

Cohomologie de Monsky-Washnitzer dans la catégorie des schémas lisses et séparés sur \overline{R}

Alberto Arabia*

Table des matières

§0. Introduction	1
§1. Préliminaires algébriques	2
1.1. Rappel : complétion \dagger -adique	2
1.2. Rappel : algèbres très lisses	2
1.2.1. Algébricité des relèvements de morphismes lisses	3
§2. Site des relèvements très lisses associé à un schéma lisse sur \overline{R}	4
2.1. La catégorie $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$ des relèvements affines très lisses	4
2.2. Existence de produits fibrés dans $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$	5
2.3. Topologie de Grothendieck sur $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$	6
2.4. Algébricité des recouvrements principaux de $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$	7
2.5. Préfaisceaux et faisceaux sur $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$	8
§3. Sous-sites de Meredith	10
3.1. Rappel de résultats	10
3.2. Rappel sur les schémas formels faibles affines de Meredith	10
3.2.4. Généralisation des résultats de Meredith	11
3.2.9. Rappels sur la cohomologie de Čech	18
3.2.13. Catégorie des \mathcal{O}_X^\dagger -modules cohérents	21
3.2.15. \mathcal{O}_X^\dagger comme faisceau de relèvements (très lisses)	23
3.3. Sous-sites de Meredith de $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$ et condition de faisceau	24
3.3.1. Sous-sites de Meredith	24
3.4. Faisceau \mathcal{G}_X^\dagger d'automorphismes \dagger -adiques	25
3.4.1. Le cas où X est affine	25
3.4.3. Le cas où X est général	26
3.5. Foncteurs associés à l'inclusion $\mathcal{M}(U) \subseteq \mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$	29
3.5.1. Rétractions de $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$ sur $\langle \mathcal{M}(U) \rangle$	29
3.5.3. Le foncteurs i_{U*} et i_U^{-1}	30
3.5.6. Le foncteur $\mathcal{R}_U : \text{Mod}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}(Z) \rightsquigarrow \text{Mod}_{\overline{U}}(Z)$	32
3.5.8. Le morphisme \mathcal{R}_ϕ	32

*CNRS – Institut de Mathématiques de Jussieu – Université de Paris 7 - Denis Diderot.
 Laboratoire de Théorie des Groupes, Représentations et Applications.
 UFR de Mathématiques de l'Université Paris 7 – Denis Diderot.
 175, rue du Chevaleret, 9^e étage, bureau 9D11, 75013 Paris.
 Adresse électronique : arabia@math.jussieu.fr

§ 4. Catégories de faisceaux sur $\mathcal{X}_{\text{inf}}^{\dagger}$	33
4.1. Faisceau $\mathcal{G}_{\mathcal{X}}^{\dagger}$ d'automorphismes \dagger -adiques sur $\mathcal{X}_{\text{inf}}^{\dagger}$	33
4.1.1. Restriction d'automorphismes \dagger -adiques dans $\mathcal{X}_{\text{inf}}^{\dagger}$	33
4.2. Catégorie de faisceaux de \mathbf{Z} -modules sur $\mathcal{X}_{\text{inf}}^{\dagger}$	34
4.2.1. Préfaisceaux de \mathbf{Z} -modules	34
4.3. Catégorie de faisceaux d'algèbres sur $\mathcal{X}_{\text{inf}}^{\dagger}$	37
4.3.1. Préfaisceaux de \mathbf{Z} -algèbres	37
4.3.6. Sites annelés $(\mathcal{X}_{\text{inf}}^{\dagger}; \mathcal{O}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^{\dagger}})$, $(\mathcal{M}(U); \mathcal{O}_{\mathcal{M}(U)}^{\dagger})$, $(\bar{U}; \mathcal{O}_{\bar{U}}^{\dagger})$	39
4.4. Catégorie de faisceaux de \mathcal{A} -modules sur $\mathcal{X}_{\text{inf}}^{\dagger}$	39
4.4.2. Préfaisceaux de \mathcal{A} -modules	39
§ 5. Opérateurs différentiels \dagger -adiques	40
5.1. Le faisceau $\mathcal{H}_{\mathbf{Z}}(-, -)$	40
5.2. Faisceau d'opérateurs différentiels \dagger -adiques sur $\mathcal{X}_{\text{inf}}^{\dagger}$	43
5.2.1. Opérateurs différentiels	43
5.2.2. Morphismes d'algèbres et opérateurs différentiels	44
5.2.3. Opérateurs différentiels \dagger -adiques sur un schéma de Meredith	44
5.2.5. Opérateurs différentiels \dagger -adiques sur $\mathcal{X}_{\text{inf}}^{\dagger}$	45
5.3. Équivalences de catégories de \mathcal{D}^{\dagger} -modules	45
5.3.1. La catégorie $\text{Mod}^{\dagger}(\mathcal{D}_{\mathcal{X}}^{\dagger})$	45
§ 6. Références bibliographiques	48

§ 0. Introduction

Travail en cours...

§1. Préliminaires algébriques

On désignera par \mathbf{R} et \mathbf{I} respectivement la donnée d'un anneau avec identité multiplicative, commutatif et noëthérien et d'un idéal $\mathbf{I} \subseteq \mathbf{R}$.

1.1 Rappel : complétion \dagger -adique

Pour toute \mathbf{R} -algèbre \mathbf{A} , Monsky et Washnitzer définissent dans [MW] «*sa complétion \mathbf{I} -adique faible \mathbf{A}^\dagger* » que nous appellerons aussi «*complétion \dagger -adique*». Il s'agit de la sous-algèbre du complété séparé \mathbf{I} -adique $\widehat{\mathbf{A}}$ de \mathbf{A} des éléments z admettant une représentation comme somme infinie :

$$z = \sum_{j \geq 0} p_j(x_1, \dots, x_n) \quad (*)$$

(l'entier n et les éléments x_1, \dots, x_n sont fixes et indépendants de j) dans laquelle :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet x_1, \dots, x_n \in \mathbf{A}; \\ \bullet p_j \in \mathbf{I}^j \cdot \mathbf{R}[X_1, \dots, X_n], \text{ pour tout } j \in \mathbb{N}; \\ \bullet \text{l'ensemble } \left\{ \frac{\deg p_j}{j+1} \right\}_{j \in \mathbb{N}} \text{ est borné.} \end{array} \right.$$

Définition([MW]). Une \mathbf{R} -algèbre \mathbf{A} est dite «*faiblement complète*» (f.c.) lorsque l'application canonique $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}^\dagger$ est bijective. Une \mathbf{R} -algèbre faiblement complète \mathbf{A} est dite de «*type fini*» (f.c.t.f.) lorsqu'il existe un sous-ensemble fini $S \subseteq \mathbf{A}$ tel que \mathbf{A} est l'unique sous-algèbre faiblement complète de \mathbf{A} qui contient S .

Théorème ([MW]). *La complétion \dagger -adique d'une \mathbf{R} -algèbre (de type fini) est faiblement complète (de type fini).*

Notation. On notera $\text{Alg}_{\text{fc}}(\mathbf{R})$ (resp. $\text{Alg}_{\text{ictf}}(\mathbf{R})$) la sous-catégorie pleine de $\text{Alg}(\mathbf{R})$ dont les objets sont les algèbres faiblement complètes (resp. de type fini).

1.2 Rappel : algèbres très lisses

Pour toute \mathbf{R} -algèbre \mathbf{A} , on note $\overline{\mathbf{A}}$ la réduction modulo \mathbf{I} de \mathbf{A} , i.e. $\overline{\mathbf{A}} := \mathbf{A}/\mathbf{I} \cdot \mathbf{A}$. Pour toute algèbre $\overline{\mathbf{B}}$ (lisse) sur $\overline{\mathbf{A}}$, on appelle «*relèvement de $\overline{\mathbf{B}}$ (lisse) sur \mathbf{A}* » la donnée d'une algèbre \mathbf{B} (lisse) sur \mathbf{A} , et d'une surjection de \mathbf{A} -algèbres $p : \mathbf{B} \rightarrow \overline{\mathbf{B}}$ dont la réduction modulo \mathbf{I} est bijective.

La propriété suivante a été introduite par Monsky et Washnitzer dans [MW].

Définition. Une \mathbf{R} -algèbre \mathbf{A} est dite «*très lisse*» lorsque les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- L'algèbre $\overline{\mathbf{A}}$ est lisse sur $\overline{\mathbf{R}}$.

- Pour toute paire de morphismes de \mathbf{R} -algèbres $\mathbf{B} \xrightarrow{p} \mathbf{C} \xleftarrow{\varphi} \mathbf{A}$, où \mathbf{B} est f.c., \mathbf{C} est séparée et p est surjectif (de noyau arbitraire), et pour chaque morphisme de $\overline{\mathbf{R}}$ -algèbres $\overline{h} : \overline{\mathbf{A}} \rightarrow \overline{\mathbf{B}}$ vérifiant $\overline{\varphi} = \overline{p} \circ \overline{h}$, il existe un relèvement $h : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ de \overline{h} , tel que $\varphi = p \circ h$.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{A} & & \mathbf{B} \\
 \searrow \varphi & & \downarrow p \\
 & & \mathbf{C}
 \end{array}
 +
 \begin{array}{ccc}
 \overline{\mathbf{A}} & \xrightarrow{\overline{h}} & \overline{\mathbf{B}} \\
 \searrow \overline{\varphi} & & \downarrow \overline{p} \\
 & & \overline{\mathbf{C}}
 \end{array}
 \implies
 \begin{array}{ccc}
 \mathbf{A} & \overset{\exists h}{\dashrightarrow} & \mathbf{B} \\
 \searrow \varphi & & \downarrow p \\
 & & \mathbf{C}
 \end{array}$$

Pour toute $\overline{\mathbf{R}}$ -algèbre $\overline{\mathbf{B}}$ lisse, on appelle «*relèvement très lisse de $\overline{\mathbf{B}}$* » la donnée d'une \mathbf{R} -algèbre très lisse \mathbf{B} et d'une surjection de \mathbf{R} -algèbres $p : \mathbf{B} \rightarrow \overline{\mathbf{B}}$ dont la réduction modulo \mathbf{I} est bijective.

L'énoncé suivant rassemble les principaux résultats de [Ar].

Théorème. Soit $\overline{\mathbf{A}}$ une $\overline{\mathbf{R}}$ -algèbre lisse.

- $\overline{\mathbf{A}}$ admet des relèvements lisses sur \mathbf{R} .
- Pour tout relèvement \mathbf{A} de $\overline{\mathbf{A}}$, lisse sur \mathbf{R} , l'algèbre \mathbf{A}^\dagger est un relèvement très lisse de $\overline{\mathbf{A}}$ dans $\text{Alg}_{\text{fc}}(\mathbf{R})$. Pour tout autre relèvement \mathbf{A}' de $\overline{\mathbf{A}}$ lisse sur \mathbf{R} , les algèbres \mathbf{A}^\dagger et \mathbf{A}'^\dagger sont isomorphes.

1.2.1. Algébricité des relèvements de morphismes lisses.

Proposition. Soit $\beta : \mathbf{B}_1 \rightarrow \mathbf{B}_2$ un morphisme entre deux \mathbf{R} -algèbres f.c.t.f. très lisses dont la réduction modulo \mathbf{I} , $\overline{\beta} : \overline{\mathbf{B}}_1 \rightarrow \overline{\mathbf{B}}_2$, est un morphisme lisse. Soit $q_1 : \mathbf{A}_1 \rightarrow \overline{\mathbf{B}}_1$ un relèvement lisse sur \mathbf{R} et munissons $\overline{\mathbf{B}}_2$ de la structure de \mathbf{A}_1 -algèbre induite par $\overline{\beta} \circ q_1$. Alors, pour tout relèvement $q_2 : \mathbf{A}_2 \rightarrow \overline{\mathbf{B}}_2$, lisse sur \mathbf{A}_1 (donc sur \mathbf{R}), il existe des isomorphismes $\varphi_i : \mathbf{A}_i^\dagger \rightarrow \mathbf{B}_i$ relevant l'identité sur $\overline{\mathbf{B}}_i$ tels que le diagramme ci-après est commutatif. Dans ce diagramme, σ désigne le morphisme structural, et ι le morphisme naturel canonique d'une algèbre dans sa complétion faible.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{B}_1 & \xrightarrow{\beta} & \mathbf{B}_2 \\
 \varphi_1 \uparrow \simeq & & \simeq \uparrow \varphi_2 \\
 \mathbf{A}_1^\dagger & \xrightarrow{\sigma^\dagger} & \mathbf{A}_2^\dagger \\
 \iota_1 \uparrow & & \uparrow \iota_2 \\
 \mathbf{A}_1 & \xrightarrow{\sigma} & \mathbf{A}_2 \\
 q_1 \downarrow & & \downarrow q_2 \\
 \overline{\mathbf{B}}_1 & \xrightarrow{\overline{\beta}} & \overline{\mathbf{B}}_2
 \end{array}$$

Le morphisme β est donc isomorphe à la complétion faible d'un morphisme lisse entre des relèvements des $\overline{\mathbf{B}}_i$, lisses sur \mathbf{R} .

De plus, pour tout isomorphisme φ_1 relevant $\text{id}_{\overline{\mathbf{B}}_1}$ (resp. φ_2 relevant $\text{id}_{\overline{\mathbf{B}}_2}$), il existe un isomorphisme φ_2 relevant $\text{id}_{\overline{\mathbf{B}}_2}$ (resp. φ_1 relevant $\text{id}_{\overline{\mathbf{B}}_1}$) tels que le couple (φ_1, φ_2) vérifie la proposition.

Démonstration. D'après le théorème d'existence de relèvements lisses (1.3.1 [Ar]) appliqué au couple (\mathbf{R}, \mathbf{I}) , il existe un relèvement lisse $q_1 : \mathbf{A}_1 \rightarrow \overline{\mathbf{B}}_1$, et, appliqué au couple $(\mathbf{A}_1, \mathbf{I} \cdot \mathbf{A}_1)$, un relèvement $q_2 : \mathbf{A}_2 \rightarrow \overline{\mathbf{B}}_2$ lisse sur \mathbf{A}_1 . Les \mathbf{R} -algèbres \mathbf{A}_i^\dagger sont f.c.t.f. très lisses (3.3.1 loc. cit.) de sorte qu'il existe des morphismes $\varphi_i : \mathbf{A}_i^\dagger \rightarrow \mathbf{B}_i$ relevant l'identité sur $\overline{\mathbf{B}}_i$; de tels morphismes sont automatiquement bijectifs (th. 3.2 [MW]).

Pour φ_1 donné, munissons \mathbf{B}_2 de la structure de \mathbf{A}_1 -algèbre induite par $\beta \circ \varphi_1 \circ \iota_1$, et considérons les données :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A}_2 & & \mathbf{B}_2 \\ q_2 \downarrow & & \downarrow p_2 \\ \overline{\mathbf{B}}_2 & \xleftarrow{\text{id}} & \overline{\mathbf{B}}_2 \end{array}$$

dans la catégorie des \mathbf{A}_1 -algèbres. Comme \mathbf{A}_2 est lisse sur \mathbf{A}_1 , il existe un voisinage étale $(\mathbf{B}_2)_\varepsilon$ de \mathbf{I} dans \mathbf{B}_2 et un morphisme $\phi_2 : \mathbf{A}_2 \rightarrow (\mathbf{B}_2)_\varepsilon$ tels que :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{A}_2 & \xrightarrow{\phi_2} & (\mathbf{B}_2)_\varepsilon & \xleftarrow{\varepsilon} & \mathbf{B}_2 \\ q_2 \downarrow & & \downarrow p_{2\varepsilon} & & \downarrow p_2 \\ \overline{\mathbf{B}}_2 & \xleftarrow{\text{id}} & \overline{\mathbf{B}}_2 & \xleftarrow{\text{id}} & \overline{\mathbf{B}}_2 \end{array}$$

est un diagramme commutatif de \mathbf{A}_1 -algèbres (2.1.3 [Ar]).

Par complétion faible, ε^\dagger est un isomorphisme (3.2.4 *loc. cit.*) et $\varphi_2 := (\varepsilon^\dagger)^{-1} \circ \phi_2^\dagger$ vérifie, par construction, l'égalité $\beta \circ \varphi_1 = \varphi_2 \circ \sigma^\dagger$, ce qui prouve une partie de la proposition.

Inversement, donnons-nous φ_2 . On a les morphismes des \mathbf{R} -algèbres f.c.t.f. très lisses :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{B}_1 & \xrightarrow{\beta} & \mathbf{B}_2 \\ & & \simeq \uparrow \varphi_2 \\ \mathbf{A}_1^\dagger & \xrightarrow{\sigma^\dagger} & \mathbf{A}_2^\dagger \end{array}$$

La sous-algèbre \mathbf{C} de \mathbf{B}_2 engendrée par les images de β et $\varphi_2 \circ \sigma^\dagger$ est f.c.t.f. d'après le corollaire du th. 2.1 de [MW]. Il en est de même de la sous-algèbre $\text{im}(\beta)$ et comme l'inclusion $\text{im}(\beta) \subseteq \mathbf{C}$ est une égalité modulo \mathbf{I} , on déduit que $\text{im}(\beta) = \mathbf{C} = \text{im}(\varphi_2 \circ \sigma^\dagger)$ (th. 3.1 [MW]). L'existence de φ_1 vérifiant $\beta \circ \varphi_1 = \varphi_2 \circ \sigma^\dagger$ résulte alors de ce que \mathbf{A}_1^\dagger est très lisse. ■

§ 2. Site des relèvements très lisses associé à un schéma lisse sur $\overline{\mathbf{R}}$

2.1 La catégorie $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$ des relèvements affines très lisses

À un schéma $(\overline{\mathbf{X}}, \mathcal{O}_{\overline{\mathbf{X}}})$ séparé et lisse sur $\overline{\mathbf{R}}$, on associe la catégorie $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$ suivante :

- Un objet \mathcal{U} de $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$ est un morphisme surjectif de \mathbf{R} -algèbres

$$p_{\mathcal{U}} : \mathbf{A}(\mathcal{U})^\dagger \longrightarrow \Gamma(\overline{\mathcal{U}}; \mathcal{O}_{\overline{\mathbf{X}}})$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{\mathcal{U}} \quad : \text{ouvert affine de } \overline{\mathbf{X}} ; \\ \mathbf{A}(\mathcal{U})^\dagger : \mathbf{R}\text{-algèbre f.c.t.f. très lisse ;} \\ p_{\mathcal{U}} \quad : \text{relèvement de } \mathbf{R}\text{-algèbres.} \end{array} \right.$$

L'ouvert $\overline{\mathcal{U}}$, l'algèbre très lisse $\mathbf{A}(\mathcal{U})^\dagger$ et le morphisme $p_{\mathcal{U}}$, seront respectivement appelés « l'ouvert (de $\overline{\mathbf{X}}$), l'algèbre et le relèvement très lisses correspondants à \mathcal{U} ».

- Étant donnés deux objets \mathcal{V} et \mathcal{U} de $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$, tels que $\bar{\mathcal{V}} \subseteq \bar{\mathcal{U}}$, un élément Φ de l'ensemble $\text{Mor}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}(\mathcal{V}, \mathcal{U})$ est un morphisme de \mathbf{R} -algèbres $\phi : \mathbf{A}(\mathcal{U})^\dagger \rightarrow \mathbf{A}(\mathcal{V})^\dagger$ tel que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A}(\mathcal{U})^\dagger & \xrightarrow{\phi} & \mathbf{A}(\mathcal{V})^\dagger \\ p_{\mathcal{U}} \downarrow & & \downarrow p_{\mathcal{V}} \\ \Gamma(\bar{\mathcal{U}}; \mathcal{O}_{\bar{\mathcal{X}}}) & \xrightarrow{\bar{\rho}} & \Gamma(\bar{\mathcal{V}}; \mathcal{O}_{\bar{\mathcal{X}}}) \end{array}$$

où $\bar{\rho}$ désigne le morphisme de restriction canonique, est commutatif.

Le morphisme de \mathbf{R} -algèbres $\phi : \mathbf{A}(\mathcal{U})^\dagger \rightarrow \mathbf{A}(\mathcal{V})^\dagger$ est appelé « *le morphisme de \mathbf{R} -algèbres associé à Φ* ».

- Lorsque \mathcal{V} et \mathcal{U} sont tels que $\bar{\mathcal{V}} \not\subseteq \bar{\mathcal{U}}$, on pose : $\text{Mor}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}(\mathcal{V}, \mathcal{U}) = \emptyset$.

2.1.1. Remarques

- Avec les notations précédentes, $\text{Mor}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}(\mathcal{V}, \mathcal{U}) \neq \emptyset$, si et seulement si, $\bar{\mathcal{V}} \subseteq \bar{\mathcal{U}}$. La suffisance de cette dernière condition est conséquence de ce que $\mathbf{A}(\mathcal{U})^\dagger$ est très lisse.
- Pour tout ouvert affine $\bar{U} \subseteq \bar{\mathcal{X}}$, il existe des relèvements $\mathbf{B} \rightarrow \Gamma(\bar{U}; \mathcal{O}_{\bar{\mathcal{X}}})$ lisses sur \mathbf{R} (1.3.1 [Ar]) et le morphisme induit $\mathbf{B}^\dagger \rightarrow \Gamma(\bar{U}; \mathcal{O}_{\bar{\mathcal{X}}})$ est un relèvement très lisse (3.3.1 *loc. cit.*). Pour tout ouvert affine $\bar{U} \subseteq \bar{\mathcal{X}}$ il existe donc un objet \mathcal{U} de $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$ dont l'ouvert correspondant est \bar{U} ; un tel \mathcal{U} sera appelé « *un relèvement (\dagger -adique) de \bar{U}* ».
- Pour tout $\mathcal{U} \in \mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$, le semi-groupe $(\text{End}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}(\mathcal{U}), \circ, \mathbf{1}_{\mathcal{U}})$ est un groupe (th. 3.2 [MW]), il s'identifie à l'opposé du groupe des automorphismes de \mathbf{R} -algèbre de $\mathbf{A}(\mathcal{U})^\dagger$ dont la réduction modulo \mathbf{I} est l'identité.

2.2 Existence de produits fibrés dans $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$

Proposition. *La catégorie $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$ possède des produits fibrés.*

Démonstration. À un diagramme commutatif dans $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{W} & \longrightarrow & \mathcal{V}_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{V}_2^\dagger & \longrightarrow & \mathcal{U} \end{array}$$

correspondent les diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A}(\mathcal{U})^\dagger & \longrightarrow & \mathbf{A}(\mathcal{V}_1)^\dagger \\ \downarrow & (\mathcal{D}) & \downarrow \\ \mathbf{A}(\mathcal{V}_2)^\dagger & \longrightarrow & \mathbf{A}(\mathcal{W})^\dagger \end{array} \xrightarrow{\text{mod } \mathbf{I}} \begin{array}{ccc} \Gamma(\bar{\mathcal{U}}; \mathcal{O}_{\bar{\mathcal{X}}}) & \xrightarrow{\bar{\rho}} & \Gamma(\bar{\mathcal{V}}_1; \mathcal{O}_{\bar{\mathcal{X}}}) \\ \bar{\rho} \downarrow & (\bar{\mathcal{D}}) & \downarrow \bar{\rho} \\ \Gamma(\bar{\mathcal{V}}_2; \mathcal{O}_{\bar{\mathcal{X}}}) & \xrightarrow{\bar{\rho}} & \Gamma(\bar{\mathcal{W}}; \mathcal{O}_{\bar{\mathcal{X}}}) \end{array}$$

respectivement de \mathbf{R} -algèbres f.c.t.f. très lisses et de $\bar{\mathbf{R}}$ -algèbres, où nous pouvons supposer (prop. 1.2.1) que le diagramme de $\mathbf{A}(\mathcal{U})^\dagger$ -algèbres (\mathcal{D}) résulte de compléter faiblement un diagramme de morphismes de $\mathbf{A}(\bar{\mathcal{U}})$ -algèbres :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A}(\bar{\mathcal{U}}) & \xrightarrow{\sigma_1} & \mathbf{A}(\bar{\mathcal{V}}_1) \\ \sigma_2 \downarrow & (\mathcal{D}') & \downarrow \xi_1 \\ \mathbf{A}(\bar{\mathcal{V}}_2) & \xrightarrow{\xi_2} & \mathbf{A}(\bar{\mathcal{W}}) \end{array}$$

où $\mathbf{A}(\bar{\mathcal{U}})$ est un relèvement de $\Gamma(\bar{\mathcal{U}}; \mathcal{O}_{\bar{\mathcal{X}}})$ lisse sur \mathbf{R} ; $\mathbf{A}(\bar{\mathcal{V}}_i)$ est un relèvement de $\Gamma(\bar{\mathcal{V}}_i; \mathcal{O}_{\bar{\mathcal{X}}})$ lisse sur $\mathbf{A}(\bar{\mathcal{U}})$ (σ_i désigne alors morphisme structural) et (\mathcal{D}') est un relèvement de $\bar{\mathcal{D}}$.

Le diagramme (\mathcal{D}') admet une factorisation unique en :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{A}(\bar{\mathcal{U}}) & \xrightarrow{\sigma_1} & \mathbf{A}(\bar{\mathcal{V}}_1) \\
 \sigma_2 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathbf{A}(\bar{\mathcal{V}}_2) & \longrightarrow & \mathbf{A}(\bar{\mathcal{V}}_1) \otimes_{\mathbf{A}(\bar{\mathcal{U}})} \mathbf{A}(\bar{\mathcal{V}}_2) \\
 & \searrow \xi_2 & \searrow \xi_1 \\
 & & \mathbf{A}(\bar{\mathcal{V}}_{12})^\dagger
 \end{array}
 \quad (\mathcal{D}'')$$

où les morphismes de $\mathbf{A}(\bar{\mathcal{V}}_i)$ vers $\mathbf{A}(\bar{\mathcal{V}}_1) \otimes_{\mathbf{A}(\bar{\mathcal{U}})} \mathbf{A}(\bar{\mathcal{V}}_2)$ sont les morphismes canoniques.

Ceci étant, $\mathbf{A}(\bar{\mathcal{V}}_{12}) := \mathbf{A}(\bar{\mathcal{V}}_1) \otimes_{\mathbf{A}(\bar{\mathcal{U}})} \mathbf{A}(\bar{\mathcal{V}}_2)$ est un relèvement lisse sur $\mathbf{A}(\bar{\mathcal{U}})$ (donc sur \mathbf{R}) de $\Gamma(\bar{\mathcal{V}}_{12}; \mathcal{O}_{\bar{\mathcal{V}}_{12}})$ où $\bar{\mathcal{V}}_{12} := \bar{\mathcal{V}}_1 \times_{\bar{\mathcal{U}}} \bar{\mathcal{V}}_2$ est canoniquement isomorphe à l'ouvert affine $\bar{\mathcal{V}}_1 \cap \bar{\mathcal{V}}_2$ puisque $\bar{\mathcal{X}}$ est supposée séparée. La complétion faible $\mathbf{A}(\bar{\mathcal{V}}_{12})^\dagger$ de $\mathbf{A}(\bar{\mathcal{V}}_{12})$ est f.c.t.f. très lisse (3.3.1 [Ar]) et le couple $(\bar{\mathcal{V}}_{12}; \mathbf{A}(\bar{\mathcal{V}}_{12})^\dagger \rightarrow \Gamma(\bar{\mathcal{V}}_{12}; \mathcal{O}_{\bar{\mathcal{X}}}))$ est un objet de $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$.

L'existence du produit fibré $\mathcal{V}_1 \times_{\mathcal{U}} \mathcal{V}_2$ dans $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$ résulte alors de compléter faiblement le diagramme (\mathcal{D}'') . ■

2.2.1. Remarque. La démonstration précédente montre que l'ouvert affine correspondant au produit fibré $\mathcal{V}_1 \times_{\mathcal{U}} \mathcal{V}_2$ est précisément $\bar{\mathcal{V}}_1 \times_{\bar{\mathcal{U}}} \bar{\mathcal{V}}_2 = \bar{\mathcal{V}}_1 \cap \bar{\mathcal{V}}_2$.

2.3 Topologie de Grothendieck sur $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$

2.3.1. Rappel. Une « *topologie de Grothendieck* » sur une catégorie \mathcal{C} avec produits fibrés est la donnée de familles de morphismes $\{\Phi_i : \mathcal{O}_i \rightarrow \mathcal{O}\}_{i \in \mathfrak{A}}$, appelées « *recouvrements (de \mathcal{C})* », telles que :

- Pour tout objet \mathcal{O} de \mathcal{C} et tout $\Phi \in \text{Iso}_{\mathcal{C}}(\mathcal{O})$, $\{\Phi : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}\}$ est un recouvrement.
- Étant donné un recouvrement $\{\Phi_i : \mathcal{O}_i \rightarrow \mathcal{O}\}_{i \in \mathfrak{A}}$ et pour chaque $i \in \mathfrak{A}$, un recouvrement $\{\Phi_{i,i'} : \mathcal{O}_{i,i'} \rightarrow \mathcal{O}_i\}_{i' \in \mathfrak{B}}$, la famille des composés $\{\Phi_i \circ \Phi_{i,i'} : \mathcal{O}_{i,i'} \rightarrow \mathcal{O}\}_{i \in \mathfrak{A}, i' \in \mathfrak{B}}$ est un recouvrement.
- Pour tout recouvrement $\{\Phi_i : \mathcal{O}_i \rightarrow \mathcal{O}\}$ et tout morphisme $\Phi' : \mathcal{O}' \rightarrow \mathcal{O}$, la famille de morphismes $\{\Phi_i \times_{\mathcal{O}} \Phi' : \mathcal{O}_i \times_{\mathcal{O}} \mathcal{O}' \rightarrow \mathcal{O}'\}$ est un recouvrement.

2.3.2. Définition. Un « *recouvrement de $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$* » est la donnée d'un objet \mathcal{U} et d'une famille $\mathcal{R} = \{\Phi_i : \mathcal{U}_i \rightarrow \mathcal{U}\}_{i \in \mathfrak{A}}$ de morphismes, tels que la famille $\{\bar{\mathcal{U}}_i\}_{i \in \mathfrak{A}}$ des ouverts de $\bar{\mathcal{X}}$ correspondants est un recouvrement de l'ouvert $\bar{\mathcal{U}}$ dans $\bar{\mathcal{X}}$. Le recouvrement $\bar{\mathcal{U}} = \bigcup_i \bar{\mathcal{U}}_i$ est « *le recouvrement de $\bar{\mathcal{U}}$ dans $\bar{\mathcal{X}}$ correspondant à \mathcal{R}* »

2.3.3. Remarque et terminologie. Soit \mathcal{U} un objet de $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$. Tout recouvrement affine $\bar{\mathcal{U}} = \bigcup_i \bar{\mathcal{U}}_i$ dans $\bar{\mathcal{X}}$ correspond à un recouvrement $\{\mathcal{U}_i \rightarrow \mathcal{U}\}$ de $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$ (cf. 2.1.1-(b)), un tel recouvrement est « *un relèvement (\dagger -adique) du recouvrement $\bar{\mathcal{U}} = \bigcup \bar{\mathcal{U}}_i$* ».

2.3.4. Notations et terminologie

- On note $\text{Rec}(\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger)$ la classe des recouvrements de $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$.
- Un recouvrement $\{\mathcal{U}_i \rightarrow \mathcal{U}\}_{i \in \mathfrak{A}}$ est dit « *fini* » lorsque l'ensemble d'indices \mathfrak{A} est de cardinal fini.
- Un recouvrement $\{\mathcal{U}_i \rightarrow \mathcal{U}\}$ est dit « *principal* » lorsque les ouverts $\bar{\mathcal{U}}_i$ sont principaux dans l'ouvert $\bar{\mathcal{U}}$ correspondant à \mathcal{U} , *i.e.* des complémentaires d'hypersurfaces de $\bar{\mathcal{U}}$.
- Deux recouvrements $\mathcal{R}_1 = \{\Phi_i : \mathcal{U}_i \rightarrow \mathcal{U}\}_{i \in \mathfrak{A}}$ et $\mathcal{R}_2 = \{\Phi_{i'} : \mathcal{V}_{i'} \rightarrow \mathcal{V}\}_{i' \in \mathfrak{B}}$ seront dits « *isomorphes* » lorsqu'il existe une bijection $\beta : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ et des isomorphismes $\Psi \in \text{Iso}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ et $\Psi_i \in \text{Iso}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}(\mathcal{U}_i, \mathcal{V}_{\beta(i)})$ tels que les diagrammes :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U}_i & \xrightarrow{\Phi_i} & \mathcal{U} \\ \Psi_i \downarrow \simeq & & \simeq \downarrow \Psi \\ \mathcal{V}_{\beta(i)} & \xrightarrow{\Phi_{i'}} & \mathcal{V} \end{array}$$

sont commutatifs pour tout $i \in \mathfrak{A}$. La famille $\{\Psi_i; \Psi\}$ est alors « *un isomorphisme de recouvrements de \mathcal{R}_1 vers \mathcal{R}_2* ».

2.3.5. Proposition. *La classe de recouvrements $\text{Rec}(\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger)$ munit la catégorie $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$ d'une topologie de Grothendieck.*

Démonstration. Résulte de la proposition 2.2 et de la remarque 2.2.1. ■

2.3.6. Définition. La catégorie $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$ munie de la classe de recouvrements $\text{Rec}(\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger)$ est « *le site des relèvements affines très lisses* » associé au schéma lisse et séparé $(\bar{\mathbf{X}}; \mathcal{O}_{\bar{\mathbf{X}}})$.

2.3.7. Notations et terminologie

- Les objets de $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$ seront appelés « *les ouverts du site $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$* ».
- On dira de deux ouverts \mathcal{V} et \mathcal{U} de $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$, que « *\mathcal{V} est contenu dans \mathcal{U}* », et l'on notera $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$, lorsqu'il en est ainsi des ouverts de $\bar{\mathbf{X}}$ correspondants. On a donc $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$, si et seulement si, $\bar{\mathcal{V}} \subseteq \bar{\mathcal{U}}$.

2.4 Algébricité des recouvrements principaux de $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$

Soient \bar{U} un ouvert affine de $\bar{\mathbf{X}}$ et $\mathbf{B} \twoheadrightarrow \Gamma(\bar{U}; \mathcal{O}_{\bar{\mathbf{X}}})$ un relèvement lisse sur \mathbf{R} . Notons $(U; \mathcal{O}_U)$ le schéma affine associé à \mathbf{B} . Tout recouvrement affine $U = \bigcup_i V_i$ induit, par réduction modulo \mathbf{I} , un recouvrement affine $\bar{U} = \bigcup_i \bar{V}_i$ dans $\bar{\mathbf{X}}$. Les complétions faibles des morphismes canoniques de relèvements :

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(U; \mathcal{O}_U) & \xrightarrow{\rho_i} & \Gamma(V_i; \mathcal{O}_U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma(\bar{U}; \mathcal{O}_{\bar{\mathbf{X}}}) & \xrightarrow{\bar{\rho}_i} & \Gamma(\bar{V}_i; \mathcal{O}_{\bar{\mathbf{X}}}) \end{array}$$

donnent des morphismes de relèvements

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A}(\mathcal{U})^\dagger & \xrightarrow{\rho_i^\dagger} & \mathbf{A}(\mathcal{V}_i)^\dagger \\ p_{\mathcal{U}} \downarrow & & \downarrow p_{\mathcal{V}_i} \\ \Gamma(\bar{U}; \mathcal{O}_{\bar{X}}) & \xrightarrow{\bar{\rho}_i} & \Gamma(\bar{V}_i; \mathcal{O}_{\bar{X}}) \end{array}$$

où l'on a noté $\mathbf{A}(\mathcal{U})^\dagger := \Gamma(U; \mathcal{O}_U)^\dagger$ et $\mathbf{A}(\mathcal{V}_i)^\dagger := \Gamma(V_i; \mathcal{O}_U)^\dagger$. Ces algèbres sont f.c.t.f. très lisses et les relèvements $p_{\mathcal{U}}$ et $p_{\mathcal{V}_i}$ sont des ouverts de $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$, notés \mathcal{U} et \mathcal{V}_i respectivement. La famille $\{\Phi_i : \mathcal{V}_i \rightarrow \mathcal{U}\}$ définie par les morphismes ρ_i^\dagger est donc un recouvrement de $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$; il sera appelé «*la complétion faible du recouvrement (algébrique) $\{\mathcal{V}_i\}$ de \mathcal{U}* ».

2.4.1. Définition. Un recouvrement de $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$ isomorphe à la complétion faible d'un recouvrement affine d'un relèvement lisse d'un ouvert affine de \bar{X} sera dit «*algébrique*».

2.4.2. Proposition. *Tout recouvrement principal de $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$ est algébrique.*

Démonstration. Soit $\mathcal{R} = \{\mathcal{U}_i \rightarrow \mathcal{U}\}_{i \in \mathfrak{A}}$ un recouvrement principal de $\bar{X}_{\text{inf}}^\dagger$ et notons $\{\bar{U}_i \subseteq \bar{U}\}$ le recouvrement induit dans \bar{X} . Pour chaque ouvert \bar{U}_i , on choisit $f_i \in \Gamma(\bar{U}_i; \mathcal{O}_{\bar{X}})$ tel que $\bar{U}_i = D(f_i)$. Fixons un relèvement $p : \mathbf{B} \rightarrow \Gamma(\bar{U}; \mathcal{O}_{\bar{X}})$ lisse sur \mathbf{R} et, pour chaque $i \in \mathfrak{A}$, un élément $g_i \in \mathbf{B}$ tel que $p(g_i) = f_i$. Comme $\bar{U} = \bigcup_i D(f_i)$, l'idéal de $\Gamma(\bar{U}; \mathcal{O}_{\bar{X}})$ engendré par les f_i contient 1; il existe, par conséquent, un élément g de l'idéal de \mathbf{B} engendré par les g_i vérifiant $p(g) = 1$ et le morphisme p induit un relèvement lisse $\mathbf{B}_g \rightarrow \Gamma(\bar{U}; \mathcal{O}_{\bar{X}})$. La famille $\{D(g_i)\}$ est maintenant un recouvrement (principal) du schéma affine $(U; \mathcal{O}_U)$ associé à \mathbf{B}_g qui relève, par construction, le recouvrement $\{D(f_i)\}$ de \bar{U} . Notons $\mathcal{R}' = \{\mathcal{V}_i \rightarrow \mathcal{V}\}$ le recouvrement de $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$ obtenu par complétion faible de la famille d'inclusions $\{D(g_i) \subseteq U\}$. On a $\mathcal{V}_i \simeq \mathcal{U}_i$ et $\mathcal{V} \simeq \mathcal{U}$ et la proposition 1.2.1 établit l'existence, pour tout $\Psi \in \text{Iso}_{\bar{X}_{\text{inf}}^\dagger}(\mathcal{V}, \mathcal{U})$ donné, d'une famille $\{\Psi_i \in \text{Iso}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}(\mathcal{V}_i, \mathcal{U}_i)\}$ telle que $\{\Psi_i; \Psi\}$ est un isomorphisme de \mathcal{R}' vers \mathcal{R} . Le recouvrement \mathcal{R} est donc bien algébrique. ■

2.4.3. Commentaire. La proposition 1.2.1 montre que tout morphisme entre deux ouverts $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ de $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$, d'ouverts correspondants $\bar{\mathcal{V}} \subseteq \bar{\mathcal{U}}$, est isomorphe à la complétion faible d'un morphisme lisse $\alpha : V \rightarrow U$ entre deux relèvements lisses sur \mathbf{R} de $\bar{\mathcal{V}}$ et $\bar{\mathcal{U}}$ respectivement, mais cette proposition n'établit pas l'existence d'un tel α qui soit, en plus, un plongement ouvert. La démonstration précédente prouve que c'est toujours le cas lorsque $\bar{\mathcal{V}}$ est principal dans $\bar{\mathcal{U}}$.

2.5 Préfaisceaux et faisceaux sur $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$

Soit \mathbf{Z} un anneau arbitraire. Un préfaisceau de \mathbf{Z} -modules sur $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$ est un foncteur contravariant de $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$ vers la catégorie $\text{Mod}(\mathbf{Z})$ des \mathbf{Z} -modules (à gauche). Pour tout préfaisceau $\mathcal{P} : \mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger \rightsquigarrow \text{Mod}(\mathbf{Z})$ et tout morphisme $\Phi \in \text{Mor}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}(\mathcal{V}, \mathcal{U})$, le morphisme de \mathbf{Z} -modules $\mathcal{P}(\Phi) : \mathcal{P}(\mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{V})$ est «*le morphisme de restriction associé à Φ par \mathcal{P}* ».

Un préfaisceau \mathcal{P} sur $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$ est dit « *faisceau sur le site $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$* » lorsque pour tout recouvrement $\mathcal{R} = \{\Phi_i : \mathcal{U}_i \rightarrow \mathcal{U}\}_{i \in \mathfrak{A}}$ du site $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$, la suite de \mathbf{Z} -modules :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{0} & \rightarrow & \mathcal{P}(\mathcal{U}) & \xrightarrow{\Pi_{\mathcal{R}}} & \prod_{i \in \mathfrak{A}} \mathcal{P}(\mathcal{U}_i) & \xrightarrow{\Delta_{\mathcal{R}}} & \prod_{i, i' \in \mathfrak{A}} \mathcal{P}(\mathcal{U}_i \times_{\mathcal{U}} \mathcal{U}_{i'}) \\ & & m & \xrightarrow{\Pi_{\mathcal{R}}} & (\mathcal{P}(\Phi_i)(m))_i & & \\ & & & & (m_i)_i & \xrightarrow{\Pi_{\mathcal{R}}} & (\mathcal{P}(\xi_i)(m_i) - \mathcal{P}(\xi_{i'})(m_{i'}))_{i, i'} \end{array} \quad (\mathcal{P}(\mathcal{R}))$$

où $\xi_i : \mathcal{U}_i \times_{\mathcal{U}} \mathcal{U}_{i'} \rightarrow \mathcal{U}_i$ (resp. $\xi_{i'}$) désigne le morphisme de 2.2, est **exacte**.

2.5.1. Proposition. *Un préfaisceau \mathcal{P} est un faisceau, si et seulement si, la suite $\mathcal{P}(\mathcal{R})$ est exacte pour tout recouvrement **fini et principal** \mathcal{R} de $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$.*

Démonstration. Soit \mathcal{P} un préfaisceau vérifiant la condition de la proposition. Nous devons prouver que pour tout recouvrement $\mathcal{R} = \{\Phi_i : \mathcal{U}_i \rightarrow \mathcal{U}\}_{i \in \mathfrak{A}}$, la suite de \mathbf{A} -modules :

$$\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{U}) \xrightarrow{\Pi_{\mathcal{R}}} \prod_{i \in \mathfrak{A}} \mathcal{P}(\mathcal{U}_i) \xrightarrow{\Delta_{\mathcal{R}}} \prod_{i, i' \in \mathfrak{A}} \mathcal{P}(\mathcal{U}_i \times_{\mathcal{U}} \mathcal{U}_{i'}) \quad (*)$$

est exacte.

Remarquons pour commencer que l'exactitude des suites (*) associées aux recouvrements *finis* de $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$ implique l'exactitude des suites $\mathcal{P}(\mathcal{R})$ en toute généralité. En effet, comme l'ouvert $\bar{\mathcal{U}}$ est affine, il existe une partie finie $\mathfrak{A}' = \{i_1, \dots, i_r\} \subseteq \mathfrak{A}$ telle que $\mathcal{R}' = \{\Phi_{i_i} : \mathcal{U}_{i_i} \rightarrow \mathcal{U}\}_{i=1, \dots, r}$ est un recouvrement de $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$ et la suite (*) associée à \mathcal{R}' est exacte. L'injectivité de $\Pi_{\mathcal{R}'}$ entraîne celle de $\Pi_{\mathcal{R}}$ et lorsque $\vec{x} := (x_i)$ (\dagger) est un élément de $\prod_i \mathcal{P}(\mathcal{U}_i)$ annulé par $\Delta_{\mathcal{R}}$, l'élément $\vec{x}' := (x_{i_i}) \in \prod_{i=1, \dots, r} \mathcal{P}(\mathcal{U}_{i_i})$ est annulé par $\Delta_{\mathcal{R}'}$ et il existe $y_{\mathcal{R}'} \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$ (unique) tel que $\phi_{i_i}(y_{\mathcal{R}'}) = x_{i_i}$, pour tout $i = 1, \dots, r$. Ces raisonnements s'appliquent évidemment à tout sous-recouvrement fini \mathcal{R}'' de \mathcal{R} , en particulier à ceux indexés par les parties $\mathfrak{A}'' \subseteq \mathfrak{A}$ de la forme $\mathfrak{A}'' := \mathfrak{A}' \cup \{i\}$, avec $i \in \mathfrak{A}$. L'élément $y_{\mathcal{R}''} \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$, correspondant au même choix (\dagger) de \vec{x} , est alors nécessairement égal à $y_{\mathcal{R}'}$ puisque $\Pi_{\mathcal{R}'}$ est injective. Il s'ensuit que $\phi_i(y_{\mathcal{R}'}) = x_i$ pour tout $i \in \mathfrak{A}$, et la suite (*) est exacte.

Lorsque $\mathcal{R} = \{\mathcal{U}_i \rightarrow \mathcal{U}\}_{i \in \mathfrak{A}}$ est un recouvrement fini quelconque de recouvrement correspondant $\bar{\mathcal{U}} = \bigcup_i \bar{\mathcal{U}}_i$, on se donne pour chaque $i \in \mathfrak{A}$ un recouvrement fini $\bar{\mathcal{U}}_i = \bigcup_{i' \in \mathfrak{B}} \bar{\mathcal{U}}_{i, i'}$ par des ouverts *principaux dans $\bar{\mathcal{U}}$* et un recouvrement $\mathcal{R}_i = \{\Phi_{i, i'} : \mathcal{U}_{i, i'} \rightarrow \mathcal{U}_i\}$ de $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$ le relevant. Le recouvrement \mathcal{R}_i est alors fini et principal de même que le recouvrement composé $\mathcal{R}_* = \{\mathcal{U}_{i, i'} \rightarrow \mathcal{U}\}$ et les suites $\mathcal{P}(\mathcal{R}_i)$ et $\mathcal{P}(\mathcal{R}_*)$ sont exactes par hypothèse. On considère alors le morphisme de complexes :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{0} & \rightarrow & \mathcal{P}(\mathcal{U}) & \xrightarrow{\Pi_{\mathcal{R}}} & \prod_{i \in \mathfrak{A}} \mathcal{P}(\mathcal{U}_i) & \xrightarrow{\Delta_{\mathcal{R}}} & \prod_{i, i' \in \mathfrak{A}} \mathcal{P}(\mathcal{U}_i \times_{\mathcal{U}} \mathcal{U}_{i'}) \\ & & \parallel & & \downarrow \prod \phi_{i, i'} & & \downarrow \\ \mathbf{0} & \rightarrow & \mathcal{P}(\mathcal{U}) & \xrightarrow{\Pi_{\mathcal{R}_*}} & \prod_{i \in \mathfrak{A}; i' \in \mathfrak{B}} \mathcal{P}(\mathcal{U}_{i, i'}) & \xrightarrow{\Delta_{\mathcal{R}_*}} & \prod_{i, i' \in \mathfrak{A}; i'' \in \mathfrak{B}} \mathcal{P}(\mathcal{U}_{i, i'} \times_{\mathcal{U}} \mathcal{U}_{i', i''}) \end{array}$$

où les morphismes verticaux sont donnés par les produits des morphismes de restriction. Pour tout $(x_i) \in \ker(\Delta_{\mathcal{R}})$, l'élément $(y_{i, i'}) := \prod \phi_{i, i'}((x_i))$ appartient à $\ker(\Delta(\mathcal{R}_*))$ et il existe un

élément de $x \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$ tel que $\Pi_{\mathcal{R}_*}(x) = (y_{i,v})$. L'égalité $\Pi_{\mathcal{R}}(x) = (x_i)$ découle alors de l'injectivité de $\prod \phi_{i,v}$ (pour chaque i donné). ■

2.5.2. Notation. On notera $\text{Préf}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}(\mathcal{Z})$ et $\text{Mod}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}(\mathcal{Z})$ respectivement la catégorie des pré-faisceaux et des faisceaux de \mathcal{Z} -modules sur le site $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$.

§ 3. Sous-sites de Meredith

3.1 Rappel de résultats

Dans les sections suivantes nous allons utiliser quelques résultats de base établis dans les articles de Monsky-Washnitzer ([MW]) et de Meredith ([M]) parfois sous des hypothèses générales plus fortes que celles requises pour leur démonstration. Nous donnons maintenant la liste de ces résultats valables uniquement sous l'hypothèse que l'anneau \mathbf{R} est noethérien⁽¹⁾.

- a) Pour toute \mathbf{R} -algèbre \mathbf{A} le morphisme canonique $\varphi_j : \mathbf{A}/\mathbf{I}^j \cdot \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}^\dagger/\mathbf{I}^j \cdot \mathbf{A}^\dagger$ est bijectif, quel que soit $j \in \mathbb{N}$.
- b) Soit \mathbf{A} une \mathbf{R} -algèbre f.c.t.f.
 - i) \mathbf{A} est quotient de $\mathbf{R}[\overline{X}]^\dagger$ où \overline{X} désigne une liste finie de variables.
 - ii) \mathbf{A} est noethérienne.
- c) Si \mathbf{A} est f.c.t.f. $(\mathbf{A}, \mathbf{I} \cdot \mathbf{A})$ est un anneau de Zariski.
- d) Soit \mathbf{A} une \mathbf{R} -algèbre. Si \mathbf{A} et \mathbf{A}^\dagger sont noethériennes, \mathbf{A}^\dagger est plate sur \mathbf{A} .
- e) Soit \mathbf{A} une \mathbf{R} -algèbre de type fini ou f.c.t.f.
 - i) Pour tout $f \in \mathbf{A}$, l'algèbre $(\mathbf{A}_f)^\dagger = ((\mathbf{A}^\dagger)_f)^\dagger$ est plate sur \mathbf{A} .
 - ii) Soient $f, g \in \mathbf{A}$ tels que \overline{f} est inversible dans $\overline{\mathbf{A}}_{\overline{g}}$.
L'application naturelle $\overline{\mathbf{A}}_{\overline{f}} \rightarrow \overline{\mathbf{A}}_{\overline{g}}$ est la réduction modulo \mathbf{I} d'un et d'un unique morphisme de \mathbf{A} -algèbres $(\mathbf{A}_f)^\dagger \rightarrow (\mathbf{A}_g)^\dagger$.

3.1.1. Notation. Pour toute \mathbf{R} -algèbre \mathbf{A} et tout $f \in \mathbf{A}^\dagger$, on notera $\mathbf{A}^\dagger_{[f]} := ((\mathbf{A}^\dagger)_f)^\dagger$.

3.1.2. Convention. Dans la suite une \mathbf{R} -algèbre sera toujours de type fini ou f.c.t.f. sauf mention expresse du contraire.

3.2 Rappel sur les schémas formels faibles affines de Meredith

3.2.1. Soit \mathbf{A} une \mathbf{R} -algèbre de type fini. Notons $\mathbf{X} := \text{Spec}(\mathbf{A})$ et $\overline{\mathbf{X}} := \text{Spec}(\overline{\mathbf{A}})$ de schémas affines respectivement notés $(\mathbf{X}, \mathcal{O}_{\mathbf{X}})$ et $(\overline{\mathbf{X}}, \mathcal{O}_{\overline{\mathbf{X}}})$. Dans [M], Meredith introduit un nouvel espace annelé : « le schéma formel faible affine associé à \mathbf{A} », noté $(\overline{\mathbf{X}}, \mathcal{O}_{\overline{\mathbf{X}}}^\dagger)$, où

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{O}_{\overline{\mathbf{X}}}^\dagger := \text{faisceau associé au préfaisceau défini sur la base des ouverts} \\ \text{principaux de } \overline{\mathbf{X}} \text{ par } D(\overline{f}) \rightsquigarrow (\mathbf{A}_f)^\dagger, \text{ où } f \in \mathbf{A} \text{ est un relèvement} \\ \text{arbitrairement choisi de } \overline{f} \in \overline{\mathbf{A}}. \end{array} \right.$$

L'énoncé ((e)-(ii)) de 3.1 justifie cette définition.

¹ Voir [MW] pour les assertions (a,b,c) et [M] pour les autres.

Terminologie. Dans la suite l'expression «schéma (affine) de Meredith associé à \mathbf{A} » sera synonyme de «schéma formel faible affine associé à \mathbf{A} ».

3.2.2. Meredith s'intéresse plus généralement au foncteur de la catégorie des \mathbf{A}^\dagger -modules (à gauche) vers la catégorie des $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}^\dagger$ -modules (à gauche), noté $(\simeq) : \text{Mod}(\mathbf{A}^\dagger) \rightsquigarrow \text{Mod}(\mathcal{O}_{\mathbf{X}}^\dagger)$, qui fait correspondre au module \mathbf{M} le faisceau $\widetilde{\mathbf{M}}$ sur $\overline{\mathbf{X}}$ associé au préfaisceau défini sur la base des ouverts principaux de $\overline{\mathbf{X}}$ par $D(\overline{f}) \rightsquigarrow (\mathbf{A}_f)^\dagger \otimes_{\mathbf{A}^\dagger} \mathbf{M}$.

Le théorème suivant rassemble plusieurs résultats de [M].

3.2.3. Théorème ([M]). Si \mathbf{R} est un anneau local noethérien d'idéal maximal \mathbf{I} et si \mathbf{A} est une \mathbf{R} -algèbre de type fini :

a) Le foncteur $(\simeq) : \text{Mod}(\mathbf{A}^\dagger) \rightsquigarrow \text{Mod}(\mathcal{O}_{\mathbf{X}}^\dagger)$ est exact.

Pour tout \mathbf{A}^\dagger -module de type fini \mathbf{M} et tout ouvert principal $\overline{U} \subseteq \overline{\mathbf{X}}$:

b) Le morphisme canonique $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}^\dagger(\overline{U}) \otimes_{\mathbf{A}^\dagger} \mathbf{M} \rightarrow \Gamma(\overline{U}; \widetilde{\mathbf{M}}) = H^0(\overline{U}; \widetilde{\mathbf{M}})$ est bijectif.

c) $H^i(\overline{U}; \widetilde{\mathbf{M}}) = 0$, pour tout $i > 0$.

3.2.4. Généralisation des résultats de Meredith. Nous allons redémontrer le théorème 3.2.3 avec comme seule condition sur \mathbf{R} d'être noethérien et en supprimant l'hypothèse de finitude sur le \mathbf{A}^\dagger -module \mathbf{M} . Nous suivrons de près une approche classique du théorème d'acyclicité de Serre pour les faisceaux quasi-cohérents sur un schéma affine dont nous rappelons maintenant le point central en guise de motivation pour la suite.

• Étant donné une \mathbf{R} -algèbre de type fini \mathbf{A} et $f_1, f_2 \in \mathbf{A}$, le complexe de Mayer-Vietoris

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{0} & \rightarrow & \mathbf{A} & \xrightarrow{\epsilon} & \mathbf{A}_{f_1} \oplus \mathbf{A}_{f_2} & \xrightarrow{\delta_0} & \mathbf{A}_{f_1 f_2} \rightarrow \mathbf{0} \\ & & a & \longmapsto & (a, a) & & \\ & & & & (x_1, x_2) & \longmapsto & (x_1 - x_2) \end{array} \quad (\diamond)$$

est exact lorsque $(f_1, f_2) = \mathbf{A}$.

L'énoncé résulte pour l'essentiel du fait que le noyau du morphisme canonique $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}_{f_i}$ est l'idéal des éléments $a \in \mathbf{A}$ tels $f_i^N a = 0$ pour $N \in \mathbb{N}$ assez grand. À l'aide d'une égalité $1 = \xi_1 f_1^N + \xi_2 f_2^N$, obtenue par exemple à partir de $1 = \zeta_1 f_1 + \zeta_2 f_2$ en développant $1 = (\zeta_1 f_1 + \zeta_2 f_2)^{2N}$, on déduit que $a = \xi_1 f_1^N a + \xi_2 f_2^N a$, d'où l'injectivité de ϵ . Ensuite, lorsque l'on se donne des éléments $x_i = a_i / f_i^N \in \mathbf{A}_{f_i}$ avec $a_i \in \mathbf{A}$, la condition $x_1 = x_2$ dans $\mathbf{A}_{f_1 f_2}$, équivaut à la condition sur \mathbf{A} :

$$(f_1 f_2)^M (f_2^N a_1 - f_1^N a_2) = 0, \text{ pour } M \in \mathbb{N} \text{ assez grand.} \quad (\star)$$

On choisit maintenant une égalité de la forme $1 = \xi_1 f_1^{M+N} + \xi_2 f_2^{M+N}$ et l'élément

$$a := \xi_1 f_1^M a_1 + \xi_2 f_2^M a_2 \in \mathbf{A} \quad (\star\star)$$

vérifie $a = x_i$ dans \mathbf{A}_{f_i} pour $i = 1, 2$, d'où l'exactitude à gauche de (\diamond) . Enfin, à partir de l'égalité évidente dans $\mathbf{A}_{f_1 f_2}$

$$\frac{1}{f_1 f_2} = \frac{\zeta_1 f_1 + \zeta_2 f_2}{f_1 f_2} = \frac{\zeta_1}{f_2} + \frac{\zeta_2}{f_1}$$

on obtient par induction des décompositions

$$\left(\frac{1}{f_1 f_2}\right)^m = R_{1,m}\left(\zeta_1, \zeta_2, \frac{1}{f_1}\right) + R_{2,m}\left(\zeta_1, \zeta_2, \frac{1}{f_2}\right)$$

pour tout $m \in \mathbb{N}$ avec $R_{i,m} \in \mathbb{Z}[X, Y, Z]$. En particulier, un élément de $\mathbf{A}_{f_1 f_2}$ est toujours de la forme

$$\frac{a}{(f_1 f_2)^N} = R_{1,m}\left(\zeta_1, \zeta_2, \frac{1}{f_1}\right) a + R_{2,m}\left(\zeta_1, \zeta_2, \frac{1}{f_2}\right) a$$

avec $a \in \mathbf{A}$ et il appartient bien à l'image de δ_0 .

Une fois établie l'exactitude des suites (\diamond) , des considérations générales sur la cohomologie de Čech que nous rappellerons dans 3.2.9 donnent l'acyclicité des faisceaux des \mathcal{O} -modules engendrés par leurs sections globales. C'est par cette démarche que nous allons généraliser le théorème 3.2.3. Nous montrerons donc dans un premier temps que l'analogie \dagger -adique de (\diamond) , la suite

$$\mathbf{0} \rightarrow \mathbf{A}^\dagger \xrightarrow{\epsilon^\dagger} (\mathbf{A}_{f_1})^\dagger \oplus (\mathbf{A}_{f_2})^\dagger \xrightarrow{\delta_0^\dagger} (\mathbf{A}_{f_1 f_2})^\dagger \rightarrow \mathbf{0},$$

est exacte ce pourquoi il nous faudra, comme dans le rappel ci-dessus, la description du noyau du morphisme canonique $\mathbf{A}^\dagger \rightarrow (\mathbf{A}_f)^\dagger$ (lemme 3.2.5) et plus important encore des estimations des degrés M et N dans (\star) et $(\star\star)$ nécessaires pour l'étude de la convergence \dagger -adique (lemme technique 3.2.6).

3.2.5. Lemme. *Soit f un élément d'une \mathbf{R} -algèbre \mathbf{A} supposée de type fini (ou f.c.t.f.). Pour tout \mathbf{A}^\dagger -module \mathbf{M} , le noyau du morphisme canonique $\nu_{f,\mathbf{M}}^\dagger : \mathbf{M} \rightarrow (\mathbf{A}_f)^\dagger \otimes_{\mathbf{A}^\dagger} \mathbf{M}$ est le sous-module des éléments $m \in \mathbf{M}$ tels que $(f^N + w) \cdot m = 0$, pour certain $w \in \mathbf{I} \cdot \mathbf{A}^\dagger$ et pour $N \in \mathbb{N}$ assez grand.*

En particulier, si $m \in \ker(\nu_{f,\mathbf{M}}^\dagger)$, on a $f^N m \in (\mathbf{I} \cdot \mathbf{A}^\dagger) \cdot m$ pour tout $N \in \mathbb{N}$ assez grand.

Démonstration. Supposons dans un premier temps le module \mathbf{M} de type fini sur \mathbf{A}^\dagger . Le $(\mathbf{A}_f)^\dagger$ -module $(\mathbf{A}_f)^\dagger \otimes_{\mathbf{A}^\dagger} \mathbf{M}$ est alors de type fini, donc séparé, pour le topologie \mathbf{I} -adique (3.1-(c)) et le noyau du morphisme canonique :

$$\mathbf{M}_f := (\mathbf{A}^\dagger)_f \otimes \mathbf{M} \xrightarrow{\mu} (\mathbf{A}_f)^\dagger \otimes \mathbf{M}$$

contient, par conséquent, l'adhérence $\bar{0}$ de 0 dans \mathbf{M}_f pour la topologie \mathbf{I} -adique. D'autre part, les réductions modulo \mathbf{I}^m sont des isomorphismes et un élément du noyau de μ appartient à $\bar{0}$. Donc $\ker(\mu) = \bar{0}$. Or, comme $(\mathbf{A}^\dagger)_f$ est noethérien et que \mathbf{M}_f est un $(\mathbf{A}^\dagger)_f$ -module de type fini, on a $\mathbf{I} \cdot \bar{0} = \bar{0}$ et $(1+w) \cdot \ker(\mu) = 0$ pour un certain $w \in \mathbf{I} \cdot (\mathbf{A}^\dagger)_f$; autrement dit, $(f^N + w) \cdot \ker(\mu) = 0$ pour certains $N \in \mathbb{N}$ et $w \in \mathbf{I} \cdot \mathbf{A}^\dagger$. On conclut en remarquant que $\nu_{f,\mathbf{M}}^\dagger$ se factorise à travers le morphisme canonique $\nu_{f,\mathbf{M}} : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}_f$, i.e. $\nu_{f,\mathbf{M}}^\dagger = \mu \circ \nu_{f,\mathbf{M}}$, de sorte que $\nu_{f,\mathbf{M}}^\dagger(m) = 0$, si et seulement si, $\nu_{f,\mathbf{M}}(m) \in \bar{0}$, autrement dit, si et seulement si, $\nu_{f,\mathbf{M}}((f^N + w)m) = 0$, ou encore $f^M((f^N + w)m) = 0$ pour certains $M, N \in \mathbb{N}$ et $w \in \mathbf{I} \cdot \mathbf{A}^\dagger$.

Dans le cas où M est un A^\dagger -module arbitraire, notons (m) le sous-module de M engendré par un élément $m \in M$. On a alors le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} (m) & \xleftarrow{\subseteq} & M \\ \nu_{f,(m)}^\dagger \downarrow & & \downarrow \nu_{f,M}^\dagger \\ (A_f)^\dagger \otimes (m) & \xleftarrow{\text{id} \otimes \subseteq} & (A_f)^\dagger \otimes M \end{array}$$

où $(\text{id} \otimes \subseteq)$ est injectif puisque l'algèbre $(A_f)^\dagger$ est plate sur A^\dagger (3.1-(e)-(i)). Il s'ensuit que m appartient au noyau de $\nu_{f,M}^\dagger$, si et seulement si, il appartient au noyau de $\nu_{f,(m)}^\dagger$ déjà étudié dans le paragraphe précédent. ■

3.2.6. Lemme technique. *On se donne un élément P et un idéal K de l'algèbre de polynômes $\mathbf{R}[\vec{X}] := \mathbf{R}[X_1, \dots, X_\ell]$. Pour tous $m, n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbf{I}^n[\vec{X}]_m$ le sous- \mathbf{R} -module des polynômes de $\mathbf{R}[\vec{X}]$ à coefficients dans \mathbf{I}^n et de degré total majoré par m .*

Il existe des entiers positifs $N(P, K)$ et $M(P, K)$, tels que les ensembles :

$$\begin{aligned} \text{C1}(P, K, n) &= \{Q \in \mathbf{I}^n[\vec{X}] \mid P^N Q \in (K + \mathbf{I}^{n+1}[\vec{X}]), \text{ pour } N \text{ assez grand}\} \\ \text{C2}(P, K, n) &= \{Q \in \mathbf{I}^n[\vec{X}] \mid P^{N(P,K)} Q \in (K + \mathbf{I}^{n+1}[\vec{X}]_{m+M(P,K)}) \text{ si } Q \in \mathbf{I}^n[\vec{X}]_m\} \end{aligned}$$

sont égaux, et ceci quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

Plus généralement, si $Q \in \mathbf{I}^n[\vec{X}]_m$ et si $P^N Q \in (K + \mathbf{I}^{n+r}[\vec{X}])$, pour N assez grand et pour un certain $r \in \mathbb{N}$, alors :

$$P^{rN(P,K)} Q \in (K + \mathbf{I}^{n+r}[\vec{X}]_{m+rM(P,K)}).$$

Démonstration. Pour chaque $n, m \in \mathbb{N}$, notons $F^{n,m}(\mathbf{I}; \mathbf{R}[\vec{X}]) := \mathbf{I}^n[\vec{X}]_m U^n T^m$, où U et T désignent des variables formelles. On munit $F^{n,m}(\mathbf{I}; \mathbf{R}[\vec{X}])$ de la structure de \mathbf{R} -module de $\mathbf{I}^n[\vec{X}]_m$ et l'on considère $F^{*,*}(\mathbf{I}; \mathbf{R}[\vec{X}]) := \bigoplus_{n,m \in \mathbb{N}} \mathbf{I}^n[\vec{X}]_m U^n T^m$ muni de la structure de \mathbf{R} -algèbre positivement graduée donnée par les égalités :

$$Q_1 U^{n_1} T^{m_1} \cdot Q_2 U^{n_2} T^{m_2} := Q_1 Q_2 U^{n_1+n_2} T^{m_1+m_2},$$

pour tous $n_i, m_i \in \mathbb{N}$ et $Q_i \in \mathbf{I}^{n_i}[\vec{X}]_{m_i}$. La \mathbf{R} -sous-algèbre

$$F^{0,*}(\mathbf{I}; \mathbf{R}[\vec{X}]) = \mathbf{R} \oplus \mathbf{R}[\vec{X}]_1 T \oplus \mathbf{R}[\vec{X}]_2 T^2 \oplus \dots \oplus \mathbf{R}[\vec{X}]_m T^m \oplus \dots$$

est engendrée par $\mathbf{R} \oplus \mathbf{R}[\vec{X}]_1 T$, et $F^{*,*}(\mathbf{I}; \mathbf{R}[\vec{X}])$, vue comme $F^{0,*}(\mathbf{I}; \mathbf{R}[\vec{X}])$ -algèbre, est engendrée par $\mathbf{R} \oplus \mathbf{I}U$. Il s'ensuit que $F^{*,*}(\mathbf{I}; \mathbf{R}[\vec{X}])$ est une \mathbf{R} -algèbre de type fini et $F^{*,*}(\mathbf{I}; \mathbf{R}[\vec{X}])$ est un anneau noethérien.

Ceci étant, l'inclusion $\text{C2}(P, K, n) \subseteq \text{C1}(P, K, n)$ est claire. Montrons la réciproque. L'ensemble des sommes finies $\sum_{n,m} Q_{n,m} U^n T^m$ où $Q_{n,m} \in \text{C1}(P, K, n)$ est un idéal noté \mathcal{M} de $F^{*,*}(\mathbf{I}; \mathbf{R}[\vec{X}])$, il est donc de type fini et l'existence de $N(P, K)$ s'ensuit.

De même, pour chaque $M \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\mathcal{M}(M)$ des éléments $\sum_{n,m} Q_{n,m} U^n T^m$ de \mathcal{M}

tels que $P^{N(P,K)}Q_{n,m} \in (\mathbf{K} + \mathbf{I}^{n+1}[\overline{X}]_{m+M})$, est un idéal de $F^{*,*}(\mathbf{I}; \mathbf{R}[\overline{X}])$, et comme \mathcal{M} est la réunion de la suite croissante d'idéaux $\mathcal{M}(0) \subseteq \mathcal{M}(1) \subseteq \dots \mathcal{M}(M) \subseteq \dots$, on a $\mathcal{M} = \mathcal{M}(M)$ pour M assez grand. On peut donc prendre pour $M(P, \mathbf{K})$ la borne inférieure de tels M .

La conclusion finale résulte d'un argument inductif évident. \blacksquare

3.2.7. Théorème. Soient \mathbf{A}^\dagger une \mathbf{R} -algèbre f.c.t.f. et $f_1, f_2 \in \mathbf{A}^\dagger$ tels que $(f_1, f_2) = \mathbf{A}^\dagger$. La suite de Mayer-Vietoris

$$\mathbf{0} \rightarrow \mathbf{A}^\dagger \xrightarrow{\epsilon^\dagger} \mathbf{A}^\dagger_{[f_1]} \oplus \mathbf{A}^\dagger_{[f_2]} \xrightarrow{\delta_0^\dagger} \mathbf{A}^\dagger_{[f_1 f_2]} \rightarrow \mathbf{0} \quad (\star)$$

est exacte.

Démonstration. L'algèbre \mathbf{A}^\dagger étant f.c.t.f., notons \mathbf{A} la sous- \mathbf{R} -algèbre de \mathbf{A}^\dagger engendrée par les éléments d'une famille finie de générateurs (\dagger -adiques) de \mathbf{A}^\dagger , les éléments f_1, f_2 et des éléments $g_1, g_2 \in \mathbf{A}^\dagger$ vérifiant $g_1 f_1 + g_2 f_2 = 1$. La \mathbf{R} -algèbre \mathbf{A} est alors de type fini et sa complétion \dagger -adique s'identifie canoniquement à \mathbf{A}^\dagger . Dans la suite la notation ' \mathbf{A}^\dagger ' fera donc référence à la complétion \dagger -adique de \mathbf{A} . On a :

$$\mathbf{A}^\dagger_{[?]} = (\mathbf{A}_?)^\dagger \quad \text{et} \quad \mathbf{A} \cdot f_1 + \mathbf{A} \cdot f_2 = \mathbf{A} \quad (\diamond)$$

Injectivité de ϵ^\dagger . Pour $x \in \ker(\epsilon^\dagger)$, on a $\nu_i^\dagger(x) = 0$ pour $i = 1, \dots, r$. Il existe donc des entiers N_i et des éléments $w_i \in \mathbf{I} \cdot \mathbf{A}^\dagger$ tels que $(f_i^{N_i} + w_i) \cdot x = 0$ (3.2.5). Comme $\mathbf{A} \cdot f_1 + \mathbf{A} \cdot f_2 = \mathbf{A}$, il existe $\xi_i \in \mathbf{A}$ tel que $\sum_i \xi_i f_i^{N_i} = 1$ et $\text{Annul}_{\mathbf{A}^\dagger}(x)$ contient un élément de la forme $(1 + w)$ avec $w \in \mathbf{I} \cdot \mathbf{A}^\dagger$ et donc $\text{Annul}_{\mathbf{A}^\dagger}(x) = \mathbf{A}^\dagger$.

Exactitude du terme central de (\star) . Dans le morphisme canonique de complexes :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{0} & \rightarrow & \mathbf{A}^\dagger & \xrightarrow{\epsilon^\dagger} & (\mathbf{A}_{f_1})^\dagger \oplus (\mathbf{A}_{f_2})^\dagger & \xrightarrow{\delta_0^\dagger} & (\mathbf{A}_{f_1 f_2})^\dagger \rightarrow \mathbf{0} \\ & & \subseteq \downarrow & & \subseteq \downarrow & & \subseteq \downarrow \\ \mathbf{0} & \rightarrow & \widehat{\mathbf{A}} & \xrightarrow{\widehat{\epsilon}} & \widehat{\mathbf{A}}_{f_1} \oplus \widehat{\mathbf{A}}_{f_2} & \xrightarrow{\widehat{\delta}_0} & \widehat{\mathbf{A}}_{f_1 f_2} \rightarrow \mathbf{0} \end{array}$$

les colonnes sont injectives puisque leurs réductions modulo les puissances \mathbf{I}^m sont bijectives et que tous les algèbres considérées sont séparées pour la topologie \mathbf{I} -adique. De même, la deuxième ligne est exacte puisqu'il en est ainsi de ses réductions modulo \mathbf{I}^m . Il s'ensuit que pour tout élément $\vec{z} = (z_1, z_2)$ de $(\mathbf{A}_{f_1})^\dagger \oplus (\mathbf{A}_{f_2})^\dagger$ annulé par δ_0^\dagger , donc par $\widehat{\delta}_0$, il existe un (unique) élément $z \in \widehat{\mathbf{A}}$ tel que $\widehat{\epsilon}(z) = \vec{z}$. **Nous allons prouver que $z \in \mathbf{A}^\dagger$.**

Un élément $\vec{z} \in (\mathbf{A}_{f_1})^\dagger \oplus (\mathbf{A}_{f_2})^\dagger$ est la donnée de deux familles finies \vec{x}_1, \vec{x}_2 (que l'on peut toujours supposer du même cardinal ℓ) avec $\vec{x}_i = \{x_{i,1}, \dots, x_{i,\ell}\} \subseteq \mathbf{A}_{f_i}$, et des suites :

$$(p_{i,0}(\vec{X}_i), p_{i,1}(\vec{X}_i), p_{i,2}(\vec{X}_i), \dots, p_{i,n}(\vec{X}_i), \dots)_i, \quad \text{pour } i = 1, 2,$$

de polynômes de $\mathbf{R}[\vec{X}_i] := \mathbf{R}[X_{i,1}, \dots, X_{i,\ell}]$ vérifiant, pour $i = 1, 2$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} p_{i,n} \in \mathbf{I}^n[\vec{X}_i], & \text{et} \\ \deg_{\vec{X}_i}(p_{i,n}) \leq (n+1)C, \end{cases}$$

pour une certaine constante $C \in \mathbb{N}$ indépendante de i et n . L'élément \vec{z} est alors l'élément de $\widehat{\mathbf{A}}_{f_1} \oplus \widehat{\mathbf{A}}_{f_2}$ défini par la série :

$$\vec{z} = \sum_{n \geq 0} \begin{pmatrix} p_{1,n}(x_{1,1}, \dots, x_{1,\ell}) \\ p_{2,n}(x_{2,1}, \dots, x_{2,\ell}) \end{pmatrix} \quad (*)$$

Par finitude de l'ensemble $\{x_{i,j}\}$, il existe un entier N , indépendant de (i,j) , tel que :

$$x_{i,j} = \frac{a_{i,j}}{f_i^N}, \quad \text{pour un certain } a_{i,j} \in \mathbf{A}.$$

Notons \vec{a} la famille de 2ℓ éléments de \mathbf{A} :

$$\vec{a} = \{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_r\} = \{a_{1,1}, \dots, a_{1,\ell}, a_{2,1}, \dots, a_{2,\ell}\}$$

ainsi déterminée. En remplaçant $X_{i,j}$ par $A_{i,j}/F_i$, où $A_{i,j}$ et F_i désignent de nouvelles variables, on définit les polynômes $q_{i,n} \in \mathbf{R}[\vec{A}_i, F_i]$ par les égalités :

$$p_{i,n}(X_{i,1}, \dots, X_{i,\ell}) = p_{i,n}\left(\frac{A_{i,1}}{F_i}, \dots, \frac{A_{i,\ell}}{F_i}\right) = \frac{q_{i,n}(A_{i,1}, \dots, A_{i,\ell}, F_i)}{F_i^{(n+1)C}},$$

avec clairement :

$$\begin{cases} q_{i,n} \in \mathbf{I}^n[\vec{A}_i, F_i], & \text{et} \\ \deg_{\vec{A}_i, F_i}(q_{i,n}) = (n+1)C. \end{cases}$$

L'élément \vec{z} s'exprime donc également comme somme de la série :

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{n \geq 0} z_{1,n} \\ \sum_{n \geq 0} z_{2,n} \end{pmatrix} = \sum_{n \geq 0} \begin{pmatrix} \frac{q_{1,n}(a_{1,1}, \dots, a_{1,\ell}, f_1^N)}{(f_1^N)^{(n+1)C}} \\ \frac{q_{2,n}(a_{2,1}, \dots, a_{2,\ell}, f_2^N)}{(f_2^N)^{(n+1)C}} \end{pmatrix} \quad (**)$$

Dans la suite on notera

$$\begin{cases} \vec{A} := \{\vec{A}_1, \vec{A}_2\} = \{A_{1,1}, \dots, A_{1,\ell}, A_{2,1}, \dots, A_{2,\ell}\} \\ \vec{F} := \{F_1, F_2\} \quad \text{et} \quad \vec{Z} := \{Z_1, Z_2\} \end{cases}$$

Choisissons des éléments $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbf{A}$ tels que $\zeta_1 f_1^N + \zeta_2 f_2^N = 1$, et considérons le morphisme de \mathbf{R} -algèbres :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R}[\vec{A}, \vec{F}, \vec{Z}] & \xrightarrow{\alpha} & \mathbf{A} \\ A_{i,j} & \longmapsto & a_{i,j} \\ F_i & \longmapsto & f_i^N \\ Z_i & \longmapsto & \zeta_i \end{array} \quad i = 1, 2 \quad \text{et} \quad 1 \leq j \leq \ell.$$

Commentaire : Le morphisme α n'est pas nécessairement surjectif, mais comme \mathbf{A} a été supposée de type fini sur \mathbf{R} , nous pouvons rajouter si besoin de nouvelles variables à la liste \vec{A}

de manière à rendre α soit surjective ce que nous supposons désormais. Dans ce cas, pour tout $m \in \mathbb{N}$ et pour tout idéal $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{R}[\vec{A}, \vec{F}, \vec{Z}]$ contenant $\ker(\alpha)$, on a

$$\begin{cases} \alpha^{-1}(\mathbf{I}^m \mathbf{A}) = \mathbf{K} + \mathbf{I}^m[\vec{A}, \vec{F}, \vec{Z}], \\ \sum_{i=1}^r Z_i F_i \in 1 + \mathbf{K} + \mathbf{I}[\vec{A}, \vec{F}, \vec{Z}], \end{cases}$$

Dans la suite $\mathbf{K} := \ker(\alpha)$.

Pour $m \in \mathbb{N}$ donné, définissons des polynômes $Q_{1,m}, Q_{2,m} \in \mathbf{R}[\vec{A}, \vec{F}, \vec{Z}]$ par les égalités formelles :

$$\sum_{n=0}^m \frac{q_{i,n}(\vec{A}_i, F_i)}{F_i^{(n+1)C}} = \frac{\sum_{n=0}^m F_i^{(m-n)C} q_{i,n}(\vec{A}_i, F_i)}{F_i^{(m+1)C}} =: \frac{Q_{i,m}(\vec{A}_i, F_i)}{F_i^{(m+1)C}}.$$

On a $\deg_{\vec{A}, \vec{F}, \vec{Z}}(Q_{i,m}) = (m+1)C$ et grâce à la surjectivité de α et en appliquant 3.2.5 aux égalités “ $z_i = z_{i'}$ dans $(\mathbf{A}_{f_i f_{i'}})^\dagger \otimes \mathbf{M}$ ”, on a (cf. (★) p. 12) :

$$(F_1 F_2)^M \left(F_2^{(m+1)C} Q_{1,m} - F_1^{(m+1)C} Q_{2,m} \right) \in \mathbf{K} + \mathbf{I}^{m+1}[\vec{A}, \vec{F}, \vec{Z}],$$

pour $M \in \mathbb{N}$ assez grand. On en déduit par l'égalité $C1(F_1 F_2, \mathbf{K}, 0) = C2(F_1 F_2, \mathbf{K}, 0)$ de 3.2.6, l'existence de $N(F_1 F_2, \mathbf{K}) \in \mathbb{N}$ tel que :

$$(F_1 F_2)^{(m+1)N(F_1 F_2, \mathbf{K})} \left(F_2^{(m+1)C} Q_{1,m} - F_1^{(m+1)C} Q_{2,m} \right) \in \mathbf{K} + \mathbf{I}^{m+1}[\vec{A}, \vec{F}, \vec{Z}],$$

et ceci **pour tout** $m \in \mathbb{N}$.

On notera dans la suite (cf. 3.2.5)

$$\begin{cases} \mathbf{N} := \{N(F_1, \mathbf{K}), N(F_2, \mathbf{K}), N(F_1 F_2, \mathbf{K})\} & \text{et} \\ \mathbf{M} := \{M(F_1, \mathbf{K}), M(F_2, \mathbf{K}), M(F_1 F_2, \mathbf{K})\} & \text{(que nous n'avons pas encore utilisé)} \end{cases}$$

Pour chaque $L \in \mathbb{N}$, on choisit des polynômes $\Xi(L)_i \in \mathbf{R}[\vec{F}, \vec{Z}]$ vérifiant :

$$\begin{cases} (Z_1 F_1 + Z_2 F_2)^{2L} = \Xi(L)_1 F_1^L + \Xi(L)_2 F_2^L, & \text{avec} \\ \deg_{\vec{F}, \vec{Z}}(\Xi(L)_i) = 3L \end{cases} \quad (\Xi)$$

en prenant $L := (m+1)C + (m+1)\mathbf{N}$, on pose de manière analogue à ($\diamond\diamond$) (p. 12) :

$$R_m := \sum_{i=1}^2 \Xi((m+1)(\mathbf{N} + C))_i F_i^{(m+1)\mathbf{N}} Q_{i,m} \in \mathbf{R}[\vec{A}, \vec{F}, \vec{Z}]_{D_m},$$

où $D_m := \deg_{\vec{A}, \vec{F}, \vec{Z}}(R_m) = 4(m+1)(\mathbf{N} + C)$.

On a $R_m - R_{m-1} \in \mathbf{K} + \mathbf{I}^m[\vec{A}, \vec{F}, \vec{Z}]$ par construction, et, toujours d'après 3.2.6 :

$$F_i^{m\mathbf{N}}(R_m - R_{m-1}) \in \mathbf{K} + \mathbf{I}^m[\vec{A}, \vec{F}, \vec{Z}]_{D_m + m\mathbf{M}},$$

pour $i = 1, 2$. Par conséquent :

$$\begin{aligned} R_m - R_{m-1} &= \sum_{i=1}^r \Xi(m\mathbf{N})_i F_i^{m\mathbf{N}}(R_m - R_{m-1}) \\ &\in \mathbf{K} + \mathbf{I}^m[\vec{A}, \vec{F}, \vec{Z}]_{D_m + m(\mathbf{M} + (r-1)\mathbf{N})} \end{aligned}$$

et il existe $P_m \in \mathbf{R}[\vec{A}, \vec{F}, \vec{Z}]$ vérifiant $P_m = R_m - R_{m-1} \bmod \mathbf{K}$, de degré majoré par

$$D_m + m(\mathcal{M} + (r-1)\mathcal{N}) = 4(m+1)(\mathcal{N} + C) + m(\mathcal{M} + (r-1)\mathcal{N}) \leq (m+1)\tilde{C}$$

pour un certain $\tilde{C} \in \mathbb{N}$ **indépendant** de m . La série infinie $\alpha(R_0) + \sum_{1 \leq n} \alpha(P_n)$ représente donc un élément w de \mathbf{A}^\dagger tel que $w = \alpha(R_m)$ modulo \mathbf{I}^{m+1} . Comme d'autre part $\alpha(R_m)$ est, par construction, un "recollement" des séries z_i modulo \mathbf{I}^{m+1} , on conclut que $w = z \bmod \mathbf{I}^m$ pour tout $m \in \mathbb{N}$ et donc $w = z$, cqfd.

Exactitude à droite de (\star) . Étant donné un système de générateurs de \mathbf{A} en tant que \mathbf{R} -algèbre $\{a_1, \dots, a_\ell\}$, l'ensemble $\{a_i, 1/(f_1 f_2)\}$ est un système de générateurs de $\mathbf{A}_{f_1 f_2}$ et un élément $z \in (\mathbf{A}_{f_1 f_2})^\dagger$ s'exprime comme série

$$z = \sum_{n>0} P_n \left(a_1, \dots, a_\ell, \frac{1}{f_1 f_2} \right) \quad \text{où} \quad \begin{cases} P_n \in \mathbf{I}^n[X_1, \dots, X_\ell, T]; \\ \deg_{\vec{X}, T}(P_n) < C(n+1) \end{cases}$$

Or, l'égalité $1 = g_1 f_1 + g_2 f_2$ donne aussitôt $\frac{1}{f_1 f_2} = \frac{g_2}{f_1} + \frac{g_1}{f_2}$, et par une construction inductive simple

$$\left(\frac{1}{f_1 f_2} \right)^M = Q_{1,M} \left(g_1, g_2, \frac{1}{f_1}, \widehat{\frac{1}{f_2}} \right) + Q_{2,M} \left(g_1, g_2, \widehat{\frac{1}{f_1}}, \frac{1}{f_2} \right), \quad \text{avec} \quad \begin{cases} Q_{i,M} \in \mathbf{R}[Y_1, Y_2, Y_3, Y_4] \\ \deg_{\vec{Y}}(Q_{i,M}) = 2M \end{cases}$$

pour tout $M \in \mathbb{N}$. En substituant les monômes T^M qui interviennent dans le développement de P_n par $Q_{1,M} + Q_{2,M}$ on obtient la décomposition de polynômes

$$\begin{cases} \text{(i)} & P_n(\vec{X}, T) = R_{1,n}(\vec{X}, \vec{Y}) + R_{2,n}(\vec{X}, \vec{Y}) \\ \text{(ii)} & R_{1,n}, R_{2,n} \in \mathbf{I}^n[\vec{X}, \vec{Y}] \\ \text{(iii)} & \deg_{\vec{X}, \vec{Y}}(R_{i,n}) < 2C(n+1) \end{cases}$$

et on pose

$$z_i := \sum_{n \geq 0} R_{i,n} \left(a_1, \dots, a_\ell, g_1, g_2, \frac{1}{f_i} \right).$$

Les conditions (ii,iii) assurent la convergence de cette série aussi bien dans $(\mathbf{A}_{f_1 f_2})^\dagger$ que dans $(\mathbf{A}_{f_i})^\dagger$ ce qui termine la démonstration du théorème puisque $z = z_1 + z_2$. ■

3.2.8. Commentaire. L'énoncé du théorème 3.2.7 admet la reformulation suivante :

Théorème. Soient \mathbf{A} une \mathbf{R} -algèbre de type fini et $f_1, f_2 \in \mathbf{A}$ tels que $\overline{\mathbf{A}} \cdot \overline{f_1} + \overline{\mathbf{A}} \cdot \overline{f_2} = \overline{\mathbf{A}}$. Le complexe

$$\mathbf{0} \rightarrow \mathbf{A}^\dagger \xrightarrow{\epsilon^\dagger} (\mathbf{A}_{f_1})^\dagger \oplus (\mathbf{A}_{f_2})^\dagger \xrightarrow{\delta_0^\dagger} (\mathbf{A}_{f_1 f_2})^\dagger \rightarrow \mathbf{0}$$

est exact.

Preuve. Si $g_1, g_2 \in \mathbf{A}$ sont tels que $g_1 f_1 + g_2 f_2 \in 1 + \omega$ avec $\omega \in \mathbf{I} \cdot \mathbf{A}$, l'élément $1 + \omega$ est inversible dans \mathbf{A}^\dagger et $\mathbf{A}^\dagger \cdot f_1 + \mathbf{A}^\dagger \cdot f_2 = \mathbf{A}^\dagger$. D'autre part, $(\mathbf{A}_?)^\dagger = \mathbf{A}^\dagger_{[?]}$. ■

3.2.9. Rappels sur la cohomologie de Čech. Dans cette partie on s'intéresse à un espace topologique \mathbf{Y} admettant une famille d'ouverts \mathcal{B} telle que

- \mathcal{B} -i) Tout ouvert de \mathbf{Y} peut être recouvert par des ouverts de \mathcal{B} .
- \mathcal{B} -ii) De tout recouvrement d'un ouvert de \mathcal{B} par des ouverts de \mathcal{B} on peut extraire un sous-recouvrement fini.
- \mathcal{B} -iii) \mathcal{B} est stable par intersection, *i.e.* si $U_1, U_2 \in \mathcal{B}$ alors $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{B}$.
- \mathcal{B} -iv) Pour tous $U_1, \dots, U_\ell \in \mathcal{B}$ de réunion $U \in \mathcal{B}$, il existe $V \in \mathcal{B}$ tel que

$$U = U_1 \cup V \quad \text{et} \quad V \subseteq U_2 \cup \dots \cup U_\ell.$$

Exemples

- $\mathbf{Y} = \text{Spec}(\text{anneau})$ et \mathcal{B} l'ensemble de ses ouverts principaux.
Vérifions (iv) : l'inclusion $D(f) \subseteq D(f_0) \cup D(f_1) \cup \dots \cup D(f_\ell)$ équivaut à l'existence d'éléments $\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_\ell \in \mathbf{A}_f$ tels que $1 = \sum_{i=0}^{\ell} \zeta_i f_i$. En fixant une telle partition de l'unité, la même raison donne $W = D(1 - \zeta_0 f_0) \subseteq D(f_1) \cup \dots \cup D(f_\ell)$. On prend alors $V = U \cap W$.
- \mathbf{Y} l'espace topologique sous-jacent à un schéma séparé et \mathcal{B} l'ensemble de ses ouverts affines.

A partir de maintenant, l'espace \mathbf{Y} et l'ensemble \mathcal{B} sont fixés. L'ensemble \mathcal{B} muni des inclusions entre ses ouverts est une sous-catégorie de la catégories des ouverts de \mathbf{Y} , on peut donc parler de préfaisceau de groupes abéliens sur \mathcal{B} . Soit \mathcal{P} un tel préfaisceau. Étant donnée une famille $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in (\mathfrak{A}, \leq)}$ d'éléments de \mathcal{B} de réunion U , on définit pour chaque $n \in \mathbb{N}$ « le groupe des n -cochaînes de Čech à valeurs dans \mathcal{P} relatives à \mathcal{U} », c'est le groupe :

$$\check{C}^n(\mathcal{U}; \mathcal{P}) := \prod_{i_0 < i_1 < \dots < i_n} \mathcal{P}(U_{i_0 \dots i_n})$$

où $U_{i_0 \dots i_n} := U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_n}$. Le « n -cobord » est l'application :

$$\begin{aligned} \delta_n : \check{C}^n(\mathcal{U}; \mathcal{P}) &\longrightarrow \check{C}^{n+1}(\mathcal{U}; \mathcal{P}) \\ \omega &\longmapsto \delta_n(\omega)_{i_0, \dots, i_{n+1}} = \sum_{k=0, \dots, n+1} (-1)^k \omega_{i_0, \dots, \widehat{i_k}, \dots, i_{n+1}} \end{aligned}$$

qui vérifie $\delta_{n+1} \circ \delta_n = 0$, d'où « le complexe de Čech de \mathcal{P} relatif à \mathcal{U} » :

$$(\check{C}^*(\mathcal{U}; \mathcal{P}), \delta_*) := \left(\mathbf{0} \rightarrow \check{C}^0(\mathcal{U}; \mathcal{P}) \xrightarrow{\delta_0} \check{C}^1(\mathcal{U}; \mathcal{P}) \xrightarrow{\delta_1} \dots \xrightarrow{\delta_{k-1}} \check{C}^k(\mathcal{U}; \mathcal{P}) \xrightarrow{\delta_k} \dots \right)$$

Lorsque $U \in \mathcal{B}$, l'« augmentation » $\epsilon(U) : \mathcal{P}(U) \rightarrow \check{C}^0(\mathcal{U}; \mathcal{P}) = \prod_{i \in \mathfrak{A}} \mathcal{P}(U_i)$, produit des morphismes de restriction $\mathcal{P}(U) \rightarrow \mathcal{P}(U_i)$, est à valeurs dans $\check{H}^0(\mathcal{U}; \mathcal{P})$.

La « cohomologie de Čech de \mathcal{P} relative à \mathcal{U} » est la cohomologie de $(\check{C}^*(\mathcal{U}; \mathcal{P}); \delta_*)$, elle est notée $\check{H}^*(\mathcal{U}; \mathcal{P})$.

3.2.10. Proposition. Avec les données précédentes, supposons pour tous $U, U_1, U_2 \in \mathcal{B}$ tels que $U = U_1 \cup U_2$ que le complexe de Čech augmenté :

$$\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{P}(U) \xrightarrow{\epsilon(U)} \mathcal{P}(U_1) \oplus \mathcal{P}(U_2) \xrightarrow{\delta_0} \mathcal{P}(U_1 \cap U_2) \rightarrow \mathbf{0} \quad (*)$$

est **exact**. Alors

a) Pour toute famille $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in \mathfrak{A}}$ d'ouverts de \mathcal{B} de réunion un ouvert $U \in \mathcal{B}$, le complexe de Čech augmenté :

$$\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{P}(U) \xrightarrow{\epsilon(U)} \check{C}^0(\mathcal{U}; \mathcal{P}) \xrightarrow{\delta_0} \check{C}^1(\mathcal{U}; \mathcal{P}) \xrightarrow{\delta_1} \dots \xrightarrow{\delta_{i-1}} \check{C}^i(\mathcal{U}; \mathcal{P}) \xrightarrow{\delta_i} \dots$$

est **exact**.

b) Soit $\tilde{\mathcal{P}}$ le faisceau sur \mathbf{Y} engendré par \mathcal{P} , alors pour tout ouvert $U \in \mathcal{B}$:

- i) Le morphisme canonique $\mathcal{P}(U) \rightarrow H^0(U; \tilde{\mathcal{P}})$ est bijectif.
- ii) $H^i(U; \tilde{\mathcal{P}}) = 0$, pour tout $i > 0$.

Démonstration

a) Par récurrence sur le plus petit cardinal $\ell(\mathcal{U})$ des sous-familles finies de \mathcal{U} qui recouvrent U ((ii)). Lorsque $\ell(\mathcal{U}) = 1$ on a $U_i = U$ pour un certain $i \in \mathfrak{A}$ et le complexe de Čech augmenté est homotope à zéro ⁽²⁾. Supposons maintenant $\ell(\mathcal{U}) > 1$ et (a) démontré pour tout recouvrement \mathcal{V} d'un ouvert de \mathcal{B} vérifiant $\ell(\mathcal{V}) < \ell(\mathcal{U})$. Notons $\ell := \ell(\mathcal{U})$, soit U_1, \dots, U_ℓ une sous-famille minimale de \mathcal{U} de réunion U et soit $V \in \mathcal{B}$ vérifiant (iv), *i.e.*

$$U = U_1 \cup V \quad \text{et} \quad V = \bigcup_{k=2}^{\ell} (V \cap U_k).$$

On considère alors le bicomplexe

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathcal{P}(U) & \xrightarrow{\epsilon(U)} & \check{C}^*(\mathcal{U}; \mathcal{P}) \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathcal{P}(U_1) \oplus \mathcal{P}(V) & \xrightarrow{\epsilon(U_1) \oplus \epsilon(V)} & \check{C}^*(U_1 \cap U; \mathcal{P}) \oplus \check{C}^*(V \cap U; \mathcal{P}) \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathcal{P}(U_1 \cap V) & \xrightarrow{\epsilon(U_1 \cap V)} & \check{C}^*(U_1 \cap V \cap U; \mathcal{P}) \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \end{array} \quad (\diamond)$$

où les colonnes sont définies à l'aide des suites

$$\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{P}(U_{i_1 \dots i_n}) \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{P}(U_1 \cap U_{i_1 \dots i_n}) \oplus \mathcal{P}(V \cap U_{i_1 \dots i_n}) \xrightarrow{\delta_0} \mathcal{P}(U_1 \cap V \cap U_{i_1 \dots i_n}) \rightarrow \mathbf{0},$$

qui sont **exactes** par l'hypothèse de la proposition, quels que soient $n \in \mathbb{N}$ et $i_j \in \mathfrak{A}$. Le complexe de Čech augmenté $\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{P}(U) \rightarrow \check{C}^*(\mathcal{U}; \mathcal{P})$ est donc quasi-isomorphe au complexe simple associé au sous-bicomplexe des lignes inférieures de (\diamond) . Or, ces lignes sont exactes par hypothèse de récurrence puisque $\ell(U_1 \cap U) = 1$, $\ell(V \cap U) \leq \ell - 1$ et $\ell(U_1 \cap V \cap U) \leq \ell - 1$ par construction. Ceci termine la preuve de (a).

² Cf. [Go] p. 222, dernier paragraphe de §5.7.

- b) Résulte de considérations générales sur la cohomologie de Čech que nous résumons (cf. [Go] §5.8). Pour tout ouvert $W \subseteq \mathbf{Y}$ et chaque recouvrement \mathcal{U} de W par des ouverts de \mathcal{B} on dispose du complexe de Čech $\check{C}^*(\mathcal{U}; \mathcal{P})$. Les propriétés 3.2.9-(\mathcal{B} -*) assurent l'existence de raffinements pour deux tels recouvrements et on peut définir une cohomologie de Čech relative à \mathcal{B} , notée $\check{H}_{\mathcal{B}}^*(W; \mathcal{P})$, comme limite inductive des $\check{H}^*(\mathcal{U}; \mathcal{P})$ suivant une famille cofinale convenable de recouvrements (*loc.cit.*). La correspondance $W \rightsquigarrow \check{H}_{\mathcal{B}}^*(W; \mathcal{P})$ définit alors naturellement un préfaisceau **sur** \mathbf{Y} que nous notons $\check{\mathcal{H}}_{\mathcal{B}}^*(\mathcal{P})$. D'après (a) on a

$$\Gamma(U; \check{\mathcal{H}}_{\mathcal{B}}^0(\mathcal{P})) = \mathcal{P}(U), \text{ pour tout } U \in \mathcal{B}.$$

Ces mêmes raisonnements appliqués au préfaisceau $\check{\mathcal{H}}_{\mathcal{B}}^0(\mathcal{P})$ sur \mathbf{Y} montrent que l'application canonique $\check{\mathcal{H}}_{\mathcal{B}}^0(\mathcal{P}) \rightarrow \check{\mathcal{H}}^0(\check{\mathcal{H}}_{\mathcal{B}}^0(\mathcal{P})) = \tilde{\mathcal{P}}$ est bijective ce qui prouve (b-i). Il s'ensuit que le morphisme canonique

$$\check{H}_{\mathcal{B}}^i(W; \mathcal{P}) \rightarrow \check{H}^i(W; \tilde{\mathcal{P}})$$

est bijectif pour tout ouvert $W \subseteq \mathbf{Y}$. En particulier, $\check{H}^i(U; \tilde{\mathcal{P}}) = 0$ pour $i > 0$ et $U \in \mathcal{B}$ et le théorème 5.9.2 dans [Go] qui permet de relier la cohomologie de Čech et la cohomologie de faisceaux s'applique; le morphisme canonique

$$\check{H}^i(W; \tilde{\mathcal{P}}) \rightarrow H^i(W; \tilde{\mathcal{P}})$$

est bijectif pour tout ouvert $W \subseteq \mathbf{Y}$. En particulier, $H^i(U; \tilde{\mathcal{P}}) \simeq \check{H}_{\mathcal{B}}^i(U; \mathcal{P}) = 0$ pour $i > 0$ et $U \in \mathcal{B}$ d'après (a). \blacksquare

3.2.11. Remarque. Si dans l'énoncé de 3.2.10 les suites (*) sont uniquement supposées exactes à gauche, la même démonstration prouve que les complexes de Čech augmentés dans (b) sont exacts à gauche et l'assertion (b-i) en découle.

3.2.12. Corollaire. Soit $(\bar{\mathbf{X}}, \mathcal{O}_{\bar{\mathbf{X}}}^{\dagger})$ le schéma de Meredith associé à une \mathbf{R} -algèbre de type fini \mathbf{A} . Alors :

- a) Le foncteur $(\simeq) : \text{Mod}(\mathbf{A}^{\dagger}) \rightsquigarrow \text{Mod}(\mathcal{O}_{\bar{\mathbf{X}}}^{\dagger})$ est exact.
b) Pour tout \mathbf{A}^{\dagger} -module \mathbf{M} et tout ouvert principal $D(\bar{f}) \subseteq \bar{\mathbf{X}}$:
- i) Le morphisme canonique $\mathbf{A}^{\dagger}_{[f]} \otimes_{\mathbf{A}^{\dagger}} \mathbf{M} \rightarrow H^0(D(\bar{f}); \widetilde{\mathbf{M}})$ est bijectif.
 - ii) Pour tout recouvrement principal $\mathcal{U} = \{\bar{U}_1, \dots, \bar{U}_\ell\}$ de $D(\bar{f})$, on a

$$\check{H}^i(\mathcal{U}; \widetilde{\mathbf{M}}) = 0, \text{ pour tout } i > 0.$$

iii) $H^i(D(\bar{f}); \widetilde{\mathbf{M}}) = 0$, pour tout $i > 0$.

- c) Étant donnés deux \mathbf{A}^{\dagger} -modules \mathbf{M} et \mathbf{N} , si \mathbf{N} est de type fini, le morphisme canonique

$$\Xi(\mathbf{M}, \mathbf{N}) : \text{Hom}_{\mathbf{A}}(\mathbf{M}, \mathbf{N}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_{\bar{\mathbf{X}}}^{\dagger}}(\widetilde{\mathbf{M}}, \widetilde{\mathbf{N}})$$

est bijectif. En particulier, la restriction du foncteur (\simeq) à la sous-catégorie $\text{Mod}_{\text{tf}}(\mathbf{A}^{\dagger})$ est pleinement fidèle.

Démonstration. Nous nous plaçons dans le contexte d'application de la proposition 3.2.10. L'espace topologique est $\bar{X} := \text{Spec}(\bar{A})$, l'ensemble d'ouverts \mathcal{B} est l'ensemble des ouverts principaux de \bar{X} et le préfaisceau sur \mathcal{B} est défini pour chaque \mathbf{A}^\dagger -module M par la correspondance \mathcal{P}_M (cf. 3.2.2) :

$$D(\bar{f}) \rightsquigarrow \mathcal{P}_M(D(\bar{f})) := \mathbf{A}^\dagger_{[f]} \otimes_{\mathbf{A}^\dagger} M$$

On remarque aussitôt que par la platitude de $\mathbf{A}^\dagger_{[f]}$ en tant que \mathbf{A}^\dagger -module (3.1-(e)-(i)), la correspondance $M \rightsquigarrow \mathcal{P}_M$ est exacte et comme \widetilde{M} est le faisceau associé à \mathcal{P}_M l'assertion (a) résulte.

De l'égalité de préfaisceaux $\mathcal{P}_M(-) = \mathcal{P}_{\mathbf{A}^\dagger}(-) \otimes_{\mathbf{A}^\dagger} M$ on déduit aussitôt l'identification des complexes de Čech

$$(\check{C}^*(U; \mathcal{P}_M), \delta_*) = (\check{C}^*(U; \mathcal{P}_{\mathbf{A}^\dagger}), \delta_*) \otimes_{\mathbf{A}^\dagger} M$$

pour toute famille **finie** U d'ouverts principaux de \bar{X} et de même pour les complexes de Čech augmentés lorsque U est un recouvrement d'un ouvert $\bar{U} \in \mathcal{B}$. En particulier, si $\bar{U}, \bar{U}_1, \bar{U}_2 \in \mathcal{B}$ vérifient $\bar{U} = \bar{U}_1 \cup \bar{U}_2$, le complexe de Čech augmenté :

$$\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{P}_M(\bar{U}) \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{P}_M(\bar{U}_1) \oplus \mathcal{P}_M(\bar{U}_2) \xrightarrow{\delta_0} \mathcal{P}_M(\bar{U}_1 \cap \bar{U}_2) \rightarrow \mathbf{0} \quad (*)$$

s'identifie à

$$\left(\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{P}_{\mathbf{A}^\dagger}(\bar{U}) \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{P}_{\mathbf{A}^\dagger}(\bar{U}_1) \oplus \mathcal{P}_{\mathbf{A}^\dagger}(\bar{U}_2) \xrightarrow{\delta_0} \mathcal{P}_{\mathbf{A}^\dagger}(\bar{U}_1 \cap \bar{U}_2) \rightarrow \mathbf{0} \right) \otimes_{\mathbf{A}^\dagger} M$$

et l'exactitude de (*) résulte puisque $\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{P}_{\mathbf{A}^\dagger}(\bar{U}) \rightarrow \check{C}^*(\{\bar{U}_1, \bar{U}_2\}; \mathcal{P}_{\mathbf{A}^\dagger})$ est exact (3.2.7) et que ses termes sont des \mathbf{A}^\dagger -modules plats (3.1-(e)-(i)).

L'hypothèse de la proposition 3.2.10 est donc vérifiée par \mathcal{P}_M quel que soit le \mathbf{A}^\dagger -module M et (b) en découle.

Ceci étant, (b-i) montre que $\Gamma(\bar{X}, -) : \text{Mod}(\mathcal{O}_{\bar{X}}^\dagger) \rightsquigarrow \text{Mod}(\mathbf{A}^\dagger)$ est un inverse à gauche de $(\sphericalangle) : \text{Mod}(\mathbf{A}^\dagger) \rightsquigarrow \text{Mod}(\mathcal{O}_{\bar{X}}^\dagger)$ et l'application naturelle $\Xi(M, N)$ est injective pour tous $M, N \in \text{Mod}(\mathbf{A}^\dagger)$. Soit maintenant $\alpha : \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{N}$ un morphisme de $\mathcal{O}_{\bar{X}}^\dagger$ -modules. Pour chaque ouvert principal $\bar{U} = D(\bar{f}) \subseteq \bar{X}$ on a un diagramme commutatif de \mathbf{A}^\dagger -modules

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\alpha(\bar{X})} & N \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{A}^\dagger_{[f]} \otimes M = \Gamma(\bar{U}; \widetilde{M}) & \xrightarrow{\alpha(\bar{U})} & \Gamma(\bar{U}; \widetilde{N}) = \mathbf{A}^\dagger_{[f]} \otimes N \end{array}$$

et $\alpha(\bar{U})$ et $\mathbf{1} \otimes \alpha(\bar{X})$ coïncident modulo I^m quel que soit $m \in \mathbb{N}$. Or, si N est un \mathbf{A}^\dagger -module de type fini, $\mathbf{A}^\dagger_{[f]} \otimes N$ est séparé pour la topologie I -adique et donc $\alpha(\bar{U}) = \mathbf{1} \otimes \alpha(\bar{X})$ et $\Xi(M, N)$ est bien surjective. ■

3.2.13. Catégorie des $\mathcal{O}_{\bar{X}}^\dagger$ -modules cohérents. Un $\mathcal{O}_{\bar{X}}^\dagger$ -module M est dit « *cohérent* » lorsqu'il est localement de présentation finie, autrement dit, lorsque chaque $x \in \bar{X}$ admet un

voisinage principal \bar{U} sur lequel il existe une suite exacte à droite de \mathcal{O}_X^\dagger -modules

$$(\mathcal{O}_X^\dagger)^m|_{\bar{U}} \longrightarrow (\mathcal{O}_X^\dagger)^n|_{\bar{U}} \longrightarrow \mathcal{M}|_{\bar{U}} \rightarrow \mathbf{0}. \quad (\ddagger)$$

On a donc $\mathcal{M}|_{\bar{U}} = \Gamma(\bar{U}; \mathcal{M})^\sim$ (3.2.12).

On note $\text{Mod}_{\text{coh}}(\mathcal{O}_X^\dagger)$ la sous-catégorie pleine de $\text{Mod}(\mathcal{O}_X^\dagger)$ dont les objets sont les \mathcal{O}_X^\dagger -modules cohérents. Pour tout \mathbf{A}^\dagger -module \mathbf{M} le faisceau $\widetilde{\mathbf{M}}$ est cohérent et le foncteur $(\simeq) : \text{Mod}_{\text{tf}}(\mathbf{A}^\dagger) \rightsquigarrow \text{Mod}_{\text{coh}}(\mathcal{O}_X^\dagger)$ est pleinement fidèle (3.2.12). Le théorème suivant est démontré dans [M] sous l'hypothèse que (\mathbf{R}, \mathbf{I}) est un anneau de valuation discrète complet d'idéal maximal \mathbf{I} . Bien que ce théorème ne sera pas utilisé dans la suite, nous indiquons brièvement les idées d'une démonstration lorsque \mathbf{R} est seulement supposé noethérien.

3.2.14. Théorème. *Soit $(\bar{X}, \mathcal{O}_X^\dagger)$ le schéma de Meredith associé à une \mathbf{R} -algèbre de type fini \mathbf{A} . Le foncteur $(\simeq) : \text{Mod}_{\text{tf}}(\mathbf{A}^\dagger) \rightsquigarrow \text{Mod}_{\text{coh}}(\mathcal{O}_X^\dagger)$ est une équivalence de catégories.*

Indications. Une inspection minutieuse de la preuve de Meredith montre que l'hypothèse sur \mathbf{R} d'être de valuation discrète et complet intervient de manière essentielle uniquement dans sa preuve du lemme §3.1 (*loc.cit.* p. 11) :

Lemme 1. Soit \mathbf{M} un \mathbf{A}^\dagger -module de type fini. Soient $\vec{x} = \{x_1, \dots, x_r\} \subseteq \mathbf{A}$ et $\mu_1, \dots, \mu_t \in \mathbf{M}$. Soit $\{P_{i,n} \mid 1 \leq i \leq t; n \in \mathbb{N}\}$ une famille de polynômes à r variables $\vec{X} = \{X_1, \dots, X_r\}$ vérifiant les conditions suivantes

- 1) $\deg_{\vec{X}}(P_{i,n}) \leq C(n+1)$ pour une certaine constante C ;
- 2) $\sum_{i=1}^t P_{i,n}(\vec{x})\mu_i \in \mathbf{I}^n \cdot \mathbf{M}$ pour tout n .

Alors $\sum_{n \geq 0} \sum_{i=0}^t P_{i,n}(\vec{x})\mu_i$ converge dans \mathbf{M} .

Ce lemme peut être démontré lorsque \mathbf{R} est seulement supposé noethérien. En effet, lorsque $t = 1$ nous pouvons supposer $\mathbf{M} = \mathbf{A}^\dagger \cdot \mu_1$ (Artin-Rees) et considérons la suite exacte

$$\mathbf{0} \rightarrow \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} \cdot \mu_1 \rightarrow \mathbf{0}.$$

Les hypothèses du lemme 1 dans les notations du lemme technique 3.2.6 sont :

$$\begin{cases} P_{1,n} \in \mathbf{I}^0[\vec{X}]_{C(n+1)} \\ P_{1,n} \in \mathbf{K} + \mathbf{I}^n[\vec{X}] \end{cases}$$

En appliquant 3.2.6 (avec $P = 1$), il existe $M \in \mathbb{N}$ ne dépendant que de \mathbf{K} tel que :

$$P_{1,n} \in \mathbf{K} + \mathbf{I}^n[\vec{X}]_{C(n+1)+nM}.$$

On a donc

$$\sum_{n \geq 0} P_{1,n}(\vec{x})\mu_1 = \sum_{n \geq 0} Q_n(\vec{x})\mu_1 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} Q_n \in \mathbf{I}^n[\vec{X}]_{(C+M)(n+1)}, \\ P_{1,n}(\vec{x})\mu_1 = Q_n(\vec{x})\mu_1, \end{cases} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

et la série $\sum_{n \geq 0} Q_n(\vec{x})$ converge dans \mathbf{A}^\dagger .

Dans le cas où t est quelconque, on commence par remarquer que les ensembles

$$C(m) := \left\{ P \in \mathbf{R}[\bar{X}] \mid P\mu_1 \in \mathbf{R}[\bar{X}]_{\deg(P)+m} \cdot \mu_2 + \cdots + \mathbf{R}[\bar{X}]_{\deg(P)+m} \cdot \mu_t \right\}$$

sont des idéaux de $\mathbf{R}[\bar{X}]$ dont la réunion C est l'annulateur de μ_1 modulo (μ_2, \dots, μ_t) . Par noëthérianité il existe $N \in \mathbb{N}$ ne dépendant que de $\{\mu_1, \dots, \mu_t\}$, tel que $C = C(N)$.

Supposons le lemme démontré pour $t-1$ et considérons un ensemble des données vérifiant les conditions du lemme pour t . D'après le cas $t=1$, il existe $Q_n \in \mathbf{I}^n[\bar{X}]_{(C+M)(n+1)}$ vérifiant

$$(P_{1,n} - Q_n)\mu_1 \in (\mu_2, \dots, \mu_t),$$

et la remarque précédente donne des décompositions

$$P_{1,n}\mu_1 = Q_n\mu_1 + \sum_{k=2}^t R_{k,n}\mu_k,$$

avec $R_{k,n} \in \mathbf{R}[\bar{X}]_{(C+M+N)(n+1)}$. On peut donc écrire

$$\sum_{n \geq 0} \sum_{i=1}^t P_{i,n}(\bar{x})\mu_i = \sum_{n \geq 0} Q_n\mu_1 + \sum_{n \geq 0} \sum_{i=2}^t (R_{i,n} + P_{i,n})\mu_i \quad (*)$$

où

$$\begin{cases} \sum_{n \geq 0} Q_n \text{ converge dans } \mathbf{A}^\dagger, \\ \deg_{\bar{X}}(R_{i,n} + P_{i,n}) \leq (C + N + N)(n+1), \\ \sum_{i=2}^t (R_{i,n} + P_{i,n})\mu_i \in \mathbf{I}^n \cdot \mathbf{M} \text{ par construction.} \end{cases}$$

La convergence de la série (*) résulte alors de l'hypothèse inductive. ■

3.2.15. \mathcal{O}_X^\dagger comme faisceau de relèvements (très lisses). La proposition suivante fait le lien entre la catégorie des relèvements affines très lisses $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$ associée à $(\bar{X}; \mathcal{O}_{\bar{X}})$ et les sections du faisceau \mathcal{O}_X^\dagger .

3.2.16. Proposition. Soit $(\bar{X}, \mathcal{O}_X^\dagger)$ le schéma de Meredith associé à une \mathbf{R} -algèbre f.c.t.f. très lisse \mathbf{A}^\dagger . Notons $\rho : \mathcal{O}_X^\dagger \rightarrow \mathcal{O}_{\bar{X}}$ le morphisme de faisceaux induit par le relèvement $\rho(\bar{X}) : \mathbf{A}^\dagger \rightarrow \bar{\mathbf{A}}$ (3.2.12-(c)). Alors, pour tout ouvert affine $\bar{U} \subseteq \bar{X}$:

- a) Le morphisme $\rho(\bar{U}) : \mathcal{O}_X^\dagger(\bar{U}) \rightarrow \mathcal{O}_{\bar{X}}(\bar{U})$ est un relèvement f.c.t.f. très lisse.
- b) L'espace annelé $(\bar{U}; \mathcal{O}_X^\dagger|_{\bar{U}})$ est canoniquement isomorphe au schéma de Meredith associé à l'algèbre $\mathcal{O}_X^\dagger(\bar{U})$.

Démonstration

a) Soit

$$\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{O}_X^\dagger(\bar{U}) \xrightarrow{\epsilon} \prod_{i=1}^r \mathbf{A}^\dagger_{[f_i]} \xrightarrow{\delta_0} \prod_{1 \leq i < j \leq r} \mathbf{A}^\dagger_{[f_i f_j]}$$

la suite exacte à gauche associée à un recouvrement principal fini $\bar{U} = \bigcup_{i=1}^r D(\bar{f}_i)$. Soit $\rho : \mathbf{B}^\dagger \rightarrow \mathcal{O}_{\bar{X}}(\bar{U})$ un relèvement f.c.t.f. très lisse (1.2) et notons $(\bar{U}; \mathcal{O}_{\mathbf{B}}^\dagger)$ le schéma de Meredith affine associé. Comme \mathbf{A}^\dagger est très lisse il existe un morphisme de \mathbf{R}^\dagger -algèbres

$\phi : \mathbf{A}^\dagger \rightarrow \mathbf{B}^\dagger$ dont la réduction modulo \mathbf{I} est le morphisme d'algèbres correspondant à l'inclusion $\bar{U} \subseteq \bar{X}$. Le morphisme ϕ induit des morphismes

$$\phi_i : \mathbf{A}^\dagger_{[f_i]} \rightarrow \mathbf{B}^\dagger_{[\phi(f_i)]}, \quad \phi_{ij} : \mathbf{A}^\dagger_{[f_i f_j]} \rightarrow \mathbf{B}^\dagger_{[\phi(f_i f_j)]},$$

qui sont des isomorphismes puisqu'il en est ainsi modulo \mathbf{I} (1.2). On a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{0} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{X}}^\dagger(\bar{U}) & \xrightarrow{\epsilon} & \prod_{i=1}^r \mathbf{A}^\dagger_{[f_i]} & \xrightarrow{\delta_0} & \prod_{1 \leq i < j \leq r} \mathbf{A}^\dagger_{[f_i f_j]} \\ & & \phi_i \downarrow \simeq & \oplus & \simeq \downarrow \phi_{ij} \\ & & \prod_{i=1}^r \mathbf{B}^\dagger_{[\phi(f_i)]} & \xrightarrow{\delta_0} & \prod_{1 \leq i < j \leq r} \mathbf{B}^\dagger_{[\phi(f_i f_j)]} \end{array} \quad (\diamond)$$

Or, d'après 3.2.12 appliqué à $(\bar{U}, \mathcal{O}_B^\dagger)$, on a la suite exacte à gauche

$$\mathbf{0} \rightarrow \mathbf{B}^\dagger \xrightarrow{\epsilon} \prod_{i=1}^r \mathbf{B}^\dagger_{[\phi(f_i)]} \xrightarrow{\delta_0} \prod_{1 \leq i < j \leq r} \mathbf{B}^\dagger_{[\phi(f_i f_j)]}$$

et le diagramme (\diamond) induit un isomorphisme de \mathbf{R} -algèbres de $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}^\dagger(\bar{U})$ sur \mathbf{B}^\dagger .

- b) Dans la preuve de (a) on a montré que pour tout $f \in \mathbf{A}^\dagger$ tel que $D(\bar{f}) \subseteq \bar{U}$ le morphisme canonique $\mathbf{A}^\dagger_{[f]} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{X}}^\dagger(\bar{U})_{[f]}$ est bijectif. La famille de ces isomorphismes est un isomorphisme entre les restrictions à la catégorie des ouverts principaux de \bar{X} contenus dans \bar{U} du faisceau $\mathcal{O}_{\bar{X}}^\dagger$ et du faisceau \mathcal{O}_B^\dagger ; cet isomorphisme induit l'identification entre $\mathcal{O}_{\bar{X}|\bar{U}}^\dagger$ et \mathcal{O}_B^\dagger annoncée. ■

3.3 Sous-sites de Meredith de $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$ et condition de faisceau

3.3.1. Sous-sites de Meredith. Soit $(\bar{X}; \mathcal{O}_{\bar{X}})$ un schéma lisse et séparé sur $\bar{\mathbf{R}}$ de site de relèvements affines très lisses $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$. Pour chaque \mathcal{U} de $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$ on note $(\bar{U}; \mathcal{O}_{\mathcal{U}}^\dagger)$ le schéma de Meredith associé à l'algèbre f.c.t.f. très lisse $\mathbf{A}(\mathcal{U})^\dagger$. D'après 3.2.16, si $\bar{V}_1 \subseteq \bar{V}_2 \subseteq \bar{U}$ sont des ouverts affines, l'algèbre $\mathcal{O}_{\mathcal{U}}^\dagger(\bar{V}_i)$ est un relèvement très lisse de $\mathcal{O}_{\bar{X}}^\dagger(\bar{V}_i)$ et la réduction modulo \mathbf{I} du morphisme de restriction $\mathcal{O}_{\mathcal{U}}^\dagger(\bar{V}_2) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{U}}^\dagger(\bar{V}_1)$ est le morphisme d'anneaux $\mathcal{O}_{\bar{X}}^\dagger(\bar{V}_2) \rightarrow \mathcal{O}_{\bar{X}}^\dagger(\bar{V}_1)$ correspondant à l'inclusion $\bar{V}_1 \subseteq \bar{V}_2$. Le faisceau $\mathcal{O}_{\mathcal{U}}^\dagger$ détermine ainsi un sous-site de $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$.

Définition. Notons $\mathcal{M}(\mathcal{U})$ la sous-catégorie de $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$ des relèvements $\mathcal{O}_{\mathcal{U}}^\dagger(\bar{V}) \rightarrow \mathcal{O}_{\bar{X}}^\dagger(\bar{V})$ où \bar{V} est un ouvert affine de \bar{U} et où il y a un unique morphisme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{\mathcal{U}}^\dagger(\bar{V}_1) & \dashrightarrow & \mathcal{O}_{\mathcal{U}}^\dagger(\bar{V}_2) \\ \downarrow & \oplus & \downarrow \\ \mathcal{O}_{\bar{X}}^\dagger(\bar{V}_1) & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{O}_{\bar{X}}^\dagger(\bar{V}_2) \end{array}$$

lorsque $\bar{V}_2 \subseteq \bar{V}_1$, à savoir le morphisme de restriction du faisceau $\mathcal{O}_{\mathcal{U}}^\dagger$. La catégorie $\mathcal{M}(\mathcal{U})$ est stable par le produit fibré de $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$ et, munie des recouvrements de $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$ i.e. des familles de morphismes $\{\mathcal{O}_{\mathcal{U}}^\dagger(\bar{V}) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{U}}^\dagger(\bar{V}_i)\}$ où \bar{V} et \bar{V}_i sont des ouverts affines de \bar{U} vérifiant $\bar{V} = \bigcup_i \bar{V}_i$, c'est un site. Ce site est « le sous-site de Meredith de $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$ engendré par \mathcal{U} ». On note $\langle \mathcal{M}(\mathcal{U}) \rangle$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$ dont les objets sont ceux de $\mathcal{M}(\mathcal{U})$. De même que $\mathcal{M}(\mathcal{U})$, la catégorie $\langle \mathcal{M}(\mathcal{U}) \rangle$ est un sous-site de $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$.

3.3.2. Notations. Notons $\mathcal{Y}_{\text{inf}}^\dagger$ le site des relèvements affines très lisses de \bar{U} . Nous avons les inclusions de sites $\mathcal{M}(\mathcal{U}) \subseteq \langle \mathcal{M}(\mathcal{U}) \rangle \subseteq \mathcal{Y}_{\text{inf}}^\dagger \subseteq \mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$ pour lesquelles nous fixons quelques notations :

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{M}(\mathcal{U}) & \xrightarrow[\subseteq]{j_{\mathcal{U}}} & \langle \mathcal{M}(\mathcal{U}) \rangle & \xrightarrow[\subseteq]{i_{\mathcal{U}}^y} & \mathcal{Y}_{\text{inf}}^\dagger & \xrightarrow[\subseteq]{i_y} & \mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger \\ & & & \searrow & \downarrow & \nearrow & \\ & & & & i_{\mathcal{U}} & & \end{array}$$

La proposition suivante est corollaire immédiat des propositions 3.2.16, 2.4.2 et 2.5.1.

3.3.3. Proposition. Soit $(\bar{X}; \mathcal{O}_{\bar{X}})$ un schéma lisse et séparé sur \bar{R} de site de relèvements affines très lisses $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$.

- Pour chaque $\mathcal{U} \in \mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$, le foncteur qui associe à $\mathcal{V} \in \mathcal{M}(\mathcal{U})$ l'ouvert affine $\bar{\mathcal{V}} \subseteq \bar{\mathcal{U}}$, et au morphisme entre deux objets de $\mathcal{M}(\mathcal{U})$ l'inclusion entre leurs ouverts associés, est une équivalence de catégories entre $\mathcal{M}(\mathcal{U})$ et la catégorie des ouverts affines contenus dans $\bar{\mathcal{U}}$. Cette équivalence est une équivalence de sites, i.e. respecte produit fibré et recouvrements.
- Pour chaque $\mathcal{U} \in \mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$, le foncteur $(\simeq) : \text{Mod}_{\mathcal{M}(\mathcal{U})}(\mathbf{Z}) \rightsquigarrow \text{Mod}_{\bar{\mathcal{U}}}(\mathbf{Z})$ qui fait correspondre à un faisceau sur $\mathcal{M}(\mathcal{U})$ le faisceaux engendré sur $\bar{\mathcal{U}}$ est une équivalence de catégories.
- Un préfaisceau \mathcal{P} sur $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$ est un faisceaux si et seulement si pour chaque $\mathcal{U} \in \mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$ la restriction $\mathcal{P}|_{\mathcal{M}(\mathcal{U})}$ est un faisceau.
- Si \bar{X} est affine et si $\mathcal{U} \in \mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$ vérifie $\bar{\mathcal{U}} = \bar{X}$, alors un préfaisceau sur $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$ est un faisceau si et seulement si sa restriction à $\mathcal{M}(\mathcal{U})$ l'est.

3.4 Faisceau \mathcal{G}_X^\dagger d'automorphismes \dagger -adiques

Notation. Étant donnée une \mathbf{R} -algèbre \mathbf{B} , on notera $\mathbf{G}^\dagger(\mathbf{B})$ le groupe des automorphismes de \mathbf{R} -algèbre de \mathbf{B} dont la réduction modulo \mathbf{I} est l'identité sur $\bar{\mathbf{B}}$.

3.4.1. Le cas où X est affine. Soit \mathbf{A}^\dagger une \mathbf{R} -algèbre f.c.t.f. de schéma de Meredith $(\bar{X}; \mathcal{O}_{\bar{X}}^\dagger)$. Pour $f, g \in \mathbf{A}^\dagger$, notons $\iota : \mathbf{A}^\dagger_{[f]} \rightarrow \mathbf{A}^\dagger_{[fg]}$ le morphisme canonique et remarquons que pour tout $\theta \in \mathbf{G}^\dagger(\mathbf{A}^\dagger_{[f]})$ l'élément $\iota\theta(g)$ est inversible car $\iota\theta(g) \in \iota(g)(1 + \mathbf{I} \cdot \mathbf{A}^\dagger_{[fg]})$. On a donc une factorisation unique

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A}^\dagger_{[f]} & \xrightarrow{\theta} & \mathbf{A}^\dagger_{[f]} \\ \iota \downarrow & \oplus & \downarrow \iota \\ \mathbf{A}^\dagger_{[fg]} & \xrightarrow{\theta'} & \mathbf{A}^\dagger_{[fg]} \end{array} \quad (\diamond)$$

avec $\theta' \in \mathbf{G}^\dagger(\mathbf{A}^\dagger_{[fg]})$, d'où une application de «restriction»

$$\begin{array}{ccc} (-)|_{\mathbf{A}^\dagger_{[fg]}} : \mathbf{G}^\dagger(\mathbf{A}^\dagger_{[f]}) & \longrightarrow & \mathbf{G}^\dagger(\mathbf{A}^\dagger_{[fg]}) \\ \theta & \longmapsto & \theta' \end{array} \quad (*)$$

dont on vérifie aisément que c'est un morphisme de groupes. La correspondance

$$D(\bar{f}) \rightsquigarrow \mathbf{G}^\dagger(\mathbf{A}^\dagger_{[f]})$$

et les restrictions $(*)$ définissent un préfaisceau de groupes sur la catégorie des ouverts principaux de \bar{X} dont on notera \mathcal{G}_X^\dagger le faisceau sur \bar{X} associé.

3.4.2. Lemme. Lorsque B^\dagger est intègre et que $f \notin \sqrt{I \cdot B^\dagger}$, le morphisme de restriction $G^\dagger(B^\dagger) \rightarrow G^\dagger(B^\dagger_{[f]})$ est injectif.

Démonstration. Soit $\nu_f^\dagger : B^\dagger \rightarrow B^\dagger_{[f]}$ le morphisme canonique. Lorsque la restriction de $\theta \in G^\dagger(B^\dagger)$ à $B^\dagger_{[f]}$ est l'identité, on a $\theta(x) - x \in \ker(\nu_f^\dagger)$ pour chaque $x \in B^\dagger$, autrement dit $(f^N + w)(\theta(x) - x) = 0$ pour un certain $w \in I \cdot B^\dagger$ et pour $N \gg 0$ (3.2.5). Si on suppose que $\theta \neq \text{id}$, l'intégrité de B^\dagger implique aussitôt que $f^N \in I \cdot B^\dagger$. ■

Rappel. On a $f \notin \sqrt{I \cdot B^\dagger} \iff \bar{B}_f \neq 0 \iff \text{Spec}(\bar{B}_f) \neq \emptyset$.

3.4.3. Le cas où X est général. Ce qui précède montre plus généralement que si $\bar{V}_1 \subseteq \bar{V}_2$ sont des ouverts respectivement **principaux** dans des ouverts **affines** $\bar{U}_i \subseteq \bar{X}$, il existe un morphisme canonique de restriction de $G^\dagger(\mathcal{O}_X^\dagger(\bar{V}_2))$ vers $G^\dagger(\mathcal{O}_X^\dagger(\bar{V}_1))$. Le faisceau \mathcal{G}_X^\dagger peut donc aussi être introduit comme dans le paragraphe précédent lorsque $(\bar{X}; \mathcal{O}_{\bar{X}})$ est la réduction modulo I d'un schéma lisse séparé $(X; \mathcal{O}_X)$ de schéma de Meredith $(\bar{X}; \mathcal{O}_X^\dagger)$. Dans tous les cas on a un morphisme naturel

$$\Phi(\bar{U}) : G^\dagger(\mathcal{O}_X^\dagger(\bar{U})) \rightarrow \mathcal{G}_X^\dagger(\bar{U})$$

pour tout ouvert affine $\bar{U} \subseteq \bar{X}$ puisque les ouverts principaux des ouverts affines de \bar{X} constituent une base pour la topologie de \bar{X} .⁽³⁾

3.4.4. Théorème. Pour tout schéma de Meredith $(\bar{X}; \mathcal{O}_X^\dagger)$ le morphisme naturel

$$\Phi(\bar{U}) : G^\dagger(\mathcal{O}_X^\dagger(\bar{U})) \rightarrow \mathcal{G}_X^\dagger(\bar{U})$$

est bijectif pour tout ouvert affine $\bar{U} \subseteq \bar{X}$.

Démonstration. Supposons \bar{X} affine et notons $A^\dagger := \mathcal{O}_X^\dagger(\bar{X})$. Soit \bar{U} un ouvert arbitraire de \bar{X} , considérons la suite exacte à gauche

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X^\dagger(\bar{U}) \xrightarrow{\epsilon} \prod_i A^\dagger_{[f_i]} \xrightarrow{\delta_0} \prod_{i < j} A^\dagger_{[f_i f_j]} \quad (\ddagger)$$

associé au recouvrement fini principal $\bar{U} = \bigcup_i D(\bar{f}_i)$, et notons $x_i \in A^\dagger_{[f_i]}$ les restrictions d'un élément $x \in \mathcal{O}_X^\dagger(\bar{U})$. Pour tout $\theta_i \in G^\dagger(A^\dagger_{[f_i]})$ on a (3.4.1-(\diamond))

$$\theta_i(x_i)|_{A^\dagger_{[f_i f_j]}} = \theta_j|_{A^\dagger_{[f_i f_j]}}(x_i|_{A^\dagger_{[f_i f_j]}}),$$

de sorte que si $\theta_i|_{A^\dagger_{[f_i f_j]}} = \theta_j|_{A^\dagger_{[f_i f_j]}}$, les éléments $\theta_i(x_i)$ se recollent en un (unique) $\theta(x) \in \mathcal{O}_X^\dagger(\bar{U})$. L'application $\theta : \mathcal{O}_X^\dagger(\bar{U}) \rightarrow \mathcal{O}_X^\dagger(\bar{U})$ ainsi définie appartient clairement à $G^\dagger(\mathcal{O}_X^\dagger(\bar{U}))$.

³On remarquera que si les groupes $G^\dagger(\mathcal{O}_X^\dagger(\bar{U}))$ et $\mathcal{G}_X^\dagger(\bar{U})$ existent quel que soit l'ouvert $\bar{U} \subseteq \bar{X}$, il n'y a pas nécessairement de morphisme de restriction de $G^\dagger(\mathcal{O}_X^\dagger(\bar{U}))$ vers $G^\dagger(\mathcal{O}_X^\dagger(\bar{V}))$ pour $\bar{V} \subseteq \bar{U}$ lorsque \bar{U} n'est pas affine. Il n'y a donc pas de morphisme *a priori* de $G^\dagger(\mathcal{O}_X^\dagger(\bar{U}))$ vers $\mathcal{G}_X^\dagger(\bar{U})$ en dehors du cas où \bar{U} est affine (cf. remarque 3.4.5).

Lorsque \bar{U} est affine les morphismes de restriction $\mathbf{G}^\dagger(\mathcal{O}_{\bar{X}}^\dagger(\bar{U})) \rightarrow \mathbf{G}^\dagger(\mathbf{A}^\dagger_{[f_i]})$ de 3.4.1 permettent de construire l'analogue de la suite (‡) pour les faisceaux de groupes, à savoir la suite :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{G}^\dagger(\mathcal{O}_{\bar{X}}^\dagger(\bar{U})) & \xrightarrow{\epsilon} & \prod_i \mathbf{G}^\dagger(\mathbf{A}^\dagger_{[f_i]}) \xrightarrow{\Delta_0} \prod_{i < j} \mathbf{G}^\dagger(\mathbf{A}^\dagger_{[f_i f_j]}) \\ \theta & \longmapsto & (\theta|_{\mathbf{A}^\dagger_{[f_i]}})_i \\ & & (\theta_i)_i \longmapsto (\theta_i^{-1}|_{\mathbf{A}^\dagger_{[f_i f_j]}} \theta_j|_{\mathbf{A}^\dagger_{[f_i f_j]}})_{i < j} \end{array} \quad (*)$$

dont l'exactitude résulte du paragraphe précédent.

En raisonnant comme dans 3.2.10, l'augmentation ϵ donne lieu au morphisme $\Phi(\bar{U}) : \mathbf{G}^\dagger(\mathcal{O}_{\bar{X}}^\dagger(\bar{U})) \rightarrow \mathcal{G}_{\bar{X}}^\dagger(\bar{U})$ qui est bijectif puisque l'exactitude de (*) est établie pour **tout** recouvrement principal de \bar{U} .

Le cas où \bar{X} n'est pas affine résulte du cas affine par le principe qui affirme que la restriction à un ouvert \bar{U} du faisceau associé à un préfaisceau \mathcal{P} est le faisceau associé à la restriction de \mathcal{P} à \bar{U} . ■

3.4.5. Remarque. Le début de la démonstration précédente donne une injection canonique $\mathcal{G}_{\bar{X}}^\dagger(\bar{U}) \subseteq \mathbf{G}^\dagger(\mathcal{O}_{\bar{X}}^\dagger(\bar{U}))$ pour **tout** ouvert $\bar{U} \subseteq \bar{X}$ lorsque \bar{X} est affine. On obtient alors comme corollaire de 3.4.4 le fait que pour tout ouvert affine $\bar{U} \subseteq \bar{X}$ et **tout** ouvert $\bar{V} \subseteq \bar{U}$ il existe un morphisme naturel de restriction de $\mathbf{G}^\dagger(\mathcal{O}_{\bar{X}}^\dagger(\bar{U}))$ vers $\mathbf{G}^\dagger(\mathcal{O}_{\bar{X}}^\dagger(\bar{V}))$ compatible aux restrictions de groupes d'automorphismes précédemment considérés (cf. 4.1.1).

3.4.6. Soit $(\bar{X}; \mathcal{O}_{\bar{X}}^\dagger)$ le schéma de Meredith affine associé à une algèbre f.c.t.f. \mathbf{A}^\dagger . Pour tout ouvert $\bar{U} \subseteq \bar{X}$ notons $\rho_{\bar{U}}^{\bar{X}} : \mathbf{A}^\dagger = \mathcal{O}_{\bar{X}}^\dagger(\bar{X}) \rightarrow \mathcal{O}_{\bar{X}}^\dagger(\bar{U})$ le morphisme de restriction des sections du faisceau $\mathcal{O}_{\bar{X}}^\dagger$ et soit $\text{Homom}_{\mathbf{R}}^\dagger(\mathbf{A}^\dagger, \mathcal{O}_{\bar{X}}^\dagger(\bar{U}))$ l'ensemble des morphismes de \mathbf{R} -algèbres dont la réduction modulo \mathbf{I} correspond à l'inclusion $\bar{U} \subseteq \bar{X}$. On a alors l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{G}^\dagger(\mathcal{O}_{\bar{X}}^\dagger(\bar{U})) & \xrightarrow{\Xi(\bar{U})} & \text{Homom}_{\mathbf{R}}^\dagger(\mathbf{A}^\dagger, \mathcal{O}_{\bar{X}}^\dagger(\bar{U})) \\ \theta & \longmapsto & \theta \circ \rho_{\bar{U}}^{\bar{X}} \end{array}$$

Théorème. Soit \mathbf{A}^\dagger une \mathbf{R} -algèbre f.c.t.f. très lisse.

- L'application $\Xi(\bar{U})$ établit une bijection entre $\mathcal{G}_{\bar{X}}^\dagger(\bar{U})$ et $\text{Homom}_{\mathbf{R}}^\dagger(\mathbf{A}^\dagger, \mathcal{O}_{\bar{X}}^\dagger(\bar{U}))$ quel que soit l'ouvert $\bar{U} \subseteq \bar{X}$.
- Si \bar{U} est un ouvert affine, l'action à droite de $\mathbf{G}^\dagger(\mathcal{O}_{\bar{X}}^\dagger(\bar{U}))$ sur $\text{Homom}_{\mathbf{R}}^\dagger(\mathbf{A}^\dagger, \mathcal{O}_{\bar{X}}^\dagger(\bar{U}))$ est simplement transitive.

Démonstration. Supposons d'abord $\bar{U} = D(\bar{f})$ auquel cas $\mathcal{G}_{\bar{X}}^\dagger(\bar{U}) = \mathbf{G}^\dagger(\mathbf{A}^\dagger_{[f]})$ (3.4.4). Soit $\phi : \mathbf{A}^\dagger \rightarrow \mathbf{A}^\dagger_{[f]}$ un morphisme de \mathbf{R} -algèbres dont la réduction modulo \mathbf{I} est le morphisme canonique $\iota : \bar{\mathbf{A}} \rightarrow \bar{\mathbf{A}}_{\bar{f}}$. L'élément $\phi(f)$ est inversible car $\phi(f) = f \bmod \mathbf{I}$, et ϕ se factorise de manière unique en $\theta \circ \rho_{\bar{U}}^{\bar{X}}$ où $\theta \in \mathbf{G}^\dagger(\mathbf{A}^\dagger_{[f]})$ puisque c'est un endomorphisme de \mathbf{R} -algèbre de $\mathbf{A}^\dagger_{[f]}$ de réduction modulo \mathbf{I} égal à l'identité et que $\mathbf{A}^\dagger_{[f]}$ est f.c.t.f. très lisse car c'est ainsi de \mathbf{A}^\dagger . Ceci démontre la surjectivité de $\Xi(\bar{U})$. L'injectivité de $\Xi(\bar{U})$ résulte de ce que chaque

$\theta \in \mathbf{G}^\dagger(\mathbf{A}^\dagger_{[f]})$ est entièrement déterminé par son action sur $\mathbf{A}^\dagger \cdot \mathbf{1} \subseteq \mathbf{A}^\dagger_{[f]}$, c'est à dire par la composée $\theta \circ \rho_{D(\bar{f})}^{\bar{\mathbf{X}}}$ qui n'est autre que ϕ .

Dans le cas où \bar{U} est un ouvert arbitraire on a, pour tout recouvrement principal $\bar{U} = \bigcup_i D(\bar{f}_i)$ et tout $\phi \in \text{Hom}_{\mathbf{R}}^\dagger(\mathbf{A}^\dagger, \mathcal{O}_{\mathbf{X}}^\dagger(\bar{U}))$, le diagramme commutatif de deuxième ligne exacte à gauche :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{A}^\dagger & \xrightarrow{\Pi_i \rho_{D(\bar{f}_i)}^{\bar{\mathbf{X}}}} & \prod_i \mathbf{A}^\dagger_{[f_i]} & \xrightarrow{\delta_0} & \prod_{i < j} \mathbf{A}^\dagger_{[f_i f_j]} \\ \phi \downarrow & & \oplus & \theta_i \downarrow & \\ 0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{X}}^\dagger(\bar{U}) & \xrightarrow{\epsilon} & \prod_i \mathbf{A}^\dagger_{[f_i]} & \xrightarrow{\delta_0} & \prod_{i < j} \mathbf{A}^\dagger_{[f_i f_j]} \end{array} \quad (*)$$

où l'élément $\theta_i \in \mathbf{G}^\dagger(\mathbf{A}^\dagger_{[f_i]})$ est celui introduit dans le paragraphe précédent vérifiant

$$\rho_{D(\bar{f}_i)}^{\bar{U}} \circ \phi = \theta_i \circ \rho_{D(\bar{f}_i)}^{\bar{\mathbf{X}}}.$$

Or, pour tout $i < j$ les restrictions $\theta_i|_{\mathbf{A}^\dagger_{[f_i f_j]}}$ et $\theta_j|_{\mathbf{A}^\dagger_{[f_i f_j]}}$ coïncident sur $\mathbf{A}^\dagger \cdot \mathbf{1} \subseteq \mathbf{A}^\dagger_{[f_i f_j]}$ par construction. On en déduit l'égalité

$$\theta_i|_{\mathbf{A}^\dagger_{[f_i f_j]}} = \theta_j|_{\mathbf{A}^\dagger_{[f_i f_j]}}$$

et les θ_i se recollent en un certain $\theta \in \mathcal{G}^\dagger(\bar{U})$ vérifiant

$$\rho_{D(\bar{f}_i)}^{\bar{U}} \circ \theta \circ \rho_{\bar{U}}^{\bar{\mathbf{X}}} = \theta_i \circ \rho_{D(\bar{f}_i)}^{\bar{\mathbf{X}}} = \rho_{D(\bar{f}_i)}^{\bar{U}} \circ \phi$$

pour tout i . Par conséquent $\theta \circ \rho_{\bar{U}}^{\bar{\mathbf{X}}} = \phi$ et la surjectivité de $\Xi(\bar{U})$ est prouvée.

L'injectivité de $\Xi(\bar{U})$ résulte de ce que si $\theta, \theta' \in \mathcal{G}^\dagger(\bar{U})$ vérifient $\theta \circ \rho_{\bar{U}}^{\bar{\mathbf{X}}} = \theta' \circ \rho_{\bar{U}}^{\bar{\mathbf{X}}}$, on a par restriction de \bar{U} à chaque $D(\bar{f}_i)$:

$$\theta|_{\mathbf{A}^\dagger_{[\bar{f}_i]}} \circ \rho_{D(\bar{f}_i)}^{\bar{\mathbf{X}}} = \theta'|_{\mathbf{A}^\dagger_{[\bar{f}_i]}} \circ \rho_{D(\bar{f}_i)}^{\bar{\mathbf{X}}}$$

et alors $\theta|_{\mathbf{A}^\dagger_{[\bar{f}_i]}} = \theta'|_{\mathbf{A}^\dagger_{[\bar{f}_i]}}$ pour tout i , et donc $\theta = \theta'$.

L'assertion ((b)) est maintenant corollaire de ((a)) et du théorème 3.4.4. ■

3.4.7. Corollaire. Soit $(\bar{\mathbf{X}}; \mathcal{O}_{\bar{\mathbf{X}}})$ la réduction modulo \mathbf{I} d'un schéma lisse séparé $(\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}})$ de schéma de Meredith $(\bar{\mathbf{X}}; \mathcal{O}_{\bar{\mathbf{X}}})$. Si $\bar{V} \subseteq \bar{U}$ sont deux ouverts **affines** de $\bar{\mathbf{X}}$, l'action à droite de $\mathbf{G}^\dagger(\mathcal{O}_{\bar{\mathbf{X}}}^\dagger(\bar{V}))$ sur $\text{Hom}_{\mathbf{R}}^\dagger(\mathcal{O}_{\bar{\mathbf{X}}}^\dagger(\bar{U}), \mathcal{O}_{\bar{\mathbf{X}}}^\dagger(\bar{V}))$ est simplement transitive.

3.4.8. Corollaire. Soit $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$ le site des relèvements affines très lisses d'un schéma lisse et séparé sur $\bar{\mathbf{R}}$.

a) Soient $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ dans $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$. Pour chaque $\phi \in \text{Mor}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}(\mathcal{V}, \mathcal{U})$ l'application

$$\begin{array}{ccc} \text{Mor}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}(\mathcal{W}, \mathcal{V}) & \longrightarrow & \text{Mor}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}(\mathcal{W}, \mathcal{U}) \\ \alpha & \longmapsto & \phi \circ \alpha \end{array}$$

est bijective.

b) Soient $\mathcal{V}' \subseteq \mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ et $\mathcal{V}' \subseteq \mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ dans $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$. Étant donnés $\phi \in \text{Mor}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}(\mathcal{V}, \mathcal{U})$, $\phi' \in \text{Mor}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}(\mathcal{V}', \mathcal{U}')$ et $\beta \in \text{Mor}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}(\mathcal{U}', \mathcal{U})$, il existe un et un seul $\alpha \in \text{Mor}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}(\mathcal{V}', \mathcal{V})$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U}' & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{U} \\ \phi' \uparrow & & \uparrow \phi \\ \mathcal{V}' & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{V} \end{array}$$

Démonstration

a) Par 3.2.16 on peut toujours supposer que \mathcal{W}, \mathcal{V} appartiennent à $\mathcal{M}(\mathcal{U})$. Notons $\Phi_{\mathcal{W}}^{(-)}$ l'élément du singleton $\text{Mor}_{\mathcal{M}(\mathcal{U})}(\mathcal{W}, (-))$. Le corollaire résulte alors aussitôt des bijections Ξ de 3.4.6 :

$$\begin{array}{ccccc} \text{Mor}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}(\mathcal{W}, \mathcal{U}) & \xleftarrow{\simeq} & \text{End}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}(\mathcal{W}) & \xrightarrow{\simeq} & \text{Mor}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}(\mathcal{W}, \mathcal{V}) \\ \Phi_{\mathcal{W}}^{\mathcal{U}} \circ \theta & \longleftarrow & \theta & \longrightarrow & \Phi_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}} \circ \theta \end{array}$$

b) Conséquence immédiate de (a) en posant $\mathcal{W} = \mathcal{V}'$ et $\phi \circ \alpha = \beta \circ \phi'$. ■

3.5 Foncteurs associés à l'inclusion $\mathcal{M}(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$

3.5.1. Rétractions de $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$ sur $\langle \mathcal{M}(\mathcal{U}) \rangle$. Soit $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$ le site des relèvements affines très lisses d'un schéma lisse et séparé sur $\overline{\mathbf{R}}$. Fixons un ouvert affine $\overline{\mathbf{Y}} \subseteq \overline{\mathbf{X}}$ et notons $\mathcal{Y}_{\text{inf}}^\dagger$ le site des relèvements affines très lisses de $\overline{\mathbf{Y}}$ et $\iota_{\mathcal{Y}} : \mathcal{Y}_{\text{inf}}^\dagger \subseteq \mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$ le foncteur d'inclusion. Notons $r_{\mathcal{Y}}$ la correspondance de $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$ vers $\mathcal{Y}_{\text{inf}}^\dagger$ qui fait correspondre :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger \ni \mathcal{U} \longmapsto r_{\mathcal{Y}}(\mathcal{U}) \in \mathcal{Y}_{\text{inf}}^\dagger \\ \text{Mor}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}(\mathcal{U}', \mathcal{U}) \ni \alpha \longmapsto r_{\mathcal{Y}}(\alpha) \in \text{Mor}_{\mathcal{Y}_{\text{inf}}^\dagger}(r_{\mathcal{Y}}(\mathcal{U}'), r_{\mathcal{Y}}(\mathcal{U})) \end{array} \right.$$

où $r_{\mathcal{Y}}(\mathcal{U})$ est l'unique objet de $\mathcal{M}(\mathcal{U})$ vérifiant $\overline{r_{\mathcal{Y}}(\mathcal{U})} = \overline{\mathbf{Y}} \cap \overline{\mathcal{U}}$ (3.3.1) et $r_{\mathcal{Y}}(\alpha)$ est l'unique morphisme rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U}' & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{U} \\ \phi_{\mathcal{Y}}(\mathcal{U}') \uparrow & & \uparrow \phi_{\mathcal{Y}}(\mathcal{U}) \\ r_{\mathcal{Y}}(\mathcal{U}') & \xrightarrow{r_{\mathcal{Y}}(\alpha)} & r_{\mathcal{Y}}(\mathcal{U}) \end{array}$$

où $\phi_{\mathcal{Y}}(\mathcal{U})$ est l'unique élément de $\text{Mor}_{\mathcal{M}(\mathcal{U})}(r_{\mathcal{Y}}(\mathcal{U}), \mathcal{U})$ (3.4.8-(b)).

3.5.2. Proposition. Avec les données précédentes,

a) La correspondance $r_{\mathcal{Y}} : \mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger \rightsquigarrow \mathcal{Y}_{\text{inf}}^\dagger$ est fonctorielle covariante, conserve produits fibrés et recouvrements et c'est un inverse à gauche de l'inclusion $\iota_{\mathcal{Y}} : \mathcal{Y}_{\text{inf}}^\dagger \subseteq \mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$. Le morphisme d'adjonction :

$$\text{Mor}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}(\iota_{\mathcal{Y}}(-), -) \longrightarrow \text{Mor}_{\mathcal{Y}_{\text{inf}}^\dagger}(-, r_{\mathcal{Y}}(-)), \quad \alpha \longmapsto r_{\mathcal{Y}}(\alpha). \quad (\diamond)$$

est un isomorphisme et $(\iota_{\mathcal{Y}}, r_{\mathcal{Y}})$ est une paire de foncteurs adjoints.

b) Pour tout $\mathcal{U} \in \mathcal{Y}_{\text{inf}}^\dagger$ vérifiant $\overline{\mathcal{U}} = \overline{\mathbf{Y}}$, soit $\langle \mathcal{M}(\mathcal{U}) \rangle$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{Y}_{\text{inf}}^\dagger$ dont les objets sont ceux de $\mathcal{M}(\mathcal{U})$. L'inclusion $\iota_{\mathcal{U}} : \langle \mathcal{M}(\mathcal{U}) \rangle \subseteq \mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$ admet une rétraction, i.e. un foncteur covariant $r_{\mathcal{U}} : \mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger \rightsquigarrow \langle \mathcal{M}(\mathcal{U}) \rangle$ qui conserve produit fibrés et recouvrements et tel

que $r_U \circ i_U = \text{id}_{\langle \mathcal{M}(U) \rangle}$. Le morphisme d'adjonction :

$$\text{Mor}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}(i_U(-), -) \longrightarrow \text{Mor}_{\langle \mathcal{M}(U) \rangle}(-, r_U(-)), \quad \alpha \longmapsto r_U(\alpha). \quad (\diamond\diamond)$$

est un isomorphisme et (i_U, r_U) est une paire de foncteurs adjoints.

Démonstration. L'assertion (a) est conséquence facile des définitions et de 3.4.8-(b). Vérifions l'adjonction. Soient $\mathcal{W} \in \mathcal{Y}_{\text{inf}}^\dagger$ et $\mathcal{V} \in \mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$ et supposons $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ car autrement les ensembles de morphismes de (\diamond) seraient vides. On a donc $\mathcal{W} \subseteq r_Y(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{V}$ et 3.4.8-(a) prouve que le morphisme d'adjonction est bijectif.

Pour (b) on remarque que la composée $i_U^\mathcal{Y} = r_Y \circ i_U : \langle \mathcal{M}(U) \rangle \rightsquigarrow \mathcal{Y}_{\text{inf}}^\dagger$ n'est autre que l'inclusion qui est clairement une équivalence de catégories, il existe alors une équivalence de catégories $\lambda_U : \mathcal{Y}_{\text{inf}}^\dagger \rightsquigarrow \langle \mathcal{M}(U) \rangle$ adjoint à gauche et inverse à gauche de l'inclusion $i_U^\mathcal{Y} : \langle \mathcal{M}(U) \rangle \subseteq \mathcal{Y}_{\text{inf}}^\dagger$ ([McL] prop. 2, p. 92) d'où les isomorphismes d'adjonction :

$$\text{Mor}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}(i_Y \circ i_U^\mathcal{Y}(-), -) \simeq \text{Mor}_{\mathcal{Y}_{\text{inf}}^\dagger}(i_U^\mathcal{Y}(-), r_Y(-)) \xrightarrow{\lambda_U} \text{Mor}_{\langle \mathcal{M}(U) \rangle}(-, \lambda_U \circ r_Y(-)).$$

Le restant des affirmations résulte de ce que le morphisme naturel de $\text{Mor}_{\mathcal{Y}_{\text{inf}}^\dagger}(\bullet, \lambda_U(\bullet))$ adjoint de $\text{id}_{\lambda_U(\bullet)} \in \text{Mor}_{\langle \mathcal{M}(U) \rangle}(\lambda_U(\bullet), \lambda_U(\bullet))$ est un isomorphisme. ■

3.5.3. Le foncteurs i_{U*} et i_U^{-1} . On reprend les notations précédentes : $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$ le site des relèvements affines très lisses d'un schéma lisse et séparé sur $\bar{\mathbf{R}}$, U un objet de $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$ et $\mathcal{Y}_{\text{inf}}^\dagger$ le site des relèvements affines très lisses de $\bar{U} = \bar{Y} \subseteq \bar{X}$. Notons $i_Y : \mathcal{Y}_{\text{inf}}^\dagger \subseteq \mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$ l'inclusion de rétraction $r_Y : \mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger \rightsquigarrow \mathcal{Y}_{\text{inf}}^\dagger$ et fixons \mathbf{un} inverse à gauche $\lambda_U : \mathcal{Y}_{\text{inf}}^\dagger \rightsquigarrow \langle \mathcal{M}(U) \rangle$ de l'équivalence de catégories $\langle \mathcal{M}(U) \rangle \subseteq \mathcal{Y}_{\text{inf}}^\dagger$.

Le foncteur “image inverse”. Noté $i_U^{-1} : \text{Mod}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}(\mathbf{Z}) \rightsquigarrow \text{Mod}_{\langle \mathcal{M}(U) \rangle}(\mathbf{Z})$, il associe à un faisceau (resp. morphisme de faisceaux) sur $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$ sa restriction à $\langle \mathcal{M}(U) \rangle$. C'est un foncteur clairement additif, covariant et exact.

Le foncteur “image directe”. Noté $i_{U*} : \text{Mod}_{\langle \mathcal{M}(U) \rangle}(\mathbf{Z}) \rightsquigarrow \text{Mod}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}(\mathbf{Z})$, il est défini comme suit. Un faisceau $\mathcal{M} \in \text{Mod}_{\langle \mathcal{M}(U) \rangle}(\mathbf{Z})$ est un foncteur contravariant de $\langle \mathcal{M}(U) \rangle$ vers la catégorie $\text{Mod}(\mathbf{Z})$ vérifiant la condition de faisceaux pour un site. Comme $\lambda_U : \mathcal{Y}_{\text{inf}}^\dagger \rightsquigarrow \langle \mathcal{M}(U) \rangle$ est une équivalence de catégories qui conserve produits fibrés et recouvrements (3.5.2-(b)), le foncteur $\mathcal{M} \circ \lambda_U$ est automatiquement un faisceau sur $\mathcal{Y}_{\text{inf}}^\dagger$. La composée $i_{U*}(\mathcal{M}) := (\mathcal{M} \circ \lambda_U) \circ r_Y$ est alors un faisceau puisque r_Y respecte recouvrements et produits fibrés (3.5.2-(a)). On définit de manière analogue $i_{U*}(\alpha)$ pour tout morphisme de faisceau de \mathbf{Z} -modules α . Le foncteur i_{U*} ainsi défini est clairement covariant et additif.

On prendra garde du fait que si i_U^{-1} est intrinsèque, le foncteur i_{U*} dépend du choix de la rétraction $\lambda_U : \mathcal{Y}_{\text{inf}}^\dagger \rightsquigarrow \langle \mathcal{M}(U) \rangle$.

Morphismes d'adjonction. L'égalité $i_U^{-1} \circ i_{U*} = \text{id}$, immédiate d'après les définitions, donne le morphisme d'adjonction :

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}(-, i_{U*}(-)) & \xrightarrow{\eta(-, -)} & \text{Hom}_{\langle \mathcal{M}(U) \rangle}(i_U^{-1}(-), -) \\ \alpha & \longmapsto & i_U^{-1}(\alpha) \end{array} \quad (*)$$

D'autre part, le morphisme $i_U \circ r_U \rightarrow \text{id}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}$, adjoint de id_{r_U} par l'adjonction 3.5.2-(b), donne un morphisme de faisceau de \mathbf{Z} -modules $t(\mathcal{M}) : \mathcal{M} \rightarrow i_{U*} \circ i_U^{-1}(\mathcal{M})$, naturel par rapport à \mathcal{M} , qui intervient dans la définition du deuxième morphisme d'adjonction

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\langle \mathcal{M}(U) \rangle}(i_U^{-1}(\mathcal{M}), \mathcal{N}) & \xrightarrow{\xi(\mathcal{M}, \mathcal{N})} & \text{Hom}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}(\mathcal{M}, i_{U*}(\mathcal{N})) \\ \beta & \longmapsto & \left(\mathcal{M} \xrightarrow{t(\mathcal{M})} i_{U*} i_U^{-1}(\mathcal{M}) \xrightarrow{i_{U*}(\beta)} i_{U*}(\mathcal{N}) \right) \end{array} \quad (**)$$

3.5.4. Proposition. Soit $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$ le site des relèvements affines très lisses d'un schéma lisse et séparé sur $\bar{\mathbf{R}}$. Pour $U \in \mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$ on a les foncteurs additifs :

$$\begin{cases} i_U^{-1} : \text{Mod}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}(\mathbf{Z}) \rightsquigarrow \text{Mod}_{\langle \mathcal{M}(U) \rangle}(\mathbf{Z}), & \text{image inverse,} \\ i_{U*} : \text{Mod}_{\langle \mathcal{M}(U) \rangle}(\mathbf{Z}) \rightsquigarrow \text{Mod}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}(\mathbf{Z}), & \text{image directe,} \end{cases}$$

et les morphismes d'adjonction :

$$\text{Hom}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}(-, i_{U*}(-)) \xrightarrow{(*)} \text{Hom}_{\langle \mathcal{M}(U) \rangle}(i_U^{-1}(-), -) \xrightarrow{(**)} \text{Hom}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}(-, i_{U*}(-))$$

- a) Les morphismes d'adjonction $(*, **)$ sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre.
- b) La paire (i_U^{-1}, i_{U*}) est une paire de foncteurs adjoints.
- c) i_U^{-1} est exact et i_{U*} est exact à gauche.

Démonstration. Pour (a) raisonne comme dans la théorie des faisceaux classique : l'égalité $\eta(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \circ \xi(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = \text{id}$, et donc la surjectivité de η , résulte des définitions, ensuite la composée $\xi(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \circ \eta(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ fournit pour chaque $\beta : \mathcal{M} \rightarrow i_{U*} \mathcal{N}$ une décomposition naturelle

$$\begin{array}{c} \mathcal{M} \xrightarrow{t(\mathcal{M})} i_{U*} i_U^{-1}(\mathcal{M}) \xrightarrow{i_{U*} i_U^{-1}(\beta)} i_{U*}(\mathcal{N}) \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{\beta} \uparrow \end{array}$$

où $i_{U*} i_U^{-1}(\beta) = 0$ lorsque $\eta(\mathcal{M}, \mathcal{N})(\beta) = 0$; l'injectivité de η s'ensuit. (b) est une reformulation de (a) et l'exactitude de i_U^{-1} implique alors l'exactitude à gauche de i_{U*} . ■

3.5.5. Remarque. Le paragraphe 3.5.3 introduit également les foncteurs

$$i_{Y*} : \text{Mod}_{\mathcal{Y}_{\text{inf}}^\dagger}(\mathbf{Z}) \rightsquigarrow \text{Mod}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}(\mathbf{Z}) \quad \text{et} \quad i_Y^{-1} : \text{Mod}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}(\mathbf{Z}) \rightsquigarrow \text{Mod}_{\mathcal{Y}_{\text{inf}}^\dagger}(\mathbf{Z})$$

associés à l'inclusion $i_Y : \mathcal{Y}_{\text{inf}}^\dagger \subseteq \mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$. L'analogue de 3.5.4 pour la paire (i_Y^{-1}, i_{Y*}) est vrai et se démontre de la même manière.

3.5.6. Le foncteur $\mathcal{R}_U : \text{Mod}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}(\mathbf{Z}) \rightsquigarrow \text{Mod}_{\bar{U}}(\mathbf{Z})$. Soit $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$ le site des relèvements affines très lisses d'un schéma lisse et séparé sur $\bar{\mathbf{R}}$ et fixons $U \in \mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$. Pour chaque faisceau \mathcal{F} de \mathbf{Z} -modules sur $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$, notons $\mathcal{R}_U(\mathcal{F})$ le faisceau sur \bar{U} associé à $\mathcal{F}|_{\mathcal{M}(U)}$ (cf. 3.3.3-(b)). De même, si $\alpha : \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2$ est un morphisme de faisceaux de \mathbf{Z} -modules sur $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$ notons $\mathcal{R}_U(\alpha) : \mathcal{R}_U(\mathcal{F}_1) \rightarrow \mathcal{R}_U(\mathcal{F}_2)$ le morphisme de faisceaux sur \bar{U} déterminé par $\alpha|_{\mathcal{M}(U)}$. La correspondance ainsi définie :

$$\mathcal{R}_U : \text{Mod}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}(\mathbf{Z}) \rightsquigarrow \text{Mod}_{\bar{U}}(\mathbf{Z})$$

est un foncteur additif et covariant qui résulte de composer les foncteurs (cf. 3.3.2) :

$$\begin{array}{ccccc} \text{Mod}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}(\mathbf{Z}) & \xrightarrow{i_U^{-1}} & \text{Mod}_{\langle \mathcal{M}(U) \rangle}(\mathbf{Z}) & \xrightarrow[\text{restriction}]{j_U^{-1}} & \text{Mod}_{\mathcal{M}(U)}(\mathbf{Z}) & \xrightarrow[\simeq]{\text{faisceau associé}} & \text{Mod}_{\bar{U}}(\mathbf{Z}) \\ & & & & \uparrow & & \uparrow \\ & & & & \mathcal{R}_U & & \end{array}$$

3.5.7. Proposition

- a) Le foncteur \mathcal{R}_U est exact. Il est en plus fidèle lorsque $\bar{\mathbf{X}}$ est affine et que $\bar{U} = \bar{\mathbf{X}}$.
b) Soit \mathcal{F} un faisceau de \mathbf{Z} -modules sur $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$. Pour tout $\mathcal{V} \in \mathcal{M}(U)$ le morphisme canonique $\mathcal{F}(\mathcal{V}) \rightarrow \Gamma(\bar{\mathcal{V}}; \mathcal{R}_U(\mathcal{F}))$ est bijectif.

Démonstration. (a) est claire par construction et (b) résulte de 3.2.10 et 3.2.11. ■

3.5.8. Le morphisme \mathcal{R}_ϕ . Sous les hypothèses de la section précédente, soit $\phi \in \text{Mor}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}(U', U)$. D'après 3.4.8-(b), si $\mathcal{W} \in \mathcal{M}(U)$ et $\mathcal{W}' \in \mathcal{M}(U')$ sont tels que $\bar{\mathcal{W}} = \bar{\mathcal{W}'}$, il existe un et un seul $\phi_{\bar{\mathcal{W}}} \in \text{Mor}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}(\mathcal{W}', \mathcal{W})$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U}' & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{U} \\ \Phi_{\mathcal{W}'}^{\mathcal{U}'} \uparrow & & \uparrow \Phi_{\mathcal{W}}^{\mathcal{U}} \\ \mathcal{W}' & \xrightarrow{\phi_{\bar{\mathcal{W}}}} & \mathcal{W} \end{array}$$

où $\{\Phi_{\mathcal{W}'}^{\mathcal{U}'}\} = \text{Mor}_{\mathcal{M}(U')}(\mathcal{W}', \mathcal{U}')$ et $\{\Phi_{\mathcal{W}}^{\mathcal{U}}\} = \text{Mor}_{\mathcal{M}(U)}(\mathcal{W}, \mathcal{U})$. Lorsque $\mathcal{F} \in \text{Mod}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}(\mathbf{Z})$, la famille des morphismes $\mathcal{F}(\phi_{\bar{\mathcal{V}}})$, où $\bar{\mathcal{V}}$ parcourt l'ensemble des ouverts affines de \bar{U}' , définit un morphisme de faisceaux $\mathcal{R}_\phi(\mathcal{F}) : \mathcal{R}_U(\mathcal{F})|_{\bar{U}'} \rightarrow \mathcal{R}_{U'}(\mathcal{F})$ naturel par rapport à \mathcal{F} . Le morphisme de foncteurs ainsi défini est noté : $\mathcal{R}_\phi : \mathcal{R}_U(-)|_{\bar{U}'} \rightarrow \mathcal{R}_{U'}$.

La proposition suivante est de vérification immédiate.

3.5.9. Proposition. Soit $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$ le site des relèvements affines très lisses d'un schéma lisse et séparé sur $\bar{\mathbf{R}}$ et soient $U'' \subseteq U' \subseteq U \in \mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$. Alors,

- a) Le morphisme de foncteurs

$$\mathcal{R}_U(-)|_{\bar{U}'} \xrightarrow{\mathcal{R}_\phi} \mathcal{R}_{U'}$$

est un isomorphisme quel que soit $\phi \in \text{Mor}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}(U', U)$.

- b) Pour tous $\phi \in \text{Mor}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}(U', U)$ et $\phi' \in \text{Mor}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}(U'', U')$, on a

$$\mathcal{R}_{\phi \circ \phi'}(-) = \mathcal{R}_{\phi'}(-) \circ (\mathcal{R}_\phi(-)|_{\bar{U}''})$$

§ 4. Catégories de faisceaux sur $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$

4.1 Faisceau $\mathcal{G}_\mathcal{X}^\dagger$ d'automorphismes \dagger -adiques sur $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$

Soit $(\bar{\mathcal{X}}; \mathcal{O}_{\bar{\mathcal{X}}})$ un schéma lisse et séparé sur $\bar{\mathbf{R}}$ de site de relèvements affines très lisses $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$. Pour $\mathcal{U} \in \mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$ notons $(\bar{\mathcal{U}}; \mathcal{O}_{\bar{\mathcal{U}}})$ le schéma de Meredith associé à $\mathbf{A}(\mathcal{U})^\dagger$. Dans 3.4 nous avons introduit le faisceau $\mathcal{G}_{\bar{\mathcal{U}}}^\dagger$ sur $\bar{\mathcal{U}}$; il vérifie :

$$\mathcal{G}_{\bar{\mathcal{U}}}^\dagger(\bar{V}) = \mathbf{G}^\dagger(\mathcal{O}_{\bar{\mathcal{U}}}^\dagger(\bar{V})) = \text{End}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}(\mathcal{O}_{\bar{\mathcal{U}}}^\dagger(\bar{V}))^{\text{op}} = \text{Iso}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}(\mathcal{O}_{\bar{\mathcal{U}}}^\dagger(\bar{V}))^{\text{op}},$$

pour tout ouvert affine $\bar{V} \subseteq \bar{\mathcal{U}}$.

La restriction de $\mathcal{G}_{\bar{\mathcal{U}}}^\dagger$ à la sous-catégorie des ouverts affines de $\bar{\mathcal{X}}$ est un **faisceau** sur le sous-site $\mathcal{M}(\mathcal{U})$, il est noté $\mathcal{G}_{\mathcal{M}(\mathcal{U})}^\dagger$.

4.1.1. Restriction d'automorphismes \dagger -adiques dans $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$. Soit $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ dans $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$. Pour chaque $\phi \in \text{Mor}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}(\mathcal{U}', \mathcal{U})$ et tout $\theta \in \mathbf{G}^\dagger(\mathbf{A}(\mathcal{U})^\dagger)$ on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{A}(\mathcal{U})^\dagger & \xlongequal{\quad} & \mathbf{A}(\mathcal{U})^\dagger & \xrightarrow{\theta} & \mathbf{A}(\mathcal{U})^\dagger & \xlongequal{\quad} & \mathbf{A}(\mathcal{U})^\dagger \\ & & \parallel & & \parallel & & \\ & & \mathcal{O}_{\bar{\mathcal{U}}}^\dagger & \xrightarrow{\theta} & \mathcal{O}_{\bar{\mathcal{U}}}^\dagger & & \\ & & \rho_{\bar{\mathcal{U}}}^\dagger \downarrow & & \downarrow \rho_{\bar{\mathcal{U}}}^\dagger & & \\ & & \mathcal{O}_{\bar{\mathcal{U}'}}^\dagger & \xrightarrow{\theta'} & \mathcal{O}_{\bar{\mathcal{U}'}}^\dagger & & \\ & & \xi \downarrow & & \downarrow \xi & & \\ \mathbf{A}(\mathcal{U}')^\dagger & \xleftarrow{\zeta} & \mathbf{A}(\mathcal{U}')^\dagger & \xrightarrow{\xi \theta' \xi^{-1}} & \mathbf{A}(\mathcal{U}')^\dagger & \xrightarrow{\zeta} & \mathbf{A}(\mathcal{U}')^\dagger \end{array}$$

où θ' est la restriction de θ (cf. 3.4.5), $\xi \in \text{Homom}^\dagger(\mathcal{O}_{\bar{\mathcal{U}'}}^\dagger, \mathbf{A}(\mathcal{U}')^\dagger)$ est arbitrairement choisi et $\zeta \in \mathbf{G}^\dagger(\mathbf{A}(\mathcal{U}')^\dagger)$ est l'isomorphisme vérifiant $\zeta \circ \xi \circ \rho_{\bar{\mathcal{U}'}}^\dagger = \phi$ (th. 3.4). La composée

$$\mathcal{G}_\mathcal{X}^\dagger(\phi)(\theta) := \zeta \circ \xi \circ \theta' \circ \xi^{-1} \circ \zeta^{-1}$$

est alors indépendante du choix de ξ et l'application $\mathcal{G}_\mathcal{X}^\dagger(\phi) : \mathbf{G}^\dagger(\mathbf{A}(\mathcal{U})^\dagger) \rightarrow \mathbf{G}^\dagger(\mathbf{A}(\mathcal{U}')^\dagger)$ ainsi définie est un morphisme de groupes.

On a

$$\mathcal{G}_\mathcal{X}(\phi_1 \circ \phi_2) = \mathcal{G}_\mathcal{X}(\phi_2) \circ \mathcal{G}_\mathcal{X}(\phi_1), \quad (\ddagger)$$

pour tous $\phi_1 \in \text{Mor}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}(\mathcal{U}', \mathcal{U})$ et $\phi_2 \in \text{Mor}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}(\mathcal{U}'', \mathcal{U}')$.

4.1.2. Proposition et définition. La correspondance $\mathcal{G}_\mathcal{X}^\dagger : \mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger \rightsquigarrow \mathbf{Grps}$ qui associe

$$\mathcal{U} \rightsquigarrow \mathcal{G}_\mathcal{X}^\dagger(\mathcal{U}) := \mathbf{G}^\dagger(\mathbf{A}(\mathcal{U})^\dagger) \quad \text{et} \quad (\phi : \mathcal{U}' \rightarrow \mathcal{U}) \rightsquigarrow (\mathcal{G}_\mathcal{X}^\dagger(\phi) : \mathcal{G}_\mathcal{X}^\dagger(\mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{G}_\mathcal{X}^\dagger(\mathcal{U}')),$$

est un faisceau de groupes; c'est «le faisceau des automorphismes \dagger -adiques sur $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$ ».

Indication. La correspondance est un préfaisceau sur $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$ d'après l'égalité (†) ci-dessus et la restriction de \mathcal{G}_χ^\dagger au sous-site $\mathcal{M}(\mathcal{U})$ est un **faisceau**, à savoir $\mathcal{G}_{\mathcal{M}(\mathcal{U})}^\dagger$ et ceci quel que soit $\mathcal{U} \in \mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$. ■

4.1.3. Note. Soient $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$ le site des relèvements affines très lisses d'un schéma lisse et séparé sur $\bar{\mathbf{R}}$. Les assertions suivantes, des cas particuliers de 3.4.8 reliés au faisceau \mathcal{G}_χ^\dagger , joueront un rôle important dans la suite.

- a) Pour tout $\mathcal{U} \in \mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$ on a $\text{End}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}(\mathcal{U}) = \text{Iso}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}(\mathcal{U}) = (\mathcal{G}_\chi^\dagger(\mathcal{U}))^{\text{op}}$.
- b) Soient $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ deux objets de $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$. L'action naturelle du groupe $(\mathcal{G}_\chi^\dagger(\mathcal{U}'))^{\text{op}}$ à droite de $\text{Mor}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}(\mathcal{U}', \mathcal{U})$ est simplement transitive.
- c) Étant donnés $\phi \in \text{Mor}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}(\mathcal{U}', \mathcal{U})$ et $\theta \in \mathcal{G}_\chi^\dagger(\mathcal{U})$, il existe un et un seul $\theta' \in \mathcal{G}_\chi^\dagger(\mathcal{U}')$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U} & \xrightarrow{\theta} & \mathcal{U} \\ \phi \downarrow & & \downarrow \phi \\ \mathcal{U}' & \xrightarrow{\theta'} & \mathcal{U}' \end{array}$$

à savoir $\theta' = \mathcal{G}_\chi^\dagger(\phi)(\theta)$.

4.2 Catégorie de faisceaux de \mathbf{Z} -modules sur $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$

4.2.1. Préfaisceaux de \mathbf{Z} -modules. Soient $(\bar{\mathbf{X}}; \mathcal{O}_{\bar{\mathbf{X}}})$ un schéma lisse et séparé sur $\bar{\mathbf{R}}$ et \mathbf{Z} un anneau. Un préfaisceau \mathcal{P} de \mathbf{Z} -modules sur $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$ étant un foncteur contravariant de $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$ dans la catégorie $\text{Mod}(\mathbf{Z})$ des \mathbf{Z} -modules, la correspondance

$$\text{End}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}(\mathcal{U}) \ni \phi \longmapsto \mathcal{P}(\phi) \in \text{End}_{\text{Mod}(\mathbf{Z})}(\mathcal{P}(\mathcal{U}))$$

définit pour chaque $\mathcal{U} \in \mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$ un morphisme de groupes

$$\mathcal{P}(-) : (\text{Iso}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}(\mathcal{U}))^{\text{op}} \rightarrow \text{Iso}_{\text{Mod}(\mathbf{Z})}(\mathcal{P}(\mathcal{U}))$$

et donc une structure de $\mathbf{Z}[\mathcal{G}_\chi^\dagger(\mathcal{U})]$ -module sur $\mathcal{P}(\mathcal{U})$. Pour simplifier les notations on notera $\theta \underset{\mathcal{U}}{\cdot} m$, et même $\theta \cdot m$ lorsque \mathcal{U} sera sous-entendu, le transformé de $m \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$ par $\theta \in \mathcal{G}_\chi^\dagger(\mathcal{U})$ sous cette action, autrement dit, on pose :

$$\theta \underset{\mathcal{U}}{\cdot} m := \mathcal{P}(\theta)(m).$$

La functorialité de \mathcal{P} donne la commutativité des diagrammes

$$\begin{array}{ccccc} (- \underset{\mathcal{U}}{\cdot} -) : \mathcal{G}_\chi^\dagger(\mathcal{U}) \times \mathcal{P}(\mathcal{U}) & \longrightarrow & \mathcal{P}(\mathcal{U}) & & \\ \mathcal{G}_\chi^\dagger(\phi) \downarrow & & \mathcal{P}(\phi) \downarrow & \oplus & \downarrow \mathcal{P}(\phi) \\ (- \underset{\mathcal{U}'}{\cdot} -) : \mathcal{G}_\chi^\dagger(\mathcal{U}') \times \mathcal{P}(\mathcal{U}') & \longrightarrow & \mathcal{P}(\mathcal{U}') & & \end{array}$$

pour tous $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ et $\phi \in \text{Mor}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}(\mathcal{U}', \mathcal{U})$ et la famille des $(- \underset{\mathcal{U}}{\cdot} -)$ définit une structure de \mathcal{G}_χ^\dagger -module sur \mathcal{P} qu'on appellera « la structure canonique de \mathcal{G}_χ^\dagger -module de \mathcal{P} ».

4.2.2. Dorénavant pour chaque $\mathcal{U} \in \mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$, la restriction $j_{\mathcal{U}}^{-1}(\mathcal{F})$ d'un (pré)faisceau \mathcal{F} sur $\langle \mathcal{M}(\mathcal{U}) \rangle$ au sous-site $\mathcal{M}(\mathcal{U})$ munie de sa structure canonique de $\mathcal{G}_{\mathcal{M}(\mathcal{U})}^\dagger$ -module sera notée $J_{\mathcal{U}}^{-1}(\mathcal{F})$. Le même procédé décrit dans 3.5.6 donne maintenant un foncteur

$$\mathcal{R}_{\mathcal{U}} : \text{Mod}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}(\mathbf{Z}) \rightsquigarrow \text{Mod}_{\bar{\mathcal{U}}}(\mathbf{Z}, \mathcal{G}_{\mathcal{U}}^\dagger)$$

où $\text{Mod}_{\bar{\mathcal{U}}}(\mathbf{Z}, \mathcal{G}_{\mathcal{U}}^\dagger)$ désigne la catégorie des faisceaux de \mathbf{Z} -modules sur $\bar{\mathcal{U}}$ munis d'une action de $\mathcal{G}_{\mathcal{U}}^\dagger$ par isomorphismes de \mathbf{Z} -modules. Ce foncteur résulte de composer :

$$\begin{array}{ccc} \text{Mod}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}(\mathbf{Z}) & \xrightarrow{i_{\mathcal{U}}^{-1}} \text{Mod}_{\langle \mathcal{M}(\mathcal{U}) \rangle}(\mathbf{Z}) & \xrightarrow{J_{\mathcal{U}}^{-1}} \text{Mod}_{\mathcal{M}(\mathcal{U})}(\mathbf{Z}, \mathcal{G}_{\mathcal{M}(\mathcal{U})}^\dagger) & \xrightarrow[\simeq]{\text{faisceau associé}} \text{Mod}_{\bar{\mathcal{U}}}(\mathbf{Z}, \mathcal{G}_{\mathcal{U}}^\dagger) \\ \downarrow & & \downarrow \mathcal{R}_{\mathcal{U}} & \uparrow \end{array} \quad (*)$$

et le foncteur $\mathcal{R}_{\mathcal{U}} : \text{Mod}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}(\mathbf{Z}) \rightsquigarrow \text{Mod}_{\bar{\mathcal{U}}}(\mathbf{Z})$ de 3.5.6 s'obtient en composant $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}$ avec le foncteur d'oubli de l'action du groupe de $\text{Mod}_{\mathcal{U}}(\mathbf{Z}, \mathcal{G}_{\mathcal{U}}^\dagger)$ vers $\text{Mod}_{\mathcal{U}}(\mathbf{Z})$.

4.2.3. Théorème. Soit $(\bar{\mathbf{X}}; \mathcal{O}_{\bar{\mathbf{X}}})$ un schéma **affine** lisse sur $\bar{\mathbf{R}}$ de site de relèvements affines très lisses $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$. Pour tout $\mathcal{U} \in \mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$ tel que $\bar{\mathcal{U}} = \bar{\mathbf{X}}$ les foncteurs $i_{\mathcal{U}}^{-1}$ et $J_{\mathcal{U}}^{-1}$ dans (*) et le foncteur

$$\mathcal{R}_{\mathcal{U}} : \text{Mod}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}(\mathbf{Z}) \rightsquigarrow \text{Mod}_{\bar{\mathcal{U}}}(\mathbf{Z}, \mathcal{G}_{\mathcal{U}}^\dagger)$$

sont des équivalences de catégories.

Démonstration. Notons $\langle \mathcal{M}(\mathcal{U}) \rangle$ le sous-site plein de $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$ dont les objets sont ceux de $\mathcal{M}(\mathcal{U})$. Le foncteur

$$i_{\mathcal{U}}^{-1} : \text{Préf}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}(\mathbf{Z}) \rightsquigarrow \text{Préf}_{\langle \mathcal{M}(\mathcal{U}) \rangle}(\mathbf{Z})$$

qui associe à un préfaisceau de \mathbf{Z} -modules sur $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$ sa restriction à $\langle \mathcal{M}(\mathcal{U}) \rangle$ est une équivalence de catégories puisque l'inclusion $\langle \mathcal{M}(\mathcal{U}) \rangle \subseteq \mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$ est elle-même une équivalence de catégories.

Les remarques 4.2.1 donnent le foncteur

$$J_{\mathcal{U}}^{-1} : \text{Préf}_{\langle \mathcal{M}(\mathcal{U}) \rangle}(\mathbf{Z}) \rightsquigarrow \text{Préf}_{\mathcal{M}(\mathcal{U})}(\mathbf{Z}, \mathcal{G}_{\mathcal{M}(\mathcal{U})}^\dagger) \quad (\diamond)$$

où $\text{Préf}_{\mathcal{M}(\mathcal{U})}(\mathbf{Z}, \mathcal{G}_{\mathcal{M}(\mathcal{U})}^\dagger)$ est la catégorie de préfaisceaux de \mathbf{Z} -modules sur $\mathcal{M}(\mathcal{U})$ munis d'une action à gauche de $\mathcal{G}_{\mathcal{M}(\mathcal{U})}^\dagger$ par des isomorphismes de \mathbf{Z} -modules.

Montrons que (\diamond) est une équivalence de catégories.

Les catégories $\langle \mathcal{M}(\mathcal{U}) \rangle$ et $\mathcal{M}(\mathcal{U})$ ont les mêmes objets et lorsque $\mathcal{U}', \mathcal{U}'' \in \mathcal{M}(\mathcal{U})$ avec $\mathcal{U}'' \subseteq \mathcal{U}'$, l'ensemble $\text{Mor}_{\mathcal{M}(\mathcal{U})}(\mathcal{U}'', \mathcal{U}')$ est un singleton et l'application suivante est **bijective** (4.1.3-(b)) :

$$\begin{array}{ccc} \text{Mor}_{\mathcal{M}(\mathcal{U})}(\mathcal{U}'', \mathcal{U}') \times \mathcal{G}_{\mathcal{X}}^\dagger(\mathcal{U}'') & \longrightarrow & \text{Mor}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}(\mathcal{U}'', \mathcal{U}') \\ \Phi & \theta \longmapsto & \Phi \circ \theta \end{array} \quad (\ddagger)$$

Il est donc naturel de prolonger un préfaisceau $\mathcal{P} : \langle \mathcal{M}(\mathcal{U}) \rangle \rightsquigarrow \text{Mod}(\mathbf{Z})$ muni d'une structure de $\mathcal{G}_{\mathcal{M}(\mathcal{U})}^\dagger$ -module en une correspondance $\tilde{\mathcal{P}} : \langle \mathcal{M}(\mathcal{U}) \rangle \rightsquigarrow \text{Mod}(\mathbf{Z})$ qui coïncide avec \mathcal{P} sur $\mathcal{M}(\mathcal{U})$

et qui à $\phi \in \text{Mor}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}(\mathcal{U}'', \mathcal{U}')$ associe

$$\tilde{\mathcal{P}}(\phi) \in \text{Hom}_{\mathcal{Z}}(\mathcal{P}(\mathcal{U}'), \mathcal{P}(\mathcal{U}'')), \quad \tilde{\mathcal{P}}(\phi)(-) = \theta \cdot \mathcal{P}(\Phi)(-),$$

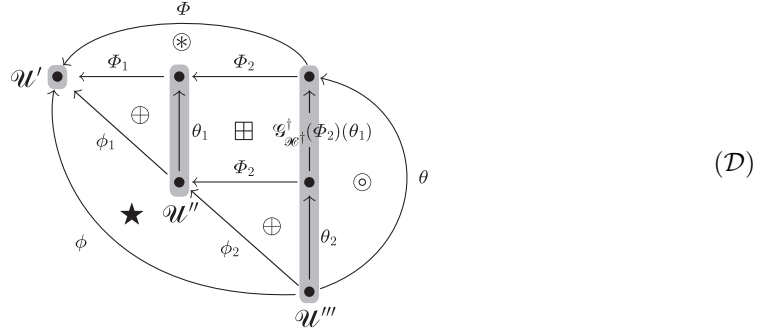
où $\phi = \Phi \circ \theta$ est la décomposition (\ddagger) et $(-\cdot-)$ est l'action de $\mathcal{G}_{\mathcal{M}(\mathcal{U})}^\dagger(\mathcal{U}'')$ sur $\mathcal{P}(\mathcal{U}'')$.

• **La correspondance $\tilde{\mathcal{P}}$ est un préfaisceau sur $\langle \mathcal{M}(\mathcal{U}) \rangle$.** (††)

En effet, étant donnés des morphismes $\mathcal{U}''' \xrightarrow{\phi_2} \mathcal{U}'' \xrightarrow{\phi_1} \mathcal{U}'$ de composée $\phi = \phi_1 \circ \phi_2$ nous devons montrer que $\tilde{\mathcal{P}}(\phi) = \tilde{\mathcal{P}}(\phi_2) \circ \tilde{\mathcal{P}}(\phi_1)$. Soient $\phi_i = \Phi_i \circ \theta_i$ les décompositions de (\ddagger) , l'égalité :

$$\phi = \Phi_1 \circ \theta_1 \circ \Phi_2 \circ \theta_2 = (\Phi_1 \circ \Phi_2) \circ (\mathcal{G}_{\mathcal{X}}^\dagger(\Phi_2)(\theta_1) \circ \theta_2) = \Phi \circ \theta$$

résulte alors de 4.1.3-(c) et nous avons le diagramme commutatif de morphismes de $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$



dont les sous-diagrammes suivants restent commutatifs après application de $\tilde{\mathcal{P}}$:

- Les triangles \oplus et le triangle extérieur (ϕ, Φ, θ) : par la définition même de $\tilde{\mathcal{P}}$.
- Le triangle \otimes : puisque c'est un triangle commutatif de $\mathcal{M}(\mathcal{U})$.
- Le triangle \odot : puisque $\tilde{\mathcal{P}}(-) : \text{Iso}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}(\mathcal{U}''')^{\text{op}} \rightarrow \text{Iso}_{\mathcal{Z}}(\mathcal{P}(\mathcal{U}'''))$ est un morphisme de groupes.
- Le carré \boxplus : puisque \mathcal{P} est un $\mathcal{G}_{\mathcal{M}(\mathcal{U})}^\dagger$ -module. En effet, dans ce cas le diagramme

$$\begin{array}{ccc} (-\cdot-) : \mathcal{G}_{\mathcal{X}}^\dagger(\mathcal{U}'') \times \mathcal{P}(\mathcal{U}'') & \longrightarrow & \mathcal{P}(\mathcal{U}'') \\ \mathcal{G}_{\mathcal{X}}^\dagger(\Phi_2) \downarrow & & \mathcal{P}(\Phi_2) \downarrow \quad \oplus \quad \downarrow \mathcal{P}(\Phi_2) \\ (-\cdot-) : \mathcal{G}_{\mathcal{X}}^\dagger(\mathcal{U}''') \times \mathcal{P}(\mathcal{U}''') & \longrightarrow & \mathcal{P}(\mathcal{U}''') \end{array}$$

est commutatif, autrement dit pour tout $m \in \mathcal{P}(\mathcal{U}''')$, on a :

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}(\Phi_2) \circ \tilde{\mathcal{P}}(\theta_1))(m) &= \mathcal{P}(\Phi_2)(\theta_1 \cdot m) = (\mathcal{G}_{\mathcal{X}}^\dagger(\Phi_2)(\theta_1)) \cdot (\mathcal{P}(\Phi_2)(m)) \\ &= (\tilde{\mathcal{P}}(\mathcal{G}_{\mathcal{X}}^\dagger(\Phi_2)(\theta_1)) \circ \mathcal{P}(\Phi_2))(m) \end{aligned}$$

La commutativité de \star est alors conséquence de toutes ces commutativités et l'assertion $(\ddagger\ddagger)$ est prouvée.

Ceci étant, un morphisme de préfaisceaux de $\mathcal{G}_{\mathcal{M}(\mathcal{U})}^\dagger$ -modules $\alpha : \mathcal{P}_1 \rightarrow \mathcal{P}_2$ est, par construction, automatiquement un morphisme de préfaisceaux $\alpha : \tilde{\mathcal{P}}_1 \rightarrow \tilde{\mathcal{P}}_2$. Le foncteur $\mathcal{P} \rightsquigarrow \tilde{\mathcal{P}}$ est donc un inverse à droite et à gauche de $J_{\mathcal{U}}^{-1}$ et (\diamond) est une équivalence de catégories.

Pour terminer, les restrictions de i_U^{-1} , J_U^{-1} et (\simeq) aux catégories de faisceaux :

$$\begin{aligned} i_U^{-1} &: \text{Mod}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}(\mathbf{Z}) \rightsquigarrow \text{Mod}_{\langle \mathcal{M}(\mathcal{U}) \rangle}(\mathbf{Z}) \\ J_U^{-1} &: \text{Mod}_{\langle \mathcal{M}(\mathcal{U}) \rangle}(\mathbf{Z}) \rightsquigarrow \text{Mod}_{\mathcal{M}(\mathcal{U})}(\mathbf{Z}, \mathcal{G}_{\mathcal{M}(\mathcal{U})}^\dagger) \\ (\simeq) &: \text{Mod}_{\mathcal{M}(\mathcal{U})}(\mathbf{Z}, \mathcal{G}_{\mathcal{M}(\mathcal{U})}^\dagger) \rightsquigarrow \text{Mod}_{\langle \mathcal{M}(\mathcal{U}) \rangle}(\mathbf{Z}) \end{aligned}$$

sont bien définies d'après 3.3.3-(d) et sont donc aussi des équivalences de catégories.

Enfin, le foncteur « *faisceau associé* » de $\text{Mod}_{\mathcal{M}(\mathcal{U})}(\mathbf{Z}; \mathcal{G}_{\mathcal{M}(\mathcal{U})}^\dagger)$ vers $\text{Mod}_{\bar{U}}(\mathbf{Z}, \mathcal{G}_{\mathcal{U}}^\dagger)$ est bien une équivalence de catégories d'après 3.5.7-(b) et le théorème est démontré. ■

4.2.4. Corollaire. Soit $(\bar{X}; \mathcal{O}_{\bar{X}})$ un schéma lisse et séparé sur $\bar{\mathbf{R}}$ de site de relèvements affines très lisses $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$. Pour tout $\mathcal{U} \in \mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$ le foncteur

$$\mathcal{R}_{\mathcal{U}} : \text{Mod}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}(\mathbf{Z}) \rightsquigarrow \text{Mod}_{\bar{U}}(\mathbf{Z}, \mathcal{G}_{\mathcal{U}}^\dagger)$$

est exact et admet un inverse à droite qui est aussi adjoint à droite.

Démonstration. On a la décomposition de $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}$

$$\begin{array}{c} \text{Mod}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}(\mathbf{Z}) \xrightarrow{i_U^{-1}} \text{Mod}_{\langle \mathcal{M}(\mathcal{U}) \rangle}(\mathbf{Z}) \xrightarrow{J_U^{-1}} \text{Mod}_{\mathcal{M}(\mathcal{U})}(\mathbf{Z}, \mathcal{G}_{\mathcal{M}(\mathcal{U})}^\dagger) \xrightarrow[\simeq]{\text{faisceau associé}} \text{Mod}_{\bar{U}}(\mathbf{Z}, \mathcal{G}_{\mathcal{U}}^\dagger) \\ \underbrace{\hspace{15em}}_{\mathcal{R}_{\mathcal{U}}} \uparrow \end{array}$$

où J_U^{-1} est une équivalence de catégories d'après la preuve de 4.2.3 et i_U^{-1} admet un adjoint à droite d'après 3.5.4. ■

4.2.5. Notations. On note

- $\mathcal{I}_{\mathcal{U}} : \text{Mod}_{\bar{U}}(\mathbf{Z}, \mathcal{G}_{\mathcal{U}}^\dagger) \rightsquigarrow \text{Mod}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}(\mathbf{Z})$ l'adjoint à droite de $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}$.
- $\epsilon : \text{id} \rightarrow \mathcal{I}_{\mathcal{U}} \circ \mathcal{R}_{\mathcal{U}}$ le morphisme adjoint de $\text{id} : \mathcal{R}_{\mathcal{U}} \rightarrow \mathcal{R}_{\mathcal{U}}$

Les sections 4.3 et 4.4 suivantes introduisent respectivement les catégories des faisceaux d'algèbres \mathcal{A} et des faisceaux de \mathcal{A} -modules sur $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$. Les analogues du théorème 4.2.3 et de son corollaire sont énoncés pour chacune de ces catégories. La démarche est toujours la même ce qui explique une rédaction presque identique et l'omission de preuves.

4.3 Catégorie de faisceaux d'algèbres sur $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$

4.3.1. Préfaisceaux de \mathbf{Z} -algèbres. Soient $(\bar{X}; \mathcal{O}_{\bar{X}})$ un schéma lisse et séparé sur $\bar{\mathbf{R}}$ et \mathbf{Z} un anneau. Un préfaisceau \mathcal{A} de \mathbf{Z} -algèbres sur $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$ est un foncteur contravariant de $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$ dans la catégorie $\text{Alg}(\mathbf{Z})$ des \mathbf{Z} -algèbres, la correspondance

$$\text{End}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}(\mathcal{U}) \ni \phi \longmapsto \mathcal{A}(\phi) \in \text{End}_{\text{Alg}(\mathbf{Z})}(\mathcal{A}(\mathcal{U}))$$

définit pour chaque $\mathcal{U} \in \mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$ un morphisme de groupes

$$\mathcal{A}(-) : (\text{Iso}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}(\mathcal{U}))^{\text{op}} \rightarrow \text{Iso}_{\text{Alg}(\mathbf{Z})}(\mathcal{A}(\mathcal{U}))$$

et la \mathbf{Z} -algèbre $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ est munie d'une action de $\mathcal{G}_{\mathcal{X}}^{\dagger}(\mathcal{U})$ par des automorphismes de \mathbf{Z} -algèbre, ce qui équivaut à la donnée de l'algèbre produit semi-direct de $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ par $\mathcal{G}_{\mathcal{X}}^{\dagger}(\mathcal{U})$, notée $\mathcal{A}(\mathcal{U}) \rtimes \mathcal{G}_{\mathcal{X}}^{\dagger}(\mathcal{U})$, définie par

$$\begin{cases} \mathcal{A}(\mathcal{U}) \rtimes \mathcal{G}_{\mathcal{X}}^{\dagger}(\mathcal{U}) = \mathcal{A}(\mathcal{U}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbb{Z}[\mathcal{G}_{\mathcal{X}}^{\dagger}(\mathcal{U})] = \bigoplus_{\theta \in \mathcal{G}_{\mathcal{X}}^{\dagger}(\mathcal{U})} \mathcal{A}(\mathcal{U}) \otimes \theta \\ (a_1 \otimes \theta_1)(a_2 \otimes \theta_2) = (a_1 \theta_1(a_2)) \otimes \theta_1 \theta_2 \end{cases}$$

Notons $(-\dot{\iota}-) : \mathcal{G}_{\mathcal{X}}^{\dagger}(\mathcal{U}) \times \mathcal{A}(\mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{A}(\mathcal{U})$, et même $(-\cdot-)$ lorsque \mathcal{U} est sous-entendu, l'application $\theta \cdot a = \mathcal{A}(\theta)(a)$. La functorialité de \mathcal{A} donne alors la commutativité des diagrammes

$$\begin{array}{ccc} (-\dot{\iota}-) : \mathcal{G}_{\mathcal{X}}^{\dagger}(\mathcal{U}) \times \mathcal{A}(\mathcal{U}) & \longrightarrow & \mathcal{A}(\mathcal{U}) \\ \mathcal{G}_{\mathcal{X}}^{\dagger}(\phi) \downarrow & \mathcal{A}(\phi) \downarrow & \bigoplus \downarrow \mathcal{A}(\phi) \\ (-\dot{\iota}'-) : \mathcal{G}_{\mathcal{X}}^{\dagger}(\mathcal{U}') \times \mathcal{A}(\mathcal{U}') & \longrightarrow & \mathcal{A}(\mathcal{U}') \end{array}$$

quels que soient $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ et $\phi \in \text{Mor}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^{\dagger}}(\mathcal{U}', \mathcal{U})$. La famille des $(-\dot{\iota}-)$ définit une « action » de $\mathcal{G}_{\mathcal{X}}^{\dagger}$ sur \mathcal{A} par automorphismes de \mathbf{Z} -algèbres qu'on appellera « l'action canonique de $\mathcal{G}_{\mathcal{X}}^{\dagger}$ sur \mathcal{A} ».

4.3.2. Dorénavant pour chaque $\mathcal{U} \in \mathcal{X}_{\text{inf}}^{\dagger}$, la restriction $j_{\bar{\mathcal{U}}}^{-1}(\mathcal{A})$ d'un (pré)faisceau de \mathbf{Z} -algèbres \mathcal{A} sur $\langle \mathcal{M}(\mathcal{U}) \rangle$ au sous-site $\mathcal{M}(\mathcal{U})$ munie de l'action canonique de $\mathcal{G}_{\mathcal{M}(\mathcal{U})}^{\dagger}$ par automorphismes de \mathbf{Z} -algèbres sera notée $J_{\bar{\mathcal{U}}}^{-1}(\mathcal{F})$. Le même procédé décrit dans 3.5.6 donne maintenant un foncteur

$$\mathcal{R}_{\mathcal{U}} : \text{Alg}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^{\dagger}}(\mathbf{Z}) \rightsquigarrow \text{Alg}_{\bar{\mathcal{U}}}(\mathbf{Z}, \mathcal{G}_{\mathcal{U}}^{\dagger})$$

où $\text{Alg}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^{\dagger}}(\mathbf{Z})$ désigne la catégorie des faisceaux de \mathbf{Z} -algèbres sur $\mathcal{X}_{\text{inf}}^{\dagger}$ et $\text{Alg}_{\bar{\mathcal{U}}}(\mathbf{Z}, \mathcal{G}_{\mathcal{U}}^{\dagger})$ celle des faisceaux de \mathbf{Z} -algèbres sur $\bar{\mathcal{U}}$ munis d'une action de $\mathcal{G}_{\mathcal{U}}^{\dagger}$ par automorphismes de \mathbf{Z} -algèbres. Ce foncteur résulte de composer :

$$\begin{array}{ccc} \text{Alg}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^{\dagger}}(\mathbf{Z}) & \xrightarrow{i_{\bar{\mathcal{U}}}^{-1}} & \text{Alg}_{\langle \mathcal{M}(\mathcal{U}) \rangle}(\mathbf{Z}) \xrightarrow{J_{\bar{\mathcal{U}}}^{-1}} \text{Alg}_{\mathcal{M}(\mathcal{U})}(\mathbf{Z}, \mathcal{G}_{\mathcal{M}(\mathcal{U})}^{\dagger}) \xrightarrow[\simeq]{\text{faisceau associé}} \text{Alg}_{\bar{\mathcal{U}}}(\mathbf{Z}, \mathcal{G}_{\mathcal{U}}^{\dagger}) \\ \downarrow & & \uparrow \\ & \xrightarrow{\mathcal{R}_{\mathcal{U}}} & \end{array} \quad (*)$$

Le théorème suivant est l'analogue de 4.2.3 et se démontre de la même manière.

4.3.3. Théorème. Soit $(\bar{\mathbf{X}}; \mathcal{O}_{\bar{\mathbf{X}}})$ un schéma affine lisse sur $\bar{\mathbf{R}}$ de site de relèvements affines très lisses $\mathcal{X}_{\text{inf}}^{\dagger}$. Pour tout $\mathcal{U} \in \mathcal{X}_{\text{inf}}^{\dagger}$ tel que $\bar{\mathcal{U}} = \bar{\mathbf{X}}$ les foncteurs $i_{\bar{\mathcal{U}}}^{-1}$ et $J_{\bar{\mathcal{U}}}^{-1}$ dans (*) et le foncteur

$$\mathcal{R}_{\mathcal{U}} : \text{Alg}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^{\dagger}}(\mathbf{Z}) \rightsquigarrow \text{Alg}_{\bar{\mathcal{U}}}(\mathbf{Z}, \mathcal{G}_{\mathcal{U}}^{\dagger})$$

sont des équivalences de catégories.

4.3.4. Corollaire. Soit $(\bar{\mathbf{X}}; \mathcal{O}_{\bar{\mathbf{X}}})$ un schéma lisse et séparé sur $\bar{\mathbf{R}}$ de site de relèvements affines très lisses $\mathcal{X}_{\text{inf}}^{\dagger}$. Pour tout $\mathcal{U} \in \mathcal{X}_{\text{inf}}^{\dagger}$ le foncteur

$$\mathcal{R}_{\mathcal{U}} : \text{Alg}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^{\dagger}}(\mathbf{Z}) \rightsquigarrow \text{Alg}_{\bar{\mathcal{U}}}(\mathbf{Z}, \mathcal{G}_{\mathcal{U}}^{\dagger})$$

est exact et admet un inverse à droite qui est aussi adjoint à droite.

4.3.5. Notations. On note

- $\mathcal{I}_{\mathcal{U}} : \text{Alg}_{\bar{\mathcal{U}}}(\mathbf{Z}, \mathcal{G}_{\mathcal{U}}^{\dagger}) \rightsquigarrow \text{Alg}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^{\dagger}}(\mathbf{Z})$ l'adjoint à droite de $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}$.
- $\epsilon : \text{id} \rightarrow \mathcal{I}_{\mathcal{U}} \circ \mathcal{R}_{\mathcal{U}}$ le morphisme adjoint de $\text{id} : \mathcal{R}_{\mathcal{U}} \rightarrow \mathcal{R}_{\mathcal{U}}$

4.3.6. Sites annelés $(\mathcal{X}_{\text{inf}}^{\dagger}; \mathcal{O}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^{\dagger}})$, $(\mathcal{M}(\mathcal{U}); \mathcal{O}_{\mathcal{M}(\mathcal{U})}^{\dagger})$, $(\bar{\mathcal{U}}; \mathcal{O}_{\bar{\mathcal{U}}}^{\dagger})$. Le foncteur de la catégorie $\mathcal{X}_{\text{inf}}^{\dagger}$ vers la catégorie des \mathbf{R} -algèbres f.c.t.f. très lisses, qui fait correspondre à \mathcal{U} son algèbre associée $\mathbf{A}(\mathcal{U})^{\dagger}$ et à un morphisme $\Phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$ le morphisme de \mathbf{R} -algèbres $\phi : \mathbf{A}(\mathcal{U})^{\dagger} \rightarrow \mathbf{A}(\mathcal{V})^{\dagger}$ associé, est un préfaisceau sur $\mathcal{X}_{\text{inf}}^{\dagger}$ qu'on notera $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}^{\dagger}$. Pour tout $\mathcal{U} \in \mathcal{X}_{\text{inf}}^{\dagger}$, la restriction de $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}^{\dagger}$ à $\mathcal{M}(\mathcal{U})$, notée $\mathcal{O}_{\mathcal{M}(\mathcal{U})}^{\dagger}$, n'est autre que le **faisceau** structural du schéma de Meredith $(\bar{\mathcal{U}}, \mathcal{O}_{\bar{\mathcal{U}}}^{\dagger})$ restreint à la catégorie des ouverts affines de $\bar{\mathcal{U}}$ (cf. 3.3.1). Le préfaisceau $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}^{\dagger}$ est donc un faisceau sur $\mathcal{X}_{\text{inf}}^{\dagger}$ d'après 3.3.3. Les faisceaux $\mathcal{O}_{\mathcal{M}(\mathcal{U})}^{\dagger}$ et $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}^{\dagger}$ sont « *les faisceaux structuraux des sites $\mathcal{M}(\mathcal{U})$ et $\mathcal{X}_{\text{inf}}^{\dagger}$* » respectivement.

4.4 Catégorie de faisceaux de \mathcal{A} -modules sur $\mathcal{X}_{\text{inf}}^{\dagger}$

4.4.1. La section 4.2 était consacrée à l'étude de la catégorie des (pré)faisceaux de $\underline{\mathcal{Z}}_{\mathcal{X}}$ -modules sur $\mathcal{X}_{\text{inf}}^{\dagger}$, où $\underline{\mathcal{Z}}_{\mathcal{X}}$ est le préfaisceau « *constant* » sur $\mathcal{X}_{\text{inf}}^{\dagger}$ de fibre l'anneau \mathbf{Z} . Nous indiquons maintenant comment les constructions et résultats de 4.2 se généralisent au cadre de la catégorie des \mathcal{A} -modules sur $\mathcal{X}_{\text{inf}}^{\dagger}$, où \mathcal{A} est un faisceau d'algèbres sur $\mathcal{X}_{\text{inf}}^{\dagger}$.

Dans la suite « *module* » sera synonyme de « *module à gauche* ». Les mêmes idées s'appliquent pour les « *modules à droite* » moyennant les modifications habituelles.

4.4.2. Préfaisceaux de \mathcal{A} -modules. Soit \mathcal{A} un faisceau de \mathbf{Z} -algèbres sur $\mathcal{X}_{\text{inf}}^{\dagger}$. Un « \mathcal{A} -module » est la donnée d'un faisceau de groupes abéliens \mathcal{M} sur $\mathcal{X}_{\text{inf}}^{\dagger}$ et pour chaque $\mathcal{U} \in \mathcal{X}_{\text{inf}}^{\dagger}$ d'une structure de $\mathcal{A}(\mathcal{U})$ -module sur $\mathcal{M}(\mathcal{U})$. On notera $a \star_{\mathcal{U}} m$, et même $a \star m$ lorsque \mathcal{U} sera sous-entendu, le transformé de $m \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$ par $a \in \mathcal{A}(\mathcal{U})$ sous cette action. Les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} (- \star_{\mathcal{U}} -) : \mathcal{A}(\mathcal{U}) \times \mathcal{M}(\mathcal{U}) & \longrightarrow & \mathcal{M}(\mathcal{U}) \\ \mathcal{A}(\phi) \downarrow & \mathcal{M}(\phi) \downarrow & \oplus \quad \downarrow \mathcal{M}(\phi) \\ (- \star_{\mathcal{U}'} -) : \mathcal{A}(\mathcal{U}') \times \mathcal{M}(\mathcal{U}') & \longrightarrow & \mathcal{M}(\mathcal{U}') \end{array} \quad (*)$$

sont commutatifs quels que soient $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ et $\phi \in \text{Mor}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^{\dagger}}(\mathcal{U}', \mathcal{U})$. D'autre part, \mathcal{A} et \mathcal{M} étant des préfaisceaux sur $\mathcal{X}_{\text{inf}}^{\dagger}$, ils sont munis d'actions de $\mathcal{G}_{\mathcal{X}}^{\dagger}$ respectivement par automorphismes de \mathbf{Z} -algèbres et par isomorphismes de \mathbb{Z} -modules, la compatibilité entre ces actions et la structure de \mathcal{A} -module est donnée par l'égalité :

$$\theta \cdot (a \star m) = (\theta \cdot a) \star (\theta \cdot m)$$

qui résulte de la commutativité de (*) pour $\phi = \theta \in \text{End}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^{\dagger}}(\mathcal{U})$, $a \in \mathcal{A}(\mathcal{U})$ et $m \in \mathcal{M}(\mathcal{U})$. Il s'ensuit que le \mathcal{A} -module \mathcal{M} vient muni d'une structure de $\mathcal{A} \rtimes \mathcal{G}_{\mathcal{X}}^{\dagger}$ -module canonique.

On notera $\text{Mod}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^{\dagger}}(\mathcal{A})$, et plus simplement $\text{Mod}(\mathcal{A})$ lorsque la référence à $\mathcal{X}_{\text{inf}}^{\dagger}$ sera superflue, la catégorie des \mathcal{A} -modules sur $\mathcal{X}_{\text{inf}}^{\dagger}$.

4.4.3. Dorénavant pour chaque $\mathcal{U} \in \mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$, la restriction $j_{\mathcal{U}}^{-1}(\mathcal{M})$ d'un \mathcal{A} -module \mathcal{M} sur $\langle \mathcal{M}(\mathcal{U}) \rangle$ au sous-site $\mathcal{M}(\mathcal{U})$ munie de sa structure canonique de $\mathcal{A}|_{\mathcal{M}(\mathcal{U})} \rtimes \mathcal{G}_{\mathcal{M}(\mathcal{U})}^\dagger$ -module sera notée $J_{\mathcal{U}}^{-1}(\mathcal{M})$. Le même procédé décrit dans 3.5.6 donne maintenant le foncteur

$$\mathcal{R}_{\mathcal{U}} : \text{Mod}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}(\mathcal{A}) \rightsquigarrow \text{Mod}_{\bar{\mathcal{U}}}(\mathcal{R}_{\mathcal{U}}(\mathcal{A}) \rtimes \mathcal{G}_{\mathcal{U}}^\dagger)$$

résultat de composer :

$$\begin{array}{ccc} \text{Mod}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}(\mathcal{A}) & \xrightarrow{i_{\bar{\mathcal{U}}}^{-1}} & \text{Mod}_{\langle \mathcal{M}(\mathcal{U}) \rangle}(\mathcal{A}|_{\langle \mathcal{M}(\mathcal{U}) \rangle}) & \xrightarrow{J_{\mathcal{U}}^{-1}} & \text{Mod}_{\mathcal{M}(\mathcal{U})}(\mathcal{A}|_{\mathcal{M}(\mathcal{U})} \rtimes \mathcal{G}_{\mathcal{M}(\mathcal{U})}^\dagger) \\ & & & & \downarrow \begin{array}{l} \text{faisceau} \\ \text{associé} \end{array} \simeq \\ & & & & \text{Mod}_{\bar{\mathcal{U}}}(\mathcal{R}_{\mathcal{U}}(\mathcal{A}) \rtimes \mathcal{G}_{\mathcal{U}}^\dagger) \end{array} \quad (*)$$

Le théorème suivant est l'analogie de 4.2.3 et se démontre de la même manière.

4.4.4. Théorème. Soit $(\bar{\mathcal{X}}; \mathcal{O}_{\bar{\mathcal{X}}})$ un schéma **affine** lisse sur $\bar{\mathbf{R}}$ de site de relèvements affines très lisses $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$. Pour tout $\mathcal{U} \in \mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$ tel que $\bar{\mathcal{U}} = \bar{\mathcal{X}}$ les foncteurs $i_{\bar{\mathcal{U}}}^{-1}$ et $J_{\mathcal{U}}^{-1}$ dans (*) et le foncteur

$$\mathcal{R}_{\mathcal{U}} : \text{Mod}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}(\mathcal{A}) \rightsquigarrow \text{Mod}_{\bar{\mathcal{U}}}(\mathcal{R}_{\mathcal{U}}(\mathcal{A}) \rtimes \mathcal{G}_{\mathcal{U}}^\dagger)$$

sont des équivalences de catégories.

4.4.5. Corollaire. Soit $(\bar{\mathcal{X}}; \mathcal{O}_{\bar{\mathcal{X}}})$ un schéma lisse et séparé sur $\bar{\mathbf{R}}$ de site de relèvements affines très lisses $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$. Pour tout $\mathcal{U} \in \mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$ le foncteur

$$\mathcal{R}_{\mathcal{U}} : \text{Mod}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}(\mathcal{A}) \rightsquigarrow \text{Mod}_{\bar{\mathcal{U}}}(\mathcal{R}_{\mathcal{U}}(\mathcal{A}) \rtimes \mathcal{G}_{\mathcal{U}}^\dagger)$$

est exact et admet un inverse à droite qui est aussi adjoint à droite.

4.4.6. Notations. On note

- $\mathcal{I}_{\mathcal{U}} : \text{Mod}_{\bar{\mathcal{U}}}(\mathcal{R}_{\mathcal{U}}(\mathcal{A}) \rtimes \mathcal{G}_{\mathcal{U}}^\dagger) \rightsquigarrow \text{Mod}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}(\mathcal{A})$ l'adjoint à droite de $\mathcal{R}_{\mathcal{U}}$.
- $\epsilon : \text{id} \rightarrow \mathcal{I}_{\mathcal{U}} \circ \mathcal{R}_{\mathcal{U}}$ le morphisme adjoint de $\text{id} : \mathcal{R}_{\mathcal{U}} \rightarrow \mathcal{R}_{\mathcal{U}}$

4.4.7. Corollaire. Soient $(\bar{\mathcal{X}}; \mathcal{O}_{\bar{\mathcal{X}}})$ un schéma **affine** lisse, $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$ son site de relèvements affines très lisses et $\mathcal{U} \in \mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$ tel que $\bar{\mathcal{U}} = \bar{\mathcal{X}}$. On a une équivalence de catégories :

$$\mathcal{R}_{\mathcal{U}} : \text{Mod}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}(\mathcal{O}_{\bar{\mathcal{X}}}^\dagger) \xrightarrow{\simeq} \text{Mod}_{\bar{\mathcal{U}}}(\mathcal{O}_{\mathcal{U}}^\dagger \rtimes \mathcal{G}_{\mathcal{U}}^\dagger)$$

§ 5. Opérateurs différentiels \dagger -adiques

5.1 Le faisceau $\mathcal{H}_{\mathbf{Z}}(-, -)$

Soit $(\bar{\mathcal{X}}; \mathcal{O}_{\bar{\mathcal{X}}})$ un schéma lisse et séparé sur $\bar{\mathbf{R}}$ de site de relèvements affines très lisses $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$ et soient $\mathcal{E}, \mathcal{F} \in \text{Mod}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}(\mathbf{Z})$.

\mathcal{H} -i) Pour $\mathcal{U} \in \mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$, on note :

$$\mathcal{H}_{\mathbf{Z}}(\mathcal{E}, \mathcal{F})(\mathcal{U}) := \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathcal{R}_{\mathcal{U}}(\mathcal{E}), \mathcal{R}_{\mathcal{U}}(\mathcal{F}))$$

où le terme de droite est le module des morphismes de faisceaux de \mathbf{Z} -modules de $\mathcal{R}_U(\mathcal{E})$ vers $\mathcal{R}_U(\mathcal{F})$.

\mathcal{H} -ii) Pour $U', U \in \mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$ et $\phi \in \text{Mor}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}(U', U)$, on note

$$\mathcal{H}_{\mathbf{Z}}(\mathcal{E}, \mathcal{F})(\phi) : \mathcal{H}_{\mathbf{Z}}(\mathcal{E}, \mathcal{F})(U) \rightarrow \mathcal{H}_{\mathbf{Z}}(\mathcal{E}, \mathcal{F})(U')$$

l'application qui associe à $\alpha : \mathcal{R}_U(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{R}_U(\mathcal{F})$ le morphisme de faisceaux

$$\mathcal{H}_{\mathbf{Z}}(\mathcal{E}, \mathcal{F})(\phi)(\alpha) := \mathcal{R}_\phi(\mathcal{F}) \circ (\alpha|_{\overline{U'}}) \circ \mathcal{R}_\phi(\mathcal{E})^{-1},$$

soit schématiquement :

$$\left(\begin{array}{c} \mathcal{R}_U(\mathcal{E}) \\ \alpha \downarrow \\ \mathcal{R}_U(\mathcal{F}) \end{array} \right) \xrightarrow{\mathcal{H}_{\mathbf{Z}}(\mathcal{E}, \mathcal{F})(\phi)} \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{R}_{U'}(\mathcal{E}) & \xrightarrow[\cong]{\mathcal{R}_\phi(\mathcal{E})^{-1}} & \mathcal{R}_U(\mathcal{E})|_{\overline{U'}} \\ & & \downarrow \alpha|_{\overline{U'}} \\ \mathcal{R}_{U'}(\mathcal{F}) & \xleftarrow[\cong]{\mathcal{R}_\phi(\mathcal{F})} & \mathcal{R}_U(\mathcal{F})|_{\overline{U'}} \end{array} \right)$$

où les isomorphismes $\mathcal{R}_\phi(\mathcal{E})$ et $\mathcal{R}_\phi(\mathcal{F})$ sont ceux de la proposition de 3.5.8.

5.1.1. Cas particuliers

i) Pour $\mathcal{V} \in \mathcal{M}(U)$ et $\{\Phi\} = \text{Mor}_{\mathcal{M}(U)}(\mathcal{V}, U)$, $\mathcal{H}_{\mathbf{Z}}(\mathcal{E}, \mathcal{F})(\Phi)$ est l'application

$$\text{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathcal{R}_U(\mathcal{E}), \mathcal{R}_U(\mathcal{F})) \xrightarrow{\rho} \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathcal{R}_U(\mathcal{E})|_{\overline{\mathcal{V}}}, \mathcal{R}_U(\mathcal{F})|_{\overline{\mathcal{V}}}) = \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathcal{R}_{\mathcal{V}}(\mathcal{E}), \mathcal{R}_{\mathcal{V}}(\mathcal{F}))$$

où $\rho(\alpha) = \alpha|_{\overline{\mathcal{V}}}$.

ii) Pour $\theta \in \text{Iso}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}(\mathcal{V})$ et $\alpha \in \text{Hom}_{\mathbf{Z}}(\mathcal{R}_{\mathcal{V}}(\mathcal{E}), \mathcal{R}_{\mathcal{V}}(\mathcal{F}))$, la famille des diagrammes commutatifs pour $\overline{W}' \subseteq \overline{W} \subseteq \overline{V}$ (cf. 3.4.5) :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{R}_{\mathcal{V}}(\mathcal{E})(\overline{W}) & \xrightarrow{\theta^{-1}|_{\overline{W}}} & \mathcal{R}_{\mathcal{V}}(\mathcal{E})(\overline{W}) & \xrightarrow{\alpha(\overline{W})} & \mathcal{R}_{\mathcal{V}}(\mathcal{F})(\overline{W}) & \xrightarrow{\theta|_{\overline{W}}} & \mathcal{R}_{\mathcal{V}}(\mathcal{F})(\overline{W}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{R}_{\mathcal{V}}(\mathcal{E})(\overline{W}') & \xrightarrow{\theta^{-1}|_{\overline{W}'}} & \mathcal{R}_{\mathcal{V}}(\mathcal{E})(\overline{W}') & \xrightarrow{\alpha(\overline{W}')} & \mathcal{R}_{\mathcal{V}}(\mathcal{F})(\overline{W}') & \xrightarrow{\theta|_{\overline{W}'}} & \mathcal{R}_{\mathcal{V}}(\mathcal{F})(\overline{W}') \end{array}$$

où les carrés de droite et gauche font référence à la structure de $\mathcal{G}_{\mathcal{V}}^\dagger$ -module de $\mathcal{R}_{\mathcal{V}}(\mathcal{E})$ et $\mathcal{R}_{\mathcal{V}}(\mathcal{F})$, est un morphisme de faisceaux noté $\theta(\alpha) : \mathcal{R}_{\mathcal{V}}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{R}_{\mathcal{V}}(\mathcal{F})$. Le groupe $\text{Iso}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}(\mathcal{V})^{\text{op}}$ agit de cette manière sur $\mathcal{H}_{\mathbf{Z}}(\mathcal{E}, \mathcal{F})(\mathcal{V})$ et $\mathcal{H}_{\mathbf{Z}}(\mathcal{E}, \mathcal{F})(\theta)$ est l'application correspondante à θ pour cette action.

iii) Si $\mathcal{V} \in \mathcal{M}(U)$ et si $\phi \in \text{Mor}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}(\mathcal{V}, U)$ est de décomposition canonique $\Phi \circ \theta$, on a

$$\mathcal{H}_{\mathbf{Z}}(\mathcal{E}, \mathcal{F})(\phi) := \mathcal{H}_{\mathbf{Z}}(\mathcal{E}, \mathcal{F})(\theta) \circ \mathcal{H}_{\mathbf{Z}}(\mathcal{E}, \mathcal{F})(\Phi)$$

5.1.2. Proposition. Soient $\mathcal{E}, \mathcal{F} \in \text{Mod}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}(\mathbf{Z})$.

a) La correspondance $\mathcal{H}_{\mathbf{Z}}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ définie sur la catégorie $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$ par \mathcal{H} -(i,ii) est un **faisceau** sur $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$. Pour tout $U \in \mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$, on a un isomorphisme naturel :

$$\mathcal{R}_U(\mathcal{H}_{\mathbf{Z}}(\mathcal{E}, \mathcal{F})) \cong \mathcal{H}_{\mathbf{Z}}(\mathcal{R}_U(\mathcal{E}), \mathcal{R}_U(\mathcal{F}))$$

- b) Le faisceau $\mathcal{E}_{\mathbf{Z}}(\mathcal{F}) := \mathcal{H}_{\mathbf{Z}}(\mathcal{F}, \mathcal{F})$ est un faisceau de \mathbf{Z} -algèbres sur $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$.
- c) Pour tout faisceau de \mathbf{Z} -algèbres \mathcal{A} sur $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$, le faisceau $\mathcal{E}_{\mathbf{Z}}(\mathcal{A})$ est une \mathcal{A} -algèbre.
- d) On a des inclusions canoniques de faisceaux $\mathcal{G}_{\mathcal{X}}^\dagger \subseteq \mathcal{E}_{\mathbf{R}}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}}^\dagger)$ et $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}^\dagger \subseteq \mathcal{E}_{\mathbf{R}}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}}^\dagger)$.
- e) Lorsque (\mathbf{R}, \mathbf{I}) est un anneau de valuation discrète d'idéal maximal \mathbf{I} , le morphisme de faisceaux d'algèbres $\iota : \mathcal{O}_{\mathcal{X}}^\dagger \rtimes \mathcal{G}_{\mathcal{X}}^\dagger \rightarrow \mathcal{E}_{\mathbf{R}}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}}^\dagger)$ induit par les inclusions ((d)) est **injectif**. De plus, le morphisme canonique des sections du préfaisceau vers les sections du faisceau associé :

$$\mathcal{O}_{\mathcal{X}}^\dagger(\mathcal{U}) \rtimes \mathcal{G}_{\mathcal{X}}^\dagger(\mathcal{U}) \rightarrow (\mathcal{O}_{\mathcal{X}}^\dagger \rtimes \mathcal{G}_{\mathcal{X}}^\dagger)(\mathcal{U}),$$

est **bijectif** pour tout $\mathcal{U} \in \mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$ tel que $\bar{\mathcal{U}}$ est connexe.

Démonstration. a,b,c,d) On montre que $\mathcal{H}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ est un préfaisceau sur $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$ à l'aide de la propriété 3.5.9-((b)). D'autre part, pour chaque $\mathcal{U} \in \mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$, la restriction de $\mathcal{H}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ à la sous-catégorie $\mathcal{M}(\mathcal{U})$ est le faisceau $\mathcal{H}_{\mathbf{Z}}(\mathcal{R}_{\mathcal{U}}(\mathcal{E}), \mathcal{R}_{\mathcal{U}}(\mathcal{F}))$ (cf. 5.1.1-((i))). La correspondance $\mathcal{H}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ est donc bien un faisceau sur $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$ (3.3.3) et le reste des affirmations (a,b,c) est de vérification immédiate.

e) Pour toute \mathbf{R} -algèbre commutative avec identité multiplicative intègre \mathbf{B} l'ensemble \mathbf{G} des automorphismes de \mathbf{R} -algèbre est \mathbf{B} -linéairement indépendant dans $\text{End}_{\mathbf{R}}(\mathbf{B})$. En effet, soient $\theta_1, \dots, \theta_r$ deux à deux distincts dans \mathbf{G} et $b_i \in \mathbf{B} \setminus \{0\}$ tels que $\sigma = \sum_{i=1}^r b_i \cdot \theta_i$ opère par zéro sur \mathbf{B} . Alors, pour tout $b \in \mathbf{B}$:

$$0 = \sigma b - \theta_r(b)\sigma = \sum_{i=1, \dots, r-1} b_i (\theta_i(b) - \theta_r(b)) \cdot \theta_i.$$

En raisonnant par induction, on peut supposer que $\{\theta_1, \dots, \theta_{r-1}\}$ est \mathbf{B} -linéairement indépendant et alors $b_i(\theta_i(b) - \theta_r(b)) = 0$ pour tout $b \in \mathbf{B}$ et chaque $i = 1, \dots, r-1$, ce qui est contraire à l'intégrité de \mathbf{B} .

Lorsque (\mathbf{R}, \mathbf{I}) est un anneau de valuation discrète et que $\mathcal{U} \in \mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$ est tel que $\bar{\mathcal{U}}$ est connexe, l'anneau $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}^\dagger(\mathcal{V})$ est intègre pour tout \mathcal{V} tel que $\bar{\mathcal{V}}$ est principal non vide dans $\bar{\mathcal{U}}$. L'application

$$\xi(\mathcal{V}) : \mathcal{O}_{\mathcal{X}}^\dagger(\mathcal{V}) \rtimes \mathcal{G}_{\mathcal{X}}^\dagger(\mathcal{V}) \rightarrow \mathcal{E}_{\mathbf{R}}(\mathcal{O}_{\mathcal{X}}^\dagger)(\mathcal{V}), \quad a \otimes \theta \mapsto a\theta,$$

est alors injective d'après la remarque précédente. L'injectivité de ι s'ensuit car $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}^\dagger \rtimes \mathcal{G}_{\mathcal{X}}^\dagger$ est le faisceau associé au préfaisceau $\mathcal{U} \rightsquigarrow \mathcal{O}_{\mathcal{X}}^\dagger(\mathcal{U}) \rtimes \mathcal{G}_{\mathcal{X}}^\dagger(\mathcal{U})$ et que ι est le morphisme de faisceaux induit par ξ .

Pour tout recouvrement fini $\{\mathcal{V}_i\} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{U})$ tel que $\bar{\mathcal{V}}_i$ est principal et non vide dans $\bar{\mathcal{U}}$ la suite

$$\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{X}}^\dagger(\mathcal{U}) \rtimes \mathcal{G}_{\mathcal{X}}^\dagger(\mathcal{U}) \xrightarrow{\epsilon} \prod_{1 \leq i \leq \ell} \mathcal{O}_{\mathcal{X}}^\dagger(\mathcal{V}_i) \rtimes \mathcal{G}_{\mathcal{X}}^\dagger(\mathcal{V}_i) \xrightarrow{\delta_0} \prod_{1 \leq i < j \leq \ell} \mathcal{O}_{\mathcal{X}}^\dagger(\mathcal{V}_{ij}) \rtimes \mathcal{G}_{\mathcal{X}}^\dagger(\mathcal{V}_{ij}) \quad (\diamond)$$

est **exacte**.

En effet, un élément $\sigma \in \mathcal{O}_{\mathcal{X}}^{\dagger}(\mathcal{U}) \rtimes \mathcal{G}_{\mathcal{X}}^{\dagger}(\mathcal{U})$ s'écrit

$$\sigma = \sum_k a_k \otimes \theta_k, \text{ avec } \theta_k \neq \theta_{k'} \text{ si } k \neq k',$$

et comme les restrictions $\mathcal{G}_{\mathcal{X}}^{\dagger}(\mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{G}_{\mathcal{X}}^{\dagger}(\mathcal{V}_i)$ sont injectives (3.4.2), les automorphismes $\theta_{i,k} := \theta_k|_{\mathcal{V}_i}$ sont deux à deux distincts et l'ensemble $T_i = \{\theta_{i,k}\}$ est $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}^{\dagger}(\mathcal{V}_i)$ -indépendant. Par conséquent, lorsque $\epsilon(\sigma) = 0$ on a $a_k|_{\mathcal{V}_i} = 0$ pour tous i, k et donc $a_k = 0$ pour tout k , d'où l'injectivité de ϵ .

Soit maintenant $\sigma_i \in \mathcal{O}_{\mathcal{X}}^{\dagger}(\mathcal{V}_i) \rtimes \mathcal{G}_{\mathcal{X}}^{\dagger}(\mathcal{V}_i)$ pour chaque $i = 1, \dots, \ell$:

$$\sigma_i = \sum_k a_{i,k} \otimes \theta_{i,k}, \text{ avec } \theta_{i,k} \neq \theta_{i,k'} \text{ si } k \neq k',$$

vérifiant

$$\sigma_i|_{\mathcal{V}_{ij}} = \sigma_j|_{\mathcal{V}_{ij}}, \text{ pour tout } i < j. \quad (\ddagger)$$

Comme les restrictions $\mathcal{G}_{\mathcal{X}}^{\dagger}(\mathcal{V}_i) \rightarrow \mathcal{G}_{\mathcal{X}}^{\dagger}(\mathcal{V}_{ij})$ sont injectives puisque les anneaux $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}^{\dagger}(\mathcal{V}_i)$ sont intègres et que $\bar{\mathcal{V}}_{ij} \neq \emptyset$ (3.4.2), l'égalité (\ddagger) définit une bijection entre les ensembles $T_i = \{\theta_{i,k}\}$ et $T_j = \{\theta_{j,k}\}$, à savoir : deux automorphismes se correspondent si et seulement si leurs restrictions à $\mathcal{G}_{\mathcal{X}}^{\dagger}(\mathcal{V}_{ij})$ coïncident. Rénumérotions les $\theta_{i,*}$ de manière à ce que chaque famille $\Theta_k = \{\theta_{i,k}\}$ se recolle en un élément $\theta_k \in \mathcal{G}_{\mathcal{X}}^{\dagger}(\mathcal{U})$. L'égalité (\ddagger) montre alors aussi que chaque famille $A_k = \{a_{i,k}\}$ se recolle en un élément $a_k \in \mathcal{O}_{\mathcal{X}}^{\dagger}(\mathcal{U})$. La somme $\sigma = \sum_k a_k \otimes \theta_k \in \mathcal{O}_{\mathcal{X}}^{\dagger}(\mathcal{U}) \rtimes \mathcal{G}_{\mathcal{X}}^{\dagger}(\mathcal{U})$ est clairement le recollement des σ_i et ceci termine la vérification de l'exactitude de la suite (\diamond) .

L'exactitude de (\diamond) pour **tout** recouvrement fini principal de \mathcal{U} implique que l'application canonique $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}^{\dagger}(\mathcal{U}) \rtimes \mathcal{G}_{\mathcal{X}}^{\dagger}(\mathcal{U}) \rightarrow (\mathcal{O}_{\mathcal{X}}^{\dagger} \rtimes \mathcal{G}_{\mathcal{X}}^{\dagger})(\mathcal{U})$ est bijective (cf. 3.2.11) et l'assertion (e) est démontrée. ■

5.2 Faisceau d'opérateurs différentiels \dagger -adiques sur $\mathcal{X}_{\text{inf}}^{\dagger}$

5.2.1. Opérateurs différentiels. Soit \mathbf{A} une \mathbf{R} -algèbre commutative avec identité multiplicative, identifions chaque $a \in \mathbf{A}$ avec l'endomorphisme linéaire de \mathbf{A} défini par $x \mapsto ax$ et notons $[\lambda, \mu] = \lambda \circ \mu - \mu \circ \lambda$ pour tous $\lambda, \mu \in \text{End}_{\mathbf{R}}(\mathbf{A})$.

Un « opérateur différentiel \mathbf{R} -linéaire de degré m sur \mathbf{A} » est un endomorphisme de \mathbf{R} -module $\lambda \in \text{End}_{\mathbf{R}}(\mathbf{A})$ vérifiant :

$$[\dots, [\lambda, a_0], a_1], \dots, a_m] = 0,$$

pour tous $a_0, \dots, a_m \in \mathbf{A}$. L'ensemble de ces opérateurs est noté $\mathcal{D}_{\mathbf{A}}^m$. On a $\mathbf{A} = \mathcal{D}_{\mathbf{A}}^0$, puis $\mathcal{D}_{\mathbf{A}}^m \circ \mathcal{D}_{\mathbf{A}}^n \subseteq \mathcal{D}_{\mathbf{A}}^{m+n}$ et une suite croissante de sous- \mathbf{A} -bimodules de $\text{End}_{\mathbf{R}}(\mathbf{A})$:

$$\mathcal{D}_{\mathbf{A}}^0 \subseteq \mathcal{D}_{\mathbf{A}}^1 \subseteq \mathcal{D}_{\mathbf{A}}^2 \subseteq \dots \subseteq \text{End}_{\mathbf{R}}(\mathbf{A})$$

de réunion l'algèbre $\mathcal{D}_{\mathbf{A}} := \bigcup_m \mathcal{D}_{\mathbf{A}}^m$.

5.2.2. Morphismes d'algèbres et opérateurs différentiels

Lemme. Soient \mathbf{A} une \mathbf{R} -algèbre et $\phi : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}$ un endomorphisme de \mathbf{R} -algèbre.

a) Pour toute suite $a_0, a_1, \dots, a_m \in \mathbf{A}$ on a :

$$[\dots, [\phi, a_0], a_1], \dots, a_m = \left(\prod_{i=0}^m (\phi - \text{id})(a_i) \right) \phi.$$

b) Si $\mathbf{I} \cdot \mathbf{A}$ est nilpotent de degré de nilpotence m et que $\phi = \text{id} \pmod{\mathbf{I}}$, on a $\phi \in \mathcal{D}_{\mathbf{A}}^m$.

c) Pour chaque $m \in \mathbb{N}$, l'action de $\theta \in \mathbf{G}^\dagger(\mathbf{A})$ sur $\mathbf{A}/\mathbf{I}^m \cdot \mathbf{A}$ est celle d'un opérateur différentiel (invertible) de degré au plus m .

Démonstration. Pour (a) il suffit de calculer $[\phi, a](b)$ pour tous $a, b \in \mathbf{A}$. On a :

$$[\phi, a](b) = \phi(ab) - a\phi(b) = \phi(a)\phi(b) - a\phi(b) = (\phi(a) - a)\phi(b),$$

puisque ϕ est un endomorphisme d'anneau. Les autres assertions sont claires. \blacksquare

5.2.3. Opérateurs différentiels \dagger -adiques sur un schéma de Meredith. La définition suivante est due à Zoghman Mebkhout.

Définition. Soient $(\bar{\mathbf{X}}; \mathcal{O}_{\bar{\mathbf{X}}}^\dagger)$ un schéma de Meredith et \bar{V} un ouvert de $\bar{\mathbf{X}}$. Une section $\varphi \in \Gamma(\bar{V}; \mathcal{E}_{\mathbf{R}}(\mathcal{O}_{\bar{\mathbf{X}}}^\dagger))$ est une famille $\{12pt\varphi(\bar{W}) \in \text{End}_{\mathbf{R}}(\mathcal{O}_{\bar{\mathbf{X}}}^\dagger(\bar{W}))\}$ indexée par les ouverts $\bar{W} \subseteq \bar{V}$ telle que les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{\bar{\mathbf{X}}}^\dagger(\bar{W}) & \xrightarrow{\varphi(\bar{W})} & \mathcal{O}_{\bar{\mathbf{X}}}^\dagger(\bar{W}) \\ \rho_{\bar{W}'}^\dagger \downarrow & & \downarrow \rho_{\bar{W}'}^\dagger \\ \mathcal{O}_{\bar{\mathbf{X}}}^\dagger(\bar{W}') & \xrightarrow{\varphi(\bar{W}')} & \mathcal{O}_{\bar{\mathbf{X}}}^\dagger(\bar{W}') \end{array}$$

sont commutatifs pour tous $\bar{W}' \subseteq \bar{W} \subseteq \bar{V}$. La section φ est un «opérateur différentiel \dagger -adique» lorsqu'il existe une constante C telle que pour chaque $m \in \mathbb{N}$ la réduction modulo \mathbf{I}^m de $\varphi(\bar{W})$:

$$\varphi(\bar{W})_m : \mathcal{O}_{\bar{\mathbf{X}}}^\dagger(\bar{W})/\mathbf{I}^m \mathcal{O}_{\bar{\mathbf{X}}}^\dagger(\bar{W}) \rightarrow \mathcal{O}_{\bar{\mathbf{X}}}^\dagger(\bar{W})/\mathbf{I}^m \mathcal{O}_{\bar{\mathbf{X}}}^\dagger(\bar{W})$$

est un opérateur différentiel de degré majoré par $C(m+1)$, *i.e.*

$$\varphi(\bar{W})_m \in \mathcal{D}_{\mathcal{O}_{\bar{\mathbf{X}}}^\dagger(\bar{W})/\mathbf{I}^m \mathcal{O}_{\bar{\mathbf{X}}}^\dagger(\bar{W})}^{C(m+1)}$$

et ceci, quel que soit l'ouvert $\bar{W} \subseteq \bar{V}$. On note $\mathcal{D}_{\bar{\mathbf{X}}}^\dagger(\bar{V})$ l'ensemble de telles sections.

5.2.4. Proposition et définition. Soit $(\bar{\mathbf{X}}; \mathcal{O}_{\bar{\mathbf{X}}}^\dagger)$ un schéma de Meredith.

a) Soit $\rho_{\bar{V}}^\dagger : \Gamma(\bar{V}; \mathcal{E}_{\mathbf{R}}(\mathcal{O}_{\bar{\mathbf{X}}}^\dagger)) \rightarrow \Gamma(\bar{W}; \mathcal{E}_{\mathbf{R}}(\mathcal{O}_{\bar{\mathbf{X}}}^\dagger))$ le morphisme de restriction du faisceau $\mathcal{E}_{\mathbf{R}}(\mathcal{O}_{\bar{\mathbf{X}}}^\dagger)$.

On a

$$\rho_{\bar{V}}^\dagger(\mathcal{D}_{\bar{\mathbf{X}}}^\dagger(\bar{V})) \subseteq \mathcal{D}_{\bar{\mathbf{X}}}^\dagger(\bar{W}).$$

On note alors $\mathcal{D}_{\bar{\mathbf{X}}}^\dagger$ le sous-préfaisceau de $\mathcal{E}_{\mathbf{R}}(\mathcal{O}_{\bar{\mathbf{X}}}^\dagger)$ ainsi défini. Le préfaisceau $\mathcal{D}_{\bar{\mathbf{X}}}^\dagger$ est un faisceau sur $\bar{\mathbf{X}}$.

b) On a une inclusion naturelle de faisceaux : $\mathcal{G}_X^\dagger \subseteq \mathcal{D}_X^\dagger$.

Indication. (a) est claire d'après la définition de $\mathcal{D}_X^\dagger(\bar{V})$ et (b) résulte du lemme 5.2. ■

5.2.5. Opérateurs différentiels †-adiques sur $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$. Soit $(\bar{X}; \mathcal{O}_{\bar{X}})$ un schéma lisse et séparé sur \bar{R} de site de relèvements affines très lisses $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$. Pour tout $\mathcal{U} \in \mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$ on pose

$$\mathcal{D}_X^\dagger(\mathcal{U}) := \Gamma(\bar{\mathcal{U}}; \mathcal{D}_U^\dagger).$$

La proposition suivante est la généralisation immédiate de 5.2.4 dès sites de Meredith au site des relèvements affines très lisses.

Proposition

- a) Soit $\rho_\phi : \mathcal{E}_R(\mathcal{O}_X^\dagger)(\mathcal{U}) \rightarrow \mathcal{E}_R(\mathcal{O}_X^\dagger)(\mathcal{V})$ le morphisme que le foncteur $\mathcal{E}_R(\mathcal{O}_X^\dagger)$ fait correspondre à $\phi \in \text{Mor}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}(\mathcal{V}, \mathcal{U})$. Alors $\rho_\phi(\mathcal{D}_X^\dagger(\mathcal{U})) \subseteq \mathcal{D}_X^\dagger(\mathcal{V})$ et la correspondance $\mathcal{U} \rightsquigarrow \mathcal{D}_X^\dagger(\mathcal{U})$ munie des morphismes ρ_ϕ est un sous-faisceau de $\mathcal{E}_R(\mathcal{O}_X^\dagger)$.
- b) On a l'inclusion $\mathcal{G}_X^\dagger \subseteq \mathcal{D}_X^\dagger$ compatible aux inclusions $\mathcal{G}_U^\dagger \subseteq \mathcal{D}_U^\dagger$ de 5.2.4-(b).

5.3 Équivalences de catégories de \mathcal{D}^\dagger -modules

5.3.1. La catégorie $\text{Mod}^\dagger(\mathcal{D}_X^\dagger)$. Soit $\mathcal{U} \in \mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$. Par l'inclusion $\mathcal{G}_U^\dagger \subseteq \mathcal{D}_U^\dagger$ on munit un \mathcal{D}_U^\dagger -module d'une structure de \mathcal{G}_U^\dagger -module et donc aussi de $(\mathcal{D}_U^\dagger \rtimes \mathcal{G}_U^\dagger)$ -module. La catégorie $\text{Mod}_{\bar{\mathcal{U}}}(\mathcal{D}_U^\dagger)$ apparaît ainsi comme sous-catégorie pleine de $\text{Mod}_{\bar{\mathcal{U}}}(\mathcal{D}_U^\dagger \rtimes \mathcal{G}_U^\dagger)$, ce sera le sens dans la suite de l'inclusion $\text{Mod}_{\bar{\mathcal{U}}}(\mathcal{D}_U^\dagger) \subseteq \text{Mod}_{\bar{\mathcal{U}}}(\mathcal{D}_U^\dagger \rtimes \mathcal{G}_U^\dagger)$.

Notons $\text{Mod}^\dagger(\mathcal{D}_X^\dagger)$ la sous-catégorie pleine de $\text{Mod}(\mathcal{D}_X^\dagger)$ des \mathcal{D}_X^\dagger -modules \mathcal{M} tels que pour chaque $\mathcal{U} \in \mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$ l'action de $\mathcal{G}_U^\dagger(\mathcal{U})$ sur $\mathcal{M}(\mathcal{U})$ (\mathcal{M} est un préfaisceau sur $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$) coïncide avec l'action induite par l'action de $\mathcal{D}_X^\dagger(\mathcal{U})$ sur $\mathcal{M}(\mathcal{U})$ ($\mathcal{G}_U^\dagger(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{D}_X^\dagger(\mathcal{U})$). Il est clair que le noyau et conoyau d'un morphisme de \mathcal{D}_X^\dagger -modules de $\text{Mod}^\dagger(\mathcal{D}_X^\dagger)$ appartiennent encore à cette catégorie qui est donc une sous-catégorie abélienne de $\text{Mod}(\mathcal{D}_X^\dagger)$.

5.3.2. Remarque. On a $\mathcal{O}_X^\dagger \in \text{Mod}^\dagger(\mathcal{D}_X^\dagger)$ mais $\mathcal{D}_X^\dagger \notin \text{Mod}^\dagger(\mathcal{D}_X^\dagger)$.

5.3.3. Théorème. Soit $(\bar{X}; \mathcal{O}_{\bar{X}})$ un schéma lisse et séparé sur \bar{R} de site de relèvements affines très lisses $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$ et soit $\mathcal{U} \in \mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$.

- a) La restriction $\mathcal{R}'_{\mathcal{U}}$ du foncteur $\mathcal{R}_{\mathcal{U}} : \text{Mod}(\mathcal{D}_X^\dagger) \rightsquigarrow \text{Mod}_{\bar{\mathcal{U}}}(\mathcal{D}_U^\dagger \rtimes \mathcal{G}_U^\dagger)$ à la sous-catégorie $\text{Mod}^\dagger(\mathcal{D}_X^\dagger)$ est à valeurs dans $\text{Mod}_{\bar{\mathcal{U}}}(\mathcal{D}_U^\dagger)$ et le foncteur

$$\mathcal{R}'_{\mathcal{U}} : \text{Mod}^\dagger(\mathcal{D}_X^\dagger) \rightsquigarrow \text{Mod}_{\bar{\mathcal{U}}}(\mathcal{D}_U^\dagger) \quad (\diamond)$$

est exact et admet un adjoint à droite.

- b) Lorsque \bar{X} est affine et $\bar{\mathcal{U}} = \bar{X}$, le foncteur (\diamond) est une équivalence de catégories.
- c) La catégorie $\text{Mod}^\dagger(\mathcal{D}_X^\dagger)$ est abélienne et possède suffisamment d'objets injectifs.

Démonstration. Un $(\mathcal{D}_U^\dagger \rtimes \mathcal{G}_U^\dagger)$ -module est muni de deux structures de \mathcal{G}_U^\dagger -module grâce aux morphismes

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_U^\dagger & \longrightarrow & \mathcal{D}_U^\dagger \rtimes \mathcal{G}_U^\dagger \\ \theta & \longmapsto & \theta \otimes 1 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{G}_U^\dagger & \longrightarrow & \mathcal{D}_U^\dagger \rtimes \mathcal{G}_U^\dagger \\ \theta & \longmapsto & 1 \otimes \theta \end{array}$$

On note alors $\text{Mod}_{\bar{U}}^\dagger(\mathcal{D}_U^\dagger \rtimes \mathcal{G}_U^\dagger)$ la sous-catégorie pleine de $\text{Mod}_{\bar{U}}^\dagger(\mathcal{D}_U^\dagger \rtimes \mathcal{G}_U^\dagger)$ des modules sur lesquels ces deux structures de \mathcal{G}_U^\dagger -module coïncident et par restriction de \mathcal{R}_U (4.4.5) on obtient le foncteur

$$\mathcal{R}_U^\dagger : \text{Mod}^\dagger(\mathcal{D}_X^\dagger) \rightsquigarrow \text{Mod}_{\bar{U}}^\dagger(\mathcal{D}_U^\dagger \rtimes \mathcal{G}_U^\dagger).$$

D'autre part les morphismes de préfaisceaux d'anneaux

$$\begin{array}{ccc} \alpha : \mathcal{D}_U^\dagger & \longrightarrow & \mathcal{D}_U^\dagger \rtimes \mathcal{G}_U^\dagger \\ \sigma & \longmapsto & \sigma \otimes 1 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \beta : \mathcal{D}_U^\dagger \rtimes \mathcal{G}_U^\dagger & \longrightarrow & \mathcal{D}_U^\dagger \\ \sigma \otimes \theta & \longrightarrow & \sigma \theta \end{array}$$

donnent respectivement les foncteurs

$$\mathcal{A} : \text{Mod}_{\bar{U}}^\dagger(\mathcal{D}_U^\dagger \rtimes \mathcal{G}_U^\dagger) \rightsquigarrow \text{Mod}_{\bar{U}}^\dagger(\mathcal{D}_U^\dagger) \quad \text{et} \quad \mathcal{B} : \text{Mod}_{\bar{U}}^\dagger(\mathcal{D}_U^\dagger) \rightsquigarrow \text{Mod}_{\bar{U}}^\dagger(\mathcal{D}_U^\dagger \rtimes \mathcal{G}_U^\dagger)$$

où $\mathcal{A} \circ \mathcal{B}$ est équivalent à l'identité car $\beta \circ \alpha = \text{id}$. Le foncteur \mathcal{A} établit alors une équivalence de catégories entre l'image essentielle de \mathcal{B} , *i.e.* $\text{Mod}_{\bar{U}}^\dagger(\mathcal{D}_U^\dagger \rtimes \mathcal{G}_U^\dagger)$, et $\text{Mod}_{\bar{U}}^\dagger(\mathcal{D}_U^\dagger)$. Le foncteur (\diamond) se factorise alors en

$$\mathcal{R}_U^\dagger = \mathcal{A} \circ \mathcal{R}_U^\dagger,$$

et les affirmations (a) et (b) seront conséquences immédiates des affirmations analogues pour le foncteur \mathcal{R}_U^\dagger .

Le foncteur \mathcal{R}_U et son adjoint à droite \mathcal{I}_U ont été introduits dans les catégories des faisceaux d'algèbres et dans celles des modules sur un faisceau d'algèbres (4.3, 4.4). Nous savons que $\mathcal{R}_U(\mathcal{D}_X^\dagger) = \mathcal{D}_U^\dagger$ et $\mathcal{R}_U(\mathcal{G}_X^\dagger) = \mathcal{G}_U^\dagger$ et nous disposons des morphismes d'adjonction

$$\begin{cases} \epsilon(\mathcal{D}_X^\dagger) : \mathcal{D}_X^\dagger \rightarrow (\mathcal{I}_U \circ \mathcal{R}_U^{-1})(\mathcal{D}_X^\dagger) = \mathcal{I}_U(\mathcal{D}_U^\dagger) \\ \epsilon(\mathcal{G}_X^\dagger) : \mathcal{G}_X^\dagger \rightarrow (\mathcal{I}_U \circ \mathcal{R}_U^{-1})(\mathcal{G}_X^\dagger) = \mathcal{I}_U(\mathcal{G}_U^\dagger) \end{cases} \quad (*)$$

qui sont des morphismes de faisceaux d'algèbres sur $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$. Pour $\mathcal{M} \in \text{Mod}_{\bar{U}}^\dagger(\mathcal{D}_U^\dagger \rtimes \mathcal{G}_U^\dagger)$, les actions de \mathcal{D}_X^\dagger et de \mathcal{G}_X^\dagger sur $\mathcal{I}_U(\mathcal{M})$ sont alors celles qui proviennent des morphismes (*). Il s'ensuit que si les actions de \mathcal{D}_U^\dagger et de \mathcal{G}_U^\dagger sur \mathcal{M} sont compatibles il en sera de même des actions de \mathcal{D}_X^\dagger et de \mathcal{G}_X^\dagger sur $\mathcal{I}_U(\mathcal{M})$, autrement dit, la restriction \mathcal{I}_U^\dagger de \mathcal{I}_U à la sous-catégorie pleine $\text{Mod}_{\bar{U}}^\dagger(\mathcal{D}_U^\dagger \rtimes \mathcal{G}_U^\dagger)$ est bien à valeurs dans $\text{Mod}^\dagger(\mathcal{D}_X^\dagger)$ et l'assertion (a) est prouvée.

Lorsque $\bar{\mathbf{X}}$ est affine et $\bar{U} = \bar{\mathbf{X}}$, le foncteur \mathcal{R}_U est une équivalence d'inverse \mathcal{I}_U (4.4.4) et il en est donc de même pour les restrictions \mathcal{R}_U^\dagger et \mathcal{I}_U^\dagger , d'où (b).

Pour (c) fixons une famille d'objets $\{\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_\ell\}$ de $\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger$ telle que $\{\bar{U}_i\}$ est un recouvrement de $\bar{\mathbf{X}}$. Pour chaque $i = 1, \dots, \ell$ et tout $\mathcal{M} \in \text{Mor}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}(\mathbb{Z})$ notons $\mathcal{M}_i := \mathcal{R}_{U_i}(\mathcal{M})$ et

$\epsilon_i(\mathcal{M}) : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{S}_{\mathcal{U}_i}(\mathcal{M}_i)$ le morphisme adjoint de $\text{id}_{\mathcal{M}_i}$. Alors, le morphisme :

$$\epsilon(\mathcal{M}) : \mathcal{M} \rightarrow \bigoplus_{i=1, \dots, \ell} \mathcal{S}_{\mathcal{U}_i}(\mathcal{M}_i),$$

somme des $\epsilon_i(\mathcal{M})$, est **injectif** quel que soit $\mathcal{M} \in \text{Mod}_{\mathcal{X}_{\text{inf}}^\dagger}(\mathbb{Z})$. En effet, si $\mathcal{K}(\mathcal{M})$ est le noyau de $\epsilon(\mathcal{M})$, l'exactitude de $\mathcal{R}_{\mathcal{U}_i}$ implique $\mathcal{R}_{\mathcal{U}_i}(\mathcal{K}(\mathcal{M})) = \mathbf{0}$, pour tout $i = 1, \dots, \ell$ et donc $\mathcal{K}(\mathcal{M}) = 0$ puisque $\{\bar{\mathcal{U}}_i\}$ est un recouvrement de $\bar{\mathcal{X}}$.

Cela étant, la sous-catégorie pleine $\text{Mod}_{\bar{\mathcal{U}}}^\dagger(\mathcal{D}_{\bar{\mathcal{U}}}^\dagger \rtimes \mathcal{G}_{\bar{\mathcal{U}}}^\dagger)$ de $\text{Mod}_{\bar{\mathcal{U}}}(\mathcal{D}_{\bar{\mathcal{U}}}^\dagger \rtimes \mathcal{G}_{\bar{\mathcal{U}}}^\dagger)$ possède suffisamment d'injectifs car équivalente à la catégorie $\text{Mod}_{\bar{\mathcal{U}}}^\dagger(\mathcal{D}_{\bar{\mathcal{U}}}^\dagger)$ de modules sur un faisceau d'anneaux. Fixons alors pour $i = 1, \dots, \ell$, une injection de $\mathcal{D}_{\bar{\mathcal{U}}_i}^\dagger$ -modules $\nu_i : \mathcal{M}_i \hookrightarrow \mathcal{I}_i$ où \mathcal{I}_i est un $\mathcal{D}_{\bar{\mathcal{U}}_i}^\dagger$ -module injectif. Comme $\mathcal{S}_{\bar{\mathcal{U}}_i}^\dagger$ est adjoint à droite d'un foncteur exact, il préserve les injectifs et est exact à gauche. Le morphisme

$$\mathcal{S}_{\bar{\mathcal{U}}_i}^\dagger(\nu_i) : \mathcal{S}_{\bar{\mathcal{U}}_i}^\dagger(\mathcal{M}_i) \rightarrow \mathcal{S}_{\bar{\mathcal{U}}_i}^\dagger(\mathcal{I}_i)$$

est donc un plongement de $\mathcal{S}_{\bar{\mathcal{U}}_i}^\dagger(\mathcal{M}_i)$ dans un objet injectif de $\text{Mod}(\mathcal{D}_{\bar{\mathcal{X}}}^\dagger)$ et la composition

$$\mathcal{M} \xrightarrow{\epsilon(\mathcal{M})} \bigoplus_{i=1, \dots, \ell} \mathcal{S}_{\bar{\mathcal{U}}_i}^\dagger(\mathcal{M}_i) \xrightarrow{\bigoplus_i \mathcal{S}_{\bar{\mathcal{U}}_i}^\dagger(\nu_i)} \bigoplus_{i=1, \dots, \ell} \mathcal{S}_{\bar{\mathcal{U}}_i}^\dagger(\mathcal{I}_i)$$

est un plongement de \mathcal{M} dans un objet injectif de $\text{Mod}^\dagger(\mathcal{D}_{\bar{\mathcal{X}}}^\dagger)$. ■

5.3.4. Remarque. (cf. 5.3.2) Il faut prendre garde du fait que le faisceau $\mathcal{D}_{\bar{\mathcal{U}}}^\dagger$ sur $\bar{\mathcal{U}}$ est naturellement muni de deux structures de $\mathcal{G}_{\bar{\mathcal{U}}}^\dagger$ -module distinctes. En effet, dans l'égalité $\mathcal{D}_{\bar{\mathcal{U}}}^\dagger = \mathcal{R}_{\bar{\mathcal{U}}}(\mathcal{D}_{\bar{\mathcal{X}}}^\dagger)$ le faisceau $\mathcal{G}_{\bar{\mathcal{U}}}^\dagger$ agit par automorphismes intérieurs, *i.e.*

$$\theta \cdot P = \theta P \theta^{-1}, \quad \forall \theta \in \mathcal{G}_{\bar{\mathcal{U}}}^\dagger, \forall P \in \mathcal{D}_{\bar{\mathcal{U}}}^\dagger,$$

alors que sur $\mathcal{D}_{\bar{\mathcal{U}}}^\dagger \in \text{Mod}^\dagger(\mathcal{D}_{\bar{\mathcal{U}}}^\dagger \rtimes \mathcal{G}_{\bar{\mathcal{U}}}^\dagger)$ le faisceau $\mathcal{G}_{\bar{\mathcal{U}}}^\dagger$ agit par multiplication à gauche, *i.e.*

$$\theta \cdot P = \theta P, \quad \forall \theta \in \mathcal{G}_{\bar{\mathcal{U}}}^\dagger, \forall P \in \mathcal{D}_{\bar{\mathcal{U}}}^\dagger,$$

On a donc $\mathcal{R}_{\bar{\mathcal{U}}}(\mathcal{D}_{\bar{\mathcal{X}}}^\dagger) \notin \text{Mod}^\dagger(\mathcal{D}_{\bar{\mathcal{U}}}^\dagger \rtimes \mathcal{G}_{\bar{\mathcal{U}}}^\dagger)$ et $\mathcal{D}_{\bar{\mathcal{X}}}^\dagger \neq \mathcal{S}_{\bar{\mathcal{U}}}(\mathcal{D}_{\bar{\mathcal{U}}}^\dagger)$ même lorsque $\bar{\mathcal{X}} = \bar{\mathcal{U}}$.

Ces distinctions disparaissent dans le cas du faisceau structural $\mathcal{O}_{\bar{\mathcal{U}}}^\dagger$ dans la mesure où l'action de $\mathcal{G}_{\bar{\mathcal{U}}}^\dagger$ à travers $\mathcal{D}_{\bar{\mathcal{U}}}^\dagger$ est précisément l'action canonique par automorphismes d'algèbres. On a $\mathcal{R}_{\bar{\mathcal{U}}}(\mathcal{O}_{\bar{\mathcal{X}}}^\dagger) \in \text{Mod}^\dagger(\mathcal{D}_{\bar{\mathcal{U}}}^\dagger \rtimes \mathcal{G}_{\bar{\mathcal{U}}}^\dagger)$ et aussi $\mathcal{O}_{\bar{\mathcal{X}}}^\dagger = \mathcal{S}_{\bar{\mathcal{U}}}(\mathcal{O}_{\bar{\mathcal{U}}}^\dagger)$ lorsque $\bar{\mathcal{X}} = \bar{\mathcal{U}}$.

§ 6. Références bibliographiques

- [Ar] A. ARABIA. Relèvements des algèbres lisses et de leurs morphismes ; Commentarii Mathematici Helvetici 76 (2001) 607–639. (avril 2000).
- [Go] R. GODEMENT. “*Topologie algébrique et théorie des faisceaux*” ; Troisième édition revue et corrigée. Publications de l’Institut de Mathématique de l’Université de Strasbourg, XIII. Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1252. Hermann, Paris, (1973).
- [McL] S. MAC LANE. “*Categories for the working mathematician*” ; Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 5. Springer-Verlag (1998).
- [M] D. MEREDITH. Weak formal schemes ; Nagoya Math. Journal. Vol. 45, pp. 1–38 (1971).
- [MW] P. MONSKY, G. WASHNITZER. Formal cohomology : I ; Ann. of Math. (2) 88, pp. 181–217 (1968).

—————×—————

Alberto Arabia
CNRS
Institut de Mathématiques de Jussieu
Théorie des Groupes
Samedi 10 septembre 2008