Produits fibrés dans la catégorie des schémas †-adiques

Alberto Arabia*

Résumé. On démontre les deux assertions suivantes

- *La catégorie des schémas †-adiques localement de type fini possède des produits fibrés.*
- *Pour un schéma †-adique localement de type fini, il y a équivalence entre : « être de réduction affine » et « être †-adique affine de type fini. »*

Table des matières

*CNRS – Institut de Mathématiques de Jussieu – Université de Paris 7 - Denis Diderot.
Laboratoire de Théorie des Groupes, Représentations et Applications.
UFR de Mathématiques de l'Université Paris 7 – Denis Diderot.
175, rue du Chevaleret, 9e étage, bureau 9D11, 75013 Paris.
Adresse électronique : `arabia@math.jussieu.fr`

§ 0. Résumé

On complète l'étude des schémas †-adiques de réduction affine de type fini ([Ar$_3$]) avec :

Théorème 4.1. *Pour un schéma †-adique localement de type fini il y a équivalence entre :*
a) *Être de réduction affine (de type fini).*
b) *Être †-adique affine de type fini.*

Ce résultat, ou plutôt sa version affaiblie 3.1.3, constitue le point clé dans la preuve des théorèmes suivants clairement inspirés de leurs analogues en théorie des schémas.

Théorème 3.2.3-(a). *Pour tout schéma †-adique localement de type fini* $(\boldsymbol{X};\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ *et tout schéma †-adique affine de type fini* $(\boldsymbol{Y};\mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}})$ *l'application* $(f,f^{\#})\mapsto \Gamma(\boldsymbol{Y};f^{\#})$ *est un isomorphisme naturel de* $\mathrm{Mor}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ *sur* $\mathrm{Homom}_{\boldsymbol{R}}(\Gamma(\boldsymbol{Y};\mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}}),\Gamma(\boldsymbol{X};\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}))$.

Théorème 3.2.4. *La catégorie des schémas †-adiques localement de type fini possède des produits fibrés.*

§ 1. Généralités sur le produit fibré

Cette section peut être ignorée en première lecture. On y trouve les définitions et des résultats élémentaires sans démonstration nécessaires à la compréhension de la proposition 1.9.1 (p. 5) qui reformule le critère de représentabilité de foncteurs sur la catégorie des espaces annelés de [EGA$_1$] (prop. § 4.5.4).

On désigne par $\mathcal{C}$ une catégorie. Le mot "foncteur" sans qualificatif est synonyme de "foncteur contravariant". En parlant de foncteurs, le mot "morphisme" est synonyme de "transformation naturelle".

1.1 Catégorie $\mathcal{C}/_{\boldsymbol{S}}$

Pour tout objet $\boldsymbol{S}$ de $\mathcal{C}$, on note $\mathcal{C}/_{\boldsymbol{S}}$ la catégorie dont les objets sont les morphismes de $\mathcal{C}$ de but $\boldsymbol{S}$. Si $\pi_1:\boldsymbol{X}_1\to\boldsymbol{S}$ et $\pi_2:\boldsymbol{X}_2\to\boldsymbol{S}$ sont des objets de $\mathcal{C}/_{\boldsymbol{S}}$, l'ensemble $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}/_{\boldsymbol{S}}}(\pi_1,\pi_2)$ est le sous-ensemble de $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2)$ des morphismes $\phi:\boldsymbol{X}_1\to\boldsymbol{X}_2$ tels que $\pi_1=\pi_2\circ\phi$.

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{X}_1 \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi_1"'] \arrow[dr, phantom, "\bigoplus"] & \boldsymbol{X}_2 \arrow[d, "\pi_2"] \\ \boldsymbol{S} \arrow[r, "\mathrm{id}_{\boldsymbol{S}}"'] & \boldsymbol{S} \end{tikzcd}$$

1.2 Foncteur représentable

Un foncteur contravariant $\boldsymbol{F}:\mathcal{C}\rightsquigarrow\mathbf{Ens}$ est dit « *représentable* » s'il existe $\boldsymbol{X}\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ et un isomorphisme de foncteurs $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\_,\boldsymbol{X})\simeq\boldsymbol{F}(\_)$.

1.2.1. Lemme d'Yoneda. *La correspondance qui associe à un morphisme de foncteurs* $\Phi(\_):\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\_,\boldsymbol{X})\to\boldsymbol{F}(\_)$ *l'élément* $\Phi(\boldsymbol{X})(\mathrm{id}_{\boldsymbol{X}})\in\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ *est une bijection sur l'ensemble* $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$. *La correspondance réciproque associe à* $x\in\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ *et* $\boldsymbol{Y}\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ *l'application* $\Phi(\boldsymbol{Y}):\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X})\to\boldsymbol{F}(\boldsymbol{Y})$, $f\mapsto\boldsymbol{F}(f)(x)$.

Lorsque $\boldsymbol{F}$ est représentable, les couples $(\boldsymbol{X},x\in\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}))$ donnés par le lemme d'Yoneda sont dits « *représenter* $\boldsymbol{F}$ ».

1.2.2. Lemme. *Les couples représentant un même foncteur sont deux à deux* ***canoniquement*** *isomorphes.*

1.3 Produits

Étant donnés deux objets $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Y}$ de $\mathcal{C}$, on dit que « *$\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Y}$ admettent un produit dans $\mathcal{C}$* » lorsque le foncteur $\boldsymbol{F}(\_) := \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\_,\boldsymbol{X}) \times \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\_,\boldsymbol{Y}) : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathbf{Ens}$ est représentable. Dans ce cas, on note $\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Y}$ et $p_{\boldsymbol{X}} : \boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{X}$ et $p_{\boldsymbol{Y}} : \boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{Y}$ respectivement l'objet et l'élément de $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Y})$ qui caractérisent $\boldsymbol{F}$.

On dira que « *les produits existent dans $\mathcal{C}$* » ou bien que « *$\mathcal{C}$ admet des produits* » lorsque chaque paire d'objets de $\mathcal{C}$ admet un produit dans $\mathcal{C}$.

1.4 Produits fibrés d'ensembles

Étant données deux applications d'ensembles $\pi_{\boldsymbol{X}} : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{S}$ et $\pi_{\boldsymbol{Y}} : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{S}$ on définit l'ensemble $\boldsymbol{X}\times_{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{Y}$ et l'application $\pi_{\boldsymbol{X}\times_{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{Y}} : \boldsymbol{X}\times_{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{S}$ par :

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{X}\times_{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{Y} =: \{(x,y)\in\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Y} \mid \pi_{\boldsymbol{X}}(x)=\pi_{\boldsymbol{Y}}(y)\} & \xrightarrow{\pi_{\boldsymbol{X}\times_{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{Y}}} & \boldsymbol{S} \\ (x,y) & \longmapsto & \pi_{\boldsymbol{X}}(x) \end{array}$$

On note $p_{\boldsymbol{X}} : \boldsymbol{X}\times_{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{X}$ et $p_{\boldsymbol{Y}} : \boldsymbol{X}\times_{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{Y}$ les restrictions des projections canoniques de $\boldsymbol{X}\times\boldsymbol{Y}$. On a le diagramme « *cartésien* »

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{X}\times_{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{Y} \arrow[r, "p_Y"] \arrow[d, "p_X"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \boldsymbol{Y} \arrow[d, "\pi_Y"] \\ \boldsymbol{X} \arrow[r, "\pi_X"] & \boldsymbol{S} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (x,y) \arrow[r, "p_Y"] \arrow[d, "p_X"'] & y \arrow[d, "\pi_Y"] \\ x \arrow[r, "\pi_X"] & \pi_{\boldsymbol{X}}(x)=\pi_{\boldsymbol{Y}}(y) \end{tikzcd}$$

Le couple $(\boldsymbol{X}\times_{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{Y},(p_{\boldsymbol{X}},p_{\boldsymbol{Y}}))$ représente le foncteur $\mathrm{Mor}_{\mathbf{Ens}_{/S}}(\_,\pi_{\boldsymbol{X}}) \times \mathrm{Mor}_{\mathbf{Ens}_{/S}}(\_,\pi_{\boldsymbol{Y}})$, c'est le « *produit fibré de $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Y}$ au-dessus de $\boldsymbol{S}$ (relativement à $\pi_{\boldsymbol{X}}$ et $\pi_{\boldsymbol{Y}}$)* ».

1.4.1. Lemme. *Étant donnés deux diagrammes commutatifs d'applications d'ensembles :*

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{X}_1 \arrow[r, "f_X"] \arrow[d, "\pi_{X_1}"'] & \boldsymbol{X}_2 \arrow[d, "\pi_{X_2}"] \\ \boldsymbol{S}_1 \arrow[r, "f_S"] & \boldsymbol{S}_2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \boldsymbol{Y}_1 \arrow[r, "f_Y"] \arrow[d, "\pi_{Y_1}"'] & \boldsymbol{Y}_2 \arrow[d, "\pi_{Y_2}"] \\ \boldsymbol{S}_1 \arrow[r, "f_S"] & \boldsymbol{S}_2 \end{tikzcd}$$

il existe une et une unique application $f_{\boldsymbol{X}}\times_{f_S} f_{\boldsymbol{Y}} : \boldsymbol{X}_1\times_{\boldsymbol{S}_1}\boldsymbol{Y}_1 \to \boldsymbol{X}_2\times_{\boldsymbol{S}_2}\boldsymbol{Y}_2$ rendant commutatifs les diagrammes :

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{X}_1\times_{\boldsymbol{S}_1}\boldsymbol{Y}_1 \arrow[r, "f_X\times_{f_S}f_Y"'] \arrow[d, "p_{X_1}"'] & \boldsymbol{X}_2\times_{\boldsymbol{S}_2}\boldsymbol{Y}_2 \arrow[d, "p_{X_2}"] \\ \boldsymbol{X}_1 \arrow[r, "f_X"] & \boldsymbol{X}_2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \boldsymbol{X}_1\times_{\boldsymbol{S}_1}\boldsymbol{Y}_1 \arrow[r, "f_X\times_{f_S}f_Y"'] \arrow[d, "p_{Y_1}"'] & \boldsymbol{X}_2\times_{\boldsymbol{S}_2}\boldsymbol{Y}_2 \arrow[d, "p_{Y_2}"] \\ \boldsymbol{Y}_1 \arrow[r, "f_Y"] & \boldsymbol{Y}_2 \end{tikzcd}$$

1.5 Produits fibrés de foncteurs d'ensembles

Étant donnés trois foncteurs contravariants $\boldsymbol{F},\boldsymbol{G},\boldsymbol{H} : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathbf{Ens}$ et deux morphismes de foncteurs $\pi_{\boldsymbol{F}}:\boldsymbol{F}\to\boldsymbol{H}$ et $\pi_{\boldsymbol{G}}:\boldsymbol{G}\to\boldsymbol{H}$ la correspondance :

$$\mathrm{Ob}(\mathcal{C})\ni \boldsymbol{X}\rightsquigarrow\left(\begin{array}{ccc}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})\times_{\boldsymbol{H}(\boldsymbol{X})}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{X}) & \xrightarrow{p_G(\boldsymbol{X})} & \boldsymbol{G}(\boldsymbol{X})\\ {\scriptstyle p_F(\boldsymbol{X})}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_G(\boldsymbol{X})}\\ \boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) & \xrightarrow{\pi_F(\boldsymbol{X})} & \boldsymbol{H}(\boldsymbol{X})\end{array}\right)$$

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})\ni f\rightsquigarrow\big(\boldsymbol{F}(f)\times_{\boldsymbol{H}(f)}\boldsymbol{G}(f),\boldsymbol{F}(f),\boldsymbol{G}(f),\boldsymbol{H}(f)\big)$$

où $\boldsymbol{F}(f)\times_{\boldsymbol{H}(f)}\boldsymbol{G}(f)$ désigne le morphisme donné par le lemme 1.4.1, est une correspondance fonctorielle.

Le foncteur $(\_)\rightsquigarrow\boldsymbol{F}(\_)\times_{\boldsymbol{H}(\_)}\boldsymbol{G}(\_)$ est le « *produit fibré de* $\boldsymbol{F}$ *et* $\boldsymbol{G}$ *au-dessus de* $\boldsymbol{H}$ (*relativement à* $\pi_{\boldsymbol{F}}$ *et* $\pi_{\boldsymbol{G}}$) ».

1.5.1. Lemme. *Étant donnés trois foncteurs d'ensembles* $\boldsymbol{F},\boldsymbol{G},\boldsymbol{H}$ *représentés par des objets* $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y},\boldsymbol{S}$ *respectivement. Étant donnés deux morphismes* $\pi_{\boldsymbol{F}}:\boldsymbol{F}\to\boldsymbol{H}$ *et* $\pi_{\boldsymbol{G}}:\boldsymbol{G}\to\boldsymbol{H}$ *représentés par des morphismes* $\pi_{\boldsymbol{X}}:\boldsymbol{X}\to\boldsymbol{S}$ *et* $\pi_{\boldsymbol{Y}}:\boldsymbol{Y}\to\boldsymbol{S}$. *Le produit fibré de foncteurs* $\boldsymbol{F}\times_{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{G}$ *relatif à* $\pi_{\boldsymbol{F}}$ *et* $\pi_{\boldsymbol{G}}$ *est représentable si et seulement si le produit fibré* $\boldsymbol{X}\times_{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{Y}$ *relatif à* $\pi_{\boldsymbol{X}}$ *et* $\pi_{\boldsymbol{Y}}$ *existe.*

1.6 Produits fibrés dans une catégorie générale

Définition. On dit que « *les produits fibrés existent dans la catégorie* $\mathcal{C}$ » lorsque les produits existent dans les catégories $\mathcal{C}/_{\boldsymbol{S}}$ pour tout objet $\boldsymbol{S}\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$.

Étant donnés deux morphismes $\pi_{\boldsymbol{X}}:\boldsymbol{X}\to\boldsymbol{S}$ et $\pi_{\boldsymbol{Y}}:\boldsymbol{Y}\to\boldsymbol{S}$ dans $\mathcal{C}$, on a les applications naturelles

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\_,\boldsymbol{X}) & \xrightarrow{\pi_X(\_)} & \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\_,\boldsymbol{S})\\ f & \longmapsto & \pi_{\boldsymbol{X}}\circ f\end{array}\qquad\begin{array}{ccc}\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\_,\boldsymbol{Y}) & \xrightarrow{\pi_Y(\_)} & \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\_,\boldsymbol{S})\\ f & \longmapsto & \pi_{\boldsymbol{Y}}\circ f\end{array}$$

Posons $\boldsymbol{F}(\_):=\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\_,\boldsymbol{X})$, $\boldsymbol{G}(\_):=\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\_,\boldsymbol{Y})$ et $\boldsymbol{H}(\_):=\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\_,\boldsymbol{S})$. L'existence des produits fibrés dans $\mathcal{C}$ équivaut alors à la représentabilité du foncteur $\boldsymbol{F}\times_{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{G}$, quels que soient $\pi_{\boldsymbol{X}}$ et $\pi_{\boldsymbol{Y}}$ (*cf.* 1.3).

1.7 Produits fibrés dans la catégorie $\mathbf{Hom}(\mathcal{C}^{op},\mathcal{C}')$

On note ainsi la catégorie des foncteurs contravariants de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}'$. Lorsque la catégorie $\mathcal{C}'$ admet des produits fibrés on peut, de manière analogue à 1.4, définir pour des foncteurs $\boldsymbol{F},\boldsymbol{G},\boldsymbol{B}:\mathcal{C}\rightsquigarrow\mathcal{C}'$ et deux morphismes $\pi_{\boldsymbol{F}}:\boldsymbol{F}\to\boldsymbol{B}$ et $\pi_{\boldsymbol{G}}:\boldsymbol{G}\to\boldsymbol{B}$, « *le produit fibré de* $\boldsymbol{F}$ *et* $\boldsymbol{G}$ *au-dessus de* $\boldsymbol{B}$ (*relativement à* $\pi_{\boldsymbol{F}}$ *et* $\pi_{\boldsymbol{G}}$) ». On dit ([EGA$_1$] **0** §1.7.2, p. 45) que les produits fibrés existent dans la catégorie $\mathbf{Hom}(\mathcal{C}^{op},\mathcal{C}')$.

1.8 Morphisme représentable de foncteurs d'ensembles

Soient $\boldsymbol{F},\boldsymbol{G}:\mathcal{C}\rightsquigarrow\mathbf{Ens}$ deux foncteurs contravariants. Un morphisme $f:\boldsymbol{F}\to\boldsymbol{G}$ est dit « *représentable* » si pour tout $\boldsymbol{X}\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ et tout morphisme $u:\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\_,\boldsymbol{X})\to\boldsymbol{G}$, le foncteur $\boldsymbol{F}\times_{\boldsymbol{G}}\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\_,\boldsymbol{X})$ est représentable.

Dans ce cas, si on fixe un isomorphismes $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\_,\boldsymbol{Y}) \simeq \boldsymbol{F} \times_{\boldsymbol{G}} \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\_,\boldsymbol{X})$, le morphisme canonique de foncteurs $\boldsymbol{F} \times_{\boldsymbol{G}} \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\_,\boldsymbol{X}) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\_,\boldsymbol{X})$ est déterminé par un unique morphisme $\phi_{\boldsymbol{X}} \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\boldsymbol{Y},\boldsymbol{X})$.

Soit $\mathscr{P}$ une classe de morphismes de $\mathcal{C}$ qui soit :

- stable par composition à droite ou à gauche par des isomorphismes ;
- stable par changement de base dans $\mathcal{C}$.

Définition. Un morphisme de foncteurs d'ensembles est dit « *représentable par un morphisme de* $\mathscr{P}$ » si dans la correspondance $\boldsymbol{X} \rightsquigarrow \phi_{\boldsymbol{X}}$, les morphismes $\phi_{\boldsymbol{X}}$ appartiennent tous à $\mathscr{P}$.

1.8.1. Proposition. ([EGA$_1$] prop. **0**.1.7.5) *Soient* $\boldsymbol{F},\boldsymbol{G},\boldsymbol{H}$ *des foncteurs contravariants de* $\mathcal{C}$ *vers* **Ens**.

a) *Tout isomorphisme de foncteurs est représentable.*

b) *Si* $f:\boldsymbol{F}\to\boldsymbol{G}$ *et* $g:\boldsymbol{G}\to\boldsymbol{H}$ *sont représentables, il en est de même de* $g\circ f$.

c) *Si* $f:\boldsymbol{F}\to\boldsymbol{G}$ *est représentable, il en est de même de tout morphisme* $f_{(\boldsymbol{H})}$ *déduit de* f *par changement de base* $\boldsymbol{H}\to\boldsymbol{G}$.

1.9 Critère de représentabilité dans les catégories d'espaces annelés

Le critère de représentabilité de foncteurs sur la catégorie des espaces annelés $\mathbf{Esp\text{-}ann}/_{\boldsymbol{S}}$ de [EGA$_1$] (prop. **0**.4.5.4, p. 103) est plus généralement valable sur n'importe quelle sous-catégorie pleine $\mathcal{C}$ de $\mathbf{Esp\text{-}ann}/_{\boldsymbol{S}}$ vérifiant les deux propriétés de stabilité suivantes :

- Recollement : Tout $\boldsymbol{S}$-espace localement isomorphe à un objet $\mathcal{C}$ est dans $\mathcal{C}$.
- Restriction ouverte : Le $\boldsymbol{S}$-espace induit sur un ouvert d'un objet de $\mathcal{C}$ est dans $\mathcal{C}$.

Voici l'énoncé du critère en question.

1.9.1. Proposition. *Soient* $\mathcal{C}$ *une sous-catégorie pleine de* $\mathbf{Esp\text{-}ann}/_{\boldsymbol{S}}$ *stable par recollements et restrictions ouvertes,* $\boldsymbol{F}:\mathcal{C}\rightsquigarrow\mathbf{Ens}$ *un foncteur contravariant,* $\{\boldsymbol{F}_i\}_{i\in I}$ *une famille de sous-foncteurs de* $\boldsymbol{F}$. *On suppose vérifiées les hypothèses suivantes :*

a) *Chacun des morphismes fonctoriels canoniques* $u_i:\boldsymbol{F}_i\to\boldsymbol{F}$ *est représentable par une immersion ouverte.*

b) *Pour tout* $\boldsymbol{X}\in\mathcal{C}$, *l'application* $\boldsymbol{U}\mapsto\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U})$, *où* $\boldsymbol{U}$ *parcours l'ensemble des* $\boldsymbol{S}$*-espaces annelés induits sur les ouverts de* $\boldsymbol{X}$, *est un faisceau d'ensembles.*

c) *Pour tout* $\boldsymbol{Z}\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ *et tout morphisme* $\mathrm{Mor}(\_,\boldsymbol{Z})\to\boldsymbol{F}$, *si* $\boldsymbol{Z}_i$ *représente* $\boldsymbol{F}_i\times_{\boldsymbol{F}}\mathrm{Mor}(\_,\boldsymbol{Z})$ *et si* $\boldsymbol{U}_i$ *est l'image de* $\boldsymbol{Z}_i$ *dans* $\boldsymbol{Z}$, *alors les* $\boldsymbol{U}_i$ *forment un recouvrement de* $\boldsymbol{Z}$.

d) *Chaque* $\boldsymbol{F}_i$ *est représentable par un objet* $\boldsymbol{X}_i\in\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$

Dans ces conditions, $\boldsymbol{F}$ *est représentable par un objet* $\boldsymbol{X}$ *de* $\mathcal{C}$, *les morphismes* $\boldsymbol{X}_i\to\boldsymbol{X}$ *sont des immersions ouvertes et les images des espaces sous-jacents aux* $\boldsymbol{X}_i$ *forment un recouvrement ouvert de* $\boldsymbol{X}$.

§ 2. Produits fibrés de schémas †-adiques affines

Les principaux résultats de cette section sont les propositions 2.4.5 et 2.4.10. On y montre d'une part que les schémas †-adiques introduits dans [M] sont des espaces *localement* annelés et d'autre part que le foncteur qui associe à une algèbre faiblement complète de type fini son schéma †-adique affine est un foncteur *pleinement fidèle* dans la catégorie des espaces localement annelés. Deux résultats inspirés par leurs analogues en théorie des schémas.

2.1 Le foncteur de complétion $\boldsymbol{I}$-adique faible

On note $(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ la donnée d'un anneau commutatif $\boldsymbol{R}$ (non nécessairement nœthérien) et d'un idéal $\boldsymbol{I} \subseteq \boldsymbol{R}$. Dans [MW], Monsky et Washnitzer associent à une $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$ une certaine sous-algèbre $\boldsymbol{A}^\dagger$ du complété séparé $\boldsymbol{I}$-adique $\widehat{\boldsymbol{A}}$ qu'ils appellent la « *complétion faible de* $\boldsymbol{A}$ ». Plus précisément $\boldsymbol{A}^\dagger$ est l'ensemble des éléments z de $\widehat{\boldsymbol{A}}$ tels qu'il existe un ensemble fini $\{a_1,\dots,a_r\} \subseteq \boldsymbol{A}$ et une famille de polynômes $p_n \in \boldsymbol{I}^n\boldsymbol{R}[X_1,\dots,X_r]$ vérifiant $\deg(p_n) = O(n)$ et tels que $z = \sum_{n\geqslant 0} p_n(a_1,\dots,a_r)$. Le morphisme canonique de $\boldsymbol{A}$ vers $\widehat{\boldsymbol{A}}$ se factorise à travers $\boldsymbol{A}^\dagger$ en un morphisme noté $\iota(\boldsymbol{A}) : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}^\dagger$. Les propriétés suivantes sont élémentaires :

- *Si* $\boldsymbol{I}$ *est nilpotent dans* $\boldsymbol{A}$, *on a* $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^\dagger$.
- *Pour tout morphisme de* $\boldsymbol{R}$-*algèbres* $\alpha : \boldsymbol{A}_1 \to \boldsymbol{A}_2$, *il existe un et un seul morphisme de* $\boldsymbol{R}$-*algèbres* $\alpha^\dagger : \boldsymbol{A}_1^\dagger \to \boldsymbol{A}_2^\dagger$ *tel que* $\alpha^\dagger \circ \iota(\boldsymbol{A}_1) = \iota(\boldsymbol{A}_2) \circ \alpha$.

La correspondance ainsi définie $\boldsymbol{A} \rightsquigarrow \boldsymbol{A}^\dagger$, $\alpha \rightsquigarrow \alpha^\dagger$ est fonctorielle et $\iota(\_) : (\_) \to (\_)^\dagger$ est un morphisme de foncteurs. Une $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$ est dite « *faiblement complète* (*pour la topologie* $\boldsymbol{I}$-*adique*) », f.c. en bref, lorsque $\iota(\boldsymbol{A})$ est bijectif, on écrit alors $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^\dagger$. On a $\boldsymbol{A}^\dagger = \boldsymbol{A}^{\dagger\dagger}$, pour toute $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$ ([MW]).

Une $\boldsymbol{R}$-algèbre f.c. est dite « *faiblement complète de type fini* », f.c.t.f. en bref, si elle est l'image homomorphique de $\boldsymbol{R}[X_1,\dots,X_m]^\dagger$ pour un certain $m \in \mathbb{N}$.

Notation. Dans la suite une notation de la forme $(\_)^\dagger$ rappellera que l'objet ainsi noté est faiblement complet pour la topologie $\boldsymbol{I}$-adique.

2.2 Catégories $\mathbf{Alg_{fc}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ et $\mathbf{Alg_{fctf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$

On notera $\mathbf{Alg}_{\mathrm{fc}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ (resp. $\mathbf{Alg}_{\mathrm{fctf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$) la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Alg}(\boldsymbol{R})$ dont les objets sont les algèbres f.c. (resp. f.c.t.f.). La proposition suivante est une reformulation de plusieurs résultats de [MW].

2.2.1. Proposition

a) *Le foncteur* $(\_)^\dagger : \mathbf{Alg}(\boldsymbol{R}) \to \mathbf{Alg}_{\mathrm{fc}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ *est adjoint à gauche du foncteur d'inclusion de* $\mathbf{Alg}_{\mathrm{fc}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ *dans* $\mathbf{Alg}(\boldsymbol{R})$. *Autrement dit, le morphisme fonctoriel :*

$$\begin{aligned} \mathrm{Homom}_{\boldsymbol{R}^\dagger}(\boldsymbol{A}^\dagger,\boldsymbol{B}^\dagger) &\longrightarrow \mathrm{Homom}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{B}^\dagger) \\ \alpha &\longmapsto \alpha\circ\iota(\boldsymbol{A}) \end{aligned}$$

est bijectif pour tous $\boldsymbol{A} \in \mathbf{Alg}(\boldsymbol{R})$ *et* $\boldsymbol{B}^\dagger \in \mathbf{Alg}_{\mathrm{fc}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$.

b) *Soit* $\mathfrak{C}$ *l'une des catégories* $\mathbf{Alg}_{\mathrm{fc}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ *où* $\mathbf{Alg}_{\mathrm{fctf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$. *Pour tous* $\boldsymbol{B}^\dagger, \boldsymbol{A}_1^\dagger, \boldsymbol{A}_2^\dagger \in \mathfrak{C}$ *et pour tous morphismes de* $\boldsymbol{R}$*-algèbres* $\alpha_i : \boldsymbol{B}^\dagger \to \boldsymbol{A}_i^\dagger$, *munissons les algèbres* $\boldsymbol{A}_i^\dagger$ *des structures de* $\boldsymbol{B}^\dagger$*-algèbres définies par les* α_i. *Alors, le foncteur covariant*

$$\mathrm{Homom}_{\boldsymbol{B}^\dagger}(\boldsymbol{A}_1^\dagger, \_) \times \mathrm{Homom}_{\boldsymbol{B}^\dagger}(\boldsymbol{A}_2^\dagger, \_) : \mathfrak{C} \rightsquigarrow \mathbf{Ens}$$

est représentable par $(\boldsymbol{A}_1^\dagger \otimes_{\boldsymbol{B}^\dagger} \boldsymbol{A}_2^\dagger)^\dagger$ *et par les morphismes* $\eta_i : \boldsymbol{A}_i^\dagger \to (\boldsymbol{A}_1^\dagger \otimes_{\boldsymbol{B}^\dagger} \boldsymbol{A}_2^\dagger)^\dagger$, *déterminés par les égalités* $\eta_1(a_1) = a_1 \otimes 1$ *et* $\eta_2(a_2) = 1 \otimes a_2$.

2.3 Quelques propriétés des algèbres faiblement complètes

2.3.1. Proposition ([MW]). *L'idéal* $\boldsymbol{I}\boldsymbol{A}^\dagger$ *est contenu dans le radical de* $\boldsymbol{A}^\dagger$.

Preuve. En effet, un élément $z \in \boldsymbol{I}\boldsymbol{A}^\dagger$ admet une écriture de la forme $z = h_1a_1 + \cdots + h_\ell a_\ell$ avec $h_i \in \boldsymbol{I}$ et $a_i \in \boldsymbol{A}^\dagger$ et la série $\sum_{m\geqslant 0} z^m = \sum_{m\geqslant 0}(h_1a_1 + \cdots + h_\ell a_\ell)^m$ définit bien un élément $\boldsymbol{A}^\dagger$. Par conséquent, $1 - z$ est inversible dans $\boldsymbol{A}^\dagger$. L'idéal $\boldsymbol{I}\boldsymbol{A}^\dagger$ est bien contenu dans tout idéal maximal de $\boldsymbol{A}^\dagger$ donc dans son radical. ∎

2.3.2. Lemme. *Soit* $(\mathfrak{A}, \preccurlyeq)$ *un ensemble muni d'un ordre partiel filtrant supérieurement. Soit* $\{\varphi_\beta^\alpha : \boldsymbol{A}_\alpha^\dagger \to \boldsymbol{A}_\beta^\dagger \mid \alpha \preccurlyeq \beta \in \mathfrak{A}\}$ *un système inductif dans* $\mathbf{Alg}_{\mathrm{fc}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ *de limite* $\boldsymbol{A}_\infty := \varinjlim_{\mathfrak{A}} \boldsymbol{A}_\alpha^\dagger$. *Alors, l'idéal* $\boldsymbol{I}\boldsymbol{A}_\infty$ *est contenu dans le radical de* $\boldsymbol{A}_\infty$.

Preuve. Un élément $x \in \boldsymbol{I}\boldsymbol{A}_\infty$ s'exprime comme somme **finie** $x = \sum_i h_i a_i$ avec $h_i \in \boldsymbol{I}$ et $a_i \in \varinjlim_\alpha \boldsymbol{A}_\alpha$. Comme la limite est filtrante, il existe α assez grand tel que les a_i proviennent tous des $a_{\alpha,i} \in \boldsymbol{A}_\alpha^\dagger$; mais $1 + \sum h_i a_{\alpha,i}$ est inversible dans $\boldsymbol{A}_\alpha^\dagger$ (2.3.1) et alors $1 + x$ est inversible dans $\boldsymbol{A}_\infty$. ∎

2.4 Schémas †-adiques affines

Notation. Pour $\boldsymbol{A} \in \mathbf{Alg}(\boldsymbol{R})$ on notera $\overline{\boldsymbol{A}} := \boldsymbol{A}/\boldsymbol{I}\boldsymbol{A}$ et $\nu : \boldsymbol{A} \twoheadrightarrow \overline{\boldsymbol{A}}$ la surjection canonique. Pour $\boldsymbol{A}^\dagger \in \mathbf{Alg}_{\mathrm{fc}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ on notera aussi $\overline{\boldsymbol{A}} := \overline{\boldsymbol{A}^\dagger}$ et donc $\nu : \boldsymbol{A}^\dagger \twoheadrightarrow \overline{\boldsymbol{A}}$ la surjection canonique.

2.4.1. Le foncteur $(\_)^\sim$. Étant donnés $f, g \in \boldsymbol{B}^\dagger \in \mathbf{Alg}_{\mathrm{fc}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ tels que $f = g \bmod \boldsymbol{I}$, l'élément f est inversible dans $\boldsymbol{B}^\dagger$ si et seulement si g l'est. De cette observation élémentaire il suit que si $f, g \in \boldsymbol{A}^\dagger$ sont tels que $\nu(f) = \nu(g)$ alors $((\boldsymbol{A}^\dagger)_f)^\dagger = ((\boldsymbol{A}^\dagger)_g)^\dagger$, l'algèbre $\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f]} := ((\boldsymbol{A}^\dagger)_f)^\dagger$ ne dépend donc que de $\nu(f) \in \overline{\boldsymbol{A}^\dagger}$. On notera $\gamma_{[f]} : \boldsymbol{A}^\dagger \to \boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f]}$ la composée du morphisme de localisation $\boldsymbol{A}^\dagger \to \boldsymbol{A}_f^\dagger$ suivi de $\iota(\boldsymbol{A}_f^\dagger) : \boldsymbol{A}_f^\dagger \to \boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f]}$. La correspondance

$$D(\overline{f}) \rightsquigarrow \boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f]}, \qquad \big(D(g) \supseteq D(fg)\big) \rightsquigarrow \big(\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[g]} \xrightarrow{\gamma_{[f]}} \boldsymbol{A}^\dagger{}_{[fg]}\big)$$

définit un préfaisceau sur la catégorie des ouverts principaux de $\mathrm{Spec}(\overline{\boldsymbol{A}})$. Le faisceau $\mathscr{O}_{\boldsymbol{A}^\dagger}^\dagger$ est, par définition, le faisceau sur $\mathrm{Spec}(\overline{\boldsymbol{A}})$ associé à ce préfaisceau. Le couple $(\boldsymbol{A}^\dagger)^\sim := \big(\mathrm{Spec}(\overline{\boldsymbol{A}^\dagger}); \mathscr{O}_{\boldsymbol{A}^\dagger}^\dagger\big)$ est un espace topologique annelé.

Soient $\boldsymbol{A}^\dagger, \boldsymbol{B}^\dagger \in \mathbf{Alg}_{\mathrm{fc}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ et $\alpha : \boldsymbol{A}^\dagger \to \boldsymbol{B}^\dagger$ un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres. Pour chaque $f \in \boldsymbol{A}^\dagger$ il existe un et un seul morphisme $\alpha_{[f]} : \boldsymbol{A}^\dagger{}_{[f]} \to \boldsymbol{B}^\dagger{}_{[\alpha(f)]}$, « *la localisation* †*-adique* *de α en f* », rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{A}^\dagger & \xrightarrow{\alpha} & \boldsymbol{B}^\dagger \\ {\scriptstyle \gamma_{[f]}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \gamma_{[\alpha(f)]}} \\ \boldsymbol{A}^\dagger_{[f]} & \xrightarrow{\alpha_{[f]}} & \boldsymbol{B}^\dagger_{[\alpha(f)]} \end{array}$$

On en déduit, comme dans la théorie des schémas classique, un morphisme canonique d'espaces annelés $(\alpha)\tilde{} : (\boldsymbol{B}^\dagger)\tilde{} \to (\boldsymbol{A}^\dagger)\tilde{}$.

La correspondance $(\_)\tilde{} : \mathbf{Alg}_{\mathrm{fc}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I}) \rightsquigarrow \mathbf{Esp\text{-}ann}/_{(\boldsymbol{R}^\dagger)\tilde{}}$, $\boldsymbol{A}^\dagger \rightsquigarrow (\boldsymbol{A}^\dagger)\tilde{}$, $\alpha \rightsquigarrow (\alpha)\tilde{}$, est fonctorielle et contravariante de $\mathbf{Alg}_{\mathrm{fc}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ vers la catégorie $\mathbf{Esp\text{-}ann}/_{(\boldsymbol{R}^\dagger)\tilde{}}$ des espaces annelés au-dessus de $(\boldsymbol{R}^\dagger)\tilde{}$.

2.4.2. Lorsque $\boldsymbol{I}$ est un idéal de type fini de générateurs $\{x_1,\ldots,x_\ell\}$, un polynôme $p \in \boldsymbol{I}^m[X_1,\ldots,X_m]$ avec $m > 0$, s'écrit aussi $p = \sum_{i=1}^{\ell} x_i p_i$ avec $p_i \in \boldsymbol{I}^{m-1}[X_1,\ldots,X_m]$. Il s'ensuit que si $\boldsymbol{A} \in \mathbf{Alg}(\boldsymbol{R})$, l'idéal $\boldsymbol{I}\boldsymbol{A}^\dagger$ est celui des éléments de $\boldsymbol{A}^\dagger$ qui s'expriment sous la forme $\sum_{m>1} p_m(a_1,\ldots,a_\ell)$ avec $p_m \in \boldsymbol{I}^m[X_1,\ldots,X_\ell]$. Le lemme suivant découle aussitôt de cette remarque.

2.4.3. Lemme. *Supposons l'idéal $\boldsymbol{I}$ de type fini et soit $\boldsymbol{A} \in \mathbf{Alg}(\boldsymbol{R})$.*
a) *Le morphisme canonique $\overline{\boldsymbol{A}}_{\overline{f}} \to \overline{\boldsymbol{A}^\dagger}_{[f]}$ est bijectif pour tout $f \in \boldsymbol{A}$.*
b) *Si chaque $x \in \boldsymbol{I}$ est nilpotent dans $\boldsymbol{A}$, l'espace $(\boldsymbol{A})\tilde{}$ est le schéma affine associé à $\boldsymbol{A}$.*
c) *Soit $\mathfrak{P} \in \mathrm{Spec}(\overline{\boldsymbol{A}})$. La réduction modulo $\boldsymbol{I}$ de l'algèbre $\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{A}^\dagger,\mathfrak{P}}$, fibre de $\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{A}^\dagger}$ en $\mathfrak{P}$, est l'anneau local $\overline{\boldsymbol{A}}_{\mathfrak{P}}$. Le morphisme naturel $\nu_{\mathfrak{P}} : \mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{A}^\dagger,\mathfrak{P}} \to \mathscr{O}^\dagger_{\overline{\boldsymbol{A}},\mathfrak{P}}$ est surjectif et c'est un isomorphisme modulo $\boldsymbol{I}$,* i.e. *c'est relèvement.*

2.4.4. Espaces localement annelés. ([EGA$_1$]) Un espace topologique annelé est un couple $(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ formé d'un espace topologique $\boldsymbol{X}$ et d'un faisceau d'anneaux $\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}$ sur $\boldsymbol{X}$. Un morphisme de $(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ vers $(\boldsymbol{Y};\mathscr{O}_{\boldsymbol{Y}})$ est un couple $(\alpha,\alpha^{\#})$ où $\alpha : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ est une application continue et $\alpha^{\#} : \mathscr{O}_{\boldsymbol{Y}} \to \alpha_* \mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}$ est un morphisme de faisceaux d'anneaux. Ces données constituent la « *catégorie d'espaces annelés* », notée **Esp-ann**.

Un espace annelé $(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ est dit « *localement annelé* » lorsque les fibres $\mathscr{O}_{\boldsymbol{X},x}$ de $\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}$ sont des anneaux locaux. La catégorie **Loc-ann** des espaces localement annelés est la sous-catégorie de **Esp-ann** dont les objets sont les espaces localement annelés et les morphismes sont les morphismes d'espaces annelés $(\alpha,\alpha^{\#}) : (\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}) \to (\boldsymbol{Y};\mathscr{O}_{\boldsymbol{Y}})$ tels que les applications induites $\alpha^{\#}_x : \mathscr{O}_{\boldsymbol{Y},\alpha(x)} \to \mathscr{O}_{\boldsymbol{X},x}$ sont des homomorphismes locaux d'anneaux locaux (on appelle ainsi tout homomorphisme entre deux anneaux locaux $\eta : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ tel que l'image inverse par η de l'idéal maximal de $\boldsymbol{B}$ est l'idéal maximal de $\boldsymbol{A}$).

2.4.5. Proposition. *On suppose $\boldsymbol{I}$ de type fini. Soient $\boldsymbol{A}^\dagger, \boldsymbol{B}^\dagger \in \mathbf{Alg}_{\mathrm{fc}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$.*
a) *L'espace annelé $(\boldsymbol{A}^\dagger)\tilde{} = \big(\mathrm{Spec}(\overline{\boldsymbol{A}});\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{A}^\dagger}\big)$* est localement annelé.
b) *Pour tout morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\eta : \boldsymbol{B}^\dagger \to \boldsymbol{A}^\dagger$, le morphisme $(\eta)\tilde{} : (\boldsymbol{A}^\dagger)\tilde{} \to (\boldsymbol{B}^\dagger)\tilde{}$ est un morphisme d'espaces localement annelés. Autrement dit, le foncteur $(\_)\tilde{}$* (cf. 2.4.1) *est à valeurs dans catégorie $\big(\mathbf{Loc\text{-}ann}/_{(\boldsymbol{R}^\dagger)\tilde{}}\big)$, soit*

$$(\_)\tilde{} : \mathbf{Alg}_{\mathrm{fc}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I}) \rightsquigarrow \mathbf{Loc\text{-}ann}/_{(\boldsymbol{R}^\dagger)\tilde{}}\,.$$

Preuve

a) En effet, pour $\mathfrak{P} \in \mathrm{Spec}(\overline{\boldsymbol{A}})$ on a $\mathscr{O}^{\dagger}_{\boldsymbol{A}^\dagger,\mathfrak{P}} = \varinjlim_{\overline{f}} \boldsymbol{A}^{\dagger}{}_{[f]}$, où $\overline{f}$ appartient au système multiplicatif $\overline{\boldsymbol{A}} \setminus \mathfrak{P}$. Pour chaque $\overline{f} \notin \mathfrak{P}$, l'idéal engendré par $\boldsymbol{I}$ dans $\boldsymbol{A}^{\dagger}{}_{[f]}$ est contenu dans le radical de $\boldsymbol{A}^{\dagger}{}_{[f]}$ (2.3.1) et comme cette propriété est préservée par passage à la limite inductive (2.3.2), l'algèbre $\mathscr{O}^{\dagger}_{\boldsymbol{A}^\dagger,\mathfrak{P}}$ la vérifie aussi. L'anneau $\mathscr{O}^{\dagger}_{\boldsymbol{A}^\dagger,\mathfrak{P}}$ est alors local si et seulement si sa réduction modulo $\boldsymbol{I}$ l'est, ce qui est bien le cas (2.4.3-c).

b) Pour $\mathfrak{P} \in \mathrm{Spec}(\overline{\boldsymbol{A}})$ considérons le diagramme d'anneaux locaux :

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{O}^{\dagger}_{\boldsymbol{B}^\dagger,\eta^{-1}\mathfrak{P}} & \xrightarrow{\eta^{\#}_{\mathfrak{P}}} & \mathscr{O}^{\dagger}_{\boldsymbol{A}^\dagger,\mathfrak{P}} \\ {\scriptstyle \nu_{\eta^{-1}\mathfrak{P}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \nu_{\mathfrak{P}}} \\ \overline{\boldsymbol{B}}_{\eta^{-1}\mathfrak{P}} & \xrightarrow{\overline{\eta}^{\#}_{\mathfrak{P}}} & \overline{\boldsymbol{A}}_{\mathfrak{P}} \end{array}$$

où les morphismes verticaux sont ceux du lemme 2.4.3-c ; ils sons donc *locaux*, de même aussi, mais pour des raisons évidentes, que le morphisme $\overline{\eta}^{\#}_{\mathfrak{P}}$. On conclut alors sans difficulté que $\eta^{\#}_{\mathfrak{P}}$ est lui aussi local. ■

2.4.6. Notation et remarque. Pour tout espace annelé $(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ au-dessus de $(\boldsymbol{R})^{\tilde{}}$ on notera $\overline{\mathscr{O}}_{\boldsymbol{X}}$ le faisceau d'algèbres engendré par le préfaisceau $\boldsymbol{U} \rightsquigarrow \Gamma(\boldsymbol{U};\mathscr{O}^{\dagger}_{\boldsymbol{A}^\dagger})/\boldsymbol{I}\cdot\Gamma(\boldsymbol{U};\mathscr{O}^{\dagger}_{\boldsymbol{A}^\dagger})$. Notons $\nu : \mathscr{O}_{\boldsymbol{X}} \twoheadrightarrow \overline{\mathscr{O}}_{\boldsymbol{X}}$ la surjection canonique.

Pour $\boldsymbol{A}^\dagger \in \mathbf{Alg}_{\mathrm{fc}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ de réduction $\overline{\boldsymbol{A}} := \boldsymbol{A}^\dagger/\boldsymbol{I}\boldsymbol{A}^\dagger$, soit $(\alpha,\alpha^{\#}) : (\overline{\boldsymbol{A}})^{\tilde{}} \to (\boldsymbol{A}^\dagger)^{\tilde{}}$ le morphisme d'espaces annelés associé à la surjection canonique $\boldsymbol{A}^\dagger \to \overline{\boldsymbol{A}}$. On a $\alpha = \mathrm{id}_{\mathrm{Spec}(\overline{\boldsymbol{A}})}$ et $\alpha^{\#} : \mathscr{O}^{\dagger}_{\boldsymbol{A}^\dagger} \to \mathscr{O}^{\dagger}_{\overline{\boldsymbol{A}}}$ se factorise à travers $\nu : \mathscr{O}^{\dagger}_{\boldsymbol{A}^\dagger} \twoheadrightarrow \overline{\mathscr{O}}_{\boldsymbol{A}^\dagger}$ en un isomorphisme de $\overline{\mathscr{O}}_{\boldsymbol{A}^\dagger}$ sur $\mathscr{O}^{\dagger}_{\overline{\boldsymbol{A}}}$.

2.4.7. Schémas †-adiques affines. On appelle « *schéma* †*-adique affine* » tout espace annelé isomorphe à un espace de la forme $(\boldsymbol{A}^\dagger)^{\tilde{}}$. La sous-catégorie pleine de $\mathbf{Loc\text{-}ann}/_{(\boldsymbol{R}^\dagger)^{\tilde{}}}$ dont les objets sont des schémas †-adiques affines est la « *catégorie des schémas* †*-adiques affines* » ; elle sera notée $\mathbf{Aff}^\dagger(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$.

Lorsque $\boldsymbol{A}^\dagger$ est f.c.t.f. le schéma †-adique affine $(\boldsymbol{A}^\dagger)^{\tilde{}}$ est dit « *de type fini* ». La sous-catégorie pleine des objets de type fini de $\mathbf{Aff}^\dagger(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ est la « *catégorie des schémas* †*-adiques affines de type fini* » ; elle sera notée $\mathbf{Aff}^\dagger_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$

2.4.8. Le cas nœthérien. Ce qui précède est vrai pour tout anneau commutatif $\boldsymbol{R}$ et tout idéal $\boldsymbol{I}$ de type fini, mais sans hypothèse de finitude supplémentaire il ne semble pas possible d'aller très loin. L'hypothèse de nœthérianité sur $\boldsymbol{R}$ et de finitude sur les algèbres intervient de manière essentielle dans la démonstration de théorèmes importants, très particulièrement celui de Meredith que nous utiliserons souvent dans la suite :

2.4.9. Théorème [M]. *Soient $\boldsymbol{R}$ nœthérien et $\boldsymbol{A}^\dagger \in \mathbf{Alg}_{\mathrm{fctf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$. Alors, pour tout $f \in \boldsymbol{A}^\dagger$ le morphisme naturel $\boldsymbol{A}^{\dagger}{}_{[f]} \to \Gamma\big(D(f);\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}\big)$ est* ***bijectif****.*

2.4.10. Voici maintenant le principal résultat de cette section :

Théorème. *On suppose $\boldsymbol{R}$ nœthérien.*

a) *Le foncteur $(\_)^{\tilde{}} : \mathbf{Alg}_{\mathrm{fctf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I}) \rightsquigarrow \mathbf{Aff}^\dagger_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ est une équivalence de catégories.*

b) *La catégorie $\mathbf{Aff}^\dagger_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ possède des produits fibrés.*

Preuve

a) Notons $\mathit{\Gamma}:\mathbf{Esp\text{-}ann}/_{(\boldsymbol{R}^\dagger)^\sim}\rightsquigarrow \mathbf{Alg}(\boldsymbol{R})$ le foncteur qui fait correspondre à un espace annelé $(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ l'algèbre $\mathit{\Gamma}(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ et a un morphisme $(\alpha,\alpha^\#):(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})\to(\boldsymbol{Y};\mathscr{O}_{\boldsymbol{Y}})$ le morphisme $\mathit{\Gamma}(\boldsymbol{Y},\alpha^\#):\mathit{\Gamma}(\boldsymbol{Y};\mathscr{O}_{\boldsymbol{Y}})\to\mathit{\Gamma}(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$. Le morphisme naturel de foncteurs $(\_)\to\mathit{\Gamma}\circ(\_)^\sim$ est alors l'identité sur $\mathbf{Alg}_{\mathrm{fctf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ (2.4.9, [M]) ce qui prouve la *fidélité* du foncteur $(\_)^\sim$.

Soit maintenant $(\alpha,\alpha^\#):(\boldsymbol{A}^\dagger)^\sim\to(\boldsymbol{B}^\dagger)^\sim$ un morphisme d'espaces *localement* annelés au-dessus de $(\boldsymbol{R}^\dagger)^\sim$. Le morphisme $\alpha^\#:\mathscr{O}_{\boldsymbol{Y}}\to\alpha_*\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}$ est donc un morphismes de faisceaux de $\boldsymbol{R}$-algèbres ce qui nous permet les raisonnements par réduction modulo $\boldsymbol{I}$ suivants :

R-i) Pour chaque $\mathfrak{P}\in\operatorname{Spec}(\overline{\boldsymbol{A}})$, on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{B}^\dagger,\alpha(\mathfrak{P})} & \xrightarrow{\alpha^\#_{\mathfrak{P}}} & \mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{A}^\dagger,\mathfrak{P}} \\ {\scriptstyle \nu(\alpha(\mathfrak{P}))}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \nu(\mathfrak{P})} \\ \mathscr{O}^\dagger_{\overline{\boldsymbol{B}},\alpha(\mathfrak{P})} & \xrightarrow{\overline{\alpha}^\#_{\mathfrak{P}}} & \mathscr{O}^\dagger_{\overline{\boldsymbol{A}},\mathfrak{P}} \end{array}$$

où $\nu(*)$ est local et surjectif (2.4.3-c) et $\alpha^\#_{\mathfrak{P}}$ est local par hypothèse. On en déduit que $\overline{\alpha}^\#_{\mathfrak{P}}$ est local.

R-ii) Le morphisme $\alpha^\#$ induit un morphisme de faisceaux $\overline{\alpha}^\#:\overline{\mathscr{O}}_{\boldsymbol{Y}}\to\alpha_*\overline{\mathscr{O}}_{\boldsymbol{X}}$ (2.4.6) et donc un morphisme d'espaces annelés $(\alpha,\overline{\alpha}^\#):(\overline{\boldsymbol{A}})^\sim\to(\overline{\boldsymbol{B}})^\sim$ qui est, d'après (R-i), un morphisme d'espaces localement annelés entre deux schémas affines (2.4.3-b). On a donc $(\alpha,\overline{\alpha}^\#)=(\overline{\eta})^\sim$ où $\overline{\eta}:=\mathit{\Gamma}(\operatorname{Spec}(\overline{\boldsymbol{B}});\overline{\alpha}^\#):\overline{\boldsymbol{B}}\to\overline{\boldsymbol{A}}$ n'est autre que la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ de l'homomorphisme $\eta:=\mathit{\Gamma}(\operatorname{Spec}(\overline{\boldsymbol{B}});\alpha^\#):\boldsymbol{B}^\dagger\to\boldsymbol{A}^\dagger$. On en déduit que :

$$\alpha=\eta^{-1},\quad \text{et alors}\quad \alpha^{-1}\big(D(f)\big)=D\big(\eta(f)\big),\ \text{pour tout } f\in\boldsymbol{B}^\dagger. \tag{$\diamond$}$$

Cela étant, le morphisme $\alpha^\#:\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{B}^\dagger}\to\alpha_*\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{A}^\dagger}$ donne, pour chaque $f\in\boldsymbol{B}^\dagger$, le diagramme commutatif suivant où les flèches verticales sont les applications canoniques.

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{B}^\dagger \arrow[r, phantom, "\underset{\mathrm{M}}{=}"] \arrow[d, "\gamma_{[f]}"'] \arrow[rrrrrr, bend left, "\eta=\mathit{\Gamma}(D(1);\alpha^\#)"] & \mathit{\Gamma}\big(D(1);\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{B}^\dagger}\big) \arrow[r, "\mathit{\Gamma}(D(1);\alpha^\#)"] \arrow[d] & \mathit{\Gamma}\big(D(1);\alpha_*\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{A}^\dagger}\big) \arrow[r, phantom, "\underset{\diamond}{=}"] \arrow[d] & \mathit{\Gamma}\big(D(\eta(1));\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{A}^\dagger}\big) \arrow[r, phantom, "\underset{\mathrm{M}}{=}"] \arrow[d] & \boldsymbol{A}^\dagger \arrow[d, "\gamma_{[\eta(f)]}"] \\
\boldsymbol{B}^\dagger{}_{[f]} \arrow[r, phantom, "\underset{\mathrm{M}}{=}"] & \mathit{\Gamma}\big(D(f);\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{B}^\dagger}\big) \arrow[r, "\mathit{\Gamma}(D(f);\alpha^\#)"] & \mathit{\Gamma}\big(D(f);\alpha_*\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{A}^\dagger}\big) \arrow[r, phantom, "\underset{\diamond}{=}"] & \mathit{\Gamma}\big(D(\eta(f));\mathscr{O}^\dagger_{\boldsymbol{A}^\dagger}\big) \arrow[r, phantom, "\underset{\mathrm{M}}{=}"] & \boldsymbol{A}^\dagger{}_{[\eta(f)]}
\end{tikzcd} \tag{$\mathscr{D}$}$$

les égalités $(=_{\mathrm{M}})$ résultent d'appliquer 2.4.9 et $(=_\diamond)$ de $(\diamond)$. Or, la localisation $\dagger$-adique de η en f, *i.e.* l'application $\eta_{[f]}:\boldsymbol{B}^\dagger{}_{[f]}\to\boldsymbol{A}^\dagger{}_{[\eta(f)]}$ (*cf.* 2.4.1) est bien **l'unique** morphisme rendant $(\mathscr{D})$ commutatif, par conséquent $\mathit{\Gamma}(D(f);\alpha^\#)=\eta_{[f]}$ et on a bien :

$$(\alpha,\alpha^\#)=\big(\mathit{\Gamma}(\operatorname{Spec}(\overline{\boldsymbol{B}});\alpha^\#)\big)^\sim.$$

Nous avons ainsi prouvé que le foncteur $(\_)^\sim:\mathbf{Alg}_{\mathrm{fctf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})\rightsquigarrow\mathbf{Loc\text{-}ann}/_{(\boldsymbol{R}^\dagger)^\sim}$ est plei-

nement fidèle, c'est donc une équivalence sur son image essentielle, *i.e.* sur $\mathbf{Aff}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$.
b) Conséquence immédiate de (a) et de 2.2.1-(b). ■

Convention. Compte tenu de l'importance des théorèmes de cette section, l'anneau $\boldsymbol{R}$ sera dorénavant supposé **nœthérien**.

2.5 Catégorie des schémas †-adiques

2.5.1. Schémas †-adiques. La « *catégorie des schémas* †*-adiques* (*localement de type fini*) », notée $\mathbf{Sch}^{\dagger}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ (resp. $\mathbf{Sch}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$), est la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Loc\text{-}ann}_{/(\boldsymbol{R})}$- des espaces annelés tels que chaque point admet un voisinage ouvert isomorphe à un objet de $\mathbf{Aff}^{\dagger}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ ($\mathbf{Aff}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$).

2.5.2. Réduction d'un schéma †-adique. Pour tout schéma †-adique localement de type fini $(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$, l'espace annelé $(\boldsymbol{X};\overline{\mathscr{O}}_{\boldsymbol{X}})$ est un schéma localement de type fini (2.4.3-b) sur $\mathrm{Spec}(\overline{\boldsymbol{R}})$, il sera appelé « *la réduction (modulo* $\boldsymbol{I}$ *) de* $(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ »

2.5.3. Terminologie. Un schéma †-adique $(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ sera dit « *de réduction affine (de type fini), séparée, …* » s'il en est ainsi du schéma $(\boldsymbol{X};\overline{\mathscr{O}}_{\boldsymbol{X}})$.

§ 3. Produits fibrés de schémas †-adiques

On rappelle que l'anneau $\boldsymbol{R}$ est désormais supposé **nœthérien**.

Le principal résultat de cette section est le théorème 3.2.4 qui établit l'existence des produits fibrés dans la catégorie des schémas †-adiques localement de type fini. Dans la preuve, le critère de représentabilité de foncteurs 1.9.1 ([1]) nous mène à monter que les produits fibrés de la catégorie $\mathbf{Aff}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ sont aussi des produits fibrés de $\mathbf{Sch}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$. Ceci est établi dans 3.2.3-b moyennant un nouveau critère d'affinité de schémas †-adiques de réduction affine qui, à la différence des critères précédemment connus, est indépendant des hypothèses de lissité.

3.1 Un complément sur l'affinité des schémas †-adiques de réduction affine

Cette section reprend l'étude commencée dans [Ar$_3$] à propos de l'affinité des schémas †-adiques de réduction affine.

3.1.1. Proposition. *Soit* $(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})\in\mathbf{Sch}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$.
a) *L'algèbre* $\Gamma(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ *est séparée.*
b) *Si* $\boldsymbol{X}$ *est quasi-compact, l'algèbre* $\Gamma(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ *est aussi faiblement complète.*

[1] [EGA$_1$], chap 0, prop. §4.5.4.

Preuve

a) Soit $\mathscr{U}=\{U_i\}_{i\in\mathfrak{A}}$ un recouvrement de X avec $U_i\in\mathbf{Aff}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(R;I)$. On a la suite exacte :

$$\mathbf{0}\to\Gamma(X;\mathscr{O}_X)\xrightarrow{\epsilon(\mathscr{U})}\prod\nolimits_{i\in\mathfrak{A}}\Gamma(U_i;\mathscr{O}_X)\xrightarrow{\delta_0(\mathscr{U})}\prod\nolimits_{i,j\in\mathfrak{A}}\Gamma(U_{i,j};\mathscr{O}_X)\qquad(\diamond)$$

avec $\Gamma(U_i;\mathscr{O}_X)\in\mathbf{Alg}_{\mathrm{fctf}}(R;I)$. L'algèbre $\Gamma(X;\mathscr{O}_X)$ se réalise ici comme sous-algèbre d'un produit d'algèbres séparées ; elle est donc séparée.

b) Lorsque X est quasi-compact, le recouvrement $\mathscr{U}$ dans $(\diamond)$ peut être choisi *fini* auquel cas l'application $\delta_0(\mathscr{U})$ est continue entre un espace faiblement complet, car somme finie d'espaces f.c., et un espace séparé (d'après (a)), son noyau est alors faiblement complet. ∎

3.1.2. J'ignore si dans (b) l'algèbre $\Gamma(X;\mathscr{O}_X)$ est faiblement complète **de type fini**.

3.1.3. Un critère d'affinité. On généralise maintenant la proposition 3.2.16 de [Ar$_2$] en l'affranchissant de toute considération de lissité, cela donne :

Proposition. *Soient* $(X;\mathscr{O}_X)\in\mathbf{Aff}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(R;I)$ *et* $U\subseteq X$ *un ouvert de réduction affine. L'espace annelé induit* $(U;\mathscr{O}_X|_U)$ *est un schéma* †*-adique affine de type fini.*

Pour le prouver on utilisera le théorème 2.5.5 de [Ar$_3$], corollaire du principal résultat de ce papier, dont on rappelle l'énoncé sans démonstration :

3.1.4. Théorème [Ar$_3$]. *Pour tout* $(X;\mathscr{O}_X)\in\mathbf{Sch}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(R;I)$ *de réduction* ***affine****, le morphisme naturel* $\Gamma(X;\mathscr{O}_X)\to\Gamma(X;\overline{\mathscr{O}}_X)$ *est* ***surjectif****.*

Démonstration du critère 3.1.3. Dans la suite, si A est un anneau et si B est une A-algèbre, on notera de la même manière un élément $a\in A$ et l'élément $a\cdot\mathbf{1}_B\in B$.

Posons $(X;\mathscr{O}_X)=(A^{\dagger})^{\sim}$.

Soit $\mathscr{U}=\{D(f_1),\dots,D(f_\ell)\}$ un recouvrement de U par des ouverts principaux de X et considérons les premiers termes des complexes de Čech relatifs à $\mathscr{U}$ appliqués au morphisme naturel des faisceaux $\mathscr{O}_X\to\overline{\mathscr{O}}_X$. On a le diagramme commutatif de $A^{\dagger}$-modules :

$$\begin{array}{ccccccc}\mathbf{0}\to\Gamma(U;\mathscr{O}_X)&\xrightarrow{\epsilon(\mathscr{O})}&\prod_{1\leqslant i\leqslant\ell}A^{\dagger}{}_{[f_i]}&\xrightarrow{\delta_0(\mathscr{O})}&\prod_{1\leqslant i<j\leqslant\ell}A^{\dagger}{}_{[f_if_j]}\\ \nu(U)\big\downarrow&&\big\downarrow\Pi\nu_{f_i}&&\big\downarrow\Pi\nu_{f_if_j}\\ \mathbf{0}\to\Gamma(U;\overline{\mathscr{O}}_X)&\xrightarrow{\epsilon(\overline{\mathscr{O}})}&\prod_{1\leqslant i\leqslant\ell}\overline{A}_{f_i}&\xrightarrow{\delta_0(\overline{\mathscr{O}})}&\prod_{1\leqslant i<j\leqslant\ell}\overline{A}_{f_if_j}\end{array}\qquad(\mathscr{C})$$

où $\overline{A}_{f_i}:=\overline{A^{\dagger}{}_{[f_i]}}=\overline{A}^{\dagger}{}_{f_i}$, où les morphismes ν_{f_i} et $\nu_{f_if_j}$ sont bijectifs modulo I et où les lignes sont exactes à gauche.

Grâce à la surjectivité de $\nu(U):\Gamma(U;\mathscr{O}_X)\twoheadrightarrow\Gamma(U;\overline{\mathscr{O}}_X)$ (3.1.4) on peux fixer des éléments $a_i\in\Gamma(U;\mathscr{O}_X)$ tels que $\xi:=\sum_i a_if_i$ est inversible dans $\Gamma(U;\overline{\mathscr{O}}_X)$. Montrons que ξ est aussi inversible dans $\Gamma(U;\mathscr{O}_X)$. En effet, comme ξ est inversible dans $\Gamma(U;\overline{\mathscr{O}}_X)$, il l'est aussi dans $\overline{A}_{f_i}$ et $\overline{A}_{f_if_j}$, mais alors aussi dans $A^{\dagger}{}_{[f_i]}$ et $A^{\dagger}{}_{[f_{ij}]}$ puisque les morphismes ν_{f_i} et $\nu_{f_if_j}$ sont des relèvements ([M] th. 2.8, p. 5, et [MW] th. 1.6). Notons ξ_*^{-1}

l'inverse de ξ dans $\boldsymbol{A}^{\dagger}_{*}$. La famille $\{\xi^{-1}_{[f_i]}\}$ vérifie automatiquement les conditions de recollement et définit par conséquent un élément $\xi^{-1} \in \Gamma(\boldsymbol{U};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$, inverse multiplicatif de ξ dans $\Gamma(\boldsymbol{U};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$.

La $\boldsymbol{R}$-algèbre $\Gamma(\boldsymbol{U};\overline{\mathscr{O}}_{\boldsymbol{X}})$ est de type fini d'après un résultat classique de géométrie algébrique. Fixons une $\boldsymbol{A}^{\dagger}$-sous-algèbre $\boldsymbol{C}^{\dagger} \subseteq \Gamma(\boldsymbol{U};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})^{\dagger} = \Gamma(\boldsymbol{U};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ (*cf.* 3.1.1) vérifiant :

$$\nu(\boldsymbol{U})(\boldsymbol{C}^{\dagger}) = \Gamma(\boldsymbol{U};\overline{\mathscr{O}}_{\boldsymbol{X}}), \quad \boldsymbol{C}^{\dagger} \in \mathbf{Alg}_{\mathrm{fctf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I}), \quad \{a_1,\dots,a_\ell,\xi^{-1}\} \subseteq \boldsymbol{C}^{\dagger}.$$

On a alors $(f_1,\dots,f_\ell) = \boldsymbol{C}^{\dagger}$ et les premiers termes du complexe de Čech de $(\boldsymbol{C}^{\dagger})^{\sim}$ relatif au recouvrement principal de $\mathrm{Spec}(\overline{\boldsymbol{C}^{\dagger}})$ définit par les f_i :

$$\mathbf{0} \to \boldsymbol{C}^{\dagger} \xrightarrow{\epsilon(\boldsymbol{C})} \prod_{1\leqslant i\leqslant \ell} \boldsymbol{C}^{\dagger}{}_{[f_i]} \xrightarrow{\delta_0(\boldsymbol{C})} \prod_{1\leqslant i<j\leqslant \ell} \boldsymbol{C}^{\dagger}{}_{[f_i f_j]} \ ,$$

suite exacte à gauche de $\boldsymbol{A}^{\dagger}$-modules ([M] th. 2.8, p. 5).

Soit $g \in \boldsymbol{A}^{\dagger}$. Notons $\rho_{[g]} : \boldsymbol{C}^{\dagger}_{[g]} \to \boldsymbol{A}^{\dagger}{}_{[g]}$ le morphisme induit par la composée de l'inclusion $\boldsymbol{C}^{\dagger} \subseteq \Gamma(\boldsymbol{U};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ suivie de la restriction $\Gamma(\boldsymbol{U};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}) \to \Gamma(D(g);\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}) = \boldsymbol{A}^{\dagger}{}_{[g]}$ Notons $\sigma_{[g]} : \boldsymbol{A}^{\dagger}{}_{[g]} \to \boldsymbol{C}^{\dagger}{}_{[g]}$ le morphisme induit par le morphisme structural $\sigma : \boldsymbol{A}^{\dagger} \to \boldsymbol{C}^{\dagger}$. On a $\rho_{[g]} \circ \sigma_{[g]} = \mathrm{id}$, autrement dit $\sigma_{[g]}$ est une section de $\rho_{[g]}$:

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{A}^{\dagger}{}_{[g]} \arrow[r, hook, "\sigma_{[g]}"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}"'] & \boldsymbol{C}^{\dagger}{}_{[g]} \arrow[r, two heads, "\rho_{[g]}"] & \boldsymbol{A}^{\dagger}{}_{[g]}
\end{tikzcd}$$

On obtient ainsi un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{0} \arrow[r] & \Gamma(\boldsymbol{U};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}) \arrow[r, "\epsilon(\boldsymbol{U})"] & \prod_{1\leqslant i\leqslant \ell} \boldsymbol{A}^{\dagger}{}_{[f_i]} \arrow[r, "\delta_0(\boldsymbol{U})"] & \prod_{1\leqslant i<j\leqslant \ell} \boldsymbol{A}^{\dagger}{}_{[f_i f_j]} \\
\mathbf{0} \arrow[r] & \boldsymbol{C}^{\dagger} \arrow[u, "\subseteq"'] \arrow[r, "\epsilon(\boldsymbol{C})"] & \prod_{1\leqslant i\leqslant \ell} \boldsymbol{C}^{\dagger}{}_{[f_i]} \arrow[u, two heads, "\Pi\rho_{[f_i]}"'] \arrow[r, "\delta_0(\boldsymbol{C})"] & \prod_{1\leqslant i<j\leqslant \ell} \boldsymbol{C}^{\dagger}{}_{[f_i f_j]} \arrow[u, two heads, "\Pi\rho_{[f_i f_j]}"'] \\
 & & \prod_{1\leqslant i\leqslant \ell} \boldsymbol{A}^{\dagger}{}_{[f_i]} \arrow[u, "\Pi\sigma_{[f_i]}"'] \arrow[r, "\delta_0(\boldsymbol{U})"] & \prod_{1\leqslant i<j\leqslant \ell} \boldsymbol{A}^{\dagger}{}_{[f_i f_j]} \arrow[u, "\Pi\sigma_{[f_i f_j]}"']
\end{tikzcd} \qquad (\mathscr{E})$$

dont on déduit l'égalité $\boldsymbol{C}^{\dagger} = \Gamma(\boldsymbol{U};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ et

$$\boxed{\boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{U};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}) \ \textbf{est f.c.t.f.}}$$

Le diagramme $(\mathscr{E})$ donne, par restriction de sa dernière colonne, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{0} \arrow[r] & \Gamma(\boldsymbol{U};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}) \arrow[r, "\epsilon(\boldsymbol{U})"] & \prod_{1\leqslant i\leqslant \ell} \boldsymbol{A}^{\dagger}{}_{[f_i]} \arrow[r, two heads, "\delta_0(\boldsymbol{U})"] & \mathrm{im}(\delta_0(\boldsymbol{U})) \arrow[r] & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} \arrow[r] & \boldsymbol{C}^{\dagger} \arrow[u, equal] \arrow[r, "\epsilon(\boldsymbol{C})"] & \prod_{1\leqslant i\leqslant \ell} \boldsymbol{C}^{\dagger}{}_{[f_i]} \arrow[u, two heads, "\Pi\rho_{[f_i]}"'] \arrow[r, two heads, "\delta_0(\boldsymbol{C})"] & \mathrm{im}(\delta_0(\boldsymbol{C})) \arrow[u, two heads, "\Pi\rho_{[f_i f_j]}"'] \arrow[r] & \mathbf{0} \\
 & & \prod_{1\leqslant i\leqslant \ell} \boldsymbol{A}^{\dagger}{}_{[f_i]} \arrow[u, "\Pi\sigma_{[f_i]}"'] \arrow[r, two heads, "\delta_0(\boldsymbol{U})"] & \mathrm{im}(\delta_0(\boldsymbol{U})) \arrow[u, "\Pi\sigma_{[f_i f_j]}"'] \arrow[r] & \mathbf{0}
\end{tikzcd} \qquad (\mathscr{E}')$$

où les deux premières lignes sont exactes.

Appliquons le foncteur $\mathrm{Tor}_1^{\boldsymbol{R}}(\overline{\boldsymbol{R}},\_)$ à $(\mathscr{E}')$. Alors :

- $\mathrm{Tor}_1^{\boldsymbol{R}}(\overline{\boldsymbol{R}},\rho_{[*]})$ est surjective, car $\mathrm{Tor}_1^{\boldsymbol{R}}(\overline{\boldsymbol{R}},\rho_{[*]})\circ\mathrm{Tor}_1^{\boldsymbol{R}}(\overline{\boldsymbol{R}},\sigma_{[*]})=\mathrm{Tor}_1^{\boldsymbol{R}}(\overline{\boldsymbol{R}},\mathrm{id})=\mathrm{id}$.
- $\mathrm{Tor}_1^{\boldsymbol{R}}(\overline{\boldsymbol{R}},\delta_0(\boldsymbol{C}))$ est surjective, car $\overline{\epsilon(\boldsymbol{C})}:\overline{\boldsymbol{C}^\dagger}\to\prod_i\overline{\boldsymbol{C}_{f_i}}$ est injective.
- $\mathrm{Tor}_1^{\boldsymbol{R}}(\overline{\boldsymbol{R}},\delta_0(\boldsymbol{U}))$ est surjective, car $\mathrm{Tor}_1^{\boldsymbol{R}}(\overline{\boldsymbol{R}},\Pi\rho_{f_if_j})\circ\mathrm{Tor}_1^{\boldsymbol{R}}(\overline{\boldsymbol{R}},\delta_0(\boldsymbol{C}))$ l'est.

On en déduit que l'application $\overline{\epsilon(\boldsymbol{U})}:\overline{\Gamma(\boldsymbol{U};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})}\to\prod_i\overline{\boldsymbol{A}}_{f_i}$ est *injective*, et comme elle se factorise à travers $\epsilon(\overline{\mathscr{O}}):\Gamma(\boldsymbol{U};\overline{\mathscr{O}}_{\boldsymbol{X}})\to\prod_i\overline{\boldsymbol{A}}_i$ (*cf.* $(\mathscr{C})$), l'égalité $\overline{\Gamma(\boldsymbol{U};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})}=\Gamma(\boldsymbol{U};\overline{\mathscr{O}}_{\boldsymbol{X}})$ résulte ; autrement dit,

$$\boxed{\boldsymbol{\Gamma(U;\mathscr{O}_X)}\ \textbf{est un relèvement f.c.t.f. de}\ \boldsymbol{\Gamma(U;\overline{\mathscr{O}}_X)}}$$

Il s'ensuit que les morphismes $\sigma_{[*]}$ sont tous **bijectifs** et alors $(\boldsymbol{U};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}|_{\boldsymbol{U}})\simeq(\Gamma(\boldsymbol{U};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}))^{\sim}$. ∎

3.2 Isomorphismes de faisceaux sur $\mathbf{Sch}_{\mathbf{tf}}^{\dagger}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$

3.2.1. Faisceaux sur $\mathbf{Sch}_{\mathbf{tf}}^{\dagger}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$. Un foncteur contravariant de $\mathbf{Sch}_{\mathrm{tf}}^{\dagger}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ vers la catégorie **Ens** est dit «*faisceau*» si pour tout schéma †-adique $\boldsymbol{X}$ et tout recouvrement ouvert $\{\iota_\alpha:\boldsymbol{U}_\alpha\subseteq\boldsymbol{X}\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$, la suite

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})\xrightarrow{\epsilon(\boldsymbol{F})}\prod_{\alpha\in\mathfrak{A}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}_\alpha)\underset{\delta_2(\boldsymbol{F})}{\overset{\delta_1(\boldsymbol{F})}{\rightrightarrows}}\prod_{\alpha,\beta\in\mathfrak{A}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}_{\alpha,\beta})$$

avec

$$\begin{cases}\epsilon(\boldsymbol{F})(z)(\alpha)=\boldsymbol{F}(\iota_\alpha)(z)\\ \delta_1(\boldsymbol{F})(\omega)(\alpha,\beta)=\boldsymbol{F}(\iota^{\alpha}_{\alpha,\beta})(\omega(\alpha))\\ \delta_2(\boldsymbol{F})(\omega)(\alpha,\beta)=\boldsymbol{F}(\iota^{\beta}_{\alpha,\beta})(\omega(\beta))\end{cases}$$

où $\iota^{\alpha}_{\alpha,\beta}$ désigne l'inclusion $\boldsymbol{U}_{\alpha,\beta}\subseteq\boldsymbol{U}_\alpha$, est «*exacte*», *i.e.* $\epsilon(\boldsymbol{F})$ est une bijection entre $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$ et l'ensemble $\{\delta_1(\boldsymbol{F})=\delta_2(\boldsymbol{F})\}\subseteq\prod_{\alpha\in\mathfrak{A}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}_\alpha)$.

3.2.2. Proposition. *Un morphisme* $\mu:\boldsymbol{F}\to\boldsymbol{G}$ *de faisceaux d'ensembles sur* $\mathbf{Sch}_{\mathrm{tf}}^{\dagger}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ *est un isomorphisme si et seulement si sa restriction à la sous-catégorie* $\mathbf{Aff}_{\mathrm{tf}}^{\dagger}$ *est un isomorphisme.*

Preuve. Soit $\boldsymbol{X}\in\mathbf{Sch}_{\mathrm{tf}}^{\dagger}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ et fixons un recouvrement $\{\boldsymbol{U}_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ avec $\boldsymbol{U}_\alpha\in\mathbf{Aff}_{\mathrm{tf}}^{\dagger}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$. On a le morphisme des suites exactes :

$$\begin{array}{ccccc}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X}) & \xrightarrow{\epsilon(\boldsymbol{F})} & \prod_{\alpha\in\mathfrak{A}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}_\alpha) & \underset{\delta_2(\boldsymbol{F})}{\overset{\delta_1(\boldsymbol{F})}{\rightrightarrows}} & \prod_{\alpha,\beta\in\mathfrak{A}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}_{\alpha,\beta})\\ {\scriptstyle\mu(\boldsymbol{X})}\downarrow & & {\scriptstyle\mu(\boldsymbol{U}_\alpha)}\downarrow & & {\scriptstyle\mu(\boldsymbol{U}_{\alpha,\beta})}\downarrow\\ \boldsymbol{G}(\boldsymbol{X}) & \xrightarrow{\epsilon(\boldsymbol{G})} & \prod_{\alpha\in\mathfrak{A}}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{U}_\alpha) & \underset{\delta_2(\boldsymbol{G})}{\overset{\delta_1(\boldsymbol{G})}{\rightrightarrows}} & \prod_{\alpha,\beta\in\mathfrak{A}}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{U}_{\alpha,\beta})\end{array}$$

et le lemme résultera de montrer que les applications $\mu(\boldsymbol{U}_{\alpha,\beta})$ sont bijectives. C'est le cas lorsque $(\boldsymbol{X},\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ est de réduction séparée puisqu'alors $\boldsymbol{U}_{\alpha,\beta}$ est un ouvert de réduction *affine* du schéma †-adique affine $\boldsymbol{U}_\alpha$ et donc $\boldsymbol{U}_{\alpha,\beta}\in\mathbf{Aff}_{\mathrm{tf}}^{\dagger}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ d'après 3.1.3. Et ce sera alors aussi le cas dans la situation générale car la réduction de $\boldsymbol{U}_{\alpha,\beta}$ est toujours séparée étant sous-schéma (ouvert) d'un schéma affine (donc séparé). ∎

3.2.3. Théorème
a) *Pour tous* $\boldsymbol{X} \in \mathbf{Sch}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ *et* $\boldsymbol{Y} \in \mathbf{Aff}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ *l'application naturelle*

$$\begin{aligned} \mathrm{Mor}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}) &\xrightarrow{\gamma(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})} \mathrm{Homom}_{\boldsymbol{R}}\big(\Gamma(\boldsymbol{Y};\mathscr{O}_{\boldsymbol{Y}}),\Gamma(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})\big)\\ (f,f^{\#}) &\longmapsto \Gamma(\boldsymbol{Y};f^{\#}:\mathscr{O}_{\boldsymbol{Y}}\to f_*\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}) \end{aligned}$$

est un isomorphisme.
b) *Les produits fibrés de* $\mathbf{Aff}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ *sont des produits fibrés de* $\mathbf{Sch}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$.

Preuve
a) Pour $\boldsymbol{Y} = (\boldsymbol{A}^{\dagger})^{\tilde{}}$ fixé, le foncteur $(\_) \rightsquigarrow \mathrm{Homom}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}^{\dagger},\Gamma(\_))$ est un faisceau d'ensembles sur $\mathbf{Sch}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$. En effet, soit $\boldsymbol{X} = \cup_{\alpha}\boldsymbol{U}_{\alpha}$ un recouvrement ouvert de $\boldsymbol{X} \in \mathbf{Sch}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$. On a la suite exacte de d'ensembles

$$\mathbf{0} \to \Gamma(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}) \xrightarrow{\epsilon(\Gamma)} \textstyle\prod_{\alpha}\Gamma(\boldsymbol{U}_{\alpha};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}) \underset{\delta_2(\Gamma)}{\overset{\delta_1(\Gamma)}{\rightrightarrows}} \prod_{\alpha,\beta}\Gamma(\boldsymbol{U}_{\alpha,\beta};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$$

L'application $\mathrm{Homom}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}^{\dagger};\epsilon(\Gamma))$ est injective puisque $\boldsymbol{U}_{\alpha}$ recouvre $\boldsymbol{X}$. Ensuite, on a

$$\mathrm{Homom}_{\boldsymbol{R}}\big(\boldsymbol{A}^{\dagger};\textstyle\prod_{\alpha}\Gamma(\boldsymbol{U}_{\alpha};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})\big) = \prod_{\alpha}\mathrm{Homom}_{\boldsymbol{R}}\big(\boldsymbol{A}^{\dagger};\Gamma(\boldsymbol{U}_{\alpha};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})\big)$$

et la donnée de $\vec{\eta} \in \mathrm{Homom}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}^{\dagger};\prod_{\alpha}\Gamma(\boldsymbol{U}_{\alpha},\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}))$ vérifiant $\delta_1(\Gamma)\circ\vec{\eta} = \delta_2(\Gamma)\circ\vec{\eta}$ équivaut à la donnée d'une famille de morphismes de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\eta_{\alpha} : \boldsymbol{A}^{\dagger} \to \Gamma(\boldsymbol{U}_{\alpha};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ telle que, pour chaque $a \in \boldsymbol{A}^{\dagger}$ on ait :

$$\eta_{\alpha}(a)|_{\boldsymbol{U}_{\alpha,\beta}} = \eta_{\beta}(a)|_{\boldsymbol{U}_{\alpha,\beta}}\,.$$

Il existe alors une et une seule section globale $\eta(a) \in \Gamma(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ recollant les $\eta_{\alpha}(a)$. L'application $a \mapsto \eta(a)$ est un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres vérifiant $\epsilon(\Gamma)\circ\eta = \vec{\eta}$ ce qui termine la preuve du fait que $\mathrm{Homom}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}^{\dagger},\Gamma(\_))$ est un faisceau sur $\mathbf{Sch}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$.

L'application $\gamma(\_,\boldsymbol{Y}) : \mathrm{Mor}(\_,\boldsymbol{Y}) \to \mathrm{Homom}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}^{\dagger},\Gamma(\_))$ est par conséquent un morphisme de *faisceaux d'ensembles* sur $\mathbf{Sch}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$; on peut alors invoquer 3.2.2 et affirmer que c'est un isomorphisme de foncteurs puisqu'il en est ainsi de sa restriction à la sous-catégorie $\mathbf{Aff}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ (2.4.10-(a)).
b) Étant donnés $\boldsymbol{X}_i,\boldsymbol{S} \in \mathbf{Aff}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ et $\pi_i \in \mathrm{Mor}(\boldsymbol{X}_i,\boldsymbol{S})$ on a les morphismes de foncteurs $\mathrm{Mor}(\_,\pi_i) : \mathrm{Mor}(\_,\boldsymbol{X}_i) \to \mathrm{Mor}(\_,\boldsymbol{A})$ et le foncteur sur $\mathbf{Sch}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$:

$$(\_) \rightsquigarrow \mathrm{Mor}(\_,\boldsymbol{X}_1) \times_{\mathrm{Mor}(\_,\boldsymbol{S})} \mathrm{Mor}(\_,\boldsymbol{X}_2)$$

dont il faut prouver la représentabilité.

Or, grâce au produit fibré dans $\mathbf{Aff}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ (2.4.10)

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{X}_1 \times_{\boldsymbol{S}} \boldsymbol{X}_2 \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \boldsymbol{X}_1 \arrow[d, "\pi_1"] \\ \boldsymbol{X}_2 \arrow[r, "\pi_2"] & \boldsymbol{S} \end{tikzcd}$$

on définit pour chaque $\boldsymbol{Z} \in \mathbf{Sch}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ l'application

$$\mathrm{Mor}(\boldsymbol{Z},\boldsymbol{X}_1 \times_{\boldsymbol{S}} \boldsymbol{X}_2) \xrightarrow{\Xi(\boldsymbol{Z})} \mathrm{Mor}(\boldsymbol{Z},\boldsymbol{X}_1) \times_{\mathrm{Mor}(\boldsymbol{Z},\boldsymbol{S})} \mathrm{Mor}(\boldsymbol{Z},\boldsymbol{X}_2)$$

qui associe à $\alpha \in \mathrm{Mor}(\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{X}_1 \times_{\boldsymbol{S}} \boldsymbol{X}_2)$ le couple $(p_1 \circ \alpha, p_2 \circ \alpha)$. La correspondance $\Xi(\_)$ est naturelle entre deux *faisceaux d'ensembles* sur $\mathbf{Sch}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$; on peut alors invoquer 3.2.2 et affirmer que c'est un isomorphisme de foncteurs puisqu'il en est ainsi de sa restriction à la sous-catégorie $\mathbf{Aff}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ (2.4.10-(b)) ∎

3.2.4. Théorème. *La catégorie* $\mathbf{Sch}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ *possède des produits fibrés.*

Preuve. Soient $\pi_{\boldsymbol{X}} : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{S}$ et $\pi_{\boldsymbol{Y}} : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{S}$ des objets de $\mathbf{Sch}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})/_{\boldsymbol{S}}$. Notons $\{\boldsymbol{S}_\alpha\}_\alpha$ un recouvrement ouvert de $\boldsymbol{S}$ avec $\boldsymbol{S}_\alpha \in \mathbf{Aff}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ pour tout α. Soient $\{\boldsymbol{X}_{\alpha,\beta}\}_\beta$ un recouvrement ouvert de $\pi_{\boldsymbol{X}}^{-1}(\boldsymbol{S}_\alpha)$ par des objets de $\mathbf{Aff}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ et de même pour $\boldsymbol{Y}$.

Le produit fibré $\boldsymbol{X}_{\alpha,\beta} \times_{\boldsymbol{S}_\alpha} \boldsymbol{Y}_{\alpha,\beta'}$ existe dans $\mathbf{Sch}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})/_{\boldsymbol{S}_\alpha}$ (3.2.3-b) et représente aussi le foncteur $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\_, \boldsymbol{X}_{\alpha,\beta}) \times_{\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\_,\boldsymbol{S})} \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\_, \boldsymbol{Y}_{\alpha,\beta'})$ (car $\boldsymbol{S}_\alpha \to \boldsymbol{S}$ est un plongement ouvert). Le produit fibré $\boldsymbol{X}_{\alpha,\beta} \times_{\boldsymbol{S}} \boldsymbol{Y}_{\alpha,\beta'}$ existe donc bien dans $\mathbf{Sch}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})/_{\boldsymbol{S}}$.

On conclut en appliquant le critère de représentabilité 1.9.1 avec

- $\mathcal{C} = \mathbf{Sch}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})/_{\boldsymbol{S}}$,
- $\boldsymbol{F} := \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\_, \boldsymbol{X}) \times_{\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\_,\boldsymbol{S})} \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\_, \boldsymbol{X})$,
- $\boldsymbol{F}_{\alpha,\beta,\beta'} : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\_, \boldsymbol{X}_{\alpha,\beta}) \times_{\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\_,\boldsymbol{S})} \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(\_, \boldsymbol{Y}_{\alpha,\beta'})$. ∎

§ 4. Affinité des schémas †-adiques de réduction affine

Tout comme la section 3.1, les résultats de cette partie complètent l'étude commencée dans [Ar_3] concernant l'affinité des schémas †-adiques de réduction affine, tous ces résultats y seront replacés dans une version ultérieure de ce travail.

Le question de l'affinité des schémas †-adiques de réduction affine est apparue à différents occasions depuis [M] et a donné lieu à des réponses variées, par exemple :

Aff-(i) *Si* $(\boldsymbol{X};\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ *est un schéma †-adique affine de type fini et si* $\boldsymbol{U} \subseteq \boldsymbol{X}$ *est un ouvert* **principal**, *l'espace* $(\boldsymbol{U};\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}|_{\boldsymbol{U}})$ *est un schéma †-adique affine de type fini.* [2]

Aff-(ii) *Si* $(\boldsymbol{X};\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ *est un schéma †-adique affine-lisse* [3] *et si* $\boldsymbol{U} \subseteq \boldsymbol{X}$ *est un ouvert* **affine**, *l'espace* $(\boldsymbol{U};\mathcal{O}^{\dagger}|_{\boldsymbol{U}})$ *est un schéma †-adique affine-lisse.* [4]

Aff-(iii) *Si* $(\boldsymbol{X};\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ *est un schéma †-adique affine de type fini et si* $\boldsymbol{U} \subseteq \boldsymbol{X}$ *est un ouvert* **affine**, *l'espace* $(\boldsymbol{U};\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}|_{\boldsymbol{U}})$ *est un schéma †-adique affine de type fini.* [5]

Aff-(iv) *Un schéma †-adique lisse de réduction affine est affine-lisse.* [6]

Nous allons maintenant démonter le résultat le plus général concernant cette question :

---

[2] Théorème 2.8, p. 5, de [M].

[3] On rappelle que dans [Ar_3] un schéma †-adique affine est dit « *affine-lisse* » lorsqu'il est associé à une algèbre f.c.t.f. très lisse, et il est dit « *lisse* » s'il est localement affine-lisse. Le principal résultat de *loc.cit.*, assertion aff-(iv) ici, affirme qu'il y a équivalence entre les deux concepts.

[4] Proposition 3.2.16 de [Ar_2].

[5] Proposition 3.1.3 dans ce papier.

[6] Théorème 2.5.3 de [Ar_3].

4.1. Théorème. *Pour un schéma †-adique localement de type fini les assertions suivantes sont équivalentes :*
a) *Être de réduction affine (de type fini).*
b) *Être †-adique affine de type fini.*

Preuve. Soit $(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}) \in \mathbf{Sch}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ de réduction $(\boldsymbol{X};\overline{\mathscr{O}}_{\boldsymbol{X}}) = \mathrm{Spec}(\overline{\boldsymbol{A}})$. Soient $\{f_1,\dots,f_r\} \subseteq \overline{\boldsymbol{A}}$ tels que $f_1+\cdots+f_r = 1$ et tels que $\big(D(f_i);\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}|_{D(f_i)}\big) \in \mathbf{Aff}^{\dagger}_{\mathrm{tf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$. On a le morphisme de suites exactes à gauche :

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbf{0} \to \Gamma(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}) & \xrightarrow{\epsilon(\mathscr{O})} & \prod_i \Gamma(D(f_i);\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}) & \xrightarrow{\delta_0(\mathscr{O})} & \prod_{ij} \Gamma(D(f_if_j);\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}) \\
\nu \downarrow & & \nu_i \downarrow & & \nu_{ij} \downarrow \\
\mathbf{0} \to \Gamma(\boldsymbol{X};\overline{\mathscr{O}}_{\boldsymbol{X}}) & \xrightarrow{\epsilon(\overline{\mathscr{O}})} & \prod_i \Gamma(D(f_i);\overline{\mathscr{O}}_{\boldsymbol{X}}) & \xrightarrow{\delta_0(\overline{\mathscr{O}})} & \prod_{ij} \Gamma(D(f_if_j);\overline{\mathscr{O}}_{\boldsymbol{X}}) \\
\| & & \| & & \| \\
\overline{\boldsymbol{A}} & & \prod_i \overline{\boldsymbol{A}}_{f_i} & & \prod_{ij} \overline{\boldsymbol{A}}_{f_if_j}
\end{array} \qquad (\mathscr{D})$$

où les flèches verticales proviennent de la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ des fibres de $\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}$ (*cf.* 2.4.6). Les morphismes ν_i et ν_{ij} sont alors des relèvements ([M] th. 2.8, p. 5) et le morphisme ν est surjectif d'après 3.1.4 ([Ar$_3$] cor. 2.5.5).

D'autre part, l'algèbre $\overline{\boldsymbol{A}} := \Gamma(\boldsymbol{X};\overline{\mathscr{O}}_{\boldsymbol{X}})$ est de type fini sur $\overline{\boldsymbol{R}}$, car elle est localement de type fini, et l'algèbre $\Gamma(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ est faiblement complète d'après 3.1.1 ([7]), il existe donc un sous-algèbre **faiblement complète de type fini** $\boldsymbol{C}^{\dagger} \subseteq \Gamma(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ telle que $\nu(\boldsymbol{C}^{\dagger}) = \overline{\boldsymbol{A}}$.

Choisissons $F_i \in \boldsymbol{C}^{\dagger}$ tel que $\nu(F_i) = f_i$ et notons $\xi = F_1+\cdots+F_r$. On a $\nu(\xi) = 1 \in \overline{\boldsymbol{A}}$ et donc aussi $\xi = 1 \pmod{\boldsymbol{I}}$ dans chaque $\Gamma(D(f_i);\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$. On en déduit que ξ est inversible dans $\Gamma(D(f_i);\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$, car de Zariski, d'inverse noté ζ_i. Les sections $(\zeta_1,\dots,\zeta_r)$ vérifient la condition de recollement et se recollent en une section globale $\zeta \in \Gamma(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ vérifiant l'égalité $\xi\zeta - 1 = 0$ (localement évidente). Ainsi, quitte à rajouter ζ à $\boldsymbol{C}^{\dagger}$, l'image de ξ dans $\overline{\boldsymbol{C}} := \boldsymbol{C}^{\dagger}/\boldsymbol{I}\boldsymbol{C}^{\dagger}$ est **inversible** et l'espace $\mathrm{Spec}(\overline{\boldsymbol{C}})$ est **recouvert** par les ouverts principaux $D(F_i)$. Notons $\boldsymbol{Y} := \mathrm{Spec}(\overline{\boldsymbol{C}})$ et $(\boldsymbol{Y};\mathscr{O}_{\boldsymbol{Y}}) := (\boldsymbol{C}^{\dagger})^{\sim}$.

Soit $(\alpha,\alpha^{\#}) : (\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}) \to (\boldsymbol{Y};\mathscr{O}_{\boldsymbol{Y}})$ le morphisme d'espaces localement annelés associé à l'inclusion $\boldsymbol{C}^{\dagger} \subseteq \Gamma(\boldsymbol{X};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ (prop. 3.2.3-a). Le morphisme $\alpha^{\#} : \mathscr{O}_{\boldsymbol{Y}} \to \alpha_*\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}$ fait de $\alpha_*\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}$ un $\mathscr{O}_{\boldsymbol{Y}}$-module **cohérent**. En effet, d'après l'équivalence de catégories 2.4.10, la restriction de $\alpha^{\#}$ à $D(F_i)$ est le morphisme de faisceaux correspondant au morphisme d'algèbres $\Gamma(D(F_i);\alpha^{\#})$. Or, on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma(D(F_i);\mathscr{O}_{\boldsymbol{Y}}) & \xrightarrow{\Gamma(D(F_i);\alpha^{\#})} & \Gamma(D(F_i);\alpha_*\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}) \\
\| & \bigoplus & \| \\
\boldsymbol{C}^{\dagger}_{[F_i]} & \xrightarrow[\epsilon(\mathscr{O})_i]{} & \Gamma(D(f_i);\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}) \\
 & & \nu_i \downarrow \\
 & & \overline{\boldsymbol{A}}_{f_i}
\end{array} \qquad (\ddagger)$$

où $\epsilon(\mathscr{O})_i$ est **surjective** car il en est ainsi de $\nu_i \circ \epsilon(\mathscr{O})_i$, par construction de $\boldsymbol{C}^{\dagger}$, et

[7] Mais on ne sait pas encore si elle est f.c.t.f. ni si ν est un relèvement !

puisque $\varGamma(D(f_i);\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}) \in \mathbf{Alg}_{\mathrm{fctf}}(\boldsymbol{R};\boldsymbol{I})$ et que ν_i est un relèvement (th. 3.2 [MW]). Le $\boldsymbol{C}^\dagger_{[F_i]}$-module $\varGamma(D(F_i);\alpha_*\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ est donc cyclique et de présentation finie car $\boldsymbol{C}^\dagger_{[F_i]}$ est nœthérien. L'exactitude de $(\_)^{\sim}$ sur la catégorie des $\boldsymbol{C}^\dagger_{[F_i]}$-modules de type fini ([M] prop. 2.5, p. 4) permet maintenant de conclure que $\big(\alpha_*\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}\big)|_{D(F_i)}$ est un $\mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}}|_{D(F_i)}$-module de présentation finie, ce qui termine la preuve de la cohérence de $\alpha_*\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}} \in \mathrm{Mod}(\mathcal{O}_{\boldsymbol{Y}})$.

La cohérence de $\alpha_*\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$ plus le fait que le morphisme $\varGamma(\boldsymbol{Y};\alpha_*\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}) \to \varGamma(\boldsymbol{Y};\alpha_*\overline{\mathcal{O}}_{\boldsymbol{X}})$ est **surjectif**, car égal à ν dans $(\mathcal{D})$, suffisent (*cf.* la preuve du th. 3.3 de [M], p. 12) pour affirmer que $\alpha_*\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$ est de la forme $(\boldsymbol{M})^{\sim}$ pour un certain $\boldsymbol{C}^\dagger$-module de type fini $\boldsymbol{M}$ et que $\alpha^\# = (\gamma)^{\sim}$ où $\gamma : \boldsymbol{C}^\dagger \to \boldsymbol{M}$ est un morphisme de $\boldsymbol{C}^\dagger$-modules. De plus, on a $\boldsymbol{M} = \varGamma(\boldsymbol{X};\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ (th. 2.14 [M], cor. 3.2.12 [Ar$_2$]) et donc $\varGamma(\boldsymbol{X};\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ est une $\boldsymbol{C}^\dagger$-algèbre ***finie*** et

$$\boxed{\boldsymbol{\varGamma(X;\mathcal{O}_X)\ \text{est f.c.t.f.}}}$$

On peut maintenant reprendre toute l'argumentation de la preuve avec $\boldsymbol{C}^\dagger := \varGamma(\boldsymbol{X};\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ ce qui nous conduit à l'existence d'un isomorphisme $(\boldsymbol{X};\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}) \simeq \big(\varGamma(\boldsymbol{X};\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})\big)^{\sim}$. ■

4.2. Remarques sur la preuve

a) Dans l'avant dernier paragraphe,
   i) la référence à la preuve du théorème 3.3 de [M] et non pas au théorème lui-même s'explique par le fait que nous ne faisons pas l'hypothèse sur $(\boldsymbol{R},\boldsymbol{I})$ d'être un anneau de valuation discrète complet.
   ii) le morphisme γ y est déjà **bijectif**. En effet, il est *injectif* car $\boldsymbol{M} = \varGamma(\boldsymbol{X};\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ et que γ s'identifie à l'inclusion $\boldsymbol{C}^\dagger \subseteq \varGamma(\boldsymbol{X};\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$. Il est aussi *surjectif* car en notant $\boldsymbol{Q} := \mathrm{coker}(\gamma)$, on a $\boldsymbol{Q} \otimes_{\boldsymbol{C}^\dagger} \boldsymbol{C}^\dagger_{[F_i]} = 0$ d'après (‡) et alors $0 = \overline{\boldsymbol{R}} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{Q} \otimes_{\boldsymbol{C}^\dagger} \boldsymbol{C}^\dagger_{[F_i]} = (\overline{\boldsymbol{R}} \otimes \boldsymbol{Q}) \otimes_{\overline{\boldsymbol{C}}} \overline{\boldsymbol{C}}_{F_i}$ pour tout i, et donc $\overline{\boldsymbol{R}} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{Q} = 0$. Mais alors $\boldsymbol{Q} = 0$ puisque $\boldsymbol{Q}$ est un $\boldsymbol{C}^\dagger$-module de type fini et que $(\boldsymbol{C}^\dagger;\boldsymbol{I}\boldsymbol{C}^\dagger)$ est de Zariski.

b) Le critère d'affinité 3.1.3, cas particulier de 4.1, est nécessaire dans cette démonstration dans la mesure où l'on s'en sert pour établir la proposition 3.2.3-a elle-même appelée par 4.1. En fait, la preuve de 4.1 prouve aussi 3.1.3 dans la mesure où la proposition 3.2.3-a est trivialement vérifiée dans son cas. On peut facilement concevoir un énoncé commun à 3.2.3-a et 4.1 dont la démonstration règle dans un premier temps le cas où $\boldsymbol{X}$ est un ouvert de réduction affine d'un schéma †-adique affine de type fini.

4.3. Commentaire. Le théorème 4.1 prouve la conjecture de 2.5.6 dans [Ar$_3$] :
Théorème. Pour tout schéma †-adique localement de type fini $(\boldsymbol{X};\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ et tout ouvert de réduction affine $\boldsymbol{U} \subseteq \boldsymbol{X}$ on a :

$$H^j(\boldsymbol{U};\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}) = 0\,, \ \textit{pour tout}\ j > 0.$$

§ 5. Références bibliographiques

[Ar_2] A. Arabia. Cohomologie de Monsky-Washnitzer dans la catégorie des schémas lisses et séparés sur $\overline{\boldsymbol{R}}$; Prépublication (2004).

[Ar_3] A. Arabia. Affinité de schémas †-adiques de réduction affine ; Prépublication (2005).

[EGA_1] A. Grothendieck, J.A. Dieudonné. "*Éléments de géométrie algébrique-I*" ; Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen Band 166. Springer-Verlag (1971).

[M] D. Meredith. Weak formal schemes ; Nagoya Math. Journal. Vol. 45, pp. 1–38 (1971).

[MW] P. Monsky, G. Washnitzer. Formal cohomology : I ; Ann. of Math. (2) **88**, pp. 181–217 (1968).