Cohomologie de Monsky-Washnitzer dans la catégorie des schémas lisses et séparés sur $\overline{\boldsymbol{R}}$

Alberto Arabia*

Sommaire

§ 0. Introduction

Travail en cours…

*CNRS – Institut de Mathématiques de Jussieu – Université de Paris 7 - Denis Diderot.
Laboratoire de Théorie des Groupes, Représentations et Applications.
UFR de Mathématiques de l'Université Paris 7 – Denis Diderot.
175, rue du Chevaleret, 9e étage, bureau 9D11, 75013 Paris.
Adresse électronique : `arabia@math.jussieu.fr`

§ 1. Préliminaires algébriques

Dans cet article, $\boldsymbol{R}$ désigne un anneau avec identité multiplicative, commutatif et nœthérien, et $\boldsymbol{I}$ désigne un idéal de $\boldsymbol{R}$.

Pour toute $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$, on note $\overline{\boldsymbol{A}}$ la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ de $\boldsymbol{A}$, *i.e.* $\overline{\boldsymbol{A}} := \boldsymbol{A}/\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{A}$, et $\boldsymbol{A}^\dagger$ la complétion faible de Monsky-Washnitzer de $\boldsymbol{A}$. L'abréviation "f.c.t.f." signifie « *faiblement complet de type fini* » (w.c.f.g. dans [MW]). Pour toute $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$ et toute algèbre $\overline{\boldsymbol{B}}$ (lisse) sur $\overline{\boldsymbol{A}}$, on appelle « *relèvement de* $\overline{\boldsymbol{B}}$ (*lisse*) *sur* $\boldsymbol{A}$ » la donnée d'une algèbre $\boldsymbol{B}$ (lisse) sur $\boldsymbol{A}$, et d'une surjection de $\boldsymbol{A}$-algèbres $p : \boldsymbol{B} \to \overline{\boldsymbol{B}}$ dont la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ est bijective.

1.1. Proposition. *Soit* $\beta : \boldsymbol{B}_1 \to \boldsymbol{B}_2$ *un morphisme entre deux* $\boldsymbol{R}$*-algèbres f.c.t.f.* très lisses *dont la réduction modulo* $\boldsymbol{I}$*,* $\overline{\beta} : \overline{\boldsymbol{B}}_1 \to \overline{\boldsymbol{B}}_2$*, est un morphisme* ***lisse****. Soit* $q_1 : \boldsymbol{A}_1 \twoheadrightarrow \overline{\boldsymbol{B}}_1$*, un relèvement lisse sur* $\boldsymbol{R}$ *et munissons* $\overline{\boldsymbol{B}}_2$ *de la structure de* $\boldsymbol{A}_1$*-algèbre induite par* $\overline{\beta} \circ q_1$*. Alors, pour tout relèvement* $q_2 : \boldsymbol{A}_2 \twoheadrightarrow \overline{\boldsymbol{B}}_2$*,* ***lisse sur*** $\boldsymbol{A}_1$ *(donc sur* $\boldsymbol{R}$*), il existe des isomorphismes* $\varphi_i : \boldsymbol{A}_i^\dagger \to \boldsymbol{B}_i$ *relevant l'identité sur* $\overline{\boldsymbol{B}}_i$ *tels que le diagramme ci-après est commutatif. Dans ce diagramme,* σ *désigne le morphisme structural, et* ι *le morphisme naturel canonique d'une algèbre dans sa complétion faible.*

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{B}_1 \arrow[r, "\beta"] & \boldsymbol{B}_2 \\
\boldsymbol{A}_1^\dagger \arrow[u, "\varphi_1", "\simeq"'] \arrow[r, "\sigma^\dagger"] & \boldsymbol{A}_2^\dagger \arrow[u, "\simeq", "\varphi_2"'] \\
\boldsymbol{A}_1 \arrow[u, "\iota_1"] \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, two heads, "q_1"'] & \boldsymbol{A}_2 \arrow[u, "\iota_2"'] \arrow[d, two heads, "q_2"] \\
\overline{\boldsymbol{B}}_1 \arrow[r, "\overline{\beta}"] & \overline{\boldsymbol{B}}_2
\end{tikzcd}$$

Le morphisme β *est donc isomorphe à la complétion faible d'un morphisme lisse entre des relèvements des* $\overline{\boldsymbol{B}}_i$*, lisses sur* $\boldsymbol{R}$*.*

De plus, pour tout isomorphisme φ_1 *relevant* $\mathrm{id}_{\overline{\boldsymbol{B}}_1}$ *(resp.* φ_2 *relevant* $\mathrm{id}_{\overline{\boldsymbol{B}}_2}$*), il existe un isomorphisme* φ_2 *relevant* $\mathrm{id}_{\overline{\boldsymbol{B}}_2}$ *(resp.* φ_1 *relevant* $\mathrm{id}_{\overline{\boldsymbol{B}}_1}$*) tels que le couple* (φ_1, φ_2) *vérifie la proposition.*

Démonstration. D'après le théorème d'existence de relèvements lisses (1.3.1 [Ar]) appliqué au couple $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{I})$, il existe un relèvement lisse $q_1 : \boldsymbol{A}_1 \to \overline{\boldsymbol{B}}_1$, et, appliqué au couple $(\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{A}_1)$, un relèvement $q_2 : \boldsymbol{A}_2 \twoheadrightarrow \overline{\boldsymbol{B}}_2$ lisse *sur* $\boldsymbol{A}_1$. Les $\boldsymbol{R}$-algèbres $\boldsymbol{A}_i^\dagger$ sont f.c.t.f. très lisses (3.3.1 *loc. cit.*) de sorte qu'il existe des morphismes $\varphi_i : \boldsymbol{A}_i^\dagger \to \boldsymbol{B}_i$ relevant l'identité sur $\overline{\boldsymbol{B}}_i$; de tels morphismes sont automatiquement bijectifs (th. 3.2 [MW]).

Pour φ_1 donné, munissons $\boldsymbol{B}_2$ de la structure de $\boldsymbol{A}_1$-algèbre induite par $\beta \circ \varphi_1 \circ \iota_1$, et considérons les données :

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{A}_2 \arrow[d, two heads, "q_2"'] & \boldsymbol{B}_2 \arrow[d, two heads, "p_2"] \\
\overline{\boldsymbol{B}}_2 \arrow[r, leftrightarrow, "\mathrm{id}"] & \overline{\boldsymbol{B}}_2
\end{tikzcd}$$

dans la catégorie des $\boldsymbol{A}_1$-algèbres. Comme $\boldsymbol{A}_2$ est lisse sur $\boldsymbol{A}_1$, il existe un voisinage étale $(\boldsymbol{B}_2)_\varepsilon$ de $\boldsymbol{I}$ dans $\boldsymbol{B}_2$ et un morphisme $\phi_2 : \boldsymbol{A}_2 \to (\boldsymbol{B}_2)_\varepsilon$ tels que :

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{A}_2 \arrow[r, "\phi_2"] \arrow[d, two heads, "q_2"'] & (\boldsymbol{B}_2)_\varepsilon \arrow[d, two heads, "p_{2\varepsilon}"] & \boldsymbol{B}_2 \arrow[l, "\varepsilon"'] \arrow[d, two heads, "p_2"] \\
\overline{\boldsymbol{B}}_2 \arrow[r, leftrightarrow, "\mathrm{id}"] & \overline{\boldsymbol{B}}_2 \arrow[r, leftrightarrow, "\mathrm{id}"] & \overline{\boldsymbol{B}}_2
\end{tikzcd}$$

est un diagramme commutatif de $\boldsymbol{A}_1$-algèbres (2.1.3 [Ar]).

Par complétion faible, $\varepsilon^\dagger$ est un isomorphisme (3.2.4 *loc. cit.*) et $\varphi_2 := (\varepsilon^\dagger)^{-1} \circ \phi_2^\dagger$ vérifie, par construction, l'égalité $\beta \circ \varphi_1 = \varphi_2 \circ \sigma^\dagger$, ce qui prouve une partie de la proposition.

Inversement, donnons-nous φ_2. On a les morphismes des $\boldsymbol{R}$-algèbres f.c.t.f. très lisses :

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{B}_1 \arrow[r, "\beta"] & \boldsymbol{B}_2 \\ \boldsymbol{A}_1^\dagger \arrow[r, "\sigma^\dagger"] & \boldsymbol{A}_2^\dagger \arrow[u, "\simeq"', "\varphi_2"] \end{tikzcd}$$

La sous-algèbre $\boldsymbol{C}$ de $\boldsymbol{B}_2$ engendrée par les images de β et $\varphi_2 \circ \sigma^\dagger$ est f.c.t.f. d'après le corollaire du th. 2.1 de [MW]. Il en est de même de la sous-algèbre $\mathrm{im}(\beta)$ et comme l'inclusion $\mathrm{im}(\beta) \subseteq \boldsymbol{C}$ est une égalité modulo $\boldsymbol{I}$, on déduit que $\mathrm{im}(\beta) = \boldsymbol{C} = \mathrm{im}(\varphi_2 \circ \sigma^\dagger)$ (th. 3.1 [MW]). L'existence de φ_1 vérifiant $\beta \circ \varphi_1 = \varphi_2 \circ \sigma^\dagger$ résulte alors de ce que $\boldsymbol{A}_1^\dagger$ est très lisse. ■

§ 2. Site infinitésimal d'un schéma lisse et séparé sur $\overline{\boldsymbol{R}}$

2.1 La catégorie $\mathscr{X}_{\mathbf{inf}}^\dagger$

A tout schéma $\boldsymbol{X}$, séparé et lisse sur $\overline{\boldsymbol{R}}$, de faisceau structural $\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}$, nous associons une catégorie $\mathscr{X}_{\mathrm{inf}}^\dagger$ définie comme suit :

- Un objet $\mathscr{U}^\dagger$ de $\mathscr{X}_{\mathrm{inf}}^\dagger$ est un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres

  $$p_U : \mathscr{A}\big(\mathscr{U}^\dagger\big) \twoheadrightarrow \Gamma(U;\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$$

  avec :

  $$\begin{cases} U & : \text{ouvert affine de } \boldsymbol{X}\,; \\ \mathscr{A}\big(\mathscr{U}^\dagger\big) & : \boldsymbol{R}\text{-algèbre f.c.t.f. très lisse}\,; \\ p_U & : \text{relèvement de } \boldsymbol{R}\text{-algèbres.} \end{cases}$$

- Pour toute paire d'objets $\mathscr{V}^\dagger$ et $\mathscr{U}^\dagger$ de $\mathscr{X}_{\mathrm{inf}}^\dagger$, telle que $V \subseteq U$, un élément $\Phi \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{X}_{\mathrm{inf}}^\dagger}\big(\mathscr{V}^\dagger, \mathscr{U}^\dagger\big)$ est un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\phi : \mathscr{A}\big(\mathscr{U}^\dagger\big) \to \mathscr{A}\big(\mathscr{V}^\dagger\big)$ tel que le diagramme :

  $$\begin{tikzcd} \mathscr{A}\big(\mathscr{U}^\dagger\big) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, two heads, "p_U"'] & \mathscr{A}\big(\mathscr{V}^\dagger\big) \arrow[d, two heads, "p_V"] \\ \Gamma(U;\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}) \arrow[r, "\rho"] & \Gamma(V;\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}) \end{tikzcd}$$

  où ρ désigne le morphisme de restriction canonique, est commutatif.

- Lorsque $\mathscr{V}^\dagger$ et $\mathscr{U}^\dagger$ sont tels que V *n'est pas* contenu dans U, on pose : $\mathrm{Mor}_{\mathscr{X}_{\mathrm{inf}}^\dagger}\big(\mathscr{V}^\dagger, \mathscr{U}^\dagger\big) =$ [redacted] $\varnothing$.

2.1.1. Terminologie

- Pour un objet $\mathscr{U}^\dagger$ de $\mathscr{X}_{\mathrm{inf}}^\dagger$, l'ouvert U, l'algèbre très lisse $\mathscr{A}(\mathscr{U}^\dagger)$ et le morphisme p_U, seront respectivement appelés « *l'ouvert de $\boldsymbol{X}$, l'algèbre très lisse et le relèvement très lisse, correspondants à $\mathscr{U}^\dagger$* ».

- Pour tout $\Phi \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}(\mathscr{V}^\dagger, \mathscr{U}^\dagger)$, le morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\phi : \mathscr{A}(\mathscr{U}^\dagger) \to \mathscr{A}(\mathscr{V}^\dagger)$ est appelé « *le morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres associé à Φ* ».

2.1.2. Remarques

a) Avec les notations précédentes, $\mathrm{Mor}_{\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}(\mathscr{V}^\dagger, \mathscr{U}^\dagger) = \varnothing$, si et seulement si, $V \subseteq U$. La suffisance de cette dernière condition est conséquence de ce que $\mathscr{A}\big(\mathscr{U}^\dagger\big)$ est très lisse.

b) Pour tout ouvert affine $U \subseteq \boldsymbol{X}$, il existe des relèvements $\boldsymbol{A}(U) \twoheadrightarrow \Gamma(U;\mathscr{O})$ lisses sur $\boldsymbol{R}$ (1.3.1 [Ar]) et le morphisme induit $\boldsymbol{A}(U)^\dagger \twoheadrightarrow \Gamma(U;\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ est un relèvement très lisse (3.3.1 *loc. cit.*). Il s'ensuit que pour tout ouvert affine $U \subseteq \boldsymbol{X}$, il existe un objet $\mathscr{U}^\dagger$ de $\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ dont l'ouvert de $\boldsymbol{X}$ correspondant est U ; un tel objet $\mathscr{U}^\dagger$ est appelé « *un relèvement* (†*-adique*) *de U* ».

c) Pour tout objet $\mathscr{U}^\dagger \in \mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$, le semi-groupe $\big(\mathrm{End}_{\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}(\mathscr{U}^\dagger), \circ, \mathbf{1}_{\mathscr{U}^\dagger}\big)$ est un groupe (th. 3.2 [MW]), il s'identifie à l'opposé du groupe des automorphismes de $\boldsymbol{R}$-algèbre de $\mathscr{A}\big(\mathscr{U}^\dagger\big)$ dont la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ est l'identité.

2.2 Existence de produits fibrés dans $\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$

Proposition. *La catégorie $\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ possède des produits fibrés.*

Démonstration. À un diagramme commutatif de $\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{W}^\dagger & \longrightarrow & \mathscr{V}_1^\dagger \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathscr{V}_2^\dagger & \longrightarrow & \mathscr{U}^\dagger \end{array}$$

correspondent les diagrammes commutatifs de $\boldsymbol{R}$-algèbres f.c.t.f. très lisses et de $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres :

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{A}\big(\mathscr{U}^\dagger\big) & \longrightarrow & \mathscr{A}\big(\mathscr{V}_1^\dagger\big) \\ \downarrow & (\mathscr{D}) & \downarrow \\ \mathscr{A}\big(\mathscr{V}_2^\dagger\big) & \longrightarrow & \mathscr{A}\big(\mathscr{W}^\dagger\big) \end{array} \quad \xrightarrow{\text{mod } \boldsymbol{I}} \quad \begin{array}{ccc} \Gamma(U;\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}) & \xrightarrow{\rho} & \Gamma(V_1;\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}) \\ \rho\downarrow & (\overline{\mathscr{D}}) & \downarrow\rho \\ \Gamma(V_2;\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}) & \xrightarrow{\rho} & \Gamma(W;\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}) \end{array}$$

où nous pouvons supposer, grâce à la proposition 1.1, que le diagramme de $\mathscr{A}\big(\mathscr{U}^\dagger\big)$-algèbres $(\mathscr{D})$ résulte de compléter faiblement un diagramme de morphismes de $\boldsymbol{A}(U)$-algèbres :

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{A}(U) & \xrightarrow{\sigma_1} & \boldsymbol{A}(V_1) \\ \sigma_2\downarrow & & \downarrow\xi_1 \\ \boldsymbol{A}(V_2) & \xrightarrow[\xi_2]{} & \mathscr{A}\big(\mathscr{W}^\dagger\big) \end{array} \qquad (\mathscr{D}')$$

où $\boldsymbol{A}(U)$ est un relèvement lisse de $\Gamma(U;\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ sur $\boldsymbol{R}$; $\boldsymbol{A}(V_i)$ est un relèvement lisse $\Gamma(V_i;\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ sur $\boldsymbol{A}(U)$ (σ_i désigne alors morphisme structural) et $(\mathscr{D}')$ est un relèvement de $\overline{\mathscr{D}}$.

Le diagramme $(\mathscr{D}')$ admet une factorisation unique en :

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{A}(U) \arrow[r, "\sigma_1"] \arrow[d, "\sigma_2"'] & \boldsymbol{A}(V_1) \arrow[d] \arrow[dr, bend left, "\xi_1"] & \\
\boldsymbol{A}(V_2) \arrow[r] \arrow[drr, bend right, "\xi_2"'] & \boldsymbol{A}(V_1) \otimes_{\boldsymbol{A}(U)} \boldsymbol{A}(V_2) \arrow[dr, "\xi"] & \\
 & & \mathscr{A}(\mathscr{W}^\dagger)
\end{tikzcd} \qquad (\mathscr{D}'')$$

où les morphismes de $\boldsymbol{A}(V_i)$ vers $\boldsymbol{A}(V_1) \otimes_{\boldsymbol{A}(U)} \boldsymbol{A}(V_2)$ sont les morphismes canoniques.

Ceci étant, $\boldsymbol{A}(V_{12}) := \boldsymbol{A}(V_1) \otimes_{\boldsymbol{A}(U)} \boldsymbol{A}(V_2)$ est un relèvement lisse sur $\boldsymbol{A}(U)$ (donc sur $\boldsymbol{R}$) de $\Gamma(V_{12};\mathscr{O}_{V_{12}})$ où $V_{12} := V_1 \times_U V_2$ est canoniquement isomorphe à l'ouvert affine $V_1 \cap V_2$ de $\boldsymbol{X}$ puisque $\boldsymbol{X}$ est supposée séparée. La complétion faible $\boldsymbol{A}(V_{12})^\dagger$ de $\boldsymbol{A}(V_{12})$ est f.c.t.f. très lisse (3.3.1 [Ar]) et le couple $\big(V_{12};\boldsymbol{A}(V_{12})^\dagger \twoheadrightarrow \Gamma(V_{12};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})\big)$ est un objet de $\mathscr{X}^\dagger_{\text{inf}}$.

L'existence du produit fibré $\mathscr{V}_1^\dagger \times_{\mathscr{U}^\dagger} \mathscr{V}_2^\dagger$ dans $\mathscr{X}^\dagger_{\text{inf}}$ résulte alors de compléter faiblement le diagramme $(\mathscr{D}'')$. ■

2.2.1. Remarque. La démonstration précédente montre que l'ouvert affine de $\boldsymbol{X}$ correspondant au produit fibré $\mathscr{V}_1^\dagger \times_{\mathscr{U}^\dagger} \mathscr{V}_2^\dagger$ est précisément $V_1 \cap V_2 = V_1 \times_U V_2$.

2.3 Topologie de Grothendieck sur $\mathscr{X}^\dagger_{\text{inf}}$

2.3.1. Rappel. On appelle « *topologie de Grothendieck* » sur une catégorie $\mathscr{C}$ avec produits fibrés la donnée de familles de morphismes $\{\Phi_{\mathfrak{a}} : \boldsymbol{O}_{\mathfrak{a}} \to \boldsymbol{O}\}$, appelées « *recouvrements (de $\mathscr{C}$)* », tels que :

a) Pour tout objet $\boldsymbol{O}$ de $\mathscr{C}$ et tout $\Phi \in \mathrm{Iso}_{\mathscr{C}}(\boldsymbol{O})$, $\{\Phi : \boldsymbol{O} \to \boldsymbol{O}\}$ est un recouvrement.

b) Pour tout recouvrement $\{\Phi_{\mathfrak{a}} : \boldsymbol{O}_{\mathfrak{a}} \longrightarrow \boldsymbol{O}\}$ et tous recouvrements $\{\Phi_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} : \boldsymbol{O}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \longrightarrow \boldsymbol{O}_{\mathfrak{a}}\}$, la famille des morphismes composés $\{\Phi_{\mathfrak{a}} \circ \Phi_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} : \boldsymbol{O}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \longrightarrow \boldsymbol{O}\}$ est un recouvrement.

c) Pour tout recouvrement $\{\Phi_{\mathfrak{a}} : \boldsymbol{O}_{\mathfrak{a}} \longrightarrow \boldsymbol{O}\}$ et tout morphisme $\Phi' : \boldsymbol{O}' \to \boldsymbol{O}$, la famille de morphismes $\{\Phi_{\mathfrak{a}} \times_{\boldsymbol{O}} \Phi' : \boldsymbol{O}_{\mathfrak{a}} \times_{\boldsymbol{O}} \boldsymbol{O}' \longrightarrow \boldsymbol{O}'\}$ est un recouvrement.

2.3.2. Définition. On appelle « *recouvrement de $\mathscr{X}^\dagger_{\text{inf}}$* » la donnée d'un objet $\mathscr{U}^\dagger$ et d'une famille $\mathscr{R} = \{\Phi_{\mathfrak{a}} : \mathscr{U}^\dagger_{\mathfrak{a}} \longrightarrow \mathscr{U}^\dagger\}$ de morphismes, tels que la famille $\{U_{\mathfrak{a}}\}$ des ouverts affines correspondants aux $\mathscr{U}^\dagger_{\mathfrak{a}}$ est un recouvrement dans $\boldsymbol{X}$ de l'ouvert affine U correspondant à $\mathscr{U}^\dagger$. Le recouvrement $U = \bigcup_{\mathfrak{a}} U_{\mathfrak{a}}$ sera appelé « *le recouvrement de $\boldsymbol{X}$ correspondant à $\mathscr{R}$* »

2.3.3. Remarque et terminologie. Soit $\mathscr{U}^\dagger$ un objet de $\mathscr{X}^\dagger_{\text{inf}}$ d'ouvert correspondant U. Tout recouvrement affine $U = \bigcup U_{\mathfrak{a}}$ dans $\boldsymbol{X}$ correspond à un recouvrement $\{\mathscr{U}^\dagger_{\mathfrak{a}} \to \mathscr{U}\}$ de $\mathscr{X}^\dagger_{\text{inf}}$ (*cf.* 2.1.2-b), un tel recouvrement de $\mathscr{X}^\dagger_{\text{inf}}$ est appelé « *un relèvement* (†*-adique*) *du recouvrement* $U = \bigcup U_{\mathfrak{a}}$ ».

2.3.4. Notations et terminologie

- On note $\mathrm{Rec}(\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}})$ la classe des recouvrements de $\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$.
- Un recouvrement $\{\mathscr{U}^\dagger_{\mathfrak{a}} \to \mathscr{U}^\dagger\}_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{A}}$ est dit «*fini*» lorsque l'ensemble d'indices $\mathfrak{A}$ est de cardinal fini.
- Un recouvrement $\{\mathscr{U}^\dagger_{\mathfrak{a}} \to \mathscr{U}^\dagger\}$ est dit «*principal*» lorsque les ouverts $U_{\mathfrak{a}}$ correspondants aux $\mathscr{U}^\dagger_{\mathfrak{a}}$ sont principaux dans l'ouvert U correspondant à $\mathscr{U}$, *i.e.* des complémentaires d'hypersurfaces de U.
- Deux recouvrements $\mathscr{R}_1 = \{\Phi_{\mathfrak{a}} : \mathscr{U}^\dagger_{\mathfrak{a}} \to \mathscr{U}^\dagger\}_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{A}}$ et $\mathscr{R}_2 = \{\Phi_{\mathfrak{b}} : \mathscr{V}^\dagger_{\mathfrak{b}} \to \mathscr{V}^\dagger\}_{\mathfrak{b}\in\mathfrak{B}}$ seront dits «*isomorphes*» lorsqu'il existe une bijection $\beta : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ et des isomorphismes $\Psi \in \mathrm{Iso}_{\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}(\mathscr{U}^\dagger, \mathscr{V}^\dagger)$ et $\Psi_{\mathfrak{a}} \in \mathrm{Iso}_{\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}\big(\mathscr{U}^\dagger_{\mathfrak{a}}, \mathscr{V}^\dagger_{\beta(\mathfrak{a})}\big)$ tels que les diagrammes:

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{U}^\dagger_{\mathfrak{a}} & \xrightarrow{\Phi_{\mathfrak{a}}} & \mathscr{U}^\dagger \\ {\scriptstyle \Psi_{\mathfrak{a}}}\downarrow\simeq & & \simeq\downarrow{\scriptstyle \Psi} \\ \mathscr{V}^\dagger_{\beta(\mathfrak{a})} & \xrightarrow{\Phi_{\mathfrak{b}}} & \mathscr{V}^\dagger \end{array}$$

sont commutatifs pour tout $\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}$. La famille $\{\Psi_{\mathfrak{a}}; \Psi\}$ est alors appelée «*un isomorphisme de recouvrements de $\mathscr{R}_1$ vers $\mathscr{R}_2$*».

2.3.5. Proposition. *La catégorie $\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$, munie de la classe de recouvrements $\mathrm{Rec}(\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}})$, est une topologie de Grothendieck.*

Démonstration. Résulte immédiatement de la proposition 2.2 et de la remarque 2.2.1. ∎

2.3.6. Notations et terminologie

- On appellera «*site $\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$*», la donnée de la catégorie $\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ et de la classe $\mathrm{Rec}(\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}})$.
- Les objets de la catégorie $\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ seront appelés «*les ouverts du site $\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$*».
- On dira de deux ouverts $\mathscr{V}^\dagger$ et $\mathscr{U}^\dagger$ de $\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$, que «*$\mathscr{V}^\dagger$ est contenu dans $\mathscr{U}^\dagger$*», et l'on notera $\mathscr{V}^\dagger \subseteq \mathscr{U}^\dagger$, lorsqu'il en est ainsi des ouverts correspondants. On a donc $\mathscr{V}^\dagger \subseteq \mathscr{U}^\dagger$, si et seulement si, $V \subseteq U$.

2.4 Algébricité des recouvrements principaux de $\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$

Soient U un ouvert affine de $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{A} \twoheadrightarrow \Gamma(U;\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ un relèvement lisse sur $\boldsymbol{R}$. Notons $(U_{\boldsymbol{R}};\mathscr{O}_{U_{\boldsymbol{R}}})$ le schéma affine associé à $\boldsymbol{A}$. Tout recouvrement affine $U_{\boldsymbol{R}} = \bigcup_{\mathfrak{a}} V_{\boldsymbol{R},\mathfrak{a}}$ induit, par réduction modulo $\boldsymbol{I}$, un recouvrement affine $U = \bigcup_{\mathfrak{a}} V_{\mathfrak{a}}$ dans $\boldsymbol{X}$. Les complétions faibles des morphismes canoniques de relèvements:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(U_{\boldsymbol{R}};\mathscr{O}_{U_{\boldsymbol{R}}}) & \xrightarrow{\rho_{\mathfrak{a}}} & \Gamma(V_{\boldsymbol{R},\mathfrak{a}};\mathscr{O}_{U_{\boldsymbol{R}}}) \\ \downarrow\!\!\!\downarrow & & \downarrow\!\!\!\downarrow \\ \Gamma(U;\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}) & \xrightarrow{\rho} & \Gamma(V_{\mathfrak{a}};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}) \end{array}$$

donnent des morphismes de relèvements

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{A}(\mathscr{U}^\dagger) & \xrightarrow{\rho_{\mathfrak{a}}^\dagger} & \mathscr{A}(\mathscr{V}_{\mathfrak{a}}^\dagger) \\ {\scriptstyle p_U}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_{V_{\mathfrak{a}}}} \\ \Gamma(U;\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}) & \xrightarrow{\rho} & \Gamma(V_{\mathfrak{a}};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}) \end{array}$$

où l'on a noté $\mathscr{A}(\mathscr{U}^\dagger) := \Gamma(U_{\boldsymbol{R}};\mathscr{O}_{U_{\boldsymbol{R}}})^\dagger$ et $\mathscr{A}(\mathscr{V}_{\mathfrak{a}}^\dagger) := \Gamma(V_{\boldsymbol{R},\mathfrak{a}};\mathscr{O}_{U_{\boldsymbol{R}}})^\dagger$. Ces algèbres sont f.c.t.f. très lisses et les relèvements p_U et $p_{V_{\mathfrak{a}}}$ sont des ouverts de $\mathscr{X}_{\text{inf}}^\dagger$, notés $\mathscr{U}^\dagger$ et $\mathscr{V}_{\mathfrak{a}}^\dagger$ respectivement. La famille $\{\Phi_{\mathfrak{a}} : \mathscr{V}_{\mathfrak{a}}^\dagger \longrightarrow \mathscr{U}^\dagger\}$, définie par les morphismes $\rho_{\mathfrak{a}}^\dagger$, est donc un recouvrement de $\mathscr{X}_{\text{inf}}^\dagger$; il sera appelé « *la complétion faible du recouvrement (algébrique)* $\{V_{\boldsymbol{R},\mathfrak{a}}\}$ *de* $U_{\boldsymbol{R}}$ ».

2.4.1. Définition. Un recouvrement de $\mathscr{X}_{\text{inf}}^\dagger$ sera dit « *algébrique* » s'il est isomorphe à la complétion faible d'un recouvrement affine d'un relèvement lisse d'un ouvert affine de $\boldsymbol{X}$.

2.4.2. Proposition. *Tout recouvrement principal de* $\boldsymbol{X}_{\text{inf}}^\dagger$ *est algébrique.*

Démonstration. Soit $\mathscr{R} = \{\mathscr{U}_{\mathfrak{a}}^\dagger \to \mathscr{U}^\dagger\}_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{A}}$ un recouvrement principal de $\boldsymbol{X}_{\text{inf}}^\dagger$ et notons $\{U_{\mathfrak{a}} \subseteq U\}$ le recouvrement induit dans $\boldsymbol{X}$. Pour chaque ouvert $U_{\mathfrak{a}}$, on choisit $f_{\mathfrak{a}} \in \Gamma(U;\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ tel que $U_{\mathfrak{a}} = D(f_{\mathfrak{a}})$. Fixons un relèvement $p : \boldsymbol{A} \twoheadrightarrow \Gamma(U;\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ lisse sur $\boldsymbol{R}$ et, pour chaque $\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}$, un élément $g_{\mathfrak{a}} \in \boldsymbol{A}$ tel que $p(g_{\mathfrak{a}}) = f_{\mathfrak{a}}$. Comme $U = \bigcup_{\mathfrak{a}} D(f_{\mathfrak{a}})$, l'idéal de $\Gamma(U;\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ engendré par les $f_{\mathfrak{a}}$ contient 1 ; il existe, par conséquent, un élément g de l'idéal de $\boldsymbol{A}$ engendré par les $g_{\mathfrak{a}}$ vérifiant $p(g) = 1$ et le morphisme p induit un relèvement lisse $\boldsymbol{A}_g \twoheadrightarrow \Gamma(U;\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$. La famille $\{D(g_{\mathfrak{a}})\}$ est maintenant un recouvrement (principal) du schéma affine $(U_{\boldsymbol{R}};\mathscr{O}_{U_{\boldsymbol{R}}})$ associé à $\boldsymbol{A}_g$ qui relève, par construction, le recouvrement $\{D(f_{\mathfrak{a}})\}$ de U. Notons $\mathscr{R}' = \{\mathscr{V}_{\mathfrak{a}}^\dagger \longrightarrow \mathscr{V}^\dagger\}$ le recouvrement de $\mathscr{X}_{\text{inf}}^\dagger$ obtenu par complétion faible de la famille d'inclusions $\{D(g_{\mathfrak{a}}) \subseteq U_{\boldsymbol{R}}\}$. On a $\mathscr{V}_{\mathfrak{a}}^\dagger \simeq \mathscr{U}_{\mathfrak{a}}^\dagger$ et $\mathscr{V}^\dagger \simeq \mathscr{U}^\dagger$ et la proposition 1.1 établit l'existence, pour tout $\Psi \in \mathrm{Iso}_{\boldsymbol{X}_{\text{inf}}^\dagger}(\mathscr{V}^\dagger,\mathscr{U}^\dagger)$ donné, d'une famille $\{\Psi_{\mathfrak{a}} \in \mathrm{Iso}_{\mathscr{X}_{\text{inf}}^\dagger}(\mathscr{V}_{\mathfrak{a}}^\dagger,\mathscr{U}_{\mathfrak{a}}^\dagger)\}$ telle que $\{\Psi_{\mathfrak{a}};\Psi\}$ est un isomorphisme de $\mathscr{R}'$ vers $\mathscr{R}$. Le recouvrement $\mathscr{R}$ est donc bien algébrique. ∎

2.4.3. Remarque. La proposition 1.1 montre que tout morphisme entre deux ouverts $\mathscr{V}^\dagger \subseteq \mathscr{U}^\dagger$ de $\mathscr{X}_{\text{inf}}^\dagger$, d'ouverts correspondants $V \subseteq U$, est isomorphe à la complétion faible d'un morphisme lisse $\alpha : V_{\boldsymbol{R}} \to U_{\boldsymbol{R}}$ entre deux relèvements, lisses sur $\boldsymbol{R}$, de V et de U respectivement, mais cette proposition n'établit pas l'existence d'un tel α, qui soit en plus un plongement ouvert. La démonstration précédente prouve que c'est toujours le cas lorsque V est principal dans U.

2.5 Préfaisceaux et faisceaux sur $\mathscr{X}_{\text{inf}}^\dagger$

Dans cet article nous nous intéresserons uniquement aux préfaisceaux de $\boldsymbol{R}$-modules sur $\mathscr{X}_{\text{inf}}^\dagger$, c'est-à-dire aux foncteurs contravariants de la catégorie $\mathscr{X}_{\text{inf}}^\dagger$ vers la catégorie $\mathrm{Mod}(\boldsymbol{R})$ des $\boldsymbol{R}$-modules. Pour tout préfaisceau $\mathscr{P} : \mathscr{X}_{\text{inf}}^\dagger \rightsquigarrow \mathrm{Mod}(\boldsymbol{R})$ et tout morphisme

$\varPhi \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}(\mathscr{V}^\dagger, \mathscr{U}^\dagger)$, le morphisme de $\boldsymbol{R}$-modules $\mathscr{P}(\varPhi) : \mathscr{P}(\mathscr{U}^\dagger) \to \mathscr{P}(\mathscr{V}^\dagger)$ est appelé « *le morphisme de restriction associé à $\varPhi$ par $\mathscr{P}$* ».

Enfin, un préfaisceau $\mathscr{P}$ est dit « *faisceau sur le site $\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$* » lorsque pour tout recouvrement $\mathscr{R} = \{\varPhi_{\mathfrak{a}} : \mathscr{U}^\dagger_{\mathfrak{a}} \to \mathscr{U}^\dagger\}_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{A}}$ du site $\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$, la suite de $\boldsymbol{R}$-modules :

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbf{0} \to \mathscr{P}(\mathscr{U}^\dagger) & \xrightarrow{\Pi_{\mathscr{R}}} & \displaystyle\prod_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{A}} \mathscr{P}(\mathscr{U}^\dagger_{\mathfrak{a}}) & \xrightarrow{\Delta_{\mathscr{R}}} & \displaystyle\prod_{\mathfrak{a},\mathfrak{a}'\in\mathfrak{A}} \mathscr{P}(\mathscr{U}^\dagger_{\mathfrak{a}} \times_{\mathscr{U}^\dagger} \mathscr{U}^\dagger_{\mathfrak{a}'}) \\
m & \xmapsto{\Pi_{\mathscr{R}}} & \big(\mathscr{P}(\varPhi_{\mathfrak{a}})(m)\big)_{\mathfrak{a}} & & \\
 & & (m_{\mathfrak{a}})_{\mathfrak{a}} & \xmapsto{\Pi_{\mathscr{R}}} & \big(\mathscr{P}(\xi_{\mathfrak{a}})(m_{\mathfrak{a}}) - \mathscr{P}(\xi_{\mathfrak{a}'})(m_{\mathfrak{a}'})\big)_{\mathfrak{a},\mathfrak{a}'}
\end{array} \qquad (\mathscr{P}(\mathscr{R}))$$

où $\xi_{\mathfrak{a}} : \mathscr{U}^\dagger_{\mathfrak{a}} \times_{\mathscr{U}^\dagger} \mathscr{U}^\dagger_{\mathfrak{a}'} \to \mathscr{U}^\dagger_{\mathfrak{a}}$ (resp. $\xi_{\mathfrak{a}'}$) désigne le morphisme canonique de 2.2, est exacte.

2.5.1. Proposition. *Un préfaisceau de $\boldsymbol{R}$-modules $\mathscr{P}$ est un faisceau sur $\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$, si et seulement si, la suite $\mathscr{P}(\mathscr{R})$ est exacte pour tout recouvrement* ***fini et principal*** *$\mathscr{R}$ de $\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$.*

Démonstration. Soit $\mathscr{P}$ un préfaisceau vérifiant la condition de la proposition. Nous devons prouver que pour tout recouvrement $\mathscr{R} = \{\varPhi_{\mathfrak{a}} : \mathscr{U}^\dagger_{\mathfrak{a}} \longrightarrow \mathscr{U}^\dagger\}_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{A}}$, la suite de $\boldsymbol{R}$-modules :

$$\mathbf{0} \to \mathscr{P}(\mathscr{U}^\dagger) \xrightarrow{\Pi_{\mathscr{R}}} \prod_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{A}} \mathscr{P}(\mathscr{U}^\dagger_{\mathfrak{a}}) \xrightarrow{\Delta_{\mathscr{R}}} \prod_{\mathfrak{a},\mathfrak{a}'\in\mathfrak{A}} \mathscr{P}(\mathscr{U}^\dagger_{\mathfrak{a}} \times_{\mathscr{U}^\dagger} \mathscr{U}^\dagger_{\mathfrak{a}'}) \qquad (*)$$

est exacte.

Remarquons pour commencer que l'exactitude des suites $(*)$ associées aux recouvrements *finis* de $\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ implique l'exactitude des suites $\mathscr{P}(\mathscr{R})$ en toute généralité. En effet, comme l'ouvert U correspondant à $\mathscr{U}^\dagger$ est affine, il existe une partie finie $\mathfrak{A}' = \{\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r\} \subseteq \mathfrak{A}$ telle que $\mathscr{R}' = \{\varPhi_{\mathfrak{a}_i} : \mathscr{U}^\dagger_{\mathfrak{a}_i} \longrightarrow \mathscr{U}^\dagger\}_{i=1,\ldots,r}$ est un recouvrement de $\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$. La suite $(*)$ associée à $\mathscr{R}'$ est alors exacte. L'injectivité de $\Pi_{\mathscr{R}'}$ entraîne celle de $\Pi_{\mathscr{R}}$ et lorsque $\bar{x} := (x_{\mathfrak{a}})$ (‡) est un élément de $\prod_{\mathfrak{a}} \mathscr{P}(\mathscr{U}^\dagger_{\mathfrak{a}})$ annulé par $\Delta_{\mathscr{R}}$, l'élément $\bar{x}' := (x_{\mathfrak{a}_i}) \in \prod_{i=1,\ldots,r} \mathscr{P}(\mathscr{U}^\dagger_{\mathfrak{a}_i})$ est annulé par $\Delta_{\mathscr{R}'}$ et il existe $y_{\mathscr{R}'} \in \mathscr{P}(\mathscr{U}^\dagger)$ (unique) tel que $\phi_{\mathfrak{a}_i}(y_{\mathscr{R}'}) = x_{\mathfrak{a}_i}$, pour tout $i = 1, \ldots, r$. Ces raisonnements s'appliquent évidemment à tout sous-recouvrement fini $\mathscr{R}''$ de $\mathscr{R}$, en particulier à ceux indexés par les parties $\mathfrak{A}'' \subseteq \mathfrak{A}$ de la forme $\mathfrak{A}'' := \mathfrak{A}' \cup \{\mathfrak{a}\}$, avec $\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}$. L'élément $y_{\mathscr{R}''} \in \mathscr{P}(\mathscr{U}^\dagger)$, correspondant au même choix (‡) de $\bar{x}$, est alors nécessairement égal à $y_{\mathscr{R}'}$ puisque $\Pi_{\mathscr{R}'}$ est injective. Il s'ensuit que $\phi_{\mathfrak{a}}(y_{\mathscr{R}'}) = x_{\mathfrak{a}}$ pour tout $\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}$, et la suite $(*)$ est exacte.

Lorsque $\mathscr{R} = \{\mathscr{U}^\dagger_{\mathfrak{a}} \to \mathscr{U}\}_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{A}}$ est un recouvrement fini quelconque de recouvrement correspondant $U = \bigcup_{\mathfrak{a}} U_{\mathfrak{a}}$, on se donne pour chaque $\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}$ un recouvrement fini $U_{\mathfrak{a}} = \bigcup_{\mathfrak{b}\in\mathfrak{B}} U_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ par des ouverts *principaux dans U* et un recouvrement $\mathscr{R}_{\mathfrak{a}} = \{\varPhi_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} : \mathscr{U}^\dagger_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \to \mathscr{U}_{\mathfrak{a}}\}$ de $\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ le relevant. Le recouvrement $\mathscr{R}_{\mathfrak{a}}$ est alors fini et principal de même que le recouvrement composé $\mathscr{R}_* = \{\mathscr{U}_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}} \to \mathscr{U}\}$ et les suites $\mathscr{P}(\mathscr{R}_{\mathfrak{a}})$ et $\mathscr{P}(\mathscr{R}_*)$ sont exactes par hypothèse. On considère alors le morphisme de complexes :

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbf{0}\to\mathscr{P}(\mathscr{U}^\dagger) & \xrightarrow{\Pi_{\mathscr{R}}} & \prod\limits_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{A}} \mathscr{P}(\mathscr{U}^\dagger_{\mathfrak{a}}) & \xrightarrow{\Delta_{\mathscr{R}}} & \prod\limits_{\mathfrak{a},\mathfrak{a}'\in\mathfrak{A}} \mathscr{P}(\mathscr{U}^\dagger_{\mathfrak{a}}\times_{\mathscr{U}^\dagger}\mathscr{U}^\dagger_{\mathfrak{a}'}) \\
\Big\| & & \Big\downarrow{\scriptstyle \prod\phi_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}} & & \Big\downarrow \\
\mathbf{0}\to\mathscr{P}(\mathscr{U}^\dagger) & \xrightarrow{\Pi_{\mathscr{R}_*}} & \prod\limits_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{A};\mathfrak{b}\in\mathfrak{B}} \mathscr{P}(\mathscr{U}^\dagger_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}) & \xrightarrow{\Delta_{\mathscr{R}_*}} & \prod\limits_{\mathfrak{a},\mathfrak{a}'\in\mathfrak{A};\mathfrak{b},\mathfrak{b}'\in\mathfrak{B}} \mathscr{P}(\mathscr{U}^\dagger_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}\times_{\mathscr{U}^\dagger}\mathscr{U}^\dagger_{\mathfrak{a}',\mathfrak{b}'})
\end{array}$$

où les morphismes verticaux sont donnés par les produits des morphismes de restriction. Pour tout $(x_{\mathfrak{a}})\in\ker(\Delta_{\mathscr{R}})$, l'élément $(y_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}):=\prod\phi_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}((x_{\mathfrak{a}}))$ appartient donc à $\ker(\Delta(\mathscr{R}_*))$ et il existe un élément de $x\in\mathscr{A}(\mathscr{U}^\dagger)$ tel que $\Pi_{\mathscr{R}_*}(x)=(y_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}})$. L'égalité $\Pi_{\mathscr{R}}(x)=(x_{\mathfrak{a}})$ découle alors de l'injectivité de $\prod\phi_{\mathfrak{a},\mathfrak{b}}$ (pour chaque $\mathfrak{a}$ donné). ∎

§ 3. Faisceau structural de $\mathscr{X}^\dagger_{\mathbf{inf}}$

3.1 Étude préliminaire

3.1.1. Lemme. *On se donne un élément P et un idéal $\boldsymbol{K}$ de l'algèbre de polynômes $\boldsymbol{R}[\overline{X}]:=\boldsymbol{R}[X_1,\dots,X_\ell]$. Pour tous $m,n\in\mathbb{N}$, on note $\boldsymbol{I}^n[\overline{X}]_m$ le sous-$\boldsymbol{R}$-module des polynômes de $\boldsymbol{R}[\overline{X}]$ à coefficients dans $\boldsymbol{I}^n$ et de degré total majoré par m.*

Il existe des entiers positifs $N(P,\boldsymbol{K})$ et $M(P,\boldsymbol{K})$, tels que les ensembles constitués des éléments $Q\in\boldsymbol{I}^n[\overline{X}]$ vérifiant respectivement les propriétés $(\mathrm{C1}(n))$ et $(\mathrm{C2}(n))$:

$$\begin{cases} (\mathrm{C1}(n)) : P^N Q\in\big(\boldsymbol{K}+\boldsymbol{I}^{n+1}[\overline{X}]\big), \textit{ pour } N \textit{ assez grand ;}\\ (\mathrm{C2}(n)) : P^{N(P,\boldsymbol{K})}Q\in\big(\boldsymbol{K}+\boldsymbol{I}^{n+1}[\overline{X}]_{m+M(P,\boldsymbol{K})}\big), \textit{ lorsque } Q\in\boldsymbol{I}^n[\overline{X}]_m \textit{ ;}\end{cases}$$

sont égaux, quel que soit $n\in\mathbb{N}$.

Plus généralement, si $Q\in\boldsymbol{I}^n[\overline{X}]_m$ et si $P^NQ\in\big(\boldsymbol{K}+\boldsymbol{I}^{n+r}[\overline{X}]\big)$, pour N assez grand et pour un certain $r\in\mathbb{N}$, on a :

$$P^{rN(P,\boldsymbol{K})}Q\in\big(\boldsymbol{K}+\boldsymbol{I}^{n+r}[\overline{X}]_{m+rM(P,\boldsymbol{K})}\big).$$

Démonstration. Pour chaque $n,m\in\mathbb{N}$, notons $F^{n,m}(\boldsymbol{I};\boldsymbol{R}[\overline{X}]):=\boldsymbol{I}^n[\overline{X}]_m\,U^nT^m$, où U et T désignent des variables formelles. On munit $F^{n,m}(\boldsymbol{I};\boldsymbol{R}[\overline{X}])$ de la structure de $\boldsymbol{R}$-module de $\boldsymbol{I}^n[\overline{X}]_m$ et l'on considère $F^{*,*}(\boldsymbol{I};\boldsymbol{R}[\overline{X}]):=\bigoplus_{n,m\in\mathbb{N}}\boldsymbol{I}^n[\overline{X}]_m\,U^nT^m$ muni de la structure de $\boldsymbol{R}$-algèbre positivement graduée donnée par les égalités :

$$Q_1U^{n_1}T^{m_1}\cdot Q_2U^{n_2}T^{m_2}:=Q_1Q_2\,U^{n_1+n_2}T^{m_1+m_2},$$

pour tous $n_i,m_i\in\mathbb{N}$ et $Q_i\in\boldsymbol{I}^{n_i}[\overline{X}]_{m_i}$. La $\boldsymbol{R}$-sous-algèbre

$$F^{0,*}(\boldsymbol{I};\boldsymbol{R}[\overline{X}])=\boldsymbol{R}\oplus\boldsymbol{R}[\overline{X}]_1T\oplus\boldsymbol{R}[\overline{X}]_2T^2\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{R}[\overline{X}]_mT^m\oplus\cdots$$

est engendrée par $\boldsymbol{R}\oplus\boldsymbol{R}[\overline{X}]_1T$, et $F^{*,*}(\boldsymbol{I};\boldsymbol{R}[\overline{X}])$ par $\boldsymbol{R}\oplus\boldsymbol{I}U$ en tant que $F^{0,*}(\boldsymbol{I};\boldsymbol{R}[\overline{X}])$-algèbre. Il s'ensuit que $F^{*,*}(\boldsymbol{I};\boldsymbol{R}[\overline{X}])$ est une $\boldsymbol{R}$-algèbre de type fini et $F^{*,*}(\boldsymbol{I};\boldsymbol{R}[\overline{X}])$ est donc un anneau nœthérien.

Ceci étant, l'ensemble des éléments $Q \in \boldsymbol{R}[\overline{X}]$ vérifiant $(\mathrm{C2}(n))$ est contenu dans l'ensemble des éléments vérifiant $(\mathrm{C1}(n))$ et nous avons uniquement à prouver l'inclusion réciproque.

L'ensemble $\boldsymbol{M} \subseteq F^{*,*}(\boldsymbol{I};\boldsymbol{R}[\overline{X}])$ des sommes finies $\sum_{n,m} Q_{n,m} U^n T^m$ où $Q_{n,m}$ vérifie la condition $(\mathrm{C1}(n))$ est un idéal de $F^{*,*}(\boldsymbol{I};\boldsymbol{R}[\overline{X}])$, il est donc de type fini et l'existence de $N(P,\boldsymbol{K})$ s'ensuit.

De même, pour chaque $M \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\boldsymbol{M}(M)$ des éléments $\sum_{n,m} Q_{n,m} U^n T^m$ de $\boldsymbol{M}$ tels que $P^{N(P,\boldsymbol{K})} Q_{n,m} \in \big(\boldsymbol{K} + \boldsymbol{I}^{n+1}[\overline{X}]_{m+M}\big)$, est un idéal de $F^{*,*}(\boldsymbol{I};\boldsymbol{R}[\overline{X}])$, et comme $\boldsymbol{M}$ est la réunion de la suite croissante d'idéaux $\boldsymbol{M}(0) \subseteq \boldsymbol{M}(1) \subseteq \cdots \boldsymbol{M}(M) \subseteq \cdots$, on a $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}(M)$ pour M assez grand et l'on peut prendre pour $M(P,\boldsymbol{K})$ la borne inférieure de tels M.

La conclusion finale résulte d'un argument inductif évident. ∎

3.1.2. Étant donnés un module $\boldsymbol{M}$ sur une $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$ et une famille finie $\{f_1,\dots,f_r\} \subseteq \boldsymbol{A}$, on note $\nu_i : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{A}_{f_i} \otimes_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{M} =: \boldsymbol{M}_{f_i}$ et $\nu_{i,i'} : \boldsymbol{M}_{f_i} \to \boldsymbol{M}_{f_i f_{i'}}$ les morphismes canoniques. On considère alors le complexe :

$$\begin{array}{ccccc} \boldsymbol{M} & \xrightarrow{\quad\Pi\quad} & \prod_{i=1}^r \boldsymbol{M}_{f_i} & \xrightarrow{\quad\Delta\quad} & \prod_{i,i'=1}^r \boldsymbol{M}_{f_i f_{i'}} \\ m & \longmapsto & (\nu_i(m))_i & & \\ & & (\mu_i)_i & \longmapsto & (\nu_{i,i'}(\mu_i) - \nu_{i',i}(\mu_{i'}))_{i,i'} \end{array}$$

Il est bien connu que lorsque l'idéal engendré par $\{f_1,\dots,f_r\}$ est l'anneau $\boldsymbol{A}$ tout entier, la suite de $\boldsymbol{R}$-modules :

$$\boldsymbol{0} \to \boldsymbol{M} \xrightarrow{\ \Pi\ } \prod_{i=1}^r \boldsymbol{M}_{f_i} \xrightarrow{\ \Delta\ } \prod_{i,i'=1}^r \boldsymbol{M}_{f_i f_{i'}} \tag{1}$$

est exacte. Rappelons rapidement la démonstration classique de cet énoncé basée essentiellement sur le fait que le noyau du morphisme canonique $\boldsymbol{M} \to \boldsymbol{M}_f = \boldsymbol{A}_f \otimes_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{M}$ est le sous-module des éléments de $\boldsymbol{M}$ annulés par une puissance assez grande de f.

Les éléments du noyau de Π sont les $m \in \boldsymbol{M}$ tels $f_i^{N_0} m = 0$ pour un entier positif N_0 assez grand. En prenant une relation $1 = \sum_{i=1}^r \zeta_i f_i^{N_0}$, obtenue par exemple à partir d'une relation $1 = \sum_{i=1}^r \xi_i f_i$ en développant $1 = \big(\sum_{i=1}^r \xi_i f_i\big)^{rN_0}$, on déduit que $m = \sum_i \zeta_i f_i^{N_0} m = 0$. Ensuite, lorsque l'on se donne des éléments $\mu_i = \nu_i(m_i)/f_i^N \in \boldsymbol{M}_{f_i}$, la condition $\mu_i = \mu_{i'}$ dans $\boldsymbol{M}_{f_i f_{i'}}$, équivaut à la condition :

$$(f_i f_{i'})^M \big(f_{i'}^N m_i - f_i^N m_{i'}\big) = 0\,,$$

pour un certain $M \in \mathbb{N}$ assez grand. On choisit alors une relation de la forme $1 = \sum_{i=1}^r \zeta_i f_i^{M+N}$ et l'on pose :

$$m := \sum_{i=1}^r \zeta_i\, f_i^M m_i \in \boldsymbol{M}\,.$$

Cet élément vérifie alors l'égalité $\nu_i(\mu) = \mu_i$ pour tout $i = 1,\dots,r$.

Dans le théorème suivant nous allons prouver par les mêmes idées que l'analogue †-adique de (1), à savoir la suite :

$$\mathbf{0} \to \boldsymbol{M}^\dagger \xrightarrow{\Pi^\dagger} \prod_{i=1}^{r} (\boldsymbol{A}_{f_i})^\dagger \underset{\boldsymbol{A}^\dagger}{\otimes} \boldsymbol{M} \xrightarrow{\Delta^\dagger} \prod_{i,i'=1}^{r} (\boldsymbol{A}_{f_i f_{i'}})^\dagger \underset{\boldsymbol{A}^\dagger}{\otimes} \boldsymbol{M},$$

est exacte quel que soit le $\boldsymbol{A}^\dagger$-module $\boldsymbol{M}$. Comme dans le rappel ci-dessus, on aura besoin de la description du noyau du morphisme canonique $\nu_f^\dagger : \boldsymbol{M} \to (\boldsymbol{A}_f)^\dagger \otimes \boldsymbol{M}$.

3.1.3. Lemme. *Soit f un élément d'une $\boldsymbol{R}$-algèbre lisse $\boldsymbol{A}$. Soit $\boldsymbol{M}$ un $\boldsymbol{A}^\dagger$-module. Le noyau du morphisme canonique $\nu_f^\dagger : \boldsymbol{M} \to (\boldsymbol{A}_f)^\dagger \otimes_{\boldsymbol{A}^\dagger} \boldsymbol{M}$ est le sous-module des éléments $m \in \boldsymbol{M}$ tels que $(f^N + w)\cdot m = 0$, pour certains $N \in \mathbb{N}$ et $w \in \boldsymbol{I}\boldsymbol{A}^\dagger$.*

Démonstration. Supposons dans un premier temps le module $\boldsymbol{M}$ de type fini sur $\boldsymbol{A}^\dagger$. Le $(\boldsymbol{A}_f)^\dagger$-module $(\boldsymbol{A}_f)^\dagger \otimes \boldsymbol{M}$ est alors de type fini, donc séparé, pour le topologie $\boldsymbol{I}$-adique et le noyau du morphisme canonique :

$$\boldsymbol{M}_f := (\boldsymbol{A}^\dagger)_f \otimes \boldsymbol{M} \xrightarrow{\mu} (\boldsymbol{A}_f)^\dagger \otimes \boldsymbol{M}$$

contient, par conséquent, l'adhérence $\bar{0}$ de 0 dans $\boldsymbol{M}_f$ pour la topologie $\boldsymbol{I}$-adique. D'autre part, les réductions modulo $\boldsymbol{I}^m$ sont des isomorphismes et un élément du noyau de μ appartient à $\bar{0}$. Il s'ensuit que $\ker(\mu) = \bar{0}$. Or, comme $(\boldsymbol{A}^\dagger)_f$ est nœthérien et que $\boldsymbol{M}_f$ est un $(\boldsymbol{A}^\dagger)_f$-module de type fini, on a par ailleurs $\boldsymbol{I}\cdot\bar{0} = \bar{0}$, et $z \in \ker(\mu)$, si et seulement si, $(1+w)\cdot z = 0$ pour un certain $w \in \boldsymbol{I}\cdot(\boldsymbol{A}^\dagger)_f$; autrement dit, si et seulement si, $(f^N + w)\cdot z = 0$ pour certains $N \in \mathbb{N}$ et $w \in \boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{A}^\dagger$. On conclut en remarquant que $\nu_f^\dagger$ se factorise à travers le morphisme canonique $\nu_f : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{M}_f$, *i.e.* $\nu_f^\dagger = \mu \circ \nu_f$, de sorte que $\nu_f^\dagger(m) = 0$, si et seulement si, $\nu_f(m) \in \bar{0}$, autrement dit, si et seulement si, $\nu_f\big((f^N + w)m\big) = 0$, ou encore $f^M\big((f^N + w)m\big) = 0$ pour certains $M, N \in \mathbb{N}$ et $w \in \boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{A}^\dagger$.

Dans le cas où $\boldsymbol{M}$ est un $\boldsymbol{A}^\dagger$-module arbitraire, notons (m) le sous-module de $\boldsymbol{M}$ engendré par un élément $m \in \boldsymbol{M}$. On a alors le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
(m) \arrow[r, hook, "\subseteq"] \arrow[d, "\nu_f^\dagger((m))"'] & \boldsymbol{M} \arrow[d, "\nu_f^\dagger(\boldsymbol{M})"] \\
(\boldsymbol{A}_f)^\dagger \otimes (m) \arrow[r, hook, "\mathrm{id}\otimes\subseteq"] & (\boldsymbol{A}_f)^\dagger \otimes \boldsymbol{M}
\end{tikzcd}$$

où $(\mathrm{id}\otimes \subseteq)$ est injectif puisque l'algèbre $(\boldsymbol{A}_f)^\dagger$ est plate sur $\boldsymbol{A}^\dagger$. Il s'ensuit que m appartient au noyau de $\nu_f^\dagger(\boldsymbol{M})$, si et seulement si, il appartient au noyau de $\nu_f^\dagger((m))$ déjà étudié dans le paragraphe précédent. ■

3.1.4. Théorème. *Soit $\boldsymbol{A}$ une algèbre lisse sur $\boldsymbol{R}$ et $\{f_1, \ldots, f_r\}$ une famille d'éléments de $\boldsymbol{A}$ dont l'idéal engendré est l'anneau $\boldsymbol{A}$ tout entier. Pour tout $\boldsymbol{A}^\dagger$-module $\boldsymbol{M}$, la suite :*

$$\mathbf{0}\to \boldsymbol{M}\xrightarrow{\ \Pi^\dagger\ }\prod\nolimits_{i=1}^r(\boldsymbol{A}_{f_i})^\dagger\underset{\boldsymbol{A}^\dagger}{\otimes}\boldsymbol{M}\xrightarrow{\ \Delta^\dagger\ }\prod\nolimits_{i,i'=1}^r(\boldsymbol{A}_{f_if_{i'}})^\dagger\underset{\boldsymbol{A}^\dagger}{\otimes}\boldsymbol{M}\,,$$

analogue †-adique de (1), *est exacte.*

Démonstration

Injectivité de $\Pi^\dagger$. Pour $m\in\ker(\Pi^\dagger)$, on a $\nu_i^\dagger(m)=0$ pour $i=1,\dots,r$. Il existe donc, par le lemme 3.1.3, des entiers N_i est des éléments $w_i\in\boldsymbol{I}{\cdot}\boldsymbol{A}^\dagger$ tels que $(f_i^{N_i}+w_i){\cdot}m=0$. Comme $(f_1,\dots,f_r)=\boldsymbol{A}$, l'idéal $\mathrm{Annul}_{\boldsymbol{A}^\dagger}(m)$ contient un élément de la forme $(1+w)$ avec $w\in\boldsymbol{I}{\cdot}\boldsymbol{A}^\dagger$ et donc $\mathrm{Annul}_{\boldsymbol{A}^\dagger}(m)=\boldsymbol{A}^\dagger$.

Exactitude du terme central. Il suffira de la démontrer dans le cas où $\boldsymbol{M}$ est un $\boldsymbol{A}^\dagger$-module *cyclique*. En effet, comme les algèbres $(\boldsymbol{A}_f)^\dagger$ sont plates sur $\boldsymbol{A}^\dagger$, les colonnes du complexe :

$$\begin{array}{ccccc}
 & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0}\\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow\\
\mathbf{0}\to & \boldsymbol{M}_1 & \xrightarrow{\ \Pi^\dagger\ } & \prod_{i=1}^r(\boldsymbol{A}_{f_i})^\dagger\otimes\boldsymbol{M}_1 & \xrightarrow{\ \Delta^\dagger\ } & \prod_{i,i'=1}^r(\boldsymbol{A}_{f_if_{i'}})^\dagger\otimes\boldsymbol{M}_1\\
 & {\scriptstyle\alpha}\big\downarrow & & {\scriptstyle\mathrm{id}\otimes\alpha}\big\downarrow & & {\scriptstyle\mathrm{id}\otimes\alpha}\big\downarrow\\
\mathbf{0}\to & \boldsymbol{M}_2 & \xrightarrow{\ \Pi^\dagger\ } & \prod_{i=1}^r(\boldsymbol{A}_{f_i})^\dagger\otimes\boldsymbol{M}_2 & \xrightarrow{\ \Delta^\dagger\ } & \prod_{i,i'=1}^r(\boldsymbol{A}_{f_if_{i'}})^\dagger\otimes\boldsymbol{M}_2\\
 & {\scriptstyle\beta}\big\downarrow & & {\scriptstyle\mathrm{id}\otimes\beta}\big\downarrow & & {\scriptstyle\mathrm{id}\otimes\beta}\big\downarrow\\
\mathbf{0}\to & \boldsymbol{M}_3 & \xrightarrow{\ \Pi^\dagger\ } & \prod_{i=1}^r(\boldsymbol{A}_{f_i})^\dagger\otimes\boldsymbol{M}_3 & \xrightarrow{\ \Delta^\dagger\ } & \prod_{i,i'=1}^r(\boldsymbol{A}_{f_if_{i'}})^\dagger\otimes\boldsymbol{M}_3\\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow\\
 & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0}
\end{array}$$

sont exactes pour peu que la première colonne de $\boldsymbol{A}^\dagger$-modules le soit. Il s'ensuit que si l'exactitude centrale est établie pour les $\boldsymbol{A}^\dagger$-modules cycliques, elle sera valable d'abord pour tout module de type de type fini et ensuite pour tout module puisque limite inductive de modules de type fini.

Nous supposons donc à partir de maintenant que $\boldsymbol{M}$ est cyclique de générateur noté $\mathbf{m}$.

On commence par remarquer que dans le morphisme canonique de complexes :

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbf{0}\to & \boldsymbol{M} & \xrightarrow{\ \Pi^\dagger\ } & \prod_{i=1}^r(\boldsymbol{A}_{f_i})^\dagger\otimes\boldsymbol{M} & \xrightarrow{\ \Delta^\dagger\ } & \prod_{i,i'=1}^r(\boldsymbol{A}_{f_if_{i'}})^\dagger\otimes\boldsymbol{M}\\
 & {\scriptstyle\subseteq}\big\downarrow & & {\scriptstyle\subseteq}\big\downarrow & & {\scriptstyle\subseteq}\big\downarrow\\
\mathbf{0}\to & \widehat{\boldsymbol{A}}\otimes\boldsymbol{M} & \xrightarrow{\ \Pi^\wedge\ } & \prod_{i=1}^r\widehat{\boldsymbol{A}_{f_i}}\otimes\boldsymbol{M} & \xrightarrow{\ \Delta^\wedge\ } & \prod_{i,i'=1}^r\widehat{\boldsymbol{A}_{f_if_{i'}}}\otimes\boldsymbol{M}
\end{array}$$

les colonnes sont injectives puisque leurs réductions modulo les puissances $\boldsymbol{I}^m$ sont bijectives et que tous les modules considérés sont séparés pour la topologie $\boldsymbol{I}$-adique puisque $\boldsymbol{M}$ est de type fini. De même, la deuxième ligne est exacte puisqu'il en est ainsi de ses réductions modulo $\boldsymbol{I}^m$. Il s'ensuit que pour tout élément $\overline{z}=(z_1,\dots,z_r)$

de $\prod_{i=1,\dots,r}(\boldsymbol{A}_{f_i})^\dagger \otimes \boldsymbol{M}$ annulé par $\Delta^\dagger$, donc par $\Delta^{\widehat{}}$, il existe un (unique) élément $z \in \widehat{\boldsymbol{A}} \otimes \boldsymbol{M}$ tel que $\Pi^{\widehat{}}(z) = \bar{z}$. Nous allons prouver que $z \in \boldsymbol{M}$.

Un élément $\bar{z} \in \prod_{i=1}^r (\boldsymbol{A}_{f_i})^\dagger \otimes \boldsymbol{M}$ est la donnée de r familles finies $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_r$ (que l'on peut toujours supposer du même cardinal ℓ) avec $\bar{x}_i = \{x_{i,1}, \dots, x_{i,\ell}\} \subseteq \boldsymbol{A}_{f_i}$, et des suites :

$$\big(p_{i,0}(\overline{X}_i), p_{i,1}(\overline{X}_i), p_{i,2}(\overline{X}_i), \dots, p_{i,n}(\overline{X}_i), \dots\big)_i, \qquad \text{pour } i = 1, \dots, r,$$

de polynômes de $\boldsymbol{R}[\overline{X}_i] := \boldsymbol{R}[X_{i,1}, \dots, X_{i,\ell}]$ vérifiant

$$\begin{cases} p_{i,n} \in \boldsymbol{I}^n[\overline{X}_i], \quad \text{et} \\ \deg_{\overline{X}_i}\big(p_{i,n}\big) \leqslant C(n+1), \end{cases}$$

pour une certaine constante $C \in \mathbb{N}$, pour tout $i = 1, \dots, r$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$. L'élément $\bar{z}$ est alors l'élément de $\prod_{i=1}^r \widehat{\boldsymbol{A}_{f_i}} \otimes \boldsymbol{M}$ défini par la série :

$$\bar{z} = \sum_{n \geqslant 0} \begin{pmatrix} p_{1,n}(x_{1,1}, \dots, x_{1,\ell}) \otimes \mathbf{m} \\ \vdots \\ p_{r,n}(x_{r,1}, \dots, x_{r,\ell}) \otimes \mathbf{m} \end{pmatrix} \tag{$*$}$$

Par finitude de l'ensemble $\{x_{i,j}\}$, il existe un entier N, indépendant de (i,j), tel que :

$$x_{i,j} = \frac{a_{i,j}}{f_i^N}, \quad \text{pour un certain } a_{i,j} \in \boldsymbol{A}.$$

Notons $\bar{a}$ la famille de $r\ell$ éléments de $\boldsymbol{A}$: $\bar{a} = \{\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_r\} = \{a_{1,1}, \dots, a_{1,\ell}, \dots, a_{r,1}, \dots, a_{r,\ell}\}$, ainsi déterminée. En remplaçant $X_{i,j}$ par $A_{i,j}/F_i$, où $A_{i,j}$ et F_i désignent de nouvelles variables, on a :

$$p_{i,n}(X_{i,1}, \dots, X_{i,\ell}) = p_{i,n}\Big(\frac{A_{i,1}}{F_i}, \dots, \frac{A_{i,\ell}}{F_i}\Big) = \frac{q_{i,n}(A_{i,1}, \dots, A_{i,\ell}, F_i)}{F_i^{C(n+1)}},$$

avec clairement :

$$\begin{cases} q_{i,n} \in \boldsymbol{I}^n[\overline{A}_i, F_i], \quad \text{et} \\ \deg_{\overline{A}_i, F_i}(q_{i,n}) = C(n+1). \end{cases}$$

L'élément $\bar{z}$ s'exprime donc également comme somme de la série :

$$\bar{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ z_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{n \geqslant 0} z_{1,n} \\ \vdots \\ \sum_{n \geqslant 0} z_{r,n} \end{pmatrix} = \sum_{n \geqslant 0} \begin{pmatrix} \dfrac{q_{1,n}(a_{1,1}, \dots, a_{1,\ell}, f_1^N)}{(f_1^N)^{C(n+1)}} \otimes \mathbf{m} \\ \vdots \\ \dfrac{q_{r,n}(a_{r,1}, \dots, a_{r,\ell}, f_r^N)}{(f_r^N)^{C(n+1)}} \otimes \mathbf{m} \end{pmatrix} \tag{$**$}$$

Ceci étant, on choisit des éléments $\xi_1, \dots, \xi_r \in \boldsymbol{A}$ tels que $1 = \sum_{i=1}^r \xi_i f_i^N$, et l'on considère le morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres :

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{R}[\overline{A},\overline{F},\overline{E}] & \xrightarrow{\ \alpha\ } & \boldsymbol{A} \\ A_{i,j} & \longmapsto & a_{i,j} \\ F_i & \longmapsto & f_i^N \\ E_i & \longmapsto & \xi_i \end{array}$$

Ce morphisme n'est pas nécessairement surjectif, mais comme $\boldsymbol{A}$ a été supposée de type fini sur $\boldsymbol{R}$, nous pouvons rajouter si besoin de nouvelles variables à la liste $\overline{A}$ de manière à ce que α soit une surjection d'algèbres ce que nous supposerons désormais. Dans ce cas,

$$\alpha^{-1}(\boldsymbol{I}^m\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{K} + \boldsymbol{I}^m[\overline{A},\overline{F},\overline{E}]\,, \qquad \text{pour tout } m\in\mathbb{N},$$

et pour tout idéal $\boldsymbol{K}\subseteq \boldsymbol{R}[\overline{A},\overline{F},\overline{E}]$ contenant $\ker(\alpha)$. Dans la suite $\boldsymbol{K} := \alpha^{-1}\big(\mathrm{Annul}_{\boldsymbol{A}}(\mathbf{m})\big)$.

On se donne maintenant un entier m et l'on définit, pour chaque $i=1,\dots,r$, des polynômes $Q_{i,m}\in \boldsymbol{R}[\overline{A},\overline{F},\overline{E}]$ par les égalités formelles :

$$\sum_{n=0}^{m}\frac{q_{i,n}(\overline{A}_i,F_i)}{F_i^{C(n+1)}} = \frac{\sum_{n=0}^{m}F_i^{C(m-n)}q_{i,n}(\overline{A}_i,F_i)}{F_i^{C(m+1)}} =: \frac{Q_{i,m}(\overline{A}_i,F_i)}{F_i^{C(m+1)}}\,.$$

On a $\deg_{\overline{A},\overline{F},\overline{E}}(Q_{i,m}) = C(m+1)$, et par la surjectivité de α :

$$(F_iF_{i'})^M\Big(F_{i'}^{C(m+1)}Q_{i,m} - F_i^{C(m+1)}Q_{i',m}\Big)\in \boldsymbol{K} + I^{m+1}[\overline{A},\overline{F},\overline{E}]\,,$$

pour tous $i,i'=1\dots,r$ et pour $M\in\mathbb{N}$ assez grand. D'après la proposition 3.1.1 pour le polynôme $P:=F_iF_{i'}$, il existe alors un entier $N(F_iF_{i'},\boldsymbol{K})$ tel que :

$$(F_iF_{i'})^{(m+1)N(F_iF_{i'},\boldsymbol{K})}\Big(F_{i'}^{C(m+1)}Q_{i,m} - F_i^{C(m+1)}Q_{i',m}\Big)\in \boldsymbol{K} + I^{m+1}[\overline{A},\overline{F},\overline{E}]\,.$$

On notera dans la suite $N(\mathscr{F},\boldsymbol{K}) := \sup_{i,i'}\{N(F_i,\boldsymbol{K}), N(F_iF_{i'},\boldsymbol{K})\}$ et *mutatis mutandis* pour $M(\mathscr{F},\boldsymbol{K})$.

Le développement de l'égalité $1 = (\sum_{i=1}^r E_iF_i)^{rM} \bmod \boldsymbol{K}$ donne, pour chaque $M\in\mathbb{N}$, des polynômes $\Xi(M)_i\in \boldsymbol{R}[\overline{F},\overline{E}]$ vérifiant :

$$\begin{cases} 1 = \Xi(M)_1F_1^M+\cdots+\Xi(M)_rF_r^M \bmod \boldsymbol{K}\,, \quad \text{avec} \\ \deg_{\overline{F},\overline{E}}\big(\Xi(M)_i\big) = (r-1)M\,. \end{cases}$$

On pose alors :

$$R_m := \sum\nolimits_{i=1}^{r}\ \Xi\big((m+1)(N(\mathscr{F},\boldsymbol{K})+C)\big)_i\ F_i^{(m+1)N(\mathscr{F},\boldsymbol{K})}Q_{i,m} \quad \in \boldsymbol{R}[\overline{A},\overline{F},\overline{E}]\,.$$

Notons $D_m := \deg_{\overline{A},\overline{F},\overline{E}}(R_m) = r(m+1)(N(\mathscr{F},\boldsymbol{K})+C)$.

On a $R_m - R_{m-1}\in \boldsymbol{K} + \boldsymbol{I}^m[\overline{A},\overline{F},\overline{E}]$ par construction, et l'on a, toujours d'après 3.1.1 :

$$F_i^{mN(\mathscr{F},\boldsymbol{K})}(R_m - R_{m-1})\in \boldsymbol{K} + \boldsymbol{I}^m[\overline{A},\overline{F},\overline{E}]_{D_m+mM(\mathscr{F},\boldsymbol{K})}\,,$$

pour tout $i=1,\dots,r$. Par conséquent :

$$\begin{aligned} R_m - R_{m-1} &= \sum_{i=1}^{r} \Xi(mN(\mathscr{F},\boldsymbol{K}))_i \, F_i^{mN(\mathscr{F},\boldsymbol{K})}(R_m - R_{m-1}) \\ &\in \boldsymbol{K} + \boldsymbol{I}^m[\overline{A},\overline{F},\overline{E}]_{D_m + m(M(\mathscr{F},\boldsymbol{K}) + (r-1)N(\mathscr{F},\boldsymbol{K}))} \end{aligned}$$

et il existe $P_m \in \boldsymbol{R}[\overline{A},\overline{F},\overline{E}]$ de degré majoré par $\widetilde{C}(m+1)$, où $\widetilde{C} \in \mathbb{N}$ est indépendant de m, tel que $P_m = R_m - R_{m-1} \bmod \boldsymbol{K}$.

La série infinie $\alpha(R_0) + \sum_{1 \leqslant n} \alpha(P_n)$ est un élément de $\boldsymbol{A}^\dagger$ vérifiant

$$w := \alpha(R_0)\cdot\mathbf{m} + \sum_{1\leqslant n}^{m} \alpha(P_n)\cdot\mathbf{m} = \alpha(R_m)\cdot\mathbf{m}, \quad \bmod \boldsymbol{I}^{m+1}\boldsymbol{M},$$

et comme d'autre part $\alpha(R_m)\cdot\mathbf{m} \in \boldsymbol{M}$ est, par construction, un “recollement” des séries z_i modulo $\boldsymbol{I}^{m+1}$, on conclut que $w = z \bmod \boldsymbol{I}^m$ pour tout $m \in \mathbb{N}$ et donc $w = z$ et $z \in \boldsymbol{M}$, cqfd. ■

3.2 Le faisceau $\mathscr{O}_{\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}$

Le foncteur de la catégorie $\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ vers la catégorie des $\boldsymbol{R}$-algèbres f.c.t.f. très lisses, qui fait correspondre à $\mathscr{U}^\dagger$ l'algèbre $\mathscr{A}(\mathscr{U}^\dagger)$ et à un morphisme $\Phi : \mathscr{V}^\dagger \to \mathscr{U}^\dagger$ le morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\phi : \mathscr{A}(\mathscr{U}^\dagger) \to \mathscr{A}(\mathscr{V}^\dagger)$ associé, définit le préfaisceau « *structural* » de $\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ noté $\mathscr{O}_{\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}$.

Théorème. *Le préfaisceau $\mathscr{O}_{\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}$ est un faisceau sur le site $\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$.*

Démonstration. D'après la proposition 2.5.1, il suffit de montrer que les suites $\mathscr{O}_{\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}(\mathscr{R})$ sont exactes lorsque $\mathscr{R}$ est un recouvrement fini et *principal* de $\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$. Or, un tel recouvrement est isomorphe à la complétion faible d'un recouvrement fini et principal d'un schéma affine lisse sur $\boldsymbol{R}$ (2.4.2). La suite $\mathscr{O}_{\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}(\mathscr{R})$ est alors isomorphe à la suite

$$\mathbf{0} \to \boldsymbol{A}^\dagger \xrightarrow{\ \Pi^\dagger\ } \textstyle\prod_{i=1,\dots,r} (\boldsymbol{A}_{f_i})^\dagger \xrightarrow{\ \Delta^\dagger\ } \prod_{i,i'=1,\dots,r} (\boldsymbol{A}_{f_i f_{i'}})^\dagger, \qquad (*)$$

obtenue par complétion faible d'une suite

$$\mathbf{0} \to \boldsymbol{A} \xrightarrow{\ \Pi\ } \prod_{i=1}^{r} \boldsymbol{A}_{f_i} \xrightarrow{\ \Delta\ } \prod_{i,i'=1}^{r} \boldsymbol{A}_{f_i f_{i'}}$$

(*cf.* (1), p. 10), où $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{R}$-algèbre lisse (donc de type fini) et où $\{f_1,\dots,f_r\} \subseteq \boldsymbol{A}$ engendré l'idéal unité. La suite $(*)$ est exacte d'après 3.1.4 et le théorème est démontré. ■

3.2.1. Remarque. Lorsque l'anneau $\overline{\boldsymbol{R}}$ est régulier et que $\boldsymbol{X}$ est affine, un ouvert $U \subseteq \boldsymbol{X}$ est affine, si et seulement si, le fermé complémentaire $\boldsymbol{X}\backslash U$ est purement de codimension un. En particulier, pour tout ouvert $V \subseteq \boldsymbol{X}$ de fermé complémentaire $\boldsymbol{Y} := \boldsymbol{X}\backslash V$, on note $\boldsymbol{Y}'$ la réunion des composantes irréductibles de $\boldsymbol{Y}$ de codimension un dans $\boldsymbol{X}$ et l'on pose $V_{\mathrm{aff}} := \boldsymbol{X}\backslash\boldsymbol{Y}'$. On a $V \subseteq V_{\mathrm{aff}}$ et $(V \cap W)_{\mathrm{aff}} = V_{\mathrm{aff}} \cap W_{\mathrm{aff}}$ pour tous V et W ouverts dans

$\boldsymbol{X}$. L'ouvert V_{aff} est alors affine et le morphisme de restriction $\Gamma(V_{\text{aff}};\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})\to\Gamma(V;\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ est bijectif puisque $V_{\text{aff}}\backslash V=\boldsymbol{Y}\backslash\boldsymbol{Y}'$ est de codimension au moins 2 dans V_{aff}. Les algèbres des fonctions régulières sur les ouverts de $\boldsymbol{X}$ sont, par conséquent, toutes lisses sur $\overline{\boldsymbol{R}}$ et nous aurions pu considérer la catégorie $\widetilde{\mathscr{X}}^{\dagger}_{\text{inf}}$ des relèvements f.c.t.f. très lisses des algèbres $\Gamma(V;\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}})$ sans restriction sur l'ouvert $V\subseteq\boldsymbol{X}$. La catégorie $\widetilde{\mathscr{X}}^{\dagger}_{\text{inf}}$ possède des produits fibrés (même démonstration que pour $\mathscr{X}^{\dagger}_{\text{inf}}$) et la définition de recouvrement de 2.3.2 en fait un site. Le site $\mathscr{X}^{\dagger}_{\text{inf}}$ est une sous-catégorie pleine et un sous-site de $\widetilde{\mathscr{X}}^{\dagger}_{\text{inf}}$. La définition du préfaisceau structural $\mathscr{O}_{\widetilde{\mathscr{X}}^{\dagger}_{\text{inf}}}$ est la même que pour $\mathscr{O}_{\mathscr{X}^{\dagger}_{\text{inf}}}$. Le théorème 3.2 (et sa démonstration) sont alors également valables pour $\mathscr{O}_{\widetilde{\mathscr{X}}^{\dagger}_{\text{inf}}}$.

§ 4. Catégorie de $\mathscr{O}_{\mathscr{X}^{\dagger}_{\text{inf}}}$-modules quasi-cohérents

4.1 $\mathscr{O}_{\mathscr{X}^{\dagger}_{\text{inf}}}$-modules

On appelle (pré)faisceau de $\mathscr{O}_{\mathscr{X}^{\dagger}_{\text{inf}}}$-modules la donnée d'un (pré)faisceau $\mathscr{M}$ sur le site $\mathscr{X}^{\dagger}_{\text{inf}}$ et la donnée, pour chaque ouvert $\mathscr{U}^{\dagger}$ de $\mathscr{X}^{\dagger}_{\text{inf}}$ d'un morphisme $\mu_{\mathscr{M}}(\mathscr{U}^{\dagger}):\mathscr{A}(\mathscr{U}^{\dagger})\otimes_{\boldsymbol{R}}\mathscr{M}(\mathscr{U}^{\dagger})\to\mathscr{M}(\mathscr{U}^{\dagger})$ définissant une structure de $\mathscr{A}(\mathscr{U}^{\dagger})$-module sur $\mathscr{M}(\mathscr{U}^{\dagger})$, le tout de manière compatible aux morphismes de restriction ; autrement dit, tel que les diagrammes :

$$\begin{array}{ccc}
\mathscr{A}(\mathscr{U}^{\dagger})\underset{\boldsymbol{R}}{\otimes}\mathscr{M}(\mathscr{U}^{\dagger}) & \xrightarrow{\mu_{\mathscr{M}}(\mathscr{U}^{\dagger})} & \mathscr{M}(\mathscr{U}^{\dagger}) \\
{\scriptstyle\phi}\downarrow \quad\quad \downarrow{\scriptstyle\mathscr{M}(\Phi)} & & \downarrow{\scriptstyle\mathscr{M}(\Phi)} \\
\mathscr{A}(\mathscr{V}^{\dagger})\underset{\boldsymbol{R}}{\otimes}\mathscr{M}(\mathscr{V}^{\dagger}) & \xrightarrow{\mu_{\mathscr{M}}(\mathscr{V}^{\dagger})} & \mathscr{M}(\mathscr{V}^{\dagger})
\end{array}\qquad(\mathscr{C})$$

sont commutatifs pour tous ouverts $\mathscr{V}^{\dagger}\subseteq\mathscr{U}^{\dagger}$, et pour tout $\Phi\in\operatorname{Mor}_{\mathscr{X}^{\dagger}_{\text{inf}}}(\mathscr{V}^{\dagger},\mathscr{U}^{\dagger})$. Un morphisme de (pré)faisceaux de $\mathscr{O}_{\mathscr{X}^{\dagger}_{\text{inf}}}$-modules $\mathscr{M}_1$, $\mathscr{M}_2$, est la donnée, pour chaque ouvert $\mathscr{U}^{\dagger}$ du site, d'un morphisme de $\mathscr{A}(\mathscr{U}^{\dagger})$-modules $\alpha(\mathscr{U}^{\dagger}):\mathscr{M}_1(\mathscr{U}^{\dagger})\to\mathscr{M}_2(\mathscr{U}^{\dagger})$, tel que les diagrammes

$$\begin{array}{ccc}
\mathscr{M}_1(\mathscr{U}^{\dagger}) & \xrightarrow{\alpha(\mathscr{U}^{\dagger})} & \mathscr{M}_2(\mathscr{U}^{\dagger}) \\
\downarrow{\scriptstyle\mathscr{M}_1(\Phi)} & & \downarrow{\scriptstyle\mathscr{M}_2(\Phi)} \\
\mathscr{M}_1(\mathscr{V}^{\dagger}) & \xrightarrow{\alpha(\mathscr{V}^{\dagger})} & \mathscr{M}_2(\mathscr{V}^{\dagger})
\end{array}\qquad(\mathscr{D})$$

sont commutatifs pour tous ouverts $\mathscr{V}^{\dagger}\subseteq\mathscr{U}^{\dagger}$, et pour tout $\Phi\in\operatorname{Mor}_{\mathscr{X}^{\dagger}_{\text{inf}}}(\mathscr{V}^{\dagger},\mathscr{U}^{\dagger})$.

Un faisceau de $\mathscr{O}_{\mathscr{X}^{\dagger}_{\text{inf}}}$-modules est également appelé un $\mathscr{O}_{\mathscr{X}^{\dagger}_{\text{inf}}}$-module. La catégorie (abélienne) des $\mathscr{O}_{\mathscr{X}^{\dagger}_{\text{inf}}}$-modules sur $\mathscr{X}^{\dagger}_{\text{inf}}$ sera notée $\operatorname{Mod}\big(\mathscr{O}_{\mathscr{X}^{\dagger}_{\text{inf}}}\big)$.

4.2 L'anneau $\mathscr{A}[\boldsymbol{G}](\mathscr{U}^{\dagger})$

Soit $\mathscr{U}^{\dagger}$ un ouvert de $\mathscr{X}^{\dagger}_{\text{inf}}$. Notons $G(\mathscr{U}^{\dagger})$ le groupe des automorphismes de $\boldsymbol{R}$-algèbre de $\mathscr{A}\big(\mathscr{U}^{\dagger}\big)$ dont la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ est l'identité. Le groupe $G(\mathscr{U}^{\dagger})$ s'identifie à $\operatorname{End}_{\mathscr{X}^{\dagger}_{\text{inf}}}(\mathscr{U}^{\dagger})^{\text{op}}$ (2.1.2-c). On note $\mathscr{A}[G](\mathscr{U}^{\dagger}):=\mathscr{A}(\mathscr{U}^{\dagger})\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{R}[G(\mathscr{U}^{\dagger})]$ l'anneau (ses éléments sont les sommes formelles $\sum_{\phi\in G(\mathscr{U}^{\dagger})}a_\phi\delta_\phi$, avec $a_\phi\in\mathscr{A}(\mathscr{U}^{\dagger})$ et où les a_ϕ sont presque tous nuls) dont la multiplication vérifie $\big(a\delta_\phi\big)\big(a'\delta_{\phi'}\big) = a\phi(a')\delta_{\phi\phi'}$, pour tous $a, a' \in \mathscr{A}(\mathscr{U}^\dagger)$ et $\phi, \phi' \in G(\mathscr{U}^\dagger)$.

4.2.1. Proposition. *Avec les notations précédentes et pour toute décomposition irréductible $U = U_1 \cup \cdots \cup U_r$ de l'ouvert $U \subseteq \boldsymbol{X}$ associé à l'ouvert $\mathscr{U}^\dagger$ de $\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$, soit $\mathscr{U}^\dagger_i$ un ouvert de $\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ relevant U_i pour chaque $i = 1, \ldots, r$. L'algèbre $\mathscr{A}(\mathscr{U}^\dagger)$, le groupe $G(\mathscr{U}^\dagger)$ et l'algèbre $\mathscr{A}[G](\mathscr{U}^\dagger)$ sont alors respectivement isomorphes aux sommes directes $\mathscr{A}(\mathscr{U}^\dagger_1) \oplus \cdots \oplus \mathscr{A}(\mathscr{U}^\dagger_r)$, $G(\mathscr{U}^\dagger_1) \times \cdots \times G(\mathscr{U}^\dagger_r)$ et $\mathscr{A}[G](\mathscr{U}^\dagger_1) \oplus \cdots \oplus \mathscr{A}[G](\mathscr{U}^\dagger_r)$.*

Démonstration. L'isomorphisme $\mathscr{A}(\mathscr{U}^\dagger) \simeq \mathscr{A}(\mathscr{U}^\dagger_1) \oplus \cdots \oplus \mathscr{A}(\mathscr{U}^\dagger_r)$ étant clair, posons, pour chaque $i = 1, \ldots, r$, $\mathbf{e_i} := \big(0, \ldots, \mathbb{1}_{\mathscr{A}(\mathscr{U}^\dagger_i)}, \ldots, 0\big)$. Un idempotent $\varepsilon \in \mathscr{A}(\mathscr{U}^\dagger)$ est alors de la forme $\varepsilon = \varepsilon_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \varepsilon_r\mathbf{e}_r$ où $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$. Or, un automorphisme $g \in G(\mathscr{U}^\dagger)$ transforme idempotent en idempotent et donc $\varepsilon - g(\varepsilon) = \nu_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \nu_1\mathbf{e}_r$ avec $\nu_i \in \{0, 1, -1\}$. D'autre part, g est congruent à $\mathbb{1}$ modulo $\boldsymbol{I}$, et l'on a également $\nu_i \in \boldsymbol{I}\mathscr{A}(\mathscr{U}^\dagger_i)$. Par conséquent $\nu_i = 0$ et les automorphismes de $G(\mathscr{U}^\dagger)$ fixent chaque idempotent de $\mathscr{A}(\mathscr{U}^\dagger)$; en particulier, les éléments $\mathbf{e}_i$ sont des idempotents (deux-à-deux orthogonaux) *centraux* de l'algèbre $\mathscr{A}[G](\mathscr{U}^\dagger)$. Les assertions de la proposition en découlent. En effet, $\mathscr{A}(\mathscr{U}^\dagger_i) = \mathbf{e}_i \cdot \mathscr{A}(\mathscr{U}^\dagger)$ et $g \cdot \mathscr{A}(\mathscr{U}^\dagger_i) = \mathscr{A}(\mathscr{U}^\dagger_i)$ pour tout i, et l'isomorphisme de $G(\mathscr{U}^\dagger)$ vers $\prod_i G(\mathscr{U}^\dagger_i)$ est donné par $g \mapsto \big(g_1, \ldots, g_r\big)$, où g_i désigne la restriction de l'action de g à $\mathscr{A}(\mathscr{U}^\dagger_i)$. Dans le même ordre d'idées, la correspondance $a\delta_g \mapsto (a\mathbf{e}_1\delta_{g_1}, \ldots, a\mathbf{e}_r\delta_{g_r})$ induit l'isomorphisme entre $\mathscr{A}[G](\mathscr{U})$ et $\bigoplus_i \mathscr{A}(\mathscr{U}^\dagger_i)$. ■

Un préfaisceau $\mathscr{M}$ sur $\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ définit une structure de $\boldsymbol{R}[G(\mathscr{U}^\dagger)]$-module sur $\mathscr{M}(\mathscr{U}^\dagger)$ et lorsque $\mathscr{M}$ est en plus un préfaisceau de $\mathscr{O}_{\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}$-modules, les structures de $\mathscr{A}(\mathscr{U}^\dagger)$ et de $\boldsymbol{R}[G(\mathscr{U}^\dagger)]$-modules sur $\mathscr{M}(\mathscr{U}^\dagger)$ vérifient d'après 4.1-($\mathscr{C}$) :

$$\mathscr{M}(\phi)(am) = g(a)\big(\mathscr{M}(\phi)(m)\big),$$

pour tous $\phi \in G(\mathscr{U}^\dagger)$, $a \in \mathscr{A}(\mathscr{U}^\dagger)$ et $m \in \mathscr{M}(\mathscr{U}^\dagger)$, de sorte que $\mathscr{M}(\mathscr{U}^\dagger)$ est naturellement un $\mathscr{A}[G](\mathscr{U}^\dagger)$-module. Dans le cas considéré dans la proposition 4.2.1, le module $\mathscr{M}(\mathscr{U}^\dagger)$ se décompose (canoniquement) en somme directe :

$$\mathscr{M}(\mathscr{U}^\dagger) \approx \mathscr{M}(\mathscr{U}^\dagger_1) \oplus \cdots \oplus \mathscr{M}(\mathscr{U}^\dagger_r)$$

où $\mathscr{M}(\mathscr{U}^\dagger_i) := \mathbf{e}_i \cdot \mathscr{M}(\mathscr{U}^\dagger)$ est un $\mathscr{A}[G](\mathscr{U}^\dagger_i)$-module.

4.3 Le foncteur $\boldsymbol{\Gamma}\big(\mathscr{X}^\dagger_{\mathbf{inf}}; \mathscr{U}^\dagger; \_\big)$

Pour tout ouvert $\mathscr{U}^\dagger$ de $\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$, on notera $\Gamma\big(\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}; \mathscr{U}^\dagger; \_\big)$ le foncteur qui fait correspondre à un préfaisceau $\mathscr{M}$ sur $\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$ le $\boldsymbol{R}$-module $\mathscr{M}(\mathscr{U}^\dagger)$ (*mutatis mutandis* pour les morphismes). D'après le paragraphe précédent, ce foncteur est à valeurs dans la catégorie des $\boldsymbol{R}[G(\mathscr{U}^\dagger)]$-modules, et sa restriction à $\mathrm{Mod}(\mathscr{O}_{\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}})$ est à valeurs dans la catégorie des $\mathscr{A}[G](\mathscr{U}^\dagger)$-modules ; soit :

$$
\begin{array}{c}
\Gamma\big(\mathscr{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}};\mathscr{U}^{\dagger};\_\big):\mathrm{Mod}\big(\mathscr{O}_{\mathscr{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}}\big)\rightsquigarrow \mathrm{Mod}\big(\mathscr{A}[G](\mathscr{U}^{\dagger})\big)\\
\hspace{6em}\|\!|\\
\hspace{10em}\mathrm{Mod}\big(\mathscr{A}[G](\mathscr{U}^{\dagger}_1)\big)\oplus\cdots\oplus\mathrm{Mod}\big(\mathscr{A}[G](\mathscr{U}^{\dagger}_r)\big)
\end{array}
$$

où $\mathscr{A}(\mathscr{U}^{\dagger})\simeq\mathscr{A}(\mathscr{U}^{\dagger}_1)\oplus\cdots\oplus\mathscr{A}(\mathscr{U}^{\dagger}_r)$ est la décomposition en composantes irréductibles de la proposition 4.2.1.

4.4 $\mathscr{O}_{\mathscr{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}}$-module associé dans le cas affine

Nous allons construire des adjoints à gauche pour le foncteur

$$\Gamma\big(\mathscr{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}};\mathscr{U}^{\dagger};\_\big):\mathrm{Mod}\big(\mathscr{O}_{\mathscr{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}}\big)\rightsquigarrow \mathrm{Mod}\big(\mathscr{A}[G](\mathscr{U}^{\dagger})\big)$$

dans le cas où $\boldsymbol{X}$ est affine et $\mathscr{U}^{\dagger}$ est un relèvement (global) de $\boldsymbol{X}$. Il suffira d'après le paragraphe précédent, de ne considérer que le cas où $\boldsymbol{X}$ est irréductible. On suppose donc le schéma $\boldsymbol{X}$ lisse affine et irréductible sur $\boldsymbol{R}$. Un ouvert $\mathscr{U}^{\dagger}$ du site $\mathscr{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ sera dit « *maximal* » lorsque $\mathrm{Mor}_{\mathscr{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}}(\mathscr{V}^{\dagger},\mathscr{U}^{\dagger})\neq\varnothing$ pour tout ouvert $\mathscr{V}^{\dagger}$ du site.

Fixons un choix (arbitraire), noté $\mathfrak{C}$, à la fois d'un ouvert maximal $\mathscr{U}^{\dagger}_{\mathfrak{C}}$ de $\mathscr{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ et d'un morphisme $\Phi_{\mathfrak{C};\mathscr{V}^{\dagger}}\in\mathrm{Mor}_{\mathscr{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}}(\mathscr{V}^{\dagger},\mathscr{U}^{\dagger}_{\mathfrak{C}})$ pour chaque ouvert $\mathscr{V}^{\dagger}$ de $\mathscr{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$. Considérons alors, pour tout $\mathscr{A}[G](\mathscr{U}^{\dagger}_{\mathfrak{C}})$-module $\boldsymbol{M}$ donné, la correspondance qui associe à un ouvert $\mathscr{V}^{\dagger}$ de $\mathscr{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}$ le $\mathscr{A}(\mathscr{V}^{\dagger})$-module :

$$\widetilde{\boldsymbol{M}}_{\mathfrak{C}}(\mathscr{V}^{\dagger}):=\mathscr{A}(\mathscr{V}^{\dagger})\underset{\mathscr{A}(\mathscr{U}^{\dagger}_{\mathfrak{C}})}{\otimes}\boldsymbol{M}$$

où $\mathscr{A}(\mathscr{V}^{\dagger})$ est muni de la structure de $\mathscr{A}(\mathscr{U}^{\dagger}_{\mathfrak{C}})$-algèbre définie par $\phi_{\mathfrak{C};\mathscr{V}^{\dagger}}$.

On rappelle que d'après la proposition 1.1, pour toute paire d'ouverts $\mathscr{V}^{\dagger}_1\subseteq\mathscr{V}^{\dagger}_2$ et pour chaque $\Phi\in\mathrm{Mor}_{\mathscr{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}}(\mathscr{V}^{\dagger}_1,\mathscr{V}^{\dagger}_2)$, il existe $g(\phi)\in G(\mathscr{U}^{\dagger}_{\mathfrak{C}})$ tel que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
\mathscr{A}(\mathscr{U}^{\dagger}_{\mathfrak{C}}) & \xrightarrow{g(\phi)} & \mathscr{A}(\mathscr{U}^{\dagger}_{\mathfrak{C}})\\
{\scriptstyle \phi_{\mathfrak{C};\mathscr{V}^{\dagger}_2}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \phi_{\mathfrak{C};\mathscr{V}^{\dagger}_1}}\\
\mathscr{A}(\mathscr{V}^{\dagger}_2) & \xrightarrow{\phi} & \mathscr{A}(\mathscr{V}^{\dagger}_1)
\end{array}$$

est commutatif. De plus, un tel automorphisme $g(\phi)$ est unique puisque par l'hypothèse d'irréductiblité sur $\boldsymbol{X}$, les morphismes $\phi_{\mathfrak{C};\mathscr{V}^{\dagger}_i}$ sont *injectifs*.

4.4.1. Proposition. *Les données et notations étant comme ci-dessus,*

a) *Il existe bien un (unique) morphisme de $\boldsymbol{R}$-modules :* $\widetilde{\boldsymbol{M}}_{\mathfrak{C}}(\phi):\widetilde{\boldsymbol{M}}_{\mathfrak{C}}(\mathscr{V}^{\dagger}_2)\longrightarrow\widetilde{\boldsymbol{M}}_{\mathfrak{C}}(\mathscr{V}^{\dagger}_1)$ *tel que* $\widetilde{\boldsymbol{M}}_{\mathfrak{C}}(\phi)(b\otimes\overline{m})=\phi(b)\otimes g(\phi)\cdot\overline{m}$, *pour tous* $b\in\mathscr{A}(\mathscr{V}_2)$ *et* $m\in\boldsymbol{M}$.

b) *La correspondance* $\mathscr{V}^{\dagger}\rightsquigarrow\widetilde{\boldsymbol{M}}_{\mathfrak{C}}(\mathscr{V}^{\dagger})$, $\phi\rightsquigarrow\widetilde{\boldsymbol{M}}_{\mathfrak{C}}(\phi)$ *est un* $\mathscr{O}_{\mathscr{X}^{\dagger}_{\mathrm{inf}}}$*-module.*

Démonstration

a) L'application $\widetilde{\boldsymbol{M}}_{\mathfrak{C}}(\phi)$ est bien définie puisque :

$$\begin{aligned}\widetilde{\boldsymbol{M}}_{\mathfrak{C}}(\phi)\big(b\phi_{\mathfrak{C};\mathscr{V}_2^\dagger}(a)\otimes\overline{m}\big) &= \phi\big(b\phi_{\mathfrak{C};\mathscr{V}_2^\dagger}(a)\big)\otimes g(\phi)\cdot\overline{m}\\ &= \phi(b)\big(\phi\circ\phi_{\mathfrak{C};\mathscr{V}_2^\dagger}\big)(a)\otimes g(\phi)\cdot\overline{m}\\ &= \phi(b)\phi_{\mathfrak{C};\mathscr{V}_1^\dagger}(g(\phi)\cdot a)\otimes g(\phi)\cdot\overline{m} = \phi(b)\otimes(g(\phi)\cdot a)(g(\phi)\cdot\overline{m})\\ &= \phi(b)\otimes g(\phi)\cdot(a\overline{m}) = \widetilde{\boldsymbol{M}}_{\mathfrak{C}}(\phi)(b\otimes a\overline{m})\end{aligned}$$

b) La correspondance est un préfaisceau de $\mathscr{O}_{\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}$-modules d'après (a) et l'unicité des $g(\phi)$. Le fait que $\widetilde{\boldsymbol{M}}_{\mathfrak{C}}$ est un faisceau résulte alors de vérifier que pour tout recouvrement fini et principal $\mathscr{R}=\{\varPhi_{\mathfrak{a}}:\mathscr{V}_{\mathfrak{a}}^\dagger\longrightarrow\mathscr{V}^\dagger\}_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{A}}$ de $\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}$, la suite de modules :

$$\mathbf{0}\to\widetilde{\boldsymbol{M}}_{\mathfrak{C}}(\mathscr{V})\xrightarrow{\widetilde{\boldsymbol{M}}_{\mathfrak{C}}(\Pi_{\mathscr{R}})}\prod_{\mathfrak{a}\in\mathfrak{A}}\widetilde{\boldsymbol{M}}_{\mathfrak{C}}(\mathscr{V}_{\mathfrak{a}})\xrightarrow{\widetilde{\boldsymbol{M}}_{\mathfrak{C}}(\Delta_{\mathscr{R}})}\prod_{\mathfrak{a},\mathfrak{a}'\in\mathfrak{A}}\widetilde{\boldsymbol{M}}_{\mathfrak{C}}(\mathscr{V}_{\mathfrak{a}}^\dagger\times_{\mathscr{V}^\dagger}\mathscr{V}_{\mathfrak{a}'})$$

est exacte (prop. 2.5.1) ; ceci est établit dans le théorème 3.1.4 puisque les recouvrements principaux sont algébrisables (2.4.2). ■

4.4.2. Le foncteur «$\mathscr{O}_{\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}$-module associé» dans le cas affine

Morphisme de $\mathscr{O}_{\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}$-modules associé. Soit $\mu:\boldsymbol{M}\to\boldsymbol{N}$ un morphisme de $\mathscr{A}[G](\mathscr{U}^\dagger_{\mathfrak{C}})$-modules.

Etant donné que μ est $\mathscr{A}(\mathscr{U}^\dagger_{\mathfrak{C}})$-linéaire, l'application :

$$\begin{array}{ccc}\widetilde{\boldsymbol{M}}_{\mathfrak{C}}(\mathscr{V}^\dagger) & \xrightarrow{\widetilde{\mu}_{\mathfrak{C}}(\mathscr{V}^\dagger)} & \widetilde{\boldsymbol{N}}_{\mathfrak{C}}(\mathscr{V}^\dagger)\\ a\otimes m & \longmapsto & a\otimes\mu(m)\end{array}$$

est un morphisme de $\mathscr{A}(\mathscr{V}^\dagger)$-modules bien défini. Ensuite, pour chaque $\varPhi\in\mathrm{Mor}_{\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}(\mathscr{V}_1^\dagger,\mathscr{V}_2^\dagger)$ le diagramme :

$$\begin{tikzcd}\widetilde{\boldsymbol{M}}_{\mathfrak{C}}(\mathscr{V}_2^\dagger) \arrow[r, "\widetilde{\mu}_{\mathfrak{C}}(\mathscr{V}_2^\dagger)"] \arrow[d, "\widetilde{\boldsymbol{M}}_{\mathfrak{C}}(\varPhi)"'] & \widetilde{\boldsymbol{N}}_{\mathfrak{C}}(\mathscr{V}_2^\dagger) \arrow[d, "\widetilde{\boldsymbol{N}}_{\mathfrak{C}}(\varPhi)"]\\ \widetilde{\boldsymbol{M}}_{\mathfrak{C}}(\mathscr{V}_1^\dagger) \arrow[r, "\widetilde{\mu}_{\mathfrak{C}}(\mathscr{V}_1^\dagger)"] & \widetilde{\boldsymbol{N}}_{\mathfrak{C}}(\mathscr{V}_1^\dagger)\end{tikzcd}$$

est commutatif puisque, étant donné que μ est $G(\mathscr{U}^\dagger_{\mathfrak{C}})$-lineaire, on a :

$$\phi(a)\otimes\mu(g(\phi)\cdot m)=\phi(a)\otimes g(\phi)\cdot\mu(m)\,.$$

Par conséquent, $\widetilde{\mu}_{\mathfrak{C}}$ est un morphisme de $\mathscr{O}_{\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}$-modules (4.1-($\mathscr{D}$)).

La correspondance «$\mathscr{O}_{\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}$-module associé (par le choix $\mathfrak{C}$)» :

$$\begin{array}{rcl}\widetilde{(\_)}_{\mathfrak{C}}:\mathrm{Mod}\big(\mathscr{A}[G](\mathscr{U}^\dagger_{\mathfrak{C}})\big) & \rightsquigarrow & \mathrm{Mod}\big(\mathscr{O}_{\mathscr{X}^\dagger_{\mathrm{inf}}}\big)\\ \boldsymbol{M} & \rightsquigarrow & \widetilde{\boldsymbol{M}}_{\mathfrak{C}}\\ \mu & \rightsquigarrow & \widetilde{\mu}_{\mathfrak{C}}\end{array}$$

est un foncteur covariant et additif.

4.4.3. Théorème et définition

a) *Pour tout* $\mathscr{A}[G](\mathscr{U}_{\mathfrak{C}}^{\dagger})$*-module* $\boldsymbol{M}$, *on a* $\boldsymbol{M} = \Gamma(\mathscr{X}_{\mathrm{inf}}^{\dagger}, \mathscr{U}_{\mathfrak{C}}^{\dagger}, \widetilde{\boldsymbol{M}}_{\mathfrak{C}})$.

b) *Pour tout choix* $\mathfrak{C}$, *le foncteur* $\widetilde{(\_)}_{\mathfrak{C}} : \mathrm{Mod}\big(\mathscr{A}[G](\mathscr{U}_{\mathfrak{C}}^{\dagger})\big) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}\big(\mathscr{O}_{\mathscr{X}_{\mathrm{inf}}^{\dagger}}\big)$ *est adjoint à gauche du foncteur* $\Gamma(\mathscr{X}_{\mathrm{inf}}^{\dagger}, \mathscr{U}_{\mathfrak{C}}^{\dagger}, \_)$.

c) *L'image essentielle de* $\widetilde{(\_)}_{\mathfrak{C}}$ *est indépendante de* $\mathfrak{C}$ *; elle sera notée* $\mathrm{Mod}_{\text{q-coh}}(\mathscr{O}_{\mathscr{X}_{\mathrm{inf}}^{\dagger}})$, *les modules de cette catégorie seront appelés* «$\mathscr{O}_{\mathscr{X}_{\mathrm{inf}}^{\dagger}}$-modules quasi-cohérents.»

d) *Le foncteur* $\widetilde{(\_)}_{\mathfrak{C}} : \mathrm{Mod}(\mathscr{A}[G](\mathscr{U}_{\mathfrak{C}}^{\dagger})) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}_{\text{q-coh}}(\mathscr{O}_{\mathscr{X}_{\mathrm{inf}}^{\dagger}})$ *est une équivalence de catégories.*

Démonstration. L'assertion (a) est claire d'après la proposition 4.4.1. Soient maintenant $\boldsymbol{M}$ un $\mathscr{A}[G](\mathscr{U}_{\mathfrak{C}}^{\dagger})$-module et $\mathscr{N}$ un $\mathscr{O}_{\mathscr{X}_{\mathrm{inf}}^{\dagger}}$-module. Par le foncteur $\Gamma(\mathscr{X}_{\mathrm{inf}}^{\dagger}, \mathscr{U}_{\mathfrak{C}}^{\dagger}, \_)$ nous obtenons un morphisme naturel :

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_{\mathscr{X}_{\mathrm{inf}}^{\dagger}}}(\widetilde{\boldsymbol{M}}_{\mathfrak{C}}, \mathscr{N}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}[G](\mathscr{U}_{\mathfrak{C}}^{\dagger})}(\boldsymbol{M}, \Gamma(\mathscr{X}_{\mathrm{inf}}^{\dagger}, \mathscr{U}_{\mathfrak{C}}^{\dagger}, \mathscr{N}))$$

bijectif. En effet, soit $\alpha : \boldsymbol{M} \to \mathscr{N}(\mathscr{U}_{\mathfrak{C}}^{\dagger})$ un morphisme de $\mathscr{A}[G](\mathscr{U}_{\mathfrak{C}}^{\dagger})$-modules. Pour chaque ouvert $\mathscr{V}^{\dagger}$ de $\mathscr{X}_{\mathrm{inf}}^{\dagger}$ il existe un unique morphisme de $\mathscr{A}(\mathscr{V}^{\dagger})$-modules ∎

§ 5. Références bibliographiques

[Ar] A. Arabia. Relèvements des algèbres lisses et de leurs morphismes ; Prépublication (avril 2000).

[A] M. Artin. On the solutions of analytique equations ; Invent. Math. **5** pp. 277–291 (1968).

[B] S. Bosch. A rigid analytic version of M. Artin's theorem on analytic equations ; Math. Ann. **255**, n$^{\mathrm{ro}}$ 3, pp. 395–404 (1981).

[BLR] S. Bosch, W. Lütkebohmert, M. Raynaud. "*Néron Models*" ; Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **3**. Folge–Band **21** (1980).

[E] R. Elkik. Solutions d'équations à coefficients dans un anneau hensélien ; Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, quatrième série, tome 6, pp. 553–604 (1973).

[$\mathrm{EGA}_{4,1}$] A. Grothendieck. "*Éléments de géométrie algébrique-IV*" ; Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. Première partie. Publications mathématiques de l'I.H.E.S. **20** (1964).

[SGA_2] A. Grothendieck. "*Cohomologie locale des faisceaux cohérents et Théorèmes de Lefschetz locaux et globaux*" ; Séminaire de Géométrie algébrique du Bois-Marie 1962. Advanced studies in pure mathematics. Vol. 2. North-Holland – Masson (1968).

[Gro] A. Grothendieck. Géométrie formelle et géométrie algébrique ; Séminaire Bourbaki, exposé **182** (Mai 1959).

[Mer] D. Meredith. Weak formal schemes ; Nagoya Math. Journal. Vol. 45, pp. 1–38 (1971).

[MW] P. Monsky, G. Washnitzer. Formal cohomology : I ; Ann. of Math. (2) **88**, pp. 181–217 (1968).

[vdP] M. van der Put. The cohomology of Monsky and Washnitzer ; Société Mathématique de France. Deuxième série, Mémoire n$^{\mathrm{ro}}$ 23, pp. 33–60 (1986).

[Ser] J.-P. SERRE. Exemples de variétés projectives en caractéristique p non relevables en caractéristique zéro ; Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **47**, pp. 108–109 (1961).

[SGA1] "*Revêtements Étales et Groupe Fondamental (SGA 1)*" ; Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1960/61. Lecture Notes in Mathematics **224**. Springer-Verlag (1971).

Alberto Arabia
CNRS
Institut de Mathématiques de Jussieu
Théorie des Groupes

Samedi 2 juin 2003