A

UNIVERSITE PARIS VII

THESE de DOCTORAT

SPECIALITE : MATHEMATIQUES

PRESENTEE PAR : Alberto Arabia

SUJET de la THESE :

CYCLES DE SCHUBERT ET COHOMOLOGIE K-EQUIVARIANTE DE K/T.

soutenue le, 2/7/1985 devant la commission d'examen

JURY : M.Demazure , président
M.Duflo
A.Guichardet
M.Vergne

A mis Padres.

A mon épouse Catherine

A mes enfants Jean et Tania.

REMERCIEMENTS

Dans ces lignes préliminaires je voudrais exprimer ma gratitude à tous ceux qui, d'une manière ou d'une autre, ont contribué à ce que cette thèse soit menée à bon terme. En particulier :

Aux membres de mon jury.

A Michèle Vergne, qui m'a mis au courant du sujet et a dirigé ce travail. Je lui adresse tout spécialement, ma très sincère reconnaissance !

A Michel Duflo et Alain Guichardet qui m'ont permis d'en exposer le contenu dans les séminaires de Paris VII et de Polytechnique.

A Nicole Berline pour son enthousiasme et encouragement.

Enfin à Mme C. Orieux pour l'inestimable secours qu'elle nous a apporté lors de la frappe définitive du texte.

Cycles de Schubert et cohomologie K-équivariante de K/T .

Table des matières :

1) Introduction

1.1) Soit G un groupe de Lie complexe semi-simple, connexe, et simplement connexe, d'algèbre de Lie $\underline{g}$. Soient K un sous-groupe compact maximal de G, d'algèbre de Lie $\underline{k}$ et σ l'involution associée. Soient H un tore maximal de G, σ-invariant d'algèbre de Lie $\underline{h}$ et B un sous-groupe de Borel de G contenant H, on note Δ_+ et Σ respectivement les systèmes de racines positives et simples correspondants. Soient $T = K \cap H$, un tore maximal de K, d'algèbre de Lie $\underline{t}$, de normalisateur $T' = N_K(T)$, et $W = T'/T$ le groupe de Weyl de $(\underline{g},\underline{h})$ qu'on suppose muni de l'ordre de Bruhat défini par B.

Si $\alpha \in \Delta_+$ on note r_α la réflexion de W correspondante. Si $\omega \in W$, $\ell(\omega)$ dénotera sa longueur. Si $\alpha \in \Sigma$ on considère l'opérateur A_α agissant sur l'algèbre $S(\underline{t}^*)$ des polynômes sur $\underline{t}$ à coefficients complexes, par la formule : $A_\alpha(P) = \dfrac{r_\alpha \cdot P - P}{\alpha}$.

Enfin on note $X = K/T = G/B$. Nous nous intéresserons essentiellement à la cohomologie K-équivariante de X, à coefficients dans $\mathbb{C}$. Un modèle pour celle-ci, construit par les méthodes de H. Cartan ([7]) est le suivant : soient $S(\underline{k}^*)$ l'algèbre des polynômes sur $\underline{k}$ à coefficients complexes et $\underline{a}(X)$ l'algèbre des formes différentielles sur X à valeur dans $\mathbb{C}$. Les éléments de l'algèbre produit tensoriel $S(\underline{k}^*) \otimes \underline{a}(X)$ s'interprètent naturellement comme formes différentielles sur X, variables, dépendant polynômialement de $Y \in \underline{k}$. Soit δ l'endomorphisme linéaire de $S(\underline{k}^*) \otimes \underline{a}(X)$ défini, en termes de formes variables par :

$$\text{si } Y \in \underline{k}, \qquad (\delta\mu)(Y) = d(\mu(Y)) + 2\pi i c(Y)\mu(Y) ,$$

où d et $c(Y)$ dénotent respectivement la différentielle extérieure et la contraction par le champ de vecteurs associé à l'action infinitésimale de Y sur X. Les actions naturelles de K sur $S(\underline{k}^*)$ et $\underline{a}(X)$ définissent une action sur $S(\underline{k}^*) \otimes \underline{a}(X)$. La sous-algèbre d'éléments invariants, c'est à dire des formes variables vérifiant : $k\cdot(\mu(Y)) = \mu(k\cdot Y)$, notée $[S(\underline{k}^*) \otimes \underline{a}(X)]^K$, munie de δ constitue le complexe des formes K-équivariantes de X. L'algèbre de cohomologie correspondante, notée $H^*_K(X)$, est l'algèbre de cohomologie K-équivariante de X. Elle est munie, naturellement, d'une structure de $S(\underline{k}^*)^K$-module.

On définit de manière analogue le complexe des formes T'-équivariantes de X, noté $([S(\underline{t}^*) \otimes \underline{a}(X)]^{T'}, \delta)$. Le morphisme de complexes :

$$([S(\underline{k}^*) \otimes \underline{a}(X)]^{K}, \delta) \xrightarrow{\text{restriction}} ([S(\underline{t}^*) \otimes \underline{a}(X)]^{T'}, \delta) ,$$

est un isomorphisme en cohomologie, ce qui fournit un second modèle pour la cohomologie K-équivariante de X. Notons $H^*_{T'}(X)$ l'algèbre de cohomologie associée au complexe des formes restreintes. Elle est munie d'une structure de $S(\underline{t}^*)^W$-module.

1.2) Homomorphisme de Chern-Weil : soit θ une connexion K-invariante du fibré principal $K \longrightarrow X$, de dérivée covariante ∇ et courbure $\nabla\theta$. L'homomorphisme de Chern-Weil, en cohomologie de de Rham est, classiquement, défini par :

$$\begin{array}{ccc} S(\underline{t}^*) & \xrightarrow{\ a\ } & H^*(X) \\ P & \longmapsto & \overline{P\left(\dfrac{\nabla\theta}{2\pi i}\right)} \end{array} .$$

En cohomologie K-équivariante N. Berline et M. Vergne ([3]) donnent la construction suivante :

On définit l'application moment $J_Y : K \to \underline{t}$, pour les $Y \in \underline{k}$, par : $J_Y(k) = \theta(Y_K)(k)$, où Y_K dénote le champ associé à l'action infinitésimale de Y sur K, à gauche. Alors si $P \in S(\underline{t}^*)$ et $Y \in \underline{k}$, $P(- J_Y - \dfrac{\nabla\theta}{2\pi i})$ est une forme basique et sa projection sur X, en tant que forme variable dépendant de $Y \in \underline{k}$, est un δ-cocycle.

<u>Proposition</u> ([3]) : L'homomorphisme défini par :

$$\begin{array}{ccc} S(\underline{t}^*) & \xrightarrow{\ b\ } & H^*_K(X) \\ P & \longmapsto & \overline{P\left(- J_Y - \dfrac{\nabla\theta}{2\pi i}\right)} \end{array} ,$$

est indépendant de la connexion K-invariante choisie.

En appendice nous donnons une approche algébrique de cet homomorphisme, dans le contexte de [7], menant au même résultat.

Ces homomorphismes sont reliés par l'application d'évaluation à l'origine :

$$\begin{array}{ccc} H^*_K(X) & \xrightarrow{\overline{v(0)}} & H^*(X) \\ \overline{\mu(Y)} & \longmapsto & \overline{\mu(0)}, \end{array}$$

donnant $a = \overline{v(0)} \circ b$.

1.3) La décomposition de Bruhat de G définit la décomposition cellulaire $X = \coprod_{\omega \in W} B\omega B/B$, on notera $X_\omega = B\omega B/B$. Les cellules X_ω définissent des cycles σ_ω , (les cycles de Schubert), par :

$$\text{si } \mu \in \underline{a}(X) \ , <\sigma_\omega, \mu> = \int_{X_\omega} \mu \ .$$

Dans le cas équivariant nous allons considérer les applications $\mathcal{L}_\omega$:

$$[S(\underline{t}^*) \otimes \underline{a}(X)]^{T'} \xrightarrow{\mathcal{L}_\omega} S(\underline{t}^*) \ ,$$

définies, en termes de formes variables, par :

$$\text{si } Y \in \underline{t} \ , \quad \mathcal{L}_\omega(\mu)(Y) = \int_{X_\omega} \mu(Y) \ .$$

Elles passent à $H^*_{T'}(X)$.

1.4) Les éléments que nous venons d'introduire se trouvent reliés par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} S(\underline{t}^*) & \xrightarrow{a} & H^*(X) & \xrightarrow{\sigma_\omega} & \mathbb{C} \\ \text{id}\updownarrow & & \uparrow\overline{v(0)} & & \uparrow v(0) \\ S(\underline{t}^*) & \xrightarrow{b} & H^*_{T'}(X) & \xrightarrow{\mathcal{L}_\omega} & S(\underline{t}^*) \ , \end{array}$$

où b et $\overline{v(0)}$ ont été restreintes à $H^*_{T'}(X)$. La première ligne représente le cas non équivariant et son analyse a été entreprise par Bernstein-Gel'fand-Gel'fand dans [4] . Dans la suite nous résumons les résultats prouvés dans notre étude concernant la deuxième ligne, c'est-à-dire la cohomologie équivariante, et indiquons les rapports avec les résultats analogues du cas non équivariant.

L'homomorphisme de Chern-Weil en cohomologie équivariante , b , est analysé en appendice (section 7), où nous le retrouvons dans un contexte algébrique et démontrons l'affirmation suivante :

Corollaire 7.9 : Soit G un groupe de Lie, H un sous-groupe fermé de G , d'algèbre de Lie $\underline{h}$. On suppose que le fibré principal $G \to G/H$ admet une connexion G-invariante θ , de dérivée covariante ∇ et courbure $\nabla\theta$: Alors l'homomorphisme de Chern-Weil :

$$\begin{array}{ccc} S(\underline{h}^*)^H & \xrightarrow{\quad b \quad} & H_G^*(G/H) \\ P & \longmapsto & \overline{P(-J_Y - \frac{\nabla\theta}{2\pi i})} \end{array} ,$$

est un isomorphisme.

En ce qui concerne l'application d'évaluation à l'origine on prouve, dans la section 3 :

Proposition 3.8 : Soit K un groupe de Lie compact et connexe, d'algèbre de Lie $\underline{k}$, opérant sur une variété X , à gauche. Supposons en plus que les nombres de Betti de X , sont nuls en dimensions impaires. Alors l'application :

$$\begin{array}{ccc} H_K^*(X) & \xrightarrow{\quad \overline{v(0)} \quad} & H^*(X) \\ \overline{\mu(Y)} & \longmapsto & \overline{\mu(0)} \end{array} ,$$

vérifie :

1) $\overline{v(0)}$ est surjective,
2) $\mathrm{Ker}(\overline{v(0)}) = S(\underline{k}^*)^K_o \cdot H_K^*(X)$,

où $S(\underline{k}^*)^K_o$ dénote l'idéal de $S(\underline{k}^*)^K$ des polynômes s'annulant à l'origine.

Quant aux applications $\mathcal{L}_\omega$, qui constituent l'objet principal de ce travail, nous donnons dans la section 5 deux démonstration de l'affirmation suivante :

Théorème 5.2 : Soit $\alpha \in \Sigma$ et $\omega_1 = r_\alpha \omega_2$ avec $\ell(\omega_1) > \ell(\omega_2)$, alors : $\mathcal{L}_{\omega_1} = A_\alpha \cdot \mathcal{L}_{\omega_2}$.

Obtenant comme conséquence (dans la section 6) :

Corollaire 6.1 : Si $\omega = r_{\alpha_1} \dots r_{\alpha_\ell}$ est une décomposition réduite, alors :

$$\mathcal{L}_\omega \circ b = A_{\alpha_1} \dots A_{\alpha_\ell} .$$

Ceci prouve le résultat de [4] qui affirme le caractère intrinsèque de l'opérateur $A_{\alpha_1}\ldots A_{\alpha_\ell}$ et justifie de le noter brièvement A_ω. Ainsi le lien entre la version équivariante des cycles de Schubert, (les applications $\mathcal{L}_\omega$), et les opérateurs de B-G-G , A_ω , est biunivoque.

Le passage au cas non équivariant prouve aussitôt :

Théorème ([4]) : $\langle\sigma_\omega, a(P)\rangle = A_\omega(P)(0)$.

Résultat qui interprète l'action des cycles σ_ω sur l'algèbre de polynômes $S(\underline{t}^*)$.

Le corollaire ci-dessus, est ensuite utilisé pour remarquer que si $s \in W$ dénote l'élément de plus grande longueur de W , et si $P \in S(\underline{t}^*)$, alors : $A_s(P) = \mathcal{L}_s \circ b(P)$. Mais $\mathcal{L}_s$ est une intégrale sur la plus grande cellule de X , donc sur la variété lisse et compacte X . Ceci permet, en appliquant la formule de localisation de Berline-Vergne ([2]), de redémontrer très simplement, dans la section 6 , la formule bien connue de Harish-Chandra ([9]) :

Proposition 6.3:
$$A_s = \frac{\sum_{\omega\in W} (-1)^{\ell(\omega)}\omega}{\prod_{\alpha\in\Delta+} -\alpha}.$$

Cette explicitation de l'opérateur A_s s'avère ensuite très utile pour l'étude de la famille des polynômes $\{P_\omega\}_{\omega\in W}$ introduite dans [4] :

$$\begin{cases} P_s = (-1)^{\ell(s)} \dfrac{\prod_{\alpha\in\Delta_+} \alpha}{|W|} , \\ P_\omega = A_{\omega^{-1}s}(P_s) , \end{cases}$$

donnant :

Proposition 6.4 ([4]) : $A_{\omega_1}(P_{\omega_2})(0) = \delta_{\omega_1,\omega_2}$.

Ainsi, dans le cas non-équivariant, les polynômes $\{P_\omega\}_{\omega\in W}$ réalisent la base duale de la base des cycles de Schubert.

Dans le cas K-équivariant, les mêmes arguments de [4] prouvent que $\{P_\omega\}_{\omega\in W}$ est une base de $S(\underline{t}^*)$ en tant que $S(\underline{t}^*)^W$-module. Partant l'algèbre de cohomologie équivariante $H_K^*(X)$ est un $S(\underline{k}^*)^K$-module libre de rang $|W|$.

1.5) Enfin, dans la section 6, nous décrivons l'application suivante :

soit f une forme réelle sur $\underline{k}$ nulle sur $\underline{t}^{\perp}$, telle que $-if$ soit dominante régulière, c'est-à-dire $-if(h_{\alpha}^{\vee}) > 0$ pour toute coracine $h_{\alpha}^{\vee}$. L'orbite de f dans la représentation coadjointe de K dans $\underline{k}^*$, notée K_f, admet une forme symplectique K-invariante, canonique, σ_f, qui est la forme fondamentale d'une structure kählérienne sur K_f. L'identification $K_f \cong K/T$ définit une décomposition cellulaire $K_f = \coprod_{\omega \in W} K_f^{\omega}$; les sous-variétés complexes (K_f^{ω}, σ_f) sont alors symplectiques, on note $\hat{\sigma}_f^{\omega}$ la transformée de Fourier de leur mesure de Liouville ([2]) . Alors :

$$\text{si } Y \in \underline{t}\,, \quad \hat{\sigma}_f^{\omega}(Y) = A_{\omega}(e^{if})(Y)\,.$$

---

2) Notations

2.1) Soit G un groupe de Lie complexe, semi-simple, connexe et simplement connexe, d'algèbre de Lie $\underline{g}$.

Soit K un sous-groupe compact maximal de G, d'algèbre de Lie $\underline{k}$. Soit σ l'involution de $\underline{g}$ associée à la forme réelle $\underline{k}$ de $\underline{g}$.

Soient H un tore maximal de G, σ-invariant, d'algèbre de Lie $\underline{h}$, et $T = K \cap H$, tore maximal de K, d'algèbre de Lie $\underline{t}$.

Fixons un sous-groupe de Borel, B, de G, contenant H, d'algèbre de Lie $\underline{b}$. Alors si $\Delta = \Delta(\underline{g},\underline{h})$ dénote le système des racines, Δ_+ et Σ dénoteront, respectivement, le système de racines positives et le système des racines simples, relativement à $\underline{b}$.

Soit $\underline{h}_o$ le sous-espace réel de $\underline{h}$ engendré par les coracines $h_\alpha^\vee$ associées aux $\alpha \in \Delta_+$. Alors $\underline{t} = i\,\underline{h}_o$.

Si $\gamma \in \Delta$ on notera par $\underline{g}^\gamma$ le sous-espace radiciel correspondant. On choisit dans chaque $\underline{g}^\gamma$ un générateur x^γ de telle façon que :

$$\begin{cases} \text{i)} & \sigma(x^\gamma) = x^{-\gamma}, \\ \text{ii)} & \text{si } \gamma \in \Delta_+ \text{ alors } [x^{-\gamma},x^\gamma] = h_\gamma^\vee, \end{cases}$$

(base de Weyl par exemple). Ce choix donne la décomposition suivante de $\underline{k}$:

$$\underline{k} = \underline{t} \oplus \sum_{\gamma\in\Delta_+} (\mathbb{R}e(\gamma) \oplus \mathbb{R}f(\gamma)) .$$

où :

$$\text{si } \gamma \in \Delta_+ : \quad \begin{cases} e(\gamma) = i(x^\gamma - x^{-\gamma}) \\ f(\gamma) = x^\gamma + x^{-\gamma}, \end{cases}$$

de sorte que $ie(\gamma) \equiv f(\gamma) \mod \underline{b}$.

Si $\gamma \in \Delta_+$ on notera aussi, G^γ le sous-groupe fermé connexe associé à la sous-algèbre $\underline{g}^{-\gamma} \oplus \underline{h} \oplus \underline{g}^\gamma$ et $K^\gamma = G^\gamma \cap K$.

Soient $T' = N_K(T)$ le normalisateur de T dans K, et $W = T'/T$ le groupe de Weyl de $(\underline{g},\underline{h})$, qu'on supposera muni de l'ordre de Bruhat défini par B. On notera r_α la réflexion de W correspondant à $\alpha \in \Delta_+$. Si $\omega \in W$, $\ell(\omega)$ dénotera sa longueur, c'est-à-dire, le plus petit nombre ℓ, de réflexions r_{α_i} telles que :

i) $\alpha_i \in \Sigma$, ii) $\omega = r_{\alpha_1} \cdots r_{\alpha_\ell}$.

La décomposition ii) sera appelée, alors, décomposition réduite de ω .

2.2) Soient M une variété différentiable et K un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\underline{k}$, agissant différentiablement sur M , à gauche. Si $Y \in \underline{k}$, on notera Y_M le champ de vecteurs sur M défini par la dérivation :

$$\text{si } m \in M \ , \quad (Y_M \cdot \varphi)(m) = \frac{d}{d\varepsilon} \varphi(\exp(-\varepsilon Y) \cdot m)\Big|_{\varepsilon = 0} .$$

Dans ce cas, si $m_o \in M$ est un zéro de Y_M , le groupe à un paramètre $\{\exp(tY)\}$ opère sur $T_{m_o}(M)$, et l'expression de la dérivée de Lie sur cet espace, $L(Y_M)(m_o)$, sera :

$$\text{si } v \in T_{m_o}(M) \ , \quad L(Y_M)(m_o)v = \frac{d}{d\varepsilon} \exp(\varepsilon Y) \cdot v\Big|_{\varepsilon = 0} .$$

2.3) Soit $\underline{a}(M)$ l'algèbre graduée des formes différentielles sur M à valeurs dans $\mathbb{C}$. Si $\alpha \in \underline{a}(M)$, $\alpha^{[d]}$ désignera la composante homogène de α de degré d .

Enfin, on notera $X = G/B = K/T$.

---

3) Cohomologie K-équivariante de X

3.1) Elle est notée $H_K^*(X)$ et sera, par définition :

$$H_K^*(X) = H^*(EK\times^K X, \mathbb{C}) ,$$

où EK dénote le fibré universel de K .

Soit P(n) un espace universel pour le groupe K et pour la dimension n ; c'est-à-dire un espace fibré principal de fibre K , compact, connexe et dont la cohomologie est triviale jusqu'à n . Considérons le fibré principal $P(n)\times X \to P(n)\times^K X$, l'algèbre de Weil W(K) (cf. appendice), et l'injection canonique d'algèbres différentielles :

$$\underline{a}(P(n)\times^K X) \xrightarrow{j} [W(K) \otimes \underline{a}(P(n)\times X)]^{bas_K} .$$

L'algèbre d'arrivée étant celle des éléments basiques du produit tensoriel des K-algèbres différentielles en question (cf. appendice).

3.2) Proposition ([7]) : En cohomologie, j définit un isomorphisme.

D'autre part, on peut voir, grâce aux hypothèses sur P(n) que :

$$H^p([W(K) \otimes \underline{a}(P(n)\times X)]^{bas_K}) \equiv H^p([W(K) \otimes \underline{a}(X)]^{bas_K}),$$

pour tout $p \leq n$.

Par conséquent l'algèbre $H^*([W(K) \otimes \underline{a}(X)]^{bas_K})$ s'identifie à $H^*(EK\times^K X)$.

Nous décrivons maintenant, en détail, le modèle de cette algèbre construit par H.Cartan dans ([7]) :

Soient $S(\underline{k}^*)$ l'algèbre graduée des polynômes sur $\underline{k}$ à coefficients complexes et $\underline{a}(X)$ l'algèbre graduée des formes différentielles sur X à valeur dans $\mathbb{C}$. Munissons le produit tensoriel $S(\underline{k}^*) \otimes \underline{a}(X)$ de la graduation :

si $P \in S^p(\underline{k}^*)$ et $\mu \in \underline{a}^q(X)$ alors $d^\circ(P \otimes \mu) = 2p + q$,

et de la structure d'algèbre qui découle de :

$$(P \otimes \mu)(P' \otimes \mu') = P.P' \otimes \mu.\mu' .$$

Soit $(Y_1,\ldots,Y_n)$ une base de $\underline{k}$ et $(\Omega^1,\ldots,\Omega^n)$ la base duale dans $S^1(\underline{k}^*)$. On définit l'endomorphisme linéaire de l'algèbre graduée $S(\underline{k}^*) \otimes \underline{a}(X)$, δ par :

$$\delta(P \otimes \mu) = P \otimes d\mu + 2\pi i \sum_k P\Omega^k \otimes c(Y_{k_X})\mu ,$$

où d et $c(Y_{k_X})$ dénotent respectivement la différentielle et la contraction par le champ de vecteurs associé à l'action infinitésimale de Y_k sur X . Cette application est une antidérivation de degré $+1$ de $S(\underline{k}^*) \otimes \underline{a}(X)$, mais n'est pas, en général, de carré nul.

Les actions naturelles de K sur $S(\underline{k}^*)$, par représentation coadjointe, et sur $\underline{a}(X)$, par translations à gauche, définissent une action sur $S(\underline{k}^*) \otimes \underline{a}(X)$ par automorphismes d'algèbre graduée, commutant à l'antidérivation δ . La sous-algèbre $[S(\underline{k}^*) \otimes \underline{a}(X)]^K$, d'éléments invariants, appelés formes K-équivariantes de X , est annulée par δ^2 . On voit ceci de la manière suivante :

Les éléments de $S(\underline{k}^*) \otimes \underline{a}(X)$ s'interprètent naturellement comme formes différentielles sur X , variables, dépendant polynômialement de $Y \in \underline{k}$. En ce sens on notera :

Si $Y \in \underline{k}$, $(P \otimes \mu)(Y) = P(Y)\mu \in \underline{a}(X)$.

Pour transcrire l'action de K dans ce contexte, prenons une forme variable μ de $\underline{a}(X)$. Alors si $k \in K$ et $Y \in \underline{k}$:

$$(k.\mu)(Y) = k.(\mu(k^{-1}.Y)) ,$$

où, dans le second membre nous avons d'une part l'action de la représentation adjointe de K dans $\underline{k}$ dans le terme $k^{-1}.Y$, et d'autre part la translation à gauche définie par k de la forme $\mu(k^{-1}.Y) \in \underline{a}(X)$. Ainsi les formes K-équivariantes sont les formes variables μ vérifiant :

si $Y \in \underline{k}$ et $k \in K$, alors $k.(\mu(Y)) = \mu(k.Y)$.

Enfin, l'interprétation de l'antidérivation δ est :

$$(\delta\mu)(Y) = d(\mu(Y)) + 2\pi i c(Y_X)(\mu(Y)) ,$$

d'où :
$$(\delta^2\mu)(Y) = 2\pi i\ L(Y_X)(\mu(Y))$$
$$= 2\pi i\ \frac{d}{d\varepsilon}\ \exp(\varepsilon Y)\cdot(\mu(Y))\Big|_{\varepsilon = 0},$$
soit par équivariance :
$$= 2\pi i\ \frac{d}{d\varepsilon}\ \mu(\exp(\varepsilon Y)\cdot Y)\Big|_{\varepsilon = 0} = 0 .$$

Le complexe $([S(\underline{k}^*) \otimes \underline{a}(X)]^K,\delta)$ sera appelé, complexe des formes K-équivariantes de X. On remarquera que la sous-algèbre $S(\underline{k}^*)^K$ est annulée par δ, par conséquent δ est un endomorphisme de $S(\underline{k}^*)^K$-module et, l'algèbre de cohomologie du complexe, notée :

$$H^*([S(\underline{k}^*) \otimes \underline{a}(X)]^K,\delta) ,$$

se voit naturellement comme $S(\underline{k}^*)^K$-module.

3.3) <u>Proposition</u> ([7]) : $H^*([W(K) \otimes \underline{a}(X)]^{\mathrm{bas}_K}) = H^*([S(\underline{k}^*) \otimes \underline{a}(X)]^K,\delta)$.

3.4) <u>Homomorphisme de Chern-Weil pour $H_K^*(X)$</u>

Nous décrivons dans cette section la contruction de l'homomorphisme de Chern-Weil en cohomologie équivariante donnée par N. Berline et M. Vergne dans [3].

Soient : θ une connexion K-invariante du fibré principal $K \to K/T$, ∇ la dérivée covariante et $\nabla\theta$ la courbure. Soit, pour $Y \in \underline{k}$, l'application moment :

$$J_Y : K \longrightarrow \underline{t} ,$$

définie par :
$$J_Y(p) = \theta(p)(Y_K(p)) ,$$

où Y_K est le champ de vecteurs de K, invariant à droite, engendré par $-Y$. On a aussi : $J_Y(p) = \Pi_{\underline{t}}^{\perp}(\mathrm{ad}\ p^{-1}(-Y))$. En particulier si $Y \in \underline{t}$, $J_Y(e) = -Y$.

3.5) <u>Lemme</u> ([3]) : si on fait agir K à gauche, et T à droite de K :

$$\begin{cases} \text{i) si } t \in T,\ k \in K \text{ et } Y \in \underline{k} \text{ alors}, & t\cdot k\cdot J_Y = J_{k\cdot Y} , \\ \text{ii) si } Y \in \underline{k} \text{ alors}, & \nabla J_Y + c(Y_K)\nabla\theta = 0 . \end{cases}$$

Cette dernière égalité s'écrit aussi :

$$\text{ii')}\ \text{si } Y \in \underline{k}\ \text{, alors}\quad (\nabla + 2\pi i\, c(Y_K))(J_Y + \frac{\nabla\theta}{2\pi i}) = 0\ .$$

Ainsi la forme variable $J_Y + \frac{\nabla\theta}{2\pi i}$ est basique et définit un cocycle du complexe des formes K-équivariantes de K/T . On en déduit un homomorphisme :

$$S(\underline{t}^*) \xrightarrow{\ b\ } H_K^*(K/T)\ ,$$

en posant :

$$\text{si}\quad Y \in \underline{k}\ ,\quad b(P)(Y) = \overline{P(-J_Y - \frac{\nabla\theta}{2\pi i})}\ .$$

3.6) Proposition ([3]) : L'homomorphisme b est indépendant de la connexion K-invariante θ choisie.

Nous prouverons, en appendice, comme conséquence d'un résultat plus général, que b est un isomorphisme.

3.7) Rapport entre les cohomologies $H_K^*(X)$ et $H^*(X)$.

Soit K un groupe de Lie compact, connexe, d'algèbre de Lie $\underline{k}$, opérant sur une variété X , à gauche.
L'application :

$$([S(\underline{k}^*) \otimes \underline{a}(X)]^K, \delta) \xrightarrow{\ v(0)\ } (\underline{a}(X)^K, d)$$

$$\mu(Y) \longmapsto \mu(0)\ ,$$

est un homomorphisme d'algèbres différentielles. En passant aux cohomologies on obtient :

$$H_K^*(X) \xrightarrow{\ \overline{v(0)}\ } H^*(X)\ .$$

3.8) Proposition : si les nombres de Betti de X pour les dimensions impaires sont nuls, alors :

1) $\overline{v(0)}$ est surjective ,
2) $\mathrm{Ker}(\overline{v(0)}) = S(\underline{k}^*)_o^K \cdot H_K^*(X)$,

où $S(\underline{k}^*)_o^K$ dénote l'idéal de $S(\underline{k}^*)^K$ des polynômes s'annulant à l'origine.

Démonstration :

Notations :

I) On rappelle que δ est une antidérivation de degré $+1$ de $S(\underline{k}^*) \otimes \underline{a}(X)$ qui commute à l'action de K. Ce groupe étant compact on a un opérateur de symétrisation qu'on notera $\mathfrak{S}$:

$$\mathfrak{S} : S(\underline{k}^*) \otimes \underline{a}(X) \longrightarrow [S(\underline{k}^*) \otimes \underline{a}(X)]^K .$$

C'est un projecteur qui commute à δ.

II) Si $\mu \in S(\underline{k}^*) \otimes \underline{a}(X)$ il admet toujours une décomposition de la forme :

$$\mu = P_{\alpha_o} \otimes \omega^{\alpha_o} + P_{\alpha_1} \otimes \omega^{\alpha_1} + \ldots + P_{\alpha_p} \otimes \omega^{\alpha_p} ,$$

où :

a) $\alpha_o, \alpha_1, \ldots, \alpha_p$ sont des indices de sommations implicites (convention d'Einstein).

b) Pour un même j les P_{α_j} sont linéairement indépendants.

c) Les formes $\omega^{\alpha_j} \in \underline{a}(X)$ sont homogènes de degré j.

d) Si $\mu \neq 0$ alors $P_{\alpha_p} \otimes \omega^{\alpha_p} \neq 0$. L'entier p sera appelé le degré forme de μ.

Une telle décomposition de μ sera dite standard, et sera notée en abrégé:

$$\mu = P_{\alpha_j} \otimes \omega^{\alpha_j} .$$

Remarque I : Si μ est K-équivariante, alors pour chaque j, le terme $P_{\alpha_j} \otimes \omega^{\alpha_j}$, l'est aussi.

Remarque II : Si μ est un cocycle équivariant de degré forme p, les formes $\omega^{\alpha_p} \in \underline{a}(X)$ sont fermées.

Lemme i : Soit p un entier positif impair et $\mu = P_{\alpha_p} \otimes \omega^{\alpha_p}$ une forme K-équivariante telle que $d\left(\omega^{\alpha_p}\right) = 0$. Il existe alors deux formes K-équivariantes, $P_{\alpha_{p-1}} \otimes \omega^{\alpha_{p-1}}$ et $P_{\alpha_{p-2}} \otimes \omega^{\alpha_{p-2}}$ telles que :

i-1) $P_{\alpha_p} \otimes \omega^{\alpha_p} = \delta(P_{\alpha_{p-1}} \otimes \omega^{\alpha_{p-1}}) + P_{\alpha_{p-2}} \otimes \omega^{\alpha_{p-2}}$.

i-2) Si $P_{\alpha_p} \otimes \omega^{\alpha_p}$ est une forme K-équivariante homogène,

$P_{\alpha_{p-1}} \otimes \omega^{\alpha_{p-1}}$ et $P_{\alpha_{p-2}} \otimes \omega^{\alpha_{p-2}}$ le sont aussi, et :

$$d^\circ(P_{\alpha_p} \otimes \omega^{\alpha_p}) = d^\circ(P_{\alpha_{p-1}} \otimes \omega^{\alpha_{p-1}}) + 1 = d^\circ(P_{\alpha_{p-2}} \otimes \omega^{\alpha_{p-2}}) ,$$

où d° dénote le degré total.

Démonstration : Puisque le nombre de Betti pour p est nul, les formes ω^{α_p} sont exactes, notons :

$$\omega^{\alpha_p} = d\left(\pi^{\alpha_p}\right).$$

Alors :

$$\delta(P_{\alpha_p} \otimes \pi^{\alpha_p}) = P_{\alpha_p} \otimes \omega^{\alpha_p} + 2\pi i\, P_{\alpha_p} \Omega^k \otimes c(Y_{k_X})\pi^{\alpha_p} ,$$

et, en symétrisant :

$$\delta\left(\mathcal{G}(P_{\alpha_p} \otimes \pi^{\alpha_p})\right) = P_{\alpha_p} \otimes \omega^{\alpha_p} + \mathcal{G}\left(2\pi i\, P_{\alpha_p} \Omega^k \otimes c(Y_{k_X})\pi^{\alpha_p}\right) .$$

Enfin en reprenant la notation standard on obtient i-1) et i-2) .

Lemme ii : Soit p un entier positif impair et $\mu = P_{\alpha_p} \otimes \omega^{\alpha_p}$ un cocycle équivariant. Il existe alors une forme équivariante ν telle que :

ii-1) En notation standard $\nu = P_{\alpha_j} \otimes \omega^{\alpha_j}$ où $j < p$ et j est pair.

ii-2) $P_{\alpha_p} \otimes \omega^{\alpha_p} = \delta(\nu)$.

ii-3) Si μ est homogène, ν l'est aussi et $d^\circ(\nu) = d^\circ(\mu) - 1$.

Démonstration : Par récurrence sur p .
La décomposition de μ donnée dans l'énoncé étant standard les formes

ω^{α_p} sont fermées, on peut donc appliquer le lemme i, obtenant :

$$\mu = P_{\alpha_p} \otimes \omega^{\alpha_p} = \delta(p_{\alpha_{p-1}} \otimes \omega^{\alpha_{p-1}}) + P_{\alpha_{p-2}} \otimes \omega^{\alpha_{p-2}} ,$$

où $P_{\alpha_{p-2}} \otimes \omega^{\alpha_{p-2}}$ est un cocyle équivariant de degré forme $p - 2$, homogène de même degré que μ, si celui-ci l'est. Le lemme découle alors de l'hypothèse de récurrence.

Surjectivité de $\overline{v(0)}$:

Nous allons montrer que si $\tilde{\omega}^{[p]}$ est un cocyle de X de degré p , pair, c'est l'image,en cohomologie,d'un cocyle équivariant de X . La compacité et connexité de K permettent de supposer que $\tilde{\omega}^{[p]}$ est une forme G-invariante, donc $1 \otimes \tilde{\omega}^{[p]}$ est une forme G-équivariante et :

$$\delta(1 \otimes \tilde{\omega}^{[p]}) = 2\pi i\Omega^k \otimes c(Y_{k_X})\tilde{\omega}^{[p]} ,$$

est un cocyle équivariant homogène de degré total $p + 1$, et de degré forme $p - 1$, impair. Par le lemme ii on aura :

$$\delta(1 \otimes \tilde{\omega}^{[p]}) = -\delta\left(P_{\alpha_{p-2}} \otimes \omega^{\alpha_{p-2}} + P_{\alpha_{p-4}} \otimes \omega^{\alpha_{p-4}} +\ldots+ P_{\alpha_o} \otimes \omega^{\alpha_o}\right) ,$$

ce qui montre, d'une part, qu'on peut rendre $1 \otimes \tilde{\omega}^{[p]}$ cocyclique en lui ajoutant des formes équivariantes de degrés forme strictement inférieurs. D'autre part la forme : $P_{\alpha_{p-2}} \otimes \omega^{\alpha_{p-2}} +\ldots+ P_{\alpha_o} \otimes \omega^{\alpha_o}$ est homogène de degré p , donc les P_{α_j} sont homogènes de degrés > 0 , et alors :

$$v(0)\left(1 \otimes \tilde{\omega}^{[p]} + P_{\alpha_{p-2}} \otimes \omega^{\alpha_{p-2}} +\ldots+ P_{\alpha_o} \otimes \omega^{\alpha_o}\right) = \tilde{\omega}^{[p]} .$$

Noyau de $\overline{v(0)}$:

Nous allons prouver maintenant que si le cocycle équivariant μ a comme image par $v(0)$ une forme exacte de $\underline{a}(X)$, il sera cohomologue d'un élément de $S(\underline{k}^*)_o^K \cdot Z_K^*(X)$, (où $Z_K^*(X)$ dénote l'algèbre des cocycles équivariants de X) .

Ecrivons μ en notation standard :

$$\mu = P_{\alpha_o} \otimes \omega^{\alpha_o} + P_{\alpha_1} \otimes \omega^{\alpha_1} +\ldots+ P_{\alpha_p} \otimes \omega^{\alpha_p} . \qquad (S)$$

La démonstration se fera par récurrence sur p .

Si p est impair : Par le lemme i, la forme $P_{\alpha_p} \otimes \omega^{\alpha_p}$ est cohomologue à une forme de degré forme p − 2 et on applique la récurrence.

Si p est pair : Ecrivons $\mu(o) = d\nu$ avec $d^\circ(\nu) \leq p$ et, puisque $\mu(o)$ est K-invariante, on peut supposer que ν l'est aussi. Alors :

$$\mu \sim \mu - \delta(1 \otimes \nu) = \mu - \mu(o) - 2\pi i\, \Omega^k \otimes c(Y_{k_X})\nu =$$
$$= [P_{\alpha_o} - P_{\alpha_o}(o)] \otimes \omega^{\alpha_o} + \ldots + [P_{\alpha_p} - P_{\alpha_p}(o)] \otimes \omega^{\alpha_p} - 2\pi i \Omega^k \otimes c(Y_{k_X})\nu\ ,$$

où $d^\circ(c(Y_{k_X})\nu) < p$. Ceci montre que nous pouvons supposer toujours la décomposition standard (S) , telle que $P_{\alpha_p}(0) = 0$.

Maintenant puisque $d(\omega^{\alpha_p}) = 0$, et K est compact et connexe, ω^{α_p} sera cohomologue à une forme fermée de $\underline{a}(X)$ de degré p , K-invariante, notée $\tilde{\omega}^{\alpha_p}$. Posons :

$$\omega^{\alpha_p} - \tilde{\omega}^{\alpha_p} = d\left(\rho^{\alpha_p}\right) .$$

Alors :

$$\delta(P_{\alpha_p} \otimes \rho^{\alpha_p}) = \left(P_{\alpha_p} \otimes \omega^{\alpha_p} - P_{\alpha_p} \otimes \tilde{\omega}^{\alpha_p}\right) + 2\pi i P_{\alpha_p} \cdot \Omega^k \otimes c(Y_{k_X})\rho^{\alpha_p}\ ,$$

et en symétrisant :

$$\delta\left(\mathcal{G}(P_{\alpha_p} \otimes \rho^{\alpha_p})\right) = \left(P_{\alpha_p} \otimes \omega^{\alpha_p} - \tilde{P}_{\alpha_p} \otimes \tilde{\omega}^{\alpha_p}\right) + \mathcal{G}(2\pi i P_{\alpha_p} \Omega^k \otimes c(Y_{k_X})\rho^{\alpha_p})\ ,$$

où $\tilde{P}_{\alpha_p}$ dénote le symétrisé de P_{α_p} par K , c'est un élément de $S(\underline{k}^*)_o^K$.

Ainsi, moyennant une forme équivariante de degré forme p − 1 on peut remplacer $P_{\alpha_p} \otimes \omega^{\alpha_p}$ par $\tilde{P}_{\alpha_p} \otimes \tilde{\omega}^{\alpha_p}$, et avoir :

$$\mu \sim \left(P'_{\alpha_o} \otimes \omega'^{\alpha_o} + \ldots + P'_{\alpha_{p-1}} \otimes \omega'^{\alpha_{p-1}}\right) + \tilde{P}_{\alpha_p} \otimes \tilde{\omega}^{\alpha_p} .$$

Or, dans la démonstration de la surjectivité de $\overline{v(0)}$ on a vu que $1 \otimes \tilde{\omega}^{\alpha_p}$ peut s'arranger en un cocyle équivariant en lui ajoutant des formes équivariantes de degré forme $\leq p - 2$. Partant on aura :

$$\mu \sim [P''_{\alpha_o} \otimes \omega''^{\alpha_o} + \ldots + P''_{\alpha_{p-1}} \otimes \omega''^{\alpha_{p-1}}] + \widetilde{P}_{\alpha_p} \cdot (1 \otimes \widetilde{\omega}^{\alpha_p} + P_{\alpha_{p-2}} \otimes \omega^{\alpha_{p-2}} + \ldots + P_{\alpha_o} \otimes \omega^{\alpha_o}) ,$$

(avec l'abus de notation évident). Ainsi le terme entre crochets est un cocycle et son image par $v(o)$ est exacte car $\widetilde{P}_{\alpha_p}(0) = 0$. Son degré forme étant inférieur à p , l'hypothèse de récurrence achève la démonstration.

3.9) <u>Conséquences</u> : Plaçons nous dans le cas où $X = K/H$, H étant un sous-groupe fermé quelconque de K , d'algèbre de Lie $\underline{h}$. La compacité de K assure l'existence d'une connexion K-invariante θ pour le fibré principal $K \twoheadrightarrow K/H$, soit ∇ la dérivée covariante associée et $\nabla\theta$ la courbure. Nous avons le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} & H^*(X) \\ S(\underline{h}^*)^H \arrow[ur, "a"] \arrow[dr, "b"'] & \\ & H^*_K(X) \arrow[uu, "\overline{v(o)}"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & P(-\frac{\nabla\theta}{2\pi i}) \\ P \arrow[ur, "a"] \arrow[dr, "b"'] & \\ & P(-J_Y - \frac{\nabla\theta}{2\pi i}) \arrow[uu, "v(o)"'] \end{tikzcd}$$

a et b étant les homomorphismes de Chern-Weil.

<u>Inversion de b</u> : Posons :

$$[S(\underline{k}^*) \otimes \underline{a}(X)]^K \xrightarrow{\mathscr{L}_{\bar{e}}} S(\underline{h}^*)^H$$

$$P_{\alpha_i} \otimes \omega^{\alpha_i} \longmapsto P_{\alpha_o}\big|_{\underline{h}} \cdot \omega^{\alpha_o}(\bar{e}) .$$

On vérifie aisément que cette application est bien définie et passe aux classes de cohomologie équivariante. Alors :

$$S(\underline{h}^*)^H \xrightarrow{b} H^*_K(X) \xrightarrow{\mathscr{L}_{\bar{e}}} S(\underline{h}^*)^H$$

$$P \longmapsto \overline{P(-J_Y - \frac{\nabla\theta}{2\pi i})} \longmapsto P ,$$

l'application b étant bijective, $\mathscr{L}_{\bar{e}}$ réalise son inverse.

3.10) Corollaire : Supposons K compact connexe d'algèbre de Lie $\underline{k}$ et $H \subset K$ un sous-groupe fermé d'algèbre de Lie $\underline{h}$, tels que les nombres de Betti de K/T pour les dimensions impaires soient nuls. Alors l'homomorphisme de Chern-Weil :

$$S(\underline{h}^*)^H \xrightarrow{a} H^*(K/H) ,$$

vérifie :

1) a est surjectif.
2) $\mathrm{Ker}(a) = \langle S(\underline{k}^*)^K_o \big|_{\underline{h}} \rangle$.

Le second membre de 2) dénote l'idéal de $S(\underline{h}^*)^H$ engendré par les restrictions à $\underline{h}$ des polynômes sur $\underline{k}$, K-invariants et nuls à l'origine.

Démonstration : On traduit la Proposition 3.8 à l'aide de $\mathcal{L}_{\bar{e}}$.

3.11) A. Borel démontrait déjà dans sa thèse ([5]) le résultat suivant :

Rappel : Si T est un tore maximal du groupe de Lie compact connexe K, les nombres de Betti de K/T sont nuls pour les dimensions impaires. Et moyennant le théorème de Chevalley qui affirme que $S(\underline{k}^*)^K/_{\underline{t}} = S(\underline{t}^*)^W$, on obtient le résultat utilisé dans 6.4 :

"L'homomorphisme de Chern-Weil :

$$S(\underline{t}^*) \xrightarrow{a} H^*(K/T) ,$$

vérifie :

1) a est surjectif.
2) $\mathrm{Ker}(a) = \langle S(\underline{t}^*)^W_o \rangle$. "

3.12) Restriction à $\underline{t}$:

Définissons le complexe $([S(\underline{t}^*) \otimes \underline{a}(X)]^{T'}, \delta)$ de manière analogue à $([S(\underline{k}^*) \otimes \underline{a}(X)]^K, \delta)$. La restriction d'une forme variable $\mu(Y)$ de $\underline{k}$ à $\underline{t}$ constitue un morphisme d'algèbres différentielles :

$$([S(\underline{k}^*) \otimes \underline{a}(X)]^K, \delta) \xrightarrow{\text{restriction}} ([S(\underline{t}^*) \otimes \underline{a}(X)]^{T'}, \delta) ,$$

qui, bien qu'injectif, n'est pas surjectif. Néanmoins, dans [1],

M. F. Atiyah et R. Bott montrent comment cette même application détermine, en cohomologie, un isomorphisme.

Notons pour le complexe restreint :

$$Z^*_{T'}(X) = \mathrm{Ker}\,\delta, \quad B^*_{T'}(X) = \mathrm{Im}\,\delta\,, \quad H^*_{T'}(X) = Z^*_{T'}(X) \,/\, B^*_{T'}(X)\,.$$

$H^*_{T'}(X)$ possède une structure naturelle de $S(\underline{t}^*)^W$-module. Dans la section suivante nous utiliserons l'algèbre $H^*_{T'}(X)$ comme modèle de la cohomologie K-équivariante de X.

---

4) Désingularisations des cellules de Bruhat.

4.1) Par l'identification $X = K/T = G/B$, la décomposition de Bruhat de G , $G = \coprod_{\omega\in W} B\,\omega\, B$, définit une décomposition cellulaire de X ,

$X = \coprod_{\omega\in W} X_\omega$, où $X_\omega = B\,\omega\, B/B$, vérifiant :

i) $\dim_{\mathbb{C}} X_\omega = \ell(\omega)$, ii) $\overline{X}_\omega = \bigcup_{\omega'\leqslant\omega} X_{\omega'}$.

Les cellules fermées $\overline{X}_\omega$ sont des sous-variétés analytiques de X .

4.2) Désingularisation des cellules fermées :

Dans cette section nous rappelons la construction des désingularisations étudiées par H.C. Hansen ([8]).

Soient $\omega \in W$ et $\omega = r_{\alpha_1}\ldots r_{\alpha_\ell}$ une décomposition réduite.

Pour $i = 1,2,\ldots,\ell$ on pose : $\omega_i = r_{\alpha_1}\ldots r_{\alpha_i}$, et $\omega_0 = id$. On définit alors les racines $\gamma_1,\ldots,\gamma_\ell$ par la formule :

$$\gamma_i = \omega_{i-1}(\alpha_i) \ , \quad \text{avec} \quad i = 1,2,\ldots,\ell \ .$$

4.3) Lemme(N.Bourbaki [6]) : Sous les hypothèses ci-dessus on a :

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{a)} & \omega = r_{\gamma_\ell} r_{\gamma_{\ell-1}} \ldots r_{\gamma_1} \ , \\ \text{b)} & \{\gamma_1,\ldots,\gamma_\ell\} = \Delta_+ \cap \omega\Delta_- \ , \\ \text{c)} & \gamma_i \neq \gamma_j \quad \text{si} \quad i \neq j \ . \end{array}\right.$$

Considérons maintenant les sous-groupes de G :

$$B_i = \omega_i\, B\omega_i^{-1}, \quad \text{avec} \quad i = 0,1,\ldots,\ell \ ,$$

d'algèbre de Lie :

$$\underline{b}_i = \mathrm{ad}\omega_i(\underline{b}) = \underline{g}^{-\gamma_1} \oplus \ldots \oplus \underline{g}^{-\gamma_i} \oplus \underline{h} \oplus \underline{g}^{\gamma_{i+1}} \oplus \ldots \oplus \underline{g}^{\gamma_s},$$

où l'indexation $\{\gamma_1,\ldots,\gamma_s\}$ est un prolongement de $\{\gamma_1,\ldots,\gamma_\ell\}$ recouvrant Δ_+ tout entier.

Pour $i = 1,2,\dots,\ell$, les sous-espaces :

$$\mathcal{H}_i = \underline{b}_{i-1} \oplus \underline{b}_i = \underline{g}^{-\gamma_1} \oplus \dots \oplus \underline{g}^{-\gamma_i} \oplus \underline{h} \oplus \underline{g}^{\gamma_i} \oplus \dots \oplus \underline{g}^{\gamma_s} ,$$

sont des sous-algèbres de Lie de $\underline{g}$. On note H_i le sous-groupe fermé, connexe, de G , d'algèbre de Lie $\mathcal{H}_i$. Alors :

$$B_i\, B_{i-1} \subseteq H_i \quad \text{et} \quad K^{\gamma_i} \subseteq G^{\gamma_i} \subseteq H_i .$$

Définition : Soit $M_\omega = H_1 \times_{B_1} H_2 \times_{B_2} \dots \times_{B_{\ell-1}} H_\ell / B_\ell$ la variété quotient obtenue en faisant agir $B_1 \times \dots \times B_\ell$ sur $H_1 \times \dots \times H_\ell$ par l'action à droite :

$$(h_1,\dots,h_\ell)\cdot(b_1,\dots,b_\ell) = (h_1 b_1, b_1^{-1} h_2 b_2, \dots, b_{\ell-1}^{-1} h_\ell b_\ell) .$$

M_ω est une variété complexe, connexe, de dimension complexe $\ell(\omega)$.

4.4) Lemme ([8]) : L'injection canonique :

$$\check{\Gamma}_\omega = K^{\gamma_1} \times_T \dots \times_T K^{\gamma_\ell} / T \longrightarrow M_\omega = H_1 \times_{B_1} H_2 \times_{B_2} \dots \times_{B_{\ell-1}} H_\ell / B_\ell ,$$

est un isomorphisme de variétés.

Ici $\check{\Gamma}_\omega$ est la variété quotient obtenue à partir de $K^{\gamma_1} \times \dots \times K^{\gamma_\ell}$ par l'action de $T \times \dots \times T = T^\ell$ à droite définie par la formule :

$$(k_1, k_2, \dots, k_\ell)\cdot(t_1, t_2, \dots, t_\ell) = (k_1 t_1, t_1^{-1} k_2 t_2, \dots, t_{\ell-1}^{-1} k_\ell t_\ell) .$$

Remarque : M_ω est alors compacte et $\check{\Gamma}_\omega$ admet une structure complexe qui sera, désormais, sous-entendue.

4.5) Théorème ([8]) :

i) L'application

$$\check{\Gamma}_\omega \xrightarrow{\check{g}_\omega} X$$

$$[(k_1,\dots,k_\ell)] \longmapsto k_1 \cdot \ldots \cdot k_\ell \omega T ,$$

est une désingularisation holomorphe de $\overline{X}_\omega$.

ii) $\check{g}_{\omega}[(k_1,\dots k_\ell)] \in \overline{X}_\omega \setminus X_\omega$, si et seulement si, il existe j tel que $k_j \in r_{\gamma_j} T$, (où l'on considère un représentant de r_{γ_j} dans T') .

4.6) Définition : Soit $\Gamma_\omega = K^{\alpha_1} \times_T \dots \times_T K^{\alpha_\ell}/_T$ la variété quotient obtenue en faisant agir $T\times\dots\times T = T^\ell$ à droite de $K^{\alpha_1}\times\dots\times K^{\alpha_\ell}$ par l'action définie par la formule :

$$(k_1,k_2,\dots,k_\ell)\cdot(t_1,t_2,\dots,t_\ell) = (k_1t_1, t_1^{-1}k_2t_2,\dots,t_{\ell-1}^{-1}k_\ell t_\ell) .$$

Lemme : L'application :

$$K^{\alpha_1}\times K^{\alpha_2}\times\dots\times K^{\alpha_\ell} \xrightarrow{\psi} K^{\gamma_1}\times\dots\times K^{\gamma_\ell}$$

$$(k_1,k_2,\dots,k_\ell) \longmapsto (k_1\omega_1^{-1},\omega_1k_2\omega_2^{-1},\omega_2k_3\omega_3^{-1},\dots,\omega_{\ell-1}k_\ell\omega_\ell^{-1}) ,$$

est un isomorphisme de variétés qui, par passage aux quotients, définit un isomorphisme entre Γ_ω et $\check{\Gamma}_\omega$. (Où l'on suppose qu'on a pris un représentant de chaque ω_i dans T').

Démonstration : L'isomorphisme découle des identifications suivantes :
Pour tout $1 \le i \le \ell$:

$$\omega_i K^{\alpha_{i+1}}\omega_{i+1}^{-1} = \omega_i K^{\alpha_{i+1}} r_{\alpha_{i+1}}\omega_i^{-1} = \omega_i K^{\alpha_{i+1}}\omega_i^{-1} = K^{\omega_i(\alpha_{i+1})} = K^{\gamma_{i+1}} .$$

Le passage au quotient se fait en lisant, par ψ , la relation d'équivalence définie sur l'espace d'arrivée :

$$(k_1,\dots,k_\ell) \equiv_\psi (k'_1,\dots,k'_\ell) \Leftrightarrow \exists t_1,\dots,t_\ell ,\ \forall i ,\ t_{i-1}^{-1}\omega_ik_i\omega_{i+1}^{-1}t_i = $$

$$= \omega_i^1 k'_i\omega_{i+1}^{-1} ,$$

$$\Leftrightarrow \exists t_1,\dots,t_\ell ,\ \forall i ,\ (\omega_i^{-1}t_{i-1}^{-1}\omega_i)k_i(\omega_{i+1}^{-1}t_i\omega_{i+1}) = k'_i .$$

On retrouve donc la relation d'équivalence définie par l'action de T^ℓ sur l'espace de départ.
On munira Γ_ω de la structure complexe définie par l'isomorphisme ψ .

Remarque : En posant pour $k \in K^{\alpha_1}$ et $[(k_1,\dots,k_\ell)] \in \Gamma_\omega$:

$$k\circ[(k_1,\dots,k_\ell)] = [(k\circ k_1,\dots,k_\ell)] ,$$

on obtient une action de K^{α_1} à gauche de Γ_ω, par des applications holomorphes.

4.7) Théorème ([10]) :

i) L'application :

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_\omega & \xrightarrow{g_\omega} & X \\ [(k_1,\dots,k_\ell)] & \longmapsto & k_1\cdot\ldots\cdot k_\ell\cdot T , \end{array}$$

est une désingularisation holomorphe, K^{α_1}-équivariante de $\overline{X}_\omega$.

ii) $g_\omega[(k_1,\dots,k_\ell)] \in \overline{X}_\omega \setminus X_\omega$, si et seulement si, il existe j tel que $k_j \in T$.

iii) g_ω est un isomorphisme sur son image, si et seulement si, ω est produit de réflexions simples deux à deux distinctes.

4.8) Une particularité des désingularisations introduites est qu'elles peuvent être fibrées les unes sur les autres de la manière suivante :

Lemme : Soit $\omega = \omega_1\omega_2$ avec $\ell(\omega) = \ell(\omega_1) + \ell(\omega_2)$ et $\omega_1 = r_{\alpha_1}\dots r_{\alpha_j}$ et $\omega_2 = r_{\alpha_{j+1}}\dots\dots r_{\alpha_\ell}$ des décompositions réduites.

Alors :

I) La projection canonique p :

$$\begin{array}{ccc} H_1\times\dots\times H_\ell & \xrightarrow{p} & H_1\times\dots\times H_j \\ M_\omega & \xrightarrow{\overline{p}} & M_{\omega_1} , \end{array}$$

passe au quotient où elle définit une fibration holomorphe, localement triviale, de fibre type $H_{j+1}\times_{B_{j+1}}\dots\dots\times_{B_{\ell-1}} H_\ell/B_\ell$.

Ainsi, pour les structures holomorphes associées aux variétés Γ_ω on a :

II) La projection canonique p :

$$\begin{array}{ccc} K^{\alpha_1}\times\dots\times K^{\alpha_\ell} & \xrightarrow{p} & K^{\alpha_1}\times\dots\times K^{\alpha_j} \\ \Gamma_\omega & \xrightarrow{\overline{p}} & \Gamma_{\omega_1} , \end{array}$$

définit, par passage au quotient, une fibration holomorphe, localement triviale, K^{1}_{α}-équivariante, de fibre type Γ_{ω_2}.

5) Cycles de Schubert et cohomologie équivariante.

5.1) Pour $\omega \in W$, la cellule X_ω définit un cycle σ_ω de $H_*(X)$ par :

$$\text{si } \mu \in \underline{a}(X) \, , \quad \langle \sigma_\omega , \mu \rangle = \int_{X_\omega} \mu \, ,$$

où l'intégrale ne concerne que la composante homogène de μ de degré $2\ell(\omega)$. La famille $\{\sigma_\omega\}_{\omega \in W}$, (les cycles de Schubert), constitue une base de l'homologie de X.

Dans le cas équivariant nous allons associer à $\omega \in W$, l'homomorphisme de $S(\underline{t}^*)^W$-modules, $\mathcal{L}_\omega : Z^*_{T'}(X) \to S(\underline{t}^*)$, défini par :

$$\text{si } Y \in \underline{t} \text{ et } \mu \in Z^*_{T'}(X) \, , \quad \mathcal{L}_\omega(\mu)(Y) = \int_{X_\omega} \mu(Y) \, .$$

Remarque : $\mathcal{L}_\omega$ passe à l'algèbre de cohomologie T'-équivariante. Car supposons $\mu = \delta\nu$, si $(\Gamma_\omega, g_\omega)$ est une désingularisation pour $\overline{X}_\omega$ on aura :

$$\mathcal{L}_\omega(\mu)(Y) = \int_{X_\omega} \mu(Y) = \int_{\Gamma_\omega} g^*_\omega \, \mu(Y) = \int_{\Gamma_\omega} \delta \, g^*_\omega \nu(Y) \quad , \text{ si } Y \in \underline{t} \, ,$$

où la composante de degré maximum de $g^*_\omega \, \mu(Y)$ sera exacte puisque :

$$g^*_\omega \, \mu(Y)^{[2\ell(\omega)]} = d \, g^*_\omega \, \nu(Y)^{[2\ell(\omega)-1]} + 2\pi i \, c(Y_{\Gamma_\omega}) \, g^*_\omega \, \nu(Y)^{[2\ell(\omega)+1]} \, ,$$

et $g^*_\omega \, \nu(Y)^{[2\ell(\omega)+1]} = 0$.

Ainsi $\mathcal{L}_\omega(\mu)(Y) = 0$.

Dans la suite, pour ne pas trop alourdir la notation, on notera, du même symbole une forme équivariante et son image réciproque par une désingularisation.

5.2) Théorème : Soit, pour $\alpha \in \Sigma$, l'opérateur A_α de $S(\underline{t}^*)$ défini par :

$$A_\alpha(P) = \frac{r_\alpha \cdot P - P}{\alpha} \, ,$$

et supposons que $\omega_1 = r_\alpha \omega_2$, avec $\ell(\omega_1) > \ell(\omega_2)$. Alors on a la factorisation :

$$\mathcal{L}_{\omega_1} = A_\alpha \circ \mathcal{L}_{\omega_2} \, .$$

Nous en donnerons deux démonstrations :

5.3) Démonstration I :

On fixe une décomposition réduite $\omega_2 = r_{\alpha_2} \ldots r_{\alpha_\ell}$, d'où la décomposition réduite $\omega_1 = r_\alpha r_{\alpha_2} \ldots r_{\alpha_\ell}$, à partir de laquelle on construit une désingularisation $(\Gamma_{\omega_1}, g_{\omega_1})$ de $\overline{X}_{\omega_1}$. Alors, par image réciproque :

$$\text{si} \quad Y \in \underline{t} \qquad \mathcal{L}_{\omega_1}(\mu)\ (Y) = \int_{\Gamma_{\omega_1}} \mu(Y) \; .$$

On remarquera que μ étant l'image réciproque d'un cocycle T'-équivariant par une application K^α-équivariante, $\mu \in Z^*_{N_{K^\alpha}(T)}(\Gamma_{\omega_1})$.

Enfin on a aussi $N_{K^\alpha}(T) / T \equiv \{1, r_\alpha\}$.

Lemme I : Γ_{ω_1} se voit comme espace total d'une fibration holomorphe, K^α-équivariante, au dessus de la sphère de Riemann, de fibre Γ_{ω_2} .

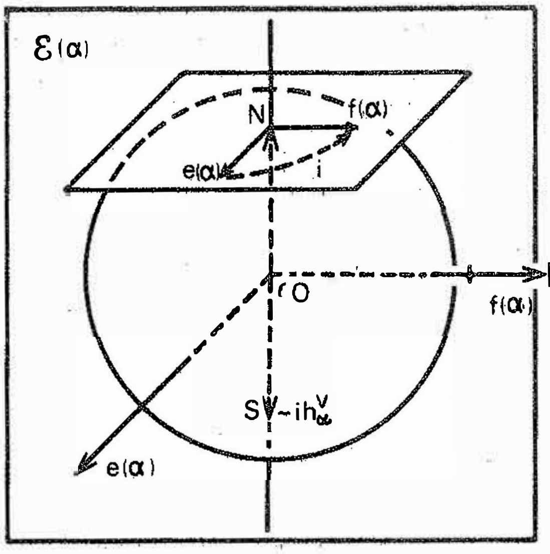
Pour ceci on considère la fibration décrite dans 4.3 :

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_{\omega_1} & \xrightarrow{\bar{p}} & K^\alpha / T \\ [(k_1, \ldots, k_\ell)] & \longmapsto & [k_1] \; . \end{array}$$

L'espace d'arrivée sera identifié à la sphère $\mathbb{S}^2$ de la manière suivante. Soit $\mathcal{E}(\alpha)$ le sous-espace réel, de dimension 3 de $\underline{k}$, engendré par $\{e(\alpha), f(\alpha), ih^\vee_\alpha\}$ qu'on supposera muni de la métrique K^α-invariante définie par la forme de Killing. K^α étant connexe, son action adjointe sur $\mathcal{E}(\alpha)$ se fera par des isométries qui conservent l'orientation. L'orbite de $ih^\vee_\alpha$ est la sphère de $\mathcal{E}(\alpha)$ contenant ce point, et $\mathrm{Stab}_{K^\alpha}(ih^\vee_\alpha) = T$, d'où l'identification $K^\alpha / T \equiv \mathbb{S}^2$. Dans la suite on appelera $ih^\vee_\alpha$ et $-ih^\vee_\alpha$ les pôles nord et sud (N et S) respectivement.

On projette sur $\mathbb{S}^2$ la structure complexe de K^α / T. Au niveau de l'espace tangent $T_{[\bar{e}]}(K^\alpha / T) \equiv \mathbb{R}\, e(\alpha) \oplus \mathbb{R}\, f(\alpha) \equiv T_N(\mathbb{S}^2)$, ceci se traduit par la relation : $i \circ e(\alpha) = f(\alpha)$.

Figure 1.



Nous paramétrons cette sphère par l'application :

$$\mathbb{S}^1 \times [-1,1] \xrightarrow{\ q\ } \mathcal{E}(\alpha)$$

$$(e^{i\theta}, s) \longmapsto (\sqrt{1-s^2}\,\cos\theta \,, \sqrt{1-s^2}\,\sin\theta \,,\ s)\ ,$$

où, à l'arrivée nous indiquons seulement les coordonnées par rapport au repère orthogonal $\left(e(\alpha)\frac{\| ih^\vee_\alpha \|}{\| e(\alpha) \|} \,,\ f(\alpha)\frac{\| ih^\vee_\alpha \|}{\| f(\alpha) \|} \,,\ i \circ h^\vee_\alpha \right)$. L'espace de départ étant muni de l'orientation produit des orientations canoniques de $\mathbb{S}^1$ et $[-1,1]$, la restriction de q à $\mathbb{S}^1 \times]-1,1[$ est un isomorphisme sur $\mathbb{S}^2 \setminus \{N,S\}$ qui conserve l'orientation.

<u>Lemme II</u> : Il existe une 1-forme ν sur Γ_{ω_1} privée des fibres des pôles $\bar{N} = \bar{p}^{-1}(N)$, $\bar{S} = \bar{p}^{-1}(S)$, vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{i)} & \nu \text{ est fermée,} \\ \text{ii)} & c(Y_{\Gamma_{\omega_1}})\nu = -i\alpha(Y)\ ,\ \text{si } Y \in \underline{t}\ , \\ & \\ \text{iii)} & \nu \text{ est T-invariante}\ , \\ \text{iv)} & r^*_\alpha \nu = -\nu\ , \end{array} \right.$$

(où dans iv , r_α dénote un représentant quelconque de la réflexion $r_\alpha \in N_{K^\alpha}(T) / T$).

Pour prouver ce lemme, on commence par lire l'action de T sur $\mathbb{S}^2$. Ce groupe agit en fixant les pôles, donc opère par rotations autour de l'axe N-S .

Si $Y \in \underline{t}$, on aura, au niveau du pôle nord :

$$L(Y_{\mathbb{S}^2})(N)(e(\alpha)) = \frac{d}{d\varepsilon}\, ad(\exp \varepsilon Y)\cdot e(\alpha)\Big|_{\varepsilon=0} = [Y,e(\alpha)] = i\,\alpha(Y)\ f(\alpha) .$$

Ainsi, le groupe à un paramètre $\{\exp -tY\}$ agit par rotation autour de l'axe nord-sud, de vitesse angulaire $-i\alpha(Y)$, ceci caractérise le champ $Y_{\mathbb{S}^2}$. La lecture de cette action sur $\mathbb{S}^1 \times]-1,1[$, via q , n'est autre que la rotation sur $\mathbb{S}^1$ de vitesse $-i\alpha(Y)$ et l'action triviale sur $]-1,1[$. Si $d\theta$ dénote la 1-forme canonique sur $\mathbb{S}^1$, et ν son image directe par q sur $\mathbb{S}^2 \setminus \{N,S\}$, on comprend que, sur $\mathbb{S}^2$ les relations i) , ii) et iii) sont vérifiées.

D'autre part tout représentant de la réflexion r_α , dans $N_{K^\alpha}(T)$, échange les pôles, tout en étant une isométrie qui conserve l'orientation, c'est-à-dire, renverse la sphère. Par conséquent iv) est aussi vérifiée sur $\mathbb{S}^2 \setminus \{N,S\}$.

La projection $\overline{p}$ étant K^α-équivariante, l'image réciproque de ν par $\overline{p}$, notée ν aussi, jouira des propriétés i) , ii) , iii) et iv) , sur $\Gamma_{\omega_1} \setminus \{\overline{N},\overline{S}\}$.

<u>Lemme III</u> : Soit $\mu \in Z^*_{N_{K^\alpha}(T)}(\Gamma_{\omega_1})$, et soit $Y \in \underline{t}$ tel que $\alpha(Y) \neq 0$.

Alors, la composante de $\mu(Y)$ de degré maximum, $2\ell(\omega_1)$, est exacte sur $\Gamma_{\omega_1} \setminus \{\overline{N},\overline{S}\}$.

En effet, le lemme II nous dit que ν , en tant que forme variable vérifie :

si $Y \in \underline{t}$, $(\delta\, \nu)(Y) = d\nu + 2\pi i\ c(Y_{\Gamma_{\omega_1}})\nu = 2\pi\alpha(Y)$.

Ainsi si $\mu \in Z^{*}_{N_K\alpha(T)}(\Gamma_{\omega_1})$:

si $Y \in \underline{t}$, $\delta(\nu\mu)(Y) = 2\pi\alpha(Y)\,\mu(Y) - \nu\delta\mu(Y) = 2\pi\alpha(Y)\,\mu(Y)$,
donc, si $\alpha(Y) \neq 0$:

$$\mu(Y) = \frac{1}{2\pi\alpha(Y)}\; d(\nu\mu(Y)) + 2\pi i\; c(Y_{\Gamma_{\omega_1}})(\nu\mu(Y)).$$

Mais, dans cette formule, la composante de plus haut degré de $\mu(Y)$, ne peut provenir que du premier terme du deuxième membre, ce qui nous prouve le lemme et fournit l'égalité :

si $Y \in \underline{t}$ et $\alpha(Y) \neq 0$, $\mu(Y)^{[2\ell(\omega_1)]} = \dfrac{1}{2\pi\alpha(Y)}\; d\left(\nu\mu(Y)^{[2\ell(\omega_1)-2]}\right)$,

sur $\Gamma_{\omega_1} \setminus \{\bar{N},\bar{S}\}$.

Notation supplémentaire : Pour $\varepsilon > 0$ assez petit on note dans $\$^2$:

$D_N(\varepsilon) = q(\$^1 \times [1,1-\varepsilon[)$ de bord $\$_N(\varepsilon)$.

$D_S(\varepsilon) = q(\$^1 \times]\varepsilon-1,-1])$ de bord $\$_S(\varepsilon)$.

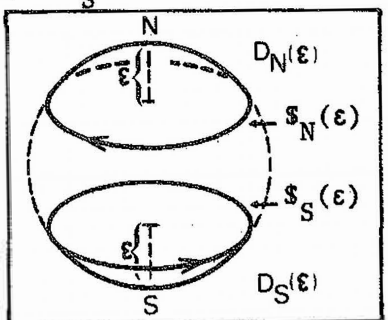
On remarquera que $r_\alpha(D_N(\varepsilon)) = D_S(\varepsilon)$ et $r_\alpha(\$_N(\varepsilon)) = \$_S(\varepsilon)$.

Ces mêmes notations, surlignées, seront utilisées pour les images réciproques par $\bar{p}$.

Par exemple :

$$\bar{p}^{-1}(D_N(\varepsilon)) = \overline{D_N(\varepsilon)} \; .$$

Fig. 2



Reprenons maintenant notre démonstration. Grâce au lemme III, si $\alpha(Y) \neq 0$ on aura :

$$\mathcal{L}_{\omega_1}(\mu)(Y) = \int_{\Gamma_{\omega_1}} \mu(Y) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Gamma_{\omega_1} \setminus \overline{D_N(\varepsilon)} \cup \overline{D_S(\varepsilon)}} d\left(\frac{\nu}{2\pi\alpha(Y)}\,\mu(Y)^{[2\ell(\omega_1)-2]}\right) .$$

Le bord de $\Gamma_{\omega_1} \setminus \overline{D_N(\varepsilon)} \cup \overline{D_S(\varepsilon)}$ est la sous-variété de codimension 1 ,

$\overline{\$_N(\varepsilon)} \cup \overline{\$_S(\varepsilon)}$ qui sera munie de l'orientation induite (cf. Fig. 2).

Par Stokes :

$$\mathcal{L}_{\omega_1}(\mu)\ (Y) = \frac{1}{2\pi\alpha(Y)} \lim_{\varepsilon\to o} \left(\int_{\overline{\$_N(\varepsilon)}} \nu\mu(Y)^{[2\,\ell(\omega_1)-2]} + \int_{\overline{\$_S(\varepsilon)}} \nu\mu(Y)^{[2\ell(\omega_1)-2]} \right).$$

Or r_α échange les bords orientés et puisque $r_\alpha^*(\nu\mu(Y)) = -\nu\mu(r_\alpha(Y))$, si on note $I(\varepsilon,Y)$ la première des intégrales ci-dessus, il vient :

$$\mathcal{L}_{\omega_1}(\mu)(Y) = \lim_{\varepsilon\to o} \frac{I(\varepsilon,Y) - I(\varepsilon,r_\alpha(Y))}{2\pi\alpha(Y)} \quad . \qquad (1)$$

<u>Calcul de lim $I(\varepsilon,Y)$:</u>

L'injection :

$$j : \Gamma_{\omega_2} \longrightarrow \Gamma_{\omega_1} \ ,$$

définie par $j[(k_2,\ldots,k_\ell)] = [(1,k_2,\ldots,k_\ell)]$ relie les désingularisations $(\Gamma_{\omega_2},g_{\omega_2})$ et $(\Gamma_{\omega_1},g_{\omega_1})$ par la relation :

$$g_{\omega_2} = g_{\omega_1} \circ j \ .$$

D'autre part la trivialité locale de $\overline{p}$ garantit l'existence d'un $\varepsilon_o > 0$ tel que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\Gamma_{\omega_2} \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "j_2"'] & \overline{p}^{-1}(D_N(\varepsilon_o)) \arrow[r, "\overline{p}"] & D_N(\varepsilon_o) \\
& D_N(\varepsilon_o)\times\Gamma_{\omega_2} \arrow[u, "\emptyset"] \arrow[ur, "p_1"'] &
\end{tikzcd}$$

(Ici : $j_2(m) = (N,m)$, $\emptyset$ un isomorphisme holomorphe et $p_1(x,m) = x$) .

Ainsi, si $0 < \varepsilon < \varepsilon_o$:

$$I(\varepsilon,Y) = \int_{\overline{\$_N(\varepsilon)}} \nu\mu(Y)^{[2\ell-2]} = \int_{\$_N(\varepsilon)\times\Gamma_{\omega_2}} \emptyset^*\left(\nu\mu(Y)^{[2\ell-2]}\right) = \int_{\$_N(\varepsilon)\times\Gamma_{\omega_2}} p_1{}^*(\nu)\wedge\emptyset^*(\mu(Y)^{[2\ell-2]}) \ ,$$

où $\emptyset^*\nu = p_1^*\nu$ et où l'orientation de $\mathbb{S}_N(\varepsilon)\times\Gamma_{\omega_2}$ est l'orientation produit de celle déjà fixée pour $\mathbb{S}_N(\varepsilon)$ et de l'orientation canonique de Γ_{ω_2}.

Pour mieux étudier la dépendance de ces formules par rapport à ε nous paramétrons $\mathbb{S}_N(\varepsilon)\times\Gamma_{\omega_2}$ par $\mathbb{S}^1\times\Gamma_{\omega_2}$, par l'intermédiaire de q, suivant la formule :

$$\mathbb{S}^1\times\Gamma_{\omega_2}\xrightarrow{q_\varepsilon\times id}\mathbb{S}_N(\varepsilon)\times\Gamma_{\omega_2}$$

$$(Z, m)\longmapsto((\sqrt{2\varepsilon-\varepsilon^2}\,Z, 1-\varepsilon),m).$$

Mais pour que cette paramétrisation préserve les orientations, tout en munissant Γ_{ω_2} de son orientation canonique, il faudra munir $\mathbb{S}^1$ de l'orientation opposée de l'orientation canonique. Alors :

$$I(\varepsilon,Y)=\int_{\mathbb{S}^1_{(-)}\times\Gamma_{\omega_2}}(q_\varepsilon\times id)^*\circ p_1^*(\nu)\wedge(q_\varepsilon\times id)^*\circ\emptyset^*\left(\mu(Y)^{[2\ell-2]}\right),$$

soit :

$$I(\varepsilon,Y)=\int_{\mathbb{S}^1_{(-)}\times\Gamma_{\omega_2}}\pi_1^*(d\theta)\wedge(q_\varepsilon\times id)^*\circ\emptyset^*\left(\mu(Y)^{[2\ell-2]}\right),$$

où $\pi_1=\mathbb{S}^1\times\Gamma_{\omega_2}\longrightarrow\mathbb{S}^1$ est la projection canonique.

Or la différentielle de la paramétrisation $q_\varepsilon\times id$ dépend continûment de $\varepsilon\geq 0$ et nous intégrons sur un compact, donc :

$$\lim_{\varepsilon\to o} I(\varepsilon,Y)=\int_{\mathbb{S}^1_{(-)}\times\Gamma_{\omega_2}}\pi_1{}^*(d\theta)\wedge(q_o\times id)^*\circ\emptyset^*\left(\mu(Y)^{[2\ell-2]}\right),$$

où $\emptyset\circ(q_o\times id)(Z,m)=\emptyset(N,m)=\emptyset\circ j_2\circ\pi_2(Z,m)=j\circ\pi_2(Z,m)$,

si $\pi_2:\mathbb{S}^1\times\Gamma_{\omega_2}\longrightarrow\Gamma_{\omega_2}$ dénote la projection canonique. Alors :

$$\lim_{\varepsilon\to o} I(\varepsilon,Y) = \int_{S^1_{(-)}\times\Gamma_{\omega_2}} \pi_1^*(d\theta)\wedge\pi_2^*\left(\mu(Y)^{[2\ell-2]}\right) .$$

Enfin, par Fubini, et compte tenu des orientations :

$$\lim_{\varepsilon\to o} I(\varepsilon,Y) = \int_{S^1_{(-)}} d\theta \int_{\Gamma_{\omega_2}} \mu(Y) = -2\pi\mathcal{L}_{\omega_2}(\mu)(Y) .$$

En remplaçant dans (1) on obtient :

$$\text{Si } \alpha(Y) \neq 0 \text{ , } \mathcal{L}_{\omega_1}(\mu)(Y) = \frac{\mathcal{L}_{\omega_2}(\mu)(r_\alpha(Y)) - \mathcal{L}_{\omega_2}(\mu)(Y)}{\alpha(Y)} .$$

Ce qui achève la démonstration du théorème.

5.4) Démonstration II :

Nous conservons les notations introduites dans les premières lignes de la démonstration I et rappelons que l'on a affaire à l'intégrale :

$$\mathcal{L}_{\omega_1}(\mu)(Y) = \int_{\Gamma_{\omega_1}} \mu(Y) .$$

Nous allons l'expliciter complètement grâce à la formule de localisation de N. Berline et M. Vergne, donnée par :

Théorème ([2]) : Soit T un groupe de Lie compact agissant sur une variété compacte et orientée M , de dimension 2ℓ . Soit $Y \in \underline{t}$ tel que le champ de vecteurs Y_M ait un nombre fini de zéros (la dérivée de Lie $L(Y_M)$ sera donc non singulière aux zéros de Y_M). Si $\omega \in \underline{a}(M)$ et $d\omega + 2\pi i\, c(Y_M)\omega = 0$; alors :

$$\int_M \omega = (-i)^\ell \sum_{p \text{ zéro de } Y_M} \frac{\omega(p)^{[o]}}{Pf(L(Y_M)(p))} .$$

Les trois lemmes suivants fournissent les ingrédients nécessaires pour l'application de cette formule :

Zéros de Y_M .

Lemme I : Soit $\omega \in W$ et considérons la variété Γ_ω associée à une décomposition réduite $\omega = r_{\alpha_1} \dots r_{\alpha_{\ell(\omega)}}$. Cette variété est munie d'une action de K^{α_1} à gauche, par restriction à T nous obtenons l'action infinitésimale d'un élément $Y \in \underline{t}$. Supposons Y régulier, c'est-à-dire $\alpha(Y) \neq 0$ si $\alpha \in \Delta$. Alors, l'ensemble des zéros du champ Y_{Γ_ω} , est constitué des $2^{\ell(\omega)}$ points :

$$[(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_{\ell(\omega)})] \quad \text{où} \quad \sigma_i \in \{1, r_{\alpha_i}\} .$$

Démonstration : Par récurrence sur $\ell(\omega)$.

Si $\ell(\omega) = 1$, $\Gamma_\omega = K^\alpha / T$ et si $[k]$ est un point fixe :

$$\exp(u\,Y)k \equiv k \bmod T , \quad \text{pour tout} \quad u \in \mathbb{R} ,$$

par conséquent :

$$\exp(u\,\mathrm{ad}(k)(Y)) \in T , \quad \text{pour tout} \quad u \in \mathbb{R} ,$$

et $\mathrm{ad}(k)(Y) \in \underline{t}$. Prenons maintenant $Z \in \underline{t}$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha(Z+\lambda Y) = 0$. Ceci entraîne que $Z+\lambda Y$ est dans le centre de l'algèbre de Lie de K^α et :

$$\underline{t} \ni Z+\lambda Y = \mathrm{ad}(k)(Z+\lambda Y) = \mathrm{ad}(k)(Z) + \lambda \underbrace{\mathrm{ad}(k)(Y)}_{\in \underline{t}} ,$$

on en déduit que $\mathrm{ad}(k)(\underline{t}) \subseteq \underline{t}$, c'est-à-dire $k \in N_{K^\alpha}(T)$ et $[k] \in \{1, r_\alpha\}$.

Dans le cas général, si $\ell(\omega) = \ell$ et :

$$\exp(uY)\cdot(k_1,k_2,\dots,k_\ell) \equiv (k_1,k_2,\dots,k_\ell) \bmod T^\ell , \text{ pour tout } u \in \mathbb{R},$$

on a aussitôt $\exp(uY)\cdot k_1 \equiv k_1 \bmod T$, et $k_1 \in \{1, r_{\alpha_1}\}$. Mais alors :

$$\exp(uY)\cdot(k_1,k_2,\dots,k_\ell) = (\exp(uY)\cdot k_1,k_2,\dots,k_\ell) =$$

$$= (k_1, \exp(u\,\mathrm{ad}(k_1^{-1})(Y))k_2,\dots,k_\ell) ,$$

donc : $\exp(u\,\mathrm{ad}(k_1^{-1})(Y))(k_2,\dots,k_\ell) \equiv (k_2,\dots,k_\ell) \bmod T^{\ell-1}$, et $ad(k_1^{-1})(Y)$ est régulier. L'hypothèse de récurrence montre alors que $[k_i] \in \{1, r_{\alpha_i}\}$.

<u>Remarque :</u> T opère sur la sous-variété analytique $\overline{X}_\omega$ de X et g_ω est T-équivariante. Les points fixes de l'action infinitésimale de Y , régulier sur $\overline{X}_\omega$ sont les images des points fixes sur Γ_ω , c'est-à-dire l'ensemble $\{\omega' \leq \omega\}$.

<u>Structure complexe de Γ_ω .</u>

<u>Lemme II :</u> Soit $\omega \in W$ et considérons la variété Γ_ω associée à une décomposition réduite $\omega = r_{\alpha_1} \ldots r_{\alpha_\ell}$. Soit $p = [(k_1,\ldots,k_\ell)] \in \Gamma_\omega$, alors :

i) L'application :

$$T_{[\bar{e}]}(K^{\alpha_1}/T) \times \ldots \times T_{[\bar{e}]}(K^{\alpha_\ell}/T) \longrightarrow T_p(\Gamma_\omega)$$

$$([v_1], \ldots, [v_\ell]) \longmapsto [(k_1 \cdot v_1, \ldots, k_\ell \cdot v_\ell)] ,$$

où $v_i \in \mathcal{L}ie(K^{\alpha_i})$, est un isomorphisme.

ii) Un repère réel de $T_{[\bar{e}]}(K^{\alpha_1}/T) \times \ldots \times T_{[\bar{e}]}(K^{\alpha_\ell}/T)$ est donné par le système $\{E_j, F_j \,/\, 1 \leq j \leq \ell\}$ où :

$$E_j = (0,\ldots,0,\overset{j}{e(\alpha_j)},0,\ldots,0) \quad \text{et} \quad F_j = (0,\ldots,0,\overset{j}{f(\alpha_j)},0,\ldots,0) .$$

iii) Si on munit $T_{[\bar{e}]}(K^{\alpha_1}/T) \times \ldots \times T_{[\bar{e}]}(K^{\alpha_\ell}/T)$ de la structure complexe de $T_p(\Gamma_\omega)$, on a :

$$i \cdot E_j = F_j + \sum_{k>j} [\varepsilon_k \cdot E_k + \varphi_k \cdot F_k],$$

où ε_k et φ_k dénotent des scalaires réels.

iv) Un repère complexe de $T_{[\bar{e}]}(K^{\alpha_1}/T) \times \ldots \times T_{[\bar{e}]}(K^{\alpha_\ell}/T)$ est donné par le système $\{E_j \,/\, 1 \leq j \leq \ell\}$.

<u>Démonstration</u> : On a l'identification canonique :

$$T_{k_1}(K^{\alpha_1}) \times \ldots \times T_{k_\ell}(K^{\alpha_\ell}) \equiv k_1 \cdot T_e(K^{\alpha_1}) \times \ldots \times k_\ell \cdot T_e(K^{\alpha_\ell}) .$$

D'autre part les vecteurs tangents à la fibre en p par l'action de T^ℓ sur $K^{\alpha_1} \times \ldots \times K^{\alpha_\ell}$ sont donnés par :

$$\frac{d}{du}\,(k_1,\ldots,k_{j-1},k_j\cdot\exp(u\,Y),\ \exp(-u\,Y)\cdot k_{j+1},\ldots,k_\ell)\Big|_{t=0} ,$$

c'est-à-dire par : $(0,\ldots,0,k_j\cdot Y\ ,\ -Y\cdot k_{j+1},\ldots,0)$,

où $Y \in \underline{t}$. Les affirmations i) et ii) découlent alors d'un argument par récurrence sur ℓ .

Pour iii) on rappelle l'isomorphisme entre Γ_ω et M_ω :

$$K^{\alpha_1} \times_T \ldots \times_T K^{\alpha_\ell} / T \xrightarrow{\ \xi\ } H_1 \times_{B_1} \ldots \times_{B_{\ell-1}} H_\ell / B_\ell$$

$$[(k_1,\ldots,k_\ell)] \longmapsto [(k_1\omega_1^{-1},\omega_1 k_2\omega_2^{-1},\ldots,\omega_{\ell-1}k_\ell\omega_\ell^{-1})] ,$$

d'application tangente en p :

$$T_p(\Gamma_\omega) \xrightarrow{\ T_\xi(p)\ } T_{\xi(p)}(M_\omega)$$

$$E_j \longmapsto (0,\ldots 0,\omega_{j-1}k_j\cdot e(\alpha_j)\omega_j^{-1},0\ldots 0) ,$$

où : $\omega_{j-1}k_j\cdot e(\alpha_j)\omega_j^{-1} = \omega_{j-1}k_j\omega_j^{-1}\cdot e(\omega_j\alpha_j) = \omega_{j-1}k_j\omega_j^{-1}\cdot(-e(\gamma_j))$.

En transportant maintenant la structure complexe sur $T_p(\Gamma_\omega)$:

$$i\big(\omega_{j-1}k_j\omega_j^{-1}\cdot(-e(\gamma_j))\big) = \omega_{j-1}k_j\omega_j^{-1}\cdot(-i\ e\ (\gamma_j)) = \omega_{j-1}k_j\omega_j^{-1}\cdot(x^{\gamma_j}-x^{-\gamma_j}) ,$$

car, par convention, $e(\gamma_j) = i(x^{\gamma_j} - x^{-\gamma_j})$.

Or :

$$\underline{b}_j = \underline{g}^{-\gamma_1} \oplus \cdots \oplus \underline{g}^{-\gamma_j} \oplus \underline{h} \oplus \underline{g}^{\gamma_{j+1}} \oplus \cdots \oplus \underline{g}^{\gamma_s} ,$$

donc : $-ie(\gamma_j) \equiv x^{\gamma_j} + x^{-\gamma_j} = f(\gamma_j) \bmod \underline{b}_j$.

Nous avons ainsi :

$$i\cdot(0,\ldots,0,\omega_{j-1}k_j\cdot e(\alpha_j)\omega_j^{-1},0,\ldots,0) = (0,\ldots,0,\omega_{j-1}k_j f(\alpha_j)\omega_j,*,\ldots,*),$$

d'où iii) . Enfin iv) est une conséquence immédiate de iii).

Pfaffien de $L(Y_{\Gamma_\omega})(p)$.

<u>Lemme III :</u> Soit $\omega \in W$ et considérons la variété Γ_ω associée à une décomposition réduite $\omega = r_{\alpha_1} \ldots\ldots r_{\alpha_\ell}$. Soient $Y \in \underline{t}$ régulier et $p = [(\sigma_1,\ldots,\sigma_\ell)]$ point fixe de l'action infinitésimale de Y . La dérivée de Lie par rapport au champ de vecteurs Y_{Γ_ω} notée $L(Y_{\Gamma_\omega})$, définit un endomorphisme de $T_p(\Gamma_\omega)$ qui vérifie :

$$\begin{cases} \text{i)} \quad L(Y_{\Gamma_\omega})(p)E_j = -(\sigma_1\ldots\sigma_j)(\alpha_j)(Y)E_j + \sum\limits_{k>j} \varepsilon_k \cdot E_k \,, \\ \text{ii)} \quad Pf(L(Y_{\Gamma_\omega})(p)) = \prod\limits_{j=1}^{\ell} (\sigma_1\ldots\sigma_j)(\alpha_j)(iY) \,. \end{cases}$$

Les ε_k dénotent des scalaires complexes.

<u>Démonstration :</u> Calcul de $L(Y_{\Gamma_\omega})(p)\, E_j$.

Par l'identification du lemme II nous avons :

$$\exp(uY)\cdot E_j = \exp(uY)\cdot(\sigma_1\cdot 0,\ldots,\sigma_{j-1}\cdot 0,\sigma_j\cdot e(\alpha_j),\sigma_{j+1}\cdot 0,\ldots,\sigma_\ell\cdot 0) ,$$

pour tout $u \in \mathbb{R}$. Et par équivalence :

$$= (\sigma_1\cdot 0,\ldots,\sigma_{j-1}\cdot 0,\sigma_j\cdot ad\big(\exp(\sigma_j\sigma_{j-1}\ldots\sigma_1)(uY)\big)\, e(\alpha_j),\sigma_{j+1}\cdot 0,\ldots,\sigma_\ell\cdot 0) ,$$

donc :

$$L(Y_{\Gamma_\omega})(p)E_j = (0,\ldots,\sigma_j\cdot[(\sigma_j\ldots\sigma_1)(Y),\ e(\alpha_j)]\ ,\ 0,\ldots,0) .$$

Or $[(\sigma_j\cdots\sigma_1)(Y),e(\alpha_j)] = i(\sigma_1\ldots\sigma_j)(\alpha_j)(Y)\ f(\alpha_j)$ et en appliquant iii) du lemme précédent :

$$L(Y_{\Gamma_\omega})(p)E_j = (\sigma_1\ldots\sigma_j)(\alpha_j)(Y)\ i\ F_j ,$$

$$= -(\sigma_1\ldots\sigma_j)(\alpha_j)(Y)\ E_j + \sum_{k>j} \varepsilon_k\cdot E_k .$$

Ainsi le repère $\{E_j \,/\, 1 \leq j \leq e\}$ trigonalise $L(Y_{\Gamma_\omega})$ ce qui permet un calcul aisé du pfaffien :

$$Pf(L(Y_{\Gamma_\omega})(p)) = \frac{\det_{\mathbb{C}}(L(Y_{\Gamma_\omega})(p))}{i^\ell} = \prod_{j=1}^{\ell} (\sigma_1\ldots\sigma_j)(\alpha_j)(iY) .$$

Nous abordons maintenant la démonstration du théorème en explicitant l'intégrale $\mathcal{L}_{\omega_1}(\mu)(Y)$, pour Y régulier dans $\underline{t}$, en remplaçant dans la formule de localisation :

$$\mathcal{L}_{\omega_1}(\mu)(Y) = (-i)^\ell \sum_{\substack{\sigma_1\ldots\sigma_\ell \\ \sigma_i\in\{1,r_{\alpha_i}\}}} \frac{\mu(Y)^{[0]}(\sigma_1\ldots\sigma_\ell\cdot \bar{e})}{\prod_{j=1}^{\ell} (\sigma_1\ldots\sigma_j)(\alpha_j)(iY)} ,$$

où $\alpha_1 = \alpha$.

Et puisque μ est T'-équivariante, $\mu(Y)^{[0]}(\sigma_1\ldots\sigma_\ell\cdot\bar{e}) = \mu(\sigma_\ell\ldots\sigma_1(Y))^{[0]}(\bar{e})$, donc :

$$\mathcal{L}_{\omega_1}(\mu)(Y) = (-1)^\ell \sum_{\substack{\sigma_1\ldots\sigma_\ell \\ \sigma_i\in\{1,r_{\alpha_i}\}}} \frac{\mu(\sigma_\ell\ldots\sigma_1(Y))^{[0]}(\bar{e})}{\prod_{j=1}^{\ell} (\sigma_1\ldots\sigma_j)(\alpha_j)(Y)} . \qquad (1)$$

En particulier :

$$\mathcal{L}_{\omega_2}(\mu)(Y) = (-1)^{\ell-1} \sum_{\substack{\sigma_2\ldots\sigma_\ell \\ \sigma_i\in\{1,r_{\alpha_i}\}}} \frac{\mu(\sigma_\ell\ldots\sigma_2(Y))^{[0]}(\bar{e})}{\prod_{j=2}^{\ell} (\sigma_2\ldots\sigma_j)(\alpha_j)(Y)} . \qquad (2)$$

En regroupant (1) suivant que $\sigma_1 = 1$ ou $\sigma_1 = r_\alpha$, on obtient :

$$\mathcal{L}_{\omega_1}(\mu)(Y) = -(-1)^{\ell-1} \sum_{\substack{\sigma_2\ldots\sigma_\ell \\ \sigma_i\in\{1,r_{\alpha_i}\}}} \frac{\mu(\sigma_\ell\ldots\sigma_2 1(Y))^{[0]}(\bar{e})}{\alpha(Y)\prod_{j=2}^{\ell}(\sigma_2\ldots\sigma_j)(\alpha_j)(Y)} +$$

$$-(-1)^{\ell-1} \sum_{\substack{\sigma_2\ldots\sigma_\ell \\ \sigma_i\in\{1,r_{\alpha_i}\}}} \frac{\mu(\sigma_\ell\ldots\sigma_2(r_\alpha(Y)))^{[0]}(\bar{e})}{r_\alpha(\alpha)(Y)\prod_{j=2}^{\ell}(\sigma_2\ldots\sigma_j)(\alpha_j)(r_\alpha Y)} .$$

Soit, moyennant (2), la formule cherchée :

$$\mathcal{L}_{\omega_1}(\mu)(Y) = \frac{\mathcal{L}_{\omega_2}(\mu)(r_\alpha(Y)) - \mathcal{L}_{\omega_2}(\mu)(Y)}{\alpha(Y)} .$$

6.) Conséquences et applications

6.1) Homomorphisme de Chern-Weil et opérateurs A_ω :

Considérons le diagramme :

$$S(\underline{t}^*) \xrightarrow{\ b\ } H^*_{T'}(X) \xrightarrow{\ \mathcal{L}_\omega\ } S(\underline{t}^*) ,$$

où b est l'homomorphisme de Chern-Weil décrit dans 2 .

Corollaire : Si $\omega = r_{\alpha_1} \ldots r_{\alpha_\ell}$ est une décomposition réduite :

$$\mathcal{L}_\omega \circ b = A_{\alpha_1} \ldots A_{\alpha_\ell} .$$

Démonstration : On obtient par récurrence, à partir du théorème 5.1, l'égalité $\mathcal{L}_\omega \circ b = A_{\alpha_1} \ldots A_{\alpha_\ell} \circ \mathcal{L}_{\bar{e}} \circ b$. Il suffira, donc, de prouver que $\mathcal{L}_{\bar{e}} \circ b = \mathrm{id}$. Or, si $Y \in \underline{t}$:

$$\mathcal{L}_{\bar{e}} \circ b(P)(Y) = \int_{X_{\bar{e}}} P(-J_Y - \frac{\Delta\theta}{2\pi i}) = P(-J_Y - \frac{\Delta\theta}{2\pi i})^{[0]}(\bar{e}) = P(-J_Y(\bar{e})) = P(Y) .$$

Remarque : L'homomorphisme b étant bijectif, l'argument précédent prouve que $\mathcal{L}_{\bar{e}}$ réalise b^{-1} . D'autre part, le fait que $\mathcal{L}_{\bar{e}}$ est un morphisme de $S(\underline{t}^*)^W$ modules entraîne que b l'est aussi (cf. 3.9).

6.2) Ce corollaire permet de fournir une nouvelle démonstration du :

Théorème ([4]) : Si $\omega = r_{\alpha_1} \ldots r_{\alpha_\ell}$, avec $\alpha_i \in \Sigma$, on pose :

$$A_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_\ell)} = A_{\alpha_1} \circ \ldots \circ A_{\alpha_\ell} .$$

Alors :

a) Si $\ell(\omega) < \ell$, $A_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_\ell)} = 0$,

b) Si $\ell(\omega) = \ell$, $A_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_\ell)}$ dépend seulement de ω et non pas des éléments $\alpha_1 ,\ldots, \alpha_\ell$. Dans ce cas on pose $A_\omega = A_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_\ell)}$.

Démonstration : b) est immédiat d'après le corollaire 6.1. Pour a) on peut toujours supposer que $\ell(r_{\alpha_2} \ldots r_{\alpha_\ell}) = \ell-1$; on pose

$\omega = r_{\alpha_2} \ldots r_{\alpha_\ell}$ et on remarque que, compte tenue des hypothèses, $\ell(r_{\alpha_1} \omega) = \ell-2$. Mais ceci revient à dire qu'il existe une décomposition réduite de ω commençant par r_{α_1} . Alors, d'après b) :

$$A_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_\ell)} = A_{\alpha_1} \circ A_{(\alpha_2,\ldots,\alpha_\ell)} = A_{\alpha_1} \circ A_{(\alpha_1 \ldots)} = A_{\alpha_1} \circ A_{\alpha_1} \circ \ldots = 0 ,$$

car les opérateurs A_α sont de carré nul.

6.3) Explicitation de A_s.

Proposition ([9]) : Si s dénote l'élément du groupe de Weyl de plus grande longueur :

$$A_s = \frac{\sum\limits_{\omega \in W} (-1)^{\ell(\omega)} \omega}{\prod\limits_{\alpha \in \Delta+} -\alpha} .$$

Démonstration : Le corollaire 6.1 nous donne l'égalité $A_s = \mathscr{L}_s \circ b$ où $\mathscr{L}_s$ est une intégrale sur la plus grande cellule ouverte de X , c'est-à-dire sur X tout entier. Cette variété étant compacte et lisse on peut faire appel à la formule de localisation de Berline-Vergne ([2]), qui dans notre cas se lit : si $Y \in \underline{t}$ et l'ensemble des zéros de Y_X est fini :

$$\int_X b(P)(Y) = (-i)^{\ell(s)} \sum_{p \text{ zéro de } Y_X} \frac{P(-J_Y)(p)}{Pf(L(Y_X)(p))} ,$$

où $P(-J_Y)(\bar{k}) = P(-J_{k^{-1}\cdot Y})(\bar{e})$.

Or si $Y \in \underline{t}$ est régulier, c'est-à-dire si $\alpha(Y) \neq 0$ pour toute $\alpha \in \Sigma$, l'ensemble des points fixes du groupe à un paramètre $\{\exp tY\}$

est $T'/T \equiv W$. D'autre part W opère à gauche de X par automorphismes de variété holomorphe donc :

$$Pf(L(Y_X)(\omega)) = Pf(L(\omega^{-1} Y_X)(\bar{e})) .$$

Enfin en $\bar{e}$ on a le repère complexe $\{e(\alpha) / \alpha \in \Delta_+\}$ et :

$$L(Y_X)(\bar{e})\ e(\alpha) = [Y, e(\alpha)] = -\alpha(Y)\ e(\alpha) .$$

Partant :

$$Pf(L(Y_X)(\alpha)) = \frac{\det_{\mathbb{C}}(L_{Y_X}(\omega))}{i^{\ell(s)}} = \prod_{\alpha\in\Delta_+} i\alpha(\omega^{-1}Y)$$

$$= (-1)^{\ell(\omega)} \prod_{\alpha\in\Delta_+} i\alpha(Y) .$$

En remplaçant dans la formule de localisation on trouve :

$$\int_X b(P)(Y) = (-1)^{\ell(s)} \frac{\sum_{\omega\in W} (-1)^{\ell(\omega)} (\omega\cdot P)(Y)}{\prod_{\alpha>0} \alpha(Y)} .$$

6.4) Base de $S(\underline{t}^*)$ en tant que $S(\underline{t}^*)^W$-module.

<u>Définition :</u> Soit $\{P_\omega\}_{\omega\in W}$ la famille des polynômes de $S(\underline{t}^*)$ définie par :

$$\begin{cases} \text{i)} & P_s = \dfrac{\prod_{\alpha\in\Delta_+} (-\alpha)}{|W|} , \\ \text{ii)} & P_\omega = A_{\omega^{-1}s}(P_s) . \end{cases}$$

En particulier $P_e = A_s(P_s) = 1$ car P_s antisymétrique.

<u>Proposition ([4])</u>

a) P_ω est homogène de degré $\ell(\omega)$.

b) $$A_{\omega_1}(P_{\omega_2}) = \begin{cases} P_{\omega_2\omega_1^{-1}} & \text{si } \ell(\omega_2\omega_1^{-1}) = \ell(\omega_2) - \ell(\omega_1), \\ 0 & \text{sinon} . \end{cases}$$

En particulier si on évalue à l'origine :

$$\delta_{\omega_1,\omega_2} = A_{\omega_1}(P_{\omega_2})(0) = \int_{X_{\omega_1}} b(P_{\omega_2})(0) .$$

Les formes différentielles $b(P_\omega)(0) \in H^*(X)$ représentent donc la base duale de la base des cycles de Schubert $\{\sigma_\omega\}_{\omega\in W}$ de $H^*(X)$.

c) $\{P_\omega\}_{\omega\in W}$ est une base de $S(\underline{t}^*)$ en tant que $S(\underline{t}^*)^W$-module.

Démonstration : Rappelons d'abord la propriété élémentaire de l'élément $s \in W$ suivante ([6]) :

$$\text{si } \omega \in W , \quad \ell(\omega s) = \ell(s) - \ell(\omega) .$$

a) : Le polynôme P_s vérifie, par définition, la propriété. D'autre part les opérateurs A_α sont des endomorphismes d'espace gradué, de degré -1 , les P_ω sont, donc, homogènes. Enfin, puisque $\ell(\omega^{-1}s) = \ell(s) - \ell(\omega)$, on aura :

$$d^\circ(P_\omega) = d^\circ(P_s) - \ell(s) + \ell(\omega) = \ell(\omega) .$$

---

b) : Par définition $A_{\omega_1}(P_{\omega_2}) = A_{\omega_1} \circ A_{\omega_2^{-1}s}(P_s)$. Deux cas peuvent alors se produire ou bien $\ell(\omega_1\omega_2^{-1}s) < \ell(\omega_1) + \ell(\omega_2^{-1}s)$, et alors $A_{\omega_1}A_{\omega_2^{-1}s} = 0$ d'après le théorème 6.2 ; ou bien $\ell(\omega_1\omega_2^{-1}s) = \ell(\omega_1) + \ell(\omega_2^{-1}s)$, (condition équivalente à $\ell(\omega_2\omega_1^{-1}) = \ell(\omega_2) - \ell(\omega_1)$) , auquel cas :

$$A_{\omega_1} \circ A_{\omega_2^{-1}s}(P_s) = A_{\omega_1\omega_2^{-1}s}(P_s) = P_{\omega_2\omega_1^{-1}} .$$

---

c) : Nous reproduisons ici la démonstration de Bernstein-Gel'fand-Gel'fand tout en l'encadrant dans le contexte des $S(\underline{t}^*)^W$-modules.

c-I) Le système $\{P_\omega\}$ est libre :

Supposons qu'on ait :

$$\sum_{\omega} f_\omega \cdot P_\omega = 0 \quad , \quad \text{avec} \quad f_\omega \in S(\underline{t}^*)^W .$$

Soit ω_o un élément de longueur maximale tel que $f_{\omega_o} \neq 0$. Alors :

$$0 = A_{\omega_o}(\sum_{\omega} f_\omega \cdot P_\omega) = \sum_{\omega} f_\omega \cdot A_{\omega_o}(P_\omega) \quad ,$$

où une condition nécessaire, d'après b) , pour que $A_{\omega_o}(P_\omega) \neq 0$ est que $\omega_o \leq \omega$. Alors :

$$0 = f_{\omega_o} \cdot A_{\omega_o}(P_{\omega_o}) = f_{\omega_o} .$$

---

c-II) $\{P_\omega\}$ engendre $S(\underline{t}^*)$.

Pour ceci on utilise les deux résultats suivants ([4] , [5]) :

a_1) L'homomorphisme de Chern-Weil dans $H^*(X)$, établit un isomorphisme entre :

$$S(\underline{t}^*) / < S(\underline{t}^*)_o^W > \cong H^*(X) \; ,$$

où $<S(\underline{t}^*)_o^W>$ dénote l'idéal de $S(\underline{t}^*)$ engendré par les polynômes symétriques nuls à l'origine (cf.3.10 - 3.11).

a_2) Les cycles de Schubert constituent une base de l'homologie de X .

Ainsi b) prouve que le système $\{P_\omega\}$ définit une base de $S(\underline{t}^*)/< S(\underline{t}^*)_o^W>$ en tant que $\mathbb{C}$ - espace vectoriel.

Soit maintenant $F \in S(\underline{t}^*)$, on montrera qu'il est engendré par les P_ω par récurrence sur son degré. Les remarques précédentes assurent l'existence de constantes $c_\omega \in \mathbb{C}$ telles que :

$$F = \sum_{\omega} c_\omega \cdot P_\omega + \sum_{n} Q_n \cdot f_n \quad ,$$

où $f_n \in S(\underline{t}^*)_o^W$. Mais, dans cette somme les P_ω sont homogènes et on peut supposer que les f_n le sont aussi. Alors on peut se restreindre à ne considérer que les P_ω et f_n de degré $\leq d°(F)$, auquel cas

$d^\circ(Q_n) < d^\circ(F)$ et par hypothèse de récurrence on sera dans le $S(\underline{t}^*)^W$-sous-module engendré par $\{P_\omega\}$.

6.5) Transformée de Fourier des cellules des orbites kählériennes.

Soit f une forme réelle de $\underline{k}$ nulle sur $\underline{t}^\perp$ et régulière (c'est-à-dire $f(h_\alpha^\vee) \neq 0$ si $\alpha \in \Delta_+$). L'orbite de la représentation coadjointe de K sur $\underline{k}^*$ passant par f, notée K_f, s'identifie à X admettant ainsi une structure complexe et une décomposition cellulaire :

$$K_f = \coprod_{\omega \in W} K_f^\omega .$$

On munit K_f, de la forme symplectique K-invariante, canonique, σ_f. La condition de positivité pour que σ_f soit la forme fondamentale d'une structure kählérienne sur K_f, se lit sur $T_{\bar{e}}(X)$ par :

$$\forall \alpha \in \Delta_+ ,\ 0 < f([e(\alpha), ie(\alpha)]) = f([e(\alpha), f(\alpha)]) = -2if(h_\alpha^\vee) .$$

Cette condition étant supposée vérifiée, les sous-variétés (K_f^ω, σ_f) sont de Kähler, donc symplectiques. La transformée de Fourier de leur mesure de Liouville ([2]), notée $\mathcal{F}_f^\omega$ est donnée par :

$$\text{si } Y \in \underline{t} ,\quad \mathcal{F}_f^\omega(Y) = \int_{x \in K_f^\omega} e^{i<Y,x>} e^{\sigma_f(x)} ,$$

où l'orientation de K_f^ω, définie par la forme volume de Liouville, coïncide avec l'orientation canonique en tant que variété complexe.

Considérons maintenant, sur le fibré principal $K \to K/T$ une connexion K-invariante θ, ∇ la dérivée covariante et $\Omega = \nabla\theta$ la courbure. Par changement de variable, l'intégrale précédente s'écrit :

$$\text{si } Y \in \underline{t} ,\quad \mathcal{F}_f^\omega(Y) = \int_{k \in X_\omega} e^{i<Y, k\cdot f>} e^{f(-\frac{\Omega}{2\pi}(k))} ,$$

où $<Y, k\circ f> = f(k^{-1}\circ Y) = f(-\omega((k^{-1}\circ Y)_K)(\bar{e}) = f(-J_Y(k))$. D'où :

$$\hat{\sigma}_f^{\omega}(Y) = \int_{X_\omega} e^{if(-J_Y - \frac{\Omega}{2\pi})} = \mathcal{L}_\omega \circ b(e^{if})(Y) \ ,$$

soit :

si $Y \in \underline{t}$, $\hat{\sigma}_f^{\omega}(Y) = A_\omega(e^{if})(Y)$.

7.) Appendice

La notation et le contenu de cet appendice seront, en général, indépendants de ceux des sections précédentes. Les références bibliographiques se limitent essentiellement aux articles de H. Cartan ([7]) et D. Quillen ([11]).

7.1) Notion de H-algèbre différentielle graduée (H-a.d.g. en abrégé).

C'est la donnée de :

I) Un groupe de Lie H, pas nécessairement connexe, d'algèbre de Lie $\underline{h}$.

II) Une $\mathbb{C}$-algèbre A, associative, unitaire, graduée sur $\mathbb{N}$, anticommutative :

$$A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n \ , \quad A_n A_m \subseteq A_{n+m} \ , \quad a_n a_m = (-1)^{nm} a_m a_n \ .$$

<u>Définition :</u> Soit $\overline{(\ )} : A \to A$ l'automorphisme d'algèbre graduée, de degré 0, défini par :

$$\text{si } a_n \in A_n \ , \quad \bar{a}_n = (-1)^n a_n .$$

III) Une antidérivation de A, de degré $+1$, d, de carré nul :

$$d(a \cdot b) = (da)\, b + \bar{a}\, db \ , \quad d^2 = 0 \ .$$

Un couple (A,d) vérifiant ces conditions sera appelé une algèbre différentielle graduée (a.d.g. en abrégé).

IV) Une action de H sur (A,d) par automorphismes de a.d.g., de degré 0. Si $h \in H$, l'application $a \mapsto h \cdot a$ sera appelée "translation". On exigera pour une telle action que pour tous $Y \in \underline{h}$ et $a \in A$:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\exp(\varepsilon Y) \cdot a - a}{\varepsilon} \quad \text{existe dans } A \ .$$

Cette limite sera notée $L(Y)(a)$. L'application $L(Y)$ est alors une dérivation de degré 0 de A, commutant à d.

V) Une famille $\{c(Y) \,/\, Y \in \underline{h}\}$ d'antidérivations, de degré -1, appelées des "contractions", de carré nul :

$c(Y)(a\cdot b) = (c(Y)a)\ b + \bar{a}\ c(Y)b \quad , \quad c(Y)^2 = 0 .$

Ces données seront liées par les relations :

$$\left|\begin{array}{l} \text{a) si } h \in H \text{ et } Y \in \underline{h} \ , \ h \circ c(Y) = c(h\cdot Y) \circ h \ , \\ \text{b) si } Y \in \underline{h} \ , \ L(Y) = d\circ c(Y) + c(Y)\circ d \ . \end{array}\right.$$

Un triplet (H,A,d) vérifiant les conditions ci-dessus sera appelé une H-a.d.g.

Remarque : Si (H,A,d) est une H-a.d.g. le sous-espace d'éléments H-basiques :

$$A^{b_H} = \{a \in A \,/\, H\cdot a = a \ \text{ et } \ c(\underline{h})\ a = 0\},$$

est une sous-a.d.g. de (A,d) .

Définition : Si (A,d) est une a.d.g. on note $H^*(A,d)$ l'algèbre graduée de cohomologie, associée.

7.2) Produit tensoriel de deux H-a.d.g. :

Soient (H,A,d_A) , (H,B,d_B) deux H-a.d.g. Munissons le produit tensoriel $A \otimes B$, de la graduation naturelle :

si $a \in A_n$ et $b \in B_m$, alors $a \otimes b \in (A \otimes B)_{m+n}$,

et de la structure d'algèbre associative, unitaire, anticommutative qui découle de :

si $a' \in A_n$ et $b \in B_m$ alors $(a \otimes b)\cdot(a' \otimes b') = (-1)^{nm}\ aa' \otimes bb'$.

Le fait que nous travaillons avec des algèbres unitaires permet d'identifier canoniquement A à $A \otimes 1$. On prolonge alors l'opérateur d_A à la seule antidérivation de $A \otimes B$, de degré $+1$, s'annulant sur B , on la notera aussi d_A . On procède mutatis mutandis pour B . L'opérateur de $A \otimes B$ défini par $d_{AB} = d_A + d_B$ est ainsi la seule antidérivation de $A \otimes B$, de degré $+1$, qui prolonge simultanément les antidérivations de A et B ;

$$d_{AB}\,(a\otimes b) = (d_A\, a)\otimes b + \bar{a}\otimes d_B(b)\ .$$

Le groupe H définit naturellement des translations en posant :

$$\text{si}\quad h\in H\ ,\quad h_{AB}\cdot(a\otimes b) = h_A\cdot a\otimes h_B\cdot b\ .$$

Enfin si $Y\in \underline{h}$ on définit la contraction $c_{AB}(Y)$ comme la seule antidérivation de degré -1 de $A\otimes B$ qui prolonge $c_A(Y)$ et $c_B(Y)$:

$$c_{AB}(Y)\ (a\otimes b) = c_A(Y)\ a\otimes b + \bar{a}\otimes c_B(Y)b\ .$$

On prouve que $(H, A\otimes B, d_{AB})$ muni de ces actions est une H-a.d.g.

7.3) Deux exemples : Soit G un groupe de Lie, d'algèbre de Lie $\underline{g}$ et H un sous-groupe fermé de G, d'algèbre de Lie $\underline{h}$.

I) Algèbre des formes G-équivariantes de G :

Soient $S(\underline{g}^*)$ l'algèbre des polynômes sur $\underline{g}$, à coefficients complexes, graduée par la graduation double de la graduation habituelle, et $\underline{a}(G)$ l'algèbre graduée des formes différentielles de G à valeurs dans $\mathbb{C}$. On munit $S(\underline{g}^*)\otimes\underline{a}(G)$ de la structure du produit tensoriel d'algèbres graduées anticommutatives. G opère par représentation coadjointe sur $S(\underline{g}^*)$ et par translations à gauche sur $\underline{a}(G)$:

$$\text{si}\quad g\in G\ ,\quad g(P\otimes\mu) = ad(g^{-1})^*(P)\otimes\gamma^*_{g^{-1}}(\mu)\ ,$$

(où la lettre γ rappelle qu'il s'agit de l'action à gauche). On note $[S(\underline{g}^*)\otimes\underline{a}(G)]^G$ la sous-algèbre graduée, d'éléments invariants, (les formes G-équivariantes de G).

Soit $\lambda\in\mathbb{C}^*$, on définit sur $(S(\underline{g}^*)\otimes\underline{a}(G))$ l'opérateur δ^λ de la manière suivante : si $(X_1,\dots,X_n)$ est une base de $\underline{g}$ et si $(\Omega^1,\dots,\Omega^n)$ dénote la base duale dans $S^1(\underline{g}^*)$:

$$\delta^{\lambda}(P \otimes \mu) = P \otimes d\mu - \lambda P\Omega^k \otimes i(X_k^{\gamma})\mu ,$$

où la sommation par rapport à k est sous-entendue et $i(X_k^{\gamma})$ dénote la contraction par le champ de vecteurs associé à l'action infinitésimale à gauche (γ) de X_k, c'est-à-dire, par le champ invariant à droite, engendré par $-X_k \in \underline{g} \equiv T_e(G)$.
Les remarques de la section 2 montrent que $([S(\underline{g}^*) \otimes \underline{a}(G)]^G, \delta^{\lambda})$ est une a.d.g. Nous la munirons maintenant d'une action par H.

<u>Translations</u> : Soit $h \in H$, on définit sur $S(\underline{g}^*) \otimes \underline{a}(G)$:

$$h \cdot (P \otimes \mu) = P \otimes \partial_h^* \mu .$$

Le groupe H opère, donc, seulement sur la composante forme par translations à droite (∂). Cette action commute d'une part à l'action de G, et d'autre part à δ^{λ}, le groupe H opère ainsi par automorphismes d'a.d.g. sur $[S(\underline{g}^*) \otimes \underline{a}(G)]^G$.

<u>Contractions</u> : Soit $Y \in \underline{h}$, on pose sur $S(\underline{g}^*) \otimes \underline{a}(G)$:

$$c(Y)(P \otimes \mu) = P \otimes i(Y^{\partial})\mu ,$$

où $i(Y^{\partial})$ dénote la contraction par le champ de vecteurs associé à l'action infinitésimale à droite de G par Y. C'est-à-dire, par le champ invariant à gauche engendré par $Y \in \underline{h} \equiv T_e(H)$. Ces opérateurs sont des antidérivations de degré -1 et de carré nul, en plus, ils commutent à l'action de G, définissant des opérateurs de $[S(\underline{g}^*) \otimes \underline{a}(G)]^G$.

L'algèbre $([S(\underline{g}^*) \otimes \underline{a}(G)]^G, \delta^{\lambda})$ devient ainsi une H-a.d.g.

Nous prouvons, à titre d'exemple, la relation :

si $Y \in \underline{h}$ $\quad L(Y) = \delta^{\lambda} \circ c(Y) + c(Y) \circ \delta^{\lambda}$.

<u>Démonstration</u> : Les translations par H, agissant seulement sur la composante forme on a :

$$L(Y)(P \otimes \mu) = P \otimes L(Y)\mu = P \otimes di(Y^{\partial})\mu + P \otimes i(Y^{\partial})d\mu .$$

D'autre part, par calcul explicite :

$$\delta^{\lambda} c(Y)(P \otimes \mu) = P \otimes d\, i(Y^{\partial})\mu - \lambda P\Omega^k \otimes i(X_k^{\gamma}) i(Y^{\partial})\mu .$$

$$c(Y)\delta^{\lambda}(P \otimes \mu) = P \otimes i(Y^{\partial})d\mu - \lambda P\Omega^k \otimes i(Y^{\partial}) i(X_k^{\gamma})\mu .$$

Les deuxièmes termes des seconds membres étant opposés, disparaîtront lors de l'addition.

Enfin, la sous-a.d.g. des éléments H-basiques, s'identifie naturellement à l'algèbre des formes G-équivariantes de G/H :

$$\left([[S(\underline{g}^*) \otimes \underline{a}(G)]^G]^{bH}, \delta^\lambda\right) \equiv ([S(\underline{g}^*) \otimes \underline{a}(G/H)]^G, \delta^\lambda) .$$

II) <u>Algèbre de Weil de G :</u>

Notée $W(G)$, est définie par :

$$W(G) = S(\underline{g}^*) \otimes \Lambda(\underline{g}^*) ,$$

où $S(\underline{g}^*)$ est, à nouveau, considérée avec la graduation doublée. La structure d'algèbre de $W(G)$ étant celle d'un produit tensoriel d'algèbres anticommutatives.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$, nous allons définir une différentielle δ_W^λ sur $W(G)$. Pour ceci soit $(X_1,\dots,X_n)$ une base de $\underline{g}$, $(\theta^1,\dots,\theta^n)$ la base duale dans $\Lambda^1(\underline{g}^*)$ et $(\Omega^1,\dots,\Omega^n)$ la base duale dans $S^1(\underline{g}^*)$. L'algèbre $W(G)$ est engendrée par $\{1,\theta^i,\Omega^i\}_{1\leq i\leq n}$, par conséquent δ_W^λ sera connue par ses valeurs sur les θ^i et Ω^i . On pose :

$$1)\quad \delta_W^\lambda(\theta^i) = \lambda\Omega^i + d_K(\theta^i) ,$$

où $d_K(\theta^i)$ dénote la différentielle de θ^i en tant que forme différentielle invariante à gauche de G . Nous rappelons que $d_K(\theta^i) = C^i_{jk}\theta^j\theta^k$ où $\{C^i_{jk}\}$ sont les constantes de structure de Maurer-Cartan. Nous avons aussi la formule de Koszul :

$$d_K = \frac{1}{2}\,\theta^k\, L(X_k) .$$

L'égalité 1) force la valeur de δ_W^λ sur Ω^i :

$$2)\quad \delta_W^\lambda(\Omega^i) = -\lambda^{-1}\,\delta_W^\lambda d_K\theta^i = L(X_k)\,\Omega^i \otimes \theta^k .$$

On prouve alors que $(W(G),\delta_W^\lambda)$ est une a.d.g. ([7]).

L'action du sous-groupe $H \subseteq G$ est la suivante :

Translations : Si $h \in H$ on pose :

$$h\cdot(P \otimes \mu) = (ad(h^{-1})^*P) \otimes (ad(h^{-1})^*\mu) .$$

Contractions : Si $Y \in \underline{h}$ on pose :

$$c(Y)(P \otimes \mu) = P \otimes i(Y)\mu .$$

Ces définitions donnent une strucutre de H-a.d.g. sur $(W(G),\delta_W^\lambda)$ ([7]).

Remarque : Lorsque $H = G$, la sous-algèbre des éléments G-basiques est :

$$W(G)^{b_G} = S(\underline{g}^*)^G .$$

La formule 2) montre qu'il s'agit d'une famille de δ_W^λ-cocycles.
Par conséquent :

$$S(\underline{g}^*)^G \cong H^*(W(G)^{b_G} ,\delta_W^\lambda) .$$

Nous verrons plus tard (proposition 7.8) que cet isomorphisme reste vrai dans le cas général $H \subseteq G$, où il se lit :

$$S(\underline{h}^*)^H \cong H^*(W(G)^{b_H} ,\delta_W^\lambda) .$$

Propriété universelle de W(G) :

7.4) Proposition : Soient (H,A,d) une H-a.d.g. et $F : \Lambda^1(\underline{g}^*) \to A^1$, une application linéaire commutant aux actions de H , c'est-à-dire :

1) Si $\theta \in \Lambda^1(\underline{g})$, et $h \in H$, $F(h\cdot\theta) = h\circ F(\theta)$,

2) Si $\theta \in \Lambda^1(\underline{g})$, et $Y \in \underline{h}$, $C(Y)\,F(\theta)$ est le scalaire $C(Y)\theta$.

Alors, il existe un et un seul homomorphisme de H-a.d.g. unitaire, de degré 0 , f :

$$f : (W(G),\delta_W^\lambda) \longrightarrow (A,d) ,$$

qui prolonge F .

Démonstration : Par la propriété universelle de l'algèbre antisymétrique, F se prolonge aussitôt à $\Lambda(\underline{g}^*)$. Ensuite, puisqu'on cherche un prolongement commutant aux différentielles, la valeur $f(\Omega^i)$ est fixée :

$$\Omega^i = \lambda^{-1}\delta_W(\theta^i) - \lambda^{-1} C^i_{jk}\, \theta^j\, \theta^k \Rightarrow f(\Omega^i) = \lambda^{-1}\, df(\theta^i) - \lambda^{-1} C^i_{jk}\, f(\theta^j)\, f(\theta^k),$$

où l'on remarque que $f(\Omega^i)$ est de degré deux, donc, appartient au centre de A . Par la propriété universelle de l'algèbre symétrique f, se prolonge maintenant, de manière unique, à $S(\underline{g}^*)$. Nous trouvons ainsi un unique prolongement possible à un homomorphisme d'algèbres graduées, de degré 0 , $f : W(G) \to A$.

Pour voir que f commute aux différentielles, on pose $\varphi = d\circ f - f\circ\delta^\lambda_W$ qui vérifie :

a) $\operatorname{Ker}\varphi$ est une sous-algèbre de $W(G)$,

b) $\operatorname{Ker}\varphi \supseteq \{1,\theta^i\}_{1\leq i\leq n}$,

c) $\operatorname{Ker}\varphi$ est δ^λ_W-stable car $\varphi\circ\delta^\lambda_W = -d\circ\varphi$.

Ainsi: $\operatorname{Ker}\varphi = W(G)$.

On procède de manière analogue pour montrer que f commute à l'action de H par translations et contractions.

7.5) Connexions pour une H-a.d.g. :

Soit (H,A,d) une H-a.d.g., on appelle ([7]) connexion de (H,A,d) , tout homomorphisme f de H-a.d.g., de degré 0 :

$$f : (W(H),\delta^\lambda_W) \longrightarrow (A,d) .$$

Par restriction aux sous-algèbres basiques, on déduit un homomorphisme d'algèbres

$$f : (W(H)^{b_H},\delta^\lambda_W) \longrightarrow (A^{b_H},d) ,$$

et nous avons déjà remarqué que $W(H)^{b_H} = S(\underline{h}^*)^H$, est une sous-algèbre de cocycles. L'application f définit, par conséquent, un homomorphisme en cohomologie :

$$\bar{f} : S(\underline{h}^*)^H \longrightarrow H^*(A^{b_H},d) .$$

C'est l'homomorphisme de Chern-Weil.

<u>Théorème ([7])</u> : Soient f_1 et f_2 deux connexions pour (H,A,d), alors $\bar{f}_1 = \bar{f}_2$.

7.6) Nous allons munir maintenant les exemples introduits dans 7.3 de connexions qui se présentent de manière naturelle. Pour ceci on fait l'hypothèse supplémentaire suivante : le fibré principal $G \twoheadrightarrow G/H$, admet une connexion G-invariante ω ; on rappelle que la G-invariance de ω équivaut à dire que le projecteur $\omega(e) : \underline{g} \twoheadrightarrow \underline{h}$ commute à l'action de H.

I) <u>Algèbre des formes G-équivariantes de G.</u>

On pose :

$$\begin{aligned} \Lambda^1(\underline{h}^*) &\xrightarrow{\ F\ } [S(\underline{g}^*) \otimes \underline{a}(G)]^G \\ \theta &\longmapsto \theta\circ\omega \end{aligned},$$

où $\theta\circ\omega$ est une 1-forme de $\underline{a}(G)$, invariante à gauche. On constate immédiatement que :

$$\begin{cases} 1) \text{ Si } h \in H, \quad F(h\cdot\theta) = (h\cdot\theta)\circ\omega = \theta\circ\mathrm{ad}(h^{-1})\circ\omega = \theta\circ\partial_h(\omega) = h\cdot F(\theta) \\ 2) \text{ Si } Y \in \underline{h}, \quad i(Y^\partial)(\theta\circ\omega) = \theta(Y). \end{cases}$$

Par la proposition 7.4) l'application F se prolonge à une connexion, notée f.

II) <u>Algèbre de Weil de G.</u>

On pose :

$$\begin{aligned} \Lambda^1(\underline{h}^*) &\xrightarrow{\ F_W\ } S(\underline{g}^*) \otimes \Lambda(\underline{g}^*) \\ \theta &\longmapsto \theta\circ\omega(e) \end{aligned}.$$

Un raisonnement semblable à celui du cas I) montre que F_W définit, par prolongement, une connexion notée f_W. Le lemme suivant permettra de comparer f et f_W.

Lemme : L'application :

$$\begin{array}{ccc} ([S(\underline{g}^*) \otimes \underline{a}(G)]^G, \delta^\lambda) & \xrightarrow{v(e)} & ((S(\underline{g}^*) \otimes \Lambda(\underline{g}^*)), \delta^\lambda_W) \\ P_n \otimes \mu^n & \longmapsto & P_n \otimes \mu^n(e) , \end{array}$$

est un isomorphisme de H-a.d.g.

Démonstration : $v(e)$ est clairement un homomorphisme d'algèbres graduées de degré 0. Pour voir qu'il est bijectif le plus simple est de considérer le point de vue des formes variables, car si μ est équivariante on a l'égalité :

$$\text{si } Y \in \underline{g} \text{ et } g \in G , \quad \mu(g^{-1} \circ Y)(e) \circ \gamma^T_{g^{-1}}(g)^* = \mu(Y)(g) .$$

Enfin $v(e)$ commute aux opérateurs différentiels : considérons $\varphi = \delta^\lambda \circ v(e)^{-1} - v(e)^{-1} \circ \delta^\lambda_W$, son noyau vérifie :

a) $\operatorname{Ker} \varphi$ est une sous-algèbre de $W(G)$,

b) $\operatorname{Ker} \varphi$ est δ^λ_W-stable, car : $\varphi \circ \delta^\lambda_W = -\delta^\lambda \circ \varphi$,

c) $\operatorname{Ker} \varphi \supseteq \{1\} \cup \Lambda^1(\underline{g}^*)$.

Pour c) fixons une base de $\underline{g}$, $(X_1, \dots, X_n)$ et les bases duales $(\theta^1, \dots, \theta^n)$ et $(\Omega^1, \dots, \Omega^n)$ de $\Lambda^1(\underline{g}^*)$ et $S^1(\underline{g}^*)$ respectivement. Alors :

1) $v(e)^{-1} \circ \delta^\lambda_W(\theta^j) = v(e)^{-1}(\lambda\Omega^j + d_K \theta^j) = \lambda\tilde{\Omega}^j + d\tilde{\theta}^j$,

où $\tilde{\Omega}^j$ dénote le prolongement équivariant de la o-forme Ω^j, et $\tilde{\theta}^j$ la forme invariante à gauche engendrée par θ^j. D'autre part :

2) $\delta^\lambda \circ v(e)^{-1}(\theta^j) = \delta^\lambda \tilde{\theta}^j = d\tilde{\theta}^j - \lambda\Omega^k \otimes i(X^\gamma_k)\tilde{\theta}^j$.

Ainsi, pour montrer que 1) et 2) sont égales, il suffit de prouver que $\tilde{\Omega}^j = -\Omega^k \otimes i(X^\gamma_k)\tilde{\theta}^j$, mais s'agissant de formes équivariantes il suffira de regarder leur comportement en e. Or :

$$-\Omega^k \otimes i(X^\gamma_k)\tilde{\theta}^j(e) = \Omega^j .$$

Car $i(X_k^\gamma)\tilde{\theta}^j(e) = -\delta_{j,k}$.

Par conséquent $\operatorname{Ker} \varphi = W(G)$.

Les autres conditions se vérifient sans inconvénients.

Les connexions f et f_W diffèrent, donc, par un isomorphisme, et, en ce qui concerne les homomorphismes de Chern-Weil, on aura :

$$\begin{tikzcd} & H^*([S(\underline{g}^*) \otimes \underline{a}(G/H)]^G,\delta^\lambda) \\ S(\underline{h}^*)^H \arrow[ur, "\bar{f}"] \arrow[dr, "\bar{f}_W"'] & \\ & H^*(W(G)^{b_H}, \delta_W^\lambda) \arrow[uu, "\approx"', "\overline{v(e)}"] \end{tikzcd}$$

7.7) Explicitation des homomorphismes de Chern-Weil.

Lemme : Soient G un groupe de Lie et $H \subseteq G$ un sous-groupe fermé d'algèbre de Lie $\underline{h} \equiv T_e(H)$. Soit ω une connexion du fibré principal $G \to G/H$. Si $\alpha \in \Lambda^m(\underline{h}^*)$, on note $\alpha\circ\omega^\#$, l'élément de $\underline{a}^m(G)$ défini par :

$$\alpha\circ\omega^\#(X_1,\dots,X_m) = \alpha(\omega X_1,\dots,\omega X_m) .$$

Alors si $\theta \in \underline{h}^*$:

$$d(\theta\circ\omega) - (d_K^{\underline{h}}\theta)\circ\omega^\# = \theta\circ(\nabla\omega),$$

où $d_K^{\underline{h}}$ dénote la différentielle du complexe de Koszul : $(\Lambda(\underline{h}^*),d_K^{\underline{h}})$.

Démonstration : Fixons une base $(X_1,\dots,X_n)$ de $\underline{h}$, de base duale $(\theta^1,\dots,\theta^r)$ dans $\Lambda^1(\underline{h}^*)$, alors, par la formule de Koszul :

$$-(d_K^{\underline{h}})\circ\omega^\# = -\frac{1}{2}(\theta^k \wedge L(X_k)\theta)\circ\omega^\# .$$

Or $L(X_k)\theta = -\theta\circ Ad(X_k)$, en remplaçant il vient :

$$-(d_K^{\underline{h}}\theta)\circ\omega^\# = \frac{1}{2}(\theta^k\circ\omega)\wedge \theta\circ[X_k\wedge\omega] = \theta\circ(\tfrac{1}{2}[\omega\wedge\omega]) .$$

Ainsi : $d(\theta\circ\omega) - (d_k^{\underline{h}}\theta)\circ\omega^{\#} = \theta\circ(d\omega + \frac{1}{2}[\omega\wedge\omega]) = \theta\circ(\nabla\omega)$.

Corollaire : Si, en plus, ω est supposée G-invariante, $\theta\circ\omega$ est une forme G-invariante à gauche. En évaluant en e on aura :

$$d_K^{\underline{g}}(\theta\circ\omega(e)) - (d_K^{\underline{h}}\theta)\circ\omega(e) = \theta\circ(\nabla\omega)(e) .$$

Homomorphisme de Chern-Weil dans la cohomologie des formes G-équivariantes de G/H.

Nous avons défini :

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^1(\underline{h}^*) & \xrightarrow{F} & [S(\underline{g}^*)\otimes(G)]^G \\ \theta & \longmapsto & \theta\circ\omega . \end{array}$$

Le prolongement de cette application à $\Lambda(\underline{h}^*)$ est donné par :

si $\mu\in\Lambda(\underline{h}^*)$, $f(\mu) = \mu\circ\omega^{\#}$.

Ainsi, si $\theta\in\Lambda^1(\underline{h}^*)$ et $\Omega\in S^1(\underline{h}^*)$ dénotent la même forme linéaire de $\underline{h}$, on aura, en termes de formes variables :

$$\text{si } Y\in\underline{g} \quad f(\Omega)(Y) = \lambda^{-1}f\left(\delta_W^{\lambda}\theta - d_K^{\underline{h}}\theta\right)(Y) = \lambda^{-1}\left(\delta^{\lambda}(\theta\circ\omega) - (d_K^{\underline{h}}\theta)\circ\omega^{\#}\right)(Y)$$
$$= \lambda^{-1}\left(d(\theta\circ\omega) - (d_K^{\underline{h}}\theta)\circ\omega^{\#} - \lambda i(Y_G^{\Upsilon})(\theta\circ\omega)\right),$$

Soit, par le lemme précédent :

$$f(\Omega)(Y) = \theta(-J_Y + \frac{\nabla\omega}{\lambda}) ,$$

où $J_Y = i(Y_G^{\Upsilon})\omega$.

L'homomorphisme de Chern-Weil, en termes de formes variables, se lit :

$$\begin{array}{ccc} S(\underline{h}^*)^H & \xrightarrow{\bar{f}} & H_G^*(G/H) \\ P & \longmapsto & \overline{P(-J_Y + \frac{\nabla\omega}{\lambda})} . \end{array}$$

En prenant $\lambda = -2\pi i$ nous retrouvons la construction de Berline-Vergne ([3]), introduite dans la section 3.

Homomorphisme de Chern-Weil dans la cohomologie $H^*(W(G)^{b_H}, \delta_W^\lambda)$.

Il vient par évaluation en e :

$$\begin{array}{ccc} S(\underline{h}^*)^H & \xrightarrow{\bar{f}_W} & H^*\left(W(G)^{b_H}, \delta_W^\lambda\right) \\ P & \longmapsto & \overline{P\left(Y + \frac{(\nabla\omega)(e)}{\lambda} \right)} \ . \end{array}$$

7.8) En nous servant de méthodes de D. Quillen ([11]) nous prouvons maintenant :

Proposition : L'homomorphisme $\bar{f}_W$ est un isomorphisme.

Démonstration : Notons $\underline{q} = \mathrm{Ker}(\omega(e))$, c'est un supplémentaire H-stable de $\underline{h}$ dans $\underline{g}$:

$$\underline{g} = \underline{h} \oplus \underline{q} \ . \qquad (1)$$

Fixons $(X_1,\dots,X_r)$, base de $\underline{h}$ et $(X_{r+1},\dots,X_n)$, base de $\underline{q}$, on en déduit une base de $\underline{g}$, $(X_1,\dots,X_n,X_{n+1},\dots,X_n)$ et les bases duales $(\theta^1,\dots,\theta^n)$ et $(\Omega^1,\dots,\Omega^n)$ dans $\Lambda^1(\underline{g}^*)$ et $S^1(\underline{g}^*)$ respectivement. Si $\alpha \in \underline{g}^*$ on notera $\underline{\alpha} = \alpha|_{\underline{h}}$, alors $(\underline{\theta}^1,\dots,\underline{\theta}^r)$ est une base de $\Lambda^1(\underline{h})$.

Avec ces éléments la connexion f_W est caractérisée par :

$$\begin{array}{ccc} (W(H), \delta_W^\lambda) & \xrightarrow{f_W} & (W(G), \delta_W^\lambda) \\ \underline{\theta}^i & \longmapsto & \theta^i \quad , \text{ si } 1 \leq i \leq r \ . \end{array}$$

En utilisant la proposition 7.4, on garantit l'existence d'un unique homomorphisme de H-a.d.g. de degré 0 , ν , vérifiant :

$$\begin{array}{ccc} (W(G), \delta_W^\lambda) & \xrightarrow{\nu} & (W(H), \delta_W^\lambda) \\ \theta^i & \longmapsto & \underline{\theta}^i \quad , \text{ si } 1 \leq i \leq n \ . \end{array}$$

Car :

$$\begin{cases} \text{i) si } h \in H \ , \ h\underline{\theta}^i = \underline{h\theta^i} \ \text{(puisque } \underline{q} \text{ est H-stable)} \ , \\ \text{ii) si } X \in \underline{h} \ , \ c(X)\underline{\theta}^i = \theta^i(X) \ . \end{cases}$$

Les applications f_W et ν ainsi définies vérifient :

1) $\nu \circ f = id_{W(H)}$,

2) $f \circ \nu = \varphi$, est l'unique endomorphisme de H-a.d.g. de W(G) vérifiant :

$$\begin{cases} \theta^i \xmapsto{f\circ\nu} \theta^i & , \text{ si } 1 \leq i \leq r , \\ \theta^i \longmapsto 0 & , \text{ si } r < i . \end{cases}$$

En particulier, en se restreignant aux éléments H-basiques et en passant aux cohomologies :

$$\bar{\nu} \circ \bar{f} = id_{S(\underline{h}^*)^H} \quad . \qquad \text{(A)}$$

Considérons maintenant l'algèbre différentielle $(\underline{a}(\mathbb{R}),d)$ des formes différentielles de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, munie de l'action de H , triviale.

Soit $(\underline{a}(\mathbb{R}) \otimes W(G), \bar{\delta})$, avec $\bar{\delta} = d + \delta_W^\lambda$, le produit tensoriel de H-a.d.g. Les éléments de cette algèbre admettent une décomposition unique sous la forme :

$$w_1(t) + dt\, w_2(t) ,$$

avec $w_1(t)$ et $w_2(t)$ des fonctions différentiables de t , à valeurs dans W(G) .

Nous définissons alors les homomorphismes de H-a.d.g. , $\emptyset$ et $v(0)$ par :

$$\begin{array}{llcccc}
 & & W(G) \xrightarrow{\ \emptyset\ } & \underline{a}(\mathbb{R}) \otimes W(G) & \xrightarrow{\ v(0)\ } & W(G) \\
 & & & w_1(t) + dt\, w_2(t) & \longmapsto & w_1(0) \\
\text{si } 1 \leq i \leq r , & & \theta^i \longmapsto & 1 \otimes \theta^i & \longmapsto & \theta^i \\
\text{si } r < i , & & \theta^i \longmapsto & t \otimes \theta^i & \longmapsto & 0 ,
\end{array}$$

où l'existence de $\emptyset$ est, à nouveau, garantie par la proposition 7.4. Enfin, il est immédiat de constater que $\varphi = v(0) \circ \emptyset$.

Restreignons nous aux sous-algèbres H-basiques:

$$\begin{tikzcd}
\left(W(G)^{b_H},\delta_W^\lambda\right) \arrow[r, "\emptyset"] \arrow[rr, bend right, "\varphi"'] & \left(\underline{a}(\mathbb{R}) \otimes W(G)^{b_H}, \bar{\delta}\right) \arrow[r, "v(0)"] & \left(W(G)^{b_H},\delta_W^\lambda\right)
\end{tikzcd} .$$

<u>Lemme :</u> Si z est un cocycle de $(W(G)^{b_H},\delta_W^\lambda)$, $\varphi(z)$ est cohomologue à z .

<u>Démonstration :</u> Puisque $\emptyset(z) = w_1(t) + dt\, w_2(t)$ est un $\bar{\delta}$-cocycle, on aura :

$$0 = \bar{\delta}\emptyset(z) = d\emptyset(z) + \delta_W^\lambda\emptyset(z) = d\left(w_1(t)\right) + \delta_W^\lambda\left(w_1(t)\right) - dt\,\delta_W^\lambda\left(w_2(t)\right) ,$$

où l'on vérifie aisément que $dw_1(t) = dt\,w_1'(t)$.

On en déduit, d'une part, que $\delta_W^\lambda\left(w_1(t)\right) = 0$, c'est-à-dire : $\{w_1(t)\}$ est une famille différentiable de cocycles de $(W(G),\delta_W^\lambda)$. En particulier $w_1(1) \equiv z$ et $w_1(0) \equiv \varphi(z)$. D'autre part $w_1'(t) = \delta_W^\lambda\left(w_2(t)\right)$, soit en intégrant :

$$w_1(T) - w_1(0) = \delta_W^\lambda \int_0^T w_2(t)\, dt .$$

La famille $\{w_1(t)\}$ est, donc, une famille de cocycles cohomologues de $(W(G),\delta_W^\lambda)$.

Ce lemme montre que φ opère par identité sur les classes de cohomologie, donc :

$$\bar{f}\circ\bar{\nu} = \mathrm{id}_{H^*(W(G),\delta_W^\lambda)} .$$

Ce qui avec (A) achève la démonstration de la proposition.

7.9) <u>Corollaire :</u> Soit G un groupe de Lie, H un sous-groupe fermé, d'algèbre de Lie $\underline{h}$. On suppose que le fibré principal $G \to G/H$ admet une connexion G-invariante ω , de dérivée covariante ∇ et courbure $\nabla\omega$. Alors, l'homomorphisme de Chern-Weil en cohomologie équivariante :

$$\begin{array}{ccc} S(\underline{h}^*)^H & \xrightarrow{\ b\ } & H_G^*(G/H) \\ P & \longmapsto & \overline{P(- J_Y - \frac{\nabla\omega}{2\pi i})} \end{array} ,$$

est un isomorphisme.

8.) Références bibliographiques:

[1] M. F. Atiyah, R. Bott, "The moment map and equivariant cohomology", Topology, Vol. 23, N° 1, (1984), pp. 1-28.

[2] N. Berline, M. Vergne, "Fourier transforms of orbits of the coadjoint representation", Proceedings of the conference on "Representations of Reductive Groups" Park City, Utah, April 1982. Birkhaüser, (1983).

[3] N. Berline, M. Vergne, "Zéros d'un champ de vecteurs et classes caractéristiques équivariantes", Duke Math. Journal, Vol. 50, N° 2, (1983), pp. 539-549.

[4] I. N. Bernstein, I. M. Gel'fand, S. I. Gel'fand, "Schubert cells and cohomology of the spaces G/P", Uspekhi Mat. Nauk. 28, N° 3, (171), (1973), pp. 3-26.

[5] A. Borel, "Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes des groupes de Lie compacts", Ann. of Math. (2), 57, (1953), pp. 115-207.

[6] N. Bourbaki, "Groupes et algèbres de Lie, ch. 1-6", Eléments de mathématique, 26, 34, 36. Hermann et Cie, Paris, 1960-1972.

[7] H. Cartan, a. "Notions d'algèbre différentielle, applications aux groupes de Lie, ...", b. "La transgression dans un groupe de Lie et dans un espace fibré principal", Colloque de topologie algébrique, Bruxelles (1950), pp. 16-27 et 57-71.

[8] H. C. Hansen, "On cycles in flag manifolds", Math. Scand. 33, (1973), pp. 269-274.

[9] Harish-Chandra, "Differential operators on a semisimple Lie algebra", Amer. J. Math., (1957), pp. 87-120.

[10] V. Kač,

[11] D. Quillen, "Superconnections and the Chern character", à paraître dans Topology.