}$, on note $\boldsymbol{I}^n[\overrightarrow{X}]_m$ le sous-$\boldsymbol{R}$-module des polynômes de $\boldsymbol{R}[\overrightarrow{X}]$ à coefficients dans $\boldsymbol{I}^n$ et de degré total majoré par m.*

Il existe des entiers positifs $N(P, \boldsymbol{K})$ et $M(P, \boldsymbol{K})$, tels que les ensembles :

$$\begin{aligned} \mathrm{C1}(P, \boldsymbol{K}, n) &= \Big\{ Q \in \boldsymbol{I}^n[\overrightarrow{X}] \;\Big|\; P^N Q \in \big(\boldsymbol{K} + \boldsymbol{I}^{n+1}[\overrightarrow{X}]\big), \text{ pour } N \text{ assez grand} \Big\} \\ \mathrm{C2}(P, \boldsymbol{K}, n) &= \Big\{ Q \in \boldsymbol{I}^n[\overrightarrow{X}] \;\Big|\; P^{N(P,\boldsymbol{K})} Q \in \big(\boldsymbol{K} + \boldsymbol{I}^{n+1}[\overrightarrow{X}]_{m+M(P,\boldsymbol{K})}\big) \text{ si } Q \in \boldsymbol{I}^n[\overrightarrow{X}]_m \Big\} \end{aligned}$$

sont égaux, et ceci quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

Plus généralement, si $Q \in \boldsymbol{I}^n[\overrightarrow{X}]_m$ et si $P^N Q \in \big(\boldsymbol{K} + \boldsymbol{I}^{n+r}[\overrightarrow{X}]\big)$, pour N assez grand et pour un certain $r \in \mathbb{N}$, alors :

$$P^{rN(P,\boldsymbol{K})} Q \in \big(\boldsymbol{K} + \boldsymbol{I}^{n+r}[\overrightarrow{X}]_{m+rM(P,\boldsymbol{K})}\big).$$

Démonstration. Pour chaque $n, m \in \mathbb{N}$, notons $F^{n,m}(\boldsymbol{I}; \boldsymbol{R}[\overrightarrow{X}]) := \boldsymbol{I}^n[\overrightarrow{X}]_m U^n T^m$, où U et T désignent des variables formelles. On munit $F^{n,m}(\boldsymbol{I}; \boldsymbol{R}[\overrightarrow{X}])$ de la structure de $\boldsymbol{R}$-module de $\boldsymbol{I}^n[\overrightarrow{X}]_m$ et l'on considère $F^{*,*}(\boldsymbol{I}; \boldsymbol{R}[\overrightarrow{X}]) := \bigoplus_{n,m \in \mathbb{N}} \boldsymbol{I}^n[\overrightarrow{X}]_m U^n T^m$ muni de la structure de $\boldsymbol{R}$-algèbre positivement graduée donnée par les égalités :

$$Q_1 U^{n_1} T^{m_1} \cdot Q_2 U^{n_2} T^{m_2} := Q_1 Q_2 U^{n_1+n_2} T^{m_1+m_2},$$

pour tous $n_i, m_i \in \mathbb{N}$ et $Q_i \in \boldsymbol{I}^{n_i}[\overrightarrow{X}]_{m_i}$. La $\boldsymbol{R}$-sous-algèbre

$$F^{0,*}(\boldsymbol{I}; \boldsymbol{R}[\overrightarrow{X}]) = \boldsymbol{R} \oplus \boldsymbol{R}[\overrightarrow{X}]_1 T \oplus \boldsymbol{R}[\overrightarrow{X}]_2 T^2 \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{R}[\overrightarrow{X}]_m T^m \oplus \cdots$$

est engendrée par $\boldsymbol{R} \oplus \boldsymbol{R}[\overrightarrow{X}]_1 T$, et $F^{*,*}(\boldsymbol{I}; \boldsymbol{R}[\overrightarrow{X}])$, vue comme $F^{0,*}(\boldsymbol{I}; \boldsymbol{R}[\overrightarrow{X}])$-algèbre, est engendrée par $\boldsymbol{R} \oplus \boldsymbol{I} U$. Il s'ensuit que $F^{*,*}(\boldsymbol{I}; \boldsymbol{R}[\overrightarrow{X}])$ est une $\boldsymbol{R}$-algèbre de type fini et $F^{*,*}(\boldsymbol{I}; \boldsymbol{R}[\overrightarrow{X}])$ est un anneau nœthérien.

Ceci étant, l'inclusion $\mathrm{C2}(P, \boldsymbol{K}, n) \subseteq \mathrm{C1}(P, \boldsymbol{K}, n)$ est claire. Montrons la réciproque. L'ensemble des sommes finies $\sum_{n,m} Q_{n,m} U^n T^m$ où $Q_{n,m} \in \mathrm{C1}(P, \boldsymbol{K}, n)$ est un idéal noté $\mathfrak{M}$ de $F^{*,*}(\boldsymbol{I}; \boldsymbol{R}[\overrightarrow{X}])$, il est donc de type fini et l'existence de $N(P, \boldsymbol{K})$ s'ensuit.

De même, pour chaque $M \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\mathfrak{M}(M)$ des éléments $\sum_{n,m} Q_{n,m} U^n T^m$ de $\mathfrak{M}$ tels que $P^{N(P,\boldsymbol{K})} Q_{n,m} \in \big(\boldsymbol{K} + \boldsymbol{I}^{n+1}[\overrightarrow{X}]_{m+M}\big)$, est un idéal de $F^{*,*}(\boldsymbol{I}; \boldsymbol{R}[\overrightarrow{X}])$, et comme $\mathfrak{M}$ est la réunion de la suite croissante d'idéaux $\mathfrak{M}(0) \subseteq \mathfrak{M}(1) \subseteq \cdots \mathfrak{M}(M) \subseteq \cdots$, on a $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(M)$ pour M assez grand. On peut donc prendre pour $M(P, \boldsymbol{K})$ la borne inférieure de tels M.

La conclusion finale résulte d'un argument inductif évident. ∎

3.2.7. Théorème. *Soient $\boldsymbol{A}^\dagger$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre f.c.t.f. et $f_1, f_2 \in \boldsymbol{A}^\dagger$ tels que $(f_1, f_2) = \boldsymbol{A}^\dagger$. La suite de Mayer-Vietoris*

$$\mathbf{0} \to \boldsymbol{A}^\dagger \xrightarrow{\epsilon^\dagger} \boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f_1]} \oplus \boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f_2]} \xrightarrow{\delta_0^\dagger} \boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f_1 f_2]} \to \mathbf{0} \qquad (\star)$$

est exacte.

Démonstration. L'algèbre $\boldsymbol{A}^\dagger$ étant f.c.t.f., notons $\boldsymbol{A}$ la sous-$\boldsymbol{R}$-algèbre de $\boldsymbol{A}^\dagger$ engendrée par les éléments d'une famille finie de générateurs ($\dagger$-adiques) de $\boldsymbol{A}^\dagger$, les éléments f_1, f_2 et des éléments $g_1, g_2 \in \boldsymbol{A}^\dagger$ vérifiant $g_1 f_1 + g_2 f_2 = 1$. La $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$ est alors de type fini et sa complétion $\dagger$-adique s'identifie canoniquement à $\boldsymbol{A}^\dagger$. Dans la suite la notation '$\boldsymbol{A}^\dagger$' fera donc référence à la complétion $\dagger$-adique de $\boldsymbol{A}$. On a :

$$\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[?]} = (\boldsymbol{A}_?)^\dagger \quad \text{et} \quad \boldsymbol{A}\cdot f_1 + \boldsymbol{A}\cdot f_2 = \boldsymbol{A} \qquad (\diamond)$$

Injectivité de $\boldsymbol{\epsilon}^\dagger$. Pour $x \in \ker(\epsilon^\dagger)$, on a $\nu_i^\dagger(x) = 0$ pour $i = 1, \ldots, r$. Il existe donc des entiers N_i est des éléments $w_i \in \boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{A}^\dagger$ tels que $(f_i^{N_i} + w_i)\cdot x = 0$ (3.2.5). Comme $\boldsymbol{A}\cdot f_1 + \boldsymbol{A}\cdot f_2 = \boldsymbol{A}$, il existe $\xi_i \in \boldsymbol{A}$ tel que $\sum_i \xi_i f_i^{N_i} = 1$ et $\operatorname{Annul}_{\boldsymbol{A}^\dagger}(x)$ contient un élément de la forme $(1 + w)$ avec $w \in \boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{A}^\dagger$ et donc $\operatorname{Annul}_{\boldsymbol{A}^\dagger}(x) = \boldsymbol{A}^\dagger$.

Exactitude du terme central de $(\star)$. Dans le morphisme canonique de complexes :

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathbf{0} \to \boldsymbol{A}^\dagger & \xrightarrow{\epsilon^\dagger} & (\boldsymbol{A}_{f_1})^\dagger \oplus (\boldsymbol{A}_{f_2})^\dagger & \xrightarrow{\delta_0^\dagger} & (\boldsymbol{A}_{f_1 f_2})^\dagger \to \mathbf{0} \\
\subseteq\downarrow & & \subseteq\downarrow \qquad \subseteq\downarrow & & \subseteq\downarrow \\
\mathbf{0} \to \widehat{\boldsymbol{A}} & \xrightarrow{\widehat{\epsilon}} & \widehat{\boldsymbol{A}_{f_1}} \oplus \widehat{\boldsymbol{A}_{f_2}} & \xrightarrow{\widehat{\delta}_0} & \widehat{\boldsymbol{A}_{f_1 f_2}} \to \mathbf{0}
\end{array}$$

les colonnes sont injectives puisque leurs réductions modulo les puissances $\boldsymbol{I}^m$ sont bijectives et que tous les algèbres considérées sont séparées pour la topologie $\boldsymbol{I}$-adique. De même, la deuxième ligne est exacte puisqu'il en est ainsi de ses réductions modulo $\boldsymbol{I}^m$. Il s'ensuit que pour tout élément $\vec{z} = (z_1, z_2)$ de $(\boldsymbol{A}_{f_1})^\dagger \oplus (\boldsymbol{A}_{f_2})^\dagger$ annulé par $\delta_0^\dagger$, donc par $\widehat{\delta}_0$, il existe un (unique) élément $z \in \widehat{\boldsymbol{A}}$ tel que $\widehat{\epsilon}(z) = \vec{z}$. **Nous allons prouver que $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{A}^\dagger$.**

Un élément $\vec{z} \in (\boldsymbol{A}_{f_1})^\dagger \oplus (\boldsymbol{A}_{f_2})^\dagger$ est la donnée de deux familles finies $\vec{x_1}, \vec{x_2}$ (que l'on peut toujours supposer du même cardinal ℓ) avec $\vec{x_i} = \{x_{i,1}, \ldots, x_{i,\ell}\} \subseteq \boldsymbol{A}_{f_i}$, et des suites :

$$\big(p_{i,0}(\vec{X_i}), p_{i,1}(\vec{X_i}), p_{i,2}(\vec{X_i}), \ldots, p_{i,n}(\vec{X_i}), \ldots\big)_i, \qquad \text{pour } i = 1, 2,$$

de polynômes de $\boldsymbol{R}[\vec{X_i}] := \boldsymbol{R}[X_{i,1}, \ldots, X_{i,\ell}]$ vérifiant, pour $i = 1, 2$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} p_{i,n} \in \boldsymbol{I}^n\big[\vec{X_i}\big], \quad \text{et} \\ \deg_{\vec{X_i}}\big(p_{i,n}\big) \leqslant (n+1)C, \end{cases}$$

pour une certaine constante $C\in\mathbb{N}$ indépendante de i et n. L'élément $\vec{z}$ est alors l'élément de $\widehat{\boldsymbol{A}_{f_1}}\oplus\widehat{\boldsymbol{A}_{f_2}}$ défini par la série :

$$\vec{z}=\sum_{n\geqslant 0}\begin{pmatrix}p_{1,n}(x_{1,1},\dots,x_{1,\ell})\\ p_{2,n}(x_{2,1},\dots,x_{2,\ell})\end{pmatrix}\tag{$*$}$$

Par finitude de l'ensemble $\{x_{i,j}\}$, il existe un entier N, indépendant de (i,j), tel que :

$$x_{i,j}=\frac{a_{i,j}}{f_i^N}\,,\quad \text{pour un certain } a_{i,j}\in\boldsymbol{A}.$$

Notons $\vec{a}$ la famille de 2ℓ éléments de $\boldsymbol{A}$:

$$\vec{a}=\{\vec{a_1},\dots,\vec{a_r}\}=\{a_{1,1},\dots,a_{1,\ell},a_{2,1},\dots,a_{2,\ell}\}$$

ainsi déterminée. En remplaçant $X_{i,j}$ par $A_{i,j}/F_i$, où $A_{i,j}$ et F_i désignent de nouvelles variables, on définit les polynômes $q_{i,n}\in\boldsymbol{R}[\vec{A_i},F_i]$ par les égalités :

$$p_{i,n}(X_{i,1},\dots,X_{i,\ell})=p_{i,n}\Big(\frac{A_{i,1}}{F_i},\dots,\frac{A_{i,\ell}}{F_i}\Big)=\frac{q_{i,n}(A_{i,1},\dots,A_{i,\ell},F_i)}{F_i^{(n+1)C}}\,,$$

avec clairement :

$$\begin{cases} q_{i,n}\in\boldsymbol{I}^n[\vec{A_i},F_i]\,, \quad \text{et}\\ \deg_{\vec{A_i},F_i}(q_{i,n})=(n+1)C\,.\end{cases}$$

L'élément $\vec{z}$ s'exprime donc également comme somme de la série :

$$\vec{z}=\begin{pmatrix}z_1\\ \\ z_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{n\geqslant 0} z_{1,n}\\ \\ \sum_{n\geqslant 0} z_{2,n}\end{pmatrix}=\sum_{n\geqslant 0}\begin{pmatrix}\dfrac{q_{1,n}(a_{1,1},\dots,a_{1,\ell},f_1^N)}{(f_1^N)^{(n+1)C}}\\ \dfrac{q_{2,n}(a_{2,1},\dots,a_{2,\ell},f_r^N)}{(f_2^N)^{(n+1)C}}\end{pmatrix}\tag{$**$}$$

Dans la suite on notera

$$\begin{cases}\vec{A}\ :=\{\vec{A_1},\vec{A_2}\}=\{A_{1,1},\dots,A_{1,1},A_{2,1},\dots,A_{2,\ell}\}\\ \vec{F}\ :=\{F_1,F_2\}\quad\text{et}\quad \vec{Z}:=\{Z_1,Z_2\}\end{cases}$$

Choisissons des éléments $\zeta_1,\zeta_2\in\boldsymbol{A}$ tels que $\zeta_1f_1^N+\zeta_2f_2^N=1$, et considérons le morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}[\vec{A},\vec{F},\vec{Z}] &\xrightarrow{\ \alpha\ } \boldsymbol{A}\\ A_{i,j} &\longmapsto a_{i,j}\\ F_i &\longmapsto f_i^N \\ Z_i &\longmapsto \zeta_i\end{aligned}\qquad i=1,2\quad\text{et}\quad 1\leqslant j\leqslant\ell.$$

Commentaire : Le morphisme α n'est pas nécessairement surjectif, mais comme $\boldsymbol{A}$ a été supposée de type fini sur $\boldsymbol{R}$, nous pouvons rajouter si besoin de nouvelles variables à la liste $\vec{A}$ de manière à rendre α soit surjective ce que nous supposerons désormais. Dans ce cas, pour tout $m \in \mathbb{N}$ et pour tout idéal $\boldsymbol{K} \subseteq \boldsymbol{R}[\vec{A}, \vec{F}, \vec{Z}]$ contenant $\ker(\alpha)$, on a

$$\begin{cases} \alpha^{-1}(\boldsymbol{I}^m \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{K} + \boldsymbol{I}^m[\vec{A}, \vec{F}, \vec{Z}], \\ \sum_{i=1}^r Z_i F_i \in 1 + \boldsymbol{K} + \boldsymbol{I}[\vec{A}, \vec{F}, \vec{Z}], \end{cases}$$

Dans la suite $\boldsymbol{K} := \ker(\alpha)$.

Pour $m \in \mathbb{N}$ donné, définissons des polynômes $Q_{1,m}, Q_{2,m} \in \boldsymbol{R}[\vec{A}, \vec{F}, \vec{Z}]$ par les égalités formelles :

$$\sum_{n=0}^m \frac{q_{i,n}(\overrightarrow{A_i}, F_i)}{F_i^{(n+1)C}} = \frac{\sum_{n=0}^m F_i^{(m-n)C} q_{i,n}(\overrightarrow{A_i}, F_i)}{F_i^{(m+1)C}} =: \frac{Q_{i,m}(\overrightarrow{A_i}, F_i)}{F_i^{(m+1)C}}.$$

On a $\deg_{\vec{A}, \vec{F}, \vec{Z}}(Q_{i,m}) = (m+1)C$ et grâce à la surjectivité de α et en appliquant 3.2.5 aux égalités “$z_i = z_{i'}$ dans $(\boldsymbol{A}_{f_i f_{i'}})^\dagger \otimes \boldsymbol{M}$”, on a (*cf.* $(\star)$ p. 12) :

$$(F_1 F_2)^M \Big(F_2^{(m+1)C} Q_{1,m} - F_1^{(m+1)C} Q_{2,m} \Big) \in \boldsymbol{K} + \boldsymbol{I}^{m+1}[\vec{A}, \vec{F}, \vec{Z}],$$

pour $M \in \mathbb{N}$ assez grand. On en déduit par l'égalité $\mathrm{C1}(F_1F_2, \boldsymbol{K}, 0) = \mathrm{C2}(F_1F_2, \boldsymbol{K}, 0)$ de 3.2.6, l'existence de $N(F_1F_2, \boldsymbol{K}) \in \mathbb{N}$ tel que :

$$(F_1 F_2)^{(m+1)N(F_1F_2, \boldsymbol{K})} \Big(F_2^{(m+1)C} Q_{1,m} - F_1^{(m+1)C} Q_{2,m} \Big) \in \boldsymbol{K} + \boldsymbol{I}^{m+1}[\vec{A}, \vec{F}, \vec{Z}],$$

et ceci **pour tout $m \in \mathbb{N}$.**

On notera dans la suite (*cf.* 3.2.5)

$$\begin{cases} \mathfrak{N} := \{N(F_1, \boldsymbol{K}), N(F_2, \boldsymbol{K}), N(F_1F_2, \boldsymbol{K})\} & \text{et} \\ \mathfrak{M} := \{M(F_1, \boldsymbol{K}), M(F_2, \boldsymbol{K}), M(F_1F_2, \boldsymbol{K})\} & \text{(que nous n'avons pas encore utilisé)} \end{cases}$$

Pour chaque $L \in \mathbb{N}$, on choisit des polynômes $\Xi(L)_i \in \boldsymbol{R}[\vec{F}, \vec{Z}]$ vérifiant :

$$\begin{cases} (Z_1F_1 + Z_2F_2)^{2L} = \Xi(L)_1 F_1^L + \Xi(L)_2 F_2^L, \quad \text{avec} \\ \deg_{\vec{F}, \vec{Z}} \big(\Xi(L)_i\big) = 3L \end{cases} \tag{Ξ}$$

en prenant $L := (m+1)C + (m+1)\mathfrak{N}$, on pose de manière analogue à $(\diamond\diamond)$ (p. 12) :

$$R_m := \sum_{i=1}^2 \Xi\big((m+1)(\mathfrak{N} + C)\big)_i \, F_i^{(m+1)\mathfrak{N}} Q_{i,m} \quad \in \boldsymbol{R}[\vec{A}, \vec{F}, \vec{Z}]_{D_m},$$

où $D_m := \deg_{\vec{A}, \vec{F}, \vec{Z}}(R_m) = 4(m+1)(\mathfrak{N} + C)$.

On a $R_m - R_{m-1} \in \boldsymbol{K} + \boldsymbol{I}^m[\vec{A}, \vec{F}, \vec{Z}]$ par construction, et, toujours d'après 3.2.6 :

$$F_i^{m\mathfrak{N}}(R_m - R_{m-1}) \in \boldsymbol{K} + \boldsymbol{I}^m[\vec{A}, \vec{F}, \vec{Z}]_{D_m + m\mathfrak{M}},$$

pour $i = 1, 2$. Par conséquent :

$$\begin{aligned} R_m - R_{m-1} &= \sum_{i=1}^r \Xi(m\mathfrak{N})_i \, F_i^{m\mathfrak{N}}(R_m - R_{m-1}) \\ &\in \boldsymbol{K} + \boldsymbol{I}^m[\vec{A}, \vec{F}, \vec{Z}]_{D_m + m(\mathfrak{M} + (r-1)\mathfrak{N})} \end{aligned}$$

et il existe $P_m \in \boldsymbol{R}[\vec{A},\vec{F},\vec{Z}]$ vérifiant $P_m = R_m - R_{m-1}$ mod $\boldsymbol{K}$, de degré majoré par

$$D_m + m\big(\mathfrak{M} + (r-1)\mathfrak{N}\big) = 4(m+1)(\mathfrak{N}+C) + m\big(\mathfrak{M} + (r-1)\mathfrak{N}\big) \leqslant (m+1)\widetilde{C}$$

pour un certain $\widetilde{C} \in \mathbb{N}$ **indépendant** de m. La série infinie $\alpha(R_0) + \sum_{1\leqslant n} \alpha(P_n)$ représente donc un élément w de $\boldsymbol{A}^\dagger$ tel que $w = \alpha(R_m)$ modulo $\boldsymbol{I}^{m+1}$. Comme d'autre part $\alpha(R_m)$ est, par construction, un “recollement” des séries z_i modulo $\boldsymbol{I}^{m+1}$, on conclut que $w = z$ mod $\boldsymbol{I}^m$ pour tout $m \in \mathbb{N}$ et donc $w = z$, cqfd.

Exactitude à droite de ($\star$). Étant donné un système de générateurs de $\boldsymbol{A}$ en tant que $\boldsymbol{R}$-algèbre $\{a_1,\dots,a_\ell\}$, l'ensemble $\{a_i, 1/(f_1f_2)\}$ est un système de générateurs de $\boldsymbol{A}_{f_1f_2}$ et un élément $z \in (\boldsymbol{A}_{f_1f_2})^\dagger$ s'exprime comme série

$$z = \sum\nolimits_{n>0} P_n\Big(a_1,\dots,a_l,\frac{1}{f_1f_2}\Big) \quad \text{où} \quad \begin{cases} P_n \in \boldsymbol{I}^n[X_1,\dots,X_\ell,T]\,; \\ \deg_{\overrightarrow{X},T}(P_n) < C(n+1) \end{cases}$$

Or, l'égalité $1 = g_1f_1 + g_2f_2$ donne aussitôt $\frac{1}{f_1f_2} = \frac{g_2}{f_1} + \frac{g_1}{f_2}$, et par une construction inductive simple

$$\Big(\frac{1}{f_1f_2}\Big)^M = Q_{1,M}\Big(g_1,g_2,\frac{1}{f_1},\widehat{\frac{1}{f_2}}\Big) + Q_{2,M}\Big(g_1,g_2,\widehat{\frac{1}{f_1}},\frac{1}{f_2}\Big), \quad \text{avec} \quad \begin{cases} Q_{i,M} \in \boldsymbol{R}[Y_1,Y_2,Y_3,Y_4] \\ \deg_{\overrightarrow{Y}}(Q_{i,M}) = 2M \end{cases}$$

pour tout $M \in \mathbb{N}$. En substituant les monômes T^M qui interviennent dans le développement de P_n par $Q_{1,M} + Q_{2,M}$ on obtient la décomposition de polynômes

$$\begin{cases} \text{(i)}\ P_n(\overrightarrow{X},T) = R_{1,n}(\overrightarrow{X},\overrightarrow{Y}) + R_{2,n}(\overrightarrow{X},\overrightarrow{Y}) \\ \text{(ii)}\ R_{1,n}, R_{2,n} \in \boldsymbol{I}^n[\overrightarrow{X},\overrightarrow{Y}] \\ \text{(iii)}\ \deg_{\overrightarrow{X},\overrightarrow{Y}}(R_{i,n}) < 2C(n+1) \end{cases}$$

et on pose

$$z_i := \sum\nolimits_{n\geqslant 0} R_{i,n}\Big(a_1,\dots,a_\ell,g_1,g_2,\frac{1}{f_i}\Big).$$

Les conditions (ii,iii) assurent la convergence de cette série aussi bien dans $(\boldsymbol{A}_{f_1f_2})^\dagger$ que dans $(\boldsymbol{A}_{f_i})^\dagger$ ce qui termine la démonstration du théorème puisque $z = z_1 + z_2$. ■

3.2.8. Commentaire. L'énoncé du théorème 3.2.7 admet la reformulation suivante :

Théorème. *Soient $\boldsymbol{A}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre de type fini et $f_1, f_2 \in \boldsymbol{A}$ tels que $\overline{\boldsymbol{A}}{\cdot}\overline{f}_1 + \overline{\boldsymbol{A}}{\cdot}\overline{f}_2 = \overline{\boldsymbol{A}}$. Le complexe*

$$\mathbf{0} \to \boldsymbol{A}^\dagger \xrightarrow{\ \epsilon^\dagger\ } (\boldsymbol{A}_{f_1})^\dagger \oplus (\boldsymbol{A}_{f_2})^\dagger \xrightarrow{\ \delta_0^\dagger\ } (\boldsymbol{A}_{f_1f_2})^\dagger \to \mathbf{0}$$

est exact.

Preuve. Si $g_1, g_2 \in \boldsymbol{A}$ sont tels que $g_1f_1 + g_2f_2 \in 1 + \omega$ avec $\omega \in \boldsymbol{I}{\cdot}\boldsymbol{A}$, l'élément $1+\omega$ est inversible dans $\boldsymbol{A}^\dagger$ et $\boldsymbol{A}^\dagger{\cdot}f_1 + \boldsymbol{A}^\dagger{\cdot}f_2 = \boldsymbol{A}^\dagger$. D'autre part, $(\boldsymbol{A}_?)^\dagger = \boldsymbol{A}^\dagger{}_{[?]}$. ■

3.2.9. Rappels sur la cohomologie de Čech. Dans cette partie on s'intéresse à un espace topologique $\boldsymbol{Y}$ admettant une famille d'ouverts $\mathscr{B}$ telle que

$\mathscr{B}$-i) Tout ouvert de $\boldsymbol{Y}$ peut être recouvert par des ouverts de $\mathscr{B}$.

$\mathscr{B}$-ii) De tout recouvrement d'un ouvert de $\mathscr{B}$ par des ouverts de $\mathscr{B}$ on peut extraire un sous-recouvrement fini.

$\mathscr{B}$-iii) $\mathscr{B}$ est stable par intersection, *i.e.* si $U_1, U_2 \in \mathscr{B}$ alors $U_1 \cap U_2 \in \mathscr{B}$.

$\mathscr{B}$-iv) Pour tous $U_1, \ldots, U_\ell \in \mathscr{B}$ de réunion $U \in \mathscr{B}$, il existe $V \in \mathscr{B}$ tel que

$$U = U_1 \cup V \quad \text{et} \quad V \subseteq U_2 \cup \cdots \cup U_\ell.$$

Exemples

- $\boldsymbol{Y} = \mathrm{Spec}(\text{anneau})$ et $\mathscr{B}$ l'ensemble de ses ouverts principaux.
  Vérifions $\mathscr{B}$-iv : l'inclusion $D(f) \subseteq D(f_0) \cup D(f_1) \cup \cdots \cup D(f_\ell)$ équivaut à l'existence d'éléments $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_\ell \in \boldsymbol{A}_f$ tels que $1 = \sum_{i=0}^{\ell} \zeta_i f_i$. En fixant une telle partition de l'unité, la même raison donne $W = D(1 - \zeta_0 f_0) \subseteq D(f_1) \cup \cdots \cup D(f_\ell)$. On prend alors $V = U \cap W$.
- $\boldsymbol{Y}$ l'espace topologique sous-jacent à un schéma séparé et $\mathscr{B}$ l'ensemble de ses ouverts affines.

A partir de maintenant, l'espace $\boldsymbol{Y}$ et l'ensemble $\mathscr{B}$ sont fixés. L'ensemble $\mathscr{B}$ muni des inclusions entre ses ouverts est une sous-catégorie de la catégories des ouverts de $\boldsymbol{Y}$, on peut donc parler de préfaisceau de groupes abéliens sur $\mathscr{B}$. Soit $\mathscr{P}$ un tel préfaisceau. Étant donnée une famille $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i \in (\mathfrak{A}, \leqslant)}$ d'éléments de $\mathscr{B}$ de réunion U, on définit pour chaque $n \in \mathbb{N}$ « *le groupe des n-cochaînes de Čech à valeurs dans $\mathscr{P}$ relatives à $\mathscr{U}$* », c'est le groupe :

$$\check{C}^n(\mathscr{U}; \mathscr{P}) := \prod_{i_0 < i_1 < \cdots < i_n} \mathscr{P}(U_{i_0 \ldots i_\ell})$$

où $U_{i_0 \ldots i_\ell} := U_{i_0} \cap \cdots \cap U_{i_n}$. Le « *n-cobord* » est l'application :

$$\begin{aligned} \delta_n : \check{C}^n(\mathscr{U}; \mathscr{P}) &\longrightarrow \check{C}^{n+1}(\mathscr{U}; \mathscr{P}) \\ \omega \quad &\longmapsto \delta_n(\omega)_{i_0, \ldots, i_{n+1}} = \sum_{k=0,\ldots,n+1} (-1)^k \omega_{i_0, \ldots, \widehat{i_k}, \ldots, i_{n+1}} \end{aligned}$$

qui vérifie $\delta_{n+1} \circ \delta_n = 0$, d'où « *le complexe de Čech de $\mathscr{P}$ relatif à $\mathscr{U}$* » :

$$(\check{C}^*(\mathscr{U}; \mathscr{P}), \delta_*) := \Big(\mathbf{0} \to \check{C}^0(\mathscr{U}; \mathscr{P}) \xrightarrow{\delta_0} \check{C}^1(\mathscr{U}; \mathscr{P}) \xrightarrow{\delta_1} \cdots\cdots\cdots \xrightarrow{\delta_{k-1}} \check{C}^k(\mathscr{U}; \mathscr{P}) \xrightarrow{\delta_k} \cdots \Big)$$

Lorsque $U \in \mathscr{B}$, l'« *augmentation* » $\epsilon(U) : \mathscr{P}(U) \to \check{C}^0(\mathscr{U}; \mathscr{P}) = \prod_{i \in \mathfrak{A}} \mathscr{P}(U_i)$, produit des morphismes de restriction $\mathscr{P}(U) \to \mathscr{P}(U_i)$, est à valeurs dans $\check{H}^0(\mathscr{U}; \mathscr{P})$.

La « *cohomologie de Čech de $\mathscr{P}$ relative à $\mathscr{U}$* » est la cohomologie de $(\check{C}^*(\mathscr{U}; \mathscr{P}); \delta_*)$, elle est notée $\check{H}^*(\mathscr{U}; \mathscr{P})$.

3.2.10. Proposition. *Avec les données précédentes, supposons pour tous* $U, U_1, U_2 \in \mathscr{B}$ *tels que* $U = U_1 \cup U_2$ *que le complexe de Čech augmenté :*

$$\mathbf{0} \to \mathscr{P}(U) \xrightarrow{\epsilon(U)} \mathscr{P}(U_1) \oplus \mathscr{P}(U_2) \xrightarrow{\delta_0} \mathscr{P}(U_1 \cap U_2) \to \mathbf{0} \tag{$*$}$$

est ***exact****. Alors*

a) *Pour toute famille* $\mathscr{U} = \{U_i\}_{i \in \mathfrak{A}}$ *d'ouverts de* $\mathscr{B}$ *de réunion un ouvert* $U \in \mathscr{B}$*, le complexe de Čech augmenté :*

$$\mathbf{0} \to \mathscr{P}(U) \xrightarrow{\epsilon(U)} \check{C}^0(\mathscr{U};\mathscr{P}) \xrightarrow{\delta_0} \check{C}^1(\mathscr{U};\mathscr{P}) \xrightarrow{\delta_1} \cdots \xrightarrow{\delta_{i-1}} \check{C}^i(\mathscr{U};\mathscr{P}) \xrightarrow{\delta_i} \cdots$$

est ***exact****.*

b) *Soit* $\widetilde{\mathscr{P}}$ *le faisceau sur* $\mathbf{Y}$ *engendré par* $\mathscr{P}$*, alors pour tout ouvert* $U \in \mathscr{B}$ *:*

i) *Le morphisme canonique* $\mathscr{P}(U) \to H^0(U;\widetilde{\mathscr{P}})$ *est bijectif.*

ii) $H^i(U;\widetilde{\mathscr{P}}) = 0$*, pour tout* $i > 0$*.*

Démonstration

a) Par récurrence sur le plus petit cardinal $\ell(\mathscr{U})$ des sous-familles finies de $\mathscr{U}$ qui recouvrent U ($\mathscr{B}$-ii). Lorsque $\ell(\mathscr{U}) = 1$ on a $U_i = U$ pour un certain $i \in \mathfrak{A}$ et le complexe de Čech augmenté est homotope à zéro ([2]). Supposons maintenant $\ell(\mathscr{U}) > 1$ et (a) démontré pour tout recouvrement $\mathscr{V}$ d'un ouvert de $\mathscr{B}$ vérifiant $\ell(\mathscr{V}) < \ell(\mathscr{U})$. Notons $\ell := \ell(\mathscr{U})$, soit $U_1, \ldots, U_\ell$ une sous-famille minimale de $\mathscr{U}$ de réunion U et soit $V \in \mathscr{B}$ vérifiant $\mathscr{B}$-iv, *i.e.*

$$U = U_1 \cup V \quad \text{et} \quad V = \bigcup\nolimits_{k=2}^{\ell} (V \cap U_k)\,.$$

On considère alors le bicomplexe

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathbf{0} & \longrightarrow & \mathscr{P}(U) & \xrightarrow{\qquad\epsilon(U)\qquad} & \check{C}^*(\mathscr{U};\mathscr{P}) \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathbf{0} & \to & \mathscr{P}(U_1) \oplus \mathscr{P}(V) & \xrightarrow{\epsilon(U_1)\oplus\epsilon(V)} & \check{C}^*(U_1 \cap \mathscr{U};\mathscr{P}) \oplus \check{C}^*(V \cap \mathscr{U};\mathscr{P}) \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathbf{0} & \longrightarrow & \mathscr{P}(U_1 \cap V) & \xrightarrow{\qquad\epsilon(U_1\cap V)\qquad} & \check{C}^*(U_1 \cap V \cap \mathscr{U};\mathscr{P}) \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \mathbf{0} & & \mathbf{0}
\end{array} \tag{$\diamond$}$$

où les colonnes sont définies à l'aide des suites

$$\mathbf{0} \to \mathscr{P}(U_{i_1\ldots i_n}) \xrightarrow{\epsilon} \mathscr{P}(U_1 \cap U_{i_1\ldots i_n}) \oplus \mathscr{P}(V \cap U_{i_1\ldots i_n}) \xrightarrow{\delta_0} \mathscr{P}(U_1 \cap V \cap U_{i_1\ldots i_n}) \to \mathbf{0}\,,$$

qui sont **exactes** par l'hypothèse de la proposition, quels que soient $n \in \mathbb{N}$ et $i_j \in \mathfrak{A}$. Le complexe de Čech augmenté $\mathbf{0} \to \mathscr{P}(U) \to \check{C}^*(\mathscr{U};\mathscr{P})$ est donc quasi-isomorphe au

[2] *Cf.* [Go] p. 222, dernier paragraphe de §5.7.

complexe simple associé au sous-bicomplexe des lignes inférieures de ($\diamond$). Or, ces lignes sont exactes par hypothèse de récurrence puisque $\ell(U_1 \cap U) = 1$, $\ell(V \cap \mathscr{U}) \leqslant \ell - 1$ et $\ell(U_1 \cap V \cap \mathscr{U}) \leqslant \ell - 1$ par construction. Ceci termine la preuve de (a).

b) Résulte de considérations générales sur la cohomologie de Čech que nous résumons (*cf.* [Go] §5.8). Pour tout ouvert $W \subseteq \boldsymbol{Y}$ et chaque recouvrement $\mathscr{U}$ de W par des ouverts de $\mathscr{B}$ on dispose du complexe de Čech $\check{C}^*(\mathscr{U};\mathscr{P})$. Les propriétés 3.2.9-($\mathscr{B}$-$*$) assurent l'existence de raffinements pour deux tels recouvrements et on peux définir une cohomologie de Čech relative à $\mathscr{B}$, notée $\check{H}^*_{\mathscr{B}}(W;\mathscr{P})$, comme limite inductive des $\check{H}^*(\mathscr{U};\mathscr{P})$ suivant une famille cofinale convenable de recouvrements (*loc.cit.*). La correspondance $W \rightsquigarrow \check{H}^*_{\mathscr{B}}(W;\mathscr{P})$ définit alors naturellement un préfaisceau **sur $\boldsymbol{Y}$** que nous notons $\check{\mathscr{H}}^*_{\mathscr{B}}(\mathscr{P})$. D'après (a) on a

$$\Gamma(U;\check{\mathscr{H}}^0_{\mathscr{B}}(\mathscr{P})) = \mathscr{P}(U)\,,\ \text{pour tout } U \in \mathscr{B}.$$

Ces mêmes raisonnements appliqués au préfaisceau $\check{\mathscr{H}}^0_{\mathscr{B}}(\mathscr{P})$ sur $\boldsymbol{Y}$ montrent que l'application canonique $\check{\mathscr{H}}^0_{\mathscr{B}}(\mathscr{P}) \to \check{\mathscr{H}}^0(\check{\mathscr{H}}^0_{\mathscr{B}}(\mathscr{P})) = \widetilde{\mathscr{P}}$ est bijective ce qui prouve (b-i). Il s'ensuit que le morphisme canonique

$$\check{H}^i_{\mathscr{B}}(W;\mathscr{P}) \longrightarrow \check{H}^i(W;\widetilde{\mathscr{P}})$$

est bijectif pour tout ouvert $W \subseteq \boldsymbol{Y}$. En particulier, $\check{H}^i(U;\widetilde{\mathscr{P}}) = 0$ pour $i > 0$ et $U \in \mathscr{B}$ et le théorème 5.9.2 dans [Go] qui permet de relier la cohomologie de Čech et la cohomologie de faisceaux s'applique ; le morphisme canonique

$$\check{H}^i(W;\widetilde{\mathscr{P}}) \longrightarrow H^i(W;\widetilde{\mathscr{P}})$$

est bijectif pour tout ouvert $W \subseteq \boldsymbol{Y}$. En particulier, $H^i(U;\widetilde{\mathscr{P}}) \simeq \check{H}^i_{\mathscr{B}}(U;\mathscr{P}) = 0$ pour $i > 0$ et $U \in \mathscr{B}$ d'après (a). ■

3.2.11. Remarque. Si dans l'énoncé de 3.2.10 les suites ($*$) sont uniquement supposées exactes à gauche, la même démonstration prouve que les complexes de Čech augmentés dans (b) sont exacts à gauche et l'assertion (b-i) en découle.

3.2.12. Corollaire. *Soit* $(\overline{\boldsymbol{X}},\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}})$ *le schéma de Meredith associé à une* $\boldsymbol{R}$*-algèbre de type fini* $\boldsymbol{A}$*. Alors :*

a) *Le foncteur* $(\widetilde{\ })$: $\mathrm{Mod}(\boldsymbol{A}^\dagger) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}(\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}})$ *est exact.*

b) *Pour tout* $\boldsymbol{A}^\dagger$*-module* $\boldsymbol{M}$ *et tout ouvert principal* $D(\overline{f}) \subseteq \overline{\boldsymbol{X}}$ *:*

  i) *Le morphisme canonique* $((\boldsymbol{A}^\dagger)_f)^\dagger \otimes_{\boldsymbol{A}^\dagger} \boldsymbol{M} \to H^0(D(\overline{f});\widetilde{\boldsymbol{M}})$ *est bijectif.*

  ii) *Pour tout recouvrement principal* $\mathscr{U} = \{\overline{U}_1,\ldots,\overline{U}_\ell\}$ *de* $D(\overline{f})$*, on a*

$$\check{H}^i(\mathscr{U};\widetilde{\boldsymbol{M}}) = 0\,,\ \textit{pour tout } i > 0.$$

iii) $H^i(\overline{U};\widetilde{\boldsymbol{M}})=0$, *pour tout* $i>0$.

c) *Étant donnés deux* $\boldsymbol{A}^\dagger$*-modules* $\boldsymbol{M}$ *et* $\boldsymbol{N}$, *si* $\boldsymbol{N}$ *est de type fini, le morphisme canonique*

$$\Xi(\boldsymbol{M},\boldsymbol{N}):\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{N})\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}}(\widetilde{\boldsymbol{M}},\widetilde{\boldsymbol{N}})$$

est bijectif. En particulier, la restriction du foncteur $(\widetilde{\_})$ *à la sous-catégorie* $\mathrm{Mod}_{\mathrm{t.f.}}(\boldsymbol{A}^\dagger)$ *est pleinement fidèle.*

Démonstration. Nous nous plaçons dans le contexte d'application de la proposition 3.2.10. L'espace topologique est $\overline{\boldsymbol{X}}:=\mathrm{Spec}(\overline{\boldsymbol{A}})$, l'ensemble d'ouverts $\mathscr{B}$ est l'ensemble des ouverts principaux de $\overline{\boldsymbol{X}}$ et le préfaisceau sur $\mathscr{B}$ est défini pour chaque $\boldsymbol{A}^\dagger$-module $\boldsymbol{M}$ par la correspondance $\mathscr{P}_{\boldsymbol{M}}$ (*cf.* 3.2.2) :

$$D(\overline{f})\rightsquigarrow \mathscr{P}_{\boldsymbol{M}}(D(\overline{f})):=((\boldsymbol{A}^\dagger)_f))^\dagger\otimes_{\boldsymbol{A}^\dagger}\boldsymbol{M}$$

On remarque aussitôt que par la platitude de $((\boldsymbol{A}^\dagger)_f)^\dagger$ en tant que $\boldsymbol{A}^\dagger$-module (3.1-e-i), la correspondance $\boldsymbol{M}\rightsquigarrow\mathscr{P}_{\boldsymbol{M}}$ est exacte et comme $\widetilde{\boldsymbol{M}}$ est le faisceau associé à $\mathscr{P}_{\boldsymbol{M}}$ l'assertion (a) résulte.

De l'égalité de préfaisceaux $\mathscr{P}_{\boldsymbol{M}}(\_)=\mathscr{P}_{\boldsymbol{A}^\dagger}(\_)\otimes_{\boldsymbol{A}^\dagger}\boldsymbol{M}$ on déduit aussitôt l'identification des complexes de Čech

$$(\check{C}^*(\mathscr{U};\mathscr{P}_{\boldsymbol{M}}),\delta_*)=(\check{C}^*(\mathscr{U};\mathscr{P}_{\boldsymbol{A}^\dagger}),\delta_*)\otimes_{\boldsymbol{A}^\dagger}\boldsymbol{M}$$

pour toute famille ***finie*** $\mathscr{U}$ d'ouverts principaux de $\overline{\boldsymbol{X}}$ et de même pour les complexes de Čech augmentés lorsque $\mathscr{U}$ est un recouvrement d'un ouvert $\overline{U}\in\mathscr{B}$. En particulier, si $\overline{U},\overline{U}_1,\overline{U}_2\in\mathscr{B}$ vérifient $\overline{U}=\overline{U}_1\cup\overline{U}_2$, le complexe de Čech augmenté :

$$\mathbf{0}\to\mathscr{P}_{\boldsymbol{M}}(\overline{U})\xrightarrow{\ \epsilon\ }\mathscr{P}_{\boldsymbol{M}}(\overline{U}_1)\oplus\mathscr{P}_{\boldsymbol{M}}(\overline{U}_2)\xrightarrow{\ \delta_0\ }\mathscr{P}_{\boldsymbol{M}}(\overline{U}_1\cap\overline{U}_2)\to\mathbf{0}\tag{$*$}$$

s'identifie à

$$\Big(\mathbf{0}\to\mathscr{P}_{\boldsymbol{A}^\dagger}(\overline{U})\xrightarrow{\ \epsilon\ }\mathscr{P}_{\boldsymbol{A}^\dagger}(\overline{U}_1)\oplus\mathscr{P}_{\boldsymbol{A}^\dagger}(\overline{U}_2)\xrightarrow{\ \delta_0\ }\mathscr{P}_{\boldsymbol{A}^\dagger}(\overline{U}_1\cap\overline{U}_2)\to\mathbf{0}\Big)\otimes_{\boldsymbol{A}^\dagger}\boldsymbol{M}$$

et l'exactitude de $(*)$ résulte puisque $\mathbf{0}\to\mathscr{P}_{\boldsymbol{A}^\dagger}(\overline{U})\to\check{C}^*(\{\overline{U}_1,\overline{U}_2\};\mathscr{P}_{\boldsymbol{A}^\dagger})$ est exact (3.2.7) et que ses termes sont des $\boldsymbol{A}^\dagger$-modules plats (3.1-e-i).

L'hypothèse de la proposition 3.2.10 est donc vérifiée par $\mathscr{P}_{\boldsymbol{M}}$ quel que soit le $\boldsymbol{A}^\dagger$-module $\boldsymbol{M}$ et (b) en découle.

Ceci étant, (b-i) montre que $\Gamma(\overline{\boldsymbol{X}},\_):\mathrm{Mod}(\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}})\rightsquigarrow\mathrm{Mod}(\boldsymbol{A}^\dagger)$ est un inverse à gauche de $(\widetilde{\_}):\mathrm{Mod}(\boldsymbol{A}^\dagger)\rightsquigarrow\mathrm{Mod}(\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}})$ et l'application naturelle $\Xi(\boldsymbol{M},\boldsymbol{N})$ est injective pour tous

$\boldsymbol{M},\boldsymbol{N}\in\mathrm{Mod}(\boldsymbol{A}^\dagger)$. Soit maintenant $\alpha:\widetilde{\boldsymbol{M}}\to\widetilde{\boldsymbol{N}}$ un morphisme de $\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}^\dagger$-modules. Pour chaque ouvert principal $\overline{U}=D(\overline{f})\subseteq\overline{\boldsymbol{X}}$ on a un diagramme commutatif de $\boldsymbol{A}^\dagger$-modules

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{M} & \xrightarrow{\alpha(\overline{\boldsymbol{X}})} & \boldsymbol{N} \\ \downarrow & & \downarrow \\ ((\boldsymbol{A}^\dagger)_f)^\dagger\otimes\boldsymbol{M}=\Gamma(\overline{U};\widetilde{\boldsymbol{M}}) & \xrightarrow{\alpha(\overline{U})} & \Gamma(\overline{U};\widetilde{\boldsymbol{N}})=((\boldsymbol{A}^\dagger)_f)^\dagger\otimes\boldsymbol{N} \end{array}$$

et $\alpha(\overline{U})$ et $\mathbf{1}\otimes\alpha(\overline{\boldsymbol{X}})$ coïncident modulo $\boldsymbol{I}^m$ quel que soit $m\in\mathbb{N}$. Or, si $\boldsymbol{N}$ est un $\boldsymbol{A}^\dagger$-module de type fini, $((\boldsymbol{A}^\dagger)_f)^\dagger\otimes\boldsymbol{N}$ est séparé pour la topologie $\boldsymbol{I}$-adique et donc $\alpha(\overline{U})=\mathbf{1}\otimes\alpha(\overline{\boldsymbol{X}})$ et $\Xi(\boldsymbol{M},\boldsymbol{N})$ est bien surjective. ■

3.2.13. Catégorie des $\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}^\dagger$-modules cohérents. Un $\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}^\dagger$-module $\mathscr{M}$ est dit « *cohérent* » lorsqu'il est localement de présentation finie, autrement dit, lorsque chaque $x\in\overline{\boldsymbol{X}}$ admet un voisinage principal $\overline{U}$ sur lequel il existe une suite exacte à droite de $\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}^\dagger$-modules

$$(\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}^\dagger)^m|_{\overline{U}}\longrightarrow(\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}^\dagger)^n|_{\overline{U}}\longrightarrow\mathscr{M}|_{\overline{U}}\to\mathbf{0}\,. \tag{‡}$$

On a donc $\mathscr{M}|_{\overline{U}}=\Gamma(\overline{U};\mathscr{M})^{\sim}$ (3.2.12).

On note $\mathrm{Mod}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}^\dagger)$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Mod}(\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}^\dagger)$ dont les objets sont les $\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}^\dagger$-modules cohérents. Pour tout $\boldsymbol{A}^\dagger$-module $\boldsymbol{M}$ le faisceau $\widetilde{\boldsymbol{M}}$ est cohérent et le foncteur $(\widetilde{\ })$: $\mathrm{Mod}_{\mathrm{t.f.}}(\boldsymbol{A}^\dagger)\rightsquigarrow\mathrm{Mod}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}^\dagger)$ est pleinement fidèle (3.2.12). Le théorème suivant est démontré dans [M] sous l'hypothèse que $(\boldsymbol{R},\boldsymbol{I})$ est un anneau de valuation discrète complet d'idéal maximal $\boldsymbol{I}$. Bien que ce théorème ne sera pas utilisé dans la suite, nous indiquons brièvement les idées d'une démonstration lorsque $\boldsymbol{R}$ est seulement supposé nœthérien.

3.2.14. Théorème. *Soit $(\overline{\boldsymbol{X}},\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}^\dagger)$ le schéma de Meredith associé à une $\boldsymbol{R}$-algèbre de type fini $\boldsymbol{A}$. Le foncteur $(\widetilde{\ })$: $\mathrm{Mod}_{\mathrm{t.f.}}(\boldsymbol{A}^\dagger)\rightsquigarrow\mathrm{Mod}_{\mathrm{coh}}(\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}^\dagger)$ est une équivalence de catégories.*

Indications. Une inspection minutieuse de la preuve de Meredith montre que l'hypothèse sur $\boldsymbol{R}$ d'être de valuation discrète et complet intervient de manière essentielle uniquement dans sa preuve du lemme §3.1 (*loc.cit.* p. 11) :

Lemme 1. Soit $\boldsymbol{M}$ un $\boldsymbol{A}^\dagger$-module de type fini. Soient $\vec{x}=\{x_1,\dots,x_r\}\subseteq\boldsymbol{A}$ et $\mu_1,\dots,\mu_t\in\boldsymbol{M}$. Soit $\{P_{i,n}\mid 1\leqslant i\leqslant t;\ n\in\mathbb{N}\}$ une famille de polynômes à r variables $\vec{X}=\{X_1,\dots,X_r\}$ vérifiant les conditions suivantes

1) $\deg_{\vec{X}}(P_{i,n})\leqslant C(n+1)$ *pour une certaine constante C ;*
2) $\sum_{i=1}^t P_{i,n}(\vec{x})\mu_i\in\boldsymbol{I}^n\cdot\boldsymbol{M}$ *pour tout n.*

Alors $\sum_{n\geqslant0}\sum_{i=0}^t P_{i,n}(\vec{x})\mu_i$ converge dans $\boldsymbol{M}$.

Ce lemme peut être démontré lorsque $\boldsymbol{R}$ est seulement supposé nœthérien. En effet, lorsque $t=1$ nous pouvons supposer $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{A}^{\dagger}\cdot\mu_1$ (Artin-Rees) et considérons la suite exacte

$$\mathbf{0}\to\boldsymbol{K}\longrightarrow\boldsymbol{A}\longrightarrow\boldsymbol{A}\cdot\mu_1\to 0\,.$$

Les hypothèses du *lemme 1* dans les notations du lemme technique 3.2.6 sont :

$$\begin{cases} P_{1,n}\in\boldsymbol{I}^0[\overrightarrow{X}]_{C(n+1)} \\ P_{1,n}\in\boldsymbol{K}+\boldsymbol{I}^n[\overrightarrow{X}] \end{cases}$$

En appliquant 3.2.6 (avec $P=1$), il existe $M\in\mathbb{N}$ ne dépendant que de $\boldsymbol{K}$ tel que :

$$P_{1,n}\in\boldsymbol{K}+\boldsymbol{I}^n[\overrightarrow{X}]_{C(n+1)+nM}\,.$$

On a donc

$$\textstyle\sum_{n\geqslant 0}P_{1,n}(\vec{x})\mu_1=\sum_{n\geqslant 0}Q_n(\vec{x})\mu_1 \quad\text{avec}\quad \begin{cases} Q_n\in\boldsymbol{I}^n[\overrightarrow{X}]_{(C+M)(n+1)}\,, \\ P_{1,n}(\vec{x})\mu_1=Q_n(\vec{x})\mu_1\,, \end{cases} \quad\text{pour tout } n\in\mathbb{N}.$$

et la série $\sum_{n\geqslant 0}Q_n(\vec{x})$ converge dans $\boldsymbol{A}^{\dagger}$.

Dans le cas où t est quelconque, on commence par remarquer que les ensembles

$$C(m):=\Big\{P\in\boldsymbol{R}[\overrightarrow{X}]\;\Big|\;P\mu_1\in\boldsymbol{R}[\overrightarrow{X}]_{\deg(P)+m}\cdot\mu_2+\cdots+\boldsymbol{R}[\overrightarrow{X}]_{\deg(P)+m}\cdot\mu_t\Big\}$$

sont des idéaux de $\boldsymbol{R}[\overrightarrow{X}]$ dont la réunion C est l'annulateur de μ_1 modulo $(\mu_2,\ldots,\mu_t)$. Par nœthérianité il existe $N\in\mathbb{N}$, dépendant seulement de $\{\mu_1,\ldots,\mu_t\}$, tel que $C=C(N)$.

Supposons le lemme démontré pour $t-1$ et considérons un ensemble des données vérifiant les conditions du lemme pour t. D'après le cas $t=1$, il existe $Q_n\in\boldsymbol{I}^n[\overrightarrow{X}]_{(C+M)(n+1)}$ vérifiant

$$(P_{1,n}-Q_n)\mu_1\in(\mu_2,\ldots,\mu_t)\,,$$

et la remarque précédente donne des décompositions

$$\textstyle P_{1,n}\mu_1=Q_n\,\mu_1+\sum_{k=2}^{t}R_{k,n}\,\mu_k\,,$$

avec $R_{k,n}\in\boldsymbol{R}[\overrightarrow{X}]_{(C+M+N)(n+1)}$. On peut donc écrire

$$\textstyle\sum_{n\geqslant 0}\sum_{i=1}^{t}P_{i,n}(\vec{x})\mu_i=\sum_{n\geqslant 0}Q_n\mu_1+\sum_{n\geqslant 0}\sum_{i=2}^{t}(R_{i,n}+P_{i,n})\mu_i \qquad (*)$$

où

$$\begin{cases} \sum_{n\geqslant 0}Q_n \text{ converge dans } \boldsymbol{A}^{\dagger}, \\ \deg_{\overrightarrow{X}}(R_{i,n}+P_{i,n})\leqslant(C+N+N)(n+1)\,, \\ \sum_{i=2}^{t}(R_{i,n}+P_{i,n})\mu_i\in\boldsymbol{I}^n\cdot\boldsymbol{M} \quad\text{par construction.} \end{cases}$$

La convergence de la série $(*)$ résulte alors de l'hypothèse inductive. ■

3.2.15. $\mathscr{O}^{\dagger}_{\boldsymbol{X}}$ comme faisceau de relèvements (très lisses). La proposition suivante fait le lien entre la catégorie des relèvements affines très lisses $\mathscr{K}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ associée à $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ et les sections du faisceau $\mathscr{O}^{\dagger}_{\boldsymbol{X}}$.

3.2.16. Proposition. *Soit $\boldsymbol{A}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre de type fini ou f.c.t.f.. Notons $\rho:\mathscr{O}^{\dagger}_{\boldsymbol{X}}\to\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}}$ le morphisme de faisceaux induit d'après* 3.2.12-(c) *par le relèvement $\rho(\overline{\boldsymbol{X}}):\boldsymbol{A}^{\dagger}\to\overline{\boldsymbol{A}}$. Alors,*

a) *Le morphisme $\rho(\overline{U}):\mathscr{O}^{\dagger}_{\boldsymbol{X}}(\overline{U})\to\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}}(\overline{U})$ est un relèvement quel que soit l'ouvert $\overline{U}\subseteq\overline{\boldsymbol{X}}$.*

*De plus, si $\boldsymbol{A}^{\dagger}$ est très lisse et $\overline{U}\subseteq\overline{\boldsymbol{X}}$ est un ouvert **affine**, on a :*

b) *$\mathscr{O}^{\dagger}_{\boldsymbol{X}}(\overline{U})$ est f.c.t.f. très lisse.*

c) *L'espace annelé $(\overline{U};\mathscr{O}^{\dagger}_{\boldsymbol{X}}|_{\overline{U}})$ est canoniquement isomorphe au schéma de Meredith associé à l'algèbre $\mathscr{O}^{\dagger}_{\boldsymbol{X}}(\overline{U})$.*

Démonstration

a) D'après 3.2.12.

b) Soit
$$\mathbf{0}\to\mathscr{O}^{\dagger}_{\boldsymbol{X}}(\overline{U})\xrightarrow{\epsilon(\overline{U})}\prod_{i=1}^{r}\boldsymbol{A}^{\dagger}{}_{[f_i]}\xrightarrow{\delta_0}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant r}^{r}\boldsymbol{A}^{\dagger}{}_{[f_if_j]}$$
la suite exacte à gauche associée à un recouvrement principal fini $\overline{U}=\bigcup_{i=1}^{r}D(\overline{f}_i)$. Soit $\rho:\boldsymbol{B}\twoheadrightarrow\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}}(\overline{U})$ un relèvement lisse sur $\boldsymbol{R}$ (1.2) et notons $(U:=\mathrm{Spec}(\boldsymbol{B});\mathscr{O}_U)$ le schéma affine associé. Lorsque $\boldsymbol{A}^{\dagger}$ est un relèvement très lisse de $\overline{\boldsymbol{X}}$ il existe un morphisme de $\boldsymbol{R}^{\dagger}$-algèbres $\phi:\boldsymbol{A}^{\dagger}\to\boldsymbol{B}^{\dagger}$ dont la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ correspond à l'inclusion $U\subseteq\overline{\boldsymbol{X}}$. Le morphisme ϕ induit des morphismes
$$\phi_i:\boldsymbol{A}^{\dagger}{}_{[f_i]}\to\boldsymbol{B}^{\dagger}{}_{[\phi(f_i)]}\,,\qquad \phi_{ij}:\boldsymbol{A}^{\dagger}{}_{[f_if_j]}\to\boldsymbol{B}^{\dagger}{}_{[\phi(f_if_j)]}\,,$$
qui sont des isomorphismes puisqu'il en est ainsi modulo $\boldsymbol{I}$ et que $\boldsymbol{B}^{\dagger}$ est très lisse (1.2).

Notons $(U,\mathscr{O}^{\dagger}_U)$ le schéma de Meredith associé à $\boldsymbol{B}$. On a une suite exacte
$$\mathbf{0}\to\boldsymbol{B}^{\dagger}\xrightarrow{\epsilon(\overline{\boldsymbol{Y}})}\prod_{i=1}^{r}\boldsymbol{B}^{\dagger}{}_{[\phi(f_i)]}\xrightarrow{\delta_0}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant r}^{r}\boldsymbol{B}^{\dagger}{}_{[\phi(f_if_j)]}$$
et un diagramme commutatif :
$$\begin{array}{ccccc}
\mathbf{0}\to\mathscr{O}^{\dagger}_{\boldsymbol{X}}(\overline{U})\longrightarrow & \prod_{i=1}^{r}\boldsymbol{A}^{\dagger}{}_{[f_i]} & \xrightarrow{\delta_0} & \prod_{1\leqslant i<j\leqslant r}^{r}\boldsymbol{A}^{\dagger}{}_{[f_if_j]}\\
 & {\scriptstyle\phi_i}\big\downarrow{\scriptstyle\simeq} & \bigoplus & {\scriptstyle\simeq}\big\downarrow{\scriptstyle\phi_{ij}}\\
\mathbf{0}\to\quad\boldsymbol{B}^{\dagger}\quad\longrightarrow & \prod_{i=1}^{r}\boldsymbol{B}^{\dagger}{}_{[\phi(f_i)]} & \xrightarrow{\delta_0} & \prod_{1\leqslant i<j\leqslant r}^{r}\boldsymbol{B}^{\dagger}{}_{[\phi(f_if_j)]}
\end{array}$$
donnant lieu à un isomorphisme de $\boldsymbol{R}^{\dagger}$-algèbres entre $\mathscr{O}^{\dagger}_{\boldsymbol{X}}(\overline{U})$ et $\boldsymbol{B}^{\dagger}$.

c) Dans la preuve de (b) on a montré que pour tout $f\in\boldsymbol{A}^{\dagger}$ tel que $D(\overline{f})\subseteq\overline{U}$ le morphisme canonique $\boldsymbol{A}^{\dagger}{}_{[f]}\to\mathscr{O}^{\dagger}_{\boldsymbol{X}}(\overline{U})_{[f]}$ est bijectif. La famille de ces isomorphismes constitue un isomorphisme des restrictions à la catégorie des ouverts principaux de $\overline{\boldsymbol{X}}$ contenus dans $\overline{U}$ du faisceau $\mathscr{O}^{\dagger}_{\boldsymbol{X}}$ vers le faisceau $\mathscr{O}^{\dagger}_{U}$; cet isomorphisme induit alors l'identification entre $\mathscr{O}^{\dagger}_{\boldsymbol{X}}|_{\overline{U}}$ et $\mathscr{O}^{\dagger}_{U}$ annoncée. ■

3.3 Sous-sites de Meredith de $\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ et condition de faisceau

3.3.1. Sous-sites de Meredith. Nous reprenons le contexte général où $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ est un schéma lisse et séparé sur $\overline{\boldsymbol{R}}$ de site de relèvements affines très lisses $\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$.

Pour tout objet $\mathscr{U}$ de $\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ d'ouvert associé $\overline{\mathscr{U}} \subseteq \overline{\boldsymbol{X}}$ on note $(\overline{\mathscr{U}};\mathscr{O}^\dagger_{\mathscr{U}})$ le schéma de Meredith associé à l'algèbre f.c.t.f. très lisse $\boldsymbol{A}(\mathscr{U})^\dagger$. Par 3.2.16, si $\overline{V}_1 \subseteq \overline{V}_2 \subseteq \overline{\mathscr{U}}$ sont des ouverts affines, l'algèbre $\mathscr{O}^\dagger_{\mathscr{U}}(\overline{V}_i)$ est un relèvement très lisse de $\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}}(\overline{V}_i)$ et la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ du morphisme de restriction $\mathscr{O}^\dagger_{\mathscr{U}}(\overline{V}_2) \to \mathscr{O}^\dagger_{\mathscr{U}}(\overline{V}_1)$ est le morphisme d'anneaux $\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}}(\overline{V}_2) \to \mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}}(\overline{V}_1)$ correspondant à l'inclusion $\overline{V}_1 \subseteq \overline{V}_2$.

Définition. On appellera « *sous-site de Meredith de $\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ engendré par $\mathscr{U}$* » la sous-catégorie de $\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ notée $\mathscr{M\!er}(\mathscr{U})$ où les objets sont les sections de $\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}$ au-dessus des ouverts affines de $\overline{\boldsymbol{X}}$ et où il y a un unique morphisme de $\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{V}_1)$ vers $\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{V}_2)$ lorsque $\overline{V}_2 \subseteq \overline{V}_1$, à savoir le morphisme de restriction du faisceau $\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}$. Les recouvrements dans $\mathscr{M\!er}(\mathscr{U})$ sont les familles de morphismes de restriction $\{\mathscr{O}^\dagger_{\mathscr{U}}(\overline{V}) \to \mathscr{O}^\dagger_{\mathscr{U}}(\overline{V}_i)\}$ où $\overline{V}$ et $\overline{V}_i$ sont des ouverts affines de $\overline{\boldsymbol{X}}$ vérifiant $\overline{V} = \bigcup_i \overline{V}_i$.

La proposition suivante est corollaire immédiat des propositions 2.4.2 et 2.5.1.

3.3.2. Proposition

a) *Un préfaisceau $\mathscr{P}$ sur $\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ est un faisceaux si et seulement si la restriction $\mathscr{P}|_{\mathscr{M\!er}(\mathscr{U})}$ est un faisceau que que soit $\mathscr{U} \in \mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$.*

b) *Si $\overline{\boldsymbol{X}}$ est affine et si $\mathscr{U} \in \mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ vérifie $\overline{\mathscr{U}} = \overline{\boldsymbol{X}}$, alors un préfaisceau sur $\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ est un faisceau si et seulement si sa restriction à $\mathscr{M\!er}(\mathscr{U})$ l'est.*

3.3.3. Le foncteur $\mathscr{R}_{\mathscr{U}}$. Soit $\mathscr{U} \in \mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$. Étant donné un faisceau $\mathscr{F}$ de $\boldsymbol{Z}$-modules sur $\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$, notons $\mathscr{R}_{\mathscr{U}}(\mathscr{F})$ **le faisceau sur** $\overline{\mathscr{U}}$ associé à $\mathscr{F}|_{\mathscr{M\!er}(\mathscr{U})}$. De même, si $\alpha : \mathscr{F}_1 \to \mathscr{F}_2$ est un morphisme de faisceaux de $\boldsymbol{Z}$-modules sur $\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ notons $\mathscr{R}_{\mathscr{U}}(\alpha) : \mathscr{R}_{\mathscr{U}}(\mathscr{F}_1) \to \mathscr{R}_{\mathscr{U}}(\mathscr{F}_2)$ le morphisme de faisceaux sur $\overline{\mathscr{U}}$ déterminé par $\alpha|_{\mathscr{M\!er}(\mathscr{U})}$. La correspondance ainsi définie :

$$\mathscr{R}_{\mathscr{U}} : \mathrm{Mod}_{\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}(\boldsymbol{Z}) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}_{\overline{\mathscr{U}}}(\boldsymbol{Z})$$

est un foncteur covariant additif.

Proposition

a) *Le foncteur $\mathscr{R}_{\mathscr{U}}$ est exact. Il est en plus fidèle lorsque $\overline{\boldsymbol{X}}$ est affine et que $\overline{\mathscr{U}} = \overline{\boldsymbol{X}}$.*

b) *Soit $\mathscr{F}$ un faisceau de $\boldsymbol{Z}$-modules sur $\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$. Pour tout $\mathscr{V} \in \mathscr{M\!er}(\mathscr{U})$ le morphisme canonique*

$$\mathscr{F}(\mathscr{V}) \longrightarrow \Gamma\big(\overline{\mathscr{V}};\mathscr{R}_{\mathscr{U}}(\mathscr{F})\big)$$

est bijectif.

Démonstration. (a) est claire par construction et (b) résulte de 3.2.10 et 3.2.11. ∎

3.4 Faisceau $\mathscr{G}^\dagger_{\boldsymbol{X}}$ d'automorphismes †-adiques

Notation. Étant donnée une $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{B}$, on notera $\boldsymbol{G}^\dagger(\boldsymbol{B})$ le groupe des automorphismes de $\boldsymbol{R}$-algèbre de $\boldsymbol{B}$ dont la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ est l'identité sur $\overline{\boldsymbol{B}}$.

3.4.1. Le cas affine. Soit $\boldsymbol{A}^\dagger$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre f.c.t.f. de schéma de Meredith $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}})$. Pour $f,g \in \boldsymbol{A}^\dagger$, notons $\iota : \boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f]} \to \boldsymbol{A}^\dagger{}_{[fg]}$ le morphisme canonique et remarquons que pour tout $\theta \in \boldsymbol{G}^\dagger(\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f]})$ l'élément $\iota\theta(g)$ est inversible puisque $\iota\theta(g) \in \iota(g)(1+\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[fg]})$, on a donc une factorisation canonique

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f]} & \xrightarrow{\theta} & \boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f]} \\ \iota\downarrow & \bigoplus & \downarrow\iota \\ \boldsymbol{A}^\dagger{}_{[fg]} & \xrightarrow[\theta']{} & \boldsymbol{A}^\dagger{}_{[fg]} \end{array} \qquad (\diamond)$$

avec $\theta' \in \boldsymbol{G}^\dagger(\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[fg]})$ d'où une application de « *restriction* »

$$(\_)|_{\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[fg]}} : \begin{array}{ccc} \boldsymbol{G}^\dagger(\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f]}) & \longrightarrow & \boldsymbol{G}^\dagger(\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[fg]}) \\ \theta & \longmapsto & \theta' \end{array} \qquad (*)$$

dont on vérifie aisément que c'est un morphisme de groupes. La correspondance

$$D(\overline{f}) \rightsquigarrow \boldsymbol{G}^\dagger(\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f]})$$

et les restrictions $(*)$ définissent un préfaisceau de groupes sur la catégorie des ouverts principaux de $\overline{\boldsymbol{X}}$ dont on notera $\mathscr{G}^\dagger_{\boldsymbol{X}}$ le faisceau sur $\overline{\boldsymbol{X}}$ associé.

3.4.2. Le cas non affine. Ce qui précède montre plus généralement que si $\overline{V}_1 \subseteq \overline{V}_2$ sont des ouverts **principaux** respectivement dans des ouverts **affines** $\overline{U}_i \subseteq \overline{\boldsymbol{X}}$, il existe un morphisme canonique de restriction de $\boldsymbol{G}^\dagger\big(\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{V}_2)\big)$ vers $\boldsymbol{G}^\dagger\big(\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{V}_1)\big)$. Le faisceaux $\mathscr{G}^\dagger_{\boldsymbol{X}}$ peut donc aussi être introduit lorsque $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ est la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ d'un schéma lisse séparé $(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ de schéma de Meredith $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}})$. Dans tous les cas on a un morphisme naturel $\Phi(\overline{U}) : \boldsymbol{G}^\dagger(\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{U})) \to \mathscr{G}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{U})$ pour tout ouvert $\overline{U}$ **affine** dans $\overline{\boldsymbol{X}}$ puisque les ouverts principaux des ouverts affines de $\overline{\boldsymbol{X}}$ constituent une base pour la topologie de $\overline{\boldsymbol{X}}$. ([3])

3.4.3. Théorème. *Pour tout schéma de Meredith* $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}})$ *le morphisme naturel*

$$\Phi(\overline{U}) : \boldsymbol{G}^\dagger(\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{U})) \longrightarrow \mathscr{G}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{U})$$

est bijectif pour tout ouvert affine $\overline{U} \subseteq \overline{\boldsymbol{X}}$.

[3] On remarquera que si les groupes $\boldsymbol{G}^\dagger(\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{U}))$ et $\mathscr{G}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{U})$ existent quel que soit l'ouvert $\overline{U} \subseteq \overline{\boldsymbol{X}}$, il n'y a pas nécessairement de morphisme de restriction de $\boldsymbol{G}^\dagger(\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{U}))$ vers $\boldsymbol{G}^\dagger(\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{V}))$ pour $\overline{V} \subseteq \overline{U}$ lorsque $\overline{U}$ n'est pas affine. Il n'y a donc pas de morphisme *a priori* de $\boldsymbol{G}^\dagger(\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{U}))$ vers $\mathscr{G}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{U})$ en dehors du cas où $\overline{U}$ est affine (*cf.* remarque 3.4.4).

Démonstration. Supposons $\overline{\boldsymbol{X}}$ affine et notons $\boldsymbol{A}^\dagger := \mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{\boldsymbol{X}})$. Soit $\overline{U}$ un ouvert arbitraire de $\overline{\boldsymbol{X}}$, considérons la suite exacte à gauche

$$\mathbf{0} \to \mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{U}) \xrightarrow{\ \epsilon\ } \textstyle\prod_i \boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f_i]} \xrightarrow{\ \delta_0\ } \prod_{i<j} \boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f_i f_j]} \tag{‡}$$

associé au recouvrement fini principal $\overline{U} = \bigcup_i D(\overline{f}_i)$, et notons $x_i \in \boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f_i]}$ les restrictions d'un élément $x \in \mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{U})$. Pour tout $\theta_i \in \boldsymbol{G}^\dagger(\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f_i]})$ on a (3.4.1-($\diamond$))

$$\theta_i(x_i)|_{\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f_i f_j]}} = \theta_i|_{\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f_i f_j]}}\big(x_i|_{\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f_i f_j]}}\big)\,,$$

de sorte que si $\theta_i|_{\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f_i f_j]}} = \theta_j|_{\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f_i f_j]}}$, les éléments $\theta_i(x_i)$ se recollent en un (unique) $\theta(x) \in \mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{U})$. L'application $\theta : \mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{U}) \to \mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{U})$ ainsi définie appartient clairement à $\boldsymbol{G}^\dagger\big(\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{U})\big)$.

Lorsque $\overline{U}$ est affine les morphismes de restriction $\boldsymbol{G}^\dagger(\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{U})) \to \boldsymbol{G}^\dagger(\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f_i]})$ de 3.4.1 permettent de construire l'analogue de la suite (‡) pour les faisceaux en groupes :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{0} \to \boldsymbol{G}^\dagger(\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{U})) & \xrightarrow{\ \epsilon\ } & \prod_i \boldsymbol{G}^\dagger(\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f_i]}) & \xrightarrow{\ \Delta_0\ } & \prod_{i<j} \boldsymbol{G}^\dagger(\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f_i f_j]}) \\ \theta & \longmapsto & \big(\theta|_{\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f_i]}}\big)_i & & \\ & & \big(\theta_i\big)_i & \longmapsto & \big(\theta_i^{-1}|_{\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f_i f_j]}}\theta_j|_{\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f_i f_j]}}\big)_{i<j} \end{array} \tag{$*$}$$

dont l'exactitude résulte du paragraphe précédent.

En raisonnant comme dans 3.2.10, l'augmentation ϵ donne lieu au morphisme $\Phi(\overline{U})$: $\boldsymbol{G}^\dagger(\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{U})) \to \mathscr{G}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{U})$ qui est bijectif puisque l'exactitude de $(*)$ est établie pour **tout** recouvrement principal de $\overline{U}$.

Le cas où $\overline{\boldsymbol{X}}$ n'est pas affine résulte du cas affine par le principe qui affirme que la restriction à un ouvert affine $\overline{U}$ du faisceau associé à un préfaisceau $\mathscr{P}$ est le faisceau associé à la restriction de $\mathscr{P}$ à $\overline{U}$. ■

3.4.4. Remarque. Le premier paragraphe de la preuve donne une injection canonique $\mathscr{G}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{U}) \subseteq \boldsymbol{G}^\dagger(\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{U}))$ pour **tout** ouvert $\overline{U} \subseteq \overline{\boldsymbol{X}}$ lorsque $\overline{\boldsymbol{X}}$ est affine. On obtient alors comme corollaire de 3.4.3 le fait que pour tout ouvert affine $\overline{U} \subseteq \overline{\boldsymbol{X}}$ et **tout** ouvert $\overline{V} \subseteq \overline{U}$ il existe un morphisme naturel de restriction de $\boldsymbol{G}^\dagger(\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{U}))$ vers $\boldsymbol{G}^\dagger(\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{V}))$ compatible aux restrictions de groupes d'automorphismes précédemment considérés.

3.4.5. Soit $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}})$ le schéma de Meredith affine associé à une algèbre f.c.t.f. $\boldsymbol{A}^\dagger$. Pour tout ouvert $\overline{U} \subseteq \overline{\boldsymbol{X}}$ notons $\rho^{\overline{\boldsymbol{X}}}_{\overline{U}} : \boldsymbol{A}^\dagger = \mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{\boldsymbol{X}}) \to \mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{U})$ le morphisme de restriction des sections du faisceau $\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}$ et soit $\mathrm{Homom}^\dagger_{\boldsymbol{R}}\big(\boldsymbol{A}^\dagger,\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{U})\big)$ l'ensemble des morphismes de $\boldsymbol{R}$-algèbres dont la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ correspond à l'inclusion $\overline{U} \subseteq \overline{\boldsymbol{X}}$. On a alors l'application

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{G}^\dagger(\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{U})) & \xrightarrow{\ \Xi(\overline{U})\ } & \mathrm{Homom}^\dagger_{\boldsymbol{R}}\big(\boldsymbol{A}^\dagger,\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{U})\big) \\ \theta & \longmapsto & \theta \circ \rho^{\overline{\boldsymbol{X}}}_{\overline{U}} \end{array}$$

Théorème. *Si $\boldsymbol{A}^\dagger$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre f.c.t.f. très lisse.*

a) *L'application $\Xi(\overline{U})$ établit une bijection entre $\mathscr{G}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{U})$ et $\operatorname{Homom}^\dagger_{\boldsymbol{R}}\big(\boldsymbol{A}^\dagger,\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{U})\big)$ quel que soit l'ouvert $\overline{U}\subseteq\overline{\boldsymbol{X}}$.*

b) *Si $\overline{U}$ est un ouvert affine, l'action à droite de $\boldsymbol{G}^\dagger(\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{U}))$ sur $\operatorname{Homom}^\dagger_{\boldsymbol{R}}\big(\boldsymbol{A}^\dagger,\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{U})\big)$ est simplement transitive.*

Démonstration. Supposons d'abord $\overline{U}=D(\overline{f})$ auquel cas $\mathscr{G}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{U})=\boldsymbol{G}^\dagger(\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f]})$ (3.4.3). Soit $\phi:\boldsymbol{A}^\dagger\to\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f]}$ un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres dont la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ est le morphisme canonique $\iota:\overline{\boldsymbol{A}}\to\overline{\boldsymbol{A}}_{\overline{f}}$. L'élément $\phi(f)$ est inversible car $\phi(f)=f \bmod \boldsymbol{I}$, et ϕ se factorise de manière unique en $\theta\circ\rho^{\boldsymbol{X}}_{\overline{U}}$ où $\theta\in\boldsymbol{G}^\dagger(\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f]})$ puisque c'est un endomorphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbre de $\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f]}$ de réduction modulo $\boldsymbol{I}$ égal à l'identité et que $\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f]}$ est f.c.t.f. très lisse car c'est ainsi de $\boldsymbol{A}^\dagger$. Ceci démontre la surjectivité de $\Xi(\overline{U})$. L'injectivité de $\Xi(\overline{U})$ résulte de ce que chaque $\theta\in\boldsymbol{G}^\dagger(\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f]})$ est entièrement déterminé par son action sur $\boldsymbol{A}^\dagger\cdot\mathbf{1}\subseteq\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f]}$, c'est à dire par la composée $\theta\circ\rho^{\boldsymbol{X}}_{D(\overline{f})}$.

Dans le cas où $\overline{U}$ est un ouvert arbitraire on a, pour tout recouvrement principal $\overline{U}=\bigcup_i D(\overline{f}_i)$ et tout $\phi\in\operatorname{Homom}^\dagger_{\boldsymbol{R}}\big(\boldsymbol{A}^\dagger,\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{U})\big)$, le diagramme commutatif de deuxième ligne exacte à gauche :

$$\begin{array}{ccccc} \boldsymbol{A}^\dagger & \xrightarrow{\ \Pi_i\rho^{\boldsymbol{X}}_{D(\overline{f}_i)}\ } & \prod_i \boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f_i]} & \xrightarrow{\ \delta_0\ } & \prod_{i<j}\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f_if_j]} \\ {\scriptstyle\phi}\big\downarrow & \oplus & {\scriptstyle\theta_i}\big\downarrow & & \\ 0\to\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{U}) & \xrightarrow[\ \Pi\rho^{\overline{U}}_{D(\overline{f}_i)}\ ]{\ \epsilon\ } & \prod_i \boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f_i]} & \xrightarrow{\ \delta_0\ } & \prod_{i<j}\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f_if_j]} \end{array} \qquad (*)$$

où l'élément $\theta_i\in\boldsymbol{G}^\dagger(\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f_i]})$ est celui introduit dans le paragraphe précédent vérifiant

$$\rho^{\overline{U}}_{D(\overline{f}_i)}\circ\phi=\theta_i\circ\rho^{\boldsymbol{X}}_{D(\overline{f}_i)}.$$

Or, pour tout $i<j$ les restrictions $\theta_i|_{\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f_if_j]}}$ et $\theta_j|_{\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f_if_j]}}$ coïncident sur $\boldsymbol{A}^\dagger\cdot\mathbf{1}\subseteq\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f_if_j]}$ par construction. On en déduit l'égalité

$$\theta_i|_{\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f_if_j]}}=\theta_j|_{\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f_if_j]}}$$

et les θ_i se recollent en un certain $\theta\in\mathscr{G}^\dagger(\overline{U})$ vérifiant

$$\rho^{\overline{U}}_{D(\overline{f}_i)}\circ\theta\circ\rho^{\boldsymbol{X}}_{\overline{U}}=\theta_i\circ\rho^{\boldsymbol{X}}_{D(\overline{f}_i)}=\rho^{\overline{U}}_{D(\overline{f}_i)}\circ\phi$$

pour tout i. Par conséquent $\theta\circ\rho^{\boldsymbol{X}}_{\overline{U}}=\phi$ et la surjectivité de $\Xi(\overline{U})$ est prouvée.

L'injectivité de $\Xi(\overline{U})$ résulte de ce que si $\theta,\theta'\in\mathscr{G}^\dagger(\overline{U})$ vérifient $\theta\circ\rho^{\boldsymbol{X}}_{\overline{U}}=\theta'\circ\rho^{\boldsymbol{X}}_{\overline{U}}$, on a par restriction de $\overline{U}$ à chaque $D(\overline{f}_i)$:

$$\theta|_{\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[\overline{f}_i]}}\circ\rho^{\boldsymbol{X}}_{D(\overline{f}_i)}=\theta'|_{\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[\overline{f}_i]}}\circ\rho^{\boldsymbol{X}}_{D(\overline{f}_i)}$$

et alors $\theta|_{\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[\overline{f}_i]}}=\theta'|_{\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[\overline{f}_i]}}$ pour tout i, et donc $\theta=\theta'$.

L'assertion (b) est maintenant corollaire de (a) et du théorème 3.4.3. ∎

3.4.6. Corollaire. *Soit* $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ *la réduction modulo* $\boldsymbol{I}$ *d'un schéma lisse séparé* $(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ *de schéma de Meredith* $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}})$. *Si* $\overline{V}\subseteq\overline{U}$ *sont deux ouverts* ***affines*** *de* $\overline{\boldsymbol{X}}$, *l'action à droite de* $\boldsymbol{G}^\dagger(\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{V}))$ *sur* $\mathrm{Homom}^\dagger_{\boldsymbol{R}}\big(\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{U}),\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{V})\big)$ *est simplement transitive.*

§ 4. Catégories de faisceaux sur $\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$

4.1 Faisceau $\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{X}}$ d'automorphismes †-adiques sur $\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$

Soit $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ un schéma lisse et séparé sur $\overline{\boldsymbol{R}}$ de site de relèvements affines très lisses $\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$. Pour $\boldsymbol{\mathscr{U}}\in\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ notons $(\overline{\boldsymbol{\mathscr{U}}};\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{\mathscr{U}}})$ le schéma de Meredith associé à $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\mathscr{U}})^\dagger$. Dans 3.4 nous avons introduit le faisceau $\mathscr{G}^\dagger_{\boldsymbol{\mathscr{U}}}$ sur $\overline{\boldsymbol{\mathscr{U}}}$; il vérifie :

$$\mathscr{G}^\dagger_{\boldsymbol{\mathscr{U}}}(\overline{V})=\boldsymbol{G}^\dagger(\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{\mathscr{U}}}(\overline{V}))=\mathrm{End}_{\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}(\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{\mathscr{U}}}(\overline{V}))^{\mathrm{op}}=\mathrm{Iso}_{\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}(\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{\mathscr{U}}}(\overline{V}))^{\mathrm{op}},$$

pour tout ouvert affine $\overline{V}\subseteq\overline{\boldsymbol{\mathscr{U}}}$.

La restriction de $\mathscr{G}^\dagger_{\boldsymbol{\mathscr{U}}}$ à la sous-catégorie des ouverts affines de $\overline{\boldsymbol{X}}$ est un faisceau sur le sous-site $\mathscr{M}\!\mathit{er}(\boldsymbol{\mathscr{U}})$, il est noté $\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{M}\!\mathit{er}(\boldsymbol{\mathscr{U}})}$.

4.1.1. Restriction d'automorphismes †-adiques dans $\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$. Soit $\boldsymbol{\mathscr{U}}'\subseteq\boldsymbol{\mathscr{U}}$ dans $\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$. Pour chaque $\phi\in\mathrm{Mor}_{\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}(\boldsymbol{\mathscr{U}}',\boldsymbol{\mathscr{U}})$ et tout $\theta\in\boldsymbol{G}^\dagger(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\mathscr{U}})^\dagger)$ on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\mathscr{U}})^\dagger \arrow[r, equal] \arrow[ddd, "\phi"'] & \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\mathscr{U}})^\dagger \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, equal] & \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\mathscr{U}})^\dagger \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] & \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\mathscr{U}})^\dagger \arrow[ddd, "\phi"] \\
& \mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{\mathscr{U}}}(\overline{\boldsymbol{\mathscr{U}}}) \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\rho^{\overline{\boldsymbol{\mathscr{U}}}}_{\overline{\boldsymbol{\mathscr{U}}}'}"'] & \mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{\mathscr{U}}}(\overline{\boldsymbol{\mathscr{U}}}) \arrow[d, "\rho^{\overline{\boldsymbol{\mathscr{U}}}}_{\overline{\boldsymbol{\mathscr{U}}}'}"] & \\
& \mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{\mathscr{U}}}(\overline{\boldsymbol{\mathscr{U}}}') \arrow[r, "\theta'"] \arrow[d, "\xi"'] & \mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{\mathscr{U}}}(\overline{\boldsymbol{\mathscr{U}}}') \arrow[d, "\xi"] & \\
\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\mathscr{U}}')^\dagger & \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\mathscr{U}}')^\dagger \arrow[l, dashed, "\zeta"'] \arrow[r, "\xi\theta'\xi^{-1}"] & \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\mathscr{U}}')^\dagger \arrow[r, dashed, "\zeta"] & \boldsymbol{A}(\boldsymbol{\mathscr{U}}')^\dagger
\end{tikzcd}$$

où θ' est la restriction de θ (*cf.* 3.4.4), $\xi\in\mathrm{Homom}^\dagger(\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{\mathscr{U}}}(\overline{\boldsymbol{\mathscr{U}}}'),\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\mathscr{U}}')^\dagger)$ est arbitrairement choisi et $\zeta\in\boldsymbol{G}^\dagger(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\mathscr{U}}')^\dagger)$ est l'isomorphisme vérifiant $\zeta\circ\xi\circ\rho^{\overline{\boldsymbol{\mathscr{U}}}}_{\overline{\boldsymbol{\mathscr{U}}}'}=\phi$ (th. 3.4). La composée

$$\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{X}}(\phi)(\theta):=\zeta\circ\xi\circ\theta'\circ\xi^{-1}\circ\zeta^{-1}$$

est alors indépendante du choix de ξ et l'application $\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{X}}(\phi):\boldsymbol{G}^\dagger(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\mathscr{U}})^\dagger)\to\boldsymbol{G}^\dagger(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\mathscr{U}}')^\dagger)$ ainsi définie est un morphisme de groupes.

On a

$$\mathscr{G}_{\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}(\phi_1\circ\phi_2)=\mathscr{G}_{\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}(\phi_2)\circ\mathscr{G}_{\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}(\phi_1)\,,$$

pour tous $\phi_1\in\mathrm{Mor}_{\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}(\boldsymbol{\mathscr{U}}',\boldsymbol{\mathscr{U}})$ et $\phi_2\in\mathrm{Mor}_{\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}(\boldsymbol{\mathscr{U}}'',\boldsymbol{\mathscr{U}}')$.

4.1.2. Proposition et définition. *La correspondance* $\mathscr{G}^{\dagger}_{\mathscr{X}} : \mathscr{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}} \rightsquigarrow \mathbf{Grps}$ *qui associe*

$$\mathscr{U} \rightsquigarrow \mathscr{G}^{\dagger}_{\mathscr{X}}(\mathscr{U}) := \boldsymbol{G}^{\dagger}(\boldsymbol{A}(\mathscr{U})^{\dagger}) \quad \text{et} \quad \big(\phi : \mathscr{U}' \to \mathscr{U}\big) \rightsquigarrow \big(\mathscr{G}^{\dagger}_{\mathscr{X}}(\phi) : \mathscr{G}^{\dagger}_{\mathscr{X}}(\mathscr{U}) \to \mathscr{G}^{\dagger}_{\mathscr{X}}(\mathscr{U}')\big),$$

est un faisceau de groupes ; c'est « le faisceau des automorphismes †-adiques sur $\mathscr{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ ».

Indication. Pour tout $\mathscr{U} \in \mathscr{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$, la restriction de $\mathscr{G}^{\dagger}_{\mathscr{X}}$ au sous-site de Meredith $\mathscr{M}\!er(\mathscr{U})$ est un faisceau, à savoir $\mathscr{G}^{\dagger}_{\mathscr{M}er(\mathscr{U})}$. ■

La proposition suivante est une simple reformulation en termes de la catégorie $\mathscr{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ de résultats établis dans les sections précédentes.

4.1.3. Proposition. *Soit* $\mathscr{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ *le site des relèvements affines très lisses d'un schéma lisse et séparé sur* $\overline{\boldsymbol{R}}$.

a) *Pour tout* $\mathscr{U} \in \mathscr{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ *on a* $\big(\mathscr{G}^{\dagger}_{\mathscr{X}}(\mathscr{U})\big)^{\mathrm{op}} = \mathrm{End}_{\mathscr{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}}(\mathscr{U}) = \mathrm{Iso}_{\mathscr{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}}(\mathscr{U})$.

b) *Soient* $\mathscr{U}' \subseteq \mathscr{U}$ *deux objets de* $\mathscr{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$. *L'action naturelle du groupe* $\mathrm{Iso}_{\mathscr{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}}(\mathscr{U}')$ *à droite de* $\mathrm{Mor}_{\mathscr{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}}(\mathscr{U}',\mathscr{U})$ *est* ***simplement transitive****.*

c) *Pour tout* $\phi \in \mathrm{Mor}(\mathscr{U}',\mathscr{U})$ *et tout* $\theta \in \mathrm{End}_{\mathscr{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}}(\mathscr{U})$, *il existe un et un seul* $\theta' \in \mathrm{End}_{\mathscr{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}}(\mathscr{U}')$ *rendant le diagramme*

$$\begin{tikzcd} \mathscr{U} \arrow[r, "\theta"] & \mathscr{U} \\ \mathscr{U}' \arrow[u, "\phi"] \arrow[r, dashed, "\theta'"'] & \mathscr{U}' \arrow[u, "\phi"'] \end{tikzcd}$$

commutatif, a savoir $\theta' = \mathscr{G}^{\dagger}_{\mathscr{X}}(\phi)(\theta)$.

4.2 Catégorie de faisceaux de $\boldsymbol{Z}$-modules sur $\mathscr{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$

4.2.1. Préfaisceaux de $\boldsymbol{Z}$-modules. Soient $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ un schéma lisse et séparé sur $\overline{\boldsymbol{R}}$ et $\boldsymbol{Z}$ un anneau. Un préfaisceau $\mathscr{P}$ de $\boldsymbol{Z}$-modules sur $\mathscr{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ étant un foncteur contravariant de $\mathscr{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ dans la catégorie $\mathrm{Mod}(\boldsymbol{Z})$ des $\boldsymbol{Z}$-modules, la correspondance

$$\mathrm{End}_{\mathscr{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}}(\mathscr{U}) \ni \phi \longmapsto \mathscr{P}(\phi) \in \mathrm{End}_{\mathrm{Mod}(\boldsymbol{Z})}(\mathscr{P}(\mathscr{U}))$$

définit pour chaque $\mathscr{U} \in \mathscr{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ un morphisme de groupes

$$\mathscr{P}(\_) : \big(\mathrm{Iso}_{\mathscr{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}}(\mathscr{U})\big)^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Iso}_{\mathrm{Mod}(\boldsymbol{Z})}(\mathscr{P}(\mathscr{U}))$$

et donc une structure de $\boldsymbol{Z}\big[\mathscr{G}^{\dagger}_{\mathscr{X}}(\mathscr{U})\big]$-module sur $\mathscr{P}(\mathscr{U})$. La fonctorialité de $\mathscr{P}$ donne alors la commutativité des diagrammes

$$\begin{tikzcd} \mu(\mathscr{U}) : \mathscr{G}^{\dagger}_{\mathscr{X}}(\mathscr{U}) \arrow[d, "\mathscr{G}^{\dagger}_{\mathscr{X}}(\phi)"'] & \times & \mathscr{P}(\mathscr{U}) \arrow[d, "\mathscr{P}(\phi)"'] \arrow[r] & \mathscr{P}(\mathscr{U}) \arrow[d, "\mathscr{P}(\phi)"] \\ \mu(\mathscr{U}') : \mathscr{G}^{\dagger}_{\mathscr{X}}(\mathscr{U}') & \times & \mathscr{P}(\mathscr{U}') \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\bigoplus"] & \mathscr{P}(\mathscr{U}') \end{tikzcd}$$

avec $\mu(\mathscr{U})(\theta,m) = \mathscr{P}(\theta)(m)$, quels que soient $\mathscr{U}' \subseteq \mathscr{U}$ et $\phi \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}}(\mathscr{U}',\mathscr{U})$. La famille des $\mu(\mathscr{U})$ définit donc une structure de $\mathscr{G}^{\dagger}_{\mathscr{X}}$-module sur $\mathscr{P}$, on l'appellera « *la structure de* $\mathscr{G}^{\dagger}_{\mathscr{X}}$*-module canonique de* $\mathscr{P}$ ».

4.2.2. Dorénavant pour chaque $\mathscr{U} \in \mathscr{X}^\dagger_{\rm inf}$ la restriction $\mathscr{R}^{\mathscr{X}^\dagger_{\rm inf}}_{\mathscr{Mer}(\mathscr{U})}(\mathscr{F})$ d'un (pré)faisceau $\mathscr{F}$ sur $\mathscr{X}^\dagger_{\rm inf}$ au sous-site $\mathscr{Mer}(\mathscr{U})$ sera considérée munie de sa structure canonique de $\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{Mer}(\mathscr{U})}$-module. Le procédé décrit dans 3.3.3 donne alors un foncteur de restriction

$$\mathscr{R}_{\mathscr{U}} : \mathrm{Mod}_{\mathscr{X}^\dagger_{\rm inf}}(\boldsymbol{Z}) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}_{\overline{\mathscr{U}}}(\boldsymbol{Z},\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{U}})$$

où $\mathrm{Mod}_{\overline{\mathscr{U}}}(\boldsymbol{Z},\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{U}})$ désigne la catégorie des faisceaux de $\boldsymbol{Z}$-modules sur $\overline{\mathscr{U}}$ munis d'une action de $\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{U}}$ par isomorphismes de $\boldsymbol{Z}$-modules.

4.2.3. Théorème. *Soient $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ un schéma **affine** lisse, $\mathscr{X}^\dagger_{\rm inf}$ son site de relèvements affines très lisses et $\mathscr{U} \in \mathscr{X}^\dagger_{\rm inf}$ tel que $\overline{\mathscr{U}} = \overline{\boldsymbol{X}}$. Les foncteurs suivants sont des équivalences de catégories.*

$$\begin{array}{lll}
\text{a)}\ \mathscr{R}^{\mathscr{X}^\dagger_{\rm inf}}_{\mathscr{Mer}(\mathscr{U})} : \mathrm{Mod}_{\mathscr{X}^\dagger_{\rm inf}}(\boldsymbol{Z}) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}_{\mathscr{Mer}(\mathscr{U})}(\boldsymbol{Z},\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{Mer}(\mathscr{U})}) & \text{(restriction)} \\
\text{b)}\ \mathscr{R}^{\mathscr{Mer}(\mathscr{U})}_{\mathscr{U}} : \mathrm{Mod}_{\mathscr{Mer}(\mathscr{U})}(\boldsymbol{Z},\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{Mer}(\mathscr{U})}) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}_{\overline{\mathscr{U}}}(\boldsymbol{Z},\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{U}}) & \text{(analogue de } \mathscr{R}_{\mathscr{U}}) \\
\text{c)}\ \qquad \mathscr{R}_{\mathscr{U}} : \mathrm{Mod}_{\mathscr{X}^\dagger_{\rm inf}}(\boldsymbol{Z}) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}_{\overline{\mathscr{U}}}(\boldsymbol{Z},\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{U}}) & \text{(cf. 3.3.3)}
\end{array}$$

Démonstration

a) Notons $\langle \mathscr{Mer}(\mathscr{U})\rangle$ le sous-site **plein** de $\mathscr{X}^\dagger_{\rm inf}$ dont les objets sont ceux de $\mathscr{Mer}(\mathscr{U})$. Le foncteur qui associe à un préfaisceau sur $\mathscr{X}^\dagger_{\rm inf}$ sa restriction à $\langle \mathscr{Mer}(\mathscr{U})\rangle$:

$$\mathscr{R}^{\mathscr{X}^\dagger_{\rm inf}}_{\langle \mathscr{Mer}(\mathscr{U})\rangle} : \mathrm{Préf}_{\mathscr{X}^\dagger_{\rm inf}}(\boldsymbol{Z}) \rightsquigarrow \mathrm{Préf}_{\langle \mathscr{Mer}(\mathscr{U})\rangle}(\boldsymbol{Z})$$

est une équivalence de catégories puisque l'inclusion $\langle \mathscr{Mer}(\mathscr{U})\rangle \subseteq \mathscr{X}^\dagger_{\rm inf}$ est elle-même un équivalence de catégories. Les remarques 4.2.1 donnent le foncteur

$$\mathscr{R}^{\langle \mathscr{Mer}(\mathscr{U})\rangle}_{\mathscr{Mer}(\mathscr{U})} : \mathrm{Préf}_{\langle \mathscr{Mer}(\mathscr{U})\rangle}(\boldsymbol{Z}) \rightsquigarrow \mathrm{Préf}_{\mathscr{Mer}(\mathscr{U})}\big(\boldsymbol{Z},\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{Mer}(\mathscr{U})}\big) \tag{$\diamond$}$$

où $\mathrm{Préf}_{\mathscr{Mer}(\mathscr{U})}\big(\boldsymbol{Z},\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{Mer}(\mathscr{U})}\big)$ est la catégorie de préfaisceaux de $\boldsymbol{Z}$-modules sur $\mathscr{Mer}(\mathscr{U})$ munis d'une action à gauche de $\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{Mer}(\mathscr{U})}$ par des isomorphismes de $\boldsymbol{Z}$-modules.

Montrons que $(\diamond)$ est une équivalence de catégories. Les catégories $\langle \mathscr{Mer}(\mathscr{U})\rangle$ et $\mathscr{Mer}(\mathscr{U})$ ont les mêmes objets et lorsque $\mathscr{U}',\mathscr{U}'' \in \mathscr{Mer}(\mathscr{U})$ avec $\mathscr{U}'' \subseteq \mathscr{U}'$, l'ensemble $\mathrm{Mor}_{\mathscr{Mer}(\mathscr{U})}(\mathscr{U}'',\mathscr{U}')$ est un singleton et l'on a la **bijection** de 4.1.3-b :

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Mor}_{\mathscr{Mer}(\mathscr{U})}(\mathscr{U}'',\mathscr{U}') \times \mathrm{End}_{\mathscr{X}^\dagger_{\rm inf}}(\mathscr{U}'') & \longrightarrow & \mathrm{Mor}_{\mathscr{X}^\dagger_{\rm inf}}(\mathscr{U}'',\mathscr{U}') \\
\varPhi \qquad\qquad\qquad \theta & \longmapsto & \varPhi\circ\theta
\end{array} \tag{$\ddagger$}$$

Il est donc naturel de prolonger un préfaisceau $\mathscr{P} : \mathscr{Mer}(\mathscr{U}) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}(\boldsymbol{Z})$ muni d'une structure de $\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{Mer}(\mathscr{U})}$-module en une correspondance $\widetilde{\mathscr{P}} : \langle \mathscr{Mer}(\mathscr{U})\rangle \rightsquigarrow \mathrm{Mod}(\boldsymbol{Z})$ qui coïncide avec $\mathscr{P}$ sur $\mathscr{Mer}(\mathscr{U})$ et qui à $\phi \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{X}^\dagger_{\rm inf}}(\mathscr{U}'',\mathscr{U}')$ associe

$$\widetilde{\mathscr{P}}(\phi) \in \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Z}}\big(\mathscr{P}(\mathscr{U}'),\mathscr{P}(\mathscr{U}'')\big)\,, \quad \widetilde{\mathscr{P}}(\phi)(\_) = \mu(\mathscr{U}'')(\theta,\mathscr{P}(\varPhi)(\_))\,,$$

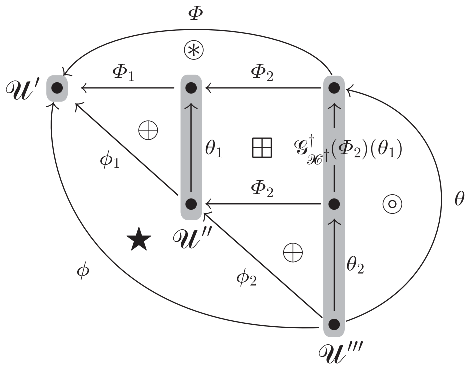
où $\phi = \varPhi\circ\theta$ est la décomposition $(\ddagger)$ et $\mu(\mathscr{U}'')$ est l'action de $\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{Mer}(\mathscr{U})}(\mathscr{U}'')$ sur $\mathscr{P}(\mathscr{U}'')$.

• *La correspondance $\widetilde{\mathscr{P}}$ est un préfaisceau sur $\langle \mathscr{M}\!er(\mathscr{U}) \rangle$.* (‡‡)

En effet, étant donnés des morphismes $\mathscr{U}' \xleftarrow{\phi_1} \mathscr{U}'' \xleftarrow{\phi_2} \mathscr{U}'''$ de composée $\phi = \phi_1 \circ \phi_2$ nous devons montrer que $\widetilde{\mathscr{P}}(\phi) = \widetilde{\mathscr{P}}(\phi_2) \circ \widetilde{\mathscr{P}}(\phi_1)$. Soient $\phi_i = \Phi_i \circ \theta_i$ les décompositions de (‡), l'égalité :

$$\phi = \Phi_1 \circ \theta_1 \circ \Phi_2 \circ \theta_2 = \big(\Phi_1 \circ \Phi_2\big) \circ \big(\mathscr{G}^{\dagger}_{\mathscr{X}}(\Phi_2)(\theta_1) \circ \theta_2\big) = \Phi \circ \theta$$

résulte alors de 4.1.3-c et nous avons le diagramme commutatif de morphismes de $\mathscr{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$



($\mathscr{D}$)

dont les sous-diagrammes suivants restent commutatifs après application de $\widetilde{\mathscr{P}}$:

- Les triangles $\oplus$ et le triangle extérieur : par la définition même de $\widetilde{\mathscr{P}}$.
- Le triangle $\circledast$: puisque c'est un triangle commutatif de $\mathscr{M}\!er(\mathscr{U})$.
- Le triangle $\circledcirc$: puisque $\widetilde{\mathscr{P}}(\_) : \mathrm{Iso}_{\mathscr{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}}(\mathscr{U}''')^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Iso}_{\boldsymbol{Z}}(\mathscr{P}(\mathscr{U}'''))$ est un morphisme de groupes.
- Le carré $\boxplus$: puisque $\mathscr{P}$ est un $\mathscr{G}^{\dagger}_{\mathscr{M}\!er(\mathscr{U})}$-module. En effet, dans ce cas le diagramme

$$\begin{array}{rcccl} \mu(\mathscr{U}'') : \mathscr{G}^{\dagger}_{\mathscr{X}}(\mathscr{U}'') & \times & \mathscr{P}(\mathscr{U}'') & \longrightarrow & \mathscr{P}(\mathscr{U}'') \\ {\scriptstyle \mathscr{G}^{\dagger}_{\mathscr{X}}(\Phi_2)}\big\downarrow & & {\scriptstyle \mathscr{P}(\Phi_2)}\big\downarrow & \bigoplus & \big\downarrow{\scriptstyle \mathscr{P}(\Phi_2)} \\ \mu(\mathscr{U}''') : \mathscr{G}^{\dagger}_{\mathscr{X}}(\mathscr{U}''') & \times & \mathscr{P}(\mathscr{U}''') & \longrightarrow & \mathscr{P}(\mathscr{U}''') \end{array}$$

est commutatif, autrement dit pour tout $m \in \mathscr{P}(\mathscr{U}'')$, on a :

$$\begin{aligned}\big(\mathscr{P}(\Phi_2) \circ \widetilde{\mathscr{P}}(\theta_1)\big)(m) = \mathscr{P}(\Phi_2)\big(\mu(\mathscr{U}'')(\theta_1, m)\big) &= \mu(\mathscr{U}''')\big(\mathscr{G}^{\dagger}_{\mathscr{X}}(\Phi_2)(\theta_1), \mathscr{P}(\Phi_2)(m)\big) \\ &= \Big(\widetilde{\mathscr{P}}\big(\mathscr{G}^{\dagger}_{\mathscr{X}}(\Phi_2)(\theta_1)\big) \circ \mathscr{P}(\Phi_2)\Big)(m)\end{aligned}$$

La commutativité de $\bigstar$ est alors conséquence de toutes ces commutativités et l'assertion (‡‡) est prouvée.

Ceci étant, un morphisme de préfaisceaux de $\mathscr{G}^{\dagger}_{\mathscr{M}\!er(\mathscr{U})}$-modules $\alpha : \mathscr{P}_1 \to \mathscr{P}_2$ est, par construction, automatiquement un morphisme de préfaisceaux $\alpha : \widetilde{\mathscr{P}}_1 \to \widetilde{\mathscr{P}}_2$. Le foncteur $\mathscr{P} \rightsquigarrow \widetilde{\mathscr{P}}$ est donc un inverse à droite et à gauche de $\mathscr{R}^{\langle \mathscr{M}\!er(\mathscr{U}) \rangle}_{\mathscr{M}\!er(\mathscr{U})}$ et ($\diamond$) est une équivalence de catégories.

Pour terminer, les restrictions de $\mathscr{R}_{\langle \mathscr{Mer}(\mathscr{U})\rangle}^{\mathscr{X}_{\mathrm{inf}}^{\dagger}}$ et $\mathscr{R}_{\mathscr{Mer}(\mathscr{U})}^{\langle \mathscr{Mer}(\mathscr{U})\rangle}$ aux catégories de faisceaux :

$$\begin{aligned}
\mathscr{R}_{\langle \mathscr{Mer}(\mathscr{U})\rangle}^{\mathscr{X}_{\mathrm{inf}}^{\dagger}} &: \mathrm{Mod}_{\mathscr{X}_{\mathrm{inf}}^{\dagger}}(\boldsymbol{Z}) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}_{\langle \mathscr{Mer}(\mathscr{U})\rangle}(\boldsymbol{Z}) \\
\mathscr{R}_{\mathscr{Mer}(\mathscr{U})}^{\langle \mathscr{Mer}(\mathscr{U})\rangle} &: \mathrm{Mod}_{\langle \mathscr{Mer}(\mathscr{U})\rangle}(\boldsymbol{Z}) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}_{\mathscr{Mer}(\mathscr{U})}(\boldsymbol{Z}, \mathscr{G}_{\mathscr{Mer}(\mathscr{U})}^{\dagger}) \\
(\widetilde{_}) &: \mathrm{Mod}_{\mathscr{Mer}(\mathscr{U})}(\boldsymbol{Z}, \mathscr{G}_{\mathscr{Mer}(\mathscr{U})}^{\dagger}) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}_{\langle \mathscr{Mer}(\mathscr{U})\rangle}(\boldsymbol{Z})
\end{aligned}$$

sont bien définies d'après 3.3.2-b et sont donc aussi des équivalences de catégories.

b) D'après 3.3-b.

c) Conséquence de (a) et (b). ■

4.3 Catégorie de faisceaux d'algèbres sur $\mathscr{X}_{\mathrm{inf}}^{\dagger}$

4.3.1. Préfaisceaux de $\boldsymbol{Z}$-algèbres. Soient $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ un schéma lisse et séparé sur $\overline{\boldsymbol{R}}$ et $\boldsymbol{Z}$ un anneau. Un préfaisceau $\mathscr{A}$ de $\boldsymbol{Z}$-algèbres sur $\mathscr{X}_{\mathrm{inf}}^{\dagger}$ est un foncteur contravariant de $\mathscr{X}_{\mathrm{inf}}^{\dagger}$ dans la catégorie $\mathrm{Alg}(\boldsymbol{Z})$ des $\boldsymbol{Z}$-algèbres, la correspondance

$$\mathrm{End}_{\mathscr{X}_{\mathrm{inf}}^{\dagger}}(\mathscr{U}) \ni \phi \longmapsto \mathscr{A}(\phi) \in \mathrm{End}_{\mathrm{Alg}(\boldsymbol{Z})}(\mathscr{A}(\mathscr{U}))$$

définit pour chaque $\mathscr{U} \in \mathscr{X}_{\mathrm{inf}}^{\dagger}$ un morphisme de groupes

$$\mathscr{A}(\_) : \big(\mathrm{Iso}_{\mathscr{X}_{\mathrm{inf}}^{\dagger}}(\mathscr{U})\big)^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathrm{Iso}_{\mathrm{Alg}(\boldsymbol{Z})}(\mathscr{A}(\mathscr{U}))$$

et la $\boldsymbol{Z}$-algèbre $\mathscr{A}(\mathscr{U})$ est munie d'une action de $\mathscr{G}_{\mathscr{X}}^{\dagger}(\mathscr{U})$ par des automorphismes de $\boldsymbol{Z}$-algèbre, ce qui équivaut à la donnée de l'algèbre produit semi-direct de $\mathscr{A}(\mathscr{U})$ par $\mathscr{G}_{\mathscr{X}}^{\dagger}(\mathscr{U})$, notée $\mathscr{A}(\mathscr{U}) \rtimes \mathscr{G}_{\mathscr{X}}^{\dagger}(\mathscr{U})$, définie par

$$\begin{cases} \mathscr{A}(\mathscr{U}) \rtimes \mathscr{G}_{\mathscr{X}}^{\dagger}(\mathscr{U}) = \bigoplus_{\theta \in \mathscr{G}_{\mathscr{X}}^{\dagger}(\mathscr{U})} \mathscr{A}(\mathscr{U}) \cdot \delta_\theta \\ \quad (a_1 \cdot \delta_{\theta_1})(a_2 \cdot \delta_{\theta_2}) = \big(a_1 \theta_1(a_2)\big) \cdot \delta_{\theta_1 \theta_2} \end{cases}$$

Notons $\mu(\mathscr{U}) : \mathscr{G}_{\mathscr{X}}^{\dagger}(\mathscr{U}) \times \mathscr{A}(\mathscr{U}) \to \mathscr{A}(\mathscr{U})$ l'application $\mu(\mathscr{U})(\theta, a) = \mathscr{A}(\theta)(a)$. La fonctorialité de $\mathscr{A}$ donne alors la commutativité des diagrammes

$$\begin{array}{ccccc}
\mu(\mathscr{U}) : & \mathscr{G}_{\mathscr{X}}^{\dagger}(\mathscr{U}) \times \mathscr{A}(\mathscr{U}) & \longrightarrow & \mathscr{A}(\mathscr{U}) \\
& {\scriptstyle \mathscr{G}_{\mathscr{X}}^{\dagger}(\phi)} \big\downarrow \qquad {\scriptstyle \mathscr{A}(\phi)} \big\downarrow & \bigoplus & \big\downarrow {\scriptstyle \mathscr{A}(\phi)} \\
\mu(\mathscr{U}') : & \mathscr{G}_{\mathscr{X}}^{\dagger}(\mathscr{U}') \times \mathscr{A}(\mathscr{U}') & \longrightarrow & \mathscr{A}(\mathscr{U}')
\end{array}$$

quels que soient $\mathscr{U}' \subseteq \mathscr{U}$ et $\phi \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{X}_{\mathrm{inf}}^{\dagger}}(\mathscr{U}', \mathscr{U})$. La famille des $\mu(\mathscr{U})$ définit une « *action* » de $\mathscr{G}_{\mathscr{X}}^{\dagger}$ sur $\mathscr{A}$ par automorphismes de $\boldsymbol{Z}$-algèbres qu'on appellera « *l'action canonique de* $\mathscr{G}_{\mathscr{X}}^{\dagger}$ *sur* $\mathscr{A}$ ».

4.3.2. Dorénavant pour chaque $\mathscr{U} \in \mathscr{X}^\dagger_{\text{inf}}$, la restriction $\mathscr{R}^{\mathscr{X}^\dagger_{\text{inf}}}_{\mathscr{Mer}(\mathscr{U})}(\mathscr{A})$ d'un (pré)faisceau de $\boldsymbol{Z}$ algèbres $\mathscr{A}$ sur $\mathscr{X}^\dagger_{\text{inf}}$ au sous-site $\mathscr{Mer}(\mathscr{U})$ sera considérée munie de l'action canonique $\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{Mer}(\mathscr{U})}$ par automorphismes de $\boldsymbol{Z}$-algèbres. Le procédé décrit dans 3.3.3 donne alors un foncteur de restriction

$$\mathscr{R}_{\mathscr{U}} : \text{Alg}_{\mathscr{X}^\dagger_{\text{inf}}}(\boldsymbol{Z}) \rightsquigarrow \text{Alg}_{\overline{\mathscr{U}}}(\boldsymbol{Z}, \mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{U}})$$

où $\text{Alg}_{\mathscr{X}^\dagger_{\text{inf}}}(\boldsymbol{Z})$ désigne la catégorie des faisceaux de $\boldsymbol{Z}$-algèbres sur $\mathscr{X}^\dagger_{\text{inf}}$ et $\text{Alg}_{\overline{\mathscr{U}}}(\boldsymbol{Z}, \mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{U}})$ celle des faisceaux de $\boldsymbol{Z}$-algèbres sur $\overline{\mathscr{U}}$ munis d'une action de $\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{U}}$ par automorphismes de $\boldsymbol{Z}$-algèbres. Le théorème suivant est l'analogue de 4.2.3 et se démontre de la même manière.

4.3.3. Théorème. *Soient $(\overline{\boldsymbol{X}}; \mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ un schéma* ***affine*** *lisse, $\mathscr{X}^\dagger_{\text{inf}}$ son site de relèvements affines très lisses et $\mathscr{U} \in \mathscr{X}^\dagger_{\text{inf}}$ tel que $\overline{\mathscr{U}} = \overline{\boldsymbol{X}}$. Les foncteurs suivants sont des équivalences de catégories.*

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \mathscr{R}^{\mathscr{X}^\dagger_{\text{inf}}}_{\mathscr{Mer}(\mathscr{U})} : \text{Alg}_{\mathscr{X}^\dagger_{\text{inf}}}(\boldsymbol{Z}) \rightsquigarrow \text{Alg}_{\mathscr{Mer}(\mathscr{U})}(\boldsymbol{Z}, \mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{Mer}(\mathscr{U})}) \\ \text{b)} & \mathscr{R}^{\mathscr{Mer}(\mathscr{U})}_{\mathscr{U}} : \text{Alg}_{\mathscr{Mer}(\mathscr{U})}(\boldsymbol{Z}, \mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{Mer}(\mathscr{U})}) \rightsquigarrow \text{Alg}_{\overline{\mathscr{U}}}(\boldsymbol{Z}, \mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{U}}) \\ \text{c)} & \mathscr{R}_{\mathscr{U}} : \text{Alg}_{\mathscr{X}^\dagger_{\text{inf}}}(\boldsymbol{Z}) \rightsquigarrow \text{Alg}_{\overline{\mathscr{U}}}(\boldsymbol{Z}, \mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{U}}) \end{array}$$

4.3.4. Sites annelés $(\mathscr{X}^\dagger_{\text{inf}}; \mathscr{O}_{\mathscr{X}^\dagger_{\text{inf}}})$, $(\mathscr{Mer}(\mathscr{U}); \mathscr{O}^\dagger_{\mathscr{Mer}(\mathscr{U})})$, $(\overline{\mathscr{U}}; \mathscr{O}^\dagger_{\mathscr{U}})$. Le foncteur de la catégorie $\mathscr{X}^\dagger_{\text{inf}}$ vers la catégorie des $\boldsymbol{R}$-algèbres f.c.t.f. très lisses, qui fait correspondre à $\mathscr{U}$ son algèbre associée $\boldsymbol{A}(\mathscr{U})^\dagger$ et à un morphisme $\Phi : \mathscr{V} \to \mathscr{U}$ le morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\phi : \boldsymbol{A}(\mathscr{U})^\dagger \to \boldsymbol{A}(\mathscr{V})^\dagger$ associé, est un préfaisceau sur $\mathscr{X}^\dagger_{\text{inf}}$ qu'on notera $\mathscr{O}^\dagger_{\mathscr{X}}$. Pour tout $\mathscr{U} \in \mathscr{X}^\dagger_{\text{inf}}$, la restriction de $\mathscr{O}^\dagger_{\mathscr{X}}$ à $\mathscr{Mer}(\mathscr{U})$, notée $\mathscr{O}^\dagger_{\mathscr{Mer}(\mathscr{U})}$, n'est autre que le **faisceau** structural du schéma de Meredith $(\overline{\mathscr{U}}, \mathscr{O}^\dagger_{\mathscr{U}})$ restreint à la catégorie des ouverts affines de $\overline{\mathscr{U}}$ (*cf.* 3.3.1). Le préfaisceau $\mathscr{O}^\dagger_{\mathscr{X}}$ est donc un faisceau sur $\mathscr{X}^\dagger_{\text{inf}}$ d'après 3.3.2. Les faisceaux $\mathscr{O}^\dagger_{\mathscr{Mer}(\mathscr{U})}$ et $\mathscr{O}^\dagger_{\mathscr{X}}$ sont « *les faisceaux structuraux des sites $\mathscr{Mer}(\mathscr{U})$ et $\mathscr{X}^\dagger_{\text{inf}}$* » respectivement.

4.4 Catégorie de faisceaux de $\mathscr{A}$-modules sur $\mathscr{X}^\dagger_{\text{inf}}$

La section 4.2 était consacrée à l'étude de la catégorie des (pré)faisceaux de $\underline{\underline{\boldsymbol{Z}}}_{\mathscr{X}}$-modules sur $\mathscr{X}^\dagger_{\text{inf}}$, où $\underline{\underline{\boldsymbol{Z}}}_{\mathscr{X}}$ désigne le faisceau « *constant* » sur $\mathscr{X}^\dagger_{\text{inf}}$ de fibre l'anneau $\boldsymbol{Z}$. Nous indiquons maintenant comment les constructions et résultats de 4.2 se généralisent au cadre de la catégorie des $\mathscr{A}$-modules sur $\mathscr{X}^\dagger_{\text{inf}}$, où $\mathscr{A}$ désigne un faisceau d'algèbres sur $\mathscr{X}^\dagger_{\text{inf}}$.

4.4.1. Préfaisceaux de $\mathscr{A}$-modules. Soit $\mathscr{A}$ un faisceau de $\boldsymbol{Z}$-algèbres sur $\mathscr{X}^\dagger_{\text{inf}}$. Un faisceau de $\mathscr{A}$-modules est la donnée d'un faisceau de groupes abéliens $\mathscr{M}$ sur $\mathscr{X}^\dagger_{\text{inf}}$ et pour chaque $\mathscr{U} \in \mathscr{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ d'une structure de $\mathscr{A}(\mathscr{U})$-module sur $\mathscr{M}(\mathscr{U})$ telle que les diagrammes

$$\begin{array}{ccccc} \beta(\mathscr{U}) : \mathscr{A}(\mathscr{U}) & \times & \mathscr{M}(\mathscr{U}) & \longrightarrow & \mathscr{M}(\mathscr{U}) \\ {\scriptstyle \mathscr{A}(\phi)}\big\downarrow & & {\scriptstyle \mathscr{M}(\phi)}\big\downarrow & \bigoplus & \big\downarrow{\scriptstyle \mathscr{M}(\phi)} \\ \beta(\mathscr{U}') : \mathscr{A}(\mathscr{U}') & \times & \mathscr{M}(\mathscr{U}') & \longrightarrow & \mathscr{M}(\mathscr{U}') \end{array} \qquad (*)$$

où $\beta(\mathscr{U})(a,m) = a{\cdot}m$, sont commutatifs quels que soient $\mathscr{U}' \subseteq \mathscr{U}$ et $\phi \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}}(\mathscr{U}',\mathscr{U})$. D'autre part, $\mathscr{A}$ et $\mathscr{M}$ étant des préfaisceaux sur $\mathscr{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$, ils sont munis d'actions de $\mathscr{G}^{\dagger}_{\mathscr{X}}$ respectivement par automorphismes de $\boldsymbol{Z}$-algèbres et par isomorphismes de $\mathbb{Z}$-modules, la compatibilité entre ces actions et la structure de $\mathscr{A}$-module est donnée par l'égalité :

$$\theta(a{\cdot}m) = \theta(a){\cdot}\theta(m)$$

qui résulté de la commutativité de $(*)$ pour $\phi = \theta \in \mathrm{End}_{\mathscr{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}}(\mathscr{U})$, $a \in \mathscr{A}(\mathscr{U})$ et $m \in \mathscr{M}(\mathscr{U})$. Il s'ensuit que le $\mathscr{A}$-module $\mathscr{M}$ vient muni d'une structure de $\mathscr{A} \rtimes \mathscr{G}^{\dagger}_{\mathscr{X}}$-module canonique.

4.4.2. Dorénavant pour chaque $\mathscr{U} \in \mathscr{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ la restriction $\mathscr{R}^{\mathscr{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}}_{\mathscr{Mer}(\mathscr{U})}(\mathscr{M})$ d'un $\mathscr{A}$-module $\mathscr{M}$ sur $\mathscr{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ au sous-site $\mathscr{Mer}(\mathscr{U})$ sera considérée munie de sa structure canonique de $\mathscr{R}^{\mathscr{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}}_{\mathscr{Mer}(\mathscr{U})}(\mathscr{A}) \rtimes \mathscr{G}^{\dagger}_{\mathscr{Mer}(\mathscr{U})}$-modules. Le procédé décrit dans 3.3.3 donne alors un foncteur de restriction

$$\mathscr{R}_{\mathscr{U}} : \mathrm{Mod}_{\mathscr{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}}(\mathscr{A}) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}_{\overline{\mathscr{U}}}\big(\mathscr{R}_{\mathscr{U}}(\mathscr{A}) \rtimes \mathscr{G}^{\dagger}_{\mathscr{U}}\big)$$

Le théorème suivant est l'analogue de 4.2.3 et se démontre de la même manière.

4.4.3. Théorème. *Soient $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ un schéma **affine** lisse, $\mathscr{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ son site de relèvements affines très lisses et $\mathscr{U} \in \mathscr{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ tel que $\overline{\mathscr{U}} = \overline{\boldsymbol{X}}$. Les foncteurs suivants sont des équivalences de catégories.*

a) $\mathscr{R}^{\mathscr{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}}_{\mathscr{Mer}(\mathscr{U})} : \mathrm{Mod}_{\mathscr{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}}(\mathscr{A}) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}_{\mathscr{Mer}(\mathscr{U})}\big(\mathscr{R}^{\mathscr{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}}_{\mathscr{Mer}(\mathscr{U})}(\mathscr{A}) \rtimes \mathscr{G}^{\dagger}_{\mathscr{Mer}(\mathscr{U})}\big)$
b) $\mathscr{R}^{\mathscr{Mer}(\mathscr{U})}_{\mathscr{U}} : \mathrm{Mod}_{\mathscr{Mer}(\mathscr{U})}\big(\mathscr{R}^{\mathscr{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}}_{\mathscr{Mer}(\mathscr{U})}(\mathscr{A}) \rtimes \mathscr{G}^{\dagger}_{\mathscr{Mer}(\mathscr{U})}\big) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}_{\overline{\mathscr{U}}}\big(\mathscr{R}_{\mathscr{U}}(\mathscr{A}) \rtimes \mathscr{G}^{\dagger}_{\mathscr{U}}\big)$
c) $\mathscr{R}_{\mathscr{U}} : \mathrm{Mod}_{\mathscr{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}}(\mathscr{A}) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}_{\overline{\mathscr{U}}}\big(\mathscr{R}_{\mathscr{U}}(\mathscr{A}) \rtimes \mathscr{G}^{\dagger}_{\mathscr{U}}\big)$

4.4.4. Corollaire. *Soient $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ un schéma **affine** lisse, $\mathscr{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ son site de relèvements affines très lisses et $\mathscr{U} \in \mathscr{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ tel que $\overline{\mathscr{U}} = \overline{\boldsymbol{X}}$. On a des équivalences de catégories de $\mathscr{O}$-modules :*

$$\mathrm{Mod}_{\mathscr{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}}\big(\mathscr{O}^{\dagger}_{\mathscr{X}}\big) \xrightarrow[\simeq]{\mathscr{R}^{\mathscr{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}}_{\mathscr{Mer}(\mathscr{U})}} \mathrm{Mod}_{\mathscr{Mer}(\mathscr{U})}\big(\mathscr{O}^{\dagger}_{\mathscr{Mer}(\mathscr{U})} \rtimes \mathscr{G}^{\dagger}_{\mathscr{Mer}(\mathscr{U})}\big) \xrightarrow[\simeq]{\mathscr{R}^{\mathscr{Mer}(\mathscr{U})}_{\overline{\mathscr{U}}}} \mathrm{Mod}_{\overline{\mathscr{U}}}\big(\mathscr{O}^{\dagger}_{\mathscr{U}} \rtimes \mathscr{G}^{\dagger}_{\mathscr{U}}\big)$$

§ 5. Opérateurs différentiels †-adiques

5.1 Le faisceau $\mathscr{H}om_{\boldsymbol{Z}}(\_,\_)$

Soit $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ un schéma lisse et séparé sur $\overline{\boldsymbol{R}}$ de site de relèvements affines très lisses $\mathscr{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$. Étant donnés $\mathscr{E},\mathscr{F}\in \mathrm{Mod}_{\mathscr{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}}(\boldsymbol{Z})$, on pose pour chaque $\mathscr{U}\in\mathscr{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$

$$\mathscr{H}om_{\boldsymbol{Z}}(\mathscr{E},\mathscr{F})(\mathscr{U}) := \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Z}}\big(\mathscr{R}_{\overline{\mathscr{U}}}(\mathscr{E}),\mathscr{R}_{\overline{\mathscr{U}}}(\mathscr{F})\big) \tag{$\diamond_1$}$$

où le terme de droite désigne le $\boldsymbol{Z}$-module des morphismes de faisceaux entre deux faisceaux de $\boldsymbol{Z}$-modules sur l'espace topologique $\overline{\mathscr{U}}$.

Pour $\mathscr{V}\in\mathscr{M}er(\mathscr{U})$ et $\{\Phi\}=\mathrm{Mor}_{\mathscr{M}er(\mathscr{U})}(\mathscr{V},\mathscr{U})$, on notera

$$\mathscr{H}om_{\boldsymbol{Z}}(\mathscr{E},\mathscr{F})(\Phi) : \mathscr{H}om_{\boldsymbol{Z}}(\mathscr{E},\mathscr{F})(\mathscr{U}) \longrightarrow \mathscr{H}om_{\boldsymbol{Z}}(\mathscr{E},\mathscr{F})(\mathscr{V}) \tag{$\diamond_2$}$$

le morphisme canonique de restriction

$$\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Z}}\big(\mathscr{R}_{\overline{\mathscr{U}}}(\mathscr{E}),\mathscr{R}_{\overline{\mathscr{U}}}(\mathscr{F})\big) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Z}}\big(\mathscr{R}_{\overline{\mathscr{U}}}(\mathscr{E})|_{\overline{\mathscr{V}}},\mathscr{R}_{\overline{\mathscr{U}}}(\mathscr{F})|_{\overline{\mathscr{V}}}\big) = \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Z}}\big(\mathscr{R}_{\overline{\mathscr{V}}}(\mathscr{E}),\mathscr{R}_{\overline{\mathscr{V}}}(\mathscr{F})\big)$$

Ceci étant, si $\theta\in\mathrm{Iso}_{\mathscr{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}}(\mathscr{V})$ et $\alpha\in\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Z}}\big(\mathscr{R}_{\overline{\mathscr{V}}}(\mathscr{E}),\mathscr{R}_{\overline{\mathscr{V}}}(\mathscr{F})\big)$, la famille des diagrammes commutatifs pour $\overline{W}'\subseteq\overline{W}\subseteq\overline{V}$:

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathscr{R}_{\mathscr{V}}(\mathscr{E})(\overline{W}) & \xrightarrow{\theta^{-1}|_{\overline{W}}} & \mathscr{R}_{\mathscr{V}}(\mathscr{E})(\overline{W}) & \xrightarrow{\alpha(\overline{W})} & \mathscr{R}_{\mathscr{V}}(\mathscr{F})(\overline{W}) & \xrightarrow{\theta|_{\overline{W}}} & \mathscr{R}_{\mathscr{V}}(\mathscr{F})(\overline{W}) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathscr{R}_{\mathscr{V}}(\mathscr{E})(\overline{W}') & \xrightarrow{\theta^{-1}|_{\overline{W}'}} & \mathscr{R}_{\mathscr{V}}(\mathscr{E})(\overline{W}') & \xrightarrow{\alpha(\overline{W}')} & \mathscr{R}_{\mathscr{V}}(\mathscr{F})(\overline{W}') & \xrightarrow{\theta|_{\overline{W}'}} & \mathscr{R}_{\mathscr{V}}(\mathscr{F})(\overline{W})
\end{array}$$

où les carrés de droite et gauche font référence à la structure de $\mathscr{G}^{\dagger}_{\mathscr{V}}$-module de $\mathscr{R}_{\overline{\mathscr{V}}}(\mathscr{E})$ et $\mathscr{R}_{\overline{\mathscr{V}}}(\mathscr{F})$, définit un morphisme de faisceaux que nous noterons $\theta(\alpha):\mathscr{R}_{\overline{\mathscr{V}}}(\mathscr{E})\to\mathscr{R}_{\overline{\mathscr{V}}}(\mathscr{F})$. Le groupe $\mathrm{Iso}_{\mathscr{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}}(\mathscr{V})$ agit de cette manière sur $\mathscr{H}om_{\boldsymbol{Z}}\big(\mathscr{E},\mathscr{F}\big)(\mathscr{V})$ et l'on note

$$\mathscr{H}om_{\boldsymbol{Z}}(\mathscr{E},\mathscr{F})(\theta) : \mathscr{H}om_{\boldsymbol{Z}}(\mathscr{E},\mathscr{F})(\mathscr{V}) \to \mathscr{H}om_{\boldsymbol{Z}}(\mathscr{E},\mathscr{F})(\mathscr{V}) \tag{$\diamond_3$}$$

l'application correspondante à $\theta\in\mathrm{Iso}_{\mathscr{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}}(\mathscr{V})$.

Enfin, si $\phi\in\mathrm{Mor}_{\mathscr{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}}(\mathscr{V},\mathscr{U})$ est de décomposition canonique $\Phi\circ\theta$, on pose

$$\mathscr{H}om_{\boldsymbol{Z}}(\mathscr{E},\mathscr{F})(\phi) := \mathscr{H}om_{\boldsymbol{Z}}(\mathscr{E},\mathscr{F})(\theta)\circ\mathscr{H}om_{\boldsymbol{Z}}(\mathscr{E},\mathscr{F})(\Phi) \tag{$\diamond_4$}$$

5.1.1. Proposition. *Soient $\mathscr{E},\mathscr{F}\in\mathrm{Mod}_{\mathscr{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}}(\boldsymbol{Z})$.*

a) *Il existe un et un unique foncteur $\mathscr{H}om_{\boldsymbol{Z}}(\mathscr{E},\mathscr{F})$ sur $\mathscr{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ vérifiant les conditions $(\diamond)$. Ce foncteur est un faisceau sur $\mathscr{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$.*

b) *On a un isomorphisme naturel pour tout $\mathscr{U}\in\mathscr{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$:*

$$\mathscr{R}_{\overline{\mathscr{U}}}\left(\mathscr{H}om_{\boldsymbol{Z}}(\mathscr{E},\mathscr{F})\right)\big) \equiv \mathscr{H}om_{\boldsymbol{Z}}\left(\mathscr{R}_{\overline{\mathscr{U}}}(\mathscr{E}),\mathscr{R}_{\overline{\mathscr{U}}}(\mathscr{F})\right)$$

c) *Il existe une action canonique à droite et à gauche de* $\mathscr{G}^{\dagger}_{\mathscr{X}}$ *sur* $\mathscr{H}\!om_{\boldsymbol{Z}}(\mathscr{E},\mathscr{F})$ *dont la restriction à* $\mathscr{U}\in\mathscr{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ *donne les actions canoniques de* $\mathscr{G}^{\dagger}_{\mathscr{U}}$ *sur* $\mathscr{H}\!om_{\boldsymbol{Z}}\big(\mathscr{R}_{\overline{\mathscr{U}}}(\mathscr{E}),\mathscr{R}_{\overline{\mathscr{U}}}(\mathscr{F})\big)$.

d) *L'application* $\mathscr{G}^{\dagger}_{\mathscr{X}}\to\mathscr{E}\!nd_{\boldsymbol{R}}(\mathscr{O}^{\dagger}_{\mathscr{X}})$, $\theta\mapsto\theta\cdot\mathbf{1}$, *induite par l'action à gauche de* $\mathscr{G}^{\dagger}_{\mathscr{X}}$ *de* (c), *est un morphisme injectif de faisceaux sur* $\mathscr{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ *compatible au produit. Ce morphisme se prolonge d'une et une seule manière en un morphisme injectif de faisceaux d'algèbres*

$$\mathscr{O}^{\dagger}_{\mathscr{X}}\rtimes\mathscr{G}^{\dagger}_{\mathscr{X}}\longrightarrow\mathscr{E}\!nd_{\boldsymbol{R}}(\mathscr{O}^{\dagger}_{\mathscr{X}})$$

5.2 Faisceau d'opérateurs différentiels †-adiques sur $\mathscr{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$

5.2.1. Opérateurs différentiels. Soit $\boldsymbol{A}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre commutative avec identité multiplicative, identifions chaque $a\in\boldsymbol{A}$ avec l'endomorphisme linéaire de $\boldsymbol{A}$ défini par $x\mapsto ax$ et notons $[\lambda,\mu]=\lambda\circ\mu-\mu\circ\lambda$ pour tous $\lambda,\mu\in\mathrm{End}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A})$. Rappelons qu'on appelle « *opérateur différentiel* $\boldsymbol{R}$*-linéaire de degré* m *sur* $\boldsymbol{A}$ » tout $\lambda\in\mathrm{End}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A})$ vérifiant :

$$[\ldots[[\lambda,a_0],a_1],\ldots,a_m]=0\,,$$

pour tous $a_0,\ldots,a_m\in\boldsymbol{A}$. L'ensemble de ces opérateurs est noté $\mathscr{D}^m_{\boldsymbol{A}}$. On a $\boldsymbol{A}=\mathscr{D}^0_{\boldsymbol{A}}$ et $\mathscr{D}^m_{\boldsymbol{A}}\circ\mathscr{D}^n_{\boldsymbol{A}}\subseteq\mathscr{D}^m_{\boldsymbol{A}}$ et une suite croissante de sous-$\boldsymbol{A}$-bimodules de $\mathrm{End}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A})$:

$$\mathscr{D}^0_{\boldsymbol{A}}\subseteq\mathscr{D}^1_{\boldsymbol{A}}\subseteq\mathscr{D}^2_{\boldsymbol{A}}\subseteq\cdots\subseteq\mathrm{End}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A})$$

de réunion l'algèbre $\mathscr{D}_{\boldsymbol{A}}:=\bigcup_m\mathscr{D}^m_{\boldsymbol{A}}$.

5.2.2. Morphismes d'algèbres et opérateurs différentiels

Lemme. *Soient* $\phi:\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{A}$ *un endomorphisme de* $\boldsymbol{R}$-algèbre.

a) *Pour toute suite* $a_0,a_1,\ldots,a_m\in\boldsymbol{A}$ *on a :*

$$[\ldots[[\phi,a_0],a_1],\ldots,a_m]=\Big(\prod_{i=0}^m(\phi-\mathrm{id})(a_i)\Big)\,\phi\,.$$

b) *Si* $\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{A}$ *est nilpotent de degré de nilpotence* m *et que* $\phi=\mathrm{id}\mod\boldsymbol{I}$, *on a* $\phi\in\mathscr{D}^m_{\boldsymbol{A}}$.

c) *Soit* $\boldsymbol{A}^{\dagger}$ *une* $\boldsymbol{R}$-algèbre *f.c.t.f. L'action d'un automorphisme* $\theta\in\boldsymbol{G}^{\dagger}(\boldsymbol{A}^{\dagger})$ *sur* $\boldsymbol{A}^{\dagger}/\boldsymbol{I}^m\cdot\boldsymbol{A}^{\dagger}$ *est celle d'un opérateur différentiel (inversible) de degré au plus* m, *et ceci quel que soit* $m\in\mathbb{N}$.

Démonstration. Pour (a) il suffit de calculer $[\phi,a](b)$ pour tous $a,b\in\boldsymbol{A}$. On a :

$$[\phi,a](b)=\phi(ab)-a\phi(b)=\phi(a)\phi(b)-a\phi(b)=\big(\phi(a)-a\big)\phi(b)\,,$$

puisque ϕ est un endomorphisme d'anneau. Les autres assertions sont claires. ■

5.2.3. Opérateurs différentiels †-adiques sur un schéma de Meredith. Soit $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}})$ un schéma de Meredith. Une section φ de $\mathcal{E}nd_{\boldsymbol{R}}(\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}})$ au-dessus d'un ouvert $\overline{V}$ est une famille $\{\varphi(\overline{W})\in \mathrm{End}_{\boldsymbol{R}}(\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{W}))\}$ indexée par les ouverts $\overline{W}\subseteq\overline{V}$ telle que les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{W}) & \xrightarrow{\varphi(\overline{W})} & \mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{W}) \\ {\scriptstyle \rho^{\overline{W}}_{\overline{W}'}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho^{\overline{W}}_{\overline{W}'}} \\ \mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{W}') & \xrightarrow{\varphi(\overline{W}')} & \mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{W}') \end{array}$$

sont commutatifs pour tous $\overline{W}'\subseteq\overline{W}\subseteq\overline{V}$.

Définition. Soit $\overline{V}$ un ouvert de $\overline{X}$. Une section φ de $\mathcal{E}nd_{\boldsymbol{R}}(\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}})$ au-dessus de $\overline{V}$ est un « *opérateur différentiel* †*-adique* » lorsqu'il existe une constante C telle que pour chaque $m\in\mathbb{N}$ la réduction modulo $\boldsymbol{I}^m$ de $\varphi(\overline{W})$:

$$\varphi(\overline{W})_m : \mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{W})/\boldsymbol{I}^m\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{W}) \longrightarrow \mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{W})/\boldsymbol{I}^m\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{W})$$

est un opérateur différentiel de degré majoré par $C(m+1)$, *i.e.*

$$\varphi(\overline{W})_m \in \mathscr{D}^{C(m+1)}_{\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{W})/\boldsymbol{I}^m\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{W})}$$

et ceci, quel que soit l'ouvert $\overline{W}\subseteq\overline{V}$. On note $\mathscr{D}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{V})$ l'ensemble de telles sections.

5.2.4. Proposition. *Soit* $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}})$ *un schéma de Meredith.*

a) *Si* $\rho^{\overline{V}}_{\overline{W}} : \Gamma(\overline{V};\mathcal{E}nd_{\boldsymbol{R}}(\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}))\to\Gamma(\overline{W};\mathcal{E}nd_{\boldsymbol{R}}(\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}}))$ *désigne le morphisme de restriction du faisceau* $\mathcal{E}nd_{\boldsymbol{R}}(\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}})$, *on a*

$$\rho^{\overline{V}}_{\overline{W}}(\mathscr{D}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{V}))\subseteq\mathscr{D}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{W})$$

et la correspondance $\overline{V}\rightsquigarrow\mathscr{D}^\dagger_{\boldsymbol{X}}(\overline{V})$ *est le sous-**faisceau*** $\mathscr{D}^\dagger_{\boldsymbol{X}}$ *de* $\mathcal{E}nd_{\boldsymbol{R}}(\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{X}})$.

b) *On a une inclusion naturelle de faisceaux :* $\mathscr{G}^\dagger_{\boldsymbol{X}}\subseteq\mathscr{D}^\dagger_{\boldsymbol{X}}$.

5.2.5. Opérateurs différentiels †-adiques sur $\mathscr{X}^\dagger_{\mathbf{inf}}$. Soit $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ un schéma lisse et séparé sur $\overline{\boldsymbol{R}}$ de site de relèvements affines très lisses $\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$. Pour tout $\boldsymbol{\mathscr{U}}\in\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ on pose

$$\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}}(\boldsymbol{\mathscr{U}}) := \Gamma(\overline{\boldsymbol{\mathscr{U}}};\mathscr{D}^\dagger_{\boldsymbol{\mathscr{U}}})$$

Proposition

a) *Soit* $\rho_\phi : \mathcal{E}nd_{\boldsymbol{R}}(\mathscr{O}^\dagger_{\mathscr{X}})(\boldsymbol{\mathscr{U}})\to\mathcal{E}nd_{\boldsymbol{R}}(\mathscr{O}^\dagger_{\mathscr{X}})(\mathscr{V})$ *le morphisme de restriction que le foncteur* $\mathcal{E}nd_{\boldsymbol{R}}(\mathscr{O}^\dagger_{\mathscr{X}})$ *fait correspondre à* $\phi\in\mathrm{Mor}_{\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}(\mathscr{V},\boldsymbol{\mathscr{U}})$. *Alors*

$$\rho_\phi(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}}(\boldsymbol{\mathscr{U}}))\subseteq\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}}(\mathscr{V})$$

et la correspondance $\boldsymbol{\mathscr{U}}\rightsquigarrow\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}}(\boldsymbol{\mathscr{U}})$ *est un sous-**faisceau*** de $\mathcal{E}nd_{\boldsymbol{R}}(\mathscr{O}^\dagger_{\mathscr{X}})$.

b) *On a une inclusion naturelle* $\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{X}}\subseteq\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}}$ *compatible aux inclusions* $\mathscr{G}^\dagger_{\boldsymbol{\mathscr{U}}}\subseteq\mathscr{D}^\dagger_{\boldsymbol{\mathscr{U}}}$ de 5.2.4-b.

5.3 Équivalences de catégories de $\mathscr{D}^\dagger$-modules

Nous nous plaçons dans cette section dans le cas où $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ est un schéma **affine** lisse de site de relèvements affines très lisses $\mathscr{X}^\dagger_{\rm inf}$.

5.3.1. La catégorie $\mathbf{Mod}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger_{\rm inf}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}})$. Soit $\boldsymbol{\mathscr{U}}\in\mathscr{X}^\dagger_{\rm inf}$. L'inclusion $\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{U}}\subseteq\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{U}}$ permet de munir tout $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{U}}$-module d'une structure de $\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{U}}$-module et donc aussi de $\big(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{U}}\rtimes\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{U}}\big)$-module. La catégorie $\mathrm{Mod}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{U}})$ s'identifie ainsi à une sous-catégorie pleine de $\mathrm{Mod}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{U}}\rtimes\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{U}})$ ce qui sera le sens dans la suite de l'inclusion $\mathrm{Mod}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{U}})\subseteq\mathrm{Mod}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{U}}\rtimes\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{U}})$.

On notera $\mathrm{Mod}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger_{\rm inf}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}})$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Mod}_{\mathscr{X}^\dagger_{\rm inf}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}})$ des faisceaux $\mathscr{M}$ sur $\mathscr{X}^\dagger_{\rm inf}$ tels que, pour chaque $\boldsymbol{\mathscr{U}}\in\mathscr{X}^\dagger_{\rm inf}$, l'action canonique de $\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{X}}(\boldsymbol{\mathscr{U}})$ sur $\mathscr{M}(\boldsymbol{\mathscr{U}})$ coïncide avec celle définie à travers l'action canonique de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}}(\boldsymbol{\mathscr{U}})$ sur $\mathscr{M}(\boldsymbol{\mathscr{U}})$. Il est clair que le noyau et conoyau d'un morphisme de $\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}}$-modules de $\mathrm{Mod}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger_{\rm inf}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}})$ sont encore des objets de cette catégorie qui est donc une sous-catégorie abélienne de $\mathrm{Mod}_{\mathscr{X}^\dagger_{\rm inf}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}})$.

Théorème. *Soit $(\overline{\boldsymbol{X}};\mathscr{O}_{\overline{\boldsymbol{X}}})$ un schéma **affine** lisse de site de relèvements affines très lisses $\mathscr{X}^\dagger_{\rm inf}$. Soit $\boldsymbol{\mathscr{U}}\in\mathscr{X}^\dagger_{\rm inf}$ tel que $\overline{\boldsymbol{\mathscr{U}}}=\overline{\boldsymbol{X}}$. La restriction $\mathscr{R}'_{\mathscr{U}}$ du foncteur $\mathscr{R}_{\mathscr{U}}:\mathrm{Mod}_{\mathscr{X}^\dagger_{\rm inf}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}})\rightsquigarrow\mathrm{Mod}_{\overline{\mathscr{U}}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{U}}\rtimes\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{U}})$ à $\mathrm{Mod}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger_{\rm inf}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}})$ est à valeurs dans $\mathrm{Mod}_{\overline{\mathscr{U}}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{U}})$ et le foncteur*

$$\mathscr{R}'_{\mathscr{U}}:\mathrm{Mod}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger_{\rm inf}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}})\rightsquigarrow\mathrm{Mod}_{\overline{\mathscr{U}}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{U}})$$

est une équivalence de catégories.

Démonstration. Un $(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{U}}\rtimes\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{U}})$-module est muni de deux structures de $\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{U}}$-module grâce aux morphismes

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{U}} & \longrightarrow & \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{U}}\rtimes\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{U}} \\ \theta & \longmapsto & \theta\delta_1 \end{array}\qquad\qquad \begin{array}{ccc} \mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{U}} & \longrightarrow & \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{U}}\rtimes\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{U}} \\ \theta & \longmapsto & \delta_\theta \end{array}$$

On note alors $\mathrm{Mod}^\dagger_{\overline{\mathscr{U}}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{U}}\rtimes\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{U}})$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Mod}_{\overline{\mathscr{U}}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{U}}\rtimes\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{U}})$ des modules sur lesquels ces deux structures de $\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{U}}$-module coïncident et par restriction de l'équivalence de catégories $\mathscr{R}_{\mathscr{U}}$ (4.4.3) on obtient aussitôt une première équivalence de catégories

$$\mathscr{R}^\dagger_{\mathscr{U}}:\mathrm{Mod}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger_{\rm inf}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}})\rightsquigarrow\mathrm{Mod}^\dagger_{\overline{\mathscr{U}}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{U}}\rtimes\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{U}})\,.$$

D'autre part les morphismes de préfaisceaux d'anneaux

$$\begin{array}{ccc} \alpha:\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{U}} & \longrightarrow & \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{U}}\rtimes\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{U}} \\ \sigma & \longmapsto & \sigma\delta_1 \end{array}\qquad\qquad \begin{array}{ccc} \beta:\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{U}}\rtimes\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{U}} & \longrightarrow & \mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{U}} \\ \sigma\delta_\theta & \longrightarrow & \sigma\theta \end{array}$$

donnent respectivement les foncteurs

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}:\mathrm{Mod}_{\mathscr{X}^\dagger_{\rm inf}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}}\rtimes\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{U}})\rightsquigarrow\mathrm{Mod}_{\mathscr{X}^\dagger_{\rm inf}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}})\quad\text{et}\quad\boldsymbol{\mathcal{B}}:\mathrm{Mod}_{\mathscr{X}^\dagger_{\rm inf}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}})\rightsquigarrow\mathrm{Mod}^\dagger_{\mathscr{X}^\dagger_{\rm inf}}(\mathscr{D}^\dagger_{\mathscr{X}}\rtimes\mathscr{G}^\dagger_{\mathscr{U}})$$

où $\boldsymbol{\mathcal{A}} \circ \boldsymbol{\mathcal{B}}$ est équivalent à l'identité car $\beta \circ \alpha = \mathrm{id}$. Le foncteur $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ établit alors une équivalence de catégories entre l'image essentielle de $\boldsymbol{\mathcal{B}}$, *i.e.* $\mathrm{Mod}^{\dagger}_{\mathscr{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}} \rtimes \mathscr{G}^{\dagger}_{\mathscr{U}})$, et $\mathrm{Mod}_{\mathscr{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}}(\mathscr{D}^{\dagger}_{\mathscr{X}})$. Le théorème résulte puisque $\mathscr{R}'_{\mathscr{U}} = \boldsymbol{\mathcal{A}} \circ \mathscr{R}^{\dagger}_{\mathscr{U}}$. ∎

§ 6. Références bibliographiques

[Ar] A. ARABIA. Relèvements des algèbres lisses et de leurs morphismes ; Prépublication (avril 2000).

[A] M. ARTIN. On the solutions of analytique equations ; Invent. Math. **5** pp. 277–291 (1968).

[B] S. BOSCH. A rigid analytic version of M. Artin's theorem on analytic equations ; Math. Ann. **255**, n$^{\mathrm{ro}}$ 3, pp. 395–404 (1981).

[BLR] S. BOSCH, W. LÜTKEBOHMERT, M. RAYNAUD. "*Néron Models*" ; Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **3**. Folge–Band **21** (1980).

[E] R. ELKIK. Solutions d'équations à coefficients dans un anneau hensélien ; Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, quatrième série, tome 6, pp. 553–604 (1973).

[$\mathrm{EGA}_{4,1}$] A. GROTHENDIECK. "*Éléments de géométrie algébrique-IV*" ; Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. Première partie. Publications mathématiques de l'I.H.E.S. **20** (1964).

[SGA_2] A. GROTHENDIECK. "*Cohomologie locale des faisceaux cohérents et Théorèmes de Lefschetz locaux et globaux*" ; Séminaire de Géométrie algébrique du Bois-Marie 1962. Advanced studies in pure mathematics. Vol. 2. North-Holland – Masson (1968).

[Go] GODEMENT. "*Topologie algébrique et théorie des faisceaux*" ; Troisième édition revue et corrigée. Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, XIII. Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1252. Hermann, Paris, (1973).

[Gro] A. GROTHENDIECK. Géométrie formelle et géométrie algébrique ; Séminaire Bourbaki, exposé **182** (Mai 1959).

[M] D. MEREDITH. Weak formal schemes ; Nagoya Math. Journal. Vol. 45, pp. 1–38 (1971).

[MW] P. MONSKY, G. WASHNITZER. Formal cohomology : I ; Ann. of Math. (2) **88**, pp. 181–217 (1968).

[vdP] M. VAN DER PUT. The cohomology of Monsky and Washnitzer ; Société Mathématique de France. Deuxième série, Mémoire n$^{\mathrm{ro}}$ 23, pp. 33–60 (1986).

[Ser] J.-P. SERRE. Exemples de variétés projectives en caractéristique p non relevables en caractéristique zéro ; Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **47**, pp. 108–109 (1961).

[SGA1] "*Revêtements Étales et Groupe Fondamental (SGA 1)*" ; Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1960/61. Lecture Notes in Mathematics **224**. Springer-Verlag (1971).

Alberto Arabia
CNRS
Institut de Mathématiques de Jussieu
Théorie des Groupes

Jeudi 13 décembre 2004