Sur la cohomologie locale des faisceaux

Alberto Arabia (*)

9 juillet 2015

Résumé. Pour un sous-ensemble $\boldsymbol{A}$ d'un espace topologique $\boldsymbol{X}$ métrisable et localement compact, et pour tout faisceaux $\mathcal{F} \in \mathrm{Sh}(\boldsymbol{X})$, on désigne par $\underline{\underline{\Gamma}}_{\boldsymbol{A}}\mathcal{F}$ le sous-faisceau des sections de $\mathcal{F}$ dont le support est contenu dans $\boldsymbol{A}$. On note alors $\underline{\underline{\Gamma}}_{\boldsymbol{A}} : \mathrm{Sh}(\boldsymbol{X}) \rightsquigarrow \mathrm{Sh}(\boldsymbol{X})$ le foncteur correspondant et $\underline{\underline{\gamma}}_{\boldsymbol{A}} := i_{\boldsymbol{A}}^{-1} \circ \underline{\underline{\Gamma}}_{\boldsymbol{A}} : \mathrm{Sh}(\boldsymbol{X}) \rightsquigarrow \mathrm{Sh}(\boldsymbol{A})$ sa restriction à $\boldsymbol{A}$. Dans ces définitions, aucune propriété particulière n'est demandée à l'ensemble $\boldsymbol{A}$, contrairement à la définition de Grothendieck ([Gr$_2$]) du foncteur '$\Gamma_{\boldsymbol{Z}} : \mathrm{Sh}(\boldsymbol{X}) \rightsquigarrow \mathrm{Sh}(\boldsymbol{X})$' des sections à support sur une partie $\boldsymbol{Z}$ localement fermée dans $\boldsymbol{X}$. Le but de ce travail est d'explorer quelques propriétés générales du foncteur $\underline{\underline{\Gamma}}_{\boldsymbol{A}}$. Nous justifions notamment les assertions suivantes.

- Soit $i_{\boldsymbol{A}!} : \mathrm{Sh}(\boldsymbol{A}) \rightsquigarrow \mathrm{Sh}(\boldsymbol{X})$ le foncteur d'image directe à supports propres. Alors, la paire de foncteurs $(i_{\boldsymbol{A}!}, \underline{\underline{\gamma}}_{\boldsymbol{A}})$ est une paire adjointe, si et seulement si $\boldsymbol{A}$ est une partie localement fermée dans $\boldsymbol{X}$ (*cf.* 1.2.1).
- On a un triangle est exact (*cf.* 1.4.1)
$$\mathbb{R}\underline{\underline{\Gamma}}_{\boldsymbol{A}}(\_) \to (\_) \to \mathbb{R}i_{\boldsymbol{X}\setminus\boldsymbol{A}*}(\_|_{\boldsymbol{X}\setminus\boldsymbol{A}}) \to$$
- Pour $\boldsymbol{W}$ ouvert ou fermé dans une partie localement fermée $\boldsymbol{Z}$ de $\boldsymbol{X}$ supposé localement compact et dénombrable à l'infini, on a un triangle exact (*cf.* 1.4.1)
$$\mathbb{R}\underline{\underline{\Gamma}}_{\boldsymbol{Y}}(\_) \to \mathbb{R}\underline{\underline{\Gamma}}_{\boldsymbol{Z}}(\_) \to \mathbb{R}i_{\boldsymbol{X}\setminus\boldsymbol{Y}*}\mathbb{R}\underline{\underline{\Gamma}}_{\boldsymbol{Z}\setminus\boldsymbol{Y}}(\_|_{\boldsymbol{X}\setminus\boldsymbol{Y}}) \to$$
- Si $\boldsymbol{A}$ est ouvert ou si $\boldsymbol{B}$ est fermé dans $\boldsymbol{X}$, le morphisme naturel
$$\mathbb{R}\underline{\underline{\Gamma}}_{\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{B}} = \mathbb{R}(\underline{\underline{\Gamma}}_{\boldsymbol{A}} \circ \underline{\underline{\Gamma}}_{\boldsymbol{B}}) \longrightarrow \mathbb{R}\underline{\underline{\Gamma}}_{\boldsymbol{A}} \circ \mathbb{R}\underline{\underline{\Gamma}}_{\boldsymbol{B}}$$
est un isomorphisme (1.4.1).
- Notons $(\Phi(\boldsymbol{X},\boldsymbol{A}), \subseteq)$ l'ensemble des parties $\boldsymbol{Z} \subseteq \boldsymbol{A}$ qui sont localement fermées dans $\boldsymbol{X}$, muni de l'ordre d'inclusion. Alors, les morphismes naturels
$$\operatorname*{limind}_{\boldsymbol{Z}\in\Phi(\boldsymbol{X},\boldsymbol{A})} \underline{\underline{\Gamma}}_{\boldsymbol{Z}}\mathcal{F} \to \underline{\underline{\Gamma}}_{\boldsymbol{A}}\mathcal{F}\,, \qquad \operatorname*{limind}_{\boldsymbol{Z}\in\Phi(\boldsymbol{X},\boldsymbol{A})} \mathbb{R}^i\,\underline{\underline{\Gamma}}_{\boldsymbol{Z}}\mathcal{F} \to \mathbb{R}^i\,\underline{\underline{\Gamma}}_{\boldsymbol{A}}\mathcal{F}\,,$$
$$\operatorname*{limind}_{\boldsymbol{Z}\in\Phi(\boldsymbol{X},\boldsymbol{A})} H^i_{\boldsymbol{Z}}(U,\mathcal{F}) \to H^i_{\boldsymbol{A}}(U,\mathcal{F})\,,$$
sont des isomorphismes (*cf.* 2.3.1).

Table des matières

(*) Université Paris Diderot-Paris 7, IMJ-PRG, CNRS, Bâtiment Sophie Germain, bureau 608, Case 7012, 75205. Paris Cedex 13, France. Contact : `alberto.arabia@imj-prg.fr`.

1. Foncteur des sections à support

On désignera par $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}, \ldots$ des espaces topologiques. On note R un anneau commutatif, puis $\mathrm{Sh}(\boldsymbol{X})$ la catégorie des faisceaux de R-modules sur $\boldsymbol{X}$, et $D^+(\boldsymbol{X})$ la catégorie dérivée des complexes de faisceaux de $\mathrm{Sh}(\boldsymbol{X})$ bornés inférieurement. La catégorie $\mathrm{Sh}(\boldsymbol{X})$ possède suffisamment d'objets injectifs et tout foncteur additif $\boldsymbol{F}$ défini sur $\mathrm{Sh}(\boldsymbol{X})$ induit un foncteur « *dérivé à droite* » sur $D^+(\boldsymbol{X})$ noté $I\!R\boldsymbol{F}$.

1.1. Support d'une section locale. Soit $\mathcal{F} \in \mathrm{Sh}(\boldsymbol{X})$. On rappelle que pour tout ouvert $U \subseteq \boldsymbol{X}$, le « *support* » d'une section $\sigma \in \mathcal{F}(U)$, noté $|\sigma|_U$ (ou simplement $|\sigma|$ lorsque U est sous-entendu), est l'ensemble des $x \in \mathbf{X}$ tels que $\sigma_x \neq 0$. Le lemme suivant rappelle quelques propriétés élémentaires des supports.

1.1.1. Lemme. *Soient* $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathrm{Sh}(\boldsymbol{X})$

a) $\sigma = 0 \Leftrightarrow |\sigma| = \emptyset$.

b) *Si* $\sigma \in \mathcal{F}(U)$, *l'ensemble* $|\sigma|$ *est un fermé dans* U.

c) *Soient* $V \subseteq U$ *deux ouverts de* $\mathbf{X}$ *et soit* $\rho_V^U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ *l'application de restriction. On a*
$$|\rho_V^U(\sigma)| = |\sigma| \cap V\,, \quad \forall \sigma \in \mathcal{F}(U).$$

d) *Soit* $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ *un morphisme de faisceaux. On a*
$$|\alpha(\sigma)| \subseteq |\sigma|\,, \quad \forall \sigma \in \mathcal{F}(U).$$

e) *Soit* $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ *une application continue.*

   i) *L'image directe* $f_*\mathcal{F} \in \mathrm{Sh}(\boldsymbol{Y})$ *est donnée par* $f_*\mathcal{F}(W) := \mathcal{F}(f^{-1}(W))$, *pour tout ouvert* $W \subseteq \boldsymbol{Y}$. *On a* ([1])
$$|\sigma|_W = \overline{(f(|\sigma|_{f^{-1}(W)}))}_W\,, \quad \forall \sigma \in f_*\mathcal{F}(W).$$

   ii) *L'image directe à supports propres* $f_!\mathcal{F} \in \mathrm{Sh}(\boldsymbol{Y})$ *est donnée par*
$$f_!\mathcal{F}(W) := \{\sigma \in \mathcal{F}(f^{-1}(W)) \mid f : |\sigma| \to W \text{ est propre }\}\,,$$
   pour tout ouvert $W \subseteq \boldsymbol{Y}$. *On a*
$$|\sigma|_W = f(|\sigma|_{f^{-1}(W)})\,, \quad \forall \sigma \in f_!\mathcal{F}(W).$$

[1] Pour toute inclusion $P \subseteq W$, on notera $\overline{(P)}_W$ l'adhérence de P dans W.

Indication. Pour (e-i), on remarque que $y \in |\sigma|_W$, si et seulement si $\sigma|_{f^{-1}(V)}$ est non nul pour tout voisinage V de y dans W, autrement dit, si et seulement si $y \in \overline{(f(|\sigma|_{f^{-1}(W)}))}_W$. Ensuite, pour (e-ii), on applique (e-i) et comme $f : |\sigma| \to W$ est propre, l'ensemble $f(|\sigma|_{f^{-1}(W)})$ est automatiquement fermé dans W. $\square$

1.2. Foncteurs de sections à support. Soit $\mathcal{F} \in \mathrm{Sh}(\boldsymbol{X})$. Étant donnée une partie $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{X}$, on considère les définitions classiques suivantes.

Γ-1) Pour tout ouvert $U \subseteq \boldsymbol{X}$,

$$\underline{\underline{\Gamma}}_{\boldsymbol{A}} \mathcal{F}(U) := \{\sigma \in \mathcal{F}(U) \mid |\sigma| \subseteq \boldsymbol{A}\}\,.$$

Γ-2) Pour tout ouvert $V \subseteq \boldsymbol{A}$,

$$\underline{\underline{\gamma}}_{\boldsymbol{A}} \mathcal{F}(V) := \{\sigma \in \mathcal{F}(U) \mid |\sigma| \subseteq \boldsymbol{A}\}\,,$$

où l'on a choisi un ouvert $U \subseteq \boldsymbol{X}$ tel que $V = \boldsymbol{A} \cap U$. La définition est alors indépendante du choix de l'ouvert U.

Γ-3) $$\Gamma_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X}, \mathcal{F}) := \{\sigma \in \mathcal{F}(X) \mid |\sigma| \subseteq \boldsymbol{A}\}\,.$$

1.2.1. Proposition

a) *Les définitions* (Γ-1) *et* (Γ-2) *sont compatibles aux restrictions ouvertes et définissent des sous-préfaisceaux respectivement de $\mathcal{F}$ et de $\mathcal{F}|_{\boldsymbol{A}}$. Ces préfaisceaux sont des faisceaux.*

b) *Pour tout morphisme $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, on a $\alpha(\underline{\underline{\gamma}}_A \mathcal{F}) \subseteq \underline{\underline{\gamma}}_A \mathcal{G}$ et α induit un morphisme de $\underline{\underline{\gamma}}_A \mathcal{F}$ vers $\underline{\underline{\gamma}}_A \mathcal{G}$ noté $\underline{\underline{\gamma}}_A \alpha : \underline{\underline{\gamma}}_A \mathcal{F} \to \underline{\underline{\gamma}}_A \mathcal{G}$. La correspondance*

$$\underline{\underline{\gamma}}_A : \mathrm{Sh}(\boldsymbol{X}) \rightsquigarrow \mathrm{Sh}(\boldsymbol{A})\,, \quad \mathcal{F} \rightsquigarrow \underline{\underline{\gamma}}_A \mathcal{F}\,, \quad \alpha \rightsquigarrow \underline{\underline{\gamma}}_A \alpha\,,$$

est un foncteur additif covariant exact à gauche.

b') *Mutatis mutandis de* (b) *en remplaçant $\underline{\underline{\gamma}}_A$ par $\underline{\underline{\Gamma}}_A$ et par $\Gamma_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X}, \_)$.*

c) *Notons $i_{\boldsymbol{A}} : \boldsymbol{A} \hookrightarrow \boldsymbol{X}$ et $j_{\boldsymbol{A}^c} : \boldsymbol{A}^c \hookrightarrow \boldsymbol{X}$ les applications d'inclusion.*

 i) *Pour $\mathcal{F} \in \mathrm{Sh}(\boldsymbol{X})$, on a une suite exacte à gauche de faisceaux*

$$\boldsymbol{0} \to \underline{\underline{\Gamma}}_{\boldsymbol{A}} \mathcal{F} \to \mathcal{F} \to j_{\boldsymbol{A}^c *} j_{\boldsymbol{A}^c}^{-1} \mathcal{F}$$

 qui est naturelle par rapport à $\mathcal{F}$.

 ii) *On a les égalités de foncteurs*

$$\begin{cases} i_{\boldsymbol{A}!} = \underline{\underline{\Gamma}}_{\boldsymbol{A}} \circ i_{\boldsymbol{A}!} = \underline{\underline{\Gamma}}_{\boldsymbol{A}} \circ i_{\boldsymbol{A}*} \\ \underline{\underline{\Gamma}}_{\boldsymbol{A}} = i_{\boldsymbol{A}!} \circ \underline{\underline{\gamma}}_{\boldsymbol{A}}\,, \quad \underline{\underline{\gamma}}_{\boldsymbol{A}} = i_{\boldsymbol{A}}^{-1} \circ \underline{\underline{\Gamma}}_{\boldsymbol{A}} \end{cases} \qquad \begin{cases} \underline{\underline{\gamma}}_{\boldsymbol{A}} \circ i_{\boldsymbol{A}!} = \underline{\underline{\gamma}}_{\boldsymbol{A}} \circ i_{\boldsymbol{A}*} \\ i_{\boldsymbol{A}}^{-1} \circ i_{\boldsymbol{A}!} = \underline{\underline{\gamma}}_{\boldsymbol{A}} \circ i_{\boldsymbol{A}*} \end{cases}$$

 iii) *Le couple $(i_{\boldsymbol{A}!}, \underline{\underline{\gamma}}_{\boldsymbol{A}})$ est une paire adjointe si et seulement si $\boldsymbol{A}$ est une partie localement fermée dans $\boldsymbol{X}$.*

iv) *Si* $\boldsymbol{U}$ *est ouvert dans* $\boldsymbol{X}$*, on a*

$$\underline{\underline{\gamma}}_{\boldsymbol{U}} = i_{\boldsymbol{U}}^{-1}\,.$$

Les foncteurs $\underline{\underline{\gamma}}_{\boldsymbol{U}}$ *et* $\underline{\underline{\mathit{\Gamma}}}_{\boldsymbol{U}}$ *sont exacts. De plus,*

$$\underline{\underline{\gamma}}_{\boldsymbol{U}}(\text{injectif}) = (\text{injectif})\,, \qquad \underline{\underline{\gamma}}_{\boldsymbol{U}}(\text{flasque}) = (\text{flasque})\,.$$

v) *Si* $\boldsymbol{F}$ *est un fermé de* $\boldsymbol{X}$*, on a*

$$\underline{\underline{\gamma}}_{\boldsymbol{F}}(\text{injectif}) = (\text{injectif})\,, \qquad \underline{\underline{\gamma}}_{\boldsymbol{F}}(\text{flasque}) = (\text{flasque})\,.$$

et de même avec $\underline{\underline{\mathit{\Gamma}}}_{\boldsymbol{F}}$ *à la place de* $\underline{\underline{\gamma}}_{\boldsymbol{F}}$*.*

vi) *Si* $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{F}$ *est localement fermé dans* $\boldsymbol{X}$*, on a*

$$\underline{\underline{\gamma}}_{\boldsymbol{Z}}(\text{injectif}) = (\text{injectif})\,,$$

et si, de plus, $\boldsymbol{X}$ *est localement compact,*

$$\underline{\underline{\mathit{\Gamma}}}_{\boldsymbol{Z}}(\text{injectif}) = (c\text{-mou})\,.$$

Indication. La plupart des assertions résultent des propriétés élémentaires des supports du lemme 1.1.1, nous allons donc nous limiter à donner quelques indications pour la partie (c).

(c-i) Soit V un ouvert de $\boldsymbol{X}$. Le support d'une section σ du noyau du morphisme

$$\mathit{\Gamma}(V, \mathcal{F}) \to \mathit{\Gamma}(V, j_{\boldsymbol{A}^c *} j_{\boldsymbol{A}^c}^{-1} \mathcal{F}) = \mathit{\Gamma}(V \backslash \boldsymbol{A}, \mathcal{F}|_{\boldsymbol{X} \backslash \boldsymbol{A}})$$

ne rencontre par $\boldsymbol{A}^c$, donc $\sigma \in \mathit{\Gamma}_{\boldsymbol{A}}(V, \mathcal{F})$.

(c-ii) Ces égalités résultent pour l'essentiel des descriptions des supports des sections des images directes d'un faisceau (1.1.1-e). Par exemple, comme les supports dans $\boldsymbol{X}$ des sections de $i_{\boldsymbol{A}!}\mathcal{F}$ restent inclus dans $\boldsymbol{A}$ (1.1.1-(e-ii)), on voit aussitôt que $i_{\boldsymbol{A}!} = \underline{\underline{\mathit{\Gamma}}}_{\boldsymbol{A}} i_{\boldsymbol{A}!}$ et $\underline{\underline{\mathit{\Gamma}}}_{\boldsymbol{A}} = i_{\boldsymbol{A}!} \circ \underline{\underline{\gamma}}_{\boldsymbol{A}}$ et donc que $i_{\boldsymbol{A}}^{-1} \circ \underline{\underline{\mathit{\Gamma}}}_{\boldsymbol{A}} = i_{\boldsymbol{A}}^{-1} \circ i_{\boldsymbol{A}!} \circ \underline{\underline{\gamma}}_{\boldsymbol{A}} = \underline{\underline{\gamma}}_{\boldsymbol{A}}$. De même, comme les sections de $\underline{\underline{\gamma}}_{\boldsymbol{A}}\mathcal{F}$ sont $i_{\boldsymbol{A}}$-propres, on a $i_{\boldsymbol{A}!} \circ \underline{\underline{\gamma}}_{\boldsymbol{A}} = i_{\boldsymbol{A}*} \circ \underline{\underline{\gamma}}_{\boldsymbol{A}}$. Enfin, une section $\sigma \in \underline{\underline{\mathit{\Gamma}}}_{\boldsymbol{A}}(i_{\boldsymbol{A}*}\mathcal{F})(U)$ est une section $\sigma \in \mathcal{F}(\boldsymbol{A} \cap U)$ telle que $\overline{(|\sigma|_{\boldsymbol{A} \cap U})}_U \subseteq \boldsymbol{A}$. Le support $|\sigma|_{\boldsymbol{A} \cap U}$ est donc fermé dans U. Par conséquent, $\sigma \in i_{\boldsymbol{A}!}\mathcal{F}(U)$. Les deux égalités isolées à droite résultent alors formellement des précédentes.

(c-iii) Le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Sh}(\boldsymbol{X})}(i_{\boldsymbol{A}!}(\_), (\cdot))$ appliqué au terme $(\cdot)$ à la suite exacte à gauche (c-i) montre que l'on a un isomorphisme de foncteurs

$$\mathrm{Hom}(i_{\boldsymbol{A}!}(\_), (\_)) \cong \mathrm{Hom}(i_{\boldsymbol{A}!}(\_), \underline{\underline{\mathit{\Gamma}}}_{\boldsymbol{A}}(\_))\,.$$

Ensuite, l'égalité $\underline{\underline{\mathit{\Gamma}}}_{\boldsymbol{A}} = i_{\boldsymbol{A}*}\, \underline{\underline{\gamma}}_{\boldsymbol{A}}$ de (c-ii) intervient pour conclure que

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(i_{\boldsymbol{A}!}(\_), \underline{\underline{\mathit{\Gamma}}}_{\boldsymbol{A}}(\_)) &\cong \mathrm{Hom}(i_{\boldsymbol{A}!}(\_), i_{\boldsymbol{A}*}\, \underline{\underline{\gamma}}_{\boldsymbol{A}}(\_)) \\ &\cong \mathrm{Hom}(i_{\boldsymbol{A}*}^{-1} i_{\boldsymbol{A}!}(\_), \underline{\underline{\gamma}}_{\boldsymbol{A}}(\_)) \end{aligned}$$

où l'on sait que, pour $\mathcal{G} \in \mathrm{Sh}(\boldsymbol{A})$, l'inclusion $i_{\boldsymbol{A}}^{-1} i_{\boldsymbol{A}!} \mathcal{G} \subseteq \mathcal{G}$ est une égalité lorsque $\boldsymbol{A}$ est localement fermée dans $\boldsymbol{X}$. ([2])

Réciproquement, supposons que la paire $(i_{\boldsymbol{A}!}, \underline{\underline{\gamma}}_{\boldsymbol{A}})$ est adjointe. L'étude précédente montre dans ce cas que le morphisme

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \underline{\underline{\gamma}}_{\boldsymbol{A}}(\mathcal{G})) \xrightarrow[\simeq]{} \mathrm{Hom}(i_{\boldsymbol{A}*}^{-1} i_{\boldsymbol{A}!}(\mathcal{F}), \underline{\underline{\gamma}}_{\boldsymbol{A}}(\mathcal{G}))\,, \tag{$*$}$$

induit par l'inclusion $i_{\boldsymbol{A}*}^{-1} i_{\boldsymbol{A}!}(\_) \subseteq (\_)$, est bijectif pour tous $\mathcal{F} \in \mathrm{Sh}(\boldsymbol{A})$ et $\mathcal{G} \in \mathrm{Sh}(\boldsymbol{X})$.

Fixons un corps résiduel k de l'anneau R et reprenons le raisonnement du paragraphe précédent en remplaçant $\mathcal{G}$ par le faisceau $i_{a*}^{\boldsymbol{X}} k$, gratte-ciel de $\mathrm{Sh}(\boldsymbol{X})$ en $a \in \boldsymbol{A}$ de fibre k. On a $\underline{\underline{\gamma}}_{\boldsymbol{A}}(i_{a*}^{\boldsymbol{X}} k) = i_{a*}^{\boldsymbol{A}} k$ et l'on déduit de $(*)$ que le morphisme $\mathrm{Hom}_R(\mathcal{F}_a, k) \to \mathrm{Hom}_R(i_{\boldsymbol{A}}^{-1} i_{\boldsymbol{A}!}(\mathcal{F})_a, k)$, induit par l'inclusion de germes $i_{\boldsymbol{A}}^{-1} i_{\boldsymbol{A}!}(\mathcal{F})_a \subseteq \mathcal{F}_a$, est bijectif. Il s'ensuit que lorsque $\mathcal{F}$ est un faisceau de k-espaces vectoriels, on a

$$i_{\boldsymbol{A}}^{-1} i_{\boldsymbol{A}!}(\mathcal{F})_a = \mathcal{F}_a\,, \quad \forall a \in \boldsymbol{A}\,,$$

et donc

$$i_{\boldsymbol{A}}^{-1} i_{\boldsymbol{A}!}(\mathcal{F}) = \mathcal{F}\,. \tag{$**$}$$

Soit maintenant $\mathcal{F}$ le faisceau constant $\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{A}}$. La section $\mathbf{1}_{\boldsymbol{A}} \in \Gamma(\boldsymbol{A}, \underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{A}})$ est d'après $(**)$ une section globale de $i_{\boldsymbol{A}}^{-1} i_{\boldsymbol{A}!}(\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{A}})$, elle coïncide donc *localement* à une section de $i_{\boldsymbol{A}!}(\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{A}})$ ([3]). Ceci dit exactement que $\boldsymbol{A}$ est localement fermé dans $\boldsymbol{X}$.

(c-iv) L'égalité $\underline{\underline{\gamma}}_{\boldsymbol{U}} = i_{\boldsymbol{U}}^{-1}$ est tautologique d'après la définition même de $\underline{\underline{\gamma}}_{\boldsymbol{U}}$; elle résulte aussi d'appliquer le foncteur $i_{\boldsymbol{U}}^{-1}$ à la suite exacte (c-i) et de l'égalité $i_{\boldsymbol{U}}^{-1}\, \underline{\underline{\Gamma}}_{\boldsymbol{U}} = \underline{\underline{\gamma}}_{\boldsymbol{U}}$ (c-ii). La conservation des injectifs et des flasques par restriction ouverte est une propriété bien connue.

(c-v) La conservation des injectifs par $\underline{\underline{\gamma}}_{\boldsymbol{F}}$ résulte de l'adjonction (c-iii) et de l'exactitude de $i_{\boldsymbol{F}!}$. Lorsque $\mathcal{F}$ est flasque, le fait que $\underline{\underline{\gamma}}_{\boldsymbol{F}} \mathcal{F}$ (resp. $\underline{\underline{\Gamma}}_{\boldsymbol{F}} \mathcal{F}$) est flasque résulte de montrer que toute section locale de $\mathcal{F}$ à support dans $\boldsymbol{F}$ se prolonge en une section globale de $\mathcal{F}$ de support également contenu dans $\boldsymbol{F}$. Or, une section $\sigma \in \Gamma_{\boldsymbol{F}}(U, \mathcal{F})$ se prolonge par zéro en une section $\tau \in \Gamma(U \cup \boldsymbol{F}^c, \mathcal{F})$ dont le support est (automatiquement) contenu dans $\boldsymbol{F}$. Maintenant, comme $\mathcal{F}$ est flasque, τ est bien la restriction d'une section globale $\nu \in \Gamma(\mathbf{X}, \mathcal{F})$. Cette section ν vérifie alors, par

---

[2] Si $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{F}$, on a la décomposition $i_{\boldsymbol{A}!} = i_{\boldsymbol{U}!}^{\mathbf{X}} \circ i_{\boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{F}!}^{\boldsymbol{U}}$, auquel cas

$$i_{\boldsymbol{A}}^{-1} i_{\boldsymbol{A}!} = (i_{\boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{F}!}^{\boldsymbol{U}})^{-1} \circ \{(i_{\boldsymbol{U}}^{\mathbf{X}})^{-1} \circ i_{\boldsymbol{U}!}^{\mathbf{X}}\} \circ i_{\boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{F}!}^{\boldsymbol{U}}$$

où $(i_{\boldsymbol{U}}^{\mathbf{X}})^{-1} \circ i_{\boldsymbol{U}!}^{\mathbf{X}} = \mathrm{id}_{\boldsymbol{U}}$ puisque $i_{\boldsymbol{U}!}^{\mathbf{X}}$ est un plongement ouvert et que $(i_{\boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{F}!}^{\boldsymbol{U}})^{-1} \circ i_{\boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{F}!}^{\boldsymbol{U}} = \mathrm{id}_{\boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{F}}$ puisque $i_{\boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{F}!}^{\boldsymbol{U}}$ est un plongement fermé.

[3] Par définition, les sections de la restriction $i_{\boldsymbol{A}}^{-1} \mathcal{G}$ de $\mathcal{G}$, de $\mathbf{X}$ à $\boldsymbol{A}$, s'obtiennent en recollant les restrictions locales de $\mathcal{G}$. En particulier, pour toute section τ de $i_{\boldsymbol{A}}^{-1} \mathcal{G}$ et tout $a \in \boldsymbol{A}$, il existe un voisinage V_a de a dans $\mathbf{X}$ et une section $\sigma \in \Gamma(V_a, \mathcal{G})$ telle que $\tau = \sigma\big|_{\boldsymbol{A}}$ sur $\boldsymbol{A} \cap V_a$.

construction, $\nu|_{\boldsymbol{F}^c} = \tau|_{\boldsymbol{F}^c} = 0$, de sorte que $\nu \in \varGamma_{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{X}, \mathcal{F})$. Enfin, le fait que $i_{\boldsymbol{F}!} = i_{\boldsymbol{F}*}$ conserve injectifs et flasques prouve le restant de l'assertion puisque $\underline{\underline{\varGamma}}_{\boldsymbol{F}} = i_{\boldsymbol{F}!} \circ \underline{\underline{\gamma}}_{\boldsymbol{F}}$ d'après (c-ii).

(c-vi) La conservation des injectifs par $\underline{\underline{\gamma}}_{\boldsymbol{Z}}$ se justifie comme pour (c-v). Ensuite, on a $\underline{\underline{\varGamma}}_{\boldsymbol{Z}} = i_{\boldsymbol{Z}!} \circ \underline{\underline{\varGamma}}_{\boldsymbol{Z}}$ (c-ii) et alors

$$\underline{\underline{\varGamma}}_{\boldsymbol{Z}}(\text{injectif}) = i_{\boldsymbol{Z}!}(\text{injectif})\,.$$

Or, lorsque $\boldsymbol{X}$ est un espace localement compact $i_{\boldsymbol{Z}!}$(injectif) est un faisceau c-mou (*cf.* [KS$_1$] prop. 2.5.7, p.105). $\square$

1.2.2. Proposition. *Soit $f : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{X}$ continue et soit $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{X}$.*

a) *Le morphisme naturel de foncteurs*

$$f_! \circ \underline{\underline{\varGamma}}_{f^{-1}\boldsymbol{A}} \xrightarrow[\simeq]{} \underline{\underline{\varGamma}}_{\boldsymbol{A}} \circ f_! \tag{$*$}$$

est un isomorphisme.

b) *Le morphisme naturel de foncteurs*

$$f^{-1} \circ \underline{\underline{\varGamma}}_{\boldsymbol{A}} \xrightarrow[\simeq]{} \underline{\underline{\varGamma}}_{f^{-1}\boldsymbol{A}} \circ f^{-1} \tag{$\ddagger$}$$

est un isomorphisme.

Indication. (a) Soit $\mathcal{F} \in \mathrm{Sh}(\boldsymbol{Y})$. Le foncteur $f_!$ appliqué à l'inclusion naturelle $\underline{\underline{\varGamma}}_{f_{-1}\boldsymbol{A}}\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}$, donne l'injection $f_! \underline{\underline{\varGamma}}_{f^{-1}\boldsymbol{A}}\mathcal{F} \hookrightarrow f_!\mathcal{F}$ dont l'image est trivialement à support dans $\boldsymbol{A}$. Le morphisme injectif ($*$) en résulte. Pour sa surjectivité, on observe qu'une section $\sigma \in \varGamma_{\boldsymbol{A}}(U, f_!\mathcal{F})$ est, par définition, une section $\tau \in \varGamma(f^{-1}U, \mathcal{F})$ telle que $\overline{(f(|\tau|)}_U \subseteq \boldsymbol{A}$ et telle que $f : |\tau| \to U$ est propre. Mais alors, $f(|\tau|) = \overline{(f(|\tau|)}_U \subseteq \boldsymbol{A}$ et donc

$$\big(|\tau| \subseteq f^{-1}\mathbf{A}\big) \text{ et } \big(f : |\tau| \to U \text{ est propre}\big)\,,$$

autrement dit, $\sigma \in f_! \underline{\underline{\varGamma}}_{f^{-1}\boldsymbol{A}}\mathcal{F}(U)$.

(b) Pour $\mathcal{F} \in \mathrm{Sh}(\boldsymbol{X})$, l'image de l'injection naturelle $f^{-1}\underline{\underline{\varGamma}}_{\boldsymbol{A}}\mathcal{F} \to f^{-1}\mathcal{F}$ est clairement contenue dans $\underline{\underline{\varGamma}}_{f^{-1}\boldsymbol{A}}\mathcal{F}$, d'où le morphisme ($\ddagger$). Le fait que ce soit un isomorphisme résulte alors presque tautologiquement si l'on raisonne en termes d'espaces étalés. $\square$

1.3. Inclusion des foncteurs de sections à support

Soient $\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B}$ deux sous-ensembles de $\boldsymbol{X}$. Pour tout ouvert $U \subseteq \boldsymbol{X}$, on a une inclusion évidente

$$\underline{\underline{\varGamma}}_{\boldsymbol{A}}\,\mathcal{F}(U) \subseteq \underline{\underline{\varGamma}}_{\boldsymbol{B}}\,\mathcal{F}(U)\,,$$

d'où une injection de foncteurs

$$\underline{\underline{\varGamma}}_{\boldsymbol{A}} \xrightarrow{\subseteq} \underline{\underline{\varGamma}}_{\boldsymbol{B}} : \mathrm{Sh}(\boldsymbol{X}) \rightsquigarrow \mathrm{Sh}(\boldsymbol{X})\,.$$

La proposition suivante décrit son conoyau.

1.3.1. Proposition. *Soit et* $\mathcal{F} \in \mathrm{Sh}(\boldsymbol{X})$.

a) *La suite exacte à gauche de* 1.2.1-(c-i)

$$0 \to \underline{\underline{\Gamma}}_{\boldsymbol{A}}\, \mathcal{F} \xrightarrow{\subset} \mathcal{F} \longrightarrow i_{\boldsymbol{X}\setminus\boldsymbol{A}*}(\mathcal{F}|_{\boldsymbol{X}\setminus\boldsymbol{A}}) \to 0$$

est exacte à droite lorsque $\boldsymbol{A}$ *est ouvert ou lorsque* $\mathcal{F}$ *est flasque.*

b) *Si* $\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B}$, *on a une inclusion* $\underline{\underline{\Gamma}}_{\boldsymbol{A}}\, \mathcal{F} \subseteq \underline{\underline{\Gamma}}_{\boldsymbol{B}}\, \mathcal{F}$ *et une suite exacte à gauche naturelle par rapport à* $\mathcal{F}$,

$$0 \to \underline{\underline{\Gamma}}_{\boldsymbol{A}}\, \mathcal{F} \xrightarrow{\subset} \underline{\underline{\Gamma}}_{\boldsymbol{B}}\, \mathcal{F} \longrightarrow i_{\boldsymbol{X}\setminus\boldsymbol{A}*}\, \underline{\underline{\Gamma}}_{\boldsymbol{B}\setminus\boldsymbol{A}}(\mathcal{F}|_{\boldsymbol{X}\setminus\boldsymbol{A}}) \to 0$$

qui est exacte à droite lorsque $\boldsymbol{A}$ *est ouvert ou lorsque* $\mathcal{F}$ *est flasque.*

Démonstration. (a) Notons $\boldsymbol{H} := \boldsymbol{X}\setminus\boldsymbol{A}$. On veut montrer que le morphisme des germes

$$\mathcal{F}_x \to (i_{\boldsymbol{H}*} i_{\boldsymbol{H}}^{-1}\mathcal{F})_x \tag{$*$}$$

est surjectif pour tout $x \in \boldsymbol{X}$.

Lorsque $\boldsymbol{A}$ est ouvert dans $\boldsymbol{X}$, l'ensemble $\boldsymbol{H}$ est fermé et le résultat est classique, quel que soit le faisceau $\mathcal{F}$. Dans le cas où $\boldsymbol{A}$ est quelconque, si $\boldsymbol{V} \subseteq \boldsymbol{X}$ est ouvert, on a $i_{\boldsymbol{H}*}(\mathcal{F}|_{\boldsymbol{H}})(\boldsymbol{V}) = \Gamma(\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{V}, \mathcal{F})$ et comme $\boldsymbol{X}$ est supposé métrisable, on a $\Gamma(\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{V}, \mathcal{F}) = \mathrm{limind}_{W\supseteq\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{V}}\, \mathcal{F}(W)$ (*cf.* [Go], cor. 1, §3.3, p. 151) de sorte que si $\mathcal{F}$ est flasque, toute section de $\Gamma(\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{V}, \mathcal{F})$ est restriction d'une section globale de $\mathcal{F}$, d'où la surjectivité de $(*)$. (4)

(b) Une chasse au diagramme dans le morphisme des suites exactes

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{0} \arrow[r] & \underline{\underline{\Gamma}}_{\boldsymbol{A}}\mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d, hook, "\subseteq"'] & \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d, equal] & i^{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{X}\setminus\boldsymbol{A}*}(\mathcal{F}|_{\boldsymbol{X}\setminus\boldsymbol{A}}) \arrow[r, dashed] \arrow[d, "\alpha"'] & 0 \\
\mathbf{0} \arrow[r] & \underline{\underline{\Gamma}}_{\boldsymbol{B}}\mathcal{F} \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r] & i^{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{X}\setminus\boldsymbol{B}*}(\mathcal{F}|_{\boldsymbol{X}\setminus\boldsymbol{B}}) \arrow[r, dashed] & 0
\end{tikzcd} \tag{$*$}$$

montre qu'il existe une suite exacte à gauche naturelle par rapport à $\mathcal{F}$

$$0 \longrightarrow \underline{\underline{\Gamma}}_{\boldsymbol{A}}\mathcal{F} \xrightarrow{\subseteq} \underline{\underline{\Gamma}}_{\boldsymbol{B}}\mathcal{F} \longrightarrow \ker(\alpha) \dashrightarrow 0\,,$$

---

(4) Lorsque $\boldsymbol{A}$ est localement fermé dans $\boldsymbol{X}$, la surjectivité de $(*)$ pour $\mathcal{F}$ flasque, est vérifiée indépendamment de l'hypothèse de métrisabilité de $\boldsymbol{X}$. En effet, dans ce cas, on a $\boldsymbol{H} := \boldsymbol{F} \cup \boldsymbol{U}$ avec $\boldsymbol{F}$ fermé et $\boldsymbol{U}$ ouvert dans $\boldsymbol{X}$. On sait déjà que pour tout $\boldsymbol{E} \subseteq \boldsymbol{X}$, le morphisme $\mathcal{F}_x \to (i_{\boldsymbol{E}*} i_{\boldsymbol{E}}^{-1}\mathcal{F})_x$ est bijectif lorsque $x \in \boldsymbol{E}$. Lorsque $x \notin \boldsymbol{H}$, le morphisme $(i_{\boldsymbol{H}*} i_{\boldsymbol{H}}^{-1}\mathcal{F})_x \to (i_{\boldsymbol{U}*} i_{\boldsymbol{U}}^{-1}\mathcal{F})_x$ est bijectif puisque $x \notin \boldsymbol{F}$. On considère alors le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}_x \arrow[d, "(*)"'] \arrow[dr, dashed, two heads, "(**)"] & \\
(i_{\boldsymbol{H}*} i_{\boldsymbol{H}}^{-1}\mathcal{F})_x \arrow[r, "\simeq"'] & (i_{\boldsymbol{U}*} i_{\boldsymbol{U}}^{-1}\mathcal{F})_x
\end{tikzcd}$$

où $(**)$ est le morphisme de restriction ouverte qui est toujours surjectif pour $\mathcal{F}$ flasque. La surjectivité de $(*)$ en découle.

qui est exacte à droite, d'après (a), si $\boldsymbol{A}$ est ouvert ou si $\mathcal{F}$ est flasque. ([5])

D'autre part, sur $\boldsymbol{X}\backslash\boldsymbol{A}$, on a la suite exacte à gauche

$$0 \longrightarrow \underline{\underline{\varGamma}}_{\boldsymbol{B}\backslash\boldsymbol{A}}(\mathcal{F}|_{\mathbf{X}\backslash\boldsymbol{A}}) \longrightarrow \mathcal{F}|_{\mathbf{X}\backslash\boldsymbol{A}} \xrightarrow{\beta} i^{\mathbf{X}\backslash\boldsymbol{A}}_{\mathbf{X}\backslash\underline{\underline{\boldsymbol{B}}}*}(\mathcal{F}|_{\mathbf{X}\backslash\boldsymbol{A}}),$$

où $\alpha = i^{\mathbf{X}}_{\mathbf{X}\backslash\boldsymbol{A}*}(\beta)$, de sorte que $\ker(\alpha) = i^{\mathbf{X}}_{\mathbf{X}\backslash\boldsymbol{A}*}(\underline{\underline{\varGamma}}_{\boldsymbol{B}\backslash\boldsymbol{A}}(\mathcal{F}|_{\mathbf{X}\backslash\boldsymbol{A}}))$, ce qui prouve l'assertion. $\square$

1.4. Foncteur dérivé du foncteur de sections à support

Le foncteur dérivé à droite de $\underline{\underline{\varGamma}}_{\mathbf{A}} : \mathrm{Sh}(\boldsymbol{X}) \to \mathrm{Sh}(\boldsymbol{X})$ est noté :

$$\mathbb{R}\underline{\underline{\varGamma}}_{\mathbf{A}} : D^+(\mathbf{X}) \rightsquigarrow D^+(\mathbf{X}).$$

Si $\mathcal{F} \to (\mathcal{I}^\bullet, d_\bullet)$ est une résolution injective, on a

$$\mathbb{R}\underline{\underline{\varGamma}}_{\mathbf{A}}\mathcal{F} = (\underline{\underline{\varGamma}}_{\mathbf{A}}\mathcal{I}^\bullet, \underline{\underline{\varGamma}}_{\mathbf{A}}d_\bullet).$$

1.4.1. Proposition. *Soit $\boldsymbol{A}$ un sous-ensemble de $\mathbf{X}$.*

a) *Soit $\mathbf{0} \to \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \to \mathbf{0}$ une suite exacte. Si $\mathcal{F}$ est flasque, la suite*

$$\mathbf{0} \longrightarrow \underline{\underline{\varGamma}}_{\mathbf{A}}\,\mathcal{F} \xrightarrow{\underline{\underline{\varGamma}}_{\mathbf{A}}\,\alpha} \underline{\underline{\varGamma}}_{\mathbf{A}}\,\mathcal{G} \xrightarrow{\underline{\underline{\varGamma}}_{\mathbf{A}}\,\beta} \underline{\underline{\varGamma}}_{\mathbf{A}}\,\mathcal{H} \longrightarrow \mathbf{0}$$

est exacte, et de même, en remplaçant $\underline{\underline{\varGamma}}_{\mathbf{A}}$ par $\underline{\underline{\gamma}}_{\mathbf{A}}$.

b) *Les faisceaux flasques sur $\mathbf{X}$ sont $\underline{\underline{\varGamma}}_{\mathbf{A}}$-acycliques (resp. $\underline{\underline{\gamma}}_{\mathbf{A}}$-acycliques). En particulier, si*

$$\mathbf{0} \to \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{P}_0 \xrightarrow{d_0} \mathcal{P}_1 \xrightarrow{d_1} \mathcal{P}_2 \xrightarrow{d_2} \cdots$$

est une résolution flasque de $\mathcal{F}$, on a

$$\mathbb{R}\underline{\underline{\varGamma}}_{\mathbf{A}}\,\mathcal{F} = \Big(0 \to \underline{\underline{\varGamma}}_{\mathbf{A}}\,\mathcal{P}_0 \xrightarrow{\underline{\underline{\varGamma}}_{\mathbf{A}}\,d_0} \underline{\underline{\varGamma}}_{\mathbf{A}}\,\mathcal{P}_1 \xrightarrow{\underline{\underline{\varGamma}}_{\mathbf{A}}\,d_1} \underline{\underline{\varGamma}}_{\mathbf{A}}\,\mathcal{P}_2 \xrightarrow{\underline{\underline{\varGamma}}_{\mathbf{A}}\,d_2} \cdots\Big),$$

et de même, en remplaçant $\underline{\underline{\varGamma}}_{\mathbf{A}}$ par $\underline{\underline{\gamma}}_{\mathbf{A}}$.

c) *Soit $\boldsymbol{F}$ une partie **fermée** de $\mathbf{X}$.*

   i) *Si $\mathcal{F}$ est flasque, le faisceau $\underline{\underline{\varGamma}}_{\mathbf{F}}\,\mathcal{F}$ est $\underline{\underline{\varGamma}}_{\mathbf{A}}$-acyclique quel que soit $\mathbf{A}$.*

   ii) *On a*

$$\mathbb{R}\underline{\underline{\varGamma}}_{\mathbf{A}\cap\mathbf{F}} = \mathbb{R}\underline{\underline{\varGamma}}_{\mathbf{A}} \circ \mathbb{R}\underline{\underline{\varGamma}}_{\boldsymbol{F}}\,. \tag{1}$$

   En particulier, si $\mathbf{A} \cap \boldsymbol{F} = \emptyset$, on a $\mathbb{R}\underline{\underline{\varGamma}}_{\mathbf{A}} \circ \mathbb{R}\underline{\underline{\varGamma}}_{\boldsymbol{F}} = 0$.

d) *Soit $\boldsymbol{U}$ une partie **ouverte** de $\mathbf{X}$. On a*

$$\mathbb{R}\underline{\underline{\varGamma}}_{\mathbf{U}\cap\mathbf{A}} = \mathbb{R}\underline{\underline{\varGamma}}_{\mathbf{U}} \circ \mathbb{R}\underline{\underline{\varGamma}}_{\boldsymbol{A}}\,. \tag{2}$$

En particulier, si $\mathbf{A} \cap \boldsymbol{U} = \emptyset$, on a $\mathbb{R}\underline{\underline{\varGamma}}_{\mathbf{U}} \circ \mathbb{R}\underline{\underline{\varGamma}}_{\mathbf{A}} = 0$.

[5] Tout comme nous l'avons remarqué pour (a), lorsque $\mathcal{F}$ est flasque, on peut relaxer les hypothèses sur l'espace $\boldsymbol{X}$ si l'on suppose $\boldsymbol{A}$ localement fermé.

e) *La suite exacte* $0 \to \underline{\underline{\varGamma}}_{\boldsymbol{A}}(\_) \to (\_) \to i_{\mathbf{X}\setminus\boldsymbol{A}*}(\_|_{\mathbf{X}\setminus\boldsymbol{Z}})$ *de* (1.3.1-(a)) *donne lieu à un triangle exact de* $D^+(\boldsymbol{X})$

$$\mathbb{R}\underline{\underline{\varGamma}}_{\boldsymbol{A}}(\_) \to (\_) \to \mathbb{R}i_{\mathbf{X}\setminus\boldsymbol{A}*}(\_|_{\mathbf{X}\setminus\boldsymbol{A}}) \to \tag{3}$$

f) *On suppose l'espace* $\boldsymbol{X}$ *localement compact et dénombrable à l'infini.*

i) *Si* $\boldsymbol{W}$ *est un ouvert ou un fermé d'un localement fermé* $\boldsymbol{Z}$ *de* $\boldsymbol{X}$, *la suite exacte* $0 \to \underline{\underline{\varGamma}}_{\mathbf{W}}(\_) \to \underline{\underline{\varGamma}}_{\mathbf{Z}}(\_) \to i_{\mathbf{X}\setminus\mathbf{W}*}\underline{\underline{\varGamma}}_{\mathbf{Z}\setminus\mathbf{W}}(\_|_{\mathbf{X}\setminus\mathbf{W}})$ *de* (1.3.1-(b)) *donne lieu à un triangle exact de* $D^+(\boldsymbol{X})$

$$\mathbb{R}\underline{\underline{\varGamma}}_{\mathbf{W}}(\_) \to \mathbb{R}\underline{\underline{\varGamma}}_{\mathbf{Z}}(\_) \to \mathbb{R}i_{\mathbf{X}\setminus\mathbf{W}*}\mathbb{R}\underline{\underline{\varGamma}}_{\mathbf{Z}\setminus\mathbf{W}}(\_|_{\mathbf{X}\setminus\mathbf{W}}) \to \tag{4}$$

ii) *Si* $\boldsymbol{Z}$ *est un localement fermé de* $\boldsymbol{X}$. *On a*

$$\mathbb{R}\varGamma_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{X}, \_) = \mathbb{R}\varGamma(X; \mathbb{R}\underline{\underline{\varGamma}}_{\boldsymbol{Z}}(\_))\,. \tag{5}$$

Démonstration. (a). Supposons d'abord que $\boldsymbol{A}$ est un fermé $\boldsymbol{F}$ de $\boldsymbol{X}$. Un germe de section locale $\sigma_x \in (\underline{\underline{\varGamma}}_{\boldsymbol{F}}\mathcal{H})_x$ se relève en une section $\sigma \in \varGamma_{\boldsymbol{F}}(V, \mathcal{H})$ pour un certain voisinage V de x. Quitte à remplacer V par un sous-voisinage de x, nous pouvons supposer qu'il existe $\tau \in \varGamma(V, \mathcal{G})$ tel que $\beta(\tau) = \sigma$. Mais alors, la restriction $\nu = \tau|_{V\setminus\boldsymbol{F}}$ appartient au noyau $\varGamma(V\setminus\boldsymbol{F}, \mathcal{F})$ de β et comme $\mathcal{F}$ est supposé flasque, ν est restriction d'une certaine section $\tilde{\nu} \in \varGamma(V, \mathcal{F})$. Alors, $\tau' := \tau - \alpha(\tilde{\nu}) \in \varGamma(V, \mathcal{G})$ est, par construction, à support dans $\boldsymbol{F}$ et elle relève toujours σ.

Lorsque $\boldsymbol{A}$ est quelconque, on reprend les notations de paragraphe précédent où $\sigma \in \varGamma_{\boldsymbol{A}}(V, \mathcal{H})$. Notons alors $\boldsymbol{S} := \overline{|\sigma|}_{\boldsymbol{X}}$ l'adhérence de $|\sigma|$ dans $\boldsymbol{X}$ tout entier. On a tautologiquement que $\sigma \in \varGamma_{\boldsymbol{S}}(V, \mathcal{H})$. Nous avons déjà montré qu'il existe $\tau' \in \varGamma_{\boldsymbol{S}}(V, \mathcal{G})$ qui relève σ. La commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccccccc}
\varGamma_{\mathbf{S}}(V,\mathcal{G}) & \ni & \tau' & \longmapsto & \sigma & \in & \varGamma_{\mathbf{S}}(V,\mathcal{H}) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\varGamma_{\boldsymbol{A}}(V,\mathcal{G}) & \ni & \tau' & \longmapsto & \sigma & \in & \varGamma_{\boldsymbol{A}}(V,\mathcal{H})
\end{array}$$

permet alors de conclure.

(b). L'assertion (a) pour $\mathcal{G}$ injectif montre que $\mathbb{R}^1\underline{\underline{\varGamma}}_{\boldsymbol{A}}(\mathcal{F}) = 0$ et que

$$\mathbb{R}^{i+1}\underline{\underline{\varGamma}}_{\boldsymbol{A}}(\mathcal{F}) = \mathbb{R}^{i}\underline{\underline{\varGamma}}_{\boldsymbol{A}}(\mathcal{H})\,, \quad \forall i \geq 1\,. \tag{$*$}$$

Lorsque $\mathcal{F}$ est flasque et que $\mathcal{G}$ est injectif, le faisceau $\mathcal{H}$ est de nouveau flasque et $(*)$ permet de voir que $\mathbb{R}^i\underline{\underline{\varGamma}}_{\boldsymbol{A}}(\mathcal{F}) = 0$ pour tout $i \geq 1$ par récurrence sur i. Les faisceaux flasques sont donc bien $\underline{\underline{\varGamma}}_{\boldsymbol{A}}$-acycliques et le reste de l'assertion en découle.

(c). Le faisceau $\underline{\underline{\varGamma}}_{\boldsymbol{F}}\mathcal{F}$ est flasque (1.2.1-(c-v)), donc $\underline{\underline{\varGamma}}_{\boldsymbol{A}}$-acyclique par (b).

(d). Le foncteur $\underline{\underline{\varGamma}}_{\boldsymbol{U}}$ est exact (1.2.1-(c-iv)), on a $\mathbb{R}\underline{\underline{\varGamma}}_{\boldsymbol{U}} = \underline{\underline{\varGamma}}_{\boldsymbol{U}}$ et l'assertion est évidente.

(e). Résulte de l'exactitude à droite de la suite pour les flasques (*cf.* (5)).

(f-i) On fait appel à 1.3.1-(b) pour les flasques, mais il faut en plus justifier que pour $\mathcal{I}$ injectif, le faisceau $\mathcal{Q} := \underline{\underline{\varGamma}}_{\boldsymbol{Z}\setminus\boldsymbol{W}}(\mathcal{I}|_{\boldsymbol{X}\setminus\boldsymbol{W}})$ est $i_{\boldsymbol{X}\setminus\boldsymbol{W}*}$-acyclique. Or, lorsque $\boldsymbol{Z}$ est localement fermé, $\boldsymbol{Z}\setminus\boldsymbol{W}$ l'est encore et le faisceau $\mathcal{Q}$ est c-mou sur $\boldsymbol{X}\setminus\boldsymbol{W}$ (1.2.1-(c-vi)). Ceci étant, une condition suffisante pour que $\mathcal{Q}$ soit $i_{\boldsymbol{X}\setminus\boldsymbol{W}*}$-acyclique est qu'il soit $\varGamma(V, \_)$-acyclique pour tout ouvert $V \subseteq \boldsymbol{X}\setminus\boldsymbol{W}$, ce pour quoi il suffit que V soit paracompact et dénombrable à l'infini (*cf.* [KS$_1$] prop. 2.5.10, p.106). L'espace $\boldsymbol{X}$ possède ces propriétés par hypothèse et une partie $\boldsymbol{Y}$ localement compacte de $\boldsymbol{X}$ est alors automatiquement paracompacte car métrisable. Pour voir qu'elle est aussi dénombrable à l'infini, il suffit de ne considérer que le cas où $\boldsymbol{Y}$ est un ouvert strictement contenu dans $\boldsymbol{X}$. Soit $d : \boldsymbol{X} \to \mathbb{R}_+$ une distance. Comme $\boldsymbol{X}$ est localement compact, l'application $d(\_, \boldsymbol{Y}^c) : \boldsymbol{X} \to \mathbb{R}_+$, « *distance au complémentaire de* $\boldsymbol{Y}$ », est bien définie et continue. Il s'ensuit que $\boldsymbol{Y}$ est la réunion dénombrable des parties $\boldsymbol{Y}_n := \{y \in \boldsymbol{X} \mid d(y, \boldsymbol{Y}^c) \geq 1/n\}$, clairement fermées dans $\boldsymbol{X}$ donc dénombrables à l'infini. Par conséquent, tout sous-espace fermé $\boldsymbol{Y}' \subseteq \boldsymbol{Y}$ est dénombrable à l'infini.

(f-ii). Soit $\mathcal{F} \to (\mathcal{I}^\bullet, d_\bullet)$ une résolution injective de $\mathcal{F}$. Par définition, on a $I\!R\underline{\underline{\varGamma}}_{\boldsymbol{Z}}\,\mathcal{F} = \underline{\underline{\varGamma}}_{\boldsymbol{Z}}\mathcal{I}^\bullet$, et $\mathcal{Q}^i := \underline{\underline{\varGamma}}_{\boldsymbol{Z}}\,\mathcal{I}^i$ est c-mou, donc $\varGamma(\boldsymbol{X}, \_)$-acyclique, car $\boldsymbol{X}$ est localement compact dénombrable à l'infini (*loc.cit.*). On a donc

$$
\begin{aligned}
I\!R\varGamma_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{X}, \mathcal{F}) = \varGamma_{\boldsymbol{Z}}(\boldsymbol{X}, \mathcal{I}^\bullet) &= \varGamma(\boldsymbol{X}, \underline{\underline{\varGamma}}_{\boldsymbol{Z}}\mathcal{I}^\bullet) \\
&= I\!R\varGamma(\boldsymbol{X}, \underline{\underline{\varGamma}}_{\boldsymbol{Z}}\mathcal{I}^\bullet) = I\!R\varGamma(\boldsymbol{X}, I\!R\underline{\underline{\varGamma}}_{\boldsymbol{Z}}\mathcal{F})\,. \qquad \square
\end{aligned}
$$

1.5. Un contrexemple. Dans les assertions (c) et (d) de la dernière proposition 1.4.1, l'ordre des termes dans les égalités (1) et (2) est essentiel. Par exemple, il est faux en général que si $\mathcal{F}$ est flasque, le faisceau $\underline{\underline{\varGamma}}_{\boldsymbol{U}}\,\mathcal{F}$ soit $\underline{\underline{\varGamma}}_{\boldsymbol{A}}$-acyclique. Il faut donc s'attendre à une inégalité

$$I\!R\,\underline{\underline{\varGamma}}_{\boldsymbol{A}} \circ I\!R\underline{\underline{\varGamma}}_{\boldsymbol{U}} \neq I\!R\underline{\underline{\varGamma}}_{\boldsymbol{A}\cap\boldsymbol{U}}\ .$$

Par exemple, pour $\boldsymbol{X} := \mathbb{R}$, $\boldsymbol{U} := \mathbb{R}^*$ et $\boldsymbol{F} := \{0\}$. On a le triangle exact fondamental 1.4.1-(e) :

$$I\!R\underline{\underline{\varGamma}}_{\boldsymbol{U}}\,\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}} \to \underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}} \to I\!R i_{\boldsymbol{F}*}k \to\ . \tag{$*$}$$

En appliquant $I\!R\underline{\underline{\varGamma}}_{\boldsymbol{F}}$ à $(*)$, on obtient un nouveau triangle exact :

$$I\!R\underline{\underline{\varGamma}}_{\boldsymbol{F}}\,I\!R\underline{\underline{\varGamma}}_{\boldsymbol{U}}\,\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}} \to I\!R\underline{\underline{\varGamma}}_{\boldsymbol{F}}\,\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}} \to I\!R i_{\boldsymbol{F}*}k \to,$$

puisque $I\!R\underline{\underline{\varGamma}}_{\boldsymbol{F}} \circ i_{\boldsymbol{F}*} = i_{\boldsymbol{F}*}$.

On remarque alors que si l'on avait

$$I\!R\underline{\underline{\varGamma}}_{\boldsymbol{F}} \circ I\!R\underline{\underline{\varGamma}}_{\boldsymbol{U}} = I\!R\,\underline{\underline{\varGamma}}_{\boldsymbol{F}\cap\boldsymbol{U}} = 0\,,$$

on en déduirait que $H^1_{\{0\}}(\mathbb{R}) = 0$, ce qui est faux.

Par contre, si $\boldsymbol{G} := \{1\}$, et que l'on applique $\mathbb{R}\underline{\underline{\Gamma}}_{\boldsymbol{G}}$ à (*), on a par 1.2.2-(a)

$$\mathbb{R}\underline{\underline{\Gamma}}_{\boldsymbol{G}} \circ i_{\boldsymbol{F}*} = i_{\boldsymbol{F}*} \circ \mathbb{R}\underline{\underline{\Gamma}}_{\boldsymbol{G}\cap\boldsymbol{F}} = 0\,,$$

et donc

$$\mathbb{R}\underline{\underline{\Gamma}}_{\boldsymbol{G}}\, \mathbb{R}\underline{\underline{\Gamma}}_{\boldsymbol{U}}\, \underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}} \simeq \mathbb{R}\underline{\underline{\Gamma}}_{\boldsymbol{G}}\, \underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}}\,,$$

ce qui est compatible au fait que maintenant on a bien

$$\mathbb{R}\underline{\underline{\Gamma}}_{\boldsymbol{G}} \circ \mathbb{R}\underline{\underline{\Gamma}}_{\boldsymbol{U}} = \mathbb{R}\,\underline{\underline{\Gamma}}_{\boldsymbol{G}\cap\boldsymbol{U}} = \mathbb{R}\,\underline{\underline{\Gamma}}_{\boldsymbol{G}}$$

puisque $\boldsymbol{G}$ est fermé *dans* $\boldsymbol{U}$.

2. Limites inductives de sections à support

On note $(\boldsymbol{E}, \preceq)$ un ensemble $\boldsymbol{E}$ muni d'un ordre partiel '$\preceq$'. On rappelle que $(\boldsymbol{E}, \preceq)$ est dit *filtrant supérieurement* lorsque, étant donnés $x, y \in \boldsymbol{E}$, il existe $z \in \boldsymbol{E}$ tel que $x \preceq z$ et $y \preceq z$, autrement dit, lorsque toute partie finie de $\boldsymbol{E}$ admet un majorant.

2.1. Rappels sur les systèmes inductifs

Un *système inductif* de R-modules indexé par $(\boldsymbol{E}, \preceq)$ est la donnée une famille de R-modules $\{M_x\}_{x\in\boldsymbol{E}}$ et d'une famille de morphismes de R-modules $\{\mu_{y,x} : M_x \to M_y\}_{x\preceq y}$ tels que $\mu_{z,x} = \mu_{z,y} \circ \mu_{y,x}$ pour tous $x \preceq y \preceq z$. On le notera $M(\boldsymbol{E}, \preceq)$.

$$\begin{tikzcd}
\cdots & M_x \arrow[rr, bend left, "\mu_{y,x}"] \arrow[rrrr, bend left=30, "\mu_{z,x}"] & \cdots & M_y \arrow[rr, bend left, "\mu_{z,y}"] & \cdots & M_z & \cdots
\end{tikzcd}$$

Soit $\boldsymbol{E}' \subseteq \boldsymbol{E}$. Un *morphisme de systèmes inductifs* α *de* $M(\boldsymbol{E}', \preceq)$ *vers* $N(\boldsymbol{E}, \preceq)$ est une famille de morphismes de R-modules $\{\alpha_x : M_x \to N_x\}_{x\in\boldsymbol{E}'}$ vérifiant $\nu_{y,x} \circ \alpha_x = \alpha_y \circ \nu_{y,x}$. On le notera $\alpha : M(\boldsymbol{E}', \preceq) \to N(\boldsymbol{E}, \preceq)$.

$$\begin{tikzcd}
\cdots & M_x \arrow[rr, bend left, "\mu_{y,x}"] \arrow[rrrr, bend left=30, "\mu_{z,x}"] \arrow[d, "\alpha_x"] & \cdots & M_y \arrow[rr, bend left, "\mu_{z,y}"] \arrow[d, "\alpha_y"] & \cdots & M_z \arrow[d, "\alpha_z"] & \cdots \\
\cdots & N_x \arrow[rr, bend right, "\nu_{y,x}"'] \arrow[rrrr, bend right=30, "\nu_{z,x}"'] & \cdots & N_y \arrow[rr, bend right, "\nu_{z,y}"'] & \cdots & N_z & \cdots
\end{tikzcd}$$

Un *morphisme* α *du système inductif* $M(\boldsymbol{E}, \preceq)$ *vers un* R*-module* N est la donnée d'une famille de morphismes de R-modules $\{\alpha_x : M_x \to N\}_{x\in\boldsymbol{E}}$ telle que $\alpha_x = \alpha_y \circ \mu_{y,x}$ pour tous $x \preceq y$. On le notera $\alpha : M(\boldsymbol{E}, \preceq) \to N$.

$$\begin{tikzcd}
\cdots & M_x \arrow[r, bend left, "\mu_{y,x}"] \arrow[rrrrd, bend right, "\alpha_x"] & \cdots & M_y \arrow[r, bend left, "\mu_{z,y}"] \arrow[rrd, bend right, "\alpha_y"] & \cdots & M_z \arrow[d, "\alpha_z"] & \cdots \\
& & & & & N &
\end{tikzcd}$$

2.2. Rappel sur la limite d'un système inductif

Une *limite inductive de* $M(\boldsymbol{E}, \preceq)$ est la donnée d'un R-module $\boldsymbol{L}$ et d'un morphisme de système inductif $\lambda : M(\boldsymbol{E}, \preceq) \to \boldsymbol{L}$ tel que pour tout morphisme $\alpha : M(\boldsymbol{E}, \preceq) \to N$, il existe un et un unique morphisme $\beta : \boldsymbol{L} \to \boldsymbol{N}$ vérifiant $\alpha = \beta \circ \lambda$.

$$\begin{tikzcd}
M(\boldsymbol{E}, \preceq) \arrow[d, "\lambda"'] \arrow[dr, "\forall\alpha"] & \\
\boldsymbol{L} \arrow[r, "\exists!\beta"] & N
\end{tikzcd}$$

La limite inductive $\boldsymbol{L}$ existe et est unique à isomorphisme canonique près. Elle sera notée $\varinjlim M(\boldsymbol{E}, \preceq)$.

Soit $\boldsymbol{E}' \subseteq \boldsymbol{E}$. Un morphisme de systèmes inductifs $\alpha : M(\boldsymbol{E}', \preceq) \to N(\boldsymbol{E}, \preceq)$ donne toujours lieu à un morphisme de limites inductives :

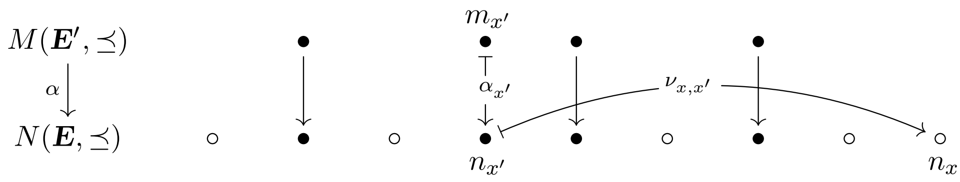
$$\varinjlim \alpha : \varinjlim M(\boldsymbol{E}', \preceq) \to \varinjlim N(\boldsymbol{E}, \preceq)\,.$$

Une construction classique de cette limite la réalise comme conoyau du morphisme ξ de la suite exacte à droite

$$\bigoplus_{(x \preceq y) \in \boldsymbol{E}} M_{x,y} \xrightarrow{\ \xi\ } \bigoplus_{x \in \boldsymbol{E}} M_x \xrightarrow{\ \zeta\ } \varinjlim M(\boldsymbol{E}, \preceq) \longrightarrow 0$$

où $M_{x,y}$ est le sous-module de $M_x \oplus M_y$ des éléments $(m, -\mu_{y,x}(m))$ pour $m \in M_x$ et où ξ est la somme des inclusions $M_{x,y} \hookrightarrow \bigoplus_{x \in \boldsymbol{E}} M_x$. Les morphismes $\lambda_x : M_x \to \varinjlim M(\boldsymbol{E}, \preceq)$ sont alors les composées des inclusions $M_x \hookrightarrow \bigoplus_{x \in \boldsymbol{E}} M_x$ est de la surjection ζ.

2.2.1. Remarque. Par cette construction tout élément de $\varinjlim M(\boldsymbol{E}, \preceq)$ s'exprime par une somme **finie** de la forme $\sum_x \lambda_x(m_x)$ avec $m_x \in M_x$. En particulier, si $\boldsymbol{E}' \subseteq \boldsymbol{E}$ et si $\alpha : M(\boldsymbol{E}', \preceq) \to N(\boldsymbol{E}, \preceq)$ est un morphisme de systèmes inductifs tel que pour tout $x \in \boldsymbol{E}$ et tout $n_x \in N_x$, il existe $x' \preceq x$ et $n_{x'} \in \operatorname{im}(\alpha_{x'}) \subseteq N_{x'}$ vérifiant $n_x = \nu_{x,x'}(n_{x'})$, soit schématiquement :



alors, le morphisme $\varinjlim \alpha : \varinjlim M(\boldsymbol{E}', \preceq) \to \varinjlim N(\boldsymbol{E}, \preceq)$ est surjectif.

Le lemme suivant énonce sans démonstration des propriétés très utiles des systèmes inductifs. On pourra consulter le chapitre **2** de [KS$_2$] pour plus de détails sur les limites.

2.2.2. Lemme. *Soit $M(\boldsymbol{E}, \preceq)$ un système inductif de R-modules et notons $\lambda : M(\boldsymbol{E}, \preceq) \to \boldsymbol{L} := \varinjlim M(\boldsymbol{E}, \preceq)$ sa limite inductive.*

a) *Supposons $(\boldsymbol{E}, \preceq)$ filtrant supérieurement.*
   i) *Pour tout $x \in \boldsymbol{E}$, on a $m \in \ker(\lambda_x : \mathcal{M}_x \to \boldsymbol{L})$, si et seulement si, il existe $y \succeq x$ tel que $\alpha_{y,x}(m) = 0$.*
   ii) *Pour tout $w \in \boldsymbol{L}$, il existe $y \in \boldsymbol{E}$ tel que $w \in \mathrm{im}(\lambda_y)$.*

b) *Soit $C^\bullet(\boldsymbol{E}, \preceq)$ est un système inductif de complexes différentiels. Pour chaque $i \in \mathbb{Z}$, on a un système inductif de cohomologie $H^i(C^\bullet(\boldsymbol{E}, \preceq))$ et un morphisme naturel*

$$\varinjlim H^i(C^\bullet(\boldsymbol{E}, \preceq)) \to H^i(\varinjlim C^\bullet(\boldsymbol{E}, \preceq)) \,.$$

Lorsque $(\boldsymbol{E}, \preceq)$ est filtrant supérieurement, ce morphisme est un isomorphisme.

2.3. Limites inductives de supports localement fermés. Soit $\boldsymbol{A}$ un sous-ensemble de $\boldsymbol{X}$. Notons $\Phi(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})$ l'ensemble des parties $\boldsymbol{Z} \subseteq \boldsymbol{A}$ qui sont localement fermées dans $\boldsymbol{X}$. On munit $\Phi(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})$ de l'ordre partiel d'inclusion '$\subseteq$'. On prendra garde du fait que $(\Phi(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}), \subseteq)$ **n'est pas** filtrant supérieurement en général.

Les injections canoniques $\underline{\underline{\Gamma}}_{\boldsymbol{Z}_1} \hookrightarrow \underline{\underline{\Gamma}}_{\boldsymbol{Z}_2}$, pour $\boldsymbol{Z}_1 \subseteq \boldsymbol{Z}_2 \in \Phi(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})$, donnent lieu à des systèmes inductifs de foncteurs

$$\{\underline{\underline{\Gamma}}_{\boldsymbol{Z}}\}_{\boldsymbol{Z} \in \Phi(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})} \quad \text{et} \quad \{\Gamma_{\boldsymbol{Z}}(U, \_)\}_{\boldsymbol{Z} \in \Phi(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})} \,,$$

et l'inclusion $\underline{\underline{\Gamma}}_{\boldsymbol{Z}} \hookrightarrow \underline{\underline{\Gamma}}_{\boldsymbol{A}}$ pour chaque $\boldsymbol{Z} \in \Phi(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})$, donne à son tour lieu à des morphismes naturels

$$\{\underline{\underline{\Gamma}}_{\boldsymbol{Z}}\}_{\boldsymbol{Z} \in \Phi(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})} \to \underline{\underline{\Gamma}}_{\boldsymbol{A}} \quad \text{et} \quad \{\Gamma_{\boldsymbol{Z}}(U, \_)\}_{\boldsymbol{Z} \in \Phi(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})} \to \Gamma_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X}, \_) \,.$$

Par passage aux limites inductives, on a donc des morphismes naturels :

$$\operatorname*{limind}_{\boldsymbol{Z} \in \Phi(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})} \underline{\underline{\Gamma}}_{\boldsymbol{Z}} \to \underline{\underline{\Gamma}}_{\boldsymbol{A}} \quad \text{et} \quad \operatorname*{limind}_{\boldsymbol{Z} \in \Phi(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})} \Gamma_{\boldsymbol{Z}}(U, \_) \to \Gamma_{\boldsymbol{A}}(U, \_) \,.$$

2.3.1. Proposition. *Soit* $\mathcal{F} \in \mathrm{Sh}(\boldsymbol{X})$.

a) *Pour tout ouvert* $U \subseteq \boldsymbol{X}$, *les inclusions* $\Gamma_{\boldsymbol{Z}}(U,\mathcal{F}) \hookrightarrow \Gamma_{\boldsymbol{A}}(U,\mathcal{F})$ *pour* $\boldsymbol{Z} \in \Phi(\boldsymbol{X},\boldsymbol{A})$ *donnent lieu à un morphisme naturel de système inductif*

$$\{\Gamma_{\boldsymbol{Z}}(U,\mathcal{F})\}_{\boldsymbol{Z}\in\Phi(\boldsymbol{X},\boldsymbol{A})} \to \Gamma_{\boldsymbol{A}}(U,\mathcal{F}) \,,$$

dont le passage à la limite inductive

$$\operatorname*{limind}_{\boldsymbol{Z}\in\Phi(\boldsymbol{X},\boldsymbol{A})} \Gamma_{\boldsymbol{Z}}(U,\mathcal{F}) \to \Gamma_{\boldsymbol{A}}(U,\mathcal{F})$$

est un isomorphisme.

b) *Pour tout ouvert* $U \subseteq \boldsymbol{X}$ *et chaque* $i \in \mathbb{Z}$, *le morphisme naturel*

$$\operatorname*{limind}_{\boldsymbol{Z}\in\Phi(\boldsymbol{X},\boldsymbol{A})} H^i_{\boldsymbol{Z}}(U,\mathcal{F}) \to H^i_{\boldsymbol{A}}(U,\mathcal{F})$$

est un isomorphisme.

c) *Le morphisme naturel de faisceaux*

$$\operatorname*{limind}_{\boldsymbol{Z}\in\Phi(\boldsymbol{X},\boldsymbol{A})} \underline{\underline{\Gamma}}_{\boldsymbol{Z}}\mathcal{F} \to \underline{\underline{\Gamma}}_{\boldsymbol{A}}\mathcal{F}$$

est un isomorphisme.

d) *Pour chaque* $i \in \mathbb{Z}$, *le morphisme naturel de faisceaux*

$$\operatorname*{limind}_{\boldsymbol{Z}\in\Phi(\boldsymbol{X},\boldsymbol{A})} \mathbb{R}^i\, \underline{\underline{\Gamma}}_{\boldsymbol{Z}}\mathcal{F} \to \mathbb{R}^i\, \underline{\underline{\Gamma}}_{\boldsymbol{A}}\mathcal{F}$$

est un isomorphisme.

Indication. (a). Soit $\Phi_f(U,\boldsymbol{A})$ l'ensemble des fermés $\boldsymbol{S}$ de U tels que $\boldsymbol{S} \subseteq \boldsymbol{A}$. On a $\Phi_f(U,\boldsymbol{A}) \subseteq \Phi(\boldsymbol{X},\boldsymbol{A})$. L'ensemble partiellement ordonné $(\Phi_f(U,\boldsymbol{A}),\subseteq)$ est filtrant supérieurement contrairement à $(\Phi(\boldsymbol{X},\boldsymbol{A}),\subseteq)$.

Nous disposons alors de morphismes naturels

$$\operatorname*{limind}_{\boldsymbol{S}\in\Phi_f(U,\boldsymbol{A})} \Gamma_{\boldsymbol{S}}(U,\mathcal{F}) \xrightarrow{\theta(U)} \operatorname*{limind}_{\boldsymbol{Z}\in\Phi(\boldsymbol{X},\boldsymbol{A})} \Gamma_{\boldsymbol{Z}}(U,\mathcal{F}) \xrightarrow{\epsilon(U)} \Gamma_{\boldsymbol{A}}(U,\mathcal{F}) \ , \qquad (*)$$

où $\epsilon(U)$ est le morphisme de l'énoncé.

Montrons que le morphisme $\theta(U)$ est bijectif.

Un élément de $\operatorname{limind}_{\boldsymbol{Z}\in\Phi(\boldsymbol{X},\boldsymbol{A})} \Gamma_{\boldsymbol{Z}}(U,\mathcal{F})$ provient d'une famille finie de sections $\sigma_i \in \Gamma_{\boldsymbol{Z}_i}(U,\mathcal{F})$. L'ensemble $\boldsymbol{S} := \cup_i |\sigma_i|$ est un fermé de U contenu dans $\boldsymbol{A}$, donc $\boldsymbol{S} \in \Phi_f(U,\boldsymbol{A})$ et $\sigma_i \in \Gamma_{\boldsymbol{S}}(U,\mathcal{F})$. Le morphisme $\theta(U)$ est donc bien surjectif (2.2.1). Maintenant, comme le système $\{\Gamma_{\boldsymbol{S}}(U,\mathcal{F})\}_{\boldsymbol{S}\in\Phi_f(U,\boldsymbol{A})}$ est filtrant, un élément de $\ker(\theta(U))$ se voit comme un élément du noyau de $\theta(U)_{\boldsymbol{S}} : \Gamma_{\boldsymbol{S}}(U,\mathcal{F}) \to \operatorname{limind}_{\boldsymbol{Z}\in\Phi(U,\boldsymbol{A})} \Gamma_{\boldsymbol{Z}}(U,\mathcal{F})$, pour un certain $\boldsymbol{S}$ (2.2.2). Or la composée $\epsilon(U) \circ \theta(U)_{\boldsymbol{S}} : \Gamma_{\boldsymbol{S}}(U,\mathcal{F}) \to \Gamma_{\boldsymbol{A}}(U,\mathcal{F})$ est l'inclusion canonique $\Gamma_{\boldsymbol{S}}(U,\mathcal{F}) \subseteq \Gamma_{\boldsymbol{A}}(U,\mathcal{F})$, par conséquent $\ker(\theta(U)) = 0$.

La surjectivité de $\epsilon(U)$ relève des même raisonnements que celle de $\theta(U)$, et la bijectivité de $\epsilon(U)$ s'ensuit.

(b). On reprend la suite $(*)$ de la question précédente en remplaçant $\mathcal{F}$ par une résolution injective $(\mathcal{I}^\bullet, d_\bullet)$. On a donc les isomorphismes de complexes

$$\operatorname*{limind}_{\boldsymbol{S}\in\Phi_f(U,\boldsymbol{A})} \Gamma_{\boldsymbol{S}}(U,\mathcal{I}^\bullet) \xrightarrow[\simeq]{\theta(U)} \operatorname*{limind}_{\boldsymbol{Z}\in\Phi(\mathbf{X},\boldsymbol{A})} \Gamma_{\boldsymbol{Z}}(U,\mathcal{I}^\bullet) \xrightarrow[\simeq]{\epsilon(U)} \Gamma_{\mathbf{A}}(U,\mathcal{I}^\bullet)\,,$$

dont on déduit, pour chaque $i \in \mathbb{Z}$, des isomorphismes en cohomologie

$$H^i \operatorname*{limind}_{\boldsymbol{S}\in\Phi_f(U,\boldsymbol{A})} \Gamma_{\boldsymbol{S}}(U,\mathcal{I}^\bullet) \xrightarrow[\simeq]{H^i\theta(U)} H^i \operatorname*{limind}_{\boldsymbol{Z}\in\Phi(\mathbf{X},\boldsymbol{A})} \Gamma_{\boldsymbol{Z}}(U,\mathcal{I}^\bullet) \xrightarrow[\simeq]{H^i\epsilon(U)} H^i\Gamma_{\mathbf{A}}(U,\mathcal{I}^\bullet)\,.$$

On construit de même des morphismes naturels

$$\operatorname*{limind}_{\boldsymbol{S}\in\Phi_f(U,\boldsymbol{A})} H^i\Gamma_{\boldsymbol{S}}(U,\mathcal{I}^\bullet) \xrightarrow{\alpha_i} \operatorname*{limind}_{\boldsymbol{Z}\in\Phi(\mathbf{X},\boldsymbol{A})} H^i\Gamma_{\boldsymbol{Z}}(U,\mathcal{I}^\bullet) \xrightarrow{\beta_i} H^i\Gamma_{\mathbf{A}}(U,\mathcal{I}^\bullet)\,.$$

Le morphisme $\beta_i \circ \alpha_i = H^i\theta(U) \circ H^i\epsilon(U)$ est un isomorphisme puisque $(\Phi_f(U,\mathbf{A}),\subseteq)$ est filtrant (*cf.* 2.2.2-(b)). Le morphisme α_i est donc injectif. Il s'en suit que β_i est bijectif si, et seulement si, α_i est surjectif. Or, une classe de cohomologie de $\operatorname{limind}_{\boldsymbol{Z}\in\Phi(\mathbf{X},\boldsymbol{A})} H^i\Gamma_{\boldsymbol{Z}}(U,\mathcal{F})$ provient d'une famille finie de i-cochaînes $\{\omega_j \in \Gamma_{\boldsymbol{Z}_j}(U,\mathcal{I}^i) \mid d(\omega_j)=0\}_{j=1,\dots,r}$. Or, pour chaque $j=1,\dots,r$, on sait que $\omega_j \in \Gamma_{|\omega_j|_U}(U,\mathcal{I}^i)$ avec, bien évidemment, $|\omega_j|_U \in \Phi_f(U,\mathbf{A})$. Comme, d'autre part, on a des injections $\Gamma_{|\omega_j|_U}(U,\mathcal{I}^{i+1}) \subseteq \Gamma_{\boldsymbol{Z}_j}(U,\mathcal{I}^{i+1})$, la famille de i-cochaînes $\{\omega_j \in \Gamma_{\boldsymbol{S}_j}(U,\mathcal{I}^i)\}_{j=1,\dots,r}$ est une famille de i-cocycles. La surjectivité de α_i en découle (*cf.* 2.2.1) et l'assertion (b) est prouvée.

(c). Comme le germe d'une limite inductive de faisceaux est la limite inductive des germes des faisceaux, il suffit de montrer que le morphisme

$$\operatorname*{limind}_{\boldsymbol{Z}\in\Phi(\mathbf{X},\boldsymbol{A})} (\underline{\Gamma}_{\boldsymbol{Z}}\mathcal{F})_x \to (\underline{\Gamma}_{\mathbf{A}}\mathcal{F})_x \tag{‡}$$

est un isomorphisme quel que soit $x \in \mathbf{X}$.

D'après (a), on a des diagrammes commutatifs pour tous $U \supseteq V$

$$\begin{array}{ccc}
\operatorname*{limind}_{\boldsymbol{Z}\in\Phi(\mathbf{X},\boldsymbol{A})} \Gamma_{\boldsymbol{Z}}(U,\mathcal{F}) & \xrightarrow[\simeq]{\epsilon(U)} & \Gamma_{\mathbf{A}}(U,\mathcal{F}) \\
\big\downarrow{\scriptstyle\rho^U_V} & & \big\downarrow{\scriptstyle\rho^U_V} \\
\operatorname*{limind}_{\boldsymbol{Z}\in\Phi(\mathbf{X},\boldsymbol{A})} \Gamma_{\boldsymbol{Z}}(V,\mathcal{F}) & \xrightarrow[\simeq]{\epsilon(V)} & \Gamma_{\mathbf{A}}(V,\mathcal{F})
\end{array}$$

où les lignes sont des isomorphismes. On en déduit un isomorphisme des limites inductives des colonnes indexées par les ouverts $U \ni x$:

$$\operatorname*{limind}_{U\ni x} \operatorname*{limind}_{\boldsymbol{Z}\in\Phi(\mathbf{X},\boldsymbol{A})} \Gamma_{\boldsymbol{Z}}(U,\mathcal{F}) \xrightarrow[\simeq]{\epsilon_x} \operatorname*{limind}_{U\ni x} \Gamma_{\mathbf{A}}(U,\mathcal{F})\,,$$

ce qui, grâce à commutation des opérateurs 'limind' ([6]), donne l'isomor-

[6] *Cf.* [KS$_2$] chap **2**, prop. 2.1.7, p. 39.

phisme

$$\operatorname*{limind}_{\mathbf{Z}\in\Phi(\mathbf{X},\mathbf{A})}\ \operatorname*{limind}_{U\ni x} \Gamma_{\mathbf{Z}}(U,\mathcal{F}) \xrightarrow[\simeq]{\epsilon_x} \operatorname*{limind}_{U\ni x} \Gamma_{\mathbf{A}}(U,\mathcal{F})\,,$$

soit, l'isomorphisme (‡) cherché.

(d). On rappelle que le i-ième faisceau de cohomologie d'un complexe de faisceaux $(\mathcal{G}^\bullet, d_\bullet)$ est par définition

$$\mathcal{H}^i(\mathcal{G}^\bullet) = \frac{\ker d_i}{\operatorname{coker} d_{i-1}}\,.$$

C'est donc aussi le faisceau engendré par le préfaisceau

$$U \mapsto H^i\Gamma(U,\mathcal{G}^\bullet) := \frac{\ker d_i(U)}{\operatorname{coker} d_{i-1}(U)}\,.$$

En particulier, pour les germes en $x \in \mathbf{X}$, on a

$$\mathcal{H}^i(\mathcal{G}^\bullet)_x := \operatorname*{limind}_{U\ni x} H^i\Gamma(U,\mathcal{G}^\bullet)\,.$$

Or, d'après (b), si $\mathcal{F} \to (\mathcal{I}^\bullet, d_\bullet)$ est une résolution injective, le morphisme

$$\operatorname*{limind}_{\mathbf{Z}\in\Phi(\mathbf{X},\mathbf{A})} H^i\Gamma_{\mathbf{Z}}(U,\mathcal{I}^\bullet) \xrightarrow[\simeq]{} H^i\Gamma_{\mathbf{A}}(U,\mathcal{I}^\bullet)$$

est un isomorphisme dont le passage à la limite inductive suivant le système filtrant $\{U \ni x\}$ donne l'isomorphisme de germes

$$\operatorname*{limind}_{\mathbf{Z}\in\Phi(\mathbf{X},\mathbf{A})} (\mathcal{H}^i\,\underline{\underline{\Gamma}}_{\mathbf{Z}}\mathcal{I}^\bullet)_x \xrightarrow[\simeq]{} (\mathcal{H}^i\,\Gamma_{\mathbf{A}}\mathcal{I}^\bullet)_x\,,$$

et prouve que le morphisme de faisceaux

$$\operatorname*{limind}_{\mathbf{Z}\in\Phi(\mathbf{X},\mathbf{A})} \mathbb{R}^i\,\underline{\underline{\Gamma}}_{\mathbf{Z}}\mathcal{F} = \operatorname*{limind}_{\mathbf{Z}\in\Phi(\mathbf{X},\mathbf{A})} \mathcal{H}^i\,\underline{\underline{\Gamma}}_{\mathbf{Z}}\mathcal{I}^\bullet \longrightarrow \mathcal{H}^i\Gamma_{\mathbf{A}}\mathcal{I}^\bullet =: \mathbb{R}^i\Gamma_{\mathbf{A}}\mathcal{F}$$

est bien un isomorphisme. □

2.3.2. Remarques

1) La proposition 2.3.1 réduit l'étude de la plupart des propriétés des foncteurs $\Gamma_{\mathbf{A}}$ pour un $\mathbf{A}$ arbitraire, au cas où $\mathbf{A}$ est une partie localement fermée $\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{X}$. Cette réduction ne doit pas surprendre dans la mesure où les supports des sections des faisceaux sur les parties ouvertes sont toujours des parties localement fermées dans $\mathbf{X}$. Un exemple de telle réduction est l'implication

   ($\mathcal{F}$ est $\Gamma_{\mathbf{Z}}$-acyclique pour tout $\mathbf{Z}$) $\Rightarrow$ ($\mathcal{F}$ et $\Gamma_{\mathbf{A}}$-acyclique pour tout $\mathbf{A}$)

   corollaire immédiat de 2.3.1-(d).

   Une application systématique de 2.3.1 aurait pu simplifier bien de passages des démonstrations des sections précédentes.

2) La seule difficulté dans les énoncés de 2.3.1 vient de ce que les systèmes inductifs concernés ne sont pas filtrants. Par exemple, si $(\Phi_f(\mathbf{X},\mathbf{A}), \subseteq)$

dénote l'ensemble partiellement ordonné par inclusion des parties fermées $\boldsymbol{F}$ de $\boldsymbol{X}$ tels que $\boldsymbol{F} \subseteq \boldsymbol{A}$. On a $\Phi_f(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}) \subseteq \Phi(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})$ et l'assertion 2.3.1-(b) peut être reformulée en disant que pour tout $i \in \mathbb{Z}$, le morphisme naturel

$$\operatorname*{limind}_{\boldsymbol{F} \in \Phi_f(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A})} I\!R^i \Gamma_{\boldsymbol{F}}(U, \mathcal{F}) \to I\!R^i \Gamma_{\boldsymbol{A}}(U, \mathcal{F})$$

est bijectif. La preuve de cette nouvelle assertion est une application presque immédiate de 2.2.2-(b), possible puisque $(\Phi_f(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}), \subseteq)$ est filtrant supérieurement, ce qui n'était pas le cas de $(\Phi(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}), \subseteq)$.

2.4. Cohomologie à supports compacts. Pour $\mathcal{F} \in \mathrm{Sh}(\boldsymbol{X})$, on définit le foncteur des sections à support compact dans $\boldsymbol{X}$ par

$$\Gamma_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}, \mathcal{F}) := \{\sigma \in \Gamma(\boldsymbol{X}, \mathcal{F}) \mid |\sigma| \text{ est compact }\} .$$

2.4.1. Lemme. *Notons $(\mathcal{K}(\boldsymbol{X}), \subseteq)$ l'ensemble des parties compactes de $\boldsymbol{X}$ partiellement ordonné par inclusion. Pour $\boldsymbol{K}_1 \subseteq \boldsymbol{K}_2, \boldsymbol{K} \in \mathcal{K}(\boldsymbol{X})$ on dispose des inclusions naturelles*

$$\Gamma_{\mathbf{K}_1}(\boldsymbol{X}, \_\,) \subseteq \Gamma_{\mathbf{K}_2}(\boldsymbol{X}, \_\,) \quad \text{et} \quad \Gamma_{\mathbf{K}}(\boldsymbol{X}, \_\,) \subseteq \Gamma_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}, \_\,) ,$$

d'où un morphisme de foncteurs

$$\operatorname*{limind}_{\boldsymbol{K} \in \mathcal{K}(\boldsymbol{X})} \Gamma_{\mathbf{K}}(\boldsymbol{X}, \_\,) \longrightarrow \Gamma_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}, \_\,) \tag{6}$$

qui est un isomorphisme et qui induit un isomorphisme en cohomologie

$$\operatorname*{limind}_{\boldsymbol{K} \in \mathcal{K}(\boldsymbol{X})} H^i_{\mathbf{K}}(\boldsymbol{X}, \_\,) \underset{\simeq}{\longrightarrow} H^i_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}, \_\,) \tag{7}$$

pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. L'égalité (6) est immédiate. Ensuite, si $\mathcal{F} \to \mathcal{I}^\bullet$ est une résolution injective de $\mathcal{F} \in \mathrm{Sh}(\boldsymbol{X})$, on a l'égalité des complexes

$$\operatorname*{limind}_{\boldsymbol{K} \in \mathcal{K}(\boldsymbol{X})} \Gamma_{\mathbf{K}}(\boldsymbol{X}, \mathcal{I}^\bullet) \underset{\simeq}{\longrightarrow} \Gamma_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}, \mathcal{I}^\bullet) ,$$

et l'on conclut par (7) en rappelant que la cohomologie d'une limite est à la limite des cohomologies dans le cas des systèmes inductifs supérieurement filtrants ce qui est le cas de $(\mathcal{K}(\boldsymbol{X}), \subseteq)$. $\square$

2.4.2. Remarque. On prendra garde du fait que si $\operatorname{limind}_{\boldsymbol{K} \in \mathcal{K}(\boldsymbol{X})} \underline{\underline{\Gamma}}_{\boldsymbol{K}} \mathcal{F}$ est un faisceau bien défini, ses sections au-dessus d'un ouvert $U \subseteq \boldsymbol{X}$ n'ont à priori aucun rapport avec $\Gamma_{\mathrm{c}}(U, \mathcal{F})$. Par exemple, si $\boldsymbol{X}$ est localement compact, le morphisme naturel

$$\operatorname*{limind}_{\boldsymbol{K} \in \mathcal{K}(\boldsymbol{X})} \underline{\underline{\Gamma}}_{\boldsymbol{K}} \mathcal{F} \to \mathcal{F}$$

est un isomorphisme. On a donc les égalités des foncteurs

$$\begin{cases} \varGamma(U, \operatorname*{limind}_{\boldsymbol{K}\in\mathcal{K}(\boldsymbol{X})} \underline{\underline{\varGamma}}_{\boldsymbol{K}}(\_)) = \varGamma(U,\_) \\ \operatorname*{limind}_{\boldsymbol{K}\in\mathcal{K}(\boldsymbol{X})} \varGamma(U, \underline{\underline{\varGamma}}_{\boldsymbol{K}}(\_)) = \varGamma_\phi(U,\_) \\ \operatorname*{limind}_{\boldsymbol{K}\in\mathcal{K}(\boldsymbol{X})} \varGamma(\boldsymbol{X}, \underline{\underline{\varGamma}}_{\boldsymbol{K}}(\_)) = \varGamma_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X},\_) \end{cases}$$

où $\varGamma_\phi(U,\_)$ désigne le foncteur des sections sur U dont le support est relativement compact dans $\boldsymbol{X}$.

En particulier, si $\boldsymbol{X} = \mathbb{R}$, on a, pour tout ouvert $U \subseteq \mathbb{R}$,

$$\varGamma_{\mathrm{c}}(U,\mathcal{F}) = 0, \quad \varGamma_\phi(U,\mathcal{F}) = \mathbb{R}^{\Pi_0(\tilde{U})} \quad \text{mais} \quad \varGamma(U,\mathcal{F}) = \mathbb{R}^{\Pi_0(U)},$$

où $\tilde{U}$ est la réunion des composantes connexes de U qui sont relativement compactes dans $\boldsymbol{X}$.

On remarquera pour terminer que le morphisme naturel

$$\operatorname*{limind}_{U\in\mathcal{K}(\boldsymbol{X})} \varGamma(\boldsymbol{X}, \underline{\underline{\varGamma}}_{\boldsymbol{K}}(\_)) \to \varGamma(U, \operatorname*{limind}_{\boldsymbol{K}\in\mathcal{K}(\boldsymbol{X})} \underline{\underline{\varGamma}}_{\boldsymbol{K}}(\_)),$$

toujours injectif, n'est pas nécessairement bijectif.

Références

[Go] R. Godement. *"Topologie algébrique et théorie des faisceaux"*. Troisième édition revue et corrigée. Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, XIII. Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1252. Hermann, Paris, (1973).

[Gr$_1$] A. Grothendieck. Sur quelques points d'algèbre homologique. Tôhoku Math. J. (2) 9, 119–221, (1957).

[Gr$_2$] A. Grothendieck. Les invariants cohomologiques globaux et locaux relatifs à un sous-espace fermé. Dans : *"Cohomologie locale des faisceaux cohérents et théorèmes de Lefschetz locaux et globaux (SGA 2)"*, (1962).

[KS$_1$] M. Kashiwara, P. Schapira. *"Sheaves on manifolds"*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 292. Springer-Verlag, Berlin, (1994).

[KS$_2$] M. Kashiwara, P. Schapira. *"Categories and sheaves"*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 332. Springer-Verlag, Berlin, (2006).

ALBERTO ARABIA
CNRS–IMJ
THÉORIE DES GROUPES
11 NOVEMBRE 2015