Cohomologie de de Rham dans la catégorie des schémas

Z. Mebkhout & A. Arabia

Complément aux notes du cours du second semestre 98/99

Université Paris 7-Denis Diderot

2 place Jussieu 75251. Paris Cedex 05

– samedi 15 janvier 2000 –

Cohomologie de de Rham dans la catégorie des schémas

Table des matières

§ 1. Formes différentielles relatives

1.1 Différentielles relatives sur une algèbre

Soit $\boldsymbol{R}$ un anneau commutatif arbitraire. On désignera par $\mathrm{Alg}(\boldsymbol{R})$ la catégorie dont les objets sont les $\boldsymbol{R}$-algèbres commutatives avec identité multiplicative ($\boldsymbol{R}$-algèbres dans la suite) et les morphismes sont les morphismes de $\boldsymbol{R}$-algèbres ; les notations $\mathrm{Homom}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2)$ et $\mathrm{Mor}_{\mathrm{Alg}(\boldsymbol{R})}(\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{A}_2)$ seront utilisées de manière synonyme.

1.1.1. Définition : Soit $\boldsymbol{A}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre. Pour tout $\boldsymbol{A}$-module $\boldsymbol{M}$ on appelle « **$\boldsymbol{R}$-dérivation de $\boldsymbol{A}$ à valeurs dans $\boldsymbol{M}$** » la donnée d'un morphisme de $\boldsymbol{R}$-modules $D : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{M}$ vérifiant l'égalité de Leibniz :

$$D(a_1 a_2) = a_1 \cdot D(a_2) + a_2 \cdot D(a_1) \qquad \text{pour tous } a_1, a_2 \in \boldsymbol{A}. \tag{1}$$

En particulier, si $\boldsymbol{1_A}$ désigne l'identité multiplicative de $\boldsymbol{A}$, on a $D(r \cdot \boldsymbol{1_A}) = 0$ pour tout $r \in \boldsymbol{R}$.

On note $\mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}; \boldsymbol{M})$ l'ensemble des $\boldsymbol{R}$-dérivations de $\boldsymbol{A}$ à valeurs dans $\boldsymbol{M}$. Il est immédiat de constater que si $D_1, D_2 \in \mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}; \boldsymbol{M})$ alors $D_1 + a \cdot D_2$ appartient également à $\mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}; \boldsymbol{M})$, quel que soit $a \in \boldsymbol{A}$; il en résulte une structure naturelle de $\boldsymbol{A}$-module sur $\mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}; \boldsymbol{M})$.

1.1.2. Exercice : Soient $\boldsymbol{A}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre et $\boldsymbol{M}$ un $\boldsymbol{A}$-module. On munit $\boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{M}$ avec une structure d'anneau en posant :

$$(a_1, m_1) \cdot (a_2, m_2) := (a_1 \, a_2, a_1 \cdot m_2 + a_2 \cdot m_1) \,.$$

L'application $p_1 : \boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{A}$ qui associe $(a, m) \mapsto a$ est alors un morphisme d'anneau. Notons $p_2 : \boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{M}$ la projection canonique.

a) Pour chaque $D \in \mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}; \boldsymbol{M})$ montrer que l'application $\varphi(D) : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{M}$ définie par $a \xmapsto{\varphi(D)} (a, D(a))$ est un morphisme d'anneaux tel que

$$\begin{cases} p_1 \circ \varphi(D) = \mathrm{id}_{\boldsymbol{A}} \,, \\ p_2 \circ \varphi(D)(\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{1_A}) = \boldsymbol{0} \,. \end{cases} \tag{$*$}$$

b) Notons $\mathrm{Homom}_{\boldsymbol{A},\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{M})$ l'ensemble des morphismes d'anneaux vérifiant les conditions $(*)$ ci-dessus.

Montrer que l'application $\varphi : \mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}; \boldsymbol{M}) \to \mathrm{Homom}_{\boldsymbol{A},\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{M})$, définie dans la question précédente, est *bijective*.

1.1.3. Remarques et notations :

a) Soit $\alpha : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres et soit $\boldsymbol{M}$ un $\boldsymbol{B}$-module. Pour tout $D \in \mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{B};\boldsymbol{M})$, l'application $\alpha^*(D) := D \circ \alpha$ est une $\boldsymbol{R}$-dérivation de $\boldsymbol{A}$. La correspondance $\alpha^* : \mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{B};\boldsymbol{M}) \to \mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{M})$ est un morphisme de $\boldsymbol{A}$-modules.

Exercice. Soit $\mathfrak{A}$ un idéal de $\boldsymbol{A}$ et notons, pour tout $\boldsymbol{A}$-module $\boldsymbol{N}$, par $\boldsymbol{N}^{\mathfrak{A}}$ le sous-module des éléments $n \in \boldsymbol{N}$ annulés par $\mathfrak{A}$. Le $\boldsymbol{A}$-module $\boldsymbol{N}^{\mathfrak{A}}$ possède alors une structure naturelle de $(\boldsymbol{A}/\mathfrak{A})$-module. Notons aussi $\mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{M})^{(\mathfrak{A})}$ l'ensemble des $\boldsymbol{R}$-dérivations de $\boldsymbol{A}$ à valeurs dans $\boldsymbol{M}$ qui s'annulent sur $\mathfrak{A}$.

1) Montrer que $\mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{M})^{(\mathfrak{A})}$ est un sous-$\boldsymbol{A}$-module de $\mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{M})$ et que l'on a :

$$\mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}\big(\boldsymbol{A};\boldsymbol{M}\big)^{(\mathfrak{A})} \subseteq \mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}\big(\boldsymbol{A};\boldsymbol{M}\big)^{\mathfrak{A}} = \mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}\big(\boldsymbol{A};\boldsymbol{M}^{\mathfrak{A}}\big)\,.$$

La structure de $\boldsymbol{A}$-module de $\mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{M})^{(\mathfrak{A})}$ se factorise en une structure $(\boldsymbol{A}/\mathfrak{A})$-module.

2) Notons $\nu : \boldsymbol{A} \twoheadrightarrow \boldsymbol{A}/\mathfrak{A}$ la surjection canonique. Montrer, pour $D \in \mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{M})^{(\mathfrak{A})}$, qu'il existe une et une seule dérivation $D' \in \mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}/\mathfrak{A};\boldsymbol{M}^{\mathfrak{A}})$ telle que $\nu^*(D') = D$.

3) En déduire que la composée des morphismes canoniques

$$\mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}\big(\boldsymbol{A}/\mathfrak{A};\boldsymbol{M}^{\mathfrak{A}}\big) \xrightarrow{\nu^*} \mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}\big(\boldsymbol{A};\boldsymbol{M}^{\mathfrak{A}}\big) \xrightarrow{\jmath_*} \mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}\big(\boldsymbol{A};\boldsymbol{M}\big)$$

où $\jmath : \boldsymbol{N}^{\mathfrak{A}} \hookrightarrow \boldsymbol{N}$ désigne l'inclusion canonique, est injective d'image $\mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{M})^{(\mathfrak{A})}$.

Cet exercice démontre le lemme suivant.

Lemme : *Lorsque $\alpha : \boldsymbol{A} \twoheadrightarrow \boldsymbol{B}$ un morphisme* surjectif *de $\boldsymbol{R}$-algèbres et que $\boldsymbol{M}$ est un $\boldsymbol{B}$-module, l'application $\alpha^* : \mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{B};\boldsymbol{M}) \to \mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{M})$ est* injective *et son image s'identifie au sous-$\boldsymbol{A}$-module de $\mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{M})$ des dérivations nulles sur l'idéal* $\ker(\alpha)$.

b) Soit $f : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{N}$ un morphisme de $\boldsymbol{A}$-modules. Pour toute dérivation $D \in \mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{M})$, la composée $f \circ D$ est clairement une $\boldsymbol{R}$-dérivation de $\boldsymbol{A}$ à valeurs dans $\boldsymbol{N}$ et sera notée, suivant le contexte, par $f_*(D)$, $D^*(f)$ ou $\mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}, f)$. L'application définie sur la somme directe $\mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{M}) \oplus \mathrm{Mor}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{N})$ à valeurs dans $\mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{N})$ qui fait correspondre au couple (D, f) la dérivation $f \circ D$ est $\boldsymbol{A}$-bilinéaire.

1.1.4. Définition : On appelle « **module des formes différentielles relatives de $\boldsymbol{A}$ sur $\boldsymbol{R}$** » la donnée d'un couple $\big(\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}, d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}\big)$, où $\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$ est un $\boldsymbol{A}$-module et où $d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} : \boldsymbol{A} \to \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$ est une $\boldsymbol{R}$-dérivation, tel que pour tout $\boldsymbol{A}$-module $\boldsymbol{M}$ l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Mor}_{\boldsymbol{A}}(\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}, \boldsymbol{M}) & \xrightarrow[\equiv]{d^*_{A/R}} & \mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{M}) \\ f & \longmapsto & d^*_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}(f) \end{array}$$

est *bijective*.

1.1.5. Proposition : *Pour toute $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$, il existe un module de formes différentielles relatives sur $\boldsymbol{R}$, de plus, ce module est unique à isomorphisme (canonique) près.*

Démonstration :
Existence – Considérons le $\boldsymbol{A}$-module libre $\bigoplus_{a\in \boldsymbol{A}} \boldsymbol{A}\cdot da$, où da est un symbole, notons $\mathfrak{J}$ le sous-$\boldsymbol{A}$-module de $\bigoplus_{a\in \boldsymbol{A}} \boldsymbol{A}\cdot da$ engendré par les éléments de la forme :

$$\left\{\begin{array}{lll} (\mathrm{R1}) & d(a_1 a_2) - a_1{\cdot}da_2 - a_2{\cdot}da_1\,, & \multirow{2}{*}{pour tous $a_1, a_2 \in \boldsymbol{A}$;} \\ (\mathrm{R2}) & d(a_1 + a_2) - da_1 - da_2\,, & \\ (\mathrm{R3}) & d(ra) - r{\cdot}da\,, & \text{pour tous } r \in \boldsymbol{R} \text{ et } a \in \boldsymbol{A}\,; \end{array}\right.$$

et posons $\Omega := \left(\bigoplus_{a\in \boldsymbol{A}} \boldsymbol{A}\cdot da\right)/\mathfrak{J}$. L'application $d : \boldsymbol{A} \to \Omega$ définie par $d(a) = \overline{da}$ est alors une $\boldsymbol{R}$-dérivation. Montrons que le couple (Ω, d) est un module de formes différentielles relatives de $\boldsymbol{A}$ sur $\boldsymbol{R}$. En effet, soit $D : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{M}$ une $\boldsymbol{R}$-dérivation ; le morphisme de $\boldsymbol{A}$-modules $\varphi : \bigoplus_{a\in \boldsymbol{A}} \boldsymbol{A}\cdot da \to \boldsymbol{M}$ défini par $\varphi : da \mapsto D(a)$ s'annule sur $\mathfrak{J}$ et induit un morphisme de $\boldsymbol{A}$-modules $f : \Omega \to \boldsymbol{M}$ qui vérifie, par construction, $f_*(d) = D$. L'application canonique induite par d entre $\mathrm{Mor}_{\boldsymbol{A}}(\Omega, \boldsymbol{M}) \to \mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}; \boldsymbol{M})$ est donc surjective ; son injectivité découle d'observer que si $f_*(d) = 0$ on a $f(da) = 0$ pour tout $a \in \boldsymbol{A}$, et comme les éléments de la forme da constituent un système de générateurs pour Ω, l'égalité $f = 0$ s'ensuit.

Unicité – Elle découle de remarquer que si (Ω_1, d_1) et (Ω_2, d_2) vérifient la condition de la définition 1.1.4, les foncteurs $(\_) \rightsquigarrow \mathrm{Mor}_{\boldsymbol{A}}(\Omega_1, \_)$ et $(\_) \rightsquigarrow \mathrm{Mor}_{\boldsymbol{A}}(\Omega_2, \_)$ sont canoniquement isomorphes. ■

1.2 Représentabilité de $\mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}, \_)$

Soient $\mathfrak{C}$ une catégorie et $\mathfrak{O} \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{C})$; notons **Ens** la catégorie des ensembles, et considérons le foncteur covariant $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(\mathfrak{O}, \_) : \mathfrak{C} \rightsquigarrow \mathbf{Ens}$. Soit maintenant $\mathscr{F} : \mathfrak{C} \rightsquigarrow \mathbf{Ens}'$ un foncteur covariant de $\mathfrak{C}$ vers une sous-catégorie $\mathbf{Ens}'$ de **Ens**. Un « *morphisme de foncteurs* » $\eta : \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(\mathfrak{O}, \_) \to \mathscr{F}$ est la donnée, pour chaque $\mathfrak{M} \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{C})$ d'une application $\eta(\mathfrak{M}) : \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(\mathfrak{O}, \mathfrak{M}) \to \mathscr{F}(\mathfrak{M})$ de telle sorte que pour chaque morphisme $\alpha \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(\mathfrak{N}, \mathfrak{M})$ le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{N} & \qquad & \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(\mathfrak{O}, \mathfrak{N}) & \xrightarrow{\eta(\mathfrak{N})} & \mathscr{F}(\mathfrak{N}) \\ {\scriptstyle\alpha}\big\downarrow & & {\scriptstyle \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(\mathfrak{O},\alpha)}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\mathscr{F}(\alpha)} \\ \mathfrak{M} & & \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(\mathfrak{O}, \mathfrak{M}) & \xrightarrow{\eta(\mathfrak{M})} & \mathscr{F}(\mathfrak{M}) \end{array}$$

soit commutatif. En particulier, lorsque $\mathfrak{N} = \mathfrak{O}$, on a l'égalité :

$$\eta(\mathfrak{M})(\alpha) = \eta(\mathfrak{M}) \circ \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(\mathfrak{O}, \alpha)(\mathbf{1}_{\mathfrak{O}}) = \mathscr{F}(\alpha)(\eta(\mathfrak{O})(\mathbf{1}_{\mathfrak{O}})) \tag{$*$}$$

pour tous $\mathfrak{M} \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{C})$ et $\alpha \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(\mathfrak{O}, \mathfrak{M})$. La transformation naturelle η est donc entièrement déterminée par l'élément $\boldsymbol{o} := \eta(\mathfrak{O})(\mathbf{1}_{\mathfrak{O}}) \in \mathscr{F}(\mathfrak{O})$. Réciproquement, pour chaque $\boldsymbol{o} \in \mathscr{F}(\mathfrak{O})$, l'égalité $\eta_{\boldsymbol{o}}(\mathfrak{M})(\alpha) := \mathscr{F}(\alpha)(\boldsymbol{o})$ (*cf.* $(*)$) définit une transformation naturelle de $\mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(\mathfrak{O}, \_)$ vers $\mathscr{F}$. L'application de $\mathscr{F}(\mathfrak{O})$ vers $\mathrm{Hom}(\mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(\mathfrak{O}, \_), \mathscr{F})$ qui associe $\boldsymbol{o} \mapsto \eta_{\boldsymbol{o}}$ est donc bijective (résultat de Yoneda).

1.2.1. Définition : Un foncteur covariant $\mathscr{F} : \mathfrak{C} \rightsquigarrow \mathbf{Ens}$ est dit « *représentable* » lorsqu'il existe un isomorphisme naturel de foncteurs $\eta : \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(\mathfrak{O}, \_) \equiv \mathscr{F}$ pour un certain $\mathfrak{O} \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{C})$; on dit alors que le couple $\big(\mathscr{F}(\mathfrak{O}), \eta(\mathfrak{O})(\mathbf{1}_{\mathfrak{O}})\big)$ « *représente* » $\mathscr{F}$.

1.2.2. Remarque : Pour qu'un foncteur additif $\mathscr{F} : \mathbf{Ab} \rightsquigarrow \mathrm{Mod}(\mathbb{Z})$, où $\mathbf{Ab}$ désigne une catégorie abélienne, soit représentable il faut qu'il soit exact à droite.

La proposition suivante est une conséquence de ce qui précède.

1.2.3. Proposition : *Soit* $\mathscr{F} : \mathfrak{C} \rightsquigarrow \mathbf{Ens}$ *un foncteur covariant.*

a) *Le foncteur* $\mathscr{F}$ *est représentable, si et seulement si, il existe* $\mathfrak{O} \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{C})$ *et un élément* $\boldsymbol{o} \in \mathscr{F}(\mathfrak{O})$ *tels que pour chaque* $\mathfrak{M} \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{C})$ *et* $\boldsymbol{x} \in \mathscr{F}(\mathfrak{M})$ *il existe* ***un et un unique*** $\alpha \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(\mathfrak{O}, \mathfrak{M})$ *vérifiant* $\boldsymbol{x} = \mathscr{F}(\alpha)(\boldsymbol{o})$.

b) *Lorsque* $\mathscr{F}$ *est représentable, deux couples* $(\boldsymbol{o}_1, \mathfrak{O}_1)$ *et* $(\boldsymbol{o}_2, \mathfrak{O}_2)$ *le représentent, si et seulement si, il existe un isomorphisme (auquel cas il est unique)* $\Xi \in \mathrm{Mor}_{\mathfrak{C}}(\mathfrak{O}_1, \mathfrak{O}_2)$ *tel que* $\boldsymbol{o}_2 = \mathscr{F}(\Xi)(\boldsymbol{o}_1)$.

Comme la correspondance $\mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}, \_)$ qui associe à un $\boldsymbol{A}$-module $\boldsymbol{M}$ le module $\mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{M})$ et à un morphisme de $\boldsymbol{A}$-modules $f : \boldsymbol{M}_1 \to \boldsymbol{M}_2$ le morphisme $\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}, f)$ (*cf.* 1.1.3-b), est fonctorielle covariante (et additive), les considérations précédentes s'appliquent et permettent de reformuler la proposition 1.1.5 par le corollaire suivant.

1.2.4. Corollaire : *Pour chaque* $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$, *le couple* $(\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}, d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}})$ *représente le foncteur* $\mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}, \_) : \mathrm{Mod}(\boldsymbol{A}) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}(\boldsymbol{A})$.

1.3 Première suite exacte à droite fondamentale

La démonstration de la proposition 1.1.5 fournit, pour chaque $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$, un couple canonique $(\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}, d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}})$ qui représente le foncteur $\mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}, \_)$; de plus, pour tout morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\alpha : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ l'application $\Omega(\alpha) : \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \to \Omega_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{R}}$ qui associe $\Omega(\alpha) : a_1{\cdot}da_2 \mapsto \alpha(a_1){\cdot}d\alpha(a_2)$ est bien définie. La correspondance Ω définie sur la catégorie $\mathrm{Alg}(\boldsymbol{R})$ des $\boldsymbol{R}$-algèbres vers la catégorie $\mathrm{Mod}(\boldsymbol{R})$ des $\boldsymbol{R}$-modules qui associe $\Omega : \boldsymbol{A} \rightsquigarrow \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$ et $\alpha \rightsquigarrow \Omega(\alpha)$ est fonctorielle et covariante.

On vérifie aisément que pour tout morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\alpha : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ et pour tout $\boldsymbol{B}$-module $\boldsymbol{M}$, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Mor}_{\boldsymbol{B}}\big(\Omega_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{R}}, \boldsymbol{M}\big) \arrow[r, leftrightarrow, "d^*_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{R}}", "\equiv"'] \arrow[d, shift right=3ex, "\Omega(\alpha)^*"'] & \mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{B}; \boldsymbol{M}) \arrow[d, "\alpha^*"'] \\
\mathrm{Mor}_{\boldsymbol{A}}\big(\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}, \boldsymbol{M}\big) \arrow[r, leftrightarrow, "d^*_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}", "\equiv"'] \arrow[u, "\Omega(\alpha)"'] & \mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}; \boldsymbol{M})
\end{tikzcd} \tag{2}$$

1.3.1. Proposition : *Soit $\alpha : \boldsymbol{A} \twoheadrightarrow \boldsymbol{B}$ un morphisme **surjectif** de $\boldsymbol{R}$-algèbres.*

a) *La suite suivante est exacte.*

$$\boxed{\mathbf{0} \to \boldsymbol{A}{\cdot}d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}(\ker(\alpha)) \xrightarrow{\subseteq} \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \xrightarrow{\Omega(\alpha)} \Omega_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{R}} \to \mathbf{0}} \tag{3}$$

b) *L'application $\partial : \ker(\alpha)/\ker(\alpha)^2 \to \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \otimes_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{B}$ donnée par $\overline{x} \mapsto d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}(x) \otimes 1$ est un morphisme de $\boldsymbol{A}$-modules bien défini et la suite :*

$$\boxed{\ker(\alpha)/\ker(\alpha)^2 \xrightarrow{\partial} \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \otimes_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{B} \xrightarrow{\Omega(\alpha)\times \mathbf{1}_{\boldsymbol{B}}} \Omega_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{R}} \to \mathbf{0}} \tag{4}$$

où $\Omega(\alpha) \times \mathbf{1}_{\boldsymbol{B}} : a{\cdot}da' \otimes b \mapsto b\alpha(a){\cdot}d\alpha(a')$, est exacte à droite.

Démonstration :

a) La surjectivité de $\Omega(\alpha)$ résulte de ce que l'image par $\Omega(\alpha)$ du système de générateurs canonique de $\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$ est le système de générateurs canonique de $\Omega_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{R}}$.

L'assertion concernant le noyau de $\Omega(\alpha)$ résulte de remarquer dans un premier temps l'inclusion évidente : $d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}(\ker(\alpha)) \subseteq \ker(\Omega(\alpha))$ (‡) ; on considère ensuite le $\boldsymbol{A}$-module $\boldsymbol{M} := \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}/\boldsymbol{A}{\cdot}d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}(\ker(\alpha))$. Pour tout $x \in \ker(\alpha)$ et tout $a \in \boldsymbol{A}$, l'égalité $x{\cdot}da = d(xa) - a{\cdot}dx$ montre que $\ker(\alpha){\cdot}\boldsymbol{M} = \mathbf{0}$ de sorte que $\boldsymbol{M}$ possède une structure naturelle de $\boldsymbol{B}$-module compatible à sa structure de $\boldsymbol{A}$-module. Notons $\pi : \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \twoheadrightarrow \boldsymbol{M}$ la projection canonique ; la composée $\pi \circ d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$ définit une $\boldsymbol{R}$-dérivation de $\boldsymbol{A}$ à valeurs dans $\boldsymbol{M}$ nulle sur $\ker(\alpha)$, elle se factorise donc à travers α et une dérivation de $\boldsymbol{B}$ à valeurs dans $\boldsymbol{M}$ d'après le lemme de 1.1.3-a. Ceci signifie, grâce à la commutativité du diagramme (2), que l'application π se factorise à travers $\Omega(\alpha)$ et donc que $\ker(\Omega(\alpha)) \subseteq \ker(\pi) = \boldsymbol{A}{\cdot}d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}(\ker(\alpha))$, ce qui joint à (‡) termine la démonstration de l'assertion (a).

b) La correspondance $\Delta : \ker(\alpha) \longrightarrow \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \otimes_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{B}$ qui associe $x \overset{\Delta}{\longmapsto} dx \otimes 1$, vérifie bien l'égalité $\Delta(xy) = x{\cdot}dy \otimes 1 + y{\cdot}dx \otimes 1 = 0$; elle induit l'application ∂ de l'énoncé. D'autre part, on a $\Delta(ax) = dax \otimes 1 = a{\cdot}dx \otimes 1 + x{\cdot}da \otimes 1 = a{\cdot}dx \otimes 1$ et ∂ est un morphisme de $\boldsymbol{A}$-modules. On remarque alors que la suite (4) n'est autre que la suite (3) à laquelle on a appliqué le foncteur exact à droite $(\_) \rightsquigarrow (\_) \otimes_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{B}$. ■

1.3.2. Remarque : On prendra garde du fait que, dans l'énoncé de la proposition précédente, la surjectivité de α est indispensable pour l'exactitude des suites (3) et (4) en leur terme central. En effet, soit k un corps de caractéristique 2 et soient $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} = k[X]$ et $\alpha : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ l'homomorphisme de k-algèbres déterminé par $\alpha(X) = X^2$; cette application est clairement injective. D'autre part, l'application $d : k[X] \to k[X]$ définie par $d(P(X)) = \frac{dP}{dX}(X)$ est une k-dérivation et toute k-dérivation $D : k[X] \to \boldsymbol{M}$ se factorise par $(k[X], d)$ de sorte que ce couple est un module de formes différentielles de $k[X]$ relatives à k. On remarque alors que $d(\alpha(P(X))) = d(P(X^2)) = \frac{dP}{dX}(X^2)\,\frac{d(X^2)}{dX} = 0$. Par conséquent, $\alpha^*(d) = 0$ et donc $\Omega(\alpha)^* : \mathrm{Mor}_{k[X]}(k[X], k[X]) \to \mathrm{Mor}_{k[X]}(k[X], k[X])$ annule $\mathrm{id}_{k[X]}$, autrement dit $\Omega(\alpha) = 0$.

1.4 Constructions du module des formes différentielles relatives

Bien que la démonstration de la proposition 1.1.5 donne une construction canonique du module des formes différentielles relatives, d'autres constructions sont souvent très utiles. Nous passons en revue dans cette section ces différentes constructions.

1.4.1. Quotients d'algèbre de polynômes. Soit $\mathscr{X}$ un ensemble de « *variables* » et posons $\boldsymbol{A} := \boldsymbol{R}[\mathscr{X}]$ la $\boldsymbol{R}$-algèbre des polynômes à coefficients dans $\boldsymbol{R}$ et variables dans $\mathscr{X}$. Soit $\boldsymbol{M}$ un $\boldsymbol{A}$-module, pour tous $D \in \mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}; \boldsymbol{M})$ et $P \in \boldsymbol{R}[\mathscr{X}]$, on a $D(P) = \sum_{X \in \mathscr{X}} \frac{\partial P}{\partial X}\, D(X)$. On pose :

$$\begin{cases} \Omega := \bigoplus_{X \in \mathscr{X}} \boldsymbol{A}{\cdot}dX\,, \ \text{ où } dX \text{ est un symbole ;} \\ d : \boldsymbol{R} \to \Omega\,, \ \text{ définie par } d(P) := \sum_{X \in \mathscr{X}} \frac{\partial P}{\partial X}\, dX\,. \end{cases}$$

Le morphisme de $\boldsymbol{A}$-modules $f : \Omega \to \boldsymbol{M}$ donné par $f : dX \mapsto D(X)$ vérifie clairement l'égalité $f_*(d) = D$. Enfin, si $f' : \Omega \to \boldsymbol{M}$ vérifie également l'égalité $f'_*(d) = D$, la différence $(f - f')$ est nulle sur les éléments dX et comme ils constituent une base pour Ω, on a $f = f'$. Le couple (Ω, d) est donc bien un module de formes différentielles de $\boldsymbol{A}$ relatives à $\boldsymbol{R}$.

Toute $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$ étant quotient d'une algèbre de polynômes, soit $\pi : \boldsymbol{R}[\mathscr{X}] \twoheadrightarrow \boldsymbol{A}$ une présentation de $\boldsymbol{A}$ de noyau noté $\mathfrak{I}$. La proposition 1.3.1 permet de poser ;

$$\boxed{\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} := \frac{\bigoplus_{X \in \mathscr{X}} \boldsymbol{R}[\mathscr{X}]\cdot dX}{\boldsymbol{R}[\mathscr{X}]\cdot d(\mathfrak{I})}} \tag{5}$$

La dérivation $d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} : \boldsymbol{A} \to \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$ étant alors la dérivation induite sur $\boldsymbol{A}$ par la dérivation sur $\boldsymbol{R}[\mathscr{X}]$ définie par $\Omega(\pi) \circ d_{\boldsymbol{R}[\mathscr{X}]/\boldsymbol{R}}$ qui s'annule trivialement sur $\ker(\pi)$ (*cf.* lemme de 1.1.3-a).

1.4.2. Exercice : Montrer l'égalité $\boldsymbol{R}[\mathscr{X}]\cdot d(\mathfrak{I}) = \sum_{i \in \mathfrak{R}} \boldsymbol{R}[\mathscr{X}]\, d(f_i)$, où $\{f_i\}_{i \in \mathfrak{R}}$ est un système de générateurs de l'idéal $\mathfrak{I}$ considéré comme $\boldsymbol{R}$-module. En déduire que si $\boldsymbol{A}$ est une $\boldsymbol{R}$-algèbre de présentation finie, *i.e.* quotient d'une algèbre de polynômes à coefficients dans $\boldsymbol{R}$ et à un nombre fini de variables par idéal de type fini, alors le $\boldsymbol{A}$-module $\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$ est de présentation finie.

1.4.3. Exercice : Montrer l'égalité $\boldsymbol{R}[\mathscr{X}]\cdot d(\mathfrak{I}) = \mathfrak{I}\cdot\Omega_{\boldsymbol{R}[\mathscr{X}]/\boldsymbol{R}} + d(\mathfrak{I})$, d'où :

$$\boxed{\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} := \frac{\Omega_{\boldsymbol{R}[\mathscr{X}]/\boldsymbol{R}}}{\mathfrak{I}\cdot\Omega_{\boldsymbol{R}[\mathscr{X}]/\boldsymbol{R}} + d(\mathfrak{I})}} \tag{6}$$

1.4.4. Changement de base. Soient $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{R}'$ deux $\boldsymbol{R}$-algèbres et posons $\boldsymbol{A}' := \boldsymbol{R}' \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{A}$ que l'on considère muni de la structure d'algèbre produit tensoriel. On a le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{R} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & \boldsymbol{R}' \arrow[d, "\gamma"', "\mathrm{id}_{\boldsymbol{R}'}\otimes 1"] \\ \boldsymbol{A} \arrow[r, "\delta", "1\otimes\mathrm{id}_{\boldsymbol{A}}"'] & \boldsymbol{A}' := \boldsymbol{R}' \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{A} \end{tikzcd}$$

où α, β désignent les morphismes d'anneaux structuraux.

Soient $\boldsymbol{M}$ un $\boldsymbol{A}'$-module et $D \in \mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}'}(\boldsymbol{A}'; \boldsymbol{M})$. L'application $D \circ \delta$ est une dérivation de $\boldsymbol{A}$ à valeurs dans $\boldsymbol{M}$ qui vérifie $D(\delta(r\cdot a)) = D(1 \otimes \beta(r)a) = D(\alpha(r) \otimes a) = r\cdot D(\delta(a))$ pour tous $r \in \boldsymbol{R}$ et $a \in \boldsymbol{A}$, on a donc une application canonique

$$\boxed{\mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}'}(\boldsymbol{A}';\boldsymbol{M}) \xrightarrow{\delta^*} \mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{M})} \tag{7}$$

1.4.5. Lemme : *Soit $\boldsymbol{M}$ un $\boldsymbol{A}'$-module. L'application canonique (7) est **bijective**.*

Démonstration : Comme une $\boldsymbol{R}'$-dérivation sur $\boldsymbol{A}'$ est déterminée par l'image de δ, l'injectivité de δ^* résulte. Soient $D \in \mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{M})$ et $D' : \boldsymbol{A}' \to \boldsymbol{M}$ définie par $D'(a' \otimes b) := \gamma(a')\cdot D(b)$; on vérifie aisément que $D' \in \mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}'}(\boldsymbol{A}';\boldsymbol{M})$, et sa restriction à $\boldsymbol{A}$ coïncide avec D. ∎

1.4.6. Comme conséquence de ce dernier lemme, nous avons un isomorphisme canonique naturel :

$$\mathrm{Mor}_{\boldsymbol{R}'\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{A}}\big(\Omega_{\boldsymbol{R}'\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}'},\boldsymbol{M}\big) \xrightarrow{\ \equiv\ } \mathrm{Mor}_{\boldsymbol{A}}\big(\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}},\boldsymbol{M}\big)$$

qui composé à l'isomorphisme $\mathrm{Mor}_{\boldsymbol{A}}\big(\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}},\boldsymbol{M}\big) \equiv \mathrm{Mor}_{\boldsymbol{R}'\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{A}}\big(\boldsymbol{R}'\otimes_{\boldsymbol{R}}\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}},\boldsymbol{M}\big)$, fournit un isomorphisme canonique :

$$\boxed{\Omega_{\boldsymbol{R}'\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}'} \equiv \boldsymbol{R}'\otimes_{\boldsymbol{R}}\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}} \tag{8}$$

qui identifie $d_{\boldsymbol{R}'\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}'}$ et $\mathrm{id}_{\boldsymbol{R}'}\otimes d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$.

Un cas particulier de changement de base est celui où $S \subseteq \boldsymbol{R}$ est un système multiplicatif et où $\boldsymbol{R}' := S^{-1}\boldsymbol{R}$. L'équivalence (8) se lit alors :

$$\boxed{\Omega_{S^{-1}\boldsymbol{A}/S^{-1}\boldsymbol{R}} \equiv S^{-1}\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}} \tag{9}$$

et $d_{S^{-1}\boldsymbol{A}/S^{-1}\boldsymbol{R}} : S^{-1}\boldsymbol{A} \to S^{-1}\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$ n'est autre que le morphisme induit par $d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$ après inversion des éléments de S.

1.4.7. Produit tensoriel d'algèbres. Généralisation naturelle du changement de base : soient $\boldsymbol{A}_1$ et $\boldsymbol{A}_2$ deux $\boldsymbol{R}$-algèbres et notons $q_1 : \boldsymbol{A}_1 \to \boldsymbol{A}_1 \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{A}_2$ l'homomorphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres qui fait correspondre $a \mapsto a \otimes \mathbf{1}_{\boldsymbol{A}_2}$ (*mutatis mutandis* pour $q_2 : \boldsymbol{A}_2 \to \boldsymbol{A}_1 \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{A}_2$). Pour tout $(\boldsymbol{A}_1 \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{A}_2)$-module $\boldsymbol{M}$ et toute $\boldsymbol{R}$-dérivation $D : \boldsymbol{A}_1 \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{A}_2 \to \boldsymbol{M}$, les « *restrictions* » $d_i := D \circ q_i : \boldsymbol{A}_i \to \boldsymbol{M}$ sont des $\boldsymbol{R}$-dérivations. Réciproquement, lorsque l'on se donne $d_1 : \mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}_1, \boldsymbol{M})$, on note $D_1 := (d_1 \otimes 1) : \boldsymbol{A}_1 \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{A}_2 \to \boldsymbol{M} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{A}_2 \xrightarrow{\pi_2} \boldsymbol{M}$, où π_2 désigne le produit défini par l'action (à gauche) $\boldsymbol{A}_2$ sur $\boldsymbol{M}$. On a :

$$\begin{aligned} D_1\big((a_1\otimes b_1)(a_2\otimes b_2)\big) &= (1\otimes b_1\,b_2)\,D_1(a_1\,a_2)\\ &= (a_1\otimes b_1\,b_2)\,d_1(a_2) + (a_2\otimes b_1\,b_2)\,d_1(a_1)\\ &= (a_1\otimes b_1)\,D_1(a_2\otimes b_2) + (a_2\otimes\ b_2)\,D_1(a_1\otimes b_1)\end{aligned}$$

et D_1 est une $\boldsymbol{R}$-dérivation de $\boldsymbol{A}_1\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{A}_2$ à valeurs dans $\boldsymbol{M}$ dont la restriction à $\boldsymbol{A}_1$ coïncide avec d_1 (*mutatis mutandis* pour $d_2\in \mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{M})$). L'application :

$$\begin{array}{rcl}\mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{M})\oplus \mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{M}) & \xrightarrow{\ \Xi\ } & \mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}_1\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{M})\\ (d_1,d_2) & \longmapsto & D_1+D_2\end{array}$$

est donc injective. Elle est aussi surjective ; en effet, pour tout $D\in\mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}_1\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{A}_2,\boldsymbol{M})$ la différence $D-\Xi(d_1,d_2)$ est nulle puisque c'est une $\boldsymbol{R}$-dérivation de $\boldsymbol{A}_1\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{A}_2$ dont les restrictions aux $\boldsymbol{A}_i$ sont nulles.

On prendra garde du fait que Ξ est en fait un isomorphisme de $(\boldsymbol{A}_1\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{A}_2)$-modules lorsque l'on considère chaque $\mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}_i,\boldsymbol{M})$ muni de la structure de $(\boldsymbol{A}_1\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{A}_2)$-module induite par celle de $\boldsymbol{M}$.

1.4.8. Proposition : *Soient $\boldsymbol{A}_1$ et $\boldsymbol{A}_2$ deux $\boldsymbol{R}$-algèbres. Soit $q_1:\boldsymbol{A}_1\to\boldsymbol{A}_1\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{A}_2$ l'homomorphisme défini par $a\mapsto a\otimes\mathbf{1}_{\boldsymbol{A}_2}$ et notons :*

$$\Omega(q_1):\boldsymbol{A}_2\otimes_{\boldsymbol{R}}\Omega_{\boldsymbol{A}_1/\boldsymbol{R}}\equiv(\boldsymbol{A}_1\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{A}_2)\otimes_{\boldsymbol{A}_1}\Omega_{\boldsymbol{A}_1/\boldsymbol{R}}\to\Omega_{\boldsymbol{A}_1\otimes\boldsymbol{A}_2/\boldsymbol{R}}$$

le morphisme de $(\boldsymbol{A}_1\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{A}_2)$-modules induit (mutatis mutandis *pour* $\boldsymbol{A}_2$). *L'application :*

$$\boxed{\Big(\boldsymbol{A}_2\otimes_{\boldsymbol{R}}\Omega_{\boldsymbol{A}_1/\boldsymbol{R}}\Big)\oplus\Big(\boldsymbol{A}_1\otimes_{\boldsymbol{R}}\Omega_{\boldsymbol{A}_2/\boldsymbol{R}}\Big)\xrightarrow[\equiv]{\Omega(q_1)\oplus\Omega(q_2)}\Omega_{\boldsymbol{A}_1\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{A}_2/\boldsymbol{R}}}\tag{10}$$

est un isomorphisme de $(\boldsymbol{A}_1\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{A}_2)$-modules.

Démonstration : La proposition découle de l'isomorphisme induit par Ξ :

$$\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}_1}(\Omega_{\boldsymbol{A}_1/\boldsymbol{R}},\boldsymbol{M})\oplus\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}_2}(\Omega_{\boldsymbol{A}_2/\boldsymbol{R}},\boldsymbol{M})\xrightarrow[\equiv]{(\Xi)}\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}_1\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{A}_2}(\Omega_{\boldsymbol{A}_1\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{A}_2/\boldsymbol{R}},\boldsymbol{M})$$

modulo les équivalences $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}_1\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{A}_2}\big((\boldsymbol{A}_1\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{A}_2)\otimes_{\boldsymbol{A}_i}\Omega_{\boldsymbol{A}_i/\boldsymbol{R}},\boldsymbol{M}\big)\equiv\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}_i}(\Omega_{\boldsymbol{A}_i/\boldsymbol{R}},\boldsymbol{M})$. ∎

1.4.9. Algèbres de fractions. Soient $\boldsymbol{A}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre et $S\subseteq\boldsymbol{A}$ un système multiplicatif. Notons $S^{-1}\boldsymbol{A}$ l'anneau obtenu à partir de $\boldsymbol{A}$ en inversant les éléments de S. L'homomorphisme canonique d'anneaux $\nu_S(\boldsymbol{A}):\boldsymbol{A}\to S^{-1}\boldsymbol{A}$

qui associe $a \mapsto \frac{a}{1}$ munit $S^{-1}\boldsymbol{A}$ d'une structure de $\boldsymbol{A}$-algèbre (donc aussi de $\boldsymbol{R}$-algèbre).

Propriété fondamentale : *Pour tout* $(S^{-1}\boldsymbol{A})$*-module* $\boldsymbol{M}$ *et pour chaque* $D \in \mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{M})$, *la correspondance* $D' : \frac{a}{s} \mapsto \frac{D(a)}{s} - \frac{aD(s)}{s^2}$ *définit une* $\boldsymbol{R}$*-dérivation* $D' : S^{-1}\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{M}$ *telle que* $D = D' \circ \nu_S(\boldsymbol{A})$ (‡) ; *de plus,* D' *est unique dans* $\mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(S^{-1}\boldsymbol{A};\boldsymbol{M})$ *à vérifier l'égalité* (‡).

La conséquence immédiate de cette remarque est que l'application :

$$\boxed{\mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(S^{-1}\boldsymbol{A};\boldsymbol{M}) \xrightarrow[\equiv]{\nu_S(\boldsymbol{A})^*} \mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A};\boldsymbol{M})} \tag{11}$$

est **un isomorphisme** de $(S^{-1}\boldsymbol{A})$-modules. Par conséquent :

$$\mathrm{Mor}_{S^{-1}\boldsymbol{A}}(\Omega_{S^{-1}\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}},\boldsymbol{M}) \xrightarrow{\Omega(\nu_S(\boldsymbol{A}))^*} \mathrm{Mor}_{\boldsymbol{A}}(\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}},\boldsymbol{M})$$

l'est également et comme par ailleurs l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Mor}_{S^{-1}\boldsymbol{A}}(\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \otimes_{\boldsymbol{A}} S^{-1}\boldsymbol{A},\boldsymbol{M}) & \xrightarrow{\nu_S(\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}})^*} & \mathrm{Mor}_{\boldsymbol{A}}(\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}},\boldsymbol{M}) \\ \alpha & \longmapsto & \alpha \circ \nu_S(\Omega(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R})) \end{array} \tag{12}$$

est *bijective*, on déduit un isomorphisme de $(S^{-1}\boldsymbol{A})$-modules canonique (et naturel par rapport à $\boldsymbol{M}$) :

$$\mathrm{Mor}_{S^{-1}\boldsymbol{A}}(\Omega_{S^{-1}\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}},\boldsymbol{M}) \equiv \mathrm{Mor}_{S^{-1}\boldsymbol{A}}(\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \otimes_{\boldsymbol{A}} S^{-1}\boldsymbol{A},\boldsymbol{M})$$

et nous pouvons poser

$$\boxed{\Omega_{S^{-1}\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} := \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \otimes_{\boldsymbol{A}} S^{-1}\boldsymbol{A}} \tag{13}$$

La dérivation $d_{S^{-1}\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} : S^{-1}\boldsymbol{A} \to \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \otimes_{\boldsymbol{A}} S^{-1}\boldsymbol{A}$ est alors l'unique dérivation sur $S^{-1}\boldsymbol{A}$ qui prolonge la dérivation $d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \otimes \boldsymbol{1} : \boldsymbol{A} \to \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \otimes_{\boldsymbol{A}} S^{-1}\boldsymbol{A}$.

1.4.10. Exercice : Vérifier la propriété fondamentale énoncée dans la section précédente.

1.4.11. Exercice : Soit S un système multiplicatif de $\boldsymbol{R}$. Montrer que $\Omega_{S^{-1}\boldsymbol{R}/\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{0}$.

1.4.12. Sous-quotient d'un produit tensoriel d'algèbres. Rappelons que dans la démonstration de l'existence des modules des formes différentielles de la proposition 1.1.5, on quotiente le $\boldsymbol{A}$-module libre $\bigoplus_{a\in\boldsymbol{A}} \boldsymbol{A}{\cdot}da$ par le sous-module engendré par des éléments des trois formes R1, R2 et R3. Or, le quotient par le sous-module engendré uniquement par les éléments des formes R2 et R3 est précisément le $\boldsymbol{A}$-module à gauche $\boldsymbol{A} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{A}$.

Notons $\pi : \boldsymbol{A} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{A} \twoheadrightarrow \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$ la surjection canonique de $\boldsymbol{A}$-modules ***à gauche*** définie par $\pi(a_1 \otimes a_2) = a_1 \cdot da_2$. Le noyau de cette application, noté $\mathfrak{K}$, est engendré par les éléments de la forme $1 \otimes a_1 a_2 - a_1 \otimes a_2 - a_2 \otimes a_1$ et on a la suite exacte de $\boldsymbol{A}$-modules à gauche :

$$\mathbf{0} \to \mathfrak{K} := \boldsymbol{A} \cdot \langle 1 \otimes a_1 a_2 - a_1 \otimes a_2 - a_2 \otimes a_1 \mid a_i \in \boldsymbol{A} \rangle \xhookrightarrow{\iota_{\mathfrak{K}}} \boldsymbol{A} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{A} \xrightarrow{\pi} \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \to \mathbf{0} \,. \tag{14}$$

Soit $p : \boldsymbol{A} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{A} \twoheadrightarrow \boldsymbol{A}$ l'application produit $p : a_1 \otimes a_2 \mapsto a_1 a_2$. Vue comme morphisme de $\boldsymbol{A}$-algèbres, son noyau, noté $\mathfrak{J}$, est l'idéal ***à gauche*** (ou à droite) engendré par les éléments de la forme $1 \otimes a - a \otimes 1$. On a la suite exacte de $\boldsymbol{A}$-modules à gauche (et à droite) :

$$\mathbf{0} \to \mathfrak{J} := \boldsymbol{A} \cdot \langle 1 \otimes a - a \otimes 1 \mid a \in \boldsymbol{A} \rangle \xhookrightarrow{\iota_{\mathfrak{J}}} \boldsymbol{A} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{A} \xrightarrow{p} \boldsymbol{A} \to \mathbf{0} \,. \tag{15}$$

En rassemblant les suites (14) et (15) en un seul diagramme, on a :

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathbf{0} \arrow[d] & & \\
 & & \mathfrak{K} := \boldsymbol{A} \cdot \langle 1 \otimes a_1 a_2 - a_1 \otimes a_2 - a_2 \otimes a_1 \mid a_i \in \boldsymbol{A} \rangle \arrow[d, hook, "\iota_{\mathfrak{K}}"'] & & \\
\mathbf{0} \arrow[r] & \mathfrak{J} := \boldsymbol{A} \cdot \langle 1 \otimes a - a \otimes 1 \mid a \in \boldsymbol{A} \rangle \arrow[r, hook, "\iota_{\mathfrak{J}}"] & \boldsymbol{A} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{A} \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[d, "\pi"'] & \boldsymbol{A} \arrow[r] & \mathbf{0} \\
 & & \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \arrow[d] & & \\
 & & \mathbf{0} & &
\end{tikzcd} \tag{16}$$

On remarque alors que la composée $\pi \circ \iota_{\mathfrak{J}}$ est *surjective*. En effet, comme les éléments $a \otimes 1$ s'écrivent également $a \cdot (1 \otimes 1)$ et que $1 \otimes 1 \in \mathfrak{K}$, le sous-module $\pi(\mathfrak{J})$ contient tous les éléments $\pi(1 \otimes a) = da$ qui engendrent $\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$.

Montrons maintenant l'égalité $\ker(\pi \circ \iota_{\mathfrak{J}}) = \mathfrak{J}^2$. Soit $\Delta : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{A}$ l'application $\Delta(a) = a \otimes 1 - 1 \otimes a \in \boldsymbol{A} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{A}$, pour tout $a \in \boldsymbol{A}$; on a

$$\Delta(a_1)\Delta(a_2) = a_1 a_2 \otimes 1 - a_1 \otimes a_2 - a_2 \otimes a_1 + 1 \otimes a_1 a_2 \,, \tag{17}$$

et l'inclusion $\mathfrak{J}^2 \subseteq \ker(\pi \circ \iota_{\mathfrak{J}})$ résulte immédiatement. D'autre part, et toujours par l'égalité (17), $\mathfrak{K}$ est engendré par les éléments de la forme $\Delta(a_1)\Delta(a_2) - 1 \otimes a_1 a_2$. Or, le noyau de $\pi \circ \mathfrak{J}$ est précisément le sous-module de $\mathfrak{K}$ des éléments annulés par p et comme cette application est un morphisme d'algèbres vérifiant

$p(\Delta(a)) = 0$, pour tout $a \in \boldsymbol{A}$, on a :

$$p\Big(\textstyle\sum_j a_j\cdot\big(\Delta(a_{j,1})\Delta(a_{j,2}) - 1 \otimes a_{j,1}a_{j,2}\big)\Big) = 0 \quad \iff \quad \textstyle\sum_j a_j a_{j,1} a_{j,2} = 0$$

et donc $\ker(\pi \circ \iota_{\mathfrak{J}}) \subseteq \mathfrak{J}^2$.

Nous avons donc prouvé que le morphisme de $\boldsymbol{A}$-modules à gauche π induit un isomorphisme de $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$ sur $\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$. L'espace quotient $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$ se retrouve ainsi, *a priori*, muni de deux structures de $\boldsymbol{A}$-module : celle que nous avons considérée jusqu'ici et celle induite par l'idéal $\mathfrak{J}$ de $\boldsymbol{A} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{A}$, ce qui fait de $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$ un $(\boldsymbol{A} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{A})/\mathfrak{J} \overset{p}{\equiv} \boldsymbol{A}$-module ; ces deux structures sont bien évidemment les mêmes. On remarquera, pour terminer, que l'application $\pi \circ \Delta : \boldsymbol{A} \to \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$ coïncide bien avec $d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$. Nous pouvons, par conséquent, poser :

$$\boxed{\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} := \frac{\mathfrak{J} := \ker\big(p : \boldsymbol{A} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}\big)}{\mathfrak{J}^2} \quad \text{et} \quad d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} := \pi \circ \Delta} \tag{18}$$

1.4.13. Algèbres symétriques. Soit $\boldsymbol{L}$ un $\boldsymbol{R}$-module et notons $\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{L})$ la $\boldsymbol{R}$-algèbre symétrique de $\boldsymbol{L}$. On rappelle que cette algèbre est le quotient de l'algèbre tensorielle :

$$\mathsf{T}^*_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{L}) := \boldsymbol{R} \oplus \boldsymbol{L} \oplus \big(\boldsymbol{L} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{L}\big) \oplus \big(\boldsymbol{L} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{L} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{L}\big) \oplus \cdots$$

par l'idéal bilatère engendré par les éléments de la forme $(m_1 \otimes m_2 - m_2 \otimes m_1)$. L'algèbre $\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{L})$ est alors une $\boldsymbol{R}$-algèbre naturellement graduée par le degré des tenseurs ; on a $\mathsf{S}^0_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{L}) = \boldsymbol{R}$, $\mathsf{S}^1_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{L}) = \boldsymbol{L}$ et $\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{L})$ est engendrée en tant que $\boldsymbol{R}$-algèbre par ses éléments de degré 1. Enfin, $\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{L})$ est de type fini si et seulement si le $\boldsymbol{R}$-module $\boldsymbol{L}$ l'est.

Lorsque l'on se donne un morphisme de $\boldsymbol{R}$-modules $\alpha : \boldsymbol{L}_1 \to \boldsymbol{L}_2$, l'application $\mathsf{T}(\alpha)_* : \mathsf{T}^*_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{L}_1) \to \mathsf{T}^*_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{L}_2)$ qui fait correspondre $l_1 \otimes \cdots \otimes l_r \mapsto \alpha(l_1) \otimes \cdots \alpha(l_r)$ induit un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres graduées de degré nul de $\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{L}_1) \to \mathsf{S}^*_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{L}_2)$. La correspondance $\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{R}}(\_)$ de la catégorie $\mathrm{Mod}(\boldsymbol{R})$ vers la catégorie $\mathrm{Alg}^*(\boldsymbol{R})$ qui associe $\boldsymbol{L} \rightsquigarrow \mathsf{S}^*_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{L})$ et $\alpha \rightsquigarrow \mathsf{S}_{\boldsymbol{R}}(\alpha)_*$ est un foncteur covariant et pour toute $\boldsymbol{R}$-algèbre positivement graduée $\mathscr{A}^*$, l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Mor}_{\mathrm{Alg}^*(\boldsymbol{R})}\big(\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{L}), \mathscr{A}^*\big) & \longrightarrow & \mathrm{Mor}_{\boldsymbol{R}}\big(\boldsymbol{L}, \mathscr{A}^1\big) \\ \alpha_* & \longmapsto & \alpha_1 \end{array}$$

est naturelle par rapport aux données de $\boldsymbol{L}$ et $\mathscr{A}^*$ et est ***bijective*** (le vérifier !) ; le foncteur $\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{R}}(\_)$ est donc adjoint à gauche du foncteur qui fait correspondre à une $\boldsymbol{R}$ -algèbre positivement graduée sa composante de degré 1 et *mutatis mutandis* pour les morphismes.

Soit $\boldsymbol{M}$ un $\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{L})$-module. L'application :

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}\big(\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{L}),\boldsymbol{M}\big) & \xrightarrow{\Theta(\boldsymbol{L},\boldsymbol{M})} & \mathrm{Mor}_{\boldsymbol{R}}\big(\boldsymbol{L},\boldsymbol{M}\big) \equiv \mathrm{Mor}_{\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{L})}\big(\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{L})\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{L},\boldsymbol{M}\big) \\ D & \longmapsto & D|_{\boldsymbol{L}} \end{array} \qquad (*)$$

est ***bijective*** et naturelle par rapport aux données $\boldsymbol{L}$ et $\boldsymbol{M}$. En effet, comme $\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{L})$ est engendrée, en tant que $\boldsymbol{R}$-algèbre, par ses éléments de degré 1, une $\boldsymbol{R}$-dérivation est entièrement déterminée par son action sur $\mathsf{S}^1_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{L})=\boldsymbol{L}$, et $\Theta(\boldsymbol{L},\boldsymbol{M})$ est injective. D'autre part, pour tout morphisme de $\boldsymbol{R}$-modules $\alpha:\boldsymbol{L}\to\boldsymbol{M}$ et pour chaque $r\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$ la correspondance :

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{L}^r=\boldsymbol{L}\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{L} & \xrightarrow{D(\alpha)_r} & \boldsymbol{M} \\ (l_1,\ldots,l_r) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{r}\big(l_1\otimes\cdots\otimes\widehat{l_i}\otimes\cdots\otimes l_r\big)\cdot\alpha(l_i) \end{array}$$

est r-linéaire symétrique et définit un morphisme de $\boldsymbol{R}$-modules de $\mathsf{S}^r_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{L})$ vers $\boldsymbol{M}$. La somme $D(\alpha)=\sum_r D(\alpha)_r$ est alors une $\boldsymbol{R}$-dérivation de $\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{L})$ à valeurs dans $\boldsymbol{M}$, d'où la surjectivité de $\Theta(\boldsymbol{L},\boldsymbol{M})$.

Comme conséquence de ces remarques on a la proposition suivante.

1.4.14. Proposition : *Soit $\boldsymbol{L}$ un $\boldsymbol{R}$-module et notons $\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{L})$ la $\boldsymbol{R}$-algèbre symétrique de $\boldsymbol{L}$.*

a) *Il existe une et une unique application $D:\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{L})\to\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{L})\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{L}$ nulle sur $\mathsf{S}^0_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{L})$ et vérifiant :*

$$D(l_1\otimes\cdots\otimes l_r)=\sum_{i=1}^{r}\big(l_1\otimes\cdots\otimes\widehat{l_i}\otimes\cdots\otimes l_r\big)\otimes l_i\,,$$

pour tout $r\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$ et tous $l_i\in\boldsymbol{L}$.

b) *Le couple $\big(\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{L})\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{L},D\big)$ représente le foncteur $\mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}\big(\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{L}),\_\big)$. On peut donc poser :*

$$\boxed{\Omega_{\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{L})/\boldsymbol{R}}:=\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{L})\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{L}} \qquad (19)$$

1.4.15. Remarque : On aura observé que lorsque $\boldsymbol{L}$ est un $\boldsymbol{R}$-module libre on obtient une autre description du module des différentielles relatives d'une algèbre de polynômes (1.4).

1.5 Seconde suite exacte à droite fondamentale

Soit $\alpha : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres et considérons $\boldsymbol{B}$ munie également de la structure de $\boldsymbol{A}$-algèbre induite par α. Il est clair que chaque $\boldsymbol{A}$-dérivation de $\boldsymbol{B}$ dans un $\boldsymbol{B}$-module $\boldsymbol{M}$ est automatiquement une $\boldsymbol{R}$-dérivation, nous avons donc des applications canoniques $\mathrm{Der}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{B};\boldsymbol{M}) \to \mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{B};\boldsymbol{M})$ et $\Omega_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{R}} \to \Omega_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{A}}$. Il est par ailleurs évident d'après la construction de $\Omega_{\boldsymbol{B}/\_}$ comme quotient de $\bigoplus_{b\in\boldsymbol{B}} \boldsymbol{B}{\cdot}db$ que l'application canonique $\Omega_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{R}} \to \Omega_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{A}}$ est surjective ; la proposition suivante donne une présentation de son noyau.

1.5.1. Proposition : *Soit $\alpha : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres. La suite de $\boldsymbol{B}$-modules :*

$$\boxed{\boldsymbol{B}\otimes_{\boldsymbol{A}}\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \xrightarrow{\mathbf{1}_{\boldsymbol{B}}\times\Omega(\alpha)} \Omega_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{R}} \longrightarrow \Omega_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{A}} \to \mathbf{0}} \tag{20}$$

où la flèche de droite est le morphisme canonique, est exacte.

Démonstration : Nous avons déjà expliqué la surjectivité de la flèche de droite. D'autre part chaque élément de la forme $1\otimes da \in \boldsymbol{B}\otimes_{\boldsymbol{A}}\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$ s'annule sur $\Omega_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{A}}$ puisque dans ce module on a $da = a{\cdot}d1 = 0$. La suite (20) est donc bien un complexe. Notons maintenant $\boldsymbol{M} := \Omega_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{R}}/\mathrm{im}(\mathbf{1}_{\boldsymbol{B}}\times\Omega(\alpha))$ et soit $\xi : \Omega_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{R}} \twoheadrightarrow \boldsymbol{M}$ la surjection canonique. La composée $d := \xi\circ d_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{R}}$ est alors une dérivation de $\boldsymbol{B}$ à valeurs dans $\boldsymbol{M}$ qui vérifie $d(a{\cdot}b) = \alpha(a){\cdot}db + b{\cdot}d\alpha(a) = a{\cdot}db + (\mathbf{1}\times\Omega(\alpha))(da\otimes b) = a{\cdot}db$ et par conséquent d est une $\boldsymbol{A}$-dérivation de $\boldsymbol{B}$ à valeurs dans $\boldsymbol{M}$. Il existe alors un morphisme de $\boldsymbol{B}$-modules $\Xi : \Omega_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{A}} \to \boldsymbol{M}$ tel que dans le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
 & \boldsymbol{B} \arrow[d, "d_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{R}}"'] \arrow[dr, "d_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{A}}"] & & \\
\boldsymbol{B}\otimes_{\boldsymbol{A}}\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \arrow[r, "\mathbf{1}_{\boldsymbol{B}}\times\Omega(\alpha)"] & \Omega_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{R}} \arrow[r, "c"] \arrow[d, "\xi"'] & \Omega_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{A}} \arrow[r] \arrow[dl, "\Xi"] & \mathbf{0} \\
 & \boldsymbol{M} & &
\end{tikzcd}$$

où c désigne l'application canonique, on ait $\Xi\circ d_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{R}} = \xi\circ d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$. Il s'ensuit que les dérivations définies par $\Xi\circ c$ et ξ coïncident et l'on a $\Xi\circ c = \xi$. Ceci implique que $\ker(c) \subseteq \mathrm{im}(\mathbf{1}\times\Omega(\alpha))$ et termine la démonstration de la proposition. ∎

1.5.2. Remarque : Soient $S \subseteq \boldsymbol{R}$ et $T \subseteq \boldsymbol{A}$ des systèmes multiplicatifs avec $\nu(S) \subseteq T$, où $\nu : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{A}$ désigne l'homomorphisme structural. La dernière proposition montre que le morphisme canonique $\Omega_{T^{-1}\boldsymbol{A}/S^{-1}\boldsymbol{R}} \to \Omega_{T^{-1}\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$ est un isomorphisme puisque $\Omega_{T^{-1}\boldsymbol{R}/\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{0}$ (*cf.* exercice 1.4.11). D'autre part, nous avons montré l'équivalence $\Omega_{T^{-1}\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \xleftarrow{\equiv} \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \otimes_{\boldsymbol{A}} T^{-1}\boldsymbol{A}$ (*cf.* formule (13)). On a, par conséquent, un isomorphisme canonique :

$$\boxed{\Omega_{T^{-1}\boldsymbol{A}/S^{-1}\boldsymbol{R}} \equiv \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \otimes_{\boldsymbol{A}} T^{-1}\boldsymbol{A}} \tag{21}$$

1.6 À propos de l'exactitude à gauche de la seconde suite fondamentale

Dans la suite (20) le morphisme $\mathbb{1}_{\boldsymbol{B}} \times \Omega(\alpha)$ n'est pas en général injectif, même lorsque $\alpha : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ est injective.

1.6.1. Exemple : Soient $\boldsymbol{A} := \mathbb{F}_p[X]$, $\boldsymbol{B} := \boldsymbol{A}[Y]/\langle Y^p - X\rangle$ et $\alpha : \boldsymbol{A} \hookrightarrow \boldsymbol{B}$ l'homomorphisme (injectif) $a \mapsto a \cdot \mathbb{1}_{\boldsymbol{B}}$. On a $\Omega_{\boldsymbol{A}/\mathbb{F}_p} = \boldsymbol{A}dX$ et $\mathbb{1}_{\boldsymbol{B}} \times \Omega(\alpha) = 0$ puisque, pour toute $\mathbb{F}_p$-dérivation D de $\boldsymbol{B}$, on a $0 = D(\boldsymbol{Y}^p - X) = p\,Y^{p-1}\,D(Y) - D(X) = -D(X)$.

Le fait que cet exemple concerne la caractéristique positive n'est pas fortuit, en effet, en caractéristique nulle le phénomène d'inséparabilité sous-jacent dans l'exemple disparaît et pour les extensions de corps de caractéristique nulle on montrera dans la proposition 1.6.4 que l'application $\mathbb{1}_{\boldsymbol{B}} \times \Omega(\alpha)$ est injective et donc que la suite (20) est scindée.

1.6.2. Une condition générale de scindage. Le lemme suivant donne une condition générale simple d'injectivité de $\mathbb{1}_{\boldsymbol{B}} \times \Omega(\alpha)$ et de scindage de la seconde suite fondamentale. (À remarquer également la condition 4.3.8 en termes de lissité d'algèbres (*cf.* 4.2.1).)

Lemme : *Soient $\boldsymbol{R}$ un anneau commutatif arbitraire et $\alpha : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres. Dans la seconde suite fondamentale :*

$$\boldsymbol{B} \otimes_{\boldsymbol{A}} \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \xrightarrow{\mathbb{1}_{\boldsymbol{B}} \times \Omega(\alpha)} \Omega_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{R}} \longrightarrow \Omega_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{A}} \to \boldsymbol{0}$$

le morphisme $\mathbb{1}_{\boldsymbol{B}} \times \Omega(\alpha)$ est injectif et scindé, si et seulement si, la dérivation $d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$ « se prolonge à $\boldsymbol{B}$ », i.e. *s'il existe une $\boldsymbol{R}$-dérivation $d_{\boldsymbol{B}} : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{B} \otimes_{\boldsymbol{A}} \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$*

rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{A} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "d_{\boldsymbol{A}/k}"'] \arrow[dr, phantom, "\bigoplus"] & \boldsymbol{B} \arrow[d, "d_{\boldsymbol{B}}"] \\ \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \arrow[r, "\mathbf{1}_{\boldsymbol{B}}\times\mathrm{id}"] & \boldsymbol{B}\otimes_{\boldsymbol{A}}\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \end{tikzcd}$$

Démonstration : Laissée en exercice. ■

1.6.3. Le cas des algèbres symétriques. Soient $\boldsymbol{A}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre, puis $\boldsymbol{L}$ un $\boldsymbol{A}$-module et $\alpha : \boldsymbol{A} \to \mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{L})$ l'homomorphisme structural de l'algèbre symétrique $\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{L})$ (voir 1.4).

Lorsque $\boldsymbol{L}$ est de la forme $\boldsymbol{A}\otimes_{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{M}$ pour un certain $\boldsymbol{R}$-module $\boldsymbol{M}$ (par exemple lorsque $\boldsymbol{L}$ est libre), on a $\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{L}) = \boldsymbol{A}\otimes_{\boldsymbol{R}}\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{M})$ et l'équivalence (1.4.8) :

$$\Omega_{\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{L})/\boldsymbol{R}} \equiv \big(\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{L})\otimes_{\boldsymbol{A}}\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}\big)\oplus\big(\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{L})\otimes_{\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{M})}\Omega_{\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{M})/\boldsymbol{R}}\big)\,.$$

Le morphisme $\mathbf{1}\times\Omega(\alpha) : \mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{L})\otimes_{\boldsymbol{A}}\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \to \Omega_{\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{L})/\boldsymbol{R}}$ s'identifie alors à l'application $x\mapsto(x,0)$ qui est évidemment injective et admet une rétraction.

Ceci étant, montrons que lorsque la deuxième suite fondamentale :

$$\mathbf{0}\to\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{L})\otimes_{\boldsymbol{A}}\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \rightleftarrows \Omega_{\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{L})/\boldsymbol{R}} \rightleftarrows \Omega_{\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{L})/\boldsymbol{A}} \equiv \mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{L})\otimes_{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{L}\to\mathbf{0}$$

est scindée pour un certain $\boldsymbol{A}$-module $\boldsymbol{L}$, il en est de même de la suite associée à $\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{L}_1)$ pour tout facteur direct $\boldsymbol{L}_1$ de $\boldsymbol{L}$. En effet, soit $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{L}_1\oplus\boldsymbol{L}_2$ et notons $\iota : \boldsymbol{L}_1\to\boldsymbol{L}$ et $\pi : \boldsymbol{L}\to\boldsymbol{L}_1$ respectivement l'injection et la projection canoniques. Ces applications induisent des morphismes de $\boldsymbol{A}$-algèbres dont la composée est l'identité :

$$\begin{tikzcd} \mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{L}_1) \arrow[r, "\iota"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}"'] & \mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{L}) \arrow[r, "\pi"] & \mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{L}_1) \end{tikzcd}$$

Il s'ensuit que la composée :

$$\begin{tikzcd} \Omega_{\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{L}_1)/\boldsymbol{R}} \arrow[r, "\Omega(\iota)"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}"'] & \Omega_{\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{L})/\boldsymbol{R}} \arrow[r, "\Omega(\pi)"] & \Omega_{\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{L}_1)/\boldsymbol{R}} \end{tikzcd}$$

est également l'identité. On considère alors le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{S}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{L}_1) \otimes_{\boldsymbol{A}} \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \arrow[r, "\boldsymbol{1}\times\Omega(\alpha_1)"] \arrow[d, "\iota\otimes\mathrm{id}"'] & \Omega_{\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{L}_1)/\boldsymbol{R}} \arrow[d, "\Omega(\iota)"] \\
\mathsf{S}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{L}) \otimes_{\boldsymbol{A}} \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \arrow[r, shift left, "\boldsymbol{1}\times\Omega(\alpha)"] \arrow[d, "\pi\otimes\mathrm{id}"'] & \Omega_{\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{L})/\boldsymbol{R}} \arrow[l, shift left, "\rho"] \arrow[d, "\Omega(\pi)"] \\
\mathsf{S}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{L}_1) \otimes_{\boldsymbol{A}} \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \arrow[r, "\boldsymbol{1}\times\Omega(\alpha_1)"] & \Omega_{\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{L}_1)/\boldsymbol{R}}
\end{tikzcd}$$

où l'on a noté $\alpha_1 : \boldsymbol{A} \to \mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{L}_1)$ l'homomorphisme structural, et où la composée des morphismes verticaux est l'identité. L'injectivité de $\boldsymbol{1} \times \Omega(\alpha_1)$ en résulté immédiatement, et pour toute rétraction ρ de $\boldsymbol{1}\times\Omega(\alpha)$, l'application $(\pi \times \mathrm{id}) \circ \rho \circ \Omega(\iota)$ est une rétraction de $\boldsymbol{1} \times \Omega(\alpha_1)$.

Comme conséquence de ces remarques, nous pouvons affirmer que la deuxième suite fondamentale :

$$\boldsymbol{0} \to \mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{L}) \otimes_{\boldsymbol{A}} \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \Longleftrightarrow \Omega_{\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{L})/\boldsymbol{R}} \Longleftrightarrow \Omega_{\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{L})/\boldsymbol{A}} \equiv \mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{L}) \otimes_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{L} \to \boldsymbol{0}$$

est exacte et scindée ***pour tout*** $\boldsymbol{A}$***-module projectif*** $\boldsymbol{L}$.

1.6.4. Le cas des extensions de corps

Proposition : *Soient* $\boldsymbol{L}$ *et* $\boldsymbol{K}$ *deux extensions d'un corps de* ***caractéristique nulle*** k. *Pour toute injection* $\iota : \boldsymbol{L} \hookrightarrow \boldsymbol{K}$ *de* k*-algèbres, le morphisme* $\boldsymbol{1}_{\boldsymbol{K}} \times \Omega(\iota)$ *est* ***injectif*** *et la seconde suite fondamentale :*

$$\boldsymbol{0} \to \boldsymbol{K} \otimes_{\boldsymbol{L}} \Omega_{\boldsymbol{L}/k} \xrightarrow{\boldsymbol{1}_{\boldsymbol{K}}\times\Omega(\iota)} \Omega_{\boldsymbol{K}/k} \longrightarrow \Omega_{\boldsymbol{K}/\boldsymbol{L}} \to \boldsymbol{0} \tag{22}$$

est scindée. En particulier, on a des décompositions de $\boldsymbol{K}$*-espaces vectoriels :*

$$\boxed{\Omega_{\boldsymbol{K}/k} = \big(\boldsymbol{K} \otimes_{\boldsymbol{L}} \Omega_{\boldsymbol{L}/k}\big) \oplus \Omega_{\boldsymbol{K}/\boldsymbol{L}}} \tag{23}$$

Démonstration : D'après le lemme 1.6.2 il suffit de montrer que la dérivation $d_{\boldsymbol{L}/k}$ se prolonge à $\boldsymbol{K}$. Notons $\mathscr{F}$ la famille des couples $(\boldsymbol{A}, d_{\boldsymbol{A}})$ où $\boldsymbol{A}$ est un sous-anneau de $\boldsymbol{K}$ contenant $\boldsymbol{L}$ et où $d_{\boldsymbol{A}} : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{K} \otimes_{\boldsymbol{L}} \Omega_{\boldsymbol{L}/k}$ est une k-dérivation qui prolonge $d_{\boldsymbol{L}/k}$, autrement dit, est telle que le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{L} \arrow[r, hook] \arrow[d, "d_{\boldsymbol{L}/k}"'] \arrow[dr, phantom, "\bigoplus"] & \boldsymbol{A} \arrow[d, "d_{\boldsymbol{A}}"] \\
\Omega_{\boldsymbol{L}/k} \arrow[r] & \boldsymbol{K} \otimes_{\boldsymbol{L}} \Omega_{\boldsymbol{L}/k}
\end{tikzcd}$$

est commutatif. On munit $\mathscr{F}$ de l'ordre partiel défini par $(\boldsymbol{A}_1, d_{\boldsymbol{A}_1}) \preccurlyeq (\boldsymbol{A}_2, d_{\boldsymbol{A}_2})$ si et seulement si $\boldsymbol{A}_1 \subseteq \boldsymbol{A}_2$ et la restriction de $d_{\boldsymbol{A}_2}$ à $\boldsymbol{A}_1$ coïncide avec $d_{\boldsymbol{A}_1}$. Comme la famille $(\mathscr{F}, \preccurlyeq)$ est clairement non vide et inductive, elle possède, d'après le lemme de Zorn, un élément maximal $(\boldsymbol{A}_\infty, d_{\boldsymbol{A}_\infty})$ où $\boldsymbol{A}_\infty$ est nécessairement un sous-corps de $\boldsymbol{K}$. Supposons $\boldsymbol{K} \supsetneq \boldsymbol{A}_\infty$ et soit $x \in \boldsymbol{K} \backslash \boldsymbol{A}_\infty$; deux cas peuvent se présenter *a priori* :

x est transcendant sur $\boldsymbol{A}_\infty$. Dans ce cas, la dérivation $d_{\boldsymbol{A}_\infty}$ se prolonge à $\boldsymbol{A}_\infty[x]$ (en imposant à x la valeur nulle par exemple) ce qui est contraire à la maximalité de $\boldsymbol{A}_\infty$.

x est algébrique sur $\boldsymbol{A}_\infty$. Soit $P_x(X) \in \boldsymbol{A}_\infty[X]$ le polynôme minimal de x ; on a dans $\boldsymbol{K}$:

$$P_x(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_r x^r = 0$$

avec $a_i \in \boldsymbol{A}_\infty$. Pour toute dérivation $D : \boldsymbol{A}_\infty[x] \to \boldsymbol{K} \otimes_{\boldsymbol{L}} \Omega_{\boldsymbol{L}/k}$ qui prolonge $d_{\boldsymbol{A}_\infty}$ on doit donc avoir :

$$-\textstyle\sum_{i=0}^r x^i \, d_{\boldsymbol{A}_\infty}(a_i) = \Big(\sum_{i=0}^r a_i \, i \, x^{i-1}\Big) D(x)$$

et comme k est de caractéristique nulle l'élément $\sum_{i=0}^r a_i \, i \, x^{i-1}$ est non nul dans $\boldsymbol{K}$ (x est séparable sur $\boldsymbol{A}_\infty$). Par conséquent, $D(x)$ est uniquement déterminé par l'égalité :

$$D(x) = -\frac{\sum_{i=0}^r x^i \, d_{\boldsymbol{A}_\infty}(a_i)}{\sum_{i=0}^r a_i \, i \, x^{i-1}} \in \boldsymbol{K} \otimes_{\boldsymbol{L}} \Omega_{\boldsymbol{L}/k}$$

et la formule $D\big(\sum c_i x^i\big) = \sum x^i \, d_{\boldsymbol{L}_\infty}(c_i) + \sum c_i \, i \, x^{i-1} D(x)$ définit une k-dérivation de $\boldsymbol{A}_\infty[x]$ qui prolonge $d_{\boldsymbol{A}_\infty}$, mais ceci contredit, à nouveau, la maximalité de $(\boldsymbol{A}_\infty, d_{\boldsymbol{A}_\infty})$.

La conclusion $\boldsymbol{A}_\infty = \boldsymbol{K}$ s'impose et ceci termine la démonstration. ∎

Cette proposition et sa démonstration permettent de caractériser la dépendance linéaire d'une famille finie de différentielles exactes $dx_1, \ldots, dx_r \in \Omega_{\boldsymbol{K}/k}$ en termes de dépendance algébrique de la famille $\{x_1, \ldots, x_r\}$.

1.6.5. Corollaire : *Soit $\boldsymbol{K}$ une extension d'un corps k de caractéristique nulle.*

a) *Le noyau de $d_{\boldsymbol{K}/k} : \boldsymbol{K} \to \Omega_{\boldsymbol{K}/k}$ est l'ensemble d'éléments de $\boldsymbol{K}$ algébriques sur k.*

b) *$\boldsymbol{K}$ est une extension algébrique de k, si et seulement si $\Omega_{\boldsymbol{K}/k} = \boldsymbol{0}$.*

c) *Soit* $\{x_1, \ldots, x_r\} \subseteq \boldsymbol{K}$. *Les différentielles* $dx_1, \cdots, dx_r \in \Omega_{\boldsymbol{K}/k}$ *sont* $\boldsymbol{K}$-*linéairement dépendantes, si et seulement si, les éléments* $x_1, \ldots, x_r$ *sont algébriquement dépendants sur* k.

Démonstration : Pour chaque $x \in \boldsymbol{K}$ on note $k(x)$ le sous-corps de $\boldsymbol{K}$ engendré par k et x.

a) Dans la fin de la preuve de 1.6.4 nous avons montré que $\Omega_{k(x)/k} = \mathbf{0}$, si et seulement si, x est algébrique sur k. L'assertion (a) découle alors de remarquer que pour chaque triplet $k \subseteq k(x) \subseteq \boldsymbol{K}$ nous avons des inclusions $\Omega_{k(x)/k} \subseteq \boldsymbol{K} \otimes \Omega_{k(x)/k} \subseteq \Omega_{\boldsymbol{K}/k}$ (1.6.4) qui sont compatibles aux différentielles de sorte que :

$$x \in \boldsymbol{K} \text{ est algébrique sur } k \iff d_{k(x)/k}(x) = 0 \iff d_{\boldsymbol{K}/k}(x) = 0$$

b) Conséquence immédiate de (a).

c) L'assertion (a) correspond au cas $r = 1$. Dans le cas général on remarque que dx_r est nul dans $\Omega_{\boldsymbol{K}/k(x_1,\ldots,x_{r-1})}$ et la conclusion résulte une fois de plus de (a). ∎

1.7 Limites inductives et projectives des modules de différentielles relatives

Limites inductives. Soit $(\mathfrak{A}, \preccurlyeq)$ un ensemble partiellement ordonné filtrant supérieurement et soit $\mathcal{S} = \{A_i, \varphi_{i,j} : \boldsymbol{A}_i \to \boldsymbol{A}_j \mid i, j \in \mathfrak{A}\,, i \preccurlyeq j\}$ un système inductif d'homomorphismes de $\boldsymbol{R}$-algèbres. Notons $\boldsymbol{A} := \varinjlim_{\mathfrak{A}} \boldsymbol{A}_i$ la limite inductive de ce système. Pour tout $\boldsymbol{A}$-module $\boldsymbol{M}$ le foncteur $\mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\_, \boldsymbol{M})$ transforme $\mathcal{S}$ en un système projectif :

$$\mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\mathcal{S}, \boldsymbol{M}) = \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}_i, \boldsymbol{M})\,, \qquad i \in \mathfrak{A}\,; \\ \mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\varphi_{i,j}, \boldsymbol{M}) : \mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}_j, \boldsymbol{M}) \to \mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}_i, \boldsymbol{M})\,, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad i, j \in \mathfrak{A}\,, i \preccurlyeq j \end{array} \right\}$$

d'où une application canonique $\mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\varinjlim_{\mathfrak{A}} \boldsymbol{A}_i, \boldsymbol{M}) \to \varprojlim_{\mathfrak{A}} \mathrm{Der}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}_i, \boldsymbol{M})$ qui est un isomorphisme puisque $(\mathfrak{A}, \preccurlyeq)$ est filtrant supérieurement (le vérifier !).

Dans le même ordre d'idées, le foncteur $\Omega_{\_,\boldsymbol{R}}$ appliqué au système $\mathcal{S}$ donne lieu à un système inductif de $\boldsymbol{R}$-modules :

$$\Omega_{\mathcal{S},\boldsymbol{R}} = \left\{ \begin{array}{l} \Omega_{\boldsymbol{A}_i,\boldsymbol{R}}\,, \qquad i \in \mathfrak{A}\,; \\ \Omega_{\varphi_{i,j},\boldsymbol{R}} : \Omega_{\boldsymbol{A}_i,\boldsymbol{R}} \to \Omega_{\boldsymbol{A}_j,\boldsymbol{R}}\,, \quad i, j \in \mathfrak{A}\,, i \preccurlyeq j \end{array} \right\}$$

d'où une application canonique $\varinjlim_{\mathfrak{A}} \Omega_{\boldsymbol{A}_i/\boldsymbol{R}} \to \Omega_{\varinjlim_{\mathfrak{A}} \boldsymbol{A}_i/\boldsymbol{R}}$ dont la bijectivité est conséquence de la remarque du paragraphe précédent. On a donc :

1.7.1. Proposition : *Pour tout système inductif filtrant supérieurement d'homomorphismes de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\mathcal{S} = \{A_i, \varphi_{i,j} : \boldsymbol{A}_i \to \boldsymbol{A}_j \mid i,j \in \mathfrak{A}, i \preccurlyeq j\}$ l'application canonique*

$$\boxed{\varinjlim_{\mathfrak{A}} \Omega_{\boldsymbol{A}_i/\boldsymbol{R}} \xrightarrow[\equiv]{} \Omega_{\varinjlim_{\mathfrak{A}} \boldsymbol{A}_i/\boldsymbol{R}}}$$

*est **bijective**. Autrement dit, le foncteur $\Omega_{\_,\boldsymbol{R}} : \mathrm{Alg}(\boldsymbol{R}) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}(\boldsymbol{R})$ commute avec la limite de systèmes inductifs filtrants supérieurement.*

Limites projectives. Contrairement à la limite inductive, $\Omega_{\_,\boldsymbol{R}}$ ***ne commute pas*** aux limites projectives. Il existe certes une application $\Omega_{\varprojlim_{\mathfrak{A}} \boldsymbol{A}_i,\boldsymbol{R}} \to \varprojlim_{\mathfrak{A}} \Omega_{\boldsymbol{A}_i,\boldsymbol{R}}$ canonique, mais elle peut ne pas être bijective comme le montre l'exemple suivant dont la vérification de certains détails est laissée aux soins du lecteur.

1.7.2. Exemple : Soit $\boldsymbol{R}$ un anneau commutatif arbitraire et notons $\iota : \boldsymbol{R}[X] \hookrightarrow \boldsymbol{R}[[X]]$ l'injection canonique de l'anneau des polynômes dans l'anneau des séries formelles à une indéterminée et à coefficients dans $\boldsymbol{R}$.

L'application $(\_)' : \boldsymbol{R}[[X]] \to \boldsymbol{R}[[X]]\,dx$ qui associe à une série formelle $\sum_j a_j X^j$ l'élément $\big(\sum_j a_j\, j\, X^{j-1}\big)\, dX$ est clairement un prolongement de la dérivation $d_{\boldsymbol{R}[X]/\boldsymbol{R}}$ de sorte que par le lemme 1.6.2 la seconde suite fondamentale :

$$\mathbf{0} \to \boldsymbol{R}[[X]]\,dX \xleftarrow{\quad}\!\!\!\!\!\xrightarrow{\quad} \Omega_{\boldsymbol{R}[[X]]/\boldsymbol{R}} \xleftarrow{\quad}\!\!\!\!\!\xrightarrow{\quad} \Omega_{\boldsymbol{R}[[X]]/\boldsymbol{R}[X]} \to \mathbf{0}$$

est exacte et scindée.

Pour chaque $m \in \mathbb{N}$, posons $\boldsymbol{A}_m := \boldsymbol{R}[X]/\langle X^m \rangle$. On a

$$\Omega_{\boldsymbol{A}_m/\boldsymbol{R}} \equiv \boldsymbol{R}[X]/\langle X^m, mX^{m-1}\rangle\, dX$$

et le système projectif défini par les surjections canoniques $\boldsymbol{A}_{m+1} \twoheadrightarrow \boldsymbol{A}_m$ induit un système projectif $\Omega_{\boldsymbol{A}_{m+1}/\boldsymbol{R}} \to \Omega_{\boldsymbol{A}_m/\boldsymbol{R}}$. On a des isomorphismes canoniques :

$$\boldsymbol{R}[[X]] \equiv \varprojlim_m \boldsymbol{A}_m \quad \text{et} \quad \boldsymbol{R}[[X]]\,dX \equiv \varprojlim_n \Omega_{\boldsymbol{A}_m/\boldsymbol{R}}$$

et la limite projective des dérivations $d_{\boldsymbol{A}_m/\boldsymbol{R}} : \boldsymbol{A}_m \to \Omega_{\boldsymbol{A}_m/\boldsymbol{R}}$ s'identifie $(\_)' : \boldsymbol{R}[[X]] \to \boldsymbol{R}[[X]]\,dx$.

Par conséquent, la commutation de $\Omega_{\_/\boldsymbol{R}}$ aux limites projectives se traduit dans cet exemple dans la condition d'annulation $\Omega_{\boldsymbol{R}[[X]]/\boldsymbol{R}[X]} = \mathbf{0}$.

Supposons maintenant $\boldsymbol{R}$ de caractéristique nulle et de cardinal dénombrable ($\boldsymbol{R} = \mathbb{Q}$ p. ex.). Si $\Omega_{\boldsymbol{R}[[X]]/\boldsymbol{R}[X]}$ était nul, on aurait $\Omega_{\boldsymbol{R}((X))/\boldsymbol{R}(X)} = \mathbf{0}$ par localisation, et le corps $\boldsymbol{R}((X))$ serait algébrique sur $\boldsymbol{R}(X)$ d'après la corollaire 1.6.5.

Le corps $\boldsymbol{R}((X))$ serait donc de cardinal dénombrable puisqu'il en est ainsi de $\boldsymbol{R}(X)$. Or, nous savons par ailleurs que $\boldsymbol{R}((X))$ a le cardinal du continu, d'où une contradiction.

(Les arguments du paragraphe précédents montrent également que le $\boldsymbol{R}[[X]]$-module $\Omega_{\boldsymbol{R}[[X]]/\boldsymbol{R}[X]}$ n'est même pas de type fini ou dénombrable.)

Avant de conclure cet exemple il est intéressant d'interpréter chaque terme de la décomposition :

$$\Omega_{\boldsymbol{R}[[X]]/\boldsymbol{R}} \equiv \boldsymbol{R}[[X]]\, dX \oplus \Omega_{\boldsymbol{R}[[X]]/\boldsymbol{R}[X]}$$

induite par la dérivation $(\_)'$ lorsque l'on prend en considération la topologie X-adique. Dans ce cas, le module $\Omega_{\boldsymbol{R}[[X]]/\boldsymbol{R}[X]}$ contient l'adhérence de zéro dans $\Omega_{\boldsymbol{R}[[X]]/\boldsymbol{R}}$ puisque de supplémentaire $\boldsymbol{R}[[X]]\, dX$ séparé. Mais réciproquement, comme la différentielle $d := d_{\boldsymbol{R}[[X]]/\boldsymbol{R}[X]}$ s'annule sur les polynômes, son action sur une série formelle $\sigma = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i\, X^i$ ne dépend que du germe à l'infini de la suite $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et pour chaque $m \in \mathbb{N}$ on a :

$$d(\sigma) = d(X^m\sigma_m) = mX^{m-1}\sigma_m\, dX + X^m d(\sigma_m) \subseteq X^{m-1} \cdot \Omega_{\boldsymbol{R}[[X]]/\boldsymbol{R}}$$

où nous avons noté $\sigma_m := \sum_{i\geqslant m} a_i\, X^{i-m}$.

Par conséquent, le module $\Omega_{\boldsymbol{R}[[X]]/\boldsymbol{R}[X]}$ est l'adhérence de $0 \in \Omega_{\boldsymbol{R}[[X]]/\boldsymbol{R}}$ pour la topologie X-adique et $\boldsymbol{R}[[X]]\, dX$ s'identifié au module séparé associé $\Omega_{\boldsymbol{R}[[X]]/\boldsymbol{R}}$.

§ 2. Complexe de de Rham d'une algèbre

2.1 Différentielles relatives sur un module

2.1.1. Définition : Soit $\boldsymbol{R}$ un anneau et $\boldsymbol{A}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre. Pour tout $\boldsymbol{A}$-module $\boldsymbol{M}$ et tout sous-$\boldsymbol{R}$-module $\boldsymbol{L}$ qui engendré $\boldsymbol{M}$, *i.e.* $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{L} = \boldsymbol{M}$, on dit qu'une application de D de $\boldsymbol{M}$ à valeurs dans un $\boldsymbol{A}$-module $\boldsymbol{N}$ est une « *dérivation de $\boldsymbol{M}$ relative à $\boldsymbol{L}$ à valeurs dans $\boldsymbol{N}$* » si elle vérifie les deux propriétés suivantes :

$$\begin{cases} D : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{N} \quad \text{est un morphisme de } \boldsymbol{R}\text{-modules ;} \\ D(a_1a_2{\cdot}\ell) = a_2{\cdot}D(a_1{\cdot}\ell) + a_1{\cdot}D(a_2{\cdot}\ell), \text{ pour tous } a_i \in \boldsymbol{A} \text{ et } \ell \in \boldsymbol{L}. \end{cases}$$

On notera $\mathrm{Der}_{\boldsymbol{L}}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N})$ l'ensemble de telles applications.

2.1.2. Remarque : Soit $D \in \mathrm{Der}_{\boldsymbol{L}}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N})$, pour tout $\ell \in \boldsymbol{L}$ on a $D(\ell) = D(1{\cdot}1{\cdot}\ell) = D(\ell) + D(\ell)$ et par conséquent $D(\ell) = 0$.

2.1.3. Remarque : Lorsque $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{A}$ et que $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{R}{\cdot}\mathbf{1}_{\boldsymbol{A}}$, on retrouve la notion de $\boldsymbol{R}$-dérivations de $\boldsymbol{A}$ (*cf.* 1.1.1).

Comme dans le cas des dérivations d'une algèbre, $\mathrm{Der}_{\boldsymbol{L}}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{N})$ est un $\boldsymbol{A}$-module et l'on a un foncteur additif $\mathrm{Der}_{\boldsymbol{L}}(\boldsymbol{M},\_) : \mathrm{Mod}(\boldsymbol{A}) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}(\boldsymbol{A})$ qui est représentable comme nous allons le démontrer dans ce qui suit.

Par l'hypothèse faite sur l'inclusion $\boldsymbol{L} \subseteq \boldsymbol{M}$, le morphisme de $\boldsymbol{A}$-modules $\pi : \bigoplus_{\ell\in\boldsymbol{L}}\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{M}$ défini par $\pi(\mathbf{e}_\ell) = \ell$, est surjectif et, pour chaque $D \in \mathrm{Der}_{\boldsymbol{L}}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{N})$, la restriction de la composée $D\circ\pi$ à chaque sous-module de coordonnées $\boldsymbol{A}{\cdot}\mathbf{e}_\ell$ est un $\boldsymbol{R}$-dérivation de $\boldsymbol{A}$ à valeurs dans $\boldsymbol{N}$. Il existe alors un morphisme de $\boldsymbol{A}$-modules $\tilde\pi : \bigoplus_{\ell\in\boldsymbol{L}}\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \to \boldsymbol{N}$, nul sur le sous-$\boldsymbol{A}$-module $\mathcal{K} := \langle(\oplus d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}})(\ker(\pi))\rangle$ et rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{\ell\in\boldsymbol{L}}\boldsymbol{A} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\oplus d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}"'] & \boldsymbol{M} \to \mathbf{0} \arrow[d, "D"] \\
\bigoplus_{\ell\in\boldsymbol{L}}\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \arrow[r, "\tilde\pi"] & \boldsymbol{N}
\end{tikzcd}$$

Réciproquement, lorsque l'on se donne un morphisme $\alpha : \bigoplus_{\ell\in\boldsymbol{L}}\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \to \boldsymbol{N}$ de $\boldsymbol{A}$-modules qui s'annule sur $\mathcal{K}$, la composée $\alpha\circ(\oplus d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}})$ définit un élément de $\mathrm{Der}_{\boldsymbol{L}}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{N})$ et nous avons ainsi un morphisme de $\boldsymbol{A}$-modules :

$$\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}}\Big(\frac{\bigoplus_{\ell\in\boldsymbol{L}}\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}}{\mathcal{K}},\boldsymbol{N}\Big) \xrightarrow[\simeq]{} \mathrm{Der}_{\boldsymbol{L}}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{N})\,; \tag{‡}$$

surjectif d'après ce qui précède et injectif puisque $\bigoplus_\ell d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A})$ est générateur de $\bigoplus_{\ell\in\boldsymbol{L}}\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$. On remarque alors que par l'exactitude à droite du produit tensoriel, on a une suite exacte :

$$\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}\otimes_{\boldsymbol{A}}\ker(\pi) \xrightarrow{\bar\nu} \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}\otimes_{\boldsymbol{A}}\bigoplus_{\ell\in\boldsymbol{L}}\boldsymbol{A} = \bigoplus_{\ell\in\boldsymbol{L}}\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \xrightarrow{\bar\pi} \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}\otimes_{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{M} \to \mathbf{0}\,,$$

où l'image de $\bar\nu$ est contenue dans $\mathcal{K}$ puisque, pour chaque $v \in \ker(\pi)$, on a $v = \sum_\ell a_\ell\,\mathbf{e}_\ell$ et alors, $\bar\nu(d(a)\otimes\mathbf{e}_v) = \sum_\ell d(a)a_\ell\,\mathbf{e}_\ell = \sum_\ell d(a\,a_\ell)\,\mathbf{e}_\ell - \sum_\ell a\,d(a_\ell)\,\mathbf{e}_\ell$. Il s'ensuit que $\bar\pi$ induit un isomorphisme :

$$\frac{\bigoplus_{\ell\in\boldsymbol{L}}\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}}{\mathcal{K}} \xrightarrow[\simeq]{(\bar\pi)} \frac{\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}\otimes_{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{M}}{\bar\pi(\mathcal{K})}$$

où $\bar\pi(\mathcal{K})$ est le sous-$\boldsymbol{A}$-module de $\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}\otimes_{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{M}$ engendré par les tenseurs de la forme $\sum_i d(a_i)\otimes\ell_i$ où $\ell_i \in \boldsymbol{L}$ et tels que $\sum_i a_i\,\ell_i = 0$. Dans la suite on notera :

$$\boxed{\Omega(\boldsymbol{M}/\boldsymbol{L}) := \frac{\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \otimes_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{M}}{\boldsymbol{A}\cdot\big\langle \sum_i d(a_i)\otimes \ell_i \mid \sum_i a_i\,\ell_i = 0\big\rangle}} \tag{24}$$

Notons que l'application $d_{\boldsymbol{M}/\boldsymbol{L}} : \boldsymbol{M} \to \Omega(\boldsymbol{M}/\boldsymbol{L})$ qui associe à un élément $m \in \boldsymbol{M}$ la classe du tenseur $\sum d(a_i)\otimes \ell_i$ lorsque $m = \sum_i a_i\,\ell_i$ avec $\ell_i \in \boldsymbol{L}$, est bien définie et c'est un élément de $\operatorname{Der}_{\boldsymbol{L}}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{N})$. Soulignons également le fait que $d_{\boldsymbol{M}/\boldsymbol{L}}(\boldsymbol{M})$ est un sous-$\boldsymbol{R}$-module de $\Omega(\boldsymbol{M}/\boldsymbol{L})$ qui l'engendre en tant que $\boldsymbol{A}$-module.

Pour terminer, l'isomorphisme (‡) est donné maintenant par :

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}_{\boldsymbol{A}}\big(\Omega(\boldsymbol{M}/\boldsymbol{L}),\boldsymbol{N}\big) &\xrightarrow[\simeq]{} \operatorname{Der}_{\boldsymbol{L}}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{N})\\ \alpha &\longmapsto \alpha\circ d_{\boldsymbol{M}/\boldsymbol{L}}\end{aligned}$$

et nous avons démontré la proposition suivante.

2.1.4. Proposition : *Pour tout $\boldsymbol{A}$-module $\boldsymbol{M}$ et tout sous-$\boldsymbol{R}$-module $\boldsymbol{L}$ vérifiant $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{L} = \boldsymbol{M}$, le couple $\big(\Omega(\boldsymbol{M}/\boldsymbol{L}), d_{\boldsymbol{M}/\boldsymbol{L}}\big)$ représente le foncteur* $\operatorname{Der}_{\boldsymbol{L}}(\boldsymbol{M},\_)$.

De plus, $d_{\boldsymbol{M}/\boldsymbol{L}}(\boldsymbol{M})$ est un sous-$\boldsymbol{R}$-module de $\Omega(\boldsymbol{M}/\boldsymbol{L})$ qui l'engendre en tant que $\boldsymbol{A}$-module.

2.1.5. Fonctorialité. Notons $\operatorname{Mod}_{\boldsymbol{R},\boldsymbol{A}}$ la catégorie des couples $(\boldsymbol{L},\boldsymbol{M})$ où $\boldsymbol{M}$ est un $\boldsymbol{A}$-module et $\boldsymbol{L}$ est un sous-$\boldsymbol{R}$-module de $\boldsymbol{M}$ tel que $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{L} = \boldsymbol{M}$. Les morphismes entre deux couples $(\boldsymbol{L},\boldsymbol{M}) \to (\boldsymbol{L}',\boldsymbol{M}')$ étant les morphismes $\alpha : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{M}'$ de $\boldsymbol{A}$-modules tels que $\alpha(\boldsymbol{L}) \subseteq \boldsymbol{L}'$.

Soit $\boldsymbol{N}$ un $\boldsymbol{A}$-module. Pour tout morphisme $\alpha : (\boldsymbol{L},\boldsymbol{M}) \to (\boldsymbol{L}',\boldsymbol{M}')$ de la catégorie $\operatorname{Mod}_{\boldsymbol{R},\boldsymbol{A}}$ et chaque $D \in \operatorname{Der}_{\boldsymbol{L}'}(\boldsymbol{M}',\boldsymbol{N})$ la composée $D\circ\alpha$ appartient à $\operatorname{Der}_{\boldsymbol{L}}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{N})$. On en déduit une application canonique de $\boldsymbol{A}$-modules

$$\Omega(\alpha) : \Omega(\boldsymbol{M}/\boldsymbol{L}) \to \Omega(\boldsymbol{M}'/\boldsymbol{L}')$$

et la correspondance $(\boldsymbol{L},\boldsymbol{M}) \rightsquigarrow \Omega(\boldsymbol{M}/\boldsymbol{L})$, $\alpha \rightsquigarrow \Omega(\alpha)$ est fonctorielle et covariante de la catégorie $\operatorname{Mod}_{\boldsymbol{R},\boldsymbol{A}}$ vers la catégorie $\operatorname{Mod}(\boldsymbol{A})$.

2.2 Le foncteur $(\_) \rightsquigarrow \mathsf{A}^*_{(\_)}\big(\Omega_{(\_)/\boldsymbol{R}}\big)$

Soit $\boldsymbol{R}$ un anneau arbitraire. On note $\mathfrak{C}^{0\leqslant *}(\boldsymbol{R})$ la catégorie (abélienne) des complexes positivement gradués de $\boldsymbol{R}$-modules. Rappelons qu'un objet de $\mathfrak{C}^{0\leqslant *}(\boldsymbol{R})$

est la donnée d'un couple $(\boldsymbol{M}^*, d_{\boldsymbol{M},*})$, où $\boldsymbol{M}^*$ est un $\boldsymbol{R}$-module muni d'une décomposition en somme directe de $\boldsymbol{R}$-modules :

$$\boldsymbol{M}^* := \boldsymbol{M}^0 \oplus \boldsymbol{M}^1 \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{M}^k \oplus \cdots$$

et où $d_{\boldsymbol{M},*} : \boldsymbol{M}^* \to \boldsymbol{M}^*$ est un morphisme de $\boldsymbol{R}$-module gradué de degré 1 et de carré nul, autrement dit, c'est une somme de morphismes de $\boldsymbol{R}$-modules $d_{\boldsymbol{M},k} : \boldsymbol{M}^k \to \boldsymbol{M}^{k+1}$, vérifiant $d_{\boldsymbol{M},k+1} \circ d_{\boldsymbol{M},k} = 0$. Enfin, un morphisme α_* entre deux complexes $(\boldsymbol{M}^*, d_{\boldsymbol{M},*})$ et $(\boldsymbol{N}^*, d_{\boldsymbol{N},*})$ est la donnée d'une famille de morphismes de $\boldsymbol{R}$-modules $\alpha_k : \boldsymbol{M}^k \to \boldsymbol{N}^k$ vérifiant $\alpha_{k+1} \circ d_{\boldsymbol{M},k} = d_{\boldsymbol{N},k} \circ \alpha_k$.

2.2.1. Le foncteur $\mathfrak{D}^*$: Alg$(\boldsymbol{R}) \rightsquigarrow \mathfrak{C}^{0\leqslant *}(\boldsymbol{R})$. Nous définissons maintenant un foncteur $\mathfrak{D}^*$ de la catégorie Alg$(\boldsymbol{R})$ des $\boldsymbol{R}$-algèbres vers la catégorie $\mathfrak{C}^{0\leqslant *}(\boldsymbol{R})$.

Étant donnée une $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$, on pose $\mathfrak{D}^0(\boldsymbol{A}) := \boldsymbol{A}$, $\mathfrak{D}^1(\boldsymbol{A}) := \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$ et $d_{\mathfrak{D}(\boldsymbol{A}),0} := d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$. Puis, on définit récursivement $d_{\mathfrak{D}(\boldsymbol{A}),k}$ et $\mathfrak{D}^{k+1}(\boldsymbol{A})$ par :

$$\begin{cases} d_{\mathfrak{D}(\boldsymbol{A}),k} := d_{\mathfrak{D}^k(\boldsymbol{A})/\mathrm{im}(d_{\mathfrak{D}(\boldsymbol{A}),k-1})}\,; \\ \mathfrak{D}^{k+1}(\boldsymbol{A}) := \Omega\big(\mathfrak{D}^k(\boldsymbol{A})/\mathrm{im}(d_{\mathfrak{D}(\boldsymbol{A}),k-1})\big)\,; \end{cases}$$

on a donc :

$$\xrightarrow{d_{\mathfrak{D}(\boldsymbol{A}),k-1}} \mathfrak{D}^k(\boldsymbol{A}) \xrightarrow[d_{\mathfrak{D}^k(\boldsymbol{A})/\mathrm{im}(d_{\mathfrak{D}(\boldsymbol{A}),k-1})}]{d_{\mathfrak{D}(\boldsymbol{A}),k}} \Omega\big(\mathfrak{D}^k(\boldsymbol{A})/\mathrm{im}(d_{\mathfrak{D}(\boldsymbol{A}),k-1})\big) =: \mathfrak{D}^{k+1}(\boldsymbol{A})$$

et les trois premiers termes de $\mathfrak{D}^*(\boldsymbol{A})$ sont :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{0} \to \mathfrak{D}^0(\boldsymbol{A}) & \xrightarrow{d_{\mathfrak{D}(\boldsymbol{A}),0}} & \mathfrak{D}^1(\boldsymbol{A}) & \xrightarrow{\qquad d_{\mathfrak{D}(\boldsymbol{A}),1} \qquad} & \mathfrak{D}^2(\boldsymbol{A}) \\ \| & & \| & & \| \\ \mathbf{0} \to \quad \boldsymbol{A} & \xrightarrow{d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}} & \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} & \xrightarrow{d_{\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}/\mathrm{im}(d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}})}} & \Omega\big(\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}/\mathrm{im}(d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}})\big) \end{array}$$

Le couple $(\mathfrak{D}(\boldsymbol{A})^*, d_{\mathfrak{D}(\boldsymbol{A}),*})$ est clairement un objet de $\mathfrak{C}^{0\leqslant *}(\boldsymbol{R})$ et nous définissons le foncteur $\mathfrak{D}^* : \mathrm{Alg}(\boldsymbol{R}) \rightsquigarrow \mathfrak{C}^{0\leqslant *}(\boldsymbol{R})$ par la correspondance $\boldsymbol{A} \rightsquigarrow (\mathfrak{D}^*(\boldsymbol{A}), d_{\mathfrak{D}(\boldsymbol{A}),*})$ et qui associe à chaque morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\alpha : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$, le morphisme de complexes $\mathfrak{D}(\alpha)_*$ caractérisé par la proposition suivante.

2.2.2. Proposition : *Pour tout morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\alpha : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ il existe **un et un seul** morphisme de complexes de **$\boldsymbol{A}$-modules***

$$\mathfrak{D}(\alpha)_* : (\mathfrak{D}^*(\boldsymbol{A}), d_{\mathfrak{D}(\boldsymbol{A}),*}) \to (\mathfrak{D}^*(\boldsymbol{B}), d_{\mathfrak{D}(\boldsymbol{B}),*})$$

vérifiant $\mathfrak{D}(\alpha)_0 = \alpha$.

Démonstration : On montre successivement l'existence et unicité de chaque composante $\mathfrak{D}(\alpha)_k$. Lorsque $k = 1$, l'existence et unicité découle de la propriété universelle des modules des différentielles relatives, on pose donc $\mathfrak{D}(\alpha)_1 := \Omega(\alpha)$ et l'on a unicité du diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{0} \arrow[r] & \boldsymbol{A} \arrow[r, "d_{\mathfrak{D}(\boldsymbol{A}),0}"] \arrow[d, "\alpha"'] & \mathfrak{D}^1(\boldsymbol{A}) \arrow[d, "\Omega(\alpha)"', "\mathfrak{D}(\alpha)_1"] & \\ \mathbf{0} \arrow[r] & \boldsymbol{B} \arrow[r, "d_{\mathfrak{D}(\boldsymbol{B}),0}"] & \mathfrak{D}^1(\boldsymbol{B}) \arrow[r, "d_{\mathfrak{D}(\boldsymbol{B}),1}"] & \mathfrak{D}^2(\boldsymbol{B}) \end{tikzcd}$$

On remarquera que la composée $\psi_1 := d_{\mathfrak{D}(\boldsymbol{B}),1} \circ \mathfrak{D}(\alpha)_1$ et non seulement nulle sur $\operatorname{im}(d_{\mathfrak{D}(\boldsymbol{A}),0})$ mais c'est également une dérivation du $\boldsymbol{A}$-module $\mathfrak{D}^1(\boldsymbol{A})$ relative à $\operatorname{im}(d_{\mathfrak{D}(\boldsymbol{A}),0})$ et à valeurs dans $\mathfrak{D}^2(\boldsymbol{B})$ (vu comme $\boldsymbol{A}$-module) ce qui résulte immédiatement des égalités :

$$\begin{aligned} \psi_1\big(a_1a_2{\cdot}d(a_3)\big) &= d\big(a_1a_2{\cdot}\mathfrak{D}(\alpha)_1(d(a_3))\big) = d(a_1a_2{\cdot}d(\alpha(a_3))) \\ &= a_2{\cdot}d(a_1{\cdot}d(\alpha(a_3))) + a_1{\cdot}d(a_2{\cdot}d(\alpha(a_3))) \\ &= a_2{\cdot}\psi_1(a_1{\cdot}d(a_3)) + a_1{\cdot}\psi_1(a_2{\cdot}d(a_3)) \end{aligned}$$

La propriété universelle du couple $(\mathfrak{D}^2(\boldsymbol{A}), d_{\mathfrak{D}(\boldsymbol{A}),1})$ intervient alors pour assurer l'existence et unicité d'un morphisme de $\boldsymbol{A}$-modules $\Omega(\alpha)_2 : \mathfrak{D}^2(\boldsymbol{A}) \to \mathfrak{D}^2(\boldsymbol{B})$ rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{0} \arrow[r] & \boldsymbol{A} \arrow[r, "d_{\mathfrak{D}(\boldsymbol{A}),0}"] \arrow[d, "\alpha"'] & \mathfrak{D}^1(\boldsymbol{A}) \arrow[r, "d_{\mathfrak{D}(\boldsymbol{A}),1}"] \arrow[d, "\mathfrak{D}(\alpha)_1"'] & \mathfrak{D}^2(\boldsymbol{A}) \arrow[d, "\mathfrak{D}(\alpha)_2"'] \\ \mathbf{0} \arrow[r] & \boldsymbol{B} \arrow[r, "d_{\mathfrak{D}(\boldsymbol{B}),0}"] & \mathfrak{D}^1(\boldsymbol{B}) \arrow[r, "d_{\mathfrak{D}(\boldsymbol{B}),1}"] & \mathfrak{D}^2(\boldsymbol{B}) \end{tikzcd}$$

L'itération de ce procédé ne présente plus aucune difficulté et démontre la proposition. ∎

2.3 Catégorie d'algèbres différentielles graduées

2.3.1. Définitions et notations : On note $\operatorname{Adg}(\boldsymbol{R})$ la catégorie suivante :

Objets de $\operatorname{Adg}(\boldsymbol{R})$. Ce sont les couples $(\mathscr{A}^*, d_{\mathscr{A}})$ où $\mathscr{A}^*$ est une $\boldsymbol{R}$-algèbre munie d'une décomposition en somme directe de $\boldsymbol{R}$-modules : $\mathscr{A}^* := \mathscr{A}^0 \oplus \mathscr{A}^1 \oplus \mathscr{A}^2 \oplus \cdots \oplus \mathscr{A}^k \oplus \cdots$, dont la multiplication est soumise aux contraintes suivantes :

$$\begin{cases} \mathscr{A}^{k_1}{\cdot}\mathscr{A}^{k_2} \subseteq \mathscr{A}^{k_1+k_2}, & \textit{pour tous } k_i \in \mathbb{N}\,; \\ a_{k_1}a_{k_2} = (-1)^{k_1k_2}a_{k_2}a_{k1}, & \textit{pour tous } k_i \in \mathbb{N} \textit{ et } a_i \in \mathscr{A}^i \textit{ (anticommutativité)}\,; \end{cases}$$

et $d_{\mathscr{A}} : \mathscr{A}^* \to \mathscr{A}^*$ est un morphisme de $\boldsymbol{R}$-modules gradués de degré 1 de carré nul et une dérivation d'algèbre anticommutative, *i.e.*

$$\begin{cases} d_{\mathscr{A}} \circ d_{\mathscr{A}} = 0\,; \\ d_{\mathscr{A}}(a_k\, a) = d_{\mathscr{A}}(a_k)\, a + (-1)^k a_k\, d_{\mathscr{A}}(a)\,, \quad \textit{pour tous } k \in \mathbb{N},\ a_k \in \mathscr{A}^k \textit{ et } a \in \mathscr{A}^*. \end{cases}$$

Un objet de $\mathrm{Adg}(\boldsymbol{R})$ sera appelé une « *$\boldsymbol{R}$-algèbre différentielle graduée (anticommutative)* ».

Morphismes de $\mathbf{Adg}(\boldsymbol{R})$. Ce sont les morphismes de $\boldsymbol{R}$-algèbres graduées de degré nul $\alpha : (\mathscr{A}^*, d_{\mathscr{A}}) \to (\mathscr{B}^*, d_{\mathscr{B}})$, qui commutent aux différentielles.

On note $\mathrm{Alt}(\boldsymbol{R})$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Adg}(\boldsymbol{R})$ des « *algèbres alternées* », *i.e.* des $\boldsymbol{R}$-algèbres différentielles graduées $\mathscr{A}^*$ vérifiant la condition d'« *alternance* » :

$$\{\, x^2 = 0\,, \quad \textit{pout tout } x \in \mathscr{A}^* \textit{ homogène de degré impair.}$$

(Cette condition est évidemment superflue lorsque 2 est inversible dans $\boldsymbol{R}$.)

2.3.2. Algèbres anticommutatives & algèbres alternées. Étant donné un $\boldsymbol{A}$-module $\boldsymbol{M}$, on note $\mathsf{T}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M}) := \boldsymbol{A} \oplus \boldsymbol{M} \oplus \boldsymbol{M}^{\otimes 2} \oplus \boldsymbol{M}^{\otimes 3} \cdots$ l'algèbre tensorielle de $\boldsymbol{M}$ sur $\boldsymbol{A}$ et :

$$\begin{cases} \mathsf{A}^*_{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{M} := \mathsf{T}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M}) / \mathsf{T}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M}) \cdot \langle m_1 \otimes m_2 + m_2 \otimes m_1 \rangle_{m_i \in \boldsymbol{M}} \cdot \mathsf{T}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M}) \\ \bigwedge^r_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{M} := \mathsf{T}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M}) / \mathsf{T}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M}) \cdot \langle m \otimes m \rangle_{m \in \boldsymbol{M}} \cdot \mathsf{T}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M}) \end{cases}$$

On a une surjection canonique évidente $\mathsf{A}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M}) \twoheadrightarrow \bigwedge^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M})$ de noyau de 2-torsion. Dans la suite on appellera « *algèbre anticommutative du $\boldsymbol{A}$-module $\boldsymbol{M}$* » l'algèbre $\mathsf{A}^*_{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{M}$, et « *algèbre alternée du $\boldsymbol{A}$-module $\boldsymbol{M}$* » l'algèbre $\bigwedge^*_{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{M}$.

Mise en garde sur la notation. L'opération de multiplication dans les algèbres $\mathsf{A}^*_{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{M}$ et $\bigwedge^*_{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{M}$ sera notée par le même symbole '$\wedge$'.

Rappelons le résultat suivant démontré dans [B₁] (A III pp. 57, 69, 73, 78, 83).

2.3.3. Proposition : *Soit $\boldsymbol{A}$ un anneau commutatif. Pour chaque $\boldsymbol{A}$-module $\boldsymbol{M}$, notons $\mathsf{T}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M})$, $\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M})$, $\mathsf{A}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M})$, et $\bigwedge^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M})$ les algèbres respectivement tensorielle, symétrique, anticommutative et alternée du $\boldsymbol{A}$-module $\boldsymbol{M}$. Pour tout morphisme **surjectif** de $\boldsymbol{A}$-modules $\alpha : \boldsymbol{M}_1 \twoheadrightarrow \boldsymbol{M}_2$, les morphismes d'algèbres graduées induits :*

$$\begin{array}{ll} \mathsf{T}(\alpha)_* : \mathsf{T}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M}_1) \twoheadrightarrow \mathsf{T}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M}_2) & \mathsf{S}(\alpha)_* : \mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M}_1) \twoheadrightarrow \mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M}_2) \\ \mathsf{A}(\alpha)_* : \mathsf{A}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M}_1) \twoheadrightarrow \mathsf{A}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M}_2) & \bigwedge(\alpha)_* : \bigwedge^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M}_1) \twoheadrightarrow \bigwedge^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M}_2) \end{array}$$

sont tous surjectifs et leur noyau est engendré par l'idéal bilatère engendré par $\ker(\alpha)$.

De plus, les morphismes :

$$\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M}_1) \otimes_{\boldsymbol{A}} \mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M}_1) \to \mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M}_1 \oplus \boldsymbol{M}_2) \qquad \mathsf{A}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M}_1) \otimes_{\boldsymbol{A}} \mathsf{A}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M}_1) \to \mathsf{A}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M}_1 \oplus \boldsymbol{M}_2)$$
$$\textstyle\bigwedge^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M}_1) \otimes_{\boldsymbol{A}} \bigwedge^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M}_1) \to \bigwedge^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M}_1 \oplus \boldsymbol{M}_2)$$

induits par les injections canoniques $\boldsymbol{M}_i \subseteq \boldsymbol{M}_1 \oplus \boldsymbol{M}_2$ sont tous des isomorphismes.

2.3.4. Le foncteur $\mathfrak{D}^*$: Alg($\boldsymbol{R}$) $\rightsquigarrow$ Adg($\boldsymbol{R}$). Pour toute $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$, la formule (24) montre que l'on a :

$$\mathfrak{D}^2(\boldsymbol{A}) = \frac{\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \otimes_{\boldsymbol{A}} \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}}{\boldsymbol{A}\cdot\big\langle \sum_i d(a_i) \otimes d(b_i) \mid \sum_i a_i\, d(b_i) = 0\big\rangle}$$

et comme $a\,d(b) + b\,d(a) - d(ab) = 0$, le sous-module du dénominateur contient les tenseurs $d(a) \otimes d(b) + d(b) \otimes d(a)$ pour tous $a, b \in \boldsymbol{A}$ et nous en déduisons une surjection canonique $\Xi(\boldsymbol{A})_2 : \mathsf{A}^2_{\boldsymbol{A}}(\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}) \twoheadrightarrow \mathfrak{D}^2(\boldsymbol{A})$. Par l'itération de cette idée on définit le morphisme de $\boldsymbol{A}$-modules gradués $\Xi(\boldsymbol{A})_* : \mathsf{A}^*_{\boldsymbol{A}}(\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}) \twoheadrightarrow \mathfrak{D}^*(\boldsymbol{A})$.

2.3.5. Théorème : *Pour tout anneau commutatif $\boldsymbol{R}$ et toute $\boldsymbol{R}$-algèbre commutative $\boldsymbol{A}$, le morphisme de $\boldsymbol{A}$-modules gradués :*

$$\mathsf{A}^*_{\boldsymbol{A}}(\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}) \xrightarrow{\Xi(\boldsymbol{A})_*} \mathfrak{D}^*(\boldsymbol{A})$$

est un isomorphisme. En particulier, $\mathfrak{D}^*(\boldsymbol{A})$ possède une structure canonique d'algèbre différentielle graduée anticommutative.

L'application de $\mathsf{A}^*_{\boldsymbol{A}}(\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}})$ vers $\mathsf{A}^{*+1}_{\boldsymbol{A}}(\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}})$ induite par l'isomorphisme $\Xi(\boldsymbol{A})_*$ à partir de $d_{\mathfrak{D}(\boldsymbol{A}),*}$ sera désignée par notation $d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R},*}$. On a alors

$$d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R},r}\big(a_0 \cdot d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R},0}(a_1) \wedge \cdots \wedge d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R},0}(a_r)\big) = d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R},0}(a_0) \wedge d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R},0}(a_1) \wedge \cdots \wedge d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R},0}(a_r) \tag{25}$$

quels que soient $r \in \mathbb{N}$ et $a_i \in \boldsymbol{A}$, de plus $d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R},*}$ est une dérivation d'algèbre graduée anticommutative de degré $+1$ et de carré nul.

Démonstration :
Remarque 1. Toutes les assertions du théorème résultent de prouver l'existence d'une application $d_* : \mathsf{A}^*_{\boldsymbol{A}}(\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}})$ vérifiant les égalités de la forme (25). En effet, dans ce cas, les égalités (25) montrent aussitôt d_* est une dérivation d'algèbre graduée anticommutative de degré $+1$ et de carré nul. On prouve, par induction sur l'indice r, que $\Xi(\boldsymbol{A})_r$ est un isomorphisme et que d_{r-1} est induite par

$d_{\mathfrak{D}(\boldsymbol{A}),r-1}$. C'est clair pour $r \in \{0,1\}$, dans le cas général, on suppose l'assertion établie jusqu'au degré r et l'on considère le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc}
\mathsf{A}_{\boldsymbol{A}}^{r-1}(\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}) & \xrightarrow{d_{r-1}} & \mathsf{A}_{\boldsymbol{A}}^{r}(\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}) & \xrightarrow{d_r} & \mathsf{A}_{\boldsymbol{A}}^{r+1}(\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}) \\
{\scriptstyle \Xi(\boldsymbol{A})_{r-1}}\big\downarrow \equiv & & {\scriptstyle \Xi(\boldsymbol{A})_{r}}\big\downarrow \equiv & & {\scriptstyle \Xi(\boldsymbol{A})_{r+1}}\big\downarrow\big\uparrow \Theta \\
\mathfrak{D}^{r-1}(\boldsymbol{A}) & \xrightarrow{d_{\mathfrak{D}(\boldsymbol{A}),r-1}} & \mathfrak{D}^{r}(\boldsymbol{A}) & \xrightarrow{d_{\mathfrak{D}(\boldsymbol{A}),r}} & \mathfrak{D}^{r+1}(\boldsymbol{A})
\end{array}$$

Comme pour tout $r \in \mathbb{N}$, $d_r : \mathsf{A}_{\boldsymbol{A}}^{r}(\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}) \to \mathsf{A}_{\boldsymbol{A}}^{r+1}(\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}})$ est une dérivation de $\mathsf{A}_{\boldsymbol{A}}^{r}(\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}})$ relative à $\operatorname{im}(d_{r-1})$ à valeurs dans $\mathsf{A}_{\boldsymbol{A}}^{r+1}(\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}})$, il en est de même de l'application $d_r \circ \Xi(\boldsymbol{A})_r^{-1}$ sur $\mathfrak{D}^r(\boldsymbol{A})$. Il existe donc $\Theta : \mathfrak{D}^{r+1}(\boldsymbol{A}) \to \mathsf{A}_{\boldsymbol{A}}^{r+1}(\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}})$ rendant le diagramme de droite commutatif. De plus, la composée $\Theta \circ \Xi(\boldsymbol{A})_{r+1}$ est un morphisme de $\boldsymbol{A}$-modules qui fixe les éléments de la forme $d(a_0) \wedge \cdots \wedge d(a_r)$; c'est donc l'identité sur $\mathsf{A}_{\boldsymbol{A}}^{r+1}(\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}})$. L'application $\Xi(\boldsymbol{A})_{r+1}$ est par conséquent injective et comme elle est surjective par construction, elle est bijective.

Remarque 2. *Soit $\boldsymbol{A}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre telle qu'il existe $d_* : \mathsf{A}_{\boldsymbol{A}}^{*}(\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}) \xrightarrow{[+1]} \mathsf{A}_{\boldsymbol{A}}^{*}(\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}})$ vérifiant les égalités de la forme (25). Il en est alors de même pour toute $\boldsymbol{R}$-algèbre quotient de $\boldsymbol{A}$.*

En effet, soit $\boldsymbol{J} \subseteq \boldsymbol{A}$ un idéal de $\boldsymbol{R}$-algèbre de $\boldsymbol{A}$ et notons $\boldsymbol{B} := \boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}$. Nous avons montré dans 1.3.1 l'exactitude de la suite :

$$\mathbf{0} \to \boldsymbol{A}\cdot\langle d(\boldsymbol{J})\rangle \hookrightarrow \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \xrightarrow{\nu} \Omega_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{R}} \to \mathbf{0}$$

et le noyau de la surjection $\mathsf{A}(\nu)_* : \mathsf{A}_{\boldsymbol{A}}^{*}(\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}) \twoheadrightarrow \mathsf{A}_{\boldsymbol{A}}^{*}(\Omega_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{R}}) = \mathsf{A}_{\boldsymbol{B}}^{*}(\Omega_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{R}})$, induite par ν, est l'idéal bilatère $\mathscr{J}$ de $\mathsf{A}_{\boldsymbol{A}}^{*}(\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}})$ engendré par $\langle d(\boldsymbol{J})\rangle$ (*cf.* 2.3.3). Or, comme une application d_* sur $\mathsf{A}_{\boldsymbol{A}}^{*}(\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}})$ vérifiant (25) est une dérivation d'algèbre anticommutative de carré nul, on a $d_*(\mathscr{J}) \subseteq \mathscr{J}$ et par conséquent d_* induit une application sur $\mathsf{A}_{\boldsymbol{B}}^{*}(\Omega_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{R}})$ vérifiant les égalités de la forme (25).

Conclusion. Suite aux remarques précédentes, il suffit de montrer l'existence d'une application d_* vérifiant les égalités de la forme (25) lorsque $\boldsymbol{A}$ est une algèbre de polynômes à coefficients dans $\boldsymbol{R}$.

$\boldsymbol{A} := \boldsymbol{R}[X]$. Dans ce cas $\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{R}[X]\,dX$ et $\mathsf{A}_{\boldsymbol{A}}^{r}(\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}) = \big(\boldsymbol{R}[X]/2\boldsymbol{R}[X]\big)dX^{\wedge r}$ pour tout $r > 1$. L'existence de $d_2 : \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \to \mathsf{A}_{\boldsymbol{A}}^{2}(\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}})$ vérifiant (25) équivaut au fait que pour toute famille finie $\{f_i, g_i\} \subseteq \boldsymbol{R}[X]$ telle que $\sum_i f_i\, g_i' = 0$ (†), on a $\sum_i f_i'\, g_i' \in 2\boldsymbol{R}[X]$. Or, l'égalité (†) entraîne $\sum_i f_i'\, g_i' = -\sum_i f_i\, g_i''$

et il est clair que $g'' \in 2\boldsymbol{R}[X]$ pour toute $g \in \boldsymbol{R}[X]$. En degré supérieur, l'existence $d_r : \mathsf{A}^r_{\boldsymbol{A}}(\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}) \to \mathsf{A}^{r+1}_{\boldsymbol{A}}(\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}})$ vérifiant (25) équivaut au fait que pour toute famille finie $\{f_i, g_i\} \subseteq \boldsymbol{R}[X]$ telle que $\sum_i f_i\, g_i' \in 2\boldsymbol{R}[X]$ (‡), on a $\sum_i f_i'\, g_i' \in 2\boldsymbol{R}[X]$. Or, l'égalité (‡) entraîne $\sum_i f_i'\, g_i' = (\sum_i f_i\, g_i')' - \sum_i f_i\, g_i''$ où le terme de droite appartient une fois encore à l'idéal $2\boldsymbol{R}[X]$.

$\boldsymbol{A} := \boldsymbol{R}[X_1, \ldots, X_n]$. Dans ce cas $\boldsymbol{A} := \boldsymbol{R}[X] \otimes_{\boldsymbol{R}} \cdots \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{R}[X]$ et l'existence de d_* découle des considérations générales suivantes.

Soient $\boldsymbol{A}_1$ et $\boldsymbol{A}_2$ deux $\boldsymbol{R}$-algèbres et posons $\boldsymbol{A} := \boldsymbol{A}_1 \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{A}_2$. La proposition 1.4.8 donne un isomorphisme de $\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$ sur $\big(\boldsymbol{A} \otimes_{\boldsymbol{A}_1} \Omega_{\boldsymbol{A}_1/\boldsymbol{R}}\big) \oplus \big(\boldsymbol{A} \otimes_{\boldsymbol{A}_2} \Omega_{\boldsymbol{A}_2/\boldsymbol{R}}\big)$ dont on déduit un isomorphisme d'algèbres graduées canonique (*cf.* 2.3.3) :

$$\begin{aligned} \mathsf{A}^*_{\boldsymbol{A}}(\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}) &\equiv \mathsf{A}^*_{\boldsymbol{A}}\big(\boldsymbol{A} \otimes_{\boldsymbol{A}_1} \Omega_{\boldsymbol{A}_1/\boldsymbol{R}}\big) \otimes_{\boldsymbol{A}} \mathsf{A}^*_{\boldsymbol{A}}\big(\boldsymbol{A} \otimes_{\boldsymbol{A}_2} \Omega_{\boldsymbol{A}_2/\boldsymbol{R}}\big) \\ &\equiv \mathsf{A}^*_{\boldsymbol{A}_1}\big(\Omega_{\boldsymbol{A}_1/\boldsymbol{R}}\big) \otimes_{\boldsymbol{A}_1} \boldsymbol{A} \otimes_{\boldsymbol{A}_2} \mathsf{A}^*_{\boldsymbol{A}_2}\big(\Omega_{\boldsymbol{A}_2/\boldsymbol{R}}\big)\,. \end{aligned} \tag{$\diamond$}$$

Si nous supposons maintenant données des dérivations de $\boldsymbol{R}$-algèbres anticommutatives graduées $d_{i,*} : \mathsf{A}^*_{\boldsymbol{A}_i}(\Omega_{\boldsymbol{A}_i}/\boldsymbol{R})$, on définit sur le terme ($\diamond$) l'application $d_{12,*}$ par

$$\omega_1 \otimes a \otimes \omega_2 \longmapsto d_1(\omega_1) \otimes a \otimes \omega_2 + \omega_1 \otimes a \otimes d_2(\omega_2)\,.$$

Dans le cas où $\boldsymbol{A}_i$ est une algèbre de polynômes à coefficients dans $\boldsymbol{R}$, on vérifie aisément que si les $d_{i,*}$ vérifient les égalités de la forme (25), il en sera de même pour $d_{12,*}$.

Ainsi, l'existence de d_* sur $\boldsymbol{R}[X_1, \ldots, X_n]$ découle par itération à partir du cas $n = 1$ déjà traité.

$\boldsymbol{A} := \boldsymbol{R}[\mathscr{X}]$. Dans ce cas, $\mathscr{X}$ désigne un ensemble arbitraire de variables. On réalise alors $\boldsymbol{A}$ comme limite inductive des sous-algèbres $\boldsymbol{R}[\mathscr{Y}]$ où $\mathscr{Y}$ est une partie finie de $\mathscr{X}$. Comme les différentielles $d_{\mathscr{Y},*}$ sont naturelles on a un système inductif d'algèbres différentielles graduées anticommutatives $\{(\boldsymbol{R}[\mathscr{Y}], d_{\mathscr{Y},*})\}_{\mathscr{Y} \subseteq \mathscr{X}}$ où $\varinjlim_{\mathscr{Y}} \boldsymbol{R}[\mathscr{Y}] = \boldsymbol{R}[\mathscr{X}]$. L'application $d_{\boldsymbol{A},*} := \varinjlim_{\mathscr{Y}} d_{\mathscr{Y},*}$ vérifie alors les égalités de la forme (25) puisque chacune d'entre elles ne fait intervenir qu'un nombre fini de variables ce qui ramène la vérification à l'un des $(\boldsymbol{R}[\mathscr{Y}], d_{\mathscr{Y},*})$. ■

2.3.6. Morphisme d'adjonction. Soient $(\boldsymbol{B}^*, d_{\boldsymbol{B},*})$ un objet de la catégorie $\mathrm{Adg}(\boldsymbol{R})$, $\boldsymbol{A}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre et $\alpha_0 : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}^0$ un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres. Par l'équivalente du théorème 2.3.5 et la proposition 2.2.2 nous savons qu'il existe un et un unique morphisme de complexes de $\boldsymbol{A}$-modules $\alpha_* : \mathsf{A}^*_{\boldsymbol{A}}(\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}, d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}) \to$

$(\boldsymbol{B}^*, d_{\boldsymbol{B},*})$ qui prolonge α_0. Le morphisme α_* est en fait un morphisme de $\boldsymbol{A}$-algèbres. En effet, il suffit de démontrer que l'on a pour tout $r \geqslant 0$:

$$\begin{aligned}\alpha_{r+1}\big(d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}(a_0) \wedge d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}(a_1) \wedge \cdots \wedge d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}(a_r)\big) &= \\ &= \alpha_1(d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}(a_0)) \wedge \alpha_1(d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}(a_1)) \wedge \cdots \wedge \alpha_1(d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}(a_r))\end{aligned}$$

ce pourquoi le raisonnement inductif sur r suivant suffit :

$$\begin{aligned}\alpha_{r+1}\big(d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}(a_0) \wedge d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}(a_1) \wedge \cdots \wedge d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}(a_r)\big) &= \\ &= \alpha_r\big(d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R},r}\big(a_0 \cdot d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}(a_1) \wedge \cdots \wedge d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}(a_r)\big)\big) \\ &= d_{\boldsymbol{B},r}\big(\alpha_0(a_0) \cdot \alpha_r\big(d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}(a_1) \wedge \cdots \wedge d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}(a_r)\big)\big) \\ &\underset{1}{=} d_{\boldsymbol{B},0}\big(\alpha_0(a_0)\big) \wedge \alpha_1(d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}(a_1)) \wedge \cdots \wedge \alpha_1(d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}(a_r)) \\ &= \alpha_1(d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}(a_0)) \wedge \alpha_1(d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}(a_1)) \wedge \cdots \wedge \alpha_1(d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}(a_r))\end{aligned}$$

où l'égalité $\underset{1}{=}$ se justifie par le fait que $\alpha_r\big(d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}(a_1) \wedge \cdots \wedge d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}(a_r)\big)$ est fermée pour $d_{\boldsymbol{B},*}$ et est égal à $\alpha_1(d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}(a_1)) \wedge \cdots \wedge \alpha_1(d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}(a_r))$ par hypothèse de récurrence.

La conclusion de ce qui précède est que la correspondance $\alpha_0 \mapsto \alpha_*$ définit une application dite « *d'adjonction* » :

$$\mathrm{Homom}_{\boldsymbol{R}}\left(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}^0\right) \xrightarrow[\equiv]{\text{adj}} \mathrm{Mor}_{\mathrm{Adg}(\boldsymbol{R})}\Big(\big(\mathsf{A}^*_{\boldsymbol{A}}\left(\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}\right), d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R},*}\big), \big(\boldsymbol{B}^*, d_{\boldsymbol{B},*}\big)\Big) \tag{26}$$

qui est ***bijective*** et naturelle par rapport à $\boldsymbol{A}$ et $(\boldsymbol{B}^*, d_{\boldsymbol{B},*})$.

Ces remarques constituent la démonstration du théorème suivant.

2.3.7. Théorème : *Le foncteur de la catégorie des* $\boldsymbol{R}$-*algèbres différentielles graduées anticommutatives et positivement graduées vers la catégorie des* $\boldsymbol{R}$-*algèbres qui fait correspondre à* $(\boldsymbol{B}^*, d_{\boldsymbol{B},*})$ *sa composante homogène de degré zéro* $\boldsymbol{B}^0$, *et à un morphisme* $\alpha_* : (\boldsymbol{B}^*_1, d_{\boldsymbol{B}_1,*}) \to (\boldsymbol{B}^*_2, d_{\boldsymbol{B}_2,*})$ *sa composante* α_0, *est un* ***adjoint à droite*** *du foncteur* $(\_) \rightsquigarrow \mathsf{A}^*_{(\_)}\big(\Omega_{(\_)/\boldsymbol{R}}\big)$.

2.4 Les foncteurs 'complexe de de Rham' et 'cohomologie de de Rham'

Pour toute algèbre différentielle graduée anticommutative $\big(\boldsymbol{B}^*, d_{\boldsymbol{B},*}\big)$ l'idéal $\mathscr{I}(\boldsymbol{B}^*)$ engendré par les éléments de la forme $x \wedge x$ où x est homogène de degré impair, est gradué et stable par la différentielle puisque $d_{\boldsymbol{B}}(x \wedge x) = d_{\boldsymbol{B}}(x) \wedge x - x \wedge d_{\boldsymbol{B}}(x) = d_{\boldsymbol{B}}(x) \wedge x - d_{\boldsymbol{B}}(x) \wedge x = 0$. De même, si $\alpha_* : \big(\boldsymbol{B}^*_1, d_{\boldsymbol{B}_1,*}\big) \to \big(\boldsymbol{B}^*_2, d_{\boldsymbol{B}_2,*}\big)$ est un morphisme d'algèbres différentielles graduées, on a $\alpha_*(\mathscr{I}(\boldsymbol{B}^*_1)) \subseteq \mathscr{I}(\boldsymbol{B}^*_2)$.

2.4.1. Remarque et définition : Pour toute algèbre différentielle graduée (anticommutative) $\big(\boldsymbol{B}^*, d_{\boldsymbol{B},*}\big)$ notons $\operatorname{Alt}\big(\boldsymbol{B}^*, d_{\boldsymbol{B},*}\big)$ la $\boldsymbol{R}$-algèbre graduée et alternée $\boldsymbol{B}^*/\mathscr{I}(\boldsymbol{B}^*)$ munie de la différentielle induite par $d_{\boldsymbol{B},*}$, et *mutatis mutandis* pour les morphismes entre algèbres différentielles graduées. On obtient de cette manière un foncteur Alt : $\operatorname{Adg}(\boldsymbol{R}) \rightsquigarrow \operatorname{Alt}(\boldsymbol{R})$ dont on démontre aisément qu'il est adjoint à gauche du foncteur d'inclusion $\operatorname{Alt}(\boldsymbol{R}) \subseteq \operatorname{Adg}(\boldsymbol{R})$.

2.4.2. Définition : Le foncteur « *complexe de de Rham* », noté $(\_) \rightsquigarrow \Omega^*_{(\_)/\boldsymbol{R}}$, de la catégorie $\operatorname{Alg}(\boldsymbol{R})$ vers la catégorie $\operatorname{Alt}(\boldsymbol{R})$ est défini comme la composée $\Omega^*_{(\_)/\boldsymbol{R}} := \operatorname{Alt} \circ \mathsf{A}^*_{(\_)}\big(\Omega_{(\_),\boldsymbol{R}}\big)$. Pour toute $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$, le complexe $\big(\Omega^*_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}, d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R},*}\big)$ est donc :

$$\mathbf{0} \to \boldsymbol{A} \xrightarrow{d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}} \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \xrightarrow{d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R},1}} \textstyle\bigwedge^2_{\boldsymbol{A}} \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \xrightarrow{d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R},2}} \textstyle\bigwedge^3_{\boldsymbol{A}} \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \xrightarrow{d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R},3}} \textstyle\bigwedge^4_{\boldsymbol{A}} \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \xrightarrow{d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R},4}} \cdots$$

où la différentielle $d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R},r}$ vérifie la formule :

$$d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R},r}\big(a_0 \cdot d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}(a_1) \wedge \cdots \wedge d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}(a_r)\big) = d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}(a_0) \wedge d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}(a_1) \wedge \cdots \wedge d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}(a_r) \quad (27)$$

pour tout $r > 0$.

2.4.3. Théorème : *Le foncteur qui fait correspondre à une algèbre différentielle graduée alternée* $(\boldsymbol{B}^*, d_{\boldsymbol{B}})$ *sa composante homogène de degré zéro* $\boldsymbol{B}^0$ *et* mutatis mutandis *pour les morphismes, est un adjoint* ***à droite*** *du foncteur complexe de de Rham* $\Omega^*_{(\_)/\boldsymbol{R}} : \operatorname{Alg}(\boldsymbol{R}) \rightsquigarrow \operatorname{Alt}(\boldsymbol{R})$.

Autrement dit, l'application d'adjonction (*analogue de* (26)) *:*

$$\operatorname{Homom}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}^0) \xrightarrow[\equiv]{\text{adj}} \operatorname{Mor}_{\operatorname{Alt}(\boldsymbol{R})}\Big(\big(\Omega^*_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}, d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R},*}\big), (\boldsymbol{B}^*, d_{\boldsymbol{B},*})\Big)$$

est bijective.

Soient $\boldsymbol{R}'$, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ *des* $\boldsymbol{R}$-*algèbres et soit* $S \subseteq \boldsymbol{A}$ *un système multiplicatif. On a des isomorphismes canoniques naturelles compatibles au différentielles :*

$$\begin{cases} \Omega^*_{\boldsymbol{R}' \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}'} \equiv \boldsymbol{R}' \otimes_{\boldsymbol{R}} \Omega^*_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} & \text{(changement de base)} \\ \Omega^*_{S^{-1}\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \equiv S^{-1}\boldsymbol{A} \otimes_{\boldsymbol{A}} \Omega^*_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} & \text{(localisation)} \\ \Omega^*_{\boldsymbol{A} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{B}} \equiv \Omega^*_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \otimes_{\boldsymbol{R}} \Omega^*_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{R}} & \text{(produit fibré, produit tensoriel)} \end{cases}$$

Démonstration : La première partie résulte immédiatement du théorème 2.3.7 et de la remarque 2.4.1. Les isomorphismes de la seconde partie résultent des isomorphismes donnés dans le paragraphe 1.4.6, formules (8) et (9), et dans la proposition 1.4.8 formule (10). ■

2.4.4. Définition : Pour toute $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$, on appelle « *cohomologie de de Rham de $\boldsymbol{A}$ sur $\boldsymbol{R}$* », et l'on note $H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R})$, l'anneau de cohomologie du complexe de de Rham $\big(\Omega^*_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}, d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}\big)$.

2.5 Cohomologie de de Rham d'une algèbre de polynômes

Soient $\boldsymbol{R}$ un anneau commutatif arbitraire, $\mathscr{X}$ un ensemble (de variables) et $\boldsymbol{R}[\mathscr{X}]$ l'algèbre des polynômes à coefficients dans $\boldsymbol{R}$ et variables dans $\mathscr{X}$. On a $\Omega_{\boldsymbol{R}[\mathscr{X}]/\boldsymbol{R}} = \bigoplus_{X\in\mathscr{X}} \boldsymbol{R}[\mathscr{X}]\,dX$ et la différentielle $d_{\boldsymbol{R}[\mathscr{X}]/\boldsymbol{R}} : \boldsymbol{R}[\mathscr{X}] \to \Omega_{\boldsymbol{R}[\mathscr{X}]/\boldsymbol{R}}$ est donnée par :

$$d_{\boldsymbol{R}[\mathscr{X}]/\boldsymbol{R}}(P) = \sum_{X\in\mathscr{X}} \frac{\partial}{\partial X}(P)\,dX\,.$$

Munissons l'ensemble $\mathscr{X}$ d'un ordre total '$\preccurlyeq$'. Pour chaque $k \in \mathbb{N}$ le $\boldsymbol{R}[\mathscr{X}]$-module $\Omega^r_{\boldsymbol{R}[\mathscr{X}]/\boldsymbol{R}}$ est libre, engendré par les éléments $dX_0 \wedge \cdots \wedge dX_{r-1}$ où $X_i \prec X_{i+1}$. On définit $h_r : \Omega^r_{\boldsymbol{R}[\mathscr{X}]/\boldsymbol{R}} \to \Omega^{r-1}_{\boldsymbol{R}[\mathscr{X}]/\boldsymbol{R}}$ comme l'homomorphisme de $\boldsymbol{R}[\mathscr{X}]$-modules qui fait correspondre :

$$dX_0 \wedge \cdots \wedge dX_{r-1} \xmapsto{h_{r+1}} \sum_{i=0}^{r-1} (-1)^i X_i\, dX_0 \wedge \cdots \wedge \widehat{dX}_i \wedge \cdots \wedge dX_r\,.$$

Cette application vérifie l'égalité $h_r(\omega_1 \wedge \omega_2) = h_{r_1}(\omega_1) \wedge \omega_2 + (-1)^{r_1}\omega_1 \wedge h_{r_2}(\omega_2)$ pour tous ω_i homogènes de degrés respectifs r_i et tels que $r_1 + r_2 = r$. On en déduit la formule suivante :

$$(d_{r-1}\circ h_r + h_{r+1}\circ d_r)\big(P\,dX_0\wedge\cdots\wedge dX_{r-1}\big) = \big(kP + \xi(P)\big)\,dX_0\wedge\cdots\wedge dX_{r-1} \quad (*)$$

pour tout $P \in \boldsymbol{R}[\mathscr{X}]$ et où l'on a noté $\xi(P) := h_1 \circ d_0(P) = \sum_{X\in\mathscr{X}} \frac{\partial P}{\partial X}$. L'application $\xi : \boldsymbol{R}[\mathscr{X}] \to \boldsymbol{R}[\mathscr{X}]$ est $\boldsymbol{R}$-linéaire et pour chaque $P \in \boldsymbol{R}[\mathscr{X}]$, on a $\xi^N(P) = 0$ pour $N \gg 0$ (dépendant de P). Notons ξ_r le prolongement linéaire de ξ à $\Omega^r_{\boldsymbol{R}[\mathscr{X}]/\boldsymbol{R}}$, l'égalité $(*)$ s'écrit alors :

$$(d_{r-1} \circ h_r + h_{r+1} \circ d_r)(\omega) = r\,\omega + \xi_r(\omega) \qquad (**)$$

pour tout $\omega \in \Omega^k_{\boldsymbol{R}[\mathscr{X}]/\boldsymbol{R}}$.

De l'égalité $(**)$, on déduit que pour chaque $\omega \in \Omega^r_{\boldsymbol{R}[\mathscr{X}]/\boldsymbol{R}}$ tel que $d_r(\omega) = 0$, l'élément $r\,\omega$ est cohomologue à $\xi_r(\omega)$ et par conséquent $r^N\omega$ est un cobord pour $N \gg 0$. Ces remarques constituent la preuve de la proposition suivante.

2.5.1. Proposition : *Soient $\boldsymbol{R}$ un anneau commutatif contenant le corps des nombres rationnels, $\mathscr{X}$ un ensemble (de variables) et $\boldsymbol{R}[\mathscr{X}]$ l'algèbre des polynômes à coefficients dans $\boldsymbol{R}$ et variables dans $\mathscr{X}$. La cohomologie de de Rham de $\boldsymbol{R}[\mathscr{X}]$ relative à $\boldsymbol{R}$ est nulle en degrés positifs et isomorphe à $\boldsymbol{R}$ en degré nul,* i.e.

$$\begin{cases} H^0_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{R}[\mathscr{X}]/\boldsymbol{R}) \equiv \boldsymbol{R} \\ H^r_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{R}[\mathscr{X}]/\boldsymbol{R}) \equiv \boldsymbol{0}\,, \quad \textit{pour tout } r > 0 \end{cases}$$

2.5.2. Exercice : Montrer en toute généralité les équivalences suivantes :

$$\begin{cases} H^0_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{R}[X]/\boldsymbol{R}) \equiv \bigoplus_{m\in\mathbb{N}} \mathrm{Annul}_{\boldsymbol{R}}(m) \\ H^1_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{R}[X]/\boldsymbol{R}) \equiv \bigoplus_{m\in\mathbb{N}} \boldsymbol{R}/(m+1)\cdot\boldsymbol{R} \\ H^r_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{R}[X]/\boldsymbol{R}) \equiv \boldsymbol{0}\,, \qquad\qquad \text{pour tout } r > 1 \end{cases}$$

où $\mathrm{Annul}_{\boldsymbol{R}}(m)$ désigne l'idéal dans $\boldsymbol{R}$ des éléments de m-torsion.

§ 3. Cohomologie de de Rham d'un schéma

3.1 Complexe et cohomologie de de Rham relatifs

Dans cette partie on "globalise" la notion de complexe de de Rham et de cohomologie de de Rham d'une $\boldsymbol{R}$-algèbre à un schéma au-dessus d'un schéma de base donné $\boldsymbol{S}$, *i.e.* à un objet de la catégorie des $\boldsymbol{S}$-schémas.

3.1.1. Remarques générales. Soit $\boldsymbol{X}$ un espace topologique arbitraire muni d'un faisceau d'anneaux $\mathscr{R}$ et soit $\mathscr{A}$ un faisceau de $\mathscr{R}$-algèbres. Lorsque $V \subseteq U$ sont deux ouverts de $\boldsymbol{X}$, le foncteur complexe de de Rham fait correspondre au morphisme de restriction $\mathscr{A}(U) \to \mathscr{A}(V)$ un morphisme d'algèbres différentielles $\Omega^*_{\mathscr{A}(U)/\mathscr{R}(U)} \to \Omega^*_{\mathscr{A}(V)/\mathscr{R}(V)}$ d'où un préfaisceau :

$$\underline{\Omega}^*_{\mathscr{A}/\mathscr{R}} : U \longmapsto \Omega^*_{\mathscr{A}(U)/\mathscr{R}(U)}$$

de faisceau associé noté $\underline{\underline{\Omega}}^*_{\mathscr{A}/\mathscr{R}}$, et de germe $\Omega^*_{\mathscr{A}_{(x)}/\mathscr{R}_{(x)}}$ en un point $x \in \boldsymbol{X}$.

Lorsque l'on se donne un $\boldsymbol{S}$-schéma de morphisme structural $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{S}$, le morphisme de faisceaux d'anneaux $f^\# : f^{-1}(\mathscr{O}_{\boldsymbol{S}}) \to \mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}$ fait de $\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}$ une $f^{-1}(\mathscr{O}_{\boldsymbol{S}})$-algèbre et la construction précédente s'applique.

3.1.2. Définitions : Soient $\boldsymbol{S}$ un schéma et $\boldsymbol{X}$ un $\boldsymbol{S}$-schéma, notons $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{S}$ le morphisme structural. On appelle « *complexe de de Rham de $\boldsymbol{X}$ relatif à $\boldsymbol{S}$* », et l'on note $\underline{\underline{\Omega}}^*_{\boldsymbol{X}/\boldsymbol{S}}$, le faisceaux d'algèbres différentielles graduées (alternées) :

$$\boxed{\underline{\underline{\Omega}}^*_{\boldsymbol{X}/\boldsymbol{S}} := \underline{\underline{\Omega}}^*_{\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}/f^{-1}(\mathscr{O}_{\boldsymbol{S}})}}$$

La « *cohomologie de de Rham de $\boldsymbol{X}$ relative à $\boldsymbol{S}$* », notée $H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{S})$, est l'**hypercohomologie** du complexe de faisceaux $\underline{\underline{\Omega}}^*_{\boldsymbol{X}/\boldsymbol{S}}$. Pour chaque $r \in \mathbb{N}$, on a par conséquent :

$$\boxed{H^r_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{S}) := \mathbb{H}^r(\boldsymbol{X}; \underline{\underline{\Omega}}^*_{\boldsymbol{X}/\boldsymbol{S}})}$$

3.1.3. Fonctorialité de la cohomologie de de Rham. Soit $g : \boldsymbol{X}_1 \to \boldsymbol{X}_2$ un morphisme de $\boldsymbol{S}$-schémas de morphismes structuraux $f_i : \boldsymbol{X}_i \to \boldsymbol{S}$. Le morphisme $g^\# : \mathscr{O}_{\boldsymbol{X}_2} \to g_*\big(\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}_1}\big)$ est un morphisme de $f_2^{-1}(\mathscr{O}_{\boldsymbol{S}})$-algèbres puisque $f_2 \circ g = f_1$; il induit, par conséquent, un morphisme canonique de faisceaux d'algèbres différentielles de $\underline{\underline{\Omega}}^*_{\boldsymbol{X}_2/\boldsymbol{S}} \to g_*\big(\underline{\underline{\Omega}}^*_{\boldsymbol{X}_1/\boldsymbol{S}}\big)$ et donc une application canonique en hypercoholomogie $\mathbb{H}^r\big(\boldsymbol{X}_2 ; \underline{\underline{\Omega}}^*_{\boldsymbol{X}_2/\boldsymbol{S}}\big) \to \mathbb{H}^r\big(\boldsymbol{X}_2 ; g_*(\underline{\underline{\Omega}}^*_{\boldsymbol{X}_1/\boldsymbol{S}})\big)$ dont la composée avec l'application canonique $\mathbb{H}^r\big(\boldsymbol{X}_2 ; g_*(\underline{\underline{\Omega}}^*_{\boldsymbol{X}_1/\boldsymbol{S}})\big) \to \mathbb{H}^r\big(\boldsymbol{X}_1 ; \underline{\underline{\Omega}}^*_{\boldsymbol{X}_1/\boldsymbol{S}}\big)$ donne un morphisme d'anneaux gradués :

$$\boxed{H^*_{\mathrm{DR}}(g) : H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}_2/\boldsymbol{S}) \to H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}_1/\boldsymbol{S})}$$

appelée « *image inverse* ».

La proposition suivante est laissée en exercice.

3.1.4. Proposition : *La correspondance de la catégorie des $\boldsymbol{S}$-schémas vers la catégorie d'anneaux gradués alternés qui fait correspondre à un $\boldsymbol{S}$-schéma $\boldsymbol{X}$ l'anneau $H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{S})$ et à un morphisme de $\boldsymbol{S}$-schémas $g : \boldsymbol{X}_1 \to \boldsymbol{X}_2$ l'homomorphisme gradué* « image inverse » $H^*_{\mathrm{DR}}(g)$, *est fonctorielle et contravariante.*

3.2 Quasi-cohérence du complexe de de Rham relatif

Soient $\boldsymbol{R}$ un anneau commutatif arbitraire et $\boldsymbol{A}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre, notons $\nu : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{A}$ l'homomorphisme structural $r \mapsto r \cdot \mathbf{1}_{\boldsymbol{A}}$. Le schéma affine $\boldsymbol{X} := \mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$ est considéré muni de sa structure de schéma de base $\boldsymbol{S} := \mathrm{Spec}(\boldsymbol{R})$ induite par ν. Pour tout ouvert $U \subseteq \boldsymbol{X}$, le morphisme de restriction $\rho^{\boldsymbol{X}}_U : \boldsymbol{A} \to \mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}(U)$ induit un morphisme de $\boldsymbol{A}$-algèbres $\Omega^*_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \to \underline{\underline{\Omega}}^*_{\boldsymbol{X}/\boldsymbol{S}}(U)$ qui se prolonge, pour chaque $r \in \mathbb{N}$, en un morphisme de $\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}(U)$-modules $\rho(U)_r : \mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}(U) \otimes_{\boldsymbol{A}} \Omega^r_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \to \underline{\underline{\Omega}}^r_{\boldsymbol{X}/\boldsymbol{S}}(U)$.

Comme ces constructions sont naturelles par rapport à U, on obtient un morphisme de faisceaux de $\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}$-modules

$$\underline{\underline{\rho}} : \widetilde{\Omega}^r_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \longrightarrow \underline{\underline{\Omega}}^r_{\boldsymbol{X}/\boldsymbol{S}} \qquad (\diamond)$$

qui se voit au niveau des germes en chaque $\mathfrak{P} \in \operatorname{Spec}(\boldsymbol{A})$ comme l'application canonique :

$$\boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}} \otimes_{\boldsymbol{A}} \Omega^r_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \longrightarrow \Omega^r_{\boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}}/\boldsymbol{R}_{\nu^{-1}(\mathfrak{P})}}.$$

Cette application est bijective d'après le théorème 2.4.3 et le morphisme $(\diamond)$ est un ***isomorphisme*** de $\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}$-modules. Par conséquent, le $\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}$-module $\underline{\underline{\Omega}}^r_{\boldsymbol{X}/\boldsymbol{S}}$ est quasi-cohérent. Ces remarques constituent l'essentiel de la démonstration du théorème suivant.

3.2.1. Théorème : *Soit $\boldsymbol{X}$ un $\boldsymbol{S}$-schéma de morphisme structural $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{S}$.*

a) *Supposons les schémas $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{S}$ affines : $\boldsymbol{X} = \operatorname{Spec}(\boldsymbol{A})$ et $\boldsymbol{S} = \operatorname{Spec}(\boldsymbol{R})$. On considère la structure de $\boldsymbol{R}$-algèbre sur $\boldsymbol{A}$ définie par le morphisme f. Alors :*

1) *On a des isomorphismes canoniques et naturelles pour tout $r \in \mathbb{N}$:*

$$\underline{\underline{\Omega}}^r_{\boldsymbol{X}/\boldsymbol{S}} \equiv \widetilde{\Omega^r_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}} \equiv \textstyle\bigwedge^r_{\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}} \widetilde{\Omega}_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}.$$

2) *La cohomologie de de Rham de $\boldsymbol{X}$ relative à $\boldsymbol{S}$ est isomorphe à la **cohomologie** du complexe de de Rham $\big(\Omega^*_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}, d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R},*}\big)$. Autrement dit, pour chaque $r \in \mathbb{N}$, l'application canonique :*

$$H^r_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}) \longrightarrow \mathbb{H}^r\big(\boldsymbol{X}; \underline{\underline{\Omega}}^*_{\boldsymbol{X}/\boldsymbol{S}}\big) =: H^r_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}/\boldsymbol{S})$$

est bijective.

b) *Pour chaque $r \in \mathbb{N}$, le $\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}$-module $\underline{\underline{\Omega}}^r_{\boldsymbol{X}/\boldsymbol{S}}$ est quasi-cohérent et il est cohérent lorsque $\boldsymbol{X}$ est localement de présentation finie sur $\boldsymbol{S}$.*

3.3 Propriétés élémentaires du complexe de de Rham relatif

3.3.1. Théorème : *Soient $\boldsymbol{S}$ un schéma et $\boldsymbol{X}$ un $\boldsymbol{S}$-schéma.*

a) *Soit $f : \boldsymbol{Y} \hookrightarrow \boldsymbol{X}$ un plongement ouvert de $\boldsymbol{S}$-schémas. Alors*

$$\boxed{\underline{\underline{\Omega}}^*_{\boldsymbol{Y}/\boldsymbol{S}} \equiv f^*\big(\underline{\underline{\Omega}}^*_{\boldsymbol{X}/\boldsymbol{S}}\big)} \qquad \text{(restricion ouverte)} \qquad (28)$$

b) *Soit $g : \boldsymbol{S}' \to \boldsymbol{S}$ un morphisme de schémas et notons $\bar{g} : \boldsymbol{S}' \times_{\boldsymbol{S}} \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ le morphisme induit sur le produit fibré. Alors*

$$\boxed{\underline{\underline{\Omega}}^*_{\boldsymbol{S}' \times_{\boldsymbol{S}} \boldsymbol{X}/\boldsymbol{S}'} \equiv \bar{g}^*\big(\underline{\underline{\Omega}}^*_{\boldsymbol{X}/\boldsymbol{S}}\big)} \qquad \text{(changement de base)} \quad (29)$$

c) *Soit $\boldsymbol{X}'$ un $\boldsymbol{S}$-schéma et notons $p : \boldsymbol{X}' \times_{\boldsymbol{S}} \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}$ et $p' : \boldsymbol{X}' \times_{\boldsymbol{S}} \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{X}'$ les projections canoniques. Alors*

$$\boxed{\underline{\underline{\Omega}}^*_{\boldsymbol{X}' \times_{\boldsymbol{S}} \boldsymbol{X}/\boldsymbol{S}} \equiv p^*\big(\underline{\underline{\Omega}}^*_{\boldsymbol{X}/\boldsymbol{S}}\big) \otimes_{\mathscr{O}_{\boldsymbol{X} \times_{\boldsymbol{S}} \boldsymbol{X}'}} p'^*\big(\underline{\underline{\Omega}}^*_{\boldsymbol{X}/\boldsymbol{S}}\big)} \qquad \text{(produit fibré)} \quad (30)$$

Démonstration : Ces propriétés se vérifient localement où elles sont des corollaires de la quasi-cohérence 3.2.1 et des leurs analogues dans le cas des algèbres (*cf.* 2.4.3). ■

Les propositions suivantes sont laissées en exercice.

3.3.2. Proposition : *Soit $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ un morphisme de schémas de base $\boldsymbol{S}$. La suite canonique de $\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}$-modules :*

$$f^*\big(\underline{\underline{\Omega}}^1_{\boldsymbol{Y}/\boldsymbol{S}}\big) \longrightarrow \underline{\underline{\Omega}}^1_{\boldsymbol{X}/\boldsymbol{S}} \longrightarrow \underline{\underline{\Omega}}^1_{\boldsymbol{X}/\boldsymbol{Y}} \to \mathbf{0}$$

est exacte.

3.3.3. Proposition : *Soit $\jmath : \boldsymbol{Y} \hookrightarrow \boldsymbol{X}$ une immersion de $\boldsymbol{S}$-schémas. Soit $\mathscr{I}$ le faisceau d'idéaux de définition de $\boldsymbol{Y}$ en tant que sous-schéma de $\boldsymbol{X}$. La suite canonique de faisceaux de $\mathscr{O}_{\boldsymbol{Y}}$-modules :*

$$\mathscr{I}/\mathscr{I}^2 \longrightarrow \jmath^*\big(\underline{\underline{\Omega}}^1_{\boldsymbol{X}/\boldsymbol{S}}\big) \longrightarrow \underline{\underline{\Omega}}^1_{\boldsymbol{Y}/\boldsymbol{S}} \to \mathbf{0}$$

est exacte.

§ 4. Schémas et algèbres lisses

4.1 Rappels d'algèbre locale

Dans cette section de rappels on désigne par $\boldsymbol{A}$ un anneau commutatif arbitraire (non nécessairement nœthérien) et pour tout idéal premier $\mathfrak{P}$ de $\boldsymbol{A}$, le corps résiduel de l'anneau local $\boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}}$ sera noté $k(\mathfrak{P}) := \boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{P}\boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}}$.

4.1.1. Lemme : *Soient $\boldsymbol{A}$ un anneau commutatif arbitraire et $\varphi : \boldsymbol{A}^r \to \boldsymbol{A}^n$ un morphisme de $\boldsymbol{A}$-modules. Supposons qu'il existe un idéal premier $\mathfrak{P}$ de $\boldsymbol{A}$ tel que le morphisme induit :*

$$k(\mathfrak{P})^r \xhookrightarrow{\varphi_{k(\mathfrak{P})}} k(\mathfrak{P})^n$$

est ***injectif****. Alors, il existe un élément $f \in \boldsymbol{A}$ tel que $\mathfrak{P} \in D(f)$ et tel que le morphisme induit $\varphi_f : \boldsymbol{A}_f^r \to \boldsymbol{A}_f^n$ est une injection admettant un inverse à gauche et $\operatorname{coker}(\varphi_f)$ est un $\boldsymbol{A}_f$-module projectif de type fini.*

En particulier, pour tout $\mathfrak{Q} \in D(f)$ le morphisme $\varphi_{k(\mathfrak{Q})} : k(\mathfrak{Q})^r \to k(\mathfrak{Q})^n$ est injectif.

Démonstration : On considère le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}}^r \arrow[r, "\varphi_{\mathfrak{P}}"] \arrow[d, two heads, "p"'] & \boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}}^n \arrow[l, dashed, bend right, "\rho_{\mathfrak{P}}"'] \arrow[d, two heads, "q"] \arrow[dl, two heads, "\pi\circ q"'] \\
k(\mathfrak{P})^r \arrow[r, hook, "\varphi_{k(\mathfrak{P})}"] & k(\mathfrak{P})^n \arrow[l, two heads, bend left, "\rho"]
\end{tikzcd}$$

où p et q désignent les surjections induites par la surjection canonique $\boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}} \twoheadrightarrow k(\mathfrak{P})$. On fixe alors une « *rétraction* » ρ de $\varphi_{k(\mathfrak{P})}$, *i.e.* une application $k(\mathfrak{P})$-linéaire $\rho : k(\mathfrak{P})^n \to k(\mathfrak{P})^r$ telle que $\rho \circ \varphi_{k(\mathfrak{P})} = \mathrm{id}$, ce qui est possible puisque $\varphi_{k(\mathfrak{P})}$ est une injection de $k(\mathfrak{P})$-espaces vectoriels. L'application composée $\rho \circ q$ est alors une surjection de $\boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}}$-modules et comme sa source est libre, elle admet un relèvement en un morphisme de $\boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}}$-modules $\rho_{\mathfrak{P}} : \boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}}^n \to \boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}}^r$. Mais alors $\rho \circ \varphi_{k(\mathfrak{P})} = \mathrm{id}$ et $\det(\rho_{\mathfrak{P}} \circ \varphi_{\mathfrak{P}}) = 1 \bmod (\mathfrak{P}\boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}})$, en particulier $\det(\rho_{\mathfrak{P}} \circ \varphi_{\mathfrak{P}})$ est inversible dans l'anneau local $\boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}}$ et $\Xi := \rho_{\mathfrak{P}} \circ \varphi_{\mathfrak{P}}$ est un isomorphisme de $\boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}}^r$. Quitte à remplacer $\rho_{\mathfrak{P}}$ par $\Xi^{-1} \circ \rho_{\mathfrak{P}}$, nous pouvons supposer dans la suite que $\rho_{\mathfrak{P}}$ est une rétraction de $\varphi_{\mathfrak{P}}$.

Ceci étant, on observe que pour chaque vecteur $\mathbf{e}_i$ de la base canonique de $\boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}}^n$, on a des éléments $\{s_{i,1}, \ldots, s_{i,r}\}$ *n'appartenant pas* à $\mathfrak{P}$ tels que le vecteur $\rho_{\mathfrak{P}}(\mathbf{e}_i)$ de $\boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}}^r$ s'écrit :

$$\rho_{\mathfrak{P}}(\mathbf{e}_i) = \left(\frac{a_{i,1}}{s_{i,1}}, \ldots, \frac{a_{i,r}}{s_{i,r}}\right) \tag{$*$}$$

avec $a_{i,j} \in \boldsymbol{A}$. Notons maintenant $g = \prod_{i=1,\ldots,n}^{j=1,\ldots,r} s_{i,j}$; on a $g \notin \mathfrak{P}$ et chaque $s_{i,j}$ est inversible dans $\boldsymbol{A}_g$. Le terme de droite de $(*)$ a donc un sens sur $\boldsymbol{A}_g^r$ et permet de définir un relèvement ρ_g de $\rho_{\mathfrak{P}}$, on obtient de cette manière le diagramme commutatif :

$$
\begin{array}{ccccc}
\boldsymbol{A}_g^r & \xrightarrow{\varphi_g} & \boldsymbol{A}_g^n & \xrightarrow{\rho_g} & \boldsymbol{A}_g^r \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}}^r & \xrightarrow{\varphi_{\mathfrak{P}}} & \boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}}^n & \xrightarrow{\rho_{\mathfrak{P}}} & \boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}}^r
\end{array}
\tag{$**$}
$$

où les applications verticales sont induites par l'homomorphisme canonique $\nu_{g,\mathfrak{P}} : \boldsymbol{A}_g \to \boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}}$.

Notons $[\,t_{i,j}\,]$ la matrice de $\rho_g \circ \varphi_g$ relative à la base canonique de $\boldsymbol{A}_g^r$. Comme $\rho_{\mathfrak{P}} \circ \varphi_{\mathfrak{P}} = \mathrm{id}$, on a $\nu_{g,\mathfrak{P}}(t_{i,i}) = 1$ et $\nu_{g,\mathfrak{P}}(t_{i,j}) = 0$ lorsque $i \neq j$. Il existe alors des éléments $s'_{i,j} \notin \mathfrak{P}$ tels que $s'_{i,i}(\,t_{i,i} - 1) = 0$ et $s'_{i,j}\,t_{i,j} = 0$ lorsque $i \neq j$; en particulier l'élément $f = s\,(\prod s_{i,j})$ vérifie $f \notin \mathfrak{P}$, le diagramme $(**)$ se factorise en :

$$
\begin{array}{ccccc}
\boldsymbol{A}_g^r & \xrightarrow{\varphi_g} & \boldsymbol{A}_g^n & \xrightarrow{\rho_g} & \boldsymbol{A}_g^r \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\boldsymbol{A}_f^r & \xrightarrow{\varphi_f} & \boldsymbol{A}_f^n & \xrightarrow{\rho_f} & \boldsymbol{A}_f^r \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}}^r & \xrightarrow{\varphi_{\mathfrak{P}}} & \boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}}^n & \xrightarrow{\rho_{\mathfrak{P}}} & \boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}}^r
\end{array}
$$

et $\rho_f \circ \varphi_f = \mathrm{id}$; de sorte que ρ_f est une rétraction de φ_f. ∎

4.1.2. Lemme : *Soit $\boldsymbol{A}$ un anneau arbitraire et considérons pour un $\boldsymbol{A}$-module $\boldsymbol{M}$ les assertions suivantes :*

1) *$\boldsymbol{M}$ est un $\boldsymbol{A}$-module projectif.*
2) *Pour tout idéal premier $\mathfrak{P} \subseteq \boldsymbol{A}$ il existe $f \notin \mathfrak{P}$ tel que $\boldsymbol{M}_f$ est un $\boldsymbol{A}_f$-module libre.*
3) *Pour tout idéal premier $\mathfrak{P} \subseteq \boldsymbol{A}$ le localisé $\boldsymbol{M}_{\mathfrak{P}}$ est un $\boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}}$-module libre.*

Alors

a) *Lorsque $\boldsymbol{M}$ est **de type fini**, on a* $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3)$.

b) *Lorsque $\boldsymbol{M}$ est **de présentation finie**, on a* $(1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (3)$.

Démonstration :

a) Comme $\boldsymbol{M}$ est projectif de type fini, on a $\boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{M} \oplus \boldsymbol{N}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$ et un certain $\boldsymbol{A}$-module $\boldsymbol{N}$.

Soit maintenant $\mathfrak{P}$ un idéal premier de $\boldsymbol{A}$ et notons $\mathscr{B} := \{m_1, \ldots, m_r\}$ un ensemble fini d'éléments de $\boldsymbol{M}$ tel que $\{\mathbf{1} \otimes m_1, \ldots, \mathbf{1} \otimes m_r\}$ est une base de $k(\mathfrak{P}) \otimes_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{M}$, notons $\langle \mathscr{B} \rangle$ le sous-$\boldsymbol{A}$-module de $\boldsymbol{M}$ engendré par $\mathscr{B}$.

L'homomorphisme de $\boldsymbol{A}$-modules $\varphi : \boldsymbol{A}^r \to \boldsymbol{M} \subseteq \boldsymbol{A}^n$ défini par $\varphi(\mathbf{e}_i) := m_i$ satisfait, par construction, aux hypothèses du lemme 4.1.1, il existe donc $g \notin \mathfrak{P}$ tel que $\varphi_g : \boldsymbol{A}_g^r \to \boldsymbol{A}_g^n$ est injective. Il existe d'autre part, $g' \notin \mathfrak{P}$ tel que $\langle \mathscr{B} \rangle_{g'} = \boldsymbol{M}_{g'}$ puisque le $\boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}}$-module $(\boldsymbol{M}/\langle \mathscr{B} \rangle)_{\mathfrak{P}}$ est nul étant de type fini et de réduction à $k(\mathfrak{P})$ nulle (Nakayama). Comme $\langle \mathscr{B} \rangle = \operatorname{im}(\varphi)$, on conclut que l'application $\varphi_f : \boldsymbol{A}_f^r \to \boldsymbol{A}_f^n$ est un isomorphisme sur $\boldsymbol{M}_f$ lorsque $f = gg'$.

b) Pour toute surjection de $\boldsymbol{A}$-modules $\alpha : \boldsymbol{N}_1 \twoheadrightarrow \boldsymbol{N}_2$ nous devons prouver que le morphisme induit

$$\operatorname{Hom}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M}, \alpha) : \operatorname{Hom}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}_1) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}_2)$$

est surjectif et ceci équivaut à ce que, pour tout idéal premier $\mathfrak{P} \subseteq \boldsymbol{A}$, l'application induite :

$$\operatorname{Hom}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}_1) \otimes_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}} \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}_2) \otimes_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}} \tag{‡}$$

est surjective. En effet, dans un tel cas les localisés du conoyau $\boldsymbol{K}$ de $\operatorname{Hom}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{M}, \alpha)$ sont tous nuls et comme l'application canonique $\boldsymbol{K} \to \prod_{\mathfrak{P} \in \operatorname{Spec}(\boldsymbol{A})} \boldsymbol{K}_{\mathfrak{P}}$ est injective la nullité de $\boldsymbol{K}$ en découle. Or, pour chaque $\boldsymbol{N} \in \operatorname{Mod}(\boldsymbol{A})$, on dispose de la transformation naturelle canonique :

$$\eta(\_) : \operatorname{Hom}_{\boldsymbol{A}}(\_, \boldsymbol{N}) \otimes_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}} \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\boldsymbol{A}}\big(\_, \boldsymbol{N} \otimes_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}}\big)$$

qui relie deux foncteurs exacts à droite et est telle que $\eta(\boldsymbol{L})$ est un isomorphisme pour tout $\boldsymbol{L}$ libre de rang fini. Il en découle que $\eta(\boldsymbol{L})$ est bijectif pour tout $\boldsymbol{L}$ de ***présentation finie***. En particulier (‡) est surjective, si et seulement si,

$$\operatorname{Hom}_{\boldsymbol{A}}\big(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}_1 \otimes_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}}\big) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\boldsymbol{A}}\big(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}_2 \otimes_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}}\big)$$

est surjective, autrement dit, si et seulement si :

$$\operatorname{Hom}_{\boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}}}\big(\boldsymbol{M}_{\mathfrak{P}}, \boldsymbol{N}_{1,\mathfrak{P}}\big) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}}}\big(\boldsymbol{M}_{\mathfrak{P}}, \boldsymbol{N}_{2,\mathfrak{P}}\big)$$

est surjective, puisque $\operatorname{Hom}_{\boldsymbol{A}}(\_, \boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}} \otimes (\_))$ et $\operatorname{Hom}_{\boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}}}(\boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}} \otimes (\_), \boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}} \otimes (\_))$ canoniquement isomorphes. Ceci termine la démonstration de l'implication (3) ⇒ (1) car $\boldsymbol{M}_{\mathfrak{P}}$ est libre. ∎

4.1.3. Corollaire : *Soient $\boldsymbol{A}$ un anneau commutatif arbitraire et $\varphi : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{A}^n$ un morphisme de $\boldsymbol{A}$-modules où $\boldsymbol{M}$ admet un système à r générateurs $\{m_1, \ldots, m_r\}$ tel que, pour tout idéal premier $\mathfrak{P} \subseteq \boldsymbol{A}$, le système $\{\mathbf{1}_{k(\mathfrak{P})} \otimes \varphi(m_1), \ldots, \mathbf{1}_{k(\mathfrak{P})} \otimes \varphi(m_r)\}$ est libre dans $k(\mathfrak{P})^n$. Alors $\boldsymbol{M}$ est un $\boldsymbol{A}$-module libre de rang r et φ est une injection qui admet un inverse à gauche (une rétraction).*

Démonstration : Soit $\mu : \boldsymbol{A}^r \twoheadrightarrow \boldsymbol{M}$ l'endomorphisme qui fait correspondre $\mathbf{e}_i \mapsto m_i$. L'application $\varphi \circ \mu : \boldsymbol{A}^r \to \boldsymbol{A}^m$ vérifie les hypothèses du lemme 4.1.1 et par conséquent $\varphi \circ \mu$ est localement injectif, autrement dit, pour tout idéal premier $\mathfrak{P} \subseteq \boldsymbol{A}$, $\ker(\varphi \circ \mu)_{\mathfrak{P}} = \mathbf{0}$. Il s'ensuit que $\ker(\varphi \circ \mu) = \mathbf{0}$ et donc μ est bijective et φ est injective.

Le lemme 4.1.1 nous dit également que $\operatorname{coker}(\varphi)$ est localement projectif puisque chaque $\varphi_{\mathfrak{P}}$ admet une rétraction et la démonstration du lemme précédent montre aussi que « *localement projectif* » et « *projectif* » sont des propriétés équivalentes, donc $\operatorname{coker}(\varphi)$ est projectif et φ admet une rétraction. ■

4.1.4. Corollaire : *Soient $\boldsymbol{A}$ un anneau arbitraire et $\boldsymbol{J} \xrightarrow{\partial} \boldsymbol{A}^n \to \boldsymbol{M} \to \mathbf{0}$ (†) une suite exacte à droite de $\boldsymbol{A}$-modules où $\boldsymbol{J}$ est un $\boldsymbol{A}$-module de type fini admettant un système de générateurs à $n - r$ éléments ($r \leqslant n$). Soit $\mathfrak{P}$ un idéal premier de $\boldsymbol{A}$ tel que :*

$$\begin{cases} \dim_{k(\mathfrak{P})} \big(k(\mathfrak{P}) \otimes \boldsymbol{J}\big) = n - r & \textit{et} \\ 1 \otimes \partial : k(\mathfrak{P}) \otimes \boldsymbol{J} \to k(\mathfrak{P})^n & \textit{est une injection.} \end{cases}$$

Il existe alors $f \notin \mathfrak{P}$ tel que $\boldsymbol{J}_f \simeq \boldsymbol{A}_f^{n-r}$, $\boldsymbol{M}_f \simeq \boldsymbol{A}_f^r$ et la suite : $\mathbf{0} \to \boldsymbol{J}_f \xrightarrow{1 \otimes \partial} \boldsymbol{A}_f^n \to \boldsymbol{M}_f \to \mathbf{0}$ induite par (†) est exacte et scindée.

Démonstration : Soit $\{g_{r+1}, \ldots, g_n\}$ un système de générateurs de $\boldsymbol{J}$ et considérons la surjection de $\boldsymbol{A}$-modules $\psi : \boldsymbol{A}^{n-r} \twoheadrightarrow \boldsymbol{J}$ définie par $\psi(\mathbf{e}_i) = g_{r+i}$. Alors la composée $\psi \circ \partial$ satisfait aux hypothèses du lemme 4.1.1 et par conséquent la suite :

$$\mathbf{0} \to \boldsymbol{A}_g^{n-r} \xrightarrow{\mathbf{1}_g \otimes \partial \circ \psi} \boldsymbol{A}_g^n \longrightarrow \boldsymbol{M}_g \to \mathbf{0} \qquad (\ddagger)$$

est exacte et scindée pour un certain $g \notin \mathfrak{P}$. Dans ce cas, $\boldsymbol{M}_g$ est un $\boldsymbol{A}_g$-module de présentation finie et projectif (puisque facteur direct de $\boldsymbol{A}_g^n$) et l'on peut appliquer le lemme 4.1.2. Il existe donc $g' \notin \mathfrak{P}$ tel que $\boldsymbol{M}_{gg'}$ est un $\boldsymbol{A}_{gg'}$-module libre. Posons $f = gg'$. En tensorisant la suite (‡) par $\boldsymbol{A}_f$, elle reste scindée. On remarque pour terminer que comme ψ est surjective $\mathbf{1}_f \otimes \psi$ l'est également et cette dernière établit un isomorphisme entre $\boldsymbol{A}_f^{n-r}$ et $\boldsymbol{J}_f$, d'autre part $\boldsymbol{M}_f \simeq \boldsymbol{A}_f^r$ puisque $\dim_{k(\mathfrak{P})}(k(\mathfrak{P}) \otimes \boldsymbol{M}) = r$. ■

Voici maintenant deux énoncés bien connus et conséquences faciles de ce qui précède.

4.1.5. Lemme : *Sur un anneau local un module de type fini est projectif, si et seulement si, il est libre.*

4.1.6. Lemme : *Sur un anneau nœthérien un module de type fini est projectif, si et seulement si, il est localement libre.*

4.2 Lissité dans les morphismes de schémas

4.2.1. Définition : Un morphisme de schémas $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{S}$ est dit « *lisse au point* $x \in \boldsymbol{X}$ *(de dimension relative* r*)* » s'il existe un voisinage ouvert $U \ni x$ et une $\boldsymbol{S}$-immersion $\jmath : U \hookrightarrow \mathbb{A}^n_{\boldsymbol{S}}$ de U dans un espace linéaire $\mathbb{A}^n_{\boldsymbol{S}}$ sur $\boldsymbol{S}$, tel que les conditions suivantes sont satisfaites :

L-(a) Localement en $y := \jmath(x)$, le faisceau des idéaux de définition de $\jmath(U)$, en tant que sous-schéma de $\mathbb{A}^n_{\boldsymbol{S}}$, est engendré par $(n-r)$ sections $g_{r+1}, \ldots, g_n$; et

L-(b) l'ensemble $\{dg_{r+1}, \ldots, dg_n\}$ est linéairement indépendant dans $\underline{\Omega}^1_{\mathbb{A}^n_{\boldsymbol{S}}/\boldsymbol{S}} \otimes k(y)$.

Le morphisme $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{S}$ est dit « *lisse* » lorsqu'il est lisse en chaque point de $\boldsymbol{X}$, et il est dit « *étale* » s'il est lisse et de dimension relative nulle en chaque point de $\boldsymbol{X}$.

Soient $\boldsymbol{R}$ un anneau et $\boldsymbol{A}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre, on dira que « $\boldsymbol{A}$ *est lisse (resp. étale)* » lorsque le morphisme de schémas $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A}) \to \mathrm{Spec}(\boldsymbol{R})$ induit par l'homomorphisme (structural) d'anneaux $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{A}$, $r \mapsto r \cdot \mathbf{1}_{\boldsymbol{A}}$, est lisse (resp. étale). Plus généralement, un morphisme d'anneaux $\alpha : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{A}$ sera dit « *lisse* » lorsque $\mathrm{Spec}(\alpha) : \mathrm{Spec}(\boldsymbol{B}) \to \mathrm{Spec}(\boldsymbol{R})$ est un morphisme lisse.

4.2.2. Remarque : On observera le caractère local de cette définition qui fait que quels que soient les sous-schémas ouverts $V \subseteq \boldsymbol{X}$ et $U \subseteq \boldsymbol{S}$ vérifiant $y \in V$ et $f(V) \subseteq U$, le morphisme f est lisse en y, si et seulement si, $f|$ est lisse en y, où $f| : V \to U$ désigne la restriction de f. En particulier, on peut prendre pour U et V des schémas affines. Il est d'autre part évident qu'un point lisse d'un morphisme appartient à un ouvert au-dessus de $\boldsymbol{S}$ qui est de présentation finie. Ceci explique pourquoi l'hypothèse pour un morphisme de schémas d'être ***localement de présentation finie*** est souvent explicite dans la définition même de la lissité de morphismes.

4.2.3. Remarque : D'après la définition, une $\boldsymbol{R}$-algèbre lisse est toujours localement de présentation finie. Or, une $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$ localement de présentation finie est également globalement de présentation finie, *i.e.* quotient d'une algèbre de polynômes à coefficients dans $\boldsymbol{R}$ et à un nombre fini de variables par un idéal de type fini (*cf.* [EGA$_1$] prop. 6.2.9 p. 302). On prendra garde du fait que ceci signifie uniquement que $\boldsymbol{A}$ admet des présentations finies et non pas que tout morphisme surjectif de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\boldsymbol{R}[\mathscr{X}] \twoheadrightarrow \boldsymbol{A}$, où $\mathscr{X}$ désigne une liste finie de variables, est à noyau de type fini (à moins bien entendu que $\boldsymbol{R}$ soit nœthérien). Nous rappelons à continuation une démonstration élémentaire de cette assertion.

4.2.3.1. Proposition : *Soit $\boldsymbol{R}$ un anneau commutatif avec identité pour le produit. Toute $\boldsymbol{R}$-algèbre localement de présentation finie est globalement de présentation finie.*

En particulier, toute $\boldsymbol{R}$-algèbre lisse est globalement de présentation finie.

Démonstration : Soit $\boldsymbol{A}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre localement de présentation finie. Par quasi-compacité, il existe une famille finie $\{f_1, \ldots, f_r\}$ d'éléments de $\boldsymbol{A}$ tels que $\operatorname{Spec}(\boldsymbol{A}) = D(f_1) \cup \cdots \cup D(f_r)$ $(*)$, et tels que chaque localisation $\boldsymbol{A}_{f_i}$ est une $\boldsymbol{R}$-algèbre de présentation finie. On fixe dans la suite une telle famille et l'on note $\nu_i : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}_{f_i}$ l'homomorphisme canonique.

Pour chaque $i = 1, \ldots, r$, il existe alors un entier positif ou nul m_i, que l'on pourra choisir aussi grand que l'on veut, et des éléments $a_{i,1}, \ldots, a_{i,s_i}$ de $\boldsymbol{A}$, tels que l'homomorphisme $\psi_i : \boldsymbol{R}[\overline{X}_i] \to \boldsymbol{A}_{f_i}$, où $\overline{X}_i$ désigne la liste de variables $X_{i,1}, \ldots, X_{i,s_i}$, défini par $X_{i,j} \mapsto a_{i,j}/f_i^{m_i}$, est surjectif de noyau un idéal $\mathscr{K}_i \subseteq \boldsymbol{R}[\overline{X}_i]$ de type fini.

Comme il n'y a qu'un nombre fini d'éléments f_i, nous pouvons, sans perte de généralité, supposer les m_i égaux à un même entier M (il suffit en effet de prendre $M := \sup\{m_i\}$ quitte à modifier les $a_{i,j}$). On fixe pour la suite un choix de tels éléments $a_{i,j}$ dont on désignera par $\bar{a}_i$ la liste des éléments $a_{i,1}, \ldots, a_{i,s_i}$.

Il s'ensuit que pour chaque $b \in \boldsymbol{A}$ et chaque i, il existe un polynôme $P(b)_i \in \boldsymbol{R}[\overline{X}_i]$, tel que $\nu_i(b) = \psi_i\big(P(b)_i\big)$ dans $\boldsymbol{A}_{f_i}$. On en déduit que pour chaque i, il existe un élément $Q(b)_i \in \boldsymbol{R}[\bar{a}_i, f_i] \subseteq \boldsymbol{A}$ et un entier $n_i \in \mathbb{N}$ tels que $b\, f_i^{n_i} = Q(b)_i$ dans $\boldsymbol{A}$. Encore une fois, comme la famille des n_i est finie, nous pouvons remplacer les n_i par un même entier N (en prenant leur sup et modifiant les $Q(b)_i$ en conséquence). On a alors :

$$b\, f_i^N = Q(b)_i \in \boldsymbol{R}[\bar{a}_i, f_i] \subseteq \boldsymbol{A}\,, \text{ pour tout } i = 1, \ldots, r. \qquad (\dagger)$$

Ceci étant, la condition $(*)$ équivaut à $\mathbf{1}_{\boldsymbol{A}} \in \sqrt{\langle f_1, \ldots, f_r \rangle}$, de sorte qu'il existe des éléments $h_i \in \boldsymbol{A}$ (ne dépendant que des f_i), tels que $1 = h_1 f_1 + \cdots + h_r f_r$ et une puissance suffisamment grande de $h_1 f_1 + \cdots + h_r f_r$ fournit une décomposition $1 = H_1 f_1^N + \cdots + H_r f_r^N$ où $H_i \in \boldsymbol{R}[f_1, h_1, \ldots, f_r, h_r]$. On a alors :

$$b = bH_1 f_1^N + \cdots + bH_r f_r^N = H_1 Q(b)_1 + \cdots + H_r Q(b)_r$$

d'après $(\dagger)$, et $b \in \boldsymbol{R}[\bar{a}_1, f_1, h_1, \ldots, \bar{a}_r, f_r, h_r] \subseteq \boldsymbol{A}$. La $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$ est par conséquent **globalement** de type fini.

Pour chaque $i = 1, \ldots, r$, notons $\overline{W}_i$ la liste de variables $W_{i,1}, \ldots, W_{i,s_i}$ et considérons l'homomorphisme :

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{R}[\overline{W}_1, Y_1, Z_1, \ldots, \overline{W}_r, Y_r, Z_r] & \xrightarrow{\psi} & \boldsymbol{A} \\ W_{i,j}, Y_i, Z_i & \longmapsto & a_{i,j}, f_i, h_i \end{array}$$

qui est surjectif d'après l'étude qui précède. Montrons que son noyau $\mathscr{K}$ est un idéal de type fini de $\boldsymbol{R}[\overline{W}_1, Y_1, Z_1, \ldots, \overline{W}_r, Y_r, Z_r]$.

En localisant par Y_i, on obtient une surjection :

$$\boldsymbol{R}[\overline{W}_1, Y_1, Z_1, \ldots, \overline{W}_r, Y_r, Z_r]_{Y_i} \xrightarrow{\psi_{Y_i}} \boldsymbol{A}_{f_i}$$

dont la restriction à la sous-algèbre $\boldsymbol{R}\big[\overline{W}_i/Y_i^M\big]$ est surjective de noyau $\mathscr{K}_i$, engendré par un nombre fini d'éléments en raison des choix initiaux. Nous pouvons donc choisir des éléments $y_i, z_i, w_{i,j} \in \boldsymbol{R}\big[\overline{W}_i/Y_i^M\big]$ vérifiant $\psi_{Y_i}(Y_i) = \psi_{Y_i}(y_i)$, $\psi_{Y_i}(Z_i) = \psi_{Y_i}(z_i)$ et $\psi_{Y_i}(W_{i,j}) = \psi_{Y_i}(w_{i,j})$. Il est alors aisé de voir que l'idéal $\ker(\psi_{Y_i})$ est engendré par $\mathscr{K}_i$ et par les différences $Y_i - y_i$, $Z_i - z_i$, $W_{i,j} - w_{i,j}$. Notons ξ l'élément de $\mathscr{K}$ donné par $(1 - Z_1Y_1 - \cdots - Z_rY_r)$ et notons $\boldsymbol{A}'$ le quotient de $\boldsymbol{R}[\overline{W}_1, Y_1, Z_1, \ldots, \overline{W}_r, Y_r, Z_r]$ par l'idéal principal $\langle\xi\rangle$. L'application ψ induit alors un morphisme surjectif de $\boldsymbol{A}'$ sur $\boldsymbol{A}$ et ce qui précède montre que la restriction du $\boldsymbol{A}'$-module $\mathscr{K}/\langle\xi\rangle$ à chaque ouvert $D(Y_i)$ est de type fini. Comme $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A}') = D(Y_1) \cup \cdots \cup D(Y_r)$, on conclut que $\mathscr{K}/\langle\xi\rangle$ et donc $\mathscr{K}$ est de type fini, ce qui termine la démonstration de la proposition. ∎

4.2.3.2. Exercice : Montrer de manière analogue que tout $\boldsymbol{R}$-module localement de présentation finie est globalement de présentation finie. (Voir [B$_2$] II.§5.3 cor. prop. 3, p. 109.)

4.2.3. Étude locale de la lissité d'un morphisme. Nous allons nous intéresser à la lissité dans la situation où $\boldsymbol{S} := \mathrm{Spec}(\boldsymbol{R})$, $\boldsymbol{X} := \mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$ et où $\boldsymbol{A}$ est une $\boldsymbol{R}$-algèbre de présentation finie, *i.e.* le quotient de $\boldsymbol{R}[\mathscr{X}] := \boldsymbol{R}[X_1, \ldots, X_n]$ par un idéal ***de type fini*** $\boldsymbol{I} = \langle g_{n-r}, \ldots, g_n\rangle$. Nous nous intéresserons donc aux données *locales* de la définition 4.2.1.

D'après la proposition 1.3.1, nous avons la première suite fondamentale exacte à droite :

$$\boldsymbol{I}/\boldsymbol{I}^2 \xrightarrow{\partial} \boldsymbol{A} \otimes_{\boldsymbol{R}[\mathscr{X}]} \Omega_{\boldsymbol{R}[\mathscr{X}]/\boldsymbol{R}} \longrightarrow \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \to \boldsymbol{0} \tag{$*$}$$

où le terme central est un $\boldsymbol{A}$-module libre de rang n puisque :

$$\boldsymbol{A} \otimes_{\boldsymbol{R}[\mathscr{X}]} \Omega_{\boldsymbol{R}[\mathscr{X}]/\boldsymbol{R}} \equiv \boldsymbol{A} \otimes_{\boldsymbol{R}[\mathscr{X}]} \Big(\bigoplus\nolimits_{i=1,\ldots,n} \boldsymbol{R}[\mathscr{X}]\, dX_i\Big) \equiv \bigoplus\nolimits_{i=1,\ldots,n} \boldsymbol{A}\, dX_i\ ,$$

et où $\boldsymbol{I}/\boldsymbol{I}^2$ est engendré par les $n - r$ éléments : $\overline{g}_{n-r}, \ldots, \overline{g}_n$.

On aura remarqué que lorsque un point $\mathfrak{P}$ de $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$ est lisse et de dimension relative r au-dessus de $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{R})$ les hypothèses du corollaire 4.1.4 sont satisfaites et par conséquent tout point $\mathfrak{Q}$ dans un voisinage de $\mathfrak{P}$ sera lui-aussi lisse de dimension relative r. Nous pouvons donc supposer dans ce qui suit que c'est le cas pour tout $\mathfrak{Q} \in \mathrm{Spec}\boldsymbol{A}$ (ce qui est possible quitte à localiser $\boldsymbol{A}$). Dans ce cas, tout point de $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$ est lisse au-dessus de $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{R})$ et le morphisme ∂ de $(*)$ est injectif, puisque localement injectif. La suite courte :

$$\mathbf{0} \to \boldsymbol{I}/\boldsymbol{I}^2 \xrightarrow{\ \partial\ } \boldsymbol{A} \otimes_{\boldsymbol{R}[\mathscr{X}]} \Omega_{\boldsymbol{R}[\mathscr{X}]/\boldsymbol{R}} \longrightarrow \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \to \mathbf{0} \qquad (**)$$

est alors exacte avec $\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$ de présentation finie et localement libre, donc projectif d'après 4.1.2. La suite de $\boldsymbol{A}$-modules $(**)$ est donc scindée.

Ces remarques prouvent la proposition suivante :

4.2.4. Proposition : *Soit $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{S}$ un morphisme de schémas localement de présentation finie.*

a) *L'ensemble* $\mathrm{Lisse}(f)$ *des points lisses pour f est un ouvert de $\boldsymbol{X}$.*

b) *La restriction du faisceau des 1-formes différentielles relatives $\underline{\underline{\Omega}}^1_{\boldsymbol{X}/\boldsymbol{S}}$ à* $\mathrm{Lisse}(f)$, *est localement libre de rang localement constant.*

c) *Le complexe de de Rham $\underline{\underline{\Omega}}^*_{\boldsymbol{X}/\boldsymbol{S}}|_{\mathrm{Lisse}(f)}$ est localement libre et $\underline{\underline{\Omega}}^m_{\boldsymbol{X}/\boldsymbol{S}}|_{\mathrm{Lisse}(f)}$ est nul lorsque m majore strictement les dimensions relatives de $f|_{\mathrm{Lisse}(f)}$.*

d) *Soit $x \in \mathrm{Lisse}(f)$ et $\jmath : U \to \mathbb{A}^n_{\boldsymbol{S}}$ une $\boldsymbol{S}$-immersion de la définition 4.2.1. Notons $\mathscr{I}$ l'idéal de définition de $\jmath(U)$; la suite*

$$\mathbf{0} \to \mathscr{I}/\mathscr{I}^2 \longrightarrow \jmath^*\underline{\underline{\Omega}}^1_{\mathbb{A}^n_{\boldsymbol{S}}/\boldsymbol{S}} \longrightarrow \underline{\underline{\Omega}}^1_{U/\boldsymbol{S}} \to \mathbf{0}$$

est exacte et localement scindée.

4.2.5. Remarque et exercice : On prendra garde du fait que l'ensemble $\mathrm{Lisse}(f)$ peut être vide. En effet, prouvez que pour le morphisme structural $h : \mathbb{F}_p \to \mathbb{F}_p[X]/(X^p)$, on a $\mathrm{Lisse}(\mathrm{Spec}(h)) = \varnothing$.

4.2.6. Conditions locales de lissité. Les données du paragraphe précédent sont toujours en vigueur. On se donne donc une $\boldsymbol{R}$-algèbre lisse de dimension relative r et une présentation finie $\mathbf{0} \to \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{R}[X_1, \ldots, X_n] \to \boldsymbol{A} \to \mathbf{0}$ où l'idéal $\boldsymbol{J}$ admet $n - r$ générateurs vérifiant les conditions de la définition 4.2.1 en tout point de $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$.

4.2.7. Proposition : *Sous ces conditions, les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) $\boldsymbol{A}$ *est une* $\boldsymbol{R}$*-algèbre lisse.*

b) *La première suite fondamentale de* $\boldsymbol{A}$*-modules :*

$$\mathbf{0} \longrightarrow \boldsymbol{J}/\boldsymbol{J}^2 \xrightarrow{\ \partial\ } \boldsymbol{A} \otimes_{\boldsymbol{R}[\mathscr{X}]} \Omega_{\boldsymbol{R}[\mathscr{X}]/\boldsymbol{R}} \longrightarrow \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \to \mathbf{0} \tag{31}$$

est exacte et scindée.

c) *Le* $\boldsymbol{A}$*-module* $\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$ *est projectif et* ∂ *est injective.*

c') ∂ *admet des rétractions (locales).*

d) *Soient* $\boldsymbol{B}$ *une* $\boldsymbol{R}$*-algèbre et* $\boldsymbol{I}$ *un idéal dans* $\boldsymbol{B}$*, notons* $\pi : \boldsymbol{B} \twoheadrightarrow \boldsymbol{B}/\boldsymbol{I}$ *la projection canonique. Alors, lorsque* $\boldsymbol{I}^2 = \mathbf{0}$ *(resp.* $\boldsymbol{I}$ *est nilpotent), l'application entre les ensembles d'homomorphismes de* $\boldsymbol{R}$*-algèbres :*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Homom}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) & \longrightarrow & \mathrm{Homom}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}/\boldsymbol{I}) \\ \varphi & \longmapsto & \pi\circ\varphi \end{array}$$

est surjective.

Démonstration : L'implication (a)⇒(b) a déjà été établie dans le paragraphe précédent. Lorsque (b) est satisfaite le $\boldsymbol{A}$-module $\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$ est projectif puisque facteur direct du module libre $\oplus_i \boldsymbol{A}\,dX_i$ et (c) résulte. Réciproquement, lorsque (c) est vérifiée la suite (31) est exacte et scindée puisque son terme de droite est projectif et (b)⇔(c). Les équivalences (c)⇔(c') découlent du corollaire 4.1.4.

(b)⇒(a). Lorsque la suite (31) est scindée chacune de ses extrémités est un $\boldsymbol{A}$-module projectif de type fini (et même de présentation finie) et nous avons affaire à des $\boldsymbol{A}$-modules localement libres (*cf.* 4.1.2) ; en particulier pour chaque $\mathfrak{P} \in \mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$ on peut localiser les données de la proposition et nous pouvons rajouter à (c) le fait que $\boldsymbol{J}/\boldsymbol{J}^2$ est $\Omega^1_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$ sont tous les deux des $\boldsymbol{A}$-modules libres. Soit maintenant $\{g_{r+1},\ldots,g_n\}$ une famille d'éléments de $\boldsymbol{J}$ tels que leurs classes modulo $\boldsymbol{J}^2$ définissent une *base* de $\boldsymbol{J}/\boldsymbol{J}^2$. Notons $\boldsymbol{J}' := \langle g_{r+1},\ldots,g_n\rangle \subseteq \boldsymbol{J}$ et $\boldsymbol{A}' := \boldsymbol{R}[\mathscr{X}]/\boldsymbol{J}'$. On a l'égalité $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}^2 + \boldsymbol{J}'$ dont on déduit $\mathfrak{Q}\cdot(\boldsymbol{J}/\boldsymbol{J}') = (\mathfrak{Q}\cdot\boldsymbol{J} + \boldsymbol{J}')/\boldsymbol{J}' = \boldsymbol{J}/\boldsymbol{J}'$ pour tout idéal $\mathfrak{Q} \subseteq \boldsymbol{R}[\mathscr{X}]$ contenant $\boldsymbol{J}$. En particulier, lorsque $\mathfrak{Q}$ est l'image inverse de $\mathfrak{P}$ par la surjection canonique $\boldsymbol{R}[\mathscr{X}] \twoheadrightarrow \boldsymbol{A}$, on a $(\boldsymbol{J}/\boldsymbol{J}')_{\mathfrak{Q}} = \mathbf{0}$ par Nakayama, et il existe $f \notin \mathfrak{Q}$ tel que $(\boldsymbol{J}/\boldsymbol{J}')_f = \mathbf{0}$. Ces remarques montrent que sur le voisinage principal $\mathfrak{Q} \in D(f) \subseteq \mathrm{Spec}(\boldsymbol{R}[\mathscr{X}])$, l'idéal $\boldsymbol{J}$ est bien engendré par $n-r$ éléments dont les différentielles sont linéairement indépendantes (au point $\mathfrak{P}$) ; les conditions de lissité (de dimension relative r) sont donc bien remplies pour $\mathfrak{P} \in \mathrm{Spec}(\boldsymbol{A}) \to \mathrm{Spec}(\boldsymbol{R})$.

(b)⇒(d). Soit $\varphi' \in \mathrm{Homom}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}/\boldsymbol{I})$ et considérons le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{J} \arrow[r, hook] & \boldsymbol{R}[\mathscr{X}] \arrow[r, two heads, "\pi"] \arrow[d, "\psi"] & \boldsymbol{A} \arrow[d, "\varphi'"] \arrow[dl, dashed, "\varphi"'] \\
\boldsymbol{I} \arrow[r, hook] & \boldsymbol{B} \arrow[r, two heads, "\nu"] & \boldsymbol{B}/\boldsymbol{I}
\end{tikzcd}$$

Par la propriété universelle de l'algèbre de polynômes, il existe ψ rendant le diagramme commutatif et la question du relèvement de φ' s'exprime par : "*peut-on choisir ψ de sorte que $\psi(\boldsymbol{J}) = \boldsymbol{0}$?*". Ou encore, "*existe-t-il une $\boldsymbol{R}$-dérivation D de $\boldsymbol{R}[\mathscr{X}]$ à valeurs dans $\boldsymbol{I}$, telle que $D(x) = \psi(x)$, pour tout $x \in \boldsymbol{J}$?*". En effet, pour toute $\boldsymbol{R}$-dérivation $D : \boldsymbol{R}[\mathscr{X}] \to \boldsymbol{I}$ (on voit $\boldsymbol{I}$ comme $\boldsymbol{R}[\mathscr{X}]$-module via ψ), on montre aisément l'égalité :

$$(\psi - D)(xy) - (\psi - D)(x) - (\psi - D)(y) = -D(x)D(y) \in \boldsymbol{I}^2 ,$$

pour tous $x, y \in \boldsymbol{R}[\mathscr{X}]$, et l'application $\psi - D : \boldsymbol{R}[\mathscr{X}] \to \boldsymbol{B}$ est bien un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres qui relève φ' puisque $\boldsymbol{I}^2 = \boldsymbol{0}$ et qui s'annule sur $\boldsymbol{J}$ par construction, elle induit donc un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\varphi : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ qui relève φ'. Montons donc, pour ψ fixée, l'existence d'une $\boldsymbol{R}$-dérivation $D : \boldsymbol{R}[\mathscr{X}] \to \boldsymbol{I}$ vérifiant $D(x) = \psi(x)$ pour tout $x \in \boldsymbol{J}$.

Comme $\boldsymbol{I}^2 = \boldsymbol{0}$, l'application $\psi : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{I}$ définit un morphisme de $\boldsymbol{R}[\mathscr{X}]$-module $\overline{\psi} : \boldsymbol{J}/\boldsymbol{J}^2 \to \boldsymbol{I}$, et la ligne centrale du diagramme :

$$\begin{tikzcd}
 & \boldsymbol{J} \arrow[d] \arrow[r, phantom, "\subseteq"] & \boldsymbol{R}[\mathscr{X}] \arrow[d, "d_{\boldsymbol{R}[\mathscr{X}]/\boldsymbol{R}}"] & & \\
\boldsymbol{0} \arrow[r] & \boldsymbol{J}/\boldsymbol{J}^2 \arrow[r, shift left, "\partial"] \arrow[d, "\overline{\psi}"'] & \Omega_{\boldsymbol{R}[\mathscr{X}]/\boldsymbol{R}} \otimes_{\boldsymbol{R}[\mathscr{X}]} \boldsymbol{A} \arrow[l, shift left, "\rho"] \arrow[r] & \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \arrow[r] & \boldsymbol{0} \\
 & \boldsymbol{I} & & &
\end{tikzcd}$$

est exacte et scindée par hypothèse. Il est donc possible de prolonger $\psi|_{\boldsymbol{J}}$ en la $\boldsymbol{R}$-dérivation $\overline{\psi} \circ \rho \circ d_{\boldsymbol{R}[\mathscr{X}]/\boldsymbol{R}} : \boldsymbol{R}[\mathscr{X}] \to \boldsymbol{I}$ ce qui prouve l'existence d'un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres de $\boldsymbol{R}[\mathscr{X}]$ vers $\boldsymbol{B}$ se factorisant par π.

Lorsque l'idéal $\boldsymbol{I}$ est nilpotent de degré de nilpotence plus grand que deux, on factorise la surjection $\nu : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{B}/\boldsymbol{I}$ en :

$$\boldsymbol{B} \xrightarrow{\nu'} \boldsymbol{B}/\boldsymbol{I}^2 \xrightarrow{\nu''} \boldsymbol{B}/\boldsymbol{I}$$

le degré de nilpotence du noyau de ν' est alors strictement inférieur à celui de $\boldsymbol{I}$ et celui du noyau de ν'' vaut exactement deux. Un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres de $\boldsymbol{A}$ vers $\boldsymbol{B}/\boldsymbol{I}$ se relève suite au paragraphe précédent en un morphisme de $\boldsymbol{A}$ vers $\boldsymbol{B}/\boldsymbol{I}^2$ et, dans un seconde temps, à $\boldsymbol{B}$ tout entier par un argument inductif portant sur le degré de nilpotence des noyaux.

(d)⇒(b). On applique (d) au cas particulier où $\boldsymbol{B} := \boldsymbol{R}[\mathscr{X}]/\boldsymbol{J}^2$ et $\boldsymbol{I} := \boldsymbol{J}/\boldsymbol{J}^2$. L'identité id : $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}/\boldsymbol{I}$ se relève alors en un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\sigma : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{R}[\mathscr{X}]/\boldsymbol{J}^2$ et l'on a la suite exacte scindée de $\boldsymbol{R}$-modules :

$$\mathbf{0} \to \boldsymbol{J}/\boldsymbol{J}^2 \underset{\rho}{\overset{}{\rightleftarrows}} \boldsymbol{R}[\mathscr{X}]/\boldsymbol{J}^2 \underset{\sigma}{\overset{\nu}{\rightleftarrows}} \boldsymbol{R}[\mathscr{X}]/\boldsymbol{J} = \boldsymbol{A} \to \mathbf{0}\,,$$

où $\rho(m) := m - \sigma\circ\nu(m)$. On a $\rho(m_1m_2) - m_1\rho(m_2) - m_2\rho(m_1) = -\rho(m_1)\rho(m_2) = 0$ et la composée Δ de la surjection canonique $\boldsymbol{R}[\mathscr{X}] \twoheadrightarrow \boldsymbol{R}[\mathscr{X}]/\boldsymbol{J}^2$ suivie de ρ est une $\boldsymbol{R}$-dérivation de $\boldsymbol{R}[\mathscr{X}]$ dans $\boldsymbol{J}/\boldsymbol{J}^2$ dont la restriction à $\boldsymbol{J}$ coïncide avec la surjection canonique de $\boldsymbol{J}$ sur $\boldsymbol{J}/\boldsymbol{J}^2$:

$$\begin{tikzcd}
 & \boldsymbol{J} \arrow[r, phantom, "\subseteq"] \arrow[d, two heads] & \boldsymbol{R}[\mathscr{X}] \arrow[d, two heads] \arrow[dl, "\Delta"'] & & \\
\mathbf{0} \arrow[r] & \boldsymbol{J}/\boldsymbol{J}^2 \arrow[r, shift left] & \boldsymbol{R}[\mathscr{X}]/\boldsymbol{J}^2 \arrow[l, shift left, "\rho"] \arrow[r, shift left] & \boldsymbol{R}[\mathscr{X}]/\boldsymbol{J} \arrow[l, shift left] \arrow[r] & \mathbf{0}
\end{tikzcd}$$

Par la propriété universelle du module des formes différentielles, on a un morphisme de $\boldsymbol{R}[\mathscr{X}]$-modules $\pi_\Delta : \Omega_{\boldsymbol{R}[\mathscr{X}]/\boldsymbol{R}} \to \boldsymbol{J}/\boldsymbol{J}^2$ vérifiant $\pi_\Delta \circ d_{\boldsymbol{R}[\mathscr{X}]/\boldsymbol{R}} = \Delta$. Soit $p_\Delta : \boldsymbol{A} \otimes_{\boldsymbol{R}[\mathscr{X}]} \Omega_{\boldsymbol{R}[\mathscr{X}]/\boldsymbol{R}} \to \boldsymbol{J}/\boldsymbol{J}^2$ le morphisme de $\boldsymbol{A}$-modules induit par π_Δ, alors pour chaque $x \in \boldsymbol{J}$ on a :

$$x \bmod \boldsymbol{J}^2 = \pi_\Delta(d(x)) = p_\Delta\big(\partial\big(x \bmod \boldsymbol{J}^2\big)\big)\,,$$

et p_Δ est une rétraction de ∂ dans la suite (31) qui est alors exacte et scindée.

■

4.3 Condition globale de lissité

Voici maintenant la généralisation de l'équivalence (a)⇔(d) de la proposition 4.2.7 au cas des morphismes de schémas localement de présentation finie.

4.3.1. Corollaire : *Soit $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{S}$ localement de présentation finie. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *f est lisse.*

b) *Pour tout $\boldsymbol{S}$-schéma $\boldsymbol{Y}$ affine et tout sous-schéma fermé $\boldsymbol{Y}'$ de $\boldsymbol{Y}$ défini par un faisceau d'idéaux $\mathscr{I} \subseteq \mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}$ vérifiant $\mathscr{I}^2 = 0$, l'application canonique :*

$$\operatorname{Hom}_{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X}) \twoheadrightarrow \operatorname{Hom}_{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{Y}', \boldsymbol{X}),$$

est surjective.

Démonstration : (b)⇒(a). Comme la lissité de f est une propriété locale nous pouvons supposer $\boldsymbol{X} = \operatorname{Spec}(\boldsymbol{A})$ et $\boldsymbol{S} = \operatorname{Spec}(\boldsymbol{R})$. Dans ce cas la condition (b) équivaut à la condition (d) de la proposition 4.2.7 et donc f est lisse.

(a)⇒(b). Soit $f' \in \operatorname{Hom}_{\boldsymbol{S}}(\boldsymbol{Y}', \boldsymbol{X})$ et fixons un recouvrement de $\boldsymbol{Y}$ par des ouverts affines $\mathscr{U} = \{\boldsymbol{Y}_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ tel que chaque $\boldsymbol{Y}'_\alpha := \boldsymbol{Y}_\alpha \cap \boldsymbol{Y}'$ est un ouvert affine de $\boldsymbol{Y}'$ et que la restriction f'_α de f' à $\boldsymbol{Y}'_\alpha$ se factorise par un ouvert affine de $\boldsymbol{X}$ au-dessus d'un ouvert affine de $\boldsymbol{S}$. Il existe alors, toujours grâce à la proposition 4.2.7, des relèvements $f_\alpha : \boldsymbol{Y}_\alpha \to \boldsymbol{X}$ des morphismes $f'_\alpha : \boldsymbol{Y}'_\alpha \to \boldsymbol{X}$.

Faisons maintenant quelques remarques simples pour chaque situation affine (indexée par $\alpha \in \mathfrak{A}$) en reprenant le diagramme de la démonstration de 4.2.7 :

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{J} \arrow[r, hook] & \boldsymbol{R}[\mathscr{X}] \arrow[r, two heads, "\pi"] \arrow[d, "\psi_\alpha"'] & \boldsymbol{A} \arrow[d, "\varphi'_\alpha"] \arrow[dl, dashed, "\varphi_1"', "\varphi_2"] \\
\boldsymbol{I}_\alpha \arrow[r, hook] & \boldsymbol{B}_\alpha \arrow[r, two heads, "\nu"] & \boldsymbol{B}_\alpha/\boldsymbol{I} =: \boldsymbol{B}'_\alpha
\end{tikzcd}$$

où $\boldsymbol{Y}_\alpha = \operatorname{Spec}(\boldsymbol{B}_\alpha)$, $\boldsymbol{Y}'_\alpha = \operatorname{Spec}(\boldsymbol{B}'_\alpha)$, et $f'_\alpha = \operatorname{Spec}(\varphi'_\alpha)$.

R-1) Le fait que $\boldsymbol{I}_\alpha^2$ soit nul entraîne aussitôt que $\boldsymbol{I}_\alpha$ est canoniquement un $\boldsymbol{B}'_\alpha$-module et également que les structures de $\boldsymbol{A}$-modules dont il est muni par les différents relèvements φ de φ' coïncident, on notera par $a{\cdot}x$ cette action canonique lorsque $a \in \boldsymbol{A}$ et $x \in \boldsymbol{I}_\alpha$.

R-2) Soient φ_1 et φ_2 deux relèvements de φ'_α, leur différence $D := \varphi_1 - \varphi_2$ est une application $D : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{I}_\alpha$ additive vérifiant $D(a_1 a_2) = a_2{\cdot}D(a_1) + a_1{\cdot}D(a_2)$ pour tous $a_i \in \boldsymbol{A}$; c'est donc une $\boldsymbol{R}$-dérivation qui correspond à un élément $\xi(\varphi_1, \varphi_2) \in \operatorname{Hom}_{\boldsymbol{A}}(\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}, \boldsymbol{I}_\alpha)$. Mieux encore, si φ_0 est un relèvement de φ'_α l'application $\varphi \mapsto \xi(\varphi, \varphi_0)$ est une bijection entre l'ensemble de tous les relèvements possibles de φ'_α et $\operatorname{Hom}_{\boldsymbol{A}}(\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}, \boldsymbol{I}_\alpha)$.

R-3) Le morphisme de $\operatorname{Hom}_{\boldsymbol{B}'_\alpha}(\boldsymbol{B}'_\alpha \otimes_{\boldsymbol{A}} \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}, \boldsymbol{I}_\alpha)$ vers $\operatorname{Hom}_{\boldsymbol{A}}(\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}, \boldsymbol{I}_\alpha)$ induit par l'application $\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \to \boldsymbol{B}'_\alpha \otimes_{\boldsymbol{A}} \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$, $m \mapsto 1 \otimes m$, est un isomorphisme.

R-4) D'après (R-1) le faisceau d'idéaux $\mathscr{I}$ de définition de $\boldsymbol{Y'} \subseteq \boldsymbol{Y}$ est un $\mathscr{O}_{\boldsymbol{Y'}}$-module quasi-cohérent sur $\boldsymbol{Y'}$ et le $\mathscr{O}_{\boldsymbol{Y'}}$-module $\mathscr{H}\!om_{\mathscr{O}_{Y'}}\big(f'^*(\underline{\underline{\Omega}}^1_{\boldsymbol{X/S}}), \mathscr{I}\big)$ est quasi-cohérent puisque $\mathscr{I}$ est quasi-cohérent et que $f'^*(\underline{\underline{\Omega}}^1_{\boldsymbol{X/S}})$ est cohérent. Les sections de ce faisceau au-dessus d'un ouvert $\boldsymbol{Y}'_\alpha$ s'identifient canoniquement aux éléments de $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{B}'_\alpha}(\boldsymbol{B}'_\alpha \otimes_{\boldsymbol{A}} \Omega_{\boldsymbol{A/R}}, \boldsymbol{I}_\alpha)$.

Ceci étant, nous avons la famille $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ de relèvements locaux de $f' : \boldsymbol{Y'} \to \boldsymbol{X}$ et notre problème est de comprendre s'il est possible de les recoller quitte peut être à les déformer. Pour chaque couple $(\alpha, \beta) \in \mathfrak{A}^2$ notons $\boldsymbol{Y}_{\alpha,\beta} := \boldsymbol{Y}_\alpha \cap \boldsymbol{Y}_\beta$ (*mutatis mutandis* pour $\boldsymbol{Y'}$) les relèvements f_α et f_β donnent lieux à deux relèvements sur $\boldsymbol{Y}_{\alpha,\beta}$ et suite à (R-2,3,4) on peut faire correspondre :

$$(\varphi_\alpha)_\alpha \longmapsto \big(\xi(\varphi_\alpha, \varphi_\beta)\big)_{\alpha,\beta} \in \prod_{\alpha,\beta\in\mathfrak{A}} \Gamma\big(\boldsymbol{Y}'_{\alpha,\beta}\,; \mathscr{H}\!om_{\mathscr{O}_{Y'}}\big(f'^*(\underline{\underline{\Omega}}^1_{\boldsymbol{X/S}}), \mathscr{I}\big)\big)$$

Or, le terme de droite est le groupe des 1-cochaînes de Čech relatives au recouvrement par des ouverts affines $\boldsymbol{Y'} \cap \mathscr{U}$ du faisceau $\mathscr{H}\!om_{\mathscr{O}_{Y'}}\big(f'^*(\underline{\underline{\Omega}}^1_{\boldsymbol{X/S}}), \mathscr{I}\big)$ et l'on vérifie aisément que l'élément $\big(\xi(\varphi_\alpha, \varphi_\beta)\big)_{\alpha,\beta}$ est un 1-cocycle. Comme la cohomologie de Čech relative à un recouvrement affine d'un $\mathscr{O}_{\boldsymbol{Y'}}$-module quasi-cohérent est concentrée en degré zéro, il existe une famille

$$(\xi_\alpha)_\alpha \in \prod_{\alpha\in\mathfrak{A}} \Gamma\big(\boldsymbol{Y}'_\alpha\,; \mathscr{H}\!om_{\mathscr{O}_{Y'}}(f'^*(\underline{\underline{\Omega}}^1_{\boldsymbol{X/S}}), \mathscr{I})\big)$$

telle que $\xi_\alpha - \xi_\beta = \xi(\varphi_\alpha, \varphi_\beta)$. Notons $D_\alpha : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{I}_\alpha$ la dérivation correspondante à ξ_α (*cf.* R-2) ; la famille $(\varphi_\alpha - D_\alpha)_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ est alors une famille de relèvements locaux de f' qui vérifie la condition de recollement et fournit le relèvement global annoncé. ■

4.3.2. Corollaire : *Soient $\boldsymbol{A}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre et $\boldsymbol{0} \to \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{R}[X_1, \ldots, X_n] \to \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{0}$ une présentation finie quelconque de $\boldsymbol{A}$. Alors, il y a équivalence entre les deux assertions suivantes :*

a) *$\boldsymbol{A}$ est une $\boldsymbol{R}$-algèbre lisse..*

b) *La première suite fondamentale de $\boldsymbol{A}$-modules :*

$$\boldsymbol{0} \longrightarrow \boldsymbol{I}/\boldsymbol{I}^2 \xrightarrow{\ \partial\ } \boldsymbol{A} \otimes_{\boldsymbol{R}[\mathscr{X}]} \Omega_{\boldsymbol{R}[\mathscr{X}]/\boldsymbol{R}} \longrightarrow \Omega_{\boldsymbol{A/R}} \to \boldsymbol{0}$$

est exacte et scindée.

En particulier, la proposition 4.2.7 reste vraie quelle que soit la présentation finie $\boldsymbol{0} \to \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{R}[X_1, \ldots, X_n] \to \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{0}$ considérée.

Démonstration : Lorsque $\boldsymbol{A}$ est lisse sur $\boldsymbol{R}$, l'assertion 4.3.1-(b) est vérifiée d'après le corollaire précédent et alors, la démonstration de l'implication (d)⇒(b) de la proposition 4.2.7 prouve l'assertion (b) de ce corollaire. Enfin, l'implication (b)⇒(a) fait également partie de la preuve de 4.2.7. ∎

4.3.3. Remarque : Ce corollaire montre, que si $\boldsymbol{A}$ est une $\boldsymbol{R}$-algèbre de présentation finie ***lisse***, le critère de lissité de la définition 4.2.1 est vérifié par toute présentation finie de $\boldsymbol{A}$.

4.3.4. Exercice : Soit $(\boldsymbol{G}, 1, \cdot)$ un groupe abélien noté multiplicativement. Pour tout anneau $\boldsymbol{A}$, on note $\boldsymbol{A}[\boldsymbol{G}]$ l'« *algèbre du groupe* $\boldsymbol{G}$ *à coefficients dans* $\boldsymbol{A}$ ». On rappelle qu'il s'agit de l'ensemble des familles $\{a_g\}_{g\in \boldsymbol{G}}$ d'éléments de $\boldsymbol{A}$ indexés par les éléments du groupe $\boldsymbol{G}$. On a $\boldsymbol{A}[\boldsymbol{G}] = \bigoplus_{g\in\boldsymbol{G}} \boldsymbol{A}$, d'où une structure canonique de $\boldsymbol{A}$-module à gauche libre pour $\boldsymbol{A}[\boldsymbol{G}]$. Notons δ_g l'élément de la base canonique de $\boldsymbol{A}[\boldsymbol{G}]$ correspondant à l'indice d'indexation $g \in \boldsymbol{G}$; un élément $x \in \boldsymbol{A}[\boldsymbol{G}]$ s'écrit alors $x = \sum_{g\in\boldsymbol{G}} x(g)\cdot\delta_g$ avec des coefficients $x(g) \in \boldsymbol{A}$ presque tous nuls, et ceci de manière unique. On définit une multiplication sur $\boldsymbol{A}[\boldsymbol{G}]$ par la formule

$$\begin{cases} x\cdot y := \sum_{g\in\boldsymbol{G}} z(g)\,\delta_g \text{ ; avec} \\ z(g) := \sum_{h\in\boldsymbol{G}} x(h)\,y(h^{-1}g) \end{cases}$$

Le triplet $(\boldsymbol{A}[\boldsymbol{G}], 0, \delta_1, +, \cdot)$ est alors une structure $\boldsymbol{A}$-algèbre qui est de type fini lorsque c'est ainsi pour $\boldsymbol{G}$.

Pour tout morphisme de groupes $\alpha : \boldsymbol{G}_1 \to \boldsymbol{G}_2$, notons $\boldsymbol{A}[\alpha] : \boldsymbol{A}[\boldsymbol{G}_1] \to \boldsymbol{A}[\boldsymbol{G}_2]$ l'application définie par :

$$\boldsymbol{A}[\alpha]\Big(\sum_{g\in\boldsymbol{G}} x(g)\,\delta_g\Big) := \sum_{g\in\boldsymbol{G}} x(g)\,\delta_{\alpha(g)}\,.$$

On vérifie que $\boldsymbol{A}[\alpha]$ est un morphisme de $\boldsymbol{A}$-algèbres.

La correspondance $\boldsymbol{A}[\_]$ qui associe $\boldsymbol{G} \rightsquigarrow \boldsymbol{A}[\boldsymbol{G}]$ et $\alpha \rightsquigarrow \boldsymbol{A}[\alpha]$ est fonctorielle de la catégorie $\mathrm{Mod}(\mathbb{Z})$ des groupes abéliens vers la catégorie $\mathrm{Alg}(\boldsymbol{A})$ des $\boldsymbol{A}$-algèbres.

a) Montrer que le foncteur $\boldsymbol{A}[\_]$ est adjoint à gauche du foncteur $(\_)^*$ qui associe à une $\boldsymbol{A}$-algèbre $\boldsymbol{B}$, le groupe $\boldsymbol{B}^*$ de ses éléments inversibles et à un morphisme d'algèbres sa restriction aux éléments inversibles ; autrement dit, montrer que pour toute $\boldsymbol{A}$-algèbre $\boldsymbol{B}$ et tout groupe abélien $\boldsymbol{G}$, l'application :

$$\begin{aligned} \mathrm{Mor}(\boldsymbol{G}, \boldsymbol{B}^*) &\xrightarrow{\ \psi\ } \mathrm{Homom}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{A}[\boldsymbol{G}], \boldsymbol{B}) \\ \alpha &\longmapsto \Big(\textstyle\sum_{g\in\boldsymbol{G}} x(g)\,\delta_g \overset{\psi(\alpha)}{\longmapsto} \sum_{g\in\boldsymbol{G}} x(g)\,\alpha(g)\Big) \end{aligned}$$

est naturelle et bijective.

b) Monter que le foncteur $\boldsymbol{A}[\_]$ transforme une somme directe de groupes abéliens en produit tensoriel de $\boldsymbol{A}$-algèbres.

c) i) Soit $\varphi : \boldsymbol{B} \twoheadrightarrow \boldsymbol{C}$ un morphisme surjectif de $\boldsymbol{A}$-algèbres de noyau $\boldsymbol{I}$ vérifiant $\boldsymbol{I}^2 = \mathbf{0}$. Montrer que la restriction de φ au groupe $(\boldsymbol{B}^*, \cdot, \mathbf{1}_{\boldsymbol{B}})$ des éléments inversibles de $\boldsymbol{B}$ est un morphisme de groupes surjectif sur $(\boldsymbol{C}^*, \cdot, \mathbf{1}_{\boldsymbol{C}})$ de noyau isomorphe au groupe $(\boldsymbol{I}, +, \mathbf{0}_{\boldsymbol{B}})$. Plus précisément, monter que la suite de groupes abéliens :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{0} \to (\boldsymbol{I}, +, \mathbf{0}_{\boldsymbol{B}}) & \longrightarrow & (\boldsymbol{B}^*, \cdot, \mathbf{1}_{\boldsymbol{B}}) & \xrightarrow{\varphi} & (\boldsymbol{C}^*, \cdot, \mathbf{1}_{\boldsymbol{C}}) \to \mathbf{1} \\ x & \longmapsto & 1 + x & & \end{array}$$

est exacte.

ii) À l'aide de (a) et (b), monter que $\boldsymbol{A}[\boldsymbol{G}_1 \times \boldsymbol{G}_2]$ vérifie la propriété de relèvement de l'assertion (d) de la proposition 4.2.7 pour $\boldsymbol{I}$ de carré nul, si et seulement si, il en est de même pour chaque $\boldsymbol{A}[\boldsymbol{G}_i]$.

d) Montrer que $\boldsymbol{A}[\mathbb{Z}^m]$ est isomorphe à $\boldsymbol{A}[X_1, \ldots, X_m]_{X_1 \cdots X_m}$, et donc que $\boldsymbol{A}[\mathbb{Z}^m]$ est une $\boldsymbol{A}$-algèbre lisse, pour tout entier positif m.

e) Montrer que $\boldsymbol{A}\big[\mathbb{Z}/\langle p^m\rangle\big]$ est isomorphe à $\boldsymbol{A}\big[X/\langle X^{p^m} - 1\rangle\big]$, pour tout nombre premier p et tout entier positif m. En déduire que $\boldsymbol{A}\big[\mathbb{Z}/\langle p^m\rangle\big]$ est une $\boldsymbol{A}$-algèbre lisse, si et seulement si, $p{\cdot}\mathbf{1}_{\boldsymbol{A}}$ est inversible dans $\boldsymbol{A}$ (on dit alors que « *p est inversible dans $\boldsymbol{A}$* »).

f) À l'aide des résultats précédents, montrer que pour tout groupe abélien de type fini $\boldsymbol{G}$, l'algèbre $\boldsymbol{A}[\boldsymbol{G}]$ est lisse sur $\boldsymbol{A}$, si et seulement si, les ordres des éléments de $\boldsymbol{G}$ d'ordre fini sont inversibles dans $\boldsymbol{A}$.

Indication : Utiliser le fait que pour tout $\mathbb{Z}$-module $\boldsymbol{G}$ de type fini, il existe une famille finie (peut être vide) de nombres premiers $\{p_1, p_2, \ldots, p_r\}$ et une famille finie d'entiers positifs ou nuls $\{m_0, m_2, \ldots, m_r\}$ telles que :

$$\boldsymbol{G} \equiv \mathbb{Z}^{m_0} \oplus \frac{\mathbb{Z}}{\langle p_1^{m_1}\rangle} \oplus \frac{\mathbb{Z}}{\langle p_2^{m_2}\rangle} \oplus \cdots \oplus \frac{\mathbb{Z}}{\langle p_r^{m_r}\rangle} \cdot$$

g) Pour tout groupe abélien $\boldsymbol{G}$ notons $\mathfrak{T}(\boldsymbol{G})$ le sous-ensemble de ses éléments de torsion, *i.e.* d'ordre strictement positif. L'ensemble $\mathfrak{T}(\boldsymbol{G})$ est un sous-groupe de $\boldsymbol{G}$ et le quotient $\boldsymbol{G}/\mathfrak{T}(\boldsymbol{G})$ ne possède aucun élément de torsion. Lorsque $\boldsymbol{G}$ est de type fini, $\mathfrak{T}(\boldsymbol{G})$ est fini et $\boldsymbol{G}/\mathfrak{T}(\boldsymbol{G})$ est un $\mathbb{Z}$-module de type fini sans torsion donc libre ; le groupe $\boldsymbol{G}$ est, par conséquent, isomorphe $\mathfrak{T}(\boldsymbol{G}) \oplus \mathbb{Z}^m$ pour un certain $m \in \mathbb{N}$.

Montrer comme conséquence de cette remarque et de (f) que lorsque $\boldsymbol{G}$ est de type fini, la $\boldsymbol{A}$-algèbre $\boldsymbol{A}[\boldsymbol{G}]$ est lisse, si et seulement si, le cardinal de $\mathfrak{T}(\boldsymbol{G})$ est inversible dans $\boldsymbol{A}$.

Le corollaire 4.3.2 fait référence à une présentation d'une $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$ comme quotient d'une algèbre de polynômes par un nombre fini de relations. Dans le corollaire suivant nous étendons l'équivalente (a)⇔(c') de 4.2.7 au cas où $\boldsymbol{A}$ est donnée comme quotient d'une $\boldsymbol{R}$-algèbre lisse $\boldsymbol{C}$ par un nombre fini de relations. Nous aurons besoin de ce résultat dans la démonstration de l'existence de relèvements lisses d'algèbres du théorème 5.2.7.

4.3.5. Corollaire : *Soient $\boldsymbol{R}$ un anneau, $\boldsymbol{C}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre lisse et $\boldsymbol{L}$ un idéal de type fini de $\boldsymbol{C}$. Notons $\boldsymbol{A} := \boldsymbol{C}/\boldsymbol{L}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) *$\boldsymbol{A}$ est une $\boldsymbol{R}$-algèbre lisse.*

b) *Le morphisme de $\boldsymbol{A}$-modules $\partial : \boldsymbol{L}/\boldsymbol{L}^2 \to \Omega_{\boldsymbol{C}/\boldsymbol{R}} \otimes_{\boldsymbol{C}} \boldsymbol{A}$ de la première suite fondamentale associée à la surjection canonique $\boldsymbol{C} \twoheadrightarrow \boldsymbol{A}$ (1.3.1) est injectif et admet une rétraction.*

Démonstration : Fixons une présentation finie de $\boldsymbol{C}$:

$$\mathbf{0} \to \boldsymbol{J} \hookrightarrow \boldsymbol{R}[\mathscr{X}] := \boldsymbol{R}[X_1, \ldots, X_q] \xrightarrow{\Pi_C} \boldsymbol{C} \to \mathbf{0}\,,$$

et considérons la présentation (finie) de $\boldsymbol{A}$:

$$\mathbf{0} \to \Pi_{\boldsymbol{C}}^{-1}(\boldsymbol{L}) \hookrightarrow \boldsymbol{R}[\mathscr{X}] := \boldsymbol{R}[X_1, \ldots, X_q] \xrightarrow{\Pi_A} \boldsymbol{A} \to \mathbf{0}\,.$$

Comme $\boldsymbol{C}$ est supposée lisse, on a la première suite fondamentale scindée :

$$\mathbf{0} \to \boldsymbol{J}/\boldsymbol{J}^2 \underset{\rho}{\overset{\partial_C}{\rightleftarrows}} \Omega_{\boldsymbol{R}[\mathscr{X}]/\boldsymbol{R}} \otimes_{\boldsymbol{R}[\mathscr{X}]} \boldsymbol{C} \twoheadrightarrow \Omega_{\boldsymbol{C}/\boldsymbol{R}} \to \mathbf{0}$$

d'où le diagramme de $\boldsymbol{A}$-modules :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{0} \to (\boldsymbol{J}/\boldsymbol{J}^2) \otimes_{\boldsymbol{C}} \boldsymbol{A} \arrow[r, shift left, "\partial_C \otimes \mathbf{1}_A"] \arrow[d, "\alpha"'] & \Omega_{\boldsymbol{R}[\mathscr{X}]/\boldsymbol{R}} \otimes_{\boldsymbol{R}[\mathscr{X}]} \boldsymbol{A} \arrow[l, shift left, "\rho \otimes \mathbf{1}_A"] \arrow[r, two heads, "\nu"] \arrow[d, "="] & \Omega_{\boldsymbol{C}/\boldsymbol{R}} \otimes_{\boldsymbol{C}} \boldsymbol{A} \to \mathbf{0} \arrow[d, two heads, "\beta"] \\
\Pi_{\boldsymbol{C}}^{-1}(\boldsymbol{L})/\Pi_{\boldsymbol{C}}^{-1}(\boldsymbol{L})^2 \arrow[r, "\partial_A"] & \Omega_{\boldsymbol{R}[\mathscr{X}]/\boldsymbol{R}} \otimes_{\boldsymbol{R}[\mathscr{X}]} \boldsymbol{A} \arrow[r, two heads] & \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \arrow[r] & \mathbf{0}
\end{tikzcd} \tag{$\mathscr{D}$}$$

où $\operatorname{coker}(\alpha) \equiv \boldsymbol{L}/\boldsymbol{L}^2$ et où la composée $\nu \circ \partial_{\boldsymbol{A}}$ est "bien définie" sur $\operatorname{coker}(\alpha)$ et s'identifie naturellement au morphisme ∂ de l'assertion (b).

Lorsque $\boldsymbol{A}$ est lisse sur $\boldsymbol{R}$, la seconde ligne dans ($\mathscr{D}$) est exacte et scindée et une simple chasse au diagramme montre que la suite :

$$\mathbf{0} \to \operatorname{coker}(\alpha) = \boldsymbol{L}/\boldsymbol{L}^2 \xrightarrow[\nu \circ \partial_A]{\partial} \Omega_{\boldsymbol{C}/\boldsymbol{R}} \otimes_{\boldsymbol{C}} \boldsymbol{A} \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \to \mathbf{0} \tag{‡}$$

est exacte. Comme $\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$ est projectif (4.2.7-(b)), le morphisme β admet une section et donc ∂ admet une rétraction.

Réciproquement, lorsque ∂ est injective et admet une rétraction, la suite (‡) est exacte et scindée et la cohomologie du complexe simple associé au bicomplexe ($\mathscr{D}$) est nulle. La seconde ligne de ($\mathscr{D}$) est donc exacte. Mais le scindage de (‡) montre également que $\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$ est un $\boldsymbol{A}$-module projectif puisque facteur direct de $\Omega_{\boldsymbol{C}/\boldsymbol{R}} \otimes_{\boldsymbol{C}} \boldsymbol{A}$. La seconde ligne de ($\mathscr{D}$) est par conséquent scindée et le corollaire est prouvé. ∎

4.3.6. Exercice : Démontrer le « *Critère de Jacobi* » suivant :

Soient $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{Z}$ deux $\boldsymbol{S}$-schémas, et soit $\jmath : \boldsymbol{X} \hookrightarrow \boldsymbol{Z}$ une immersion fermée localement de présentation finie. Soit $\mathscr{I}$ le faisceau d'idéaux de $\mathscr{O}_{\boldsymbol{Z}}$ qui définit $\boldsymbol{X}$ comme sous-schéma de $\boldsymbol{Z}$. Soit x un point de $\boldsymbol{X}$, et posons $z := \jmath(x)$. Supposons que, en tant que $\boldsymbol{S}$-schéma, $\boldsymbol{Z}$ est lisse en z de dimension relative n. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :

a) *En tant que $\boldsymbol{S}$-schéma, $\boldsymbol{X}$ est lisse en x de dimension relative r.*

b) *La suite canonique de $\mathscr{O}_{\boldsymbol{X}}$-modules :*

$$\mathbf{0} \to \mathscr{I}/\mathscr{I}^2 \longrightarrow \jmath^*\underline{\underline{\Omega}}^1_{\boldsymbol{Z}/\boldsymbol{S}} \longrightarrow \underline{\underline{\Omega}}^1_{\boldsymbol{X}/\boldsymbol{S}} \to \mathbf{0}\,,$$

est exacte et scindée en x et $r = \dim_{k(x)} \big(\underline{\underline{\Omega}}^1_{\boldsymbol{X}/\boldsymbol{S}} \otimes k(x)\big)$.

c) *Si $dz_1, \ldots, dz_n$ est une base de $\underline{\underline{\Omega}}^1_{\boldsymbol{Z}/\boldsymbol{S}\,(x)}$, et si $g_1, \ldots, g_N$ sont des sections locales de $\mathscr{O}_{\boldsymbol{Z}}$ qui engendrent $\mathscr{I}_{(z)}$, il existe une réindexation de $z_1, \ldots, z_n$ et de $g_1, \ldots, g_N$ telle que $g_{r+1}, \ldots, g_n$ engendrent $\mathscr{I}_{(z)}$ et $dz_1, \ldots, dz_r, dg_{r+1}, \ldots, dg_n$ engendrent $\underline{\underline{\Omega}}^1_{\boldsymbol{Z}/\boldsymbol{S}\,(z)}$.*

d) *Il existe des sections locales $g_{r+1}, \ldots, g_n$ de $\mathscr{O}_{\boldsymbol{Z}}$ qui engendrent $\mathscr{I}_{(z)}$ et telles que les différentielles $dg_{r+1}, \ldots, dg_n$ sont linéairement indépendantes dans $\underline{\underline{\Omega}}^1_{\boldsymbol{Z}/\boldsymbol{S}} \otimes k(z)$.*

4.3.7. Lissité de l'algèbre symétrique d'un module projectif

Proposition : *Soit $\boldsymbol{M}$ un $\boldsymbol{R}$-module projectif de type fini. L'algèbre symétrique $\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{M})$ est lisse sur $\boldsymbol{R}$.*

Démonstration : On sait que $\boldsymbol{M}$ est facteur direct dans un module libre $\boldsymbol{R}^N$, de sorte qu'il existe des morphismes de $\boldsymbol{R}$-modules $\boldsymbol{M} \hookrightarrow \boldsymbol{R}^N \twoheadrightarrow \boldsymbol{M}$ dont la composée est l'identité sur $\boldsymbol{M}$. On en déduit des morphismes de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{M}) \overset{p}{\hookrightarrow} \mathsf{S}^*_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{R}^N) \overset{q}{\twoheadrightarrow} \mathsf{S}^*_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{M})$ dont la composée est également l'identité. Comme $\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{R}^N)$ est clairement lisse (isomorphe à $\boldsymbol{R}[X_1, \ldots, X_N]$), elle vérifie le critère de la proposition 4.2.7-(d). On en déduit que $\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{M})$ vérifie ce même critère à l'aide des morphismes p et q (laissé en exercice). ∎

4.3.8. À propos de l'exactitude à gauche de la seconde suite fondamentale

Soient $\boldsymbol{R}$ un anneau et $\alpha : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres. Nous avons donné dans le lemme 1.6.2 une condition simple et générale garantissant une la seconde suite exacte fondamentale scindée. Voici maintenant un critère de scindage en termes de lissité.

Proposition : *Soient $\boldsymbol{R}$ un anneau et $\alpha : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ un morphisme lisse $\boldsymbol{R}$-algèbres. La seconde suite fondamentale de $\boldsymbol{B}$-modules :*

$$\mathbf{0} \to \boldsymbol{B} \otimes_{\boldsymbol{A}} \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \xrightarrow{\mathbf{1}_{\boldsymbol{B}} \times \Omega(\alpha)} \Omega_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{R}} \longrightarrow \Omega_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{A}} \to \mathbf{0}$$

est exacte et le morphisme $\mathbf{1}_{\boldsymbol{B}} \times \Omega(\alpha)$ admet une rétraction.

En particulier, lorsque α est étale, le morphisme $\mathbf{1}_{\boldsymbol{B}} \times \Omega(\alpha)$ est un isomorphisme.

Démonstration : Considérons $\boldsymbol{B}$ muni de la structure de $\boldsymbol{A}$-algèbre induite par l'homomorphisme α et fixons une présentation finie

$$\boldsymbol{J} \hookrightarrow \boldsymbol{A}[\mathscr{X}] := \boldsymbol{A}[X_1, \ldots, X_n] \twoheadrightarrow \boldsymbol{B}$$

de $\boldsymbol{B}$. On a le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathbf{0} \arrow[d] & & \\
 & & \boldsymbol{B} \otimes_{\boldsymbol{A}[\mathscr{X}]} \boldsymbol{A}[\mathscr{X}]_{\otimes_{\boldsymbol{A}}} \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \arrow[r, "\equiv"] \arrow[d, "\mathbf{1}_{\boldsymbol{B}} \times \Omega(\iota)"] & \boldsymbol{B} \otimes_{\boldsymbol{A}} \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \arrow[d, "\mathbf{1}_{\boldsymbol{B}} \times \Omega(\alpha)"] & \\
 & \boldsymbol{J}/\boldsymbol{J}^2 \arrow[r, shift left, "\partial"] \arrow[d, equal] & \boldsymbol{B} \otimes_{\boldsymbol{A}[\mathscr{X}]} \Omega_{\boldsymbol{A}[\mathscr{X}]/\boldsymbol{R}} \arrow[l, shift left] \arrow[r, two heads] \arrow[d] & \Omega_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{R}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} \arrow[r] & \boldsymbol{J}/\boldsymbol{J}^2 \arrow[r, shift left, "\partial"] \arrow[d] & \boldsymbol{B} \otimes_{\boldsymbol{A}[\mathscr{X}]} \Omega_{\boldsymbol{A}[\mathscr{X}]/\boldsymbol{A}} \arrow[l, shift left] \arrow[r, two heads] \arrow[d] & \Omega_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{A}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{0} \\
 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} &
\end{tikzcd}$$

où les dernières lignes sont les premières suites exactes fondamentales associées à α, relatives respectivement à $\boldsymbol{R}$ et $\boldsymbol{A}$, et où les dernières colonnes sont les secondes suites fondamentales associées à l'homomorphisme structural $\iota : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}[\mathscr{X}]$ et à α respectivement.

L'injectivité de $1_{\boldsymbol{B}} \otimes \Omega(\iota)$ résulte du fait que la surjection $p : \boldsymbol{A}[\mathscr{X}] \twoheadrightarrow \boldsymbol{A}$, définie par $p(X_i) = 0$, est une rétraction de ι de sorte que $\Omega(p) \circ \Omega(\iota) = \mathrm{id}_{\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}}$. Enfin, le scindage de la dernière ligne (et donc de la ligne centrale) vient de la lissité de $\boldsymbol{B}$ sur $\boldsymbol{A}$. Une simple chasse au diagrammes suffit alors pour montrer l'injectivité de $\mathbf{1}_{\boldsymbol{B}} \times \Omega(\alpha)$ et comme $\Omega_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{A}}$ est un $\boldsymbol{B}$-module projectif le scindage de la dernière colonne en découle.

Enfin, lorsque α est en plus étale, $\Omega_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{A}} = \mathbf{0}$ et la conclusion est évidente. ∎

4.3.9. Transitivité de la lissité

Proposition : *Soient $\boldsymbol{X}$ un schéma lisse sur $\boldsymbol{S}$ et $\boldsymbol{Y}$ un schéma lisse sur $\boldsymbol{X}$. Alors $\boldsymbol{Y}$ est un schéma lisse sur $\boldsymbol{S}$.*

Démonstration : En nous restreignant à une situation locale affine, nous avons à prouver que si $\boldsymbol{A}$ est une $\boldsymbol{R}$-algèbre lisse et si $\boldsymbol{B}$ est une $\boldsymbol{A}$-algèbre lisse, alors $\boldsymbol{B}$ est lisse sur $\boldsymbol{R}$. On applique pour ceci le critère de lissité donné par la proposition 4.2.7-(d).

Soient $\boldsymbol{C}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre, $\boldsymbol{I} \subseteq \boldsymbol{C}$ un idéal de carré nul et $\nu : \boldsymbol{C} \twoheadrightarrow \boldsymbol{C}/\boldsymbol{I}$ la surjection canonique. Montrons la surjectivité de l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Homom}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}) & \longrightarrow & \mathrm{Homom}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}/\boldsymbol{I}) \\ \varphi & \longmapsto & \nu\circ\varphi \end{array} \tag{$*$}$$

Soit α l'homomorphisme structural de $\boldsymbol{A}$ dans $\boldsymbol{B}$ et considérons le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd} & & \boldsymbol{A} \arrow[d, "\alpha"] \arrow[ddl, dashed, "\phi"'] \\ & & \boldsymbol{B} \arrow[d, "\psi"] \arrow[dl, dashed, "\varphi"] \\ \boldsymbol{I} \arrow[r, hook, "\subseteq"] & \boldsymbol{C} \arrow[r, two heads, "\nu"] & \boldsymbol{C}/\boldsymbol{I} \end{tikzcd}$$

Comme $\boldsymbol{A}$ est lisse sur $\boldsymbol{R}$, il existe un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres ϕ qui relève la composée $\psi\circ\alpha$ et la $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{C}$ se trouve munie d'une structure de $\boldsymbol{A}$-algèbre telle que $\boldsymbol{I}$ est un idéal de $\boldsymbol{A}$-algèbre. D'autre part l'homomorphisme ψ est un morphisme de $\boldsymbol{A}$-algèbres (via α). La lissité de $\boldsymbol{B}$ sur $\boldsymbol{A}$ affirme alors l'existence d'un relèvement φ de ψ et $(*)$ est bien surjective. ■

4.3.10. Stabilité de la lissité par changement de base

Proposition : *Soit $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{S}$ un morphisme de schémas lisse. Pour tout morphisme de schémas $g : \boldsymbol{S}' \to \boldsymbol{S}$ le morphisme induit $g^* : \boldsymbol{X} \times_{\boldsymbol{S}} \boldsymbol{S}' \to \boldsymbol{S}'$ est lisse.*

Démonstration : La lissité étant de nature locale, la proposition résulte de sa version affine (*cf.* 4.2.7), c'est-à-dire :

Soit $\boldsymbol{A}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre lisse et soit $\boldsymbol{R}'$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre. Alors $\boldsymbol{R}' \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{A}$ est une $\boldsymbol{R}'$-algèbre lisse.

Comme le foncteur $\boldsymbol{R}' \otimes_{\boldsymbol{R}} (\_)$ est exact à droite, la $\boldsymbol{R}'$-algèbre $\boldsymbol{R}' \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{A}$ est de présentation finie et nous pouvons appliquer le critère de lissité de 4.2.7(d). Soit donc $\boldsymbol{B}$ une $\boldsymbol{R}'$-algèbre et $\boldsymbol{I}$ un idéal de carré nul de $\boldsymbol{B}$, on a le diagramme d'applications canoniques :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Homom}_{\boldsymbol{R}'}(\boldsymbol{R}' \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}/\boldsymbol{I}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Homom}_{\boldsymbol{R}'}(\boldsymbol{R}' \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \arrow[d] \\
\mathrm{Homom}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}/\boldsymbol{I}) \arrow[r, two heads] & \mathrm{Homom}_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})
\end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont induites par l'homomorphisme d'algèbres $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{R}' \otimes \boldsymbol{A}$, $a \mapsto \mathbf{1}_{\boldsymbol{R}'} \otimes a$ et sont donc des bijections (*cf.* [B$_1$] prop. 5, A III.7). La proposition résulte maintenant de la surjectivité de la seconde application horizontale. ∎

4.4 Lissité, platitude et produit fibré

4.4.1. Morphismes plats

Définition : Un morphisme de schémas $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{S}$ est dit « *plat* » lorsque pour tout $x \in \boldsymbol{X}$, le $\mathscr{O}_{\boldsymbol{S},f(x)}$-module $\mathscr{O}_{\boldsymbol{X},x}$ est plat.

Lorsque $\boldsymbol{X} = \mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$, $\boldsymbol{S} = \mathrm{Spec}(\boldsymbol{R})$ et que $f = \mathrm{Spec}(\varphi)$ pour un morphisme d'anneaux $\varphi : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{A}$, le morphisme f est plat si, pour tout idéal premier $\mathfrak{P} \subseteq \boldsymbol{A}$ l'anneau $\boldsymbol{A}_{\mathfrak{P}}$, vu comme $\boldsymbol{R}_{\mathfrak{Q}}$-module, où $\mathfrak{Q} := \varphi^{-1}(\mathfrak{P})$, est plat.

4.4.2. Remarque : Il convient de souligner que dans le cas affine, la condition de la définition équivaut au fait que $\boldsymbol{A}$ est un $\boldsymbol{R}$-module plat (*cf.* [Mat] 3.J p. 24). Dans ce cas on dit que « *$\boldsymbol{A}$ est une $\boldsymbol{R}$-algèbre plate* ».

4.4.3. Transitivité de la platitude

Proposition : *Soient $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{S}$ et $g : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{X}$ des de schémas plats. Le morphisme $g \circ f : \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{S}$ est plat.*

Démonstration : Résulte immédiatement de la transitivité de la platitude pour les algèbres. ∎

4.4.4. Stabilité de la platitude par changement de base

Proposition : *Soit $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{S}$ un morphisme de schémas plat. Pour tout morphisme de schémas $g : \boldsymbol{S}' \to \boldsymbol{S}$ le morphisme induit $g^* : \boldsymbol{X} \times_{\boldsymbol{S}} \boldsymbol{S}' \to \boldsymbol{S}'$ est plat.*

Démonstration : En termes de schémas affines la proposition se traduit en : « *Soient* $\boldsymbol{R}'$ *et* $\boldsymbol{A}$ *deux* $\boldsymbol{R}$*-algèbres où* $\boldsymbol{A}$ *est* $\boldsymbol{R}$*-plate, alors* $\boldsymbol{R}' \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{A}$ *est* $\boldsymbol{R}'$*-plate* ». *Ceci résulte du fait qu'une inclusion* $\iota : \boldsymbol{N} \subseteq \boldsymbol{M}$ *de* $\boldsymbol{R}'$*-modules est automatiquement une inclusion de* $\boldsymbol{R}$*-modules et alors* $1 \otimes \iota : \boldsymbol{A} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{A} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{M}$ *est injective puisque* $\boldsymbol{A}$ *est* $\boldsymbol{R}$*-plat. On conclut alors grâce à l'isomorphisme naturel* $\boldsymbol{A} \otimes_{\boldsymbol{R}} (\boldsymbol{L}) \equiv \boldsymbol{A} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{R}' \otimes_{\boldsymbol{R}'} (\boldsymbol{L})$ *pour tout* $\boldsymbol{R}'$*-module* $\boldsymbol{L}$. ■

4.4.5. Lissité et platitude

Proposition : *Une algèbre lisse est plate.*

Démonstration : Soit $\boldsymbol{A}$ une algèbre lisse sur un anneau $\boldsymbol{R}$ de présentation finie : $\boldsymbol{0} \to \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{R}[\mathscr{X}] \to \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{0}$, et considérons la suite infinie d'homomorphismes de $\boldsymbol{R}$-algèbres :

$$\boldsymbol{R}[\mathscr{X}]\widehat{\ }_{\boldsymbol{J}} := \varprojlim_{N \in \mathbb{N}^+} \boldsymbol{R}[\mathscr{X}]/\boldsymbol{J}^N \xrightarrow{\pi_\infty} \cdots \xrightarrow{\pi_4} \boldsymbol{R}[\mathscr{X}]/\boldsymbol{J}^3 \xrightarrow{\pi_3} \boldsymbol{R}[\mathscr{X}]/\boldsymbol{J}^2 \xrightarrow{\pi_2} \boldsymbol{R}[\mathscr{X}]/\boldsymbol{J} = \boldsymbol{A}$$

où le noyau de chaque π_r est de carré nul. Notons $p_\infty : \boldsymbol{R}[\mathscr{X}]\widehat{\ }_{\boldsymbol{J}} \to \boldsymbol{A}$ la projection canonique.

Par la propriété universelle des algèbres lisses (*cf.* 4.2.7(d)) l'identité sur $\boldsymbol{A}$ se relève successivement en des morphismes de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\sigma_r : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{R}[\mathscr{X}]/\boldsymbol{J}^r$ et donne, par passage à la limite projective, un morphisme $\sigma_\infty : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{R}[\mathscr{X}]\widehat{\ }_{\boldsymbol{J}}$ qui est une section de p_∞ ; en particulier $\boldsymbol{A}$ est un facteur direct de $\boldsymbol{R}[\mathscr{X}]\widehat{\ }_{\boldsymbol{J}}$ en tant que $\boldsymbol{R}$-module et, par conséquent, $\boldsymbol{A}$ est un $\boldsymbol{R}$-module plat, si $\boldsymbol{R}[\mathscr{X}]\widehat{\ }_{\boldsymbol{J}}$ l'est.

Or, si nous supposons l'anneau $\boldsymbol{R}$ ***nœthérien***, l'anneau $\boldsymbol{R}[\mathscr{X}]$ l'est également et comme $\boldsymbol{R}[\mathscr{X}]\widehat{\ }_{\boldsymbol{J}}$ n'est autre que son complété $\boldsymbol{J}$-adique, il est $\boldsymbol{R}[\mathscr{X}]$-plat (*cf.* [Mat] 23.L, cor. 1, p. 170). Comme $\boldsymbol{R}[\mathscr{X}]$ est $\boldsymbol{R}$-libre donc plat, la composée des applications canoniques $\boldsymbol{R} \hookrightarrow \boldsymbol{R}[\mathscr{X}] \to \boldsymbol{R}[\mathscr{X}]\widehat{\ }_{\boldsymbol{J}}$ est plate et $\boldsymbol{R}[\mathscr{X}]\widehat{\ }_{\boldsymbol{J}}$ est un $\boldsymbol{R}$-module plat.

Dans le cas où $\boldsymbol{R}$ n'est pas un anneau nœthérien, l'idée est de le réaliser comme limite du système inductif, filtrant supérieurement, des $\mathbb{Z}$-sous-algèbres de type fini (donc nœthériennes) de $\boldsymbol{R}$ mais de façon à « préserver la lissité ». Plus précisément, pour chaque sous-anneau $\boldsymbol{T} \subseteq \boldsymbol{R}$, on a $\boldsymbol{T}[\mathscr{X}] \subseteq \boldsymbol{R}[\mathscr{X}]$ et nous notons $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{T}) := \boldsymbol{T}[\mathscr{X}] \cap \boldsymbol{J}$ et $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{T}) := \boldsymbol{T}[\mathscr{X}]/\boldsymbol{J}(\boldsymbol{T})$ de sorte que $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{T}) \subseteq \boldsymbol{A}$. On remarque alors que $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{T})$ est $\boldsymbol{T}$-lisse à chaque fois que l'application

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{T})/\boldsymbol{J}(\boldsymbol{T})^2 \xrightarrow{\partial(\boldsymbol{T})} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{T}) \otimes_{\boldsymbol{T}[\mathscr{X}]} \Omega_{\boldsymbol{T}[\mathscr{X}]/\boldsymbol{T}}$$

admet une rétraction (*cf.* prop. 4.2.4). Or, la lissité de $\boldsymbol{A}$ donne une rétraction de

$$\boldsymbol{J}/\boldsymbol{J}^2 \xrightarrow{\partial} \boldsymbol{A} \otimes_{\boldsymbol{R}[\mathscr{X}]} \Omega_{\boldsymbol{R}[\mathscr{X}]/\boldsymbol{R}} \tag{‡}$$

et comme $\boldsymbol{J}$ est de type fini, on comprend qu'à partir du moment où l'on fixe un système fini de générateurs de $\boldsymbol{J}$ (des polynômes à coefficients dans $\boldsymbol{R}$), ce qui détermine un ensemble fini de scalaires dans $\boldsymbol{R}$ (les coefficients des polynômes en question), la rétraction de (‡) ne demandera au plus qu'un nombre fini de scalaires supplémentaires et la conclusion de ces remarques est qu'il existe un ensemble ***fini*** $\boldsymbol{\mathfrak{F}} \subseteq \boldsymbol{R}$ tel que, si $\boldsymbol{T} \supseteq \boldsymbol{\mathfrak{F}}$, alors $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{T})$ est $\boldsymbol{T}$-lisse.

On réalise alors $\boldsymbol{R}$ comme limite du système inductif filtrant supérieurement des $\mathbb{Z}$-sous-algèbres de type fini $\boldsymbol{T}$ qui contiennent l'ensemble $\boldsymbol{\mathfrak{F}}$. On a $\boldsymbol{A} = \varinjlim_{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{T})$ et chaque $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{T})$ est $\boldsymbol{T}$-plate d'après l'étude préliminaire. On termine en observant que comme une injection de $\boldsymbol{R}$-modules $\boldsymbol{N} \hookrightarrow \boldsymbol{M}$ $(*)$ est automatiquement une injection de $\boldsymbol{T}$-modules et comme l'application induite

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{T}) \otimes_{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{N} \hookrightarrow \boldsymbol{A}(\boldsymbol{T}) \otimes_{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{M} \tag{$**$}$$

est injective par la platitude de $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{T})$, le passage à la limite inductive sur $\boldsymbol{T}$ de $(**)$ est injective et cette limite est précisément le morphisme $\boldsymbol{A} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{A} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{M}$ induit par (*). ■

Le théorème suivant donne un autre critère intrinsèque de lissité d'un morphisme de schémas, il présente l'intérêt de ramener l'étude de la lissité d'un morphisme à celles de sa platitude et de la lissité de ses fibres (des schémas sur des corps !). La platitude du morphisme se voit alors comme une condition de recollement lisse de fibres (*cf.* [EGA$_{4,4}$] §17.5 p. 67).

4.4.6. Théorème : *Soit $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{S}$ un morphisme de schémas localement de présentation finie. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

a) *f est lisse.*

b) *f est plat et pour chaque $y \in \boldsymbol{S}$ la fibre $\boldsymbol{X}_y := \boldsymbol{X} \times_{\boldsymbol{S}} k(y)$ est lisse sur $k(y)$.*

Démonstration : L'implication (a)⇒(b) est conséquence immédiate des propositions 4.3.10 et 4.4.5. Prouvons la réciproque suivant [BLR] prop. 8 p. 53.

On se place dans une situation affine : $\boldsymbol{S} := \operatorname{Spec}(\boldsymbol{R})$, $\boldsymbol{X} := \operatorname{Spec}(\boldsymbol{A})$, $f := \operatorname{Spec}(\varphi)$, $\mathfrak{P}$ l'idéal correspondant à $x \in \boldsymbol{X}$ et $\mathfrak{R} := \varphi^{-1}(\mathfrak{P})$ celui correspondant à $f(x)$. On fixe une présentation finie $\mathbf{0} \to \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{R}[\mathscr{X}] \to \boldsymbol{A} \to \mathbf{0}$.

La suite $\mathbf{0} \to \boldsymbol{J} \otimes_{\boldsymbol{R}} k(\mathfrak{R}) \to k(\mathfrak{R})[\mathscr{X}] \to \boldsymbol{A} \otimes_{\boldsymbol{R}} k(\mathfrak{R}) \to \mathbf{0}$ est exacte puisque $\boldsymbol{A}$ est $\boldsymbol{R}$-plate, et comme $\boldsymbol{A} \otimes_{\boldsymbol{R}} k(\mathfrak{R})$ est $k(\mathfrak{R})$ lisse l'application :

$$\big(\boldsymbol{J} \otimes_{\boldsymbol{R}} k(\mathfrak{R})\big)/\big(\boldsymbol{J} \otimes_{\boldsymbol{R}} k(\mathfrak{R})\big)^2 \xrightarrow{\partial_{\mathfrak{R}}} \big(\boldsymbol{A} \otimes_{\boldsymbol{R}} k(\mathfrak{R})\big) \otimes_{k(\mathfrak{R})[\mathscr{X}]} \Omega_{k(\mathfrak{R})[\mathscr{X}]/k(\mathfrak{R})}$$

admet une rétraction. Notons $\boldsymbol{J}'$ l'idéal de $\boldsymbol{R}[\mathscr{X}]$ engendré par un relèvement dans $\boldsymbol{J}$ d'une base de $\big(\boldsymbol{J} \otimes_{\boldsymbol{R}} k(\mathfrak{R})\big)/\big(\boldsymbol{J} \otimes_{\boldsymbol{R}} k(\mathfrak{R})\big)^2$. On a :

$$\mathbf{0} \to \boldsymbol{J}/\boldsymbol{J}' \xrightarrow{\iota} \boldsymbol{A}' := \boldsymbol{R}[\mathscr{X}]/\boldsymbol{J}' \xrightarrow{\nu} \boldsymbol{A} := \boldsymbol{R}[\mathscr{X}]/\boldsymbol{J} \to \mathbf{0} \qquad (\ddagger)$$

où ν désigne la surjection canonique.

En termes de schémas, $\boldsymbol{X} := \operatorname{Spec}(\boldsymbol{A})$ est un sous-schéma fermé de $\boldsymbol{X}' := \operatorname{Spec}(\boldsymbol{A}')$ et ce dernier est lisse au voisinage de x par construction. D'autre part, les fibres au-dessus de $k(\mathfrak{R})$ de $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{X}'$ coïncident ce qui signifie que la tensorisation de $(\ddagger)$ par $k(\mathfrak{R})$ rend ν un isomorphisme. Mais la platitude de $\boldsymbol{A}$ assure que ι reste injective après une tensorisation et par Nakayama $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}'$ au voisinage de x, de sorte que $\boldsymbol{X}$ et $\boldsymbol{X}'$ coïncident au voisinage de x. ∎

4.5 Intersections complètes lisses

Soient $\boldsymbol{R}$ un anneau et $\boldsymbol{A}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre de présentation finie

$$\mathbf{0} \to \boldsymbol{J} = \langle f_1, \dots, f_s \rangle \to \boldsymbol{R}[X_1, \dots, X_n] \to \boldsymbol{A} \to \mathbf{0}\,.$$

Lorsque $\boldsymbol{A}$ est une $\boldsymbol{R}$-algèbre lisse la dimension relative des points de $\operatorname{Spec}(\boldsymbol{A})$ est localement une constante $r \leqslant n$ qui est minorée par $n - s$ puisque tout système de générateurs de $\boldsymbol{J}$ induit un système de générateurs des différents $k(\mathfrak{P}) \otimes (\boldsymbol{J}/\boldsymbol{J}^2)$. Le cas extrême où l'idéal $\boldsymbol{J}$ admet un système de générateurs ayant exactement $n - r$ éléments présente des avantages techniques importants et mérite que l'on introduise une terminologie spécifique.

4.5.1. Définition : Une $\boldsymbol{R}$-algèbre de présentation finie $\boldsymbol{A}$ telle que $\dim_{\boldsymbol{R}}(\boldsymbol{A}) = r$ sera appelée « *intersection complète (de dimension relative r) sur $\boldsymbol{R}$* » si elle admet une présentation finie de la forme :

$$\mathbf{0} \to \boldsymbol{J} = \langle g_{r+1}, \dots, g_n \rangle \to \boldsymbol{R}[X_1, \dots, X_n] \to \boldsymbol{A} \to \mathbf{0}\,.$$

On dira, par extension, qu'un schéma $\boldsymbol{X}$ au-dessus de $\operatorname{Spec}(\boldsymbol{R})$ est « *intersection complète sur* $\operatorname{Spec}(\boldsymbol{R})$ » lorsqu'il est isomorphe au schéma affine associé à une intersection complète sur $\boldsymbol{R}$.

4.5.2. Remarque : Une algèbre lisse sur un anneau est *localement* intersection complète d'après la définition de lissité 4.2.1, elle est globalement de présentation finie, mais n'est pas nécéssairement globalement intersection complète.

Le lemme suivant est conséquence facile des développements précédents.

4.5.3. Lemme : *Soit $\boldsymbol{A}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre de présentation finie. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) *$\boldsymbol{A}$ est lisse et intersection complète de dimension relative r.*

b) *$\boldsymbol{A}$ admet une présentation finie :*

$$\mathbf{0} \to \boldsymbol{J} = \langle g_{r+1}, \ldots, g_n \rangle \to \boldsymbol{R}[X_1, \ldots, X_n] \to \boldsymbol{A} \to \mathbf{0}\,,$$

telle que l'idéal de $\boldsymbol{A}$ engendré par les mineurs d'ordre $n{-}r$ de la matrice jacobienne $[\,\partial g_i/\partial X_j\,]$ est l'idéal unité.

c) *$\boldsymbol{A}$ admet une présentation finie $\mathbf{0} \to \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{R}[X] := \boldsymbol{R}[X_1, \ldots, X_m] \to \boldsymbol{A} \to \mathbf{0}$ telle que $\boldsymbol{J}/\boldsymbol{J}^2$ est un $\boldsymbol{A}$-module libre et l'application canonique $\partial : \boldsymbol{J}/\boldsymbol{J}^2 \to \boldsymbol{A} \otimes_{\boldsymbol{R}[\mathscr{X}]} \Omega_{\boldsymbol{R}[\mathscr{X}]/\boldsymbol{R}}$ est injective et admet une rétraction.*

Démonstration : On montre l'équivalence (b)⇔(c).

(b)⇒(c). Conséquence presque immédiate du corollaire 4.1.3.

(c)⇒(b). Soit $\{\overline{m}_1, \ldots, \overline{m}_d\}$ une base de $\boldsymbol{J}/\boldsymbol{J}^2$ en tant que $\boldsymbol{A}$-module et notons m_i un relèvement dans $\boldsymbol{J}$ de $\overline{m}_i$, pour chaque $i = 1, \ldots, d$ et soit $\boldsymbol{M}$ le sous-$\boldsymbol{R}[\mathscr{X}]$-module de $\boldsymbol{J}$ engendré par les m_i. On a alors $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{M} + \boldsymbol{J}^2$ et le $\boldsymbol{R}[\mathscr{X}]$-module $\boldsymbol{J}/\boldsymbol{M}$ est de type fini et vérifie $\boldsymbol{J}\cdot(\boldsymbol{J}/\boldsymbol{M}) = \boldsymbol{J}/\boldsymbol{M}$. Il existe alors, par Nakayama, un élément $x \in \boldsymbol{J}$ tel que $(\boldsymbol{J}/\boldsymbol{M})_f = \mathbf{0}$, autrement dit, tel que $\boldsymbol{M}_f = \boldsymbol{J}_f$. Comme d'autre part $f = 1_{\boldsymbol{A}}$ dans $\boldsymbol{A}$, on a la présentation finie :

$$\mathbf{0} \to \boldsymbol{M}_f \longrightarrow \boldsymbol{R}[X_1, \ldots, X_m]_f \longrightarrow \boldsymbol{A} \to \mathbf{0}\,.$$

et donc :

$$\boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{R}[X_1, \ldots, X_m, X_{m+1}]}{\langle m_1, \ldots, m_d, m_{d+1} \rangle}\,,$$

où $m_{d+1} := fX_{m+1} - 1$. On vérifie alors que l'idéal dans $\boldsymbol{A}$ engendré par les mineurs d'ordre $d+1$ de la matrice jacobienne $[\,\partial m_i/\partial X_j\,]_{i=1,\ldots,d+1}^{j=1,\ldots,m+1}$ est bien l'idéal unité. ■

4.5.4. Exercice : Soit f un élément non diviseur de zéro de $\boldsymbol{R}[X_1,\dots,X_n]$ et soit $\boldsymbol{A} := \boldsymbol{R}[X_1,\dots,X_n]/\langle f\rangle$. Montrer que si $\boldsymbol{A}$ est lisse sur $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{A}$ une intersection complète de dimension relative $n-1$.

4.5.5. Exercice : Soit $\boldsymbol{I} = \langle f_{r+1},\dots,f_n\rangle$ un idéal de $\boldsymbol{R}[\mathscr{X}] := \boldsymbol{R}[X_1,\dots,X_n]$ et considérons l'idéal $\boldsymbol{Mn}(f_{r+1},\dots,f_n)$ de $\boldsymbol{R}[\mathscr{X}]$ engendré par les mineurs d'ordre $(n-r)$ de la matrice jacobienne $[\,\partial f_i/\partial X_j\,]$. Notons $\nu : \boldsymbol{R}[\mathscr{X}] \twoheadrightarrow \boldsymbol{R}[\mathscr{X}]/\boldsymbol{I} =: \boldsymbol{A}$ la surjection canonique. Montrer que pour tout $f \in \boldsymbol{Mn}(f_{r+1},\dots,f_n)$, non nul, la localisation $\boldsymbol{A}_{\nu(f)}$ est une intersection complète lisse de dimension relative r sur $\boldsymbol{R}$.
Indication : Utiliser la présentation $\boldsymbol{A}_{\nu(f)} \equiv \boldsymbol{R}[X_1,\dots,X_n,Z]/\langle f_{r+1},\dots,f_n, Zf-1\rangle$.

4.5.6. Transversalité de certains fibrés conormaux. Soit $\boldsymbol{A}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre lisse. Pour toute présentation finie :

$$\mathbf{0} \to \boldsymbol{J} = \langle f_1,\dots,f_s\rangle \longrightarrow \boldsymbol{R}[\mathscr{X}] = \boldsymbol{R}[X_1,\dots,X_N] \longrightarrow \boldsymbol{A} \to \mathbf{0}\,, \qquad (*)$$

la première suite fondamentale de $\boldsymbol{A}$-modules :

$$\mathbf{0} \longrightarrow \boldsymbol{J}/\boldsymbol{J}^2 \overset{\partial}{\rightleftarrows} \boldsymbol{A} \otimes_{\boldsymbol{R}[\mathscr{X}]} \Omega_{\boldsymbol{R}[\mathscr{X}]/\boldsymbol{R}} \rightleftarrows \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \to \mathbf{0}$$

est scindée puisque $\boldsymbol{A}$ est lisse (4.3.3).

Notons $\boldsymbol{X} := \operatorname{Spec}(\boldsymbol{A})$, soit $\boldsymbol{X} \subseteq \mathbb{A}^N_{\boldsymbol{R}}$ le plongement fermé défini par la présentation ci-dessus et fixons un point $x \in \boldsymbol{X}$. Les localisations de $\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$ et $\boldsymbol{A}\otimes_{\boldsymbol{R}[\mathscr{X}]}\Omega_{\boldsymbol{R}[\mathscr{X}]/\boldsymbol{R}}$ en x représentent respectivement les espaces cotangents à $\boldsymbol{X}$ et $\mathbb{A}^N_{\boldsymbol{R}}$ au même point, de sorte que la localisation du $\boldsymbol{A}$-module localement libre $\boldsymbol{J}/\boldsymbol{J}^2$ en x s'identifie naturellement au conormal à $\boldsymbol{X}$ au point x dans le plongement $\boldsymbol{X} \subseteq \mathbb{A}^N_{\boldsymbol{R}}$. Le spectre premier de l'algèbre symétrique $\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{J}/\boldsymbol{J}^2)$ est alors le schéma affine au-dessus de $\operatorname{Spec}(\boldsymbol{A})$ qui réalise « *le fibré conormal du plongement* $\boldsymbol{X} \subseteq \mathbb{A}^N_{\boldsymbol{R}}$ ». On notera :

$$\boxed{T^*_{\boldsymbol{X}}(\mathbb{A}^N_{\boldsymbol{R}}) := \operatorname{Spec}\big(\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{J}/\boldsymbol{J}^2)\big)}$$

La proposition suivante est démontrée dans [E] (lemme 3, p. 562) dans le cadre nœthérien, mais sa démonstration est valable en toute généralité.

4.5.7. Proposition : *Soient $\boldsymbol{R}$ un anneau commutatif arbitraire et $\boldsymbol{A}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre lisse. On se donne une présentation finie*

$$\mathbf{0} \to \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{R}[\mathscr{X}] = \boldsymbol{R}[X_1,\dots,X_N] \to \boldsymbol{A} \to \mathbf{0}$$

et l'on considère le plongement fermé $\boldsymbol{X} := \operatorname{Spec}(\boldsymbol{A}) \subseteq \mathbb{A}^N_{\boldsymbol{R}}$ associé. Alors, le fibré conormal $T^*_{\boldsymbol{X}}(\mathbb{A}^N_{\boldsymbol{R}})$ est intersection complète lisse sur $\operatorname{Spec}(\boldsymbol{R})$.

Démonstration : D'après le corollaire 4.3.2, on a une première suite fondamentale scindée :

$$\mathbf{0} \longrightarrow \boldsymbol{J}/\boldsymbol{J}^2 \overset{\partial}{\rightleftarrows} \boldsymbol{A} \otimes_{\boldsymbol{R}[\mathscr{X}]} \Omega_{\boldsymbol{R}[\mathscr{X}]/\boldsymbol{R}} \rightleftarrows \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \to \mathbf{0}\,. \tag{$*$}$$

Notons $\boldsymbol{C} := \mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{J}/\boldsymbol{J}^2)$. L'application du foncteur $\boldsymbol{C} \otimes_{\boldsymbol{A}} (\_)$ à la suite $(*)$ donne clairement une suite également scindée :

$$\mathbf{0} \longrightarrow \boldsymbol{C} \otimes_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{J}/\boldsymbol{J}^2 \rightleftarrows \boldsymbol{C} \otimes_{\boldsymbol{R}[\mathscr{X}]} \Omega_{\boldsymbol{R}[\mathscr{X}]/\boldsymbol{R}} \rightleftarrows \boldsymbol{C} \otimes_{\boldsymbol{A}} \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \to \mathbf{0}\,,$$

où l'on a $\boldsymbol{C} \otimes_{\boldsymbol{R}[\mathscr{X}]} \Omega_{\boldsymbol{R}[\mathscr{X}]/\boldsymbol{R}} \equiv \boldsymbol{C}^N$ et $\boldsymbol{C} \otimes_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{J}/\boldsymbol{J}^2 \equiv \Omega_{\boldsymbol{C}/\boldsymbol{A}}$ (voir prop. 1.4.14), par conséquent :

$$\boldsymbol{C}^N \equiv \Omega_{\boldsymbol{C}/\boldsymbol{A}} \oplus \big(\boldsymbol{C} \otimes_{\boldsymbol{A}} \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}\big)\,. \tag{$\diamond$}$$

La seconde suite fondamentale associée au morphisme structural de $\boldsymbol{A}$ dans $\boldsymbol{C}$,

$$\mathbf{0} \to \boldsymbol{C} \otimes_{\boldsymbol{A}} \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \rightleftarrows \Omega_{\boldsymbol{C}/\boldsymbol{R}} \rightleftarrows \Omega_{\boldsymbol{C}/\boldsymbol{A}} \to \mathbf{0}\,, \tag{$\dagger$}$$

est également scindée (voir 1.6.3) et le $\boldsymbol{C}$-module $\Omega_{\boldsymbol{C}/\boldsymbol{R}}$ est ***globalement*** libre de rang N puisque $\Omega_{\boldsymbol{C}/\boldsymbol{R}} \equiv \boldsymbol{C}^N$ d'après $(\dagger)$ et $(\diamond)$.

Ceci étant, comme $\boldsymbol{J}/\boldsymbol{J}^2$ est un $\boldsymbol{A}$-module projectif de type fini, le schéma $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{C})$ est lisse sur $\boldsymbol{A}$ donc lisse sur $\boldsymbol{R}$ (*cf.* 4.3.7 et 4.3.9) et nous pouvons refaire l'analyse précédente en remplaçant $\boldsymbol{A}$ par $\boldsymbol{C}$. On fixe donc un plongement $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{C}) \subseteq \mathbb{A}^M_{\boldsymbol{R}}$ associé à une présentation finie :

$$\mathbf{0} \to \boldsymbol{K} \longrightarrow \boldsymbol{R}[\mathscr{Y}] := \boldsymbol{R}[Y_1, \ldots, Y_M] \xrightarrow{\pi} \boldsymbol{C} \to \mathbf{0} \tag{$\star$}$$

de première suite fondamentale scindée :

$$\mathbf{0} \longrightarrow \boldsymbol{K}/\boldsymbol{K}^2 \rightleftarrows \boldsymbol{C} \otimes_{\boldsymbol{R}[\mathscr{Y}]} \Omega_{\boldsymbol{R}[\mathscr{Y}]/\boldsymbol{R}} \equiv \boldsymbol{C}^M \rightleftarrows \Omega_{\boldsymbol{C}/\boldsymbol{R}} \equiv \boldsymbol{C}^N \to \mathbf{0}\,. \tag{$**$}$$

où l'on remarquera que les deux derniers termes sont libres. On considère alors une nouvelle présentation de $\boldsymbol{C}$ en rajoutant N variables à $(\star)$:

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{0} \to \boldsymbol{K}' \longrightarrow \boldsymbol{R}[\mathscr{Y}, \mathscr{Z}] := \boldsymbol{R}[Y_1, \ldots, Y_M, Z_1, \ldots, Z_N] & \longrightarrow & \boldsymbol{C} \to \mathbf{0} \\ Y_i & \longmapsto & \pi(Y_i) \\ Z_i & \longmapsto & 0 \end{array} \tag{$\star\star$}$$

où $\boldsymbol{K}'/\boldsymbol{K}'^2 \equiv \big(\boldsymbol{K}/\boldsymbol{K}^2\big) \oplus \boldsymbol{C}^N$ (le vérifier !) et, par conséquent, $\boldsymbol{K}'/\boldsymbol{K}'^2 \equiv \boldsymbol{C}^M$ d'après $(**)$. La présentation $(\star\star)$ réalise donc un plongement fermé de $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{C})$ dans $\mathbb{A}^{N+M}_{\boldsymbol{R}}$ dont le fibré conormal est ***globalement libre***. La fin de la preuve découle alors de l'assertion (c) du lemme 4.5.3. ∎

4.5.8. Complément sur les algèbres étales

On se donne un anneau $\boldsymbol{R}$, un idéal $\boldsymbol{I} \subseteq \boldsymbol{R}$, une $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$, et une $\boldsymbol{A}$-algèbre $\boldsymbol{B}$ d'homomorphisme structural noté $\alpha : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$. On rappelle que lorsque $\boldsymbol{B}$ est une $\boldsymbol{A}$-algèbre étale le morphisme canonique $\mathbb{1}_{\boldsymbol{B}} \times \Omega(\alpha) : \boldsymbol{B} \otimes_{\boldsymbol{A}} \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \to \Omega_{\boldsymbol{B}/\boldsymbol{R}}$ est un isomorphisme (4.3.8). Notons $\overline{\boldsymbol{R}} := \boldsymbol{R}/\boldsymbol{I}$, $\overline{\boldsymbol{A}} := \boldsymbol{A}/\boldsymbol{I}{\cdot}\boldsymbol{A}$, $\overline{\boldsymbol{B}} := \boldsymbol{B}/\boldsymbol{I}{\cdot}\boldsymbol{B}$ et $\overline{\alpha} : \overline{\boldsymbol{A}} \to \overline{\boldsymbol{B}}$ l'homomorphisme induit par α. Grâce à la stabilité de la lissité par changement de base (4.3.10), l'homomorphisme de $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres $\overline{\alpha}$ est également étale (stabilité de la lissité par changement de base (4.3.10)) et nous avons un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{A} \arrow[r, "\alpha", "\varepsilon"'] \arrow[d, two heads, "\nu"'] & \boldsymbol{B} \arrow[d, two heads, "\nu"] \\ \overline{\boldsymbol{A}} \arrow[r, dashed, "\overline{\alpha}", "\varepsilon"'] & \overline{\boldsymbol{B}} \end{tikzcd}$$

dont l'interprétation en termes de langage de schémas est que la restriction d'un schéma étale au-dessus d'un schéma $\boldsymbol{S}$, à un sous-schéma fermé de $\boldsymbol{S}$, est un schéma étale au-dessus du sous-schéma en question. La proposition suivante donne une condition permettant de relever un schéma étale au-dessus d'un sous-schéma fermé de $\boldsymbol{S}$ en un schéma étale au-dessus de $\boldsymbol{S}$.

Proposition : *Avec les données précédentes, soit $\overline{\alpha} : \overline{\boldsymbol{A}} \to \overline{\boldsymbol{B}}$ un morphisme étale et supposons que $\overline{\boldsymbol{B}}$ soit intersection complète sur $\overline{\boldsymbol{A}}$. Il existe alors une $\boldsymbol{A}$-algèbre $\boldsymbol{B}$ intersection complète étale sur $\boldsymbol{A}$ et un morphisme surjectif $p_{\boldsymbol{B}} : \boldsymbol{B} \twoheadrightarrow \overline{\boldsymbol{B}}$ tels que le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{A} \arrow[r, dashed, "\alpha", "\pitchfork"'] \arrow[d, two heads, "\nu"'] & \boldsymbol{B} \arrow[d, two heads, "p_{\boldsymbol{B}}"] \\ \overline{\boldsymbol{A}} \arrow[r, "\overline{\alpha}", "\pitchfork"'] & \overline{\boldsymbol{B}} \end{tikzcd}$$

Démonstration : Soit $\boldsymbol{A}[X_1, \ldots, X_m]/\langle \overline{f}_1, \ldots, \overline{f}_m \rangle$ une présentation de $\overline{\boldsymbol{B}}$ en tant qu'intersection complète étale. Pour chaque $i = 1, \ldots, m$, on note f_i un relèvement de $\overline{f}_i$ dans $\boldsymbol{A}[X_1, \ldots, X_m]$. On a le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{A} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, two heads, "\nu"'] & \boldsymbol{A}[X_1, \ldots, X_m]/\langle f_1, \ldots, f_m \rangle \arrow[d, two heads, "\nu"] \\ \overline{\boldsymbol{A}} \arrow[r, "\overline{\alpha}", "\pitchfork"'] & \overline{\boldsymbol{A}}[X_1, \ldots, X_m]/\langle \overline{f}_1, \ldots, \overline{f}_m \rangle \equiv \overline{\boldsymbol{B}} \end{tikzcd}$$

où ν désigne les surjections canoniques. La localisation :

$$\boldsymbol{B} := \big(\boldsymbol{A}[X_1, \ldots, X_m]/\langle f_1, \ldots, f_m \rangle\big)_{\det[\,\partial f_i/\partial X_j\,]}$$

répond alors à la question (*cf.* exercice 4.5.5). ∎

§ 5. Relèvements

5.1 Cadre général

Soient $\boldsymbol{R}$ anneau commutatif arbitraire et $\boldsymbol{I}$ un idéal de $\boldsymbol{R}$; posons $\overline{\boldsymbol{R}} := \boldsymbol{R}/\boldsymbol{I}$ et considérons les foncteurs de « *réduction modulo* $\boldsymbol{I}$ » de $\mathrm{Alg}(\boldsymbol{R})$ vers $\mathrm{Alg}(\overline{\boldsymbol{R}})$ et, pour toute $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$, de $\mathrm{Mod}_{\mathrm{t.f.}}(\boldsymbol{A})$ vers $\mathrm{Mod}_{\mathrm{t.f.}}(\overline{\boldsymbol{A}})$, qui font respectivement correspondre à une $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$ l'algèbre $\overline{\boldsymbol{A}} := \overline{\boldsymbol{R}} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{A}$ et à un $\boldsymbol{A}$-module $\boldsymbol{M}$ le $\overline{\boldsymbol{A}}$-module $\overline{\boldsymbol{M}} := \overline{\boldsymbol{A}} \otimes_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{M}$ et *mutatis mutandis* pour les morphismes.

Ces foncteurs respectent la lissité et la projectivité, autrement dit : "*la réduction modulo* $\boldsymbol{I}$ *d'une* $\boldsymbol{R}$*-algèbre lisse est une* $\overline{\boldsymbol{R}}$*-algèbre lisse et pour toute* $\boldsymbol{R}$*-algèbre* $\boldsymbol{A}$*, la réduction modulo* $\boldsymbol{I}$ *d'un* $\boldsymbol{A}$*-module projectif est un* $\overline{\boldsymbol{A}}$*-module projectif*". Dans cette section, nous allons donner des réponses aux trois questions de « *relèvements* » suivantes principalement motivées par l'introduction de la cohomologie de de Rham p-adique qui fera l'objet d'une section ultérieure.

Rel-1) Étant donnée une $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbre lisse $\overline{\boldsymbol{A}}$, existe-t-il une $\boldsymbol{R}$-algèbre lisse dont la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ s'identifie à $\overline{\boldsymbol{A}}$?

Rel-2) Étant donnés une $\boldsymbol{R}$-algèbre lisse $\boldsymbol{A}$ et un $\overline{\boldsymbol{A}}$-module $\overline{\boldsymbol{M}}$ projectif de type fini, dans quelle mesure existe-t-il un $\boldsymbol{A}$-module projectif de type fini dont la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ s'identifie à $\overline{\boldsymbol{M}}$?

Rel-3) Étant données des $\boldsymbol{R}$-algèbres $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$, où $\boldsymbol{A}$ est lisse, et un morphisme de $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres $\overline{u} : \overline{\boldsymbol{A}} \to \overline{\boldsymbol{B}}$, dans quelle mesure existe-t-il un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres de $\boldsymbol{A}$ vers $\boldsymbol{B}$ dont la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ s'identifie à $\overline{u}$?

Rel-4) Étant données des $\boldsymbol{R}$-algèbres $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$, où $\boldsymbol{A}$ est lisse, et des morphismes de $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres homotopes $\overline{u}_1, \overline{u}_2 : \overline{\boldsymbol{A}} \to \overline{\boldsymbol{B}}$, dans quelle mesure des morphismes de $\boldsymbol{R}$-algèbres $u_i : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ que la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ identifie aux $\overline{u}_i$, sont-ils homotopes?

Toute la difficulté et intérêt de ces questions, résident dans les conditions de lissité imposées dans les relèvements.

Précisons maintenant par des définitions ces notions de relèvements.

5.1.1. Définition : On appelle « *relèvement (resp. plat, lisse)* » d'une $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbre $\overline{\boldsymbol{A}}$ (resp. plate, lisse), la donnée d'une $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$ (resp. plate, lisse) dont la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ est isomorphe à $\overline{\boldsymbol{A}}$.

De manière équivalente, un relèvement (resp. plat, lisse) de $\overline{\boldsymbol{A}}$, est aussi la donnée d'une $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$ (resp. plate, lisse) et d'un morphisme surjectif $p : \boldsymbol{A} \twoheadrightarrow \overline{\boldsymbol{A}}$ de noyau l'idéal $\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{A}$.

5.1.2. Définition : Soit $\boldsymbol{A}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre. Pour tout $\overline{\boldsymbol{A}}$-module $\overline{\boldsymbol{M}}$, on appellera « *relèvement de* $\overline{\boldsymbol{M}}$ » un $\boldsymbol{A}$-module dont la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ est isomorphe à $\overline{\boldsymbol{M}}$. Plus généralement, on appellera « *relèvement d'une présentation d'un* $\overline{\boldsymbol{A}}$*-module projectif* » :

$$\overline{\boldsymbol{A}}^{\#} \xrightarrow{\overline{L}} \overline{\boldsymbol{A}}^{\#} \to \overline{\boldsymbol{M}} \to \boldsymbol{0}\,, \qquad (*)$$

la donnée d'un $\boldsymbol{A}$-module projectif $\boldsymbol{M}$ et d'une présentation

$$\boldsymbol{A}^{\#} \xrightarrow{L} \boldsymbol{A}^{\#} \to \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{0}\,,$$

tels que $\mathbf{1}_{\overline{\boldsymbol{A}}} \otimes L = \overline{L}$. Lorsque un tel relèvement existe on dira que « *la présentation de module projectif* $(*)$ *se relève à* $\boldsymbol{A}$ ».

5.2 Relèvements des algèbres lisses

5.2.1. Relèvements des intersections complètes lisses. La proposition suivante est utilisée dans la preuve du théorème d'existence de relèvements 5.2.7.

Proposition : *Soient* $\boldsymbol{R}$ *un anneau et* $\boldsymbol{I}$ *un idéal dans* $\boldsymbol{R}$. *Posons* $\overline{\boldsymbol{R}} := \boldsymbol{R}/\boldsymbol{I}$.

a) *Toute* $\overline{\boldsymbol{R}}$*-algèbre intersection complète lisse (de dimension relative* r *) admet un relèvement intersection complète lisse (de dimension relative* r *) sur* $\boldsymbol{R}$.

b) *Soit* $\overline{\boldsymbol{A}}$ *une* $\overline{\boldsymbol{R}}$*-algèbre lisse. Alors, le fibré conormal de tout plongement fermé* $\mathrm{Spec}(\overline{\boldsymbol{A}}) \subseteq \mathbb{A}^N_{\overline{\boldsymbol{R}}}$ *associé à une présentation finie de* $\overline{\boldsymbol{A}}$ *admet un relèvement intersection complète lisse sur* $\boldsymbol{R}$.

Démonstration :

a) On a une présentation de $\overline{\boldsymbol{A}}$ de la forme :

$$\boldsymbol{0} \to \langle \bar{g}_{r+1}, \ldots, \bar{g}_n \rangle \to \overline{\boldsymbol{R}}[\mathscr{X}] := \overline{\boldsymbol{R}}[X_1, \ldots, X_n] \longrightarrow \overline{\boldsymbol{A}} \to \boldsymbol{0}\,,$$

où l'idéal $\overline{\mathbb{J}}$ de $\overline{\boldsymbol{R}}[X_1, \ldots, X_n]$ engendré par les mineurs d'ordre $n-r$ de la matrice jacobienne $[\,\partial\bar{g}_i/\partial X_j\,]$ est l'idéal unité. Pour chaque $i = r+1, \ldots, n$, notons g_i un relèvement arbitraire de $\bar{g}_i$ dans $\boldsymbol{R}[X_1, \ldots, X_n]$ et notons $\boldsymbol{A}$ la $\boldsymbol{R}$-algèbre de présentation :

$$\boldsymbol{0} \to \langle g_{r+1}, \ldots, g_n \rangle \to \boldsymbol{R}[\mathscr{X}] := \boldsymbol{R}[X_1, \ldots, X_n] \longrightarrow \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{0}\,.$$

Soit $\mathbb{J}$ l'idéal de $\boldsymbol{R}[X_1, \ldots, X_n]$ engendré par les mineurs d'ordre $n-r$ de la matrice jacobienne $[\,\partial g_i/\partial X_j\,]$. L'idéal $\overline{\mathbb{J}}$ est clairement l'image de $\mathbb{J}$ par la surjection canonique $\nu : \boldsymbol{R}[\mathscr{X}] \twoheadrightarrow \overline{\boldsymbol{R}}[\mathscr{X}]$, en particulier, il existe $g \in \mathbb{J}$ vérifiant $\nu(g) = 1$. On en déduit une surjection $\boldsymbol{A}_g \twoheadrightarrow \overline{\boldsymbol{A}}$ induite par ν qui fait de $\overline{\boldsymbol{A}}$ la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ de $\boldsymbol{A}_g$. D'autre part, $\boldsymbol{A}_g$ est une $\boldsymbol{R}$-algèbre lisse puisque $\mathbb{1}_{k(y)} \otimes dg_{r+1} \wedge \cdots \wedge dg_n \neq 0$ pour tout y dans l'ouvert principal $D(g) \subseteq \operatorname{Spec}(\boldsymbol{A})$, ce qui termine la démonstration de (a). La présentation $\boldsymbol{A}_g = \boldsymbol{R}[X_1, \ldots, X_n, Z]/\langle g_{r+1}, \ldots, g_n, gZ - 1\rangle$ permet de voir que $\boldsymbol{A}_g$ est également intersection complète sur $\boldsymbol{R}$ (*cf.* ex. 4.5.5).

b) Résulte de l'assertion (a) grâce à la proposition 4.5.7 qui affirme que le fibré conormal en question est intersection complète lisse sur $\operatorname{Spec}(\overline{\boldsymbol{R}})$. ■

5.2.2. Relèvements des modules projectifs

5.2.3. Définition : Soit $\boldsymbol{A}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre. On appellera « *voisinage étale de $\boldsymbol{I}$ dans $\boldsymbol{A}$* » toute $\boldsymbol{A}$-algèbre $\boldsymbol{B}$ **étale** sur $\boldsymbol{A}$, telle que la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ du morphisme structural de $\boldsymbol{A}$ dans $\boldsymbol{B}$ est un isomorphisme.

5.2.4. Définition : On dira que le couple $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{I})$ « *vérifie la propriété de relèvement* » si pour toute $\boldsymbol{R}$-algèbre de type fini $\boldsymbol{A}$ et pour toute présentation libre et finie de $\overline{\boldsymbol{A}}$-module projectif de type fini $\overline{\boldsymbol{M}}$:

$$\overline{\boldsymbol{A}}^p \xrightarrow{\overline{L}} \overline{\boldsymbol{A}}^q \xrightarrow{\overline{\Pi}} \overline{\boldsymbol{M}} \to \mathbf{0}\,, \tag{$\diamond$}$$

il existe un voisinage étale $\boldsymbol{A}_\varepsilon$ de $\boldsymbol{I}$ dans $\boldsymbol{A}$ tel que la présentation de module projectif ($\diamond$) se relève à $\boldsymbol{A}_\varepsilon$.

Théorème : *Pour tout anneau $\boldsymbol{R}$ et tout idéal $\boldsymbol{I}$ dans $\boldsymbol{R}$, le couple $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{I})$ vérifie la propriété de relèvement.*

Démonstration : Soit $\boldsymbol{A}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre de type fini et notons $\overline{\boldsymbol{A}} := \boldsymbol{A}/\boldsymbol{I}{\cdot}\boldsymbol{A}$. Donnons-nous une présentation libre et finie d'un $\overline{\boldsymbol{A}}$-module projectif de type fini $\overline{\boldsymbol{M}}$:

$$\overline{\boldsymbol{A}}^p \xrightarrow{\overline{L}} \overline{\boldsymbol{A}}^q \xrightarrow{\overline{\Pi}} \overline{\boldsymbol{M}} \to \mathbf{0}\,. \tag{$\diamond$}$$

Comme $\overline{\boldsymbol{M}}$ est un $\overline{\boldsymbol{A}}$-module projectif, la surjection de $\overline{\boldsymbol{A}}$-modules $\overline{\Pi}$ admet une section $\overline{\sigma}$, la composée $\overline{\psi} := \overline{\sigma} \circ \overline{\Pi} \in \operatorname{End}_{\overline{\boldsymbol{A}}}(\overline{\boldsymbol{A}}^q)$ vérifie $\overline{\psi}^2 = \overline{\psi}$ et $\operatorname{im}(\overline{\psi}) \simeq \overline{\boldsymbol{M}}$. L'endomorphisme $\overline{\psi}$ est donc idempotent et $\overline{\boldsymbol{M}}$ s'identifie au sous-module de $\overline{\boldsymbol{A}}^q$ des vecteurs propres associés à la valeur propre 1. On a ainsi une nouvelle présentation libre et finie de $\overline{\boldsymbol{M}}$:

$$\overline{\boldsymbol{A}}^q \xrightarrow{1-\overline{\psi}} \overline{\boldsymbol{A}}^q \longrightarrow \overline{\boldsymbol{M}} \to \mathbf{0}\,, \qquad \text{avec } \overline{\psi}^2 = \overline{\psi}, \tag{$\dagger$}$$

qui est un cas particulier des présentations considérées dans le théorème et que nous étudierons dans un premier temps.

Notons $\psi \in \mathrm{End}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{A}^q)$ un relèvement quelconque de $\overline{\psi}$. Comme $\overline{\psi}$ est idempotent, on a $\det(2\overline{\psi}-1) = \pm 1$ et donc $\det(2\psi - 1) = \pm 1 + x$, pour un certain $x \in \boldsymbol{I}$. Ainsi, quitte à remplacer $\boldsymbol{A}$ par le localisé $\boldsymbol{A}_{\pm 1+x}$ (voisinage ouvert de $\boldsymbol{I}$ dans $\boldsymbol{A}$), on peut supposer que l'endomorphisme $2\psi - 1 \in \mathrm{End}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{A}^q)$ est inversible.

Nous allons montrer maintenant comment déformer l'endomorphisme ψ (quitte à remplacer $\boldsymbol{A}$ par un voisinage étale de $\boldsymbol{I}$ dans $\boldsymbol{A}$) pour en faire un relèvement **idempotent** de $\overline{\psi}$.

– *Supposons l'idéal $\boldsymbol{I}$ principal de générateur noté π.*
On a alors $\psi^2 - \psi = \pi\alpha$ pour un certain $\alpha \in \mathrm{End}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{A}^q)$.

Considérons l'algèbre de polynômes à q^2 inconnues $\boldsymbol{A}[\mathscr{X}] := \boldsymbol{A}[X_{1,1}, \ldots, X_{q,q}]$ et notons $\beta \in \mathrm{End}_{\boldsymbol{A}[\mathscr{X}]}(\boldsymbol{A}[\mathscr{X}]^q)$ l'endomorphisme dont la matrice $[\beta_{i,j}]$, par rapport à la base canonique de $\boldsymbol{A}[\mathscr{X}]$, vérifie $\beta_{i,j} = X_{i,j}$. Soit :

$$R := \alpha + (2\psi - 1)\beta + \pi\beta^2 \in \mathrm{End}_{\boldsymbol{A}[\mathscr{X}]}(\boldsymbol{A}[\mathscr{X}]^q)\,, \qquad (\ddagger)$$

de matrice associée $[R_{i,j}]$. On pose : $\boldsymbol{A}_1 := \boldsymbol{A}[\mathscr{X}]/\langle R_{i,j}\rangle$.

Le jacobien $f := \det[\partial R_{i,j}/\partial X_{k,l}]$ modulo π est le déterminant de la matrice $\big[\partial\overline{R}_{i,j}/\partial_{X_{k,l}}\big]$ qui vaut ± 1 puisque $\big[\overline{R}_{i,j}\big] = [\overline{\alpha}_{i,j}] + (2\big[\overline{\psi}_{i,j}\big] - 1)[X_{i,j}]$, ce qui implique que l'application tangente à l'application affine $\overline{R} : \overline{\boldsymbol{A}}^q \to \overline{\boldsymbol{A}}^q$ est un isomorphisme de valeurs propres ± 1 étant donné que $\overline{\psi}$ est idempotent. On a donc $f = \pm 1 + \pi P$ pour un certain $P \in \boldsymbol{A}[\mathscr{X}]$, et l'algèbre $\boldsymbol{A}_{1,f} = \boldsymbol{A}[\mathscr{X}]_f/\langle R_{i,j}\rangle$ est, par conséquent, intersection complète étale sur $\boldsymbol{A}$ (voir exercice 4.5.5). De plus, la réduction modulo π de $\boldsymbol{A}_{1,f}$, *i.e.* $\overline{\boldsymbol{A}}[\mathscr{X}]/\big\langle\overline{R}_{i,j}\big\rangle$, est clairement isomorphe (par le morphisme structural) à $\overline{\boldsymbol{A}}$ puisque $(2\overline{\psi} - 1)$ est inversible. La $\boldsymbol{A}$-algèbre $\boldsymbol{A}_{1,f}$ est donc un voisinage étale de π dans $\boldsymbol{A}$.

Nous étudions maintenant le problème de la commutation de ψ et de $\pi{\cdot}\beta$. Comme $\pi\alpha = \psi^2 - \psi$ commute à ψ et que R est nul dans $\mathrm{End}_{\boldsymbol{A}_{1,f}}(\boldsymbol{A}_{1,f}{}^q)$, l'égalité $(\ddagger)$ donne :

$$[\psi, \pi\beta] = -\pi(2\psi - 1)^{-1}(\beta[\psi, \pi\beta] + [\psi, \pi\beta]\beta)\,.$$

Notons $[t_{i,j}]$ la matrice de l'endomorphisme $[\psi, \pi\beta]$ relative à la base canonique de $\boldsymbol{A}_{1,f}{}^q$. Le développement de la dernière égalité donne lieu à une égalité de la

forme :
$$\begin{bmatrix} t_{1,1} \\ \vdots \\ t_{q,q} \end{bmatrix} = \pi\cdot\boldsymbol{Q} \begin{bmatrix} t_{1,1} \\ \vdots \\ t_{q,q} \end{bmatrix}$$
où $\boldsymbol{Q}$ est une matrice à q^2 lignes et colonnes et à coefficients dans $\pi\cdot\boldsymbol{A}_{1,f}$. Comme le déterminant de $\mathbf{1} - \pi\cdot\boldsymbol{Q}$ est congruent à 1 modulo π, le vecteur $(t_{1,1}, \dots, t_{q,q})$ (et donc le commutateur $[\psi, \pi\beta]$) est nul dans la localisation $\boldsymbol{A}_\varepsilon := (\boldsymbol{A}_{1,f})_{\det(\mathbf{1}-\pi\cdot\boldsymbol{Q})}$ qui est bien un voisinage ouvert de π dans $\boldsymbol{A}_{1,f}$. (On observera, en passant, que $\boldsymbol{A}_\varepsilon$ est également une intersection complète étale sur $\boldsymbol{A}$.)

Grâce à la commutation de ψ et $\pi\beta$ dans $\mathrm{End}_{\boldsymbol{A}_\varepsilon}(\boldsymbol{A}_\varepsilon{}^q)$, le développement de la différence $(\psi + \pi\beta)^2 - (\psi + \pi\beta)$ est égal à πR d'après (‡), et $\psi + \pi\beta$ est un idempotent de $\mathrm{End}_{\boldsymbol{A}_\varepsilon}(\boldsymbol{A}_\varepsilon^q)$ qui relève $\overline{\psi}$, puisque $R = 0$ dans $\mathrm{End}_{\boldsymbol{A}_\varepsilon}(\boldsymbol{A}_\varepsilon^q)$ par construction.

– *Lorsque l'idéal $\boldsymbol{I}$ est de type fini : $\boldsymbol{I} = \langle \pi_1, \dots, \pi_m \rangle$ avec $m > 1$.*
Notons $\boldsymbol{A}' := \boldsymbol{A}/\pi_1\cdot\boldsymbol{A}$. On peut supposer, par hypothèse de récurrence sur m, qu'il existe une intersection complète étale $\boldsymbol{A}'_\varepsilon$ sur $\boldsymbol{A}'$ et un relèvement idempotent $\psi' \in \mathrm{End}_{\boldsymbol{A}'}(\boldsymbol{A}'_\varepsilon{}^q)$ de $\overline{\psi} \in \mathrm{End}_{\overline{\boldsymbol{A}}}(\overline{\boldsymbol{A}}^q)$.

Fixons une présentation de $\boldsymbol{A}'_\varepsilon$ sous la forme $\boldsymbol{A}'_\varepsilon = \boldsymbol{A}[Z_1, \dots, Z_n]/\langle f'_1, \dots, f'_n \rangle$ avec $\det[\,\partial f'_i/\partial Z_j\,]$ inversible dans $\boldsymbol{A}'_\varepsilon$. La surjection canonique $\boldsymbol{A} \twoheadrightarrow \boldsymbol{A}'$ induit une surjection $\boldsymbol{A}[Z_1, \dots, Z_n] \twoheadrightarrow \boldsymbol{A}'[Z_1, \dots, Z_n]$ et, si f_i désigne un relèvement de f'_i dans $\boldsymbol{A}[Z_1, \dots, Z_n]$, on a le diagramme commutatif :
$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{A} \arrow[r] \arrow[d, two heads] & \boldsymbol{A}[Z_1, \dots, Z_n]/\langle f_1, \dots, f_n \rangle \arrow[d, two heads] \\ \boldsymbol{A}' \arrow[r, "\pitchfork"'] & \boldsymbol{A}'_\varepsilon \equiv \boldsymbol{A}'[Z_1, \dots, Z_n]/\langle f'_1, \dots, f'_n \rangle \end{tikzcd}$$
La $\boldsymbol{A}$-algèbre $\boldsymbol{A}_\varepsilon$, localisation de $\boldsymbol{A}[Z_1, \dots, Z_n]/\langle f_1, \dots, f_n \rangle$ par $\det[\,\partial f_i/\partial Z_j\,]$, est clairement une intersection complète lisse, voisinage étale de $\boldsymbol{I}$ dans $\boldsymbol{A}$ et le diagramme induit suivant est commutatif :
$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{A} \arrow[r, "\pitchfork"'] \arrow[d, two heads, "\mathrm{mod}\ \pi_1"'] & \boldsymbol{A}_\varepsilon \arrow[d, two heads, "\mathrm{mod}\ \pi_1"] \\ \boldsymbol{A}' \arrow[r, "\pitchfork"'] & \boldsymbol{A}'_\varepsilon \end{tikzcd}$$
Et, toujours par hypothèse inductive, il existe une $\boldsymbol{A}_\varepsilon$-algèbre, intersection complète étale $(\boldsymbol{A}_\varepsilon)_\varepsilon$, voisinage de $\langle \pi_1 \rangle$ dans $\boldsymbol{A}_\varepsilon$ (donc intersection complète étale et voisinage de $\boldsymbol{I}$ dans $\boldsymbol{A}$), telle que ψ' se relève en un idempotent $\psi \in \mathrm{End}_{(\boldsymbol{A}_\varepsilon)_\varepsilon}((\boldsymbol{A}_\varepsilon)_\varepsilon{}^q)$.

Ceci étant, posons $\boldsymbol{M}_\varepsilon := \mathrm{im}(\psi_\varepsilon)$. Comme ψ_ε est un endomorphisme idempotent, on a $\boldsymbol{A}_\varepsilon^q = \boldsymbol{M}_\varepsilon \oplus \mathrm{im}(1-\psi_\varepsilon)$, et $\boldsymbol{M}_\varepsilon$ est un $\boldsymbol{A}_\varepsilon$-module projectif de type fini. La présentation $\boldsymbol{A}_\varepsilon^q \xrightarrow{1-\psi_\varepsilon} \boldsymbol{A}_\varepsilon^q \to \boldsymbol{M}_\varepsilon \to \boldsymbol{0}$ est donc un relèvement de la présentation de module projectif (†), ce qui termine la démonstration du théorème pour ce type de présentations.

On reprend maintenant la donnée d'une présentation de module projectif de la forme générale (◇) :

$$\overline{\boldsymbol{A}}^p \xrightarrow{\overline{L}} \overline{\boldsymbol{A}}^q \xrightarrow{\overline{\Pi}} \overline{\boldsymbol{M}} \to \boldsymbol{0}\,.$$

Fixons une section $\overline{\sigma}$ de $\overline{\Pi}$ et notons $\overline{\psi} := \overline{\sigma} \circ \overline{\Pi}$. D'après l'étude précédente, il existe une $\boldsymbol{A}$-algèbre $\boldsymbol{A}_{\tilde{\varepsilon}}$, intersection complète étale et voisinage de $\boldsymbol{I}$ dans $\boldsymbol{A}$, telle que l'idempotent $\overline{\psi} \in \mathrm{End}_{\overline{\boldsymbol{A}}}(\overline{\boldsymbol{A}}^q)$ se relève en un idempotent $\psi_{\tilde{\varepsilon}} \in \mathrm{End}_{\boldsymbol{A}_{\tilde{\varepsilon}}}(\boldsymbol{A}_{\tilde{\varepsilon}}^q)$. Notons $L_1 \in \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{A}_{\tilde{\varepsilon}}}(\boldsymbol{A}_{\tilde{\varepsilon}}^p, \boldsymbol{A}_{\tilde{\varepsilon}}^q)$ un relèvement quelconque de $\overline{\boldsymbol{L}}$ et posons $L_{\tilde{\varepsilon}} = (1-\psi_{\tilde{\varepsilon}}) \circ L_1$ de sorte que la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ de $L_{\tilde{\varepsilon}}$ s'identifie toujours à $\overline{L}$:

$$\begin{array}{ccccc}
\boldsymbol{A}_{\tilde{\varepsilon}}^p & \xrightarrow[(1-\psi_{\tilde{\varepsilon}})\circ L_1]{L_{\tilde{\varepsilon}}} & \boldsymbol{A}_{\tilde{\varepsilon}}^q & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
\overline{\boldsymbol{A}}^p & \xrightarrow{\overline{L}} & \overline{\boldsymbol{A}}^q & \twoheadrightarrow & \overline{\boldsymbol{M}} \to \boldsymbol{0}
\end{array}$$

Mais, si $L_{\tilde{\varepsilon}}$ relève bien $\overline{L}$, rien n'assure, *a priori*, que son conoyau soit projectif, ce pour quoi il suffirait que l'on ait $\mathrm{im}(L_{\tilde{\varepsilon}}) = \mathrm{im}(1-\psi_{\tilde{\varepsilon}})$, puisque $\psi_{\tilde{\varepsilon}}$ est idempotent. Or, le conoyau $\mathscr{K}$ de l'inclusion $\mathrm{im}(L_{\tilde{\varepsilon}}) \subseteq \mathrm{im}(1-\psi_{\tilde{\varepsilon}})$ est un $\boldsymbol{A}_{\tilde{\varepsilon}}$-module de type fini dont la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ est nulle, autrement dit, on a $\boldsymbol{I}\cdot\mathscr{K} = \mathscr{K}$. Il existe par conséquent un élément g de $\boldsymbol{A}_{\tilde{\varepsilon}}$ congruent à 1 modulo $\boldsymbol{I}$, tel que le foncteur (exact) de localisation $\boldsymbol{A}_{\tilde{\varepsilon},g} \otimes_{\boldsymbol{A}_{\tilde{\varepsilon}}} (\_)$ annule $\mathscr{K}$ (Nakayama). On pose alors $\boldsymbol{A}_\varepsilon := \boldsymbol{A}_{\tilde{\varepsilon},g}$ et $L_\varepsilon := \mathbf{1}_{\boldsymbol{A}_\varepsilon} \otimes L_{\tilde{\varepsilon}}$. (On remarquera que la $\boldsymbol{A}$-algèbre $\boldsymbol{A}_\varepsilon$ est toujours intersection complète étale et voisinage de $\boldsymbol{I}$ dans $\boldsymbol{A}$.)

L'image de L_ε s'identifie bien maintenant à l'image de l'idempotent $\mathbf{1}_{\boldsymbol{A}_\varepsilon} \otimes (1-\psi_{\tilde{\varepsilon}})$ de supplémentaire $\boldsymbol{M}_\varepsilon := \mathrm{im}(\mathbf{1}_{\boldsymbol{A}_\varepsilon} \otimes \psi_{\tilde{\varepsilon}})$. Le $\boldsymbol{A}_\varepsilon$-module $\boldsymbol{M}_\varepsilon$ est donc projectif de type fini, et nous avons la présentation :

$$\boldsymbol{A}_\varepsilon^p \xrightarrow{L_\varepsilon} \boldsymbol{A}_\varepsilon^q \twoheadrightarrow \boldsymbol{M}_\varepsilon \to \boldsymbol{0}$$

qui est un relèvement de (◇). ■

5.2.5. Remarque : La preuve de l'existence du relèvement ψ se simplifie remarquablement dans le cas où l'idéal $\boldsymbol{I}$ est nilpotent (plus généralement lorsque chaque élément de $\boldsymbol{I}$ est nilpotent). Dans ce cas on peut prendre $\boldsymbol{A}_\varepsilon := \boldsymbol{A}$. En effet, dans ce cas, on a

$\psi^2 - \psi = \alpha$, pour un certain idéal de type fini $\boldsymbol{I}' \subseteq \boldsymbol{I}$ et un élément $\alpha \in \boldsymbol{I}' {\cdot} \mathrm{End}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{A}^q)$ qui commute clairement à ψ. Supposons $\alpha \in (\boldsymbol{I}')^r {\cdot} \mathrm{End}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{A}^q)$ et posons :

$$\psi' := \psi + (1 - 2\psi)^{-1}\alpha\,.$$

L'endomorphisme ψ' relève $\overline{\psi}$ et vérifie :

$$\psi'^2 - \psi' = (1-2\psi)^{-2}\alpha^2 =: \alpha' \in (\boldsymbol{I}')^{2r} {\cdot} \mathrm{End}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{A}^q)\,.$$

de sorte que l'itération de cette idée permet, grâce à la nilpotence de $\boldsymbol{I}'$, de construire un relèvement **idempotent** $\psi_\varepsilon \in \mathrm{End}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{A}^q)$ de $\overline{\psi}$.

5.2.6. Existence des relèvements des algèbres lisses. Le théorème suivant et sa démonstration sont transcription presque littérale du théorème de relèvement d'algèbres lisses sur un couple hensélien nœthérien de l'article [E] de Renée Helkik (*cf. loc. cit.* §4 p. 580).

5.2.7. Théorème : *Soient* $\boldsymbol{R}$ *un anneau commutatif arbitraire et* $\boldsymbol{I}$ *un idéal de* $\boldsymbol{R}$*. Toute* $\overline{\boldsymbol{R}}$*-algèbre lisse se relève en une* $\boldsymbol{R}$*-algèbre lisse.*

Démonstration : Soit $\overline{\boldsymbol{B}}$ une $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbre lisse et fixons une présentation finie de $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbre : $\overline{\boldsymbol{B}} = \overline{\boldsymbol{R}}[X_1, \ldots, X_N]/\overline{\boldsymbol{J}}$. Le $\overline{\boldsymbol{B}}$-module $\overline{\boldsymbol{J}}/\overline{\boldsymbol{J}}^2$ est alors projectif de type fini. Notons $\overline{\boldsymbol{C}} := \mathsf{S}^*_{\overline{\boldsymbol{B}}}(\overline{\boldsymbol{J}}/\overline{\boldsymbol{J}}^2)$ la $\overline{\boldsymbol{B}}$-algèbre symétrique de $\overline{\boldsymbol{J}}/\overline{\boldsymbol{J}}^2$, de sorte que $\mathrm{Spec}(\overline{\boldsymbol{C}})$ est le fibré conormal à $\mathrm{Spec}(\overline{\boldsymbol{B}})$ dans le plongement $\mathrm{Spec}(\overline{\boldsymbol{B}}) \subseteq \mathbb{A}^N_{\overline{\boldsymbol{R}}}$ déterminé par la présentation ci-dessus (4.5.6). Notons $f : \mathrm{Spec}(\overline{\boldsymbol{C}}) \to \mathrm{Spec}(\overline{\boldsymbol{B}})$ le morphisme de schémas induit par l'homomorphisme structural de $\overline{\boldsymbol{B}}$ dans $\overline{\boldsymbol{C}}$. L'homomorphisme de $\overline{\boldsymbol{B}}$-algèbres $\sigma_0 : \overline{\boldsymbol{C}} \to \overline{\boldsymbol{B}}$, nul sur $\overline{\boldsymbol{J}}/\overline{\boldsymbol{J}}^2$, donne le morphisme de schémas « *section nulle* » $\mathrm{Spec}(\sigma_0) : \mathrm{Spec}(\overline{\boldsymbol{B}}) \to \mathrm{Spec}(\overline{\boldsymbol{C}})$. On a $f \circ \mathrm{Spec}(\sigma_0) = \mathrm{id}_{\mathrm{Spec}(\overline{\boldsymbol{B}})}$.

Comme ces données sont conformes aux hypothèses de la proposition 5.2.1-(b), on peut fixer pour la suite une $\boldsymbol{R}$-algèbre (intersection complète) lisse $\boldsymbol{C}$ qui relève $\overline{\boldsymbol{C}}$. On a ainsi le diagramme des morphismes canoniques ci-après.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spec}(\boldsymbol{C}) \arrow[r, hook] \arrow[dd] & \mathrm{Spec}(\overline{\boldsymbol{C}}) \arrow[d, shift right, "f"'] \\
 & \mathrm{Spec}(\overline{\boldsymbol{B}}) \arrow[u, shift right, "\text{section nulle}"'] \arrow[d] \\
\mathrm{Spec}(\boldsymbol{R}) \arrow[r, hook] & \mathrm{Spec}(\overline{\boldsymbol{R}})
\end{tikzcd} \qquad (\mathscr{D})$$

Le $\overline{\boldsymbol{C}}$-module $\overline{\boldsymbol{M}} := \overline{\boldsymbol{C}} \otimes_{\overline{\boldsymbol{B}}} \big(\overline{\boldsymbol{J}}/\overline{\boldsymbol{J}}^2\big)$ est projectif de type fini et, quitte à remplacer $\boldsymbol{C}$ par un voisinage étale de $\boldsymbol{I}$ dans $\boldsymbol{C}$, nous pouvons supposer, par la propriété de relèvement du couple $(\boldsymbol{R},\boldsymbol{I})$, qu'il existe un $\boldsymbol{C}$-module projectif de type fini

$\boldsymbol{M}$ dont la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ est isomorphe à $\overline{\boldsymbol{M}}$. L'algèbre $\boldsymbol{D} := \mathsf{S}^*_{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{M})$ est lisse sur $\boldsymbol{C}$ puisque $\boldsymbol{M}$ est projectif de type fini (4.3.7).

Complétons le diagramme $(\mathscr{D})$ par les morphismes canoniques indiqués ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec}\big(\mathsf{S}_{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{M})\big) = \operatorname{Spec}(\boldsymbol{D}) \arrow[d, shift left] & \operatorname{Spec}\big(\overline{\boldsymbol{C}} \otimes_{\boldsymbol{B}} \overline{\boldsymbol{C}}\big) = \operatorname{Spec}\big(\mathsf{S}_{\overline{\boldsymbol{C}}}(\overline{\boldsymbol{M}})\big) \arrow[l, hook'] \arrow[d] \\
\operatorname{Spec}(\boldsymbol{C}) \arrow[u, hook, shift left=3, "\text{section nulle}"] \arrow[u, hook', dashed, shift right=3, "\Delta"'] \arrow[ddd] & \operatorname{Spec}(\overline{\boldsymbol{C}}) \arrow[l, hook'] \arrow[u, hook, shift left=3, "\overline{\Delta}"] \arrow[u, hook', shift right=3, "\text{section nulle}"'] \arrow[d, "f"'] \\
 & \\
 (\mathscr{D}) & \operatorname{Spec}(\overline{\boldsymbol{B}}) \arrow[uu, hook', shift right=3, "\text{section nulle}"'] \arrow[d] \\
\operatorname{Spec}(\boldsymbol{R}) & \operatorname{Spec}(\overline{\boldsymbol{R}}) \arrow[l, hook']
\end{tikzcd} \qquad (\mathscr{D}')$$

où $\overline{\Delta}$ désigne la « *section diagonale* » du morphisme structural de $\operatorname{Spec}(\overline{\boldsymbol{C}} \otimes_{\boldsymbol{B}} \overline{\boldsymbol{C}})$ vers $\operatorname{Spec}(\overline{\boldsymbol{C}})$. Il s'agit du morphisme de schémas associé à l'homomorphisme de $\overline{\boldsymbol{C}}$-algèbres $\bar{\delta} : \mathsf{S}^*_{\overline{\boldsymbol{C}}}(\overline{\boldsymbol{M}}) \to \boldsymbol{C}$ défini par la forme $\overline{\boldsymbol{C}}$-linéaire :

$$\begin{aligned} \bar{\delta}|_{\overline{\boldsymbol{M}}} : \overline{\boldsymbol{M}} = \overline{\boldsymbol{C}} \otimes_{\boldsymbol{B}} \big(\overline{\boldsymbol{J}}/\overline{\boldsymbol{J}}^2\big) &\longrightarrow \overline{\boldsymbol{C}} = \mathsf{S}^*_{\boldsymbol{B}}\big(\overline{\boldsymbol{J}}/\overline{\boldsymbol{J}}^2\big) \\ c \otimes v &\longmapsto c{\cdot}v \end{aligned} \qquad (\ddagger)$$

Comme $\boldsymbol{D}$ est l'algèbre symétrique de $\boldsymbol{M}$, l'homomorphisme $\bar{\delta}$ admet un relèvement en un morphisme de $\boldsymbol{C}$-algèbres $\delta : \boldsymbol{D} \to \boldsymbol{C}$ si et seulement la forme $\overline{\boldsymbol{C}}$-linéaire $\bar{\delta}|_{\overline{\boldsymbol{M}}} : \overline{\boldsymbol{M}} \to \overline{\boldsymbol{C}}$ se relève en une forme $\boldsymbol{C}$-linéaire $\delta|_{\boldsymbol{M}} : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{C}$. Le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{M} \arrow[r, two heads] \arrow[d, dashed, "\delta|_{\boldsymbol{M}}"'] \arrow[dr] & \overline{\boldsymbol{M}} \arrow[d, "\bar{\delta}|_{\overline{\boldsymbol{M}}}"] \\
\boldsymbol{C} \arrow[r, two heads] & \overline{\boldsymbol{C}}
\end{tikzcd}$$

ci-après, où les lignes désignent les morphismes de réduction modulo $\boldsymbol{I}$, explique l'existence du relèvement $\delta|_{\boldsymbol{M}}$ comme conséquence du fait que $\boldsymbol{M}$ est un $\boldsymbol{C}$-module projectif. La section diagonale :

$$\operatorname{Spec}(\overline{\boldsymbol{C}}) \xhookrightarrow[\operatorname{Spec}(\bar{\delta})]{\overline{\Delta}} \operatorname{Spec}\big(\overline{\boldsymbol{C}} \otimes_{\boldsymbol{B}} \overline{\boldsymbol{C}}\big) = \operatorname{Spec}\big(\mathsf{S}^*_{\overline{\boldsymbol{C}}}(\overline{\boldsymbol{M}})\big)$$

se relève donc bien en une section $\Delta : \operatorname{Spec}(\boldsymbol{C}) \hookrightarrow \operatorname{Spec}(\boldsymbol{D})$ du morphisme structural $\operatorname{Spec}(\boldsymbol{D}) \to \operatorname{Spec}(\boldsymbol{C})$.

Nous avons ainsi le diagramme commutatif suivant :

$$
\begin{tikzcd}
\boldsymbol{M} \arrow[rr, two heads] \arrow[dr, hook] \arrow[dd, two heads, "\delta|_{\boldsymbol{M}}"'] & & \overline{\boldsymbol{M}} \arrow[dr, hook] \arrow[dd, two heads, "\bar\delta|_{\overline{\boldsymbol{M}}}"'] & & \\
& \mathsf{S}^*_{\boldsymbol{C}}(\boldsymbol{M}) \arrow[rr, two heads] \arrow[dd, two heads, "\delta"] & & \mathsf{S}^*_{\overline{\boldsymbol{C}}}(\overline{\boldsymbol{M}}) \arrow[dd, two heads, "\bar\delta"] & \\
\delta\boldsymbol{M} \arrow[rr, two heads] \arrow[dr, hook] & & \bar\delta\overline{\boldsymbol{M}} \arrow[dr, hook] & & \\
& \boldsymbol{C} \arrow[rr, two heads] \arrow[dr] & & \overline{\boldsymbol{C}} \arrow[dr] & \\
& & \boldsymbol{B} := \dfrac{\boldsymbol{C}}{\delta\boldsymbol{M}} \arrow[rr, two heads] & & \dfrac{\overline{\boldsymbol{C}}}{\bar\delta\overline{\boldsymbol{M}}} = \overline{\boldsymbol{B}}
\end{tikzcd}
$$

où les morphismes horizontaux sont ceux déterminés par la réduction modulo $\boldsymbol{I}$. On remarquera également que le module $\delta\boldsymbol{M}$ est en fait un idéal de $\boldsymbol{C}$ puisque δ est un morphisme de $\boldsymbol{C}$-algèbres. Enfin, l'équivalence $\overline{\boldsymbol{B}} \equiv \overline{\boldsymbol{C}}/\bar\delta\overline{\boldsymbol{M}}$ résulte, quant à elle, de la définition de $\bar\delta$ (‡). (Heuristiquement, $\mathrm{Spec}(\overline{\boldsymbol{B}})$ apparaît comme l'intersection de la section nulle et de la section diagonale de la fibration $\mathrm{Spec}(\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{C}}(\overline{\boldsymbol{M}})) \twoheadrightarrow \mathrm{Spec}(\overline{\boldsymbol{C}})$.)

Nous montrons maintenant que la $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{B} := \boldsymbol{C}/\delta\boldsymbol{M}$ est lisse.

Compte tenu des constructions précédentes, on dispose de la suite d'applications

$$\overline{\boldsymbol{M}} \xrightarrow{\ \bar\delta\ } \overline{\boldsymbol{C}} \xrightarrow{d_{\overline{\boldsymbol{C}}/\overline{\boldsymbol{R}}}} \Omega_{\overline{\boldsymbol{C}}/\overline{\boldsymbol{R}}} \overset{\bar\nu}{\twoheadrightarrow} \Omega_{\overline{\boldsymbol{C}}/\overline{\boldsymbol{B}}} = \overline{\boldsymbol{M}} \qquad (*)$$

où $\bar\nu$ est la surjection donnée par la seconde suite fondamentale associée à l'homomorphisme structural de $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres de $\overline{\boldsymbol{B}}$ dans $\overline{\boldsymbol{C}}$. Les applications $\bar\delta$ et $\bar\nu$ sont $\overline{\boldsymbol{C}}$-linéaires et lorsque l'on tensorise chaque terme de $(*)$ par $\overline{\boldsymbol{C}}/\bar\delta\overline{\boldsymbol{M}} = \overline{\boldsymbol{B}}$, l'application composée $\mathbb{1}_{\overline{\boldsymbol{B}}} \otimes (d_{\overline{\boldsymbol{C}}/\overline{\boldsymbol{B}}} \circ \bar\delta)$ le devient également ; le morphisme de $\overline{\boldsymbol{C}}$-modules $\mathbb{1}_{\overline{\boldsymbol{B}}} \otimes (\bar\nu \circ d_{\overline{\boldsymbol{C}}/\overline{\boldsymbol{B}}} \circ \bar\delta) : \overline{\boldsymbol{B}} \otimes_{\overline{\boldsymbol{C}}} \overline{\boldsymbol{M}} \to \overline{\boldsymbol{B}} \otimes_{\overline{\boldsymbol{C}}} \overline{\boldsymbol{M}}$ est alors l'identité d'après la définition même de $\bar\delta$ dans (‡).

Ceci étant, le $\boldsymbol{C}$-module $\Omega_{\boldsymbol{C}/\boldsymbol{R}}$ est projectif car $\boldsymbol{C}$ est lisse sur $\boldsymbol{R}$, et le morphisme $\bar\nu$ se relève en un morphisme de $\boldsymbol{C}$-modules ν. On a :

$$
\begin{tikzcd}
\Omega_{\boldsymbol{C}/\boldsymbol{R}} \arrow[r, dashed, "\nu"] \arrow[d, two heads] & \boldsymbol{M} \arrow[d, two heads] \\
\Omega_{\overline{\boldsymbol{C}}/\overline{\boldsymbol{R}}} \arrow[r, two heads, "\bar\nu"] & \Omega_{\overline{\boldsymbol{C}}/\overline{\boldsymbol{B}}} = \overline{\boldsymbol{M}}
\end{tikzcd}
$$

où les morphismes verticaux sont ceux déterminés par la réduction modulo $\boldsymbol{I}$.

La suite $(*)$ tensorisée par $\overline{\boldsymbol{B}}$ se relève donc en une suite de morphismes de $\boldsymbol{C}$-modules :

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{B}\otimes_{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{M} \arrow[r, "\mathbf{1}_{\boldsymbol{B}}\otimes(d_{\boldsymbol{C}/\boldsymbol{R}}\circ\delta)"] \arrow[rr, bend right, "\xi"'] & \boldsymbol{B}\otimes_{\boldsymbol{C}}\Omega_{\boldsymbol{C}/\boldsymbol{R}} \arrow[r, "\mathbf{1}_{\boldsymbol{B}}\otimes\nu"] & \boldsymbol{B}\otimes_{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{M} \end{tikzcd} \qquad (**)$$

dont la composée, notée ξ, est l'identité modulo $\boldsymbol{I}$. Le conoyau de ξ est donc annulé par la réduction modulo $\boldsymbol{I}$, ce qui signifie que $\boldsymbol{I}\cdot\operatorname{coker}(\xi) = \operatorname{coker}(\xi)$. Comme $\boldsymbol{M}$ est de type fini, un argument comme pour le lemme de Nakayama montre que l'idéal dans $\boldsymbol{C}$, annulateur de $\operatorname{coker}(\xi)$, contient un élément de la forme $g = 1+x{\cdot}c$, avec $x \in \boldsymbol{I}$, de sorte que, quitte à remplacer $\boldsymbol{C}$ par le localisé $\boldsymbol{C}_g$ (voisinage ouvert de $\boldsymbol{I}$ dans $\boldsymbol{C}$), on peut supposer ξ surjectif. Mais alors, comme $\boldsymbol{B}\otimes_{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{M}$ est un $\boldsymbol{B}$-module projectif, il suit que $\ker(\xi)$ est un facteur direct de $\boldsymbol{B}\otimes_{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{M}$ annulé également par la réduction modulo $\boldsymbol{I}$. Par conséquent, en remplaçant une fois de plus si besoin $\boldsymbol{C}$ par un nouveau voisinage de $\boldsymbol{I}$ dans $\boldsymbol{C}$, on peut supposer le morphisme ξ **bijectif.**

On a d'autre part la factorisation de $\mathbf{1}_{\boldsymbol{B}}\otimes(d_{\boldsymbol{C}/\boldsymbol{R}}\circ\delta)$ en :

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{B}\otimes_{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{M} \arrow[r, two heads, "\delta"] \arrow[rr, bend right, "\mathbf{1}_{\boldsymbol{B}}\otimes(d_{\boldsymbol{C}/\boldsymbol{R}}\circ\delta)"'] & \dfrac{\delta\boldsymbol{M}}{(\delta\boldsymbol{M})^2} \arrow[r, "\partial"] & \boldsymbol{B}\otimes_{\boldsymbol{C}}\Omega_{\boldsymbol{C}/\boldsymbol{R}} \end{tikzcd}$$

où ∂ est le morphisme de la première suite fondamentale associée à la surjection canonique $\boldsymbol{C} \twoheadrightarrow \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}/\delta\boldsymbol{M}$. La bijectivité de ξ implique alors que le morphisme ∂ admet une rétraction. La $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{B}$ est par conséquent lisse d'après 4.3.5 et le théorème est démontré. ∎

5.2.8. Remarque : Soient $\overline{\boldsymbol{A}}$ une $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbre lisse et $\boldsymbol{A}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre lisse relevant $\overline{\boldsymbol{A}}$. Posons $\boldsymbol{X} := \operatorname{Spec}(\boldsymbol{A})$, $\boldsymbol{S} := \operatorname{Spec}(\boldsymbol{R})$ et soit $f : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{S}$ le morphisme structural. Il convient de souligner que si le théorème 5.2.7 affirme en toute généralité l'existence de $\boldsymbol{A}$, il ne donne en revanche aucune information sur l'image de f.

On démontre que lorsque $\boldsymbol{R}$ est nœthérien, $\operatorname{im}(f)$ est nécessairement ouvert dans $\boldsymbol{S}$ (voir [Har] §III ex. 9.1 p. 266) et l'on a $\operatorname{im}(f) = \boldsymbol{S}$ pour tout anneau de valuation discrète $\boldsymbol{R}$ (5.4.9). Mais en dehors de ces cas, l'égalité $\operatorname{im}(f) = \boldsymbol{S}$ n'a aucune raison *a priori* d'être vérifiée. Autrement dit, le théorème n'exclut pas que l'on puisse avoir $k(\mathfrak{P})\otimes\boldsymbol{A} = \mathbf{0}$, pour certains idéaux premiers de $\boldsymbol{R}$. L'exercice 4.3.4 fournit bien d'exemples de ce phénomène. En effet, soit $\boldsymbol{G}$ un groupe abélien fini de cardinal $m := |\boldsymbol{G}|$ et soit p un nombre premier ne divisant pas m. La $\mathbb{F}_p$-algèbre $\overline{\boldsymbol{A}} := \mathbb{F}_p[\boldsymbol{G}]$ est alors lisse et isomorphe à la réduction modulo p de la $\mathbb{Z}$-algèbre lisse $\boldsymbol{A} := \{1, m, m^2, \ldots\}^{-1}\,\mathbb{Z}[\boldsymbol{G}]$. Il est clair dans cet exemple que $\mathbb{F}_q\otimes\boldsymbol{A} = \mathbf{0}$ pour tout nombre premier q qui divise m ; l'image du morphisme structural $f : \operatorname{Spec}(\boldsymbol{A}) \to \operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$ est, dans ce cas, le complémentaire de l'ensemble (fini) de tels nombres premiers.

5.2.9. Le problème de l'unicité des relèvements d'une algèbre lisse. Le dernier théorème montre que pour tout couple $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{I})$ les $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres lisses admettent des relèvements lisses. Une question naturelle alors est de savoir à quelle condition deux relèvements d'une même algèbre lisse sont isomorphes.

Lorsque l'idéal $\boldsymbol{I}$ n'est pas nilpotent, on construit facilement des exemples de relèvements non isomorphes. Par exemple, pour tout entier m et tout nombre premier p ne divisant pas m (‡), l'anneau $\boldsymbol{A}_m := \{1, m, m^2, \ldots\}^{-1}\mathbb{Z}$ est lisse sur $\mathbb{Z}$ et relève $\mathbb{F}_p$. Or, deux algèbres $\boldsymbol{A}_{m_1}$ et $\boldsymbol{A}_{m_2}$ vérifiant (‡) sont isomorphes en tant que $\mathbb{Z}$-algèbres, si et seulement si, $m_1 = m_2$. (Voir 6.1-(**7**) pour d'autres exemples de ce phénomène.)

Il suffira, par contre, que l'idéal $\boldsymbol{I}$ soit nilpotent pour que tout relèvement soit unique à isomorphisme (non canonique) près.

5.2.10. Proposition : *Soient $\boldsymbol{R}$ un anneau arbitraire et $\boldsymbol{I}$ un idéal nilpotent de $\boldsymbol{R}$. Soient $\boldsymbol{A}_1$ et $\boldsymbol{A}_2$ deux $\boldsymbol{R}$-algèbres **lisses** telles que leurs réductions $\overline{\boldsymbol{A}}_1$ et $\overline{\boldsymbol{A}}_2$ sont des $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres isomorphes. Alors, les $\boldsymbol{R}$-algèbres $\boldsymbol{A}_1$ et $\boldsymbol{A}_2$ sont isomorphes.*

Démonstration : Notons $\overline{\boldsymbol{A}}$ la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ de $\boldsymbol{A}_1$. Les données du théorème nous emmènent à considérer deux surjections de noyaux nilpotents $\varphi_i : \boldsymbol{A}_i \twoheadrightarrow \overline{\boldsymbol{A}}$:

$$\begin{tikzcd} & \boldsymbol{A}_1 \arrow[d, two heads, "\varphi_1"] \arrow[dl, dashed, shift left, "\Phi_1"] \\ \boldsymbol{A}_2 \arrow[ur, dashed, shift left, "\Phi_2"] \arrow[r, two heads, "\varphi_2"'] & \overline{\boldsymbol{A}} \end{tikzcd}$$

Il existe alors, par 4.2.7-(d), deux morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\Phi_1 : \boldsymbol{A}_1 \to \boldsymbol{A}_2$ et $\Phi_2 : \boldsymbol{A}_2 \to \boldsymbol{A}_1$ vérifiant $\varphi_2 \circ \Phi_1 = \varphi_1$ et $\varphi_1 \circ \Phi_2 = \varphi_2$. En particulier, $\Phi_2 \circ \Phi_1$ est un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres de $\boldsymbol{A}_1$ dont la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ est l'identité sur $\overline{\boldsymbol{A}}$ et *mutatis mutandis* pour $\Phi_1 \circ \Phi_2$.

L'homomorphisme $h := \Phi_2 \circ \Phi_1$ est un isomorphisme. En effet, pour tout $a \in \boldsymbol{A}_1$ on a $a = h(a) \bmod \boldsymbol{I}$ et si l'on se donne $b \in \boldsymbol{A}$ tel que $a = h(b) \bmod \boldsymbol{I}^s$, les égalités :

$$\begin{aligned} a &= h(b) + \sum_{i=1}^{r} x_i{\cdot}b_i = h(b) + \sum_{i=1}^{r} x_i{\cdot}\Big(h(b_i) + \sum_{j=1}^{r_i} x_{i,j}{\cdot}b_{i,j}\Big) \\ &= h\Big(b + \sum_{i=1}^{r} x_i{\cdot}b_i\Big) + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r_i} x_i{\cdot}x_{i,j}{\cdot}b_{i,j} \end{aligned}$$

avec $x_i \in \boldsymbol{I}^s$, $x_{i,j} \in \boldsymbol{I}$ et $b_* \in \boldsymbol{A}$, montrent que pour chaque $s \in \mathbb{N}$, il existe b_s tel que $a = h(b_s) \bmod \boldsymbol{I}^s$. Comme $\boldsymbol{I}$ est nilpotent, h est surjectif.

Tout élément $a \in \ker(h)$ vérifie $a \in \boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{A}$ et si nous supposons $a \neq 0$, il existe un entier positif s tel que $a \in \boldsymbol{I}^s\cdot\boldsymbol{A}\backslash\boldsymbol{I}^{s+1}\cdot\boldsymbol{A}$. Mais alors, on considère une expression de a de la forme $a = \sum_i x_i\cdot a_i$, avec $x_i \in \boldsymbol{I}^s$, et l'on observe que :

$$0 = h(a) = \sum_i x_i\cdot h(a_i) = \sum_i x_i\cdot a_i + \sum_{i,j} x_i x_{i,j}\cdot a_{i,j}\,,$$

d'où $a = -\sum_{i,j} x_i x_{i,j}\cdot a_{i,j} \in \boldsymbol{I}^{s+1}\cdot\boldsymbol{A}$, ce qui est contradictoire. Par conséquent, l'homomorphisme h est injectif.

Comme ces arguments sont également valables pour $\Phi_1 \circ \Phi_2$, on déduit que chaque Φ_i est un isomorphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres et la proposition est prouvée ■

5.3 Relèvements d'homomorphismes à source lisse

Soient $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ deux $\boldsymbol{R}$-algèbres et soit $h : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres. Par réduction modulo $\boldsymbol{I}$, on obtient le morphisme de $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres $\overline{h} : \overline{\boldsymbol{A}} \to \overline{\boldsymbol{B}}$; on dit alors que « *$h : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ est un relèvement de $\overline{h} : \overline{\boldsymbol{A}} \to \overline{\boldsymbol{B}}$* ». Plus généralement :

5.3.1. Définition : Soit $\overline{h} : \overline{\boldsymbol{A}} \to \overline{\boldsymbol{B}}$ un morphisme de $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres, on appelle « *relèvement de $\overline{h}$* » la donnée d'un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $h : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$, et des morphismes surjectifs de $\boldsymbol{R}$-algèbres $p_{\boldsymbol{A}} : \boldsymbol{A} \twoheadrightarrow \overline{\boldsymbol{A}}$ et $p_{\boldsymbol{B}} : \boldsymbol{B} \twoheadrightarrow \overline{\boldsymbol{B}}$ tels que $p_{\boldsymbol{B}} \circ h = \overline{h} \circ p_{\boldsymbol{A}}$. Soit, en termes de diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{A} & \xrightarrow{h} & \boldsymbol{B} \\ {\scriptstyle p_A}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle p_B} \\ \overline{\boldsymbol{A}} & \xrightarrow{\overline{h}} & \overline{\boldsymbol{B}} \end{array}$$

Dans cette section nous allons étudier les questions de relèvements d'homomorphismes (Rel-3,4) (voir 5.1) ; les principaux théorèmes concernant ces questions seront des corollaires simples du résultat technique suivant.

5.3.2. Proposition : *Soient $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ des $\boldsymbol{R}$-algèbres. Supposons $\boldsymbol{A}$ lisse sur $\boldsymbol{R}$ et donnons-nous :*

$\left\{\begin{array}{l}\bullet \text{ \textit{une paire de morphismes de} } \boldsymbol{R}\text{\textit{-algèbres} } \boldsymbol{A} \xrightarrow{\varphi} \boldsymbol{C} \overset{p}{\twoheadleftarrow} \boldsymbol{B}, \text{ \textit{où} } p \text{ \textit{est surjectif de noyau noté} } \boldsymbol{K} \ (\boldsymbol{K} = \boldsymbol{B} \text{ \textit{compris}}),\\ \bullet \text{ \textit{un morphisme de} } \overline{\boldsymbol{R}}\text{\textit{-algèbres} } \overline{h} : \overline{\boldsymbol{A}} \to \overline{\boldsymbol{B}} \text{ \textit{vérifiant} } \overline{\varphi} = \overline{p} \circ \overline{h},\end{array}\right.$

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{A} \arrow[dr, "\varphi"'] & \boldsymbol{B} \arrow[d, two heads, "p"] \\ & \boldsymbol{C} \end{tikzcd} \quad + \quad \begin{tikzcd} \overline{\boldsymbol{A}} \arrow[r, "\bar h"] \arrow[dr, "\bar\varphi"'] & \overline{\boldsymbol{B}} \arrow[d, two heads, "\bar p"] \\ & \overline{\boldsymbol{C}} \end{tikzcd}$$

Alors :

a) *Pour chaque entier strictement positif n, il existe une* ***application*** $\eta_n : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ *telle que :*

$$\left\{\begin{array}{l}\text{(i) } p_{\boldsymbol{B}} \circ \eta_n = \overline{h} \circ p_{\boldsymbol{A}}\,,\\ \text{(ii) } p \circ \eta_n = \varphi\,,\\ \text{(iii) } \nu_n \circ \eta_n \text{ \textit{est un morphisme de} } \boldsymbol{R}\text{\textit{-algèbres.}}\end{array}\right. \qquad \begin{tikzcd} \boldsymbol{A} \arrow[r, "\eta_n"] \arrow[d, two heads, "p_{\boldsymbol{A}}"'] & \boldsymbol{B} \arrow[d, two heads, "p_{\boldsymbol{B}}"] \\ \overline{\boldsymbol{A}} \arrow[r, "\bar h"] & \overline{\boldsymbol{B}} \end{tikzcd}$$

où $\nu_n : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{B}/((\boldsymbol{I}{\cdot}\boldsymbol{B}) \cap \boldsymbol{K})^n$ désigne la surjection canonique.

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{A} \arrow[dr, "\varphi"'] & \boldsymbol{B} \arrow[d, two heads, "p"] \\ & \boldsymbol{C} \end{tikzcd} + \begin{tikzcd} \overline{\boldsymbol{A}} \arrow[r, "\bar h"] \arrow[dr, "\bar\varphi"'] & \overline{\boldsymbol{B}} \arrow[d, two heads, "\bar p"] \\ & \overline{\boldsymbol{C}} \end{tikzcd} \Longrightarrow \begin{tikzcd} \boldsymbol{A} \arrow[r, "\exists\, \eta_n"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \boldsymbol{B} \arrow[r, two heads, "\nu_n"] \arrow[d, two heads, "p"] & \dfrac{\boldsymbol{B}}{((\boldsymbol{I}{\cdot}\boldsymbol{B}) \cap \boldsymbol{K})^n} \arrow[dl, two heads, "p_n"] \\ & \boldsymbol{C} & \end{tikzcd}$$

(L'homomorphisme p_n est celui induit par p.)

b) *Il existe un voisinage étale $\boldsymbol{B}_\varepsilon$ de $\boldsymbol{I}{\cdot}\boldsymbol{K}$ dans $\boldsymbol{B}$, intersection complète sur $\boldsymbol{B}$ dont on note $\varepsilon : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{B}_\varepsilon$ l'homomorphisme structural et $p_\varepsilon : \boldsymbol{B}_\varepsilon \twoheadrightarrow \boldsymbol{C}$ l'homomorphisme induit par p, et il existe un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $h_\varepsilon : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}_\varepsilon$ tels que :*

$$\left\{\begin{array}{l}\overline{h}_\varepsilon = \bar\varepsilon \circ \overline{h}\,,\\ p_\varepsilon \circ h_\varepsilon = \varphi\,.\end{array}\right.$$

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{A} \arrow[dr, "\varphi"'] & \boldsymbol{B} \arrow[d, two heads, "p"] \\ & \boldsymbol{C} \end{tikzcd} + \begin{tikzcd} \overline{\boldsymbol{A}} \arrow[r, "\bar h"] \arrow[dr, "\bar\varphi"'] & \overline{\boldsymbol{B}} \arrow[d, two heads, "\bar p"] \\ & \overline{\boldsymbol{C}} \end{tikzcd} \Longrightarrow \begin{tikzcd} \boldsymbol{A} \arrow[r, "\exists\, h_\varepsilon"] \arrow[dr, "\varphi"'] \arrow[rr, bend left, dotted, "\bar h"] & \boldsymbol{B}_\varepsilon \arrow[d, two heads, "p_\varepsilon"] & \boldsymbol{B} \arrow[l, "\varepsilon"'] \arrow[dl, two heads, "p"] \\ & \boldsymbol{C} & \end{tikzcd}$$

Démonstration :

• ***Cas où A est intersection complète lisse***

a) Soit $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{R}[X_1, \ldots, X_m]/\langle f_{r+1}, \ldots, f_m\rangle$ une présentation de $\boldsymbol{A}$ en tant qu'intersection complète lisse sur $\boldsymbol{R}$ et notons $\nu : \boldsymbol{R}[X_1, \ldots, X_m] \to \boldsymbol{A}$ la surjection canonique.

L'existence des applications η_n de l'assertion (a) équivaut à l'existence d'homomorphismes de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\alpha_n : \boldsymbol{R}[X_1, \ldots, X_m] \to \boldsymbol{B}$ rendant les diagrammes :

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{R}[X_1,\ldots,X_m] \arrow[r, "\alpha_n"] \arrow[d, two heads, "\nu"'] & \boldsymbol{B} \arrow[d, two heads, "p"] \\ \boldsymbol{A} \arrow[r, "\varphi"] & \boldsymbol{C} \end{tikzcd} \qquad \Bigg| \qquad \begin{tikzcd} \overline{\boldsymbol{R}}[X_1,\ldots,X_m] \arrow[r, "\overline{\alpha}_n"] \arrow[d, two heads, "\overline{\nu}"'] & \overline{\boldsymbol{B}} \arrow[d, two heads, "\overline{p}"] \\ \overline{\boldsymbol{A}} \arrow[r, "\overline{\varphi}"] \arrow[ur, "\overline{h}"] & \overline{\boldsymbol{C}} \end{tikzcd} \qquad (\mathscr{D})$$

commutatifs et tels que :

$$\alpha_n\big(\langle f_{r+1}, \ldots, f_m\rangle\big) \subseteq \big((\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{B}) \cap \boldsymbol{K}\big)^n .$$

Nous allons démontrer l'existence de α_n par induction sur l'entier n.

Lorsque $n = 1$, l'assertion résultera de trouver, pour chaque $i = 1, \ldots, m$, un élément $\alpha_1(X_i) \in \boldsymbol{B}$ tel que l'on ait à la fois $\alpha_1(X_i) \in p^{-1}\big(\varphi(\nu(X_i))\big)$ et $\overline{\alpha_1(X_i)} = \overline{h}\big(\overline{\nu}(\overline{X}_i)\big)$; deux contraintes qui peuvent être satisfaites simultanément lorsque, pour tout $c \in \boldsymbol{C}$, la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ de la fibre $p^{-1}(c)$ se surjecte sur la fibre $\overline{p}^{-1}(\overline{c})$. Or, pour tous $c \in \boldsymbol{C}$ et $\overline{b} \in \overline{\boldsymbol{B}}$ vérifiant $\overline{p}(\overline{b}) = \overline{c}$, on a $c - p(b) = \sum_j x_j{\cdot}c_j$, avec $x_j \in \boldsymbol{I}$ et $c_j \in \boldsymbol{C}$; et ceci pour chaque $b \in \boldsymbol{B}$ qui relève $\overline{b}$. Comme p est surjective, il existe $b_j \in \boldsymbol{B}$ tel que $p(b_j) = c_j$ de sorte que l'élément $b + \sum_j x_j{\cdot}b_j \in \boldsymbol{B}$ satisfait bien aux contraintes en question. L'endomorphisme $\alpha_1 : \boldsymbol{R}[X_1, \ldots, X_m] \to \boldsymbol{B}$ est alors défini par de tels choix des $\alpha_1(X_i)$ et l'inclusion $\alpha_1\big(\langle f_{r+1}, \ldots, f_m\rangle\big) \subseteq (\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{B}) \cap \boldsymbol{K}$ est vérifiée par construction.

Supposons avoir défini α_ℓ pour $\ell \geqslant 1$ et soit $\alpha_{\ell+1} : \boldsymbol{R}[X_1, \ldots, X_m] \to \boldsymbol{B}$ un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres donné par :

$$\alpha_{\ell+1}(X_j) = \alpha_\ell(X_j) + b_j\,, \qquad \text{pour chaque } j = 1, \ldots, m, \qquad (\star)$$

avec $b_j \in \big((\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{B}) \cap \boldsymbol{K}\big)^\ell$. Les conditions (i) et (ii) de l'assertion (a) pour $n = \ell + 1$ sont alors clairement satisfaites et l'étude de la condition (iii) nous amène à considérer, pour chaque $k = r + 1, \ldots, m$, le début d'un développement en série de Taylor par rapport aux variables b_j :

$$\begin{aligned} \alpha_{\ell+1}(f_k) &= f_k\big(\alpha_\ell(\vec{X}) + \vec{b}\,\big) \\ &= \alpha_\ell(f_k) + \left[\frac{\partial f_k}{\partial X_1}, \ldots\ldots, \frac{\partial f_k}{\partial X_m}\right]\big(\alpha_{n+1}(\vec{X})\big) \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} + \cdots , \end{aligned}$$

où $\vec{X}$ et $\vec{b}$ désignent respectivement les m-uplets $(X_1,\ldots,X_m)$ et $(b_1,\ldots,b_m)$ et où les termes omis apartiennent l'idéal $\big((\boldsymbol{I}{\cdot}\boldsymbol{B})\cap\boldsymbol{K}\big)^{2\ell}$. L'ensemble de ces développements donne l'égalité de matrices modulo $\big((\boldsymbol{I}{\cdot}\boldsymbol{B})\cap\boldsymbol{K}\big)^{2\ell}$:

$$\begin{bmatrix}\alpha_{\ell+1}(f_{r+1})\\ \vdots\\ \alpha_{\ell+1}(f_m)\end{bmatrix}\simeq\begin{bmatrix}\alpha_{\ell}(f_{r+1})\\ \vdots\\ \alpha_{\ell}(f_m)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_{r+1}}{\partial X_1}&\cdots\cdots&\dfrac{\partial f_{r+1}}{\partial X_m}\\ \vdots&&\vdots\\ \dfrac{\partial f_m}{\partial X_1}&\cdots\cdots&\dfrac{\partial f_m}{\partial X_m}\end{bmatrix}\big(\alpha_\ell(\vec{X})\big)\begin{bmatrix}b_1\\ \vdots\\ \vdots\\ b_m\end{bmatrix},\quad(\ddagger)$$

où l'on aura remarqué que la jacobienne est évaluée en $\alpha_\ell(\vec{X})$ plutôt qu'en $\alpha_{\ell+1}(\vec{X})$.

C'est maintenant que le fait que $\boldsymbol{A}$ est intersection complète lisse intervient de manière cruciale. En effet, dans ce cas, nous savons, d'après le lemme 4.5.3 (c), que le classes des différentielles $df_{r+1},\ldots,df_m$ dans $\boldsymbol{A}\otimes\Omega_{\boldsymbol{R}[X_1,\ldots,X_m]/\boldsymbol{R}}$ sont linéairement indépendantes et que le $\boldsymbol{A}$-sous-module qu'elles engendrent : $\boldsymbol{A}{\cdot}df_{r+1}\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{A}{\cdot}df_m\equiv\boldsymbol{A}^{m-r}$ est un facteur direct dans $\boldsymbol{A}\otimes\Omega_{\boldsymbol{R}[X_1,\ldots,X_m]/\boldsymbol{R}}\equiv\boldsymbol{A}^m$. Il existe alors une matrice $[\,a_{j,k}\,]\in M^{m\times(m-r)}(\boldsymbol{A})$ qui inverse à droite la matrice de $[\,\partial f_k/\partial X_j\,]\in M^{(m-r)\times m}(\boldsymbol{A})$. Pour chaque couple (j,k), soit $P_{j,k}$ un relèvement dans $\boldsymbol{R}[X_1,\ldots,X_m]$ de $a_{j,k}$; on a alors l'égalité modulo l'idéal $\langle f_{r+1},\ldots,f_m\rangle$:

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_{r+1}}{\partial X_1}&\cdots\cdots&\dfrac{\partial f_{r+1}}{\partial X_m}\\ \vdots&&\vdots\\ \dfrac{\partial f_m}{\partial X_1}&\cdots\cdots&\dfrac{\partial f_m}{\partial X_m}\end{bmatrix}(\vec{X})\begin{bmatrix}P_{1,r+1}&\cdots&P_{1,m}\\ \vdots&&\vdots\\ \vdots&&\vdots\\ P_{m,r+1}&\cdots&P_{m,m}\end{bmatrix}=\mathbf{1}_{m-r\times m-r}\,,\qquad(\ddagger\ddagger)$$

à laquelle on applique α_ℓ pour obtenir l'égalité modulo $\big((\boldsymbol{I}{\cdot}\boldsymbol{B})\cap\boldsymbol{K}\big)^{\ell}$:

$$\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_{r+1}}{\partial X_1}&\cdots\cdots&\dfrac{\partial f_{r+1}}{\partial X_m}\\ \vdots&&\vdots\\ \dfrac{\partial f_m}{\partial X_1}&\cdots\cdots&\dfrac{\partial f_m}{\partial X_m}\end{bmatrix}\big(\alpha_\ell(\vec{X})\big)\begin{bmatrix}Q_{1,r+1}&\cdots&Q_{1,m}\\ \vdots&&\vdots\\ \vdots&&\vdots\\ Q_{m,r+1}&\cdots&Q_{m,m}\end{bmatrix}=\mathbf{1}_{m-r\times m-r}\,,\quad(\diamond)$$

où l'on a noté $Q_{j,k}:=\alpha_\ell(P_{j,k})\in\boldsymbol{B}$. On pose alors :

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} := - \begin{bmatrix} Q_{1,r+1} & \cdots & Q_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ Q_{m,r+1} & \cdots & Q_{m,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_\ell(f_{r+1}) \\ \vdots \\ \alpha_\ell(f_m) \end{bmatrix},$$

de sorte que les éléments b_j appartiennent bien à $\big((\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{B}) \cap \boldsymbol{K}\big)^\ell$ conformément à notre choix initial $(\star)$. Il s'ensuit que l'on a, pour tout $k = r+1, \ldots, m$:

$$\alpha_{\ell+1}(f_k) \in \big((\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{B}) \cap \boldsymbol{K}\big)^{2\ell},$$

grâce aux égalités (‡) et ($\diamond$), ce qui termine la démonstration de l'assertion (a).

b) *I. Réduction au cas où l'idéal $\boldsymbol{K}$ est principal.*

On commence par observer qu'un morphisme α_n de la question (a) induit un morphisme $h_n : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ lorsque $\alpha_n(f_k) = 0$, pour tout $k = r+1, \ldots, m$. Lorsque c'est le cas, on peut prendre $\boldsymbol{B}_\varepsilon := \boldsymbol{B}$ et $h_\varepsilon := h_n$ et l'assertion (b) est vérifiée. Dans le cas contraire, on applique (a) pour $n = 1$ et l'on considère l'idéal de type fini $\boldsymbol{K}' := \langle b_1, \ldots, b_{m-r}\rangle \subseteq \boldsymbol{K}$ de $\boldsymbol{B}$ engendré par les éléments $b_i := \alpha_1(f_{r+i})$. Pour chaque $\ell = 1, \ldots, m-r$ notons $\boldsymbol{B}_\ell := \boldsymbol{B}/\langle b_1, \ldots, b_\ell\rangle$. On a la suite finie de surjections canoniques de $\boldsymbol{B}$-algèbres :

$$\boldsymbol{B} =: \boldsymbol{B}_0 \xrightarrow{\nu_{0,1}} \boldsymbol{B}_1 \xrightarrow{\nu_{1,2}} \boldsymbol{B}_2 \xrightarrow{\nu_{2.3}} \cdots\cdots \xrightarrow{\nu_{t-1,t}} \boldsymbol{B}_t,$$

où $\boldsymbol{B}_\ell \equiv \boldsymbol{B}_{\ell-1}/\langle b_\ell\rangle$. Notons aussi, pour chaque ℓ :

- $\nu_\ell : \boldsymbol{B} \twoheadrightarrow \boldsymbol{B}_\ell$ la surjection canonique (on a $\nu_{\ell,\ell+1} \circ \nu_\ell = \nu_{\ell+1}$),
- $p_\ell : \boldsymbol{B}_\ell \twoheadrightarrow \boldsymbol{C}$ la surjection induite par p, de noyau $\boldsymbol{K}_\ell := \nu_\ell(\boldsymbol{K})$ (on a $p_\ell \circ \nu_\ell = p$),
- $\overline{h}_\ell : \overline{\boldsymbol{A}} \to \overline{\boldsymbol{B}}_\ell$ l'homomorphisme $\overline{\nu}_\ell \circ \overline{h}$.

On remarquera que pour chaque $\ell = 0, 1, \ldots, m-r$, la paire d'homomorphismes de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\boldsymbol{A} \xrightarrow{\varphi} \boldsymbol{C} \xleftarrow{p_\ell} \boldsymbol{B}_\ell$ et l'homomorphisme de $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres $\overline{h}_\ell : \overline{\boldsymbol{A}} \to \overline{\boldsymbol{B}}_\ell$ sont des données conformes aux hypothèses de notre proposition.

Lorsque $\ell = m-r$, l'homomorphisme $\nu_{m-r} \circ \alpha_1$ s'annule sur $\langle f_{r+1}, \ldots, f_m\rangle$ et induit, par conséquent, un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $h_{m-r,\varepsilon} : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}_{m-r} =: \boldsymbol{B}_{m-r,\varepsilon}$ vérifiant (b) par construction. Supposons maintenant que pour un certain « *niveau* » $\ell \in \{1, \ldots, m-r\}$ l'assertion (b) est vérifiée ; autrement dit, supposons qu'il existe un voisinage étale $\varepsilon : \boldsymbol{B}_\ell \to \boldsymbol{B}_{\ell,\varepsilon}$ de $\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{K}$ intersection complète sur $\boldsymbol{B}_\ell$ et un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $h_{\ell,\varepsilon} : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}_{\ell,\varepsilon}$ vérifiant $\overline{h}_{\ell,\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_\ell \circ \overline{h}_\ell$, tels que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & \boldsymbol{B}_{\ell-1,\varepsilon'} \arrow[d, two heads, "\nu'_{\ell-1,\ell}"'] & \boldsymbol{B}_{\ell-1} \arrow[l, "\varepsilon'_{\ell-1}"'] \arrow[d, two heads, "\nu_{\ell-1,\ell}"] \\
\boldsymbol{A} \arrow[r, "h_{\ell,\varepsilon}"] \arrow[urr, dotted, bend left, "\overline{h}_{\ell-1}"] \arrow[rr, dotted, bend left, "\overline{h}_\ell"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \boldsymbol{B}_{\ell,\varepsilon} \arrow[d, two heads, "p_{\ell,\varepsilon}"'] & \boldsymbol{B}_\ell \arrow[l, "\varepsilon_\ell"'] \arrow[dl, two heads, "p_\ell"] \\
 & \boldsymbol{C} &
\end{tikzcd}$$

où $\varepsilon'_{\ell-1} : \boldsymbol{B}_{\ell-1} \to \boldsymbol{B}_{\ell-1,\varepsilon'}$ est un voisinage étale de $\boldsymbol{I}{\cdot}\boldsymbol{K}$, intersection complète sur $\boldsymbol{B}_{\ell-1}$, qui relève ε_ℓ et où $\nu'_{\ell-1,\ell}$ est la surjection induite (*cf.* 4.5.8).

La paire d'homomorphismes de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\boldsymbol{A} \xrightarrow{h_{\ell,\varepsilon}} \boldsymbol{B}_{\ell,\varepsilon} \xleftarrow{\nu'_{\ell-1,\ell}} \boldsymbol{B}_{\ell-1,\varepsilon'}$ et l'homomorphisme de $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres $\bar{\varepsilon}'_{\ell-1} \circ \overline{h}_{\ell-1} : \overline{\boldsymbol{A}} \to \overline{\boldsymbol{B}}_{\ell-1,\varepsilon'}$ sont à nouveau conformes aux hypothèses de notre proposition mais cette fois le noyau de $\nu'_{\ell-1,\ell}$ est l'idéal *principal* de $\boldsymbol{B}_{\ell-1,\varepsilon'}$ engendré par b_ℓ (4.5.8). Il s'ensuit que si nous supposons l'assertion (b) vérifiée pour toute $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{B}$ et tout idéal $\boldsymbol{K} \subseteq \boldsymbol{B}$ ***principal***, il existe un morphisme de $\boldsymbol{B}$-algèbres $\varepsilon''_{\ell-1} : \boldsymbol{B}_{\ell-1,\varepsilon'} \to \boldsymbol{B}_{\ell-1,\varepsilon}$, tel que $\boldsymbol{B}_{\ell-1,\varepsilon}$ est intersection complète sur $\boldsymbol{B}_{\ell-1,\varepsilon'}$ et voisinage étale de $\boldsymbol{I}{\cdot}b_\ell{\cdot}\boldsymbol{B}_{l-1,\varepsilon'}$, donc de $\boldsymbol{I}{\cdot}\boldsymbol{K}$, et un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $h_{\ell-1,\varepsilon} : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}_{\ell-1,\varepsilon}$, tels que le diagramme précédent se complète en un nouveau diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & \boldsymbol{B}_{\ell-1,\varepsilon} \arrow[dr, two heads, "\nu''_{\ell-1,\ell}"] & \boldsymbol{B}_{\ell-1,\varepsilon'} \arrow[l, "\varepsilon''_{\ell-1}"'] \arrow[d, two heads, "\nu'_{\ell-1,\ell}"] & \boldsymbol{B}_{\ell-1} \arrow[l, "\varepsilon'_{\ell-1}"'] \arrow[d, two heads, "\nu_{\ell-1,\ell}"] \\
\boldsymbol{A} \arrow[ur, "h_{\ell-1,\varepsilon}"] \arrow[urr, dotted, bend left, "\bar{\varepsilon}'_{\ell-1} \circ \overline{h}_{\ell-1}"] \arrow[rr, "h_{\ell,\varepsilon}"] \arrow[drr, "\varphi"'] & & \boldsymbol{B}_{\ell,\varepsilon} \arrow[d, two heads, "p_{\ell,\varepsilon}"'] & \boldsymbol{B}_\ell \arrow[l, "\varepsilon_\ell"'] \arrow[dl, two heads, "p_\ell"] \\
 & & \boldsymbol{C} &
\end{tikzcd}$$

où $\nu''_{\ell-1,\ell}$ désigne la surjection induite par $\varepsilon''_{\ell-1}$ à partir de $\nu'_{\ell-1,\ell}$, et où $\bar{\varepsilon}''_{\ell-1} \circ \bar{\varepsilon}'_{\ell-1} \circ \overline{h}_{\ell-1} = \overline{h}_{\ell-1,\varepsilon}$. La composée $\varepsilon_{\ell-1} := \varepsilon''_{\ell-1} \circ \varepsilon'_{\ell-1} : \boldsymbol{B}_{\ell-1} \to \boldsymbol{B}_{\ell-1,\varepsilon}$ est alors un voisinage étale de $\boldsymbol{I}{\cdot}\boldsymbol{K}$, intersection complète sur $\boldsymbol{B}_{\ell-1}$, et (b) est vérifiée au niveau $\ell - 1$.

Un argument par induction montre alors que (b) est bien vérifiée pour $\ell = 0$.

II. Cas où l'idéal $\boldsymbol{K}$ est principal.

Nous vérifions dans cette partie l'assertion (b) lorsque $\boldsymbol{K}$ est un idéal principal de $\boldsymbol{B}$ de générateur noté $b_{\boldsymbol{K}}$.

– *Cas où l'idéal $\boldsymbol{I} \subseteq \boldsymbol{R}$ est principal de générateur π.*

Il existe, d'après (a), un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\alpha_2 : \boldsymbol{R}[X_1, \ldots, X_m] \to \boldsymbol{B}$ tel que les diagrammes ($\mathscr{D}$) sont commutatifs et tel que l'on a, pour tout $k = r+1, \ldots, m$:

$$\alpha_2(f_k) \in \big((\boldsymbol{I}{\cdot}\boldsymbol{B}) \cap \boldsymbol{K}\big)^2 \subseteq \langle \pi{\cdot}b_{\boldsymbol{K}} \rangle\,,$$

autrement dit, $\alpha_2(f_k) = \pi{\cdot}b_{\boldsymbol{K}}{\cdot}S_k$ pour un certain $S_k \in \boldsymbol{B}$.

Nous procédons maintenant de manière analogue à la démonstration de (a). Notons, pour chaque $k = r+1, \ldots, m$, $\vec{P}_k := (P_{1,k}, \ldots, P_{m,k})$ le m-uplet d'éléments de $\boldsymbol{R}[X_1, \ldots, X_m]$ de l'égalité (‡‡) dans la preuve de (a). On pose $Q_{j,k} := \alpha_2(P_{j,k})$ et $\vec{Q}_k := \alpha_2(\vec{P}_k) = (Q_{1,k}, \ldots, Q_{m,k})$. Notons $\vec{X} := (X_1, \ldots, X_m)$ et considérons l'homomorphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres :

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{R}[X_1, \ldots, X_m] & \xrightarrow{\ \beta\ } & \boldsymbol{B}[Z_{r+1}, \ldots, Z_m] \\ \vec{X} & \longmapsto & \alpha_2(\vec{X}) + \sum_{k=r+1}^{m} \pi{\cdot}b_{\boldsymbol{K}}{\cdot}\vec{Q}_k\, Z_k \end{array}$$

On a le développement en série de Taylor par rapport aux variables Z_k :

$$\begin{aligned} \beta\big(f_k(\vec{X})\big) &= f_k\Big(\alpha_2(\vec{X}) + \textstyle\sum_{k=r+1}^{m} \pi{\cdot}b_{\boldsymbol{K}}{\cdot}\vec{Q}_k\, Z_k\Big) = \\ &= \pi{\cdot}b_{\boldsymbol{K}}{\cdot}S_k + \pi{\cdot}b_{\boldsymbol{K}}{\cdot}\Big(\frac{\partial f_k}{\partial X_1}, \ldots, \frac{\partial f_k}{\partial X_m}\Big)\big(\beta(\vec{X})\big) \begin{bmatrix} Q_{1,r+1} & \cdots & Q_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ Q_{m,r+1} & \cdots & Q_{m,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{r+1} \\ \vdots \\ Z_m \end{bmatrix} + \\ &\qquad + \pi^2{\cdot}b_{\boldsymbol{K}}^2 \cdots \end{aligned}$$

et l'on définit les éléments :

$$R_k := \frac{\beta\big(f_k(\vec{X})\big)}{\pi{\cdot}b_{\boldsymbol{K}}} \in \boldsymbol{B}[Z_{r+1}, \ldots, Z_m]\,,$$

en diminuant d'une unité les exposants de $\pi{\cdot}b_{\boldsymbol{K}}$ dans les développements qui précèdent. Nous avons ainsi l'égalité dans $\big(\boldsymbol{B}[Z_{r+1}, \ldots, Z_m]\big)^{m-r}$ modulo $\pi{\cdot}b_{\boldsymbol{K}}$:

$$\begin{bmatrix} R_{r+1} \\ \vdots \\ R_m \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} S_{r+1} \\ \vdots \\ S_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_{r+1}}{\partial X_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_{r+1}}{\partial X_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial X_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial X_m} \end{bmatrix} \big(\alpha_2(\vec{X})\big) \begin{bmatrix} Q_{1,r+1} & \cdots & Q_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ Q_{m,r+1} & \cdots & Q_{m,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_{r+1} \\ \vdots \\ Z_m \end{bmatrix} \tag{$\diamond\diamond$}$$

et la composition de β avec la surjection canonique $\nu_{\boldsymbol{B}}$:

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{R}[X_1,\dots,X_m] \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, two heads, "\nu"'] & \boldsymbol{B}[Z_{r+1},\dots,Z_m] \arrow[r, two heads, "\nu_{\boldsymbol{B}}"] & \dfrac{\boldsymbol{B}[Z_{r+1},\dots,Z_m]}{\langle R_{r+1},\dots,R_m\rangle} =: \boldsymbol{B}' \\ \boldsymbol{A} = \dfrac{\boldsymbol{R}[X_1,\dots,X_m]}{\langle f_{r+1},\dots,f_m\rangle} \arrow[urr, "\gamma"'] & & \end{tikzcd}$$

s'annule *par construction* sur l'idéal $\langle f_{r+1},\dots,f_m\rangle$ et induit un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres noté $\gamma : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}'$.

On remarque alors que le déterminant de la matrice jacobienne $[\partial R_k/\partial Z_j]$ modulo $\pi{\cdot}b_{\boldsymbol{K}}$ est égal à :

$$\det\left[\frac{\partial R_k}{\partial Z_j}\right] \simeq \det\left(\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_{r+1}}{\partial X_1} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial f_{r+1}}{\partial X_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial X_1} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial X_m} \end{bmatrix} \big(\alpha_2(\vec{X})\big) \begin{bmatrix} Q_{1,r+1} & \cdots & Q_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ Q_{m,r+1} & \cdots & Q_{m,m} \end{bmatrix}\right)$$

$$= \alpha_2\left(\det\left(\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_{r+1}}{\partial X_1} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial f_{r+1}}{\partial X_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial X_1} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial X_m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{1,r+1} & \cdots & P_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ P_{m,r+1} & \cdots & P_{m,m} \end{bmatrix}\right)\right) = 1$$

d'après l'égalité (‡‡) de la preuve de (a).

Par conséquent, la localisation $\boldsymbol{B}_\varepsilon := \boldsymbol{B}'_{\det[\partial R_k/\partial Z_j]}$ est une $\boldsymbol{B}$-algèbre intersection complète étale.

Notons $h : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}_\varepsilon$ la composée de γ et du morphisme structural $\boldsymbol{B}' \to \boldsymbol{B}_\varepsilon$. La réduction modulo $\pi{\cdot}b_{\boldsymbol{K}}$ identifie $\boldsymbol{B}'$ et $\boldsymbol{B}_\varepsilon$. Notons $\widetilde{\boldsymbol{B}} := \boldsymbol{B}/\langle \pi{\cdot}b_{\boldsymbol{K}}\rangle$. La $\widetilde{\boldsymbol{B}}$-algèbre $\widetilde{\boldsymbol{B}} \otimes_{\boldsymbol{B}} \boldsymbol{B}'$ apparaît alors, d'après ($\diamond\diamond$), comme le quotient :

$$\frac{\widetilde{\boldsymbol{B}}[Z_{r+1},\dots,Z_m]}{\langle Z_{r+1} + \widetilde{S}_{r+1},\dots,Z_m + \widetilde{S}_m\rangle},$$

qui est clairement isomorphe à $\widetilde{\boldsymbol{B}}$. Par conséquent, $\boldsymbol{B}_\varepsilon$ est bien un voisinage étale de $\langle \pi{\cdot}b_{\boldsymbol{K}}\rangle$ dans $\boldsymbol{B}$, et la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ de h s'identifie à $\overline{h}$.

L'assertion (b) est ainsi vérifiée à chaque fois que $\boldsymbol{A}$ est intersection complète lisse et que $\boldsymbol{I}$ est principal, et ceci quel que soit l'idéal $\boldsymbol{K} \subseteq \boldsymbol{B}$ d'après la partie I.

– *Cas où l'idéal $\boldsymbol{I} \subseteq \boldsymbol{R}$ est quelconque.*

Nous montrons que le cas général se ramène au cas où $\boldsymbol{I}$ est principal essentiellement de la même manière que dans la partie I.

Soit $\alpha_2 : \boldsymbol{R}[X_1, \ldots, X_m] \to \boldsymbol{B}$ un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres tel que les diagrammes ($\mathscr{D}$) sont commutatifs et tel que $\alpha_2(f_k) \in \boldsymbol{I}{\cdot}b_{\boldsymbol{K}}{\cdot}\boldsymbol{B}$, *i.e.* $\alpha_2(f_k) = \sum_i \pi_{k,i}{\cdot}b_{\boldsymbol{K}}{\cdot}b_{k,i}$, avec $\pi_{k,i} \in \boldsymbol{I}$ et $b_{k,i} \in \boldsymbol{B}$, et ceci pour chaque $k = r{+}1, \ldots, m$. L'ensemble de ces égalités fait apparaître l'ensemble fini $\{\pi_{k,i}\} = \{\pi_1, \ldots, \pi_t\}$ d'éléments de $\boldsymbol{I}$ dont on note $\boldsymbol{I}' = \langle \pi_1, \ldots, \pi_t\rangle$ l'idéal dans $\boldsymbol{R}$ qu'il engendre. Posons, pour $\ell \in \{1, \ldots, t\}$: $\boldsymbol{R}_\ell$, $\boldsymbol{A}_\ell$, $\boldsymbol{B}_\ell$, $\boldsymbol{C}_\ell$, φ_ℓ, p_ℓ, les réductions modulo l'idéal $\langle \pi_1, \ldots, \pi_\ell\rangle$ des objets correspondants ; on appellera le nombre ℓ le « *degré de réduction* ». L'idéal $\boldsymbol{I}'$ rend compte de l'obstruction au relèvement de $\overline{h}$ vérifiant (b) avec $\boldsymbol{B}_\varepsilon = \boldsymbol{B}$, de sorte que (b) est vérifiée avec $\boldsymbol{B}_\varepsilon = \boldsymbol{B}$ au degré de réduction t. Notons h_t un tel relèvement ; on a les diagrammes analogues à $\mathscr{D}$:

$$
\begin{tikzcd}
\boldsymbol{R} & & \boldsymbol{B} \arrow[d, two heads, "p"] \\
& \boldsymbol{A} \arrow[r, "\varphi"] & \boldsymbol{C}
\end{tikzcd}
\qquad\Bigg|\qquad
\begin{tikzcd}
\boldsymbol{R}_t & & \boldsymbol{B}_t \arrow[d, two heads, "p_t"] \\
& \boldsymbol{A}_t \arrow[r, "\varphi_t"'] \arrow[ur, "h_t"] & \boldsymbol{C}_t
\end{tikzcd}
\qquad (\mathscr{D}_t)
$$

où celui de droite correspond à la réduction modulo l'idéal $\langle \pi_1, \ldots, \pi_t\rangle \subseteq \boldsymbol{R}$.

L'assertion (b) peut être vérifiée maintenant par récurrence sur le nombre t ; le cas $t = 0$ est trivial et le cas $t = 1$ a déjà été traité. Dans le cas général, l'assertion (b) est vérifiée par hypothèse inductive pour les données $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{C}_1$, etc ; il existe donc une intersection complète lisse $\varepsilon_1 : \boldsymbol{B}_1 \to \boldsymbol{B}_{1,\varepsilon}$, voisinage étale de $\boldsymbol{I}{\cdot}\boldsymbol{K}$, et un morphisme de $\boldsymbol{R}_1$-algèbres $h_{1,\varepsilon} : \boldsymbol{A}_1 \to \boldsymbol{B}_{1,\varepsilon}$ tel que $\bar{\varepsilon}_1 \circ \overline{h} = \overline{h}_{1,\varepsilon}$, et tels que le diagramme suivant est commutatif :

$$
\begin{tikzcd}
& \boldsymbol{B}_{\varepsilon'} \arrow[d, two heads, "\nu_1'"'] & \boldsymbol{B} \arrow[l, "\varepsilon'"'] \arrow[d, two heads, "\nu_1"] \\
\boldsymbol{A}_1 \arrow[r, "h_{1,\varepsilon}"] \arrow[rr, bend left=50, dotted, "\overline{h}"] \arrow[dr, "\varphi_1"'] & \boldsymbol{B}_{1,\varepsilon} \arrow[d, two heads, "p_{1,\varepsilon}"'] & \boldsymbol{B}_1 \arrow[l, "\varepsilon_1"'] \arrow[dl, two heads, "p_1"] \\
& \boldsymbol{C}_1 &
\end{tikzcd}
$$

où ν_1 est la surjection canonique, $\varepsilon' : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{B}_{\varepsilon'}$ est un voisinage étale de $\boldsymbol{I}{\cdot}\boldsymbol{K}$ intersection complète qui relève ε_1, et ν'_1 est la surjection induite par ε' à partir de ν_1 (4.5.8). En particulier, $\boldsymbol{B}_{1,\varepsilon'}$ s'identifie à la réduction modulo π_1 de $\boldsymbol{B}_{\varepsilon'}$. Notons $p_{\varepsilon'} : \boldsymbol{B}_{\varepsilon'} \twoheadrightarrow \boldsymbol{C}$ la surjection induite par ε' à partir de p ; on a $p = p_{\varepsilon'} \circ \varepsilon'$ et p_1 s'identifie à la réduction modulo π_1 de $p_{\varepsilon'}$. On a ainsi les données suivantes :

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{R} & & \boldsymbol{B}_{\varepsilon'} \arrow[d, two heads, "p_{\varepsilon'}"] \\ \boldsymbol{A} \arrow[rr, "\varphi"] & & \boldsymbol{C} \end{tikzcd} \qquad \Bigg| \qquad \begin{tikzcd} \boldsymbol{R}_1 & & \boldsymbol{B}_{1,\varepsilon} \arrow[d, two heads, "p_1"] \\ \boldsymbol{A}_1 \arrow[urr, "h_{1,\varepsilon}"] \arrow[rr, "\varphi_1"] & & \boldsymbol{C}_1 \end{tikzcd}$$

et comme le passage de $\boldsymbol{R}$ à $\boldsymbol{R}_1$ se fait par réduction modulo l'idéal principal $\langle \pi_1 \rangle$, l'assertion (b) est vérifiée pour ces données. On a donc une $\boldsymbol{B}_{\varepsilon'}$-algèbre intersection complète lisse $\varepsilon'' : \boldsymbol{B}_{\varepsilon'} \to \boldsymbol{B}_\varepsilon$, voisinage étale de $\boldsymbol{I}{\cdot}\boldsymbol{K}$, et un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $h_\varepsilon : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}_\varepsilon$ tel que $p_{\varepsilon'} \circ h_\varepsilon = \varphi$ et tel que, par réduction modulo π_1, h_ε coïncide avec $h_{1,\varepsilon} \circ \varepsilon''$. Enfin, la composée $\varepsilon := \varepsilon'' \circ \varepsilon' : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{B}_\varepsilon$ fait de $\boldsymbol{B}_\varepsilon$ une $\boldsymbol{B}$-algèbre intersection complète voisinage étale de $\boldsymbol{I}{\cdot}\boldsymbol{K}$ et l'assertion (b) est vérifiée pour les données d'origine : $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, φ, p, $\overline{h}$.

Ceci termine la démonstration de la proposition lorsque $\boldsymbol{A}$ est intersection complète lisse sur $\boldsymbol{R}$.

- ***Cas où $\boldsymbol{A}$ est lisse mais pas nécessairement intersection complète***

La proposition 5.2.1 (b) montre qu'il existe un $\boldsymbol{A}$-module projectif $\boldsymbol{N}$ tel que l'algèbre symétrique $\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{N})$ est une intersection complète lisse sur $\boldsymbol{R}$. Tout morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\phi : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}'$ admet alors une factorisation canonique en

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{A} \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[rr, bend right, "\phi"'] & \mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{N}) \arrow[r, "\tilde{\phi}"] & \boldsymbol{A}' \end{tikzcd}$$

où ι désigne le morphisme structural et où $\widetilde{\phi}$ est le prolongement de ϕ, nul sur $\boldsymbol{N}$. En particulier, les morphismes φ et $\overline{h}$ des données de la proposition se factorisent suivant :

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{A} \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[drr, "\varphi"'] & \mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{N}) \arrow[dr, "\tilde{\varphi}"] & \boldsymbol{B} \arrow[d, two heads, "p"] \\ & & \boldsymbol{C} \end{tikzcd} \quad + \quad \begin{tikzcd} \overline{\boldsymbol{A}} \arrow[r, hook, "\bar{\iota}"] \arrow[drr, "\overline{\varphi}"'] & \mathsf{S}^*_{\overline{\boldsymbol{A}}}(\overline{\boldsymbol{N}}) \arrow[r, "\tilde{\bar{h}}"] \arrow[dr, "\tilde{\bar{\varphi}}"] & \overline{\boldsymbol{B}} \arrow[d, two heads, "\bar{p}"] \\ & & \overline{\boldsymbol{C}} \end{tikzcd}$$

et la validité de la proposition pour $\mathsf{S}^*_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{N})$ entraîne sa validité pour $\boldsymbol{A}$. ∎

5.3.3. Remarque : Lorsque dans la proposition précédente, $(\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{B})\cap\boldsymbol{K}$ est nilpotent, l'assertion (b) est vérifiée avec $\boldsymbol{B}_\varepsilon=\boldsymbol{B}$ d'après (a).

5.3.4. Théorème : *Étant donnés un morphisme de $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres $\overline{h}:\overline{\boldsymbol{A}}\to\overline{\boldsymbol{B}}$, et des relèvements $p_{\boldsymbol{A}}:\boldsymbol{A}\twoheadrightarrow\overline{\boldsymbol{A}}$ et $p_{\boldsymbol{B}}:\boldsymbol{B}\twoheadrightarrow\overline{\boldsymbol{B}}$, où $\boldsymbol{A}$ est lisse, il existe une $\boldsymbol{B}$-algèbre $\boldsymbol{B}_\varepsilon$ intersection complète lisse étale, voisinage de $\boldsymbol{I}$ dans $\boldsymbol{B}$, et un morphisme $h:\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{B}_\varepsilon$ qui relève $\overline{h}$. Soit, en termes de diagramme commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{A} \arrow[r, dashed, "h"] \arrow[d, two heads, "p_{\boldsymbol{A}}"'] & \boldsymbol{B}_\varepsilon \arrow[dr, dashed, two heads, "p_{\boldsymbol{B}_\varepsilon}"'] & \boldsymbol{B} \arrow[l, dashed, "\varepsilon"'] \arrow[d, two heads, "p_{\boldsymbol{B}}"] \\
\overline{\boldsymbol{A}} \arrow[rr, "\overline{h}"] & & \overline{\boldsymbol{B}}
\end{tikzcd}$$

où $\varepsilon:\boldsymbol{B}\to\boldsymbol{B}_\varepsilon$ désigne l'homomorphisme structural et où $p_{\boldsymbol{B}_\varepsilon}$ est l'homomorphisme (surjectif) induit par ε à partir de $p_{\boldsymbol{B}}$.

En particulier, si $\boldsymbol{B}$ est intersection complète lisse sur $\boldsymbol{R}$, l'algèbre $\boldsymbol{B}_\varepsilon$ l'est également.

Démonstration : Corollaire immédiat de la proposition 5.3.2 avec $\boldsymbol{K}=0$. ■

5.3.5. Homotopies de relèvements d'homomorphismes homotopes. Dans cette partie, qui est un complément naturel au théorème 5.3.4, nous allons étudier le lien qui relie deux relèvements d'un même morphisme modulo $\boldsymbol{I}$. Nous montrerons que deux tels relèvements sont toujours « *homotopes au voisinage étale de $\boldsymbol{I}$ près* » et , dans une prochaine section, que leurs complétés $\boldsymbol{I}$-adiques sont « *homotopes au sens des algèbres $\boldsymbol{I}$-adiquement complètes* » (5.4.7). Ces types d'homotopies sont des généralisations de la notion naïve d'homotopie suivante.

5.3.6. Définition : Deux morphismes de $\boldsymbol{R}$-algèbres $u_0,u_1:\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{B}$ sont dits « *homotopes* », et l'on écrit $u_0\sim u_1$, lorsqu'il existe un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $h:\boldsymbol{A}\to\boldsymbol{B}[T]$ tel que $p_i\circ h=u_i$, où $p_i:\boldsymbol{B}[T]\to\boldsymbol{B}$ est la surjection de $\boldsymbol{B}$-algèbres qui fait correspondre $p_i:T\mapsto i$. Soit, en termes de diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & \boldsymbol{B}[T] \arrow[d, shift right, two heads, "p_0"'] \arrow[d, shift left, two heads, "p_1"] \\
\boldsymbol{A} \arrow[ur, dashed, "h"] \arrow[r, shift left, "u_0"] \arrow[r, shift right, "u_1"'] & \boldsymbol{B}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
T \arrow[d, mapsto, "p_0"'] & T \arrow[d, mapsto, "p_1"] \\
0 & 1
\end{tikzcd}$$

Cette notion d'homotopie s'avère trop rigide dans notre contexte et se trouve avantageusement remplacée par le type d'homotopie suivante :

5.3.7. Définition : Soit $\boldsymbol{I}$ un idéal dans $\boldsymbol{R}$. Deux morphismes de $\boldsymbol{R}$-algèbres $u_0, u_1 : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ seront dits « *homotopes au voisinage étale de $\boldsymbol{I}$ près* », et l'on écrit $u_0 \sim_\varepsilon u_1$, lorsqu'il existe :

- un voisinage étale $\boldsymbol{B}[T]_\varepsilon$ de $\boldsymbol{I}$, de $\langle T \rangle$ et de $\langle 1 - T \rangle$ dans $\boldsymbol{B}[T]$ dont on note $\varepsilon : \boldsymbol{B}[T] \to \boldsymbol{B}[T]_\varepsilon$ le morphisme structural et $p_{0,\varepsilon}, p_{1,\varepsilon} : \boldsymbol{B}[T]_\varepsilon \to \boldsymbol{B}$ les morphismes de $\boldsymbol{B}[T]$-algèbres induits par ε à partir de p_0 et p_1 respectivement.
- un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $h : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}[T]_\varepsilon$ vérifiant $p_{i,\varepsilon} \circ h = u_i$.

Soit, en termes de diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
& \boldsymbol{B}[T] \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, shift right, "p_0"'] \arrow[d, shift left, "p_1"] & \boldsymbol{B}[T]_\varepsilon \arrow[dl, shift right, "p_{0,\varepsilon}"'] \arrow[dl, shift left, "p_{1,\varepsilon}"] \\
\boldsymbol{A} \arrow[r, shift left, "u_0"] \arrow[r, shift right, "u_1"'] \arrow[urr, dashed, bend left, "h"] & \boldsymbol{B} &
\end{tikzcd}$$

Lorsque, en plus, $\boldsymbol{B}[T]_\varepsilon$ est intersection complète sur $\boldsymbol{B}[T]$, on dira que u_0 et u_1 sont « *homotopes au voisinage étale de $\boldsymbol{I}$ intersection complète près* ».

5.3.8. Remarque : Les dernières définitions ont bien évidemment un sens lorsque les données appartiennent à la catégorie $\mathrm{Alg}(\overline{\boldsymbol{R}})$, mais dans ce cas, un voisinage étale est toujours un isomorphisme et ces différents types d'homotopie coïncident.

Nous pouvons maintenant énoncer le principal résultat de cette section ; il répond à la question (Rel-4) de 5.1.

5.3.9. Théorème : *Soit $\boldsymbol{I}$ un idéal arbitraire dans $\boldsymbol{R}$. Soit $\boldsymbol{A}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre lisse. Alors, deux morphismes $u_0, u_1 : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ de $\boldsymbol{R}$-algèbres dont les réductions modulo $\boldsymbol{I}$ sont homotopes (en particulier égales), sont homotopes au voisinage étale de $\boldsymbol{I}$ intersection complète près.*

Démonstration : Soient les morphismes de $\boldsymbol{R}$-algèbres $p : \boldsymbol{B}[T] \to \boldsymbol{B} \oplus \boldsymbol{B}$ défini par $p(P(T)) := (P(0), P(1))$ dont on remarquera qu'il est *surjectif* de noyau $\boldsymbol{K} = \langle T(1-T) \rangle$, et $\varphi : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B} \oplus \boldsymbol{B}$ défini par $\varphi(a) := (u_0(a), u_1(a))$. On a $\overline{p} \circ \overline{h} = \overline{\varphi}$ pour toute homotopie $\overline{h}$ entre $\overline{u}_0$ et $\overline{u}_1$, et le théorème est corollaire immédiat de la proposition 5.3.2 appliquée à la paire d'homomorphismes $\boldsymbol{A} \xrightarrow{\varphi} \boldsymbol{B} \oplus \boldsymbol{B} \xleftarrow{p} \boldsymbol{B}[T]$ et à l'homomorphisme de $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres $\overline{h} : \overline{\boldsymbol{A}} \to \overline{\boldsymbol{B}}[T]$. ∎

5.4 Relèvements et complétion $\boldsymbol{I}$-adique

5.4.1. Complétion $\boldsymbol{I}$-adique. On se donne un anneau $\boldsymbol{R}$ et un idéal $\boldsymbol{I} \subseteq \boldsymbol{R}$ arbitraires. On considère $\boldsymbol{R}$ muni de la topologie $\boldsymbol{I}$-adique et l'on note $\widehat{\boldsymbol{R}}$ le complété séparé $\boldsymbol{I}$-adique de $\boldsymbol{R}$ (*cf.* [Mat] chap. 9). Une $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$ sera alors considérée munie de la topologie $\boldsymbol{I}$-adique et l'on notera $\widehat{\boldsymbol{A}}$ le complété séparé de $\boldsymbol{A}$ pour cette topologie. Notons, pour chaque $m \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{A}_m := \boldsymbol{A}/\boldsymbol{I}^m{\cdot}\boldsymbol{A}$. L'algèbre $\widehat{\boldsymbol{A}}$ est naturellement une $\widehat{\boldsymbol{R}}$-algèbre isomorphe à la limite projective du système projectif défini par les surjections canoniques $\nu_{m+1}(\boldsymbol{A}) : \boldsymbol{A}_{m+1} \twoheadrightarrow \boldsymbol{A}_m$. Les éléments $a \in \widehat{\boldsymbol{A}}$ admettent alors des représentations (non uniques) sous forme de séries formelles $a := \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$, avec $x_n \in \boldsymbol{I}^n{\cdot}\boldsymbol{A}$, et les opérations de somme et produit dans $\widehat{\boldsymbol{A}}$ correspondent aux mêmes opérations sur les séries en question. La famille des surjections canoniques $\boldsymbol{A} \twoheadrightarrow \boldsymbol{A}_m$ induit un morphisme canonique de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\xi_{\boldsymbol{A}} : \boldsymbol{A} \to \widehat{\boldsymbol{A}}$ dont la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ est bijective. On a $\overline{\boldsymbol{A}} := \boldsymbol{A}/\boldsymbol{I}{\cdot}\boldsymbol{A} \equiv \boldsymbol{A}_m/\boldsymbol{I}{\cdot}\boldsymbol{A}_m \equiv \widehat{\boldsymbol{A}}/\boldsymbol{I}{\cdot}\widehat{\boldsymbol{A}}$, .

Enfin, pour tout morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $\alpha : \boldsymbol{A}_1 \to \boldsymbol{A}_2$, et chaque $a \in \widehat{\boldsymbol{A}}_1$, l'élément $\widehat{\alpha}(a) := \sum_n \alpha(x_n)$ est indépendant de la représentation sous forme de série $a = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$, avec $x_n \in \boldsymbol{I}^n{\cdot}\boldsymbol{A}$. L'application $\widehat{\alpha} : \widehat{\boldsymbol{A}}_1 \to \widehat{\boldsymbol{A}}_2$ ainsi définie est l'unique morphisme de $\widehat{\boldsymbol{R}}$-algèbres rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{A}_1 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\xi_{\boldsymbol{A}_1}"'] & \boldsymbol{A}_2 \arrow[d, "\xi_{\boldsymbol{A}_2}"] \\
\widehat{\boldsymbol{A}}_1 \arrow[r, "\widehat{\alpha}"] & \widehat{\boldsymbol{A}}_2
\end{tikzcd}$$

Les correspondances $\boldsymbol{A} \rightsquigarrow \widehat{\boldsymbol{A}}$ et $\alpha \rightsquigarrow \widehat{\alpha}$ définissent un foncteur covariant de la catégorie $\mathrm{Alg}(\boldsymbol{R})$ vers la catégorie $\mathrm{Alg}_{\mathrm{cs}}(\widehat{\boldsymbol{R}})$ des $\widehat{\boldsymbol{R}}$-algèbres complètes et séparées que nous allons appeler « *complétion $\boldsymbol{I}$-adique* » et simplement « *complétion* » lorsque la référence à la topologie $\boldsymbol{I}$-adique sera sous-entendue. Le foncteur de complétion factorise le foncteur de réduction modulo $\boldsymbol{I}$ de $\mathrm{Alg}(\boldsymbol{R})$ vers $\mathrm{Alg}(\overline{\boldsymbol{R}})$; autrement dit, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Alg}(\boldsymbol{R}) \arrow[r, rightsquigarrow, "\widehat{(\ )}"] \arrow[dr, rightsquigarrow, "\overline{(\ )}"'] & \mathrm{Alg}_{\mathrm{cs}}(\widehat{\boldsymbol{R}}) \arrow[d, rightsquigarrow, "\overline{(\ )}"] \\
& \mathrm{Alg}(\overline{\boldsymbol{R}})
\end{tikzcd}$$

On observera que comme toute $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbre est la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ d'une $\boldsymbol{R}$-algèbre, le foncteur de réduction modulo $\boldsymbol{I}$ de $\mathrm{Alg}_{\mathrm{cs}}(\widehat{\boldsymbol{R}})$ vers $\mathrm{Alg}(\overline{\boldsymbol{R}})$ est essentiellement surjectif.

Les problèmes de relèvements des algèbres lisses et des morphismes que nous avons étudiés dans la section précédente se posent maintenant pour la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ de $\mathrm{Alg}_{\mathrm{cs}}(\widehat{\boldsymbol{R}})$ vers $\mathrm{Alg}(\overline{\boldsymbol{R}})$. Lorsque $\boldsymbol{A}$ est un relèvement lisse d'un $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbre lisse $\overline{\boldsymbol{A}}$, sa complétion $\widehat{\boldsymbol{A}}$ relève également $\overline{\boldsymbol{A}}$ et *mutatis mutandis* pour les morphismes entre deux $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres.

L'intérêt majeur de considérer les complétions des relèvements tient à ce que deux telles algèbres sont toujours isomorphes, contrairement aux relèvements dans $\mathrm{Alg}(\boldsymbol{R})$ dont on ne peut affirmer qu'ils soient isomorphes en dehors du cas ou $\boldsymbol{I}$ est nilpotent (*cf.* 5.2.9). En contrepartie, ces complétions ne sont plus (en général) des $\boldsymbol{R}$-algèbres de présentation finie, même lorsque $\boldsymbol{R}$ est complet, et l'on ne peut plus parler de relèvements lisses. Ces complétions sont pourtant proches des algèbres lisses : elles sont « $(\boldsymbol{R},\boldsymbol{I})$-*formellement lisses* » (voir 5.4.3). On montre que pour une $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbre lisse donnée $\overline{\boldsymbol{A}}$, deux algèbres dans $\mathrm{Alg}_{\mathrm{cs}}(\widehat{\boldsymbol{R}})$ qui sont $(\boldsymbol{R},\boldsymbol{I})$-formellement lisses et qui relèvent $\overline{\boldsymbol{A}}$ sont toujours isomorphes.

Enfin, lorsque $\overline{\alpha} : \overline{\boldsymbol{A}}_1 \to \overline{\boldsymbol{A}}_2$ est un morphisme de $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres lisses nous avons montré qu'il existe des relèvements $\alpha_i : \boldsymbol{A}_1 \to \boldsymbol{A}_2$, dans la catégorie de $\boldsymbol{R}$-algèbres (th. 5.2.10), et qu'ils sont deux-à-deux homotopes au voisinage étale de $\boldsymbol{I}$ près (th. 5.3.9). Nous montrerons que la complétion rend les morphismes $\widehat{\alpha}_i$ deux-à-deux homotopes au sens des algèbres $\boldsymbol{I}$-adiquement complètes (5.4.7).

Ces préliminaires font apparaître en filigrane une “correspondance” qui va de la catégorie de $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres lisses vers la catégorie des $\widehat{\boldsymbol{R}}$-algèbres complètes séparées et $(\boldsymbol{R},\boldsymbol{I})$-formellement lisses, mais on ne peut parler de correspondance fonctorielle dans la mesure où les algèbres image ne sont définies qu'à isomorphisme ***canonique à homotopie près*** et *mutatis mutandis* pour les morphismes image. Ces indétermination disparaîtront lorsque l'on s'intéressera à la cohomologie de de Rham p-adique ce qui fera l'objet du prochain chapitre.

5.4.2. Complétion $\boldsymbol{I}$-adique des relèvements des $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbres lisses

Les notations du paragraphe précédent sont toujours en vigueur. Soit $\overline{\boldsymbol{A}}$ une $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbre lisse et fixons une $\boldsymbol{R}$-algèbre lisse $\boldsymbol{A}$ relevant $\overline{\boldsymbol{A}}$ (5.2.7). Pour chaque $m \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{A}_m := \boldsymbol{A}/\boldsymbol{I}^m{\cdot}\boldsymbol{A}$ est une $\boldsymbol{R}_m$-algèbre lisse. La limite du système projectif des surjections canoniques $\varphi_{m+1} : \boldsymbol{A}_{m+1} \twoheadrightarrow \boldsymbol{A}_m$ est la $\widehat{\boldsymbol{R}}$-algèbre $\widehat{\boldsymbol{A}}$. Cette algèbre peut fort bien ne pas être une algèbre de présentation finie sur $\widehat{\boldsymbol{R}}$ mais elle vérifie, par construction, la propriété suivante proche de la lissité.

5.4.3. Définition : Soient un anneau $\boldsymbol{R}$ et un idéal $\boldsymbol{I} \subseteq \boldsymbol{R}$ arbitraires. On dit qu'une $\boldsymbol{R}$-algèbre $\boldsymbol{A}$ est « $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{I})$-**formellement lisse** » lorsque $\boldsymbol{A}_m$ est $\boldsymbol{R}_m$-lisse pour tout entier m strictement positif.

5.4.4. Remarque : Une $\boldsymbol{R}$-algèbre lisse est toujours $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{I})$-formellement lisse.

5.4.5. Théorème : *Soient $\boldsymbol{R}$ un anneau et $\boldsymbol{I}$ un idéal dans $\boldsymbol{R}$ arbitraires.*

a) *Pour chaque $\overline{\boldsymbol{R}}$-algèbre lisse $\overline{\boldsymbol{A}}$, il existe une $\boldsymbol{R}$-algèbre $\widehat{\boldsymbol{A}}$ qui est $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{I})$-formellement lisse, complète et séparée pour la topologie $\boldsymbol{I}$-adique et dont la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ est isomorphe à $\overline{\boldsymbol{A}}$. De plus, une telle algèbre $\widehat{\boldsymbol{A}}$ est unique à isomorphisme (non canonique) près.*

b) *Pour chaque morphisme $\alpha : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ de $\boldsymbol{R}$-algèbres lisses dont la réduction modulo $\boldsymbol{I}$ est un isomorphisme, la complétion $\widehat{\alpha} : \widehat{\boldsymbol{A}} \to \widehat{\boldsymbol{B}}$ est un isomorphisme.*

Démonstration :

a) L'existence a été établie dans les remarques préliminaires. Soient maintenant $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{B}'$ deux $\boldsymbol{R}$-algèbres complètes et séparées pour la topologie $\boldsymbol{I}$-adique, $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{I})$-formellement lisses et dont les réductions modulo $\boldsymbol{I}$ sont isomorphes à $\overline{\boldsymbol{A}}$. Comme ces algèbres sont isomorphes aux limites des systèmes projectifs définis par leurs réductions modulo les puissance de $\boldsymbol{I}$, la donnée d'un isomorphisme entre $\boldsymbol{B}$ et $\boldsymbol{B}'$ équivaut à la donnée d'une famille d'isomorphismes $\{\alpha_m : \boldsymbol{B}_m \to \boldsymbol{B}'_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ telle que tous les diagrammes :

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{B}_{m+1} & \xrightarrow[\equiv]{\alpha_{m+1}} & \boldsymbol{B}'_{m+1} \\ {\scriptstyle \nu_{m+1}(\boldsymbol{B})}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \nu_{m+1}(\boldsymbol{B}')} \\ \boldsymbol{B}_m & \xrightarrow[\equiv]{\alpha_m} & \boldsymbol{B}'_m \end{array} \qquad (\mathscr{D})$$

sont commutatifs.

Les isomorphismes d'une telle famille peuvent être introduits par récurrence sur l'entier m. L'isomorphisme α_1 est donné dans nos hypothèses ; supposons avoir défini α_m vérifiant la condition ci-dessus. L'existence de α_{m+1} résulte alors de ce que $\boldsymbol{B}_{m+1}$ est $\boldsymbol{R}_{m+1}$-lisse et que $\ker(\nu_{m+1}(\boldsymbol{B}'))$ est nilpotent. Enfin, la ligne m du diagramme $(\mathscr{D})$ est la réduction modulo l'idéal nilpotent $\boldsymbol{I}^m \cdot \boldsymbol{R}_{m+1} \subseteq \boldsymbol{R}_{m+1}$ de la ligne $m+1$, α_{m+1} est donc un isomorphisme d'après 5.2.10.

b) Résulte immédiatement du fait que les réductions α_m sont des isomorphismes d'près la démonstration de 5.2.10. ■

5.4.6. Existence et homotopie de relèvements d'un morphisme. Dans cette partie nous démontrons les théorèmes analogues à 5.3.4 et 5.3.9 pour des relèvements dans la catégorie $\mathrm{Alg}_{\mathrm{cs}}(\widehat{\boldsymbol{R}})$. Dans ce cadre, on a des résultats plus précis dans la mesure où les voisinages étales de $\boldsymbol{I}$ auxquels font allusion les théorèmes cités, deviennent des isomorphismes après complétion (5.4.5-(b)).

Avant d'énoncer le théorème précisons par une définition un nouveau type d'homotopie.

5.4.7. Définition : Soit $\boldsymbol{B}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre complète et séparée pour la topologie $\boldsymbol{I}$-adique. Notons $\boldsymbol{B}\langle T\rangle$ la complétion $\boldsymbol{I}$-adique de l'algèbre des polynômes $\boldsymbol{B}[T]$ et soient $p_0, p_1 : \boldsymbol{B}\langle T\rangle \to \boldsymbol{B}$ les morphismes de $\boldsymbol{B}$-algèbres déterminés respectivement par les égalités $p_0(T) = 0$ et $p_1(T) = 1$. Soit $\boldsymbol{A} \in \mathrm{Alg}(\boldsymbol{R})$ et $u_0, u_1 : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ deux morphismes de $\boldsymbol{R}$-algèbres. On appelle « **homotopie de u vers v au sens des algèbres $\boldsymbol{I}$-adiquement complètes** » la donnée d'un morphisme de $\boldsymbol{R}$-algèbres $h : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}\langle T\rangle$ tel que $u = p_0 \circ h$ et $v = p_1 \circ h$.

5.4.8. Théorème : *Soient $\boldsymbol{D}$ et $\boldsymbol{B}$ des $\boldsymbol{R}$-algèbres. On suppose que $\boldsymbol{D}$ est $(\boldsymbol{R}, \boldsymbol{I})$-formellement lisse et que $\boldsymbol{B}$ est complète et séparée pour la topologie $\boldsymbol{I}$-adique. Pour toute paire de morphismes de $\boldsymbol{R}$-algèbres $u_0, u_1 : \boldsymbol{D} \to \boldsymbol{B}$, dont les réductions modulo $\boldsymbol{I}$ $\bar{u}_0, \bar{u}_1 : \overline{\boldsymbol{D}} \to \overline{\boldsymbol{B}}$ sont homotopes, les morphismes u_0 et u_1 sont homotopes au sens des algèbres $\boldsymbol{I}$-adiquement complètes.*

Démonstration : Notons $\boldsymbol{A}$ une $\boldsymbol{R}$-algèbre lisse qui relève $\overline{\boldsymbol{D}}$ (th. 5.2.7). La complétion $\widehat{\boldsymbol{A}}$ est isomorphe à la complétion de $\boldsymbol{D}$ (th. 5.4.5-(a)), d'où un morphisme canonique $\boldsymbol{D} \to \widehat{\boldsymbol{A}}$ qui factorise les morphismes u_i puisque $\boldsymbol{B}$ est supposée complète et séparée. Il suffit donc de prouver le théorème lorsque $\boldsymbol{D}$ est de la forme $\widehat{\boldsymbol{A}}$; auquel cas, il est conséquence immédiate de 5.3.9 et 5.4.5-(b). ■

5.4.9. Relèvements d'algèbres sur un anneau de valuation discrète. On appelle « *anneau de valuation discrète* » tout domaine principal $\boldsymbol{V}$ ne possédant qu'un unique idéal premier non nul noté $\mathfrak{m}(\boldsymbol{V}) = \langle\pi\rangle$ (et aussi '$\mathfrak{m}$' lorsque la référence à $\boldsymbol{V}$ est sous-entendue) (*cf.* [Ser] chap. I). Le spectre premier de $\boldsymbol{V}$ ne comporte alors que deux points : « *le point générique* » : (0), partout dense dans $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{V})$, et « *le point fermé* » : $\mathfrak{m}$. On notera $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{V})$ (resp. $\boldsymbol{K}$) le corps de fractions de $\boldsymbol{V}$, et $k(\boldsymbol{V}) := \boldsymbol{V}/\mathfrak{m}$ (resp. k) le « *corps résiduel de* $\boldsymbol{V}$ » ; la notation $(\boldsymbol{V}, \mathfrak{m}, \boldsymbol{K}, k)$ désignera la donnée d'un anneau de valuation discrète.

5.4.10. Exemples et définitions : Les exemples fondamentaux d'anneaux de valuation discrète sont les suivants :

- Soit $\boldsymbol{Q}$ un corps arbitraire. L'« *anneau des séries formelles* » à coefficients dans $\boldsymbol{Q}$ et à une seule variable $\boldsymbol{V} := k[[X]]$ est un anneau de valuation discrète complet pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique. On a $\mathfrak{m} = \langle X \rangle$, $\boldsymbol{K} := \boldsymbol{Q}((X))$ et $k := \boldsymbol{Q}[[X]]/\mathfrak{m} \equiv \boldsymbol{Q}$. Corps résiduel et corps de fractions ont même caractéristique ; on dit alors que $\boldsymbol{V}$ est un anneau de valuation discrète « *d'égale caractéristique* ».
- Soit $p \in \mathbb{N}$ un nombre premier strictement plus grand que 1. Notons $\mathbb{Z}_{(p)}$ le sous-anneau de $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels x s'exprimant comme quotient $x = A/B$ où $\operatorname{pgcd}(B, p) = 1$. L'anneau $\boldsymbol{V} := \mathbb{Z}_{(p)}$ est de valuation discrète mais n'est pas complet pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique. On a $\mathfrak{m} = \langle p \rangle$, $\boldsymbol{K} := \mathbb{Q}$ et $k = \mathbb{Z}_{(p)}/\langle p \rangle \equiv \mathbb{F}_p$. Dans ce cas $\operatorname{car}(\boldsymbol{K}) = 0$ et $\operatorname{car}(k) = p$; on dit alors que $\boldsymbol{V}$ est un anneau de valuation discrète « *d'inégale caractéristique* ».
- L'anneau $\mathbb{Z}_p$, complété p-adique de $\mathbb{Z}_{(p)}$, est appelé « *l'anneau des entiers p-adiques* », c'est la limite projective du système $\{\mathbb{Z}_{(p)}/\langle p \rangle^{m+1} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_{(p)}/\langle p \rangle^m\}_{m \in \mathbb{N}}$ des surjections canoniques. L'anneau $\boldsymbol{V} := \mathbb{Z}_p$ est de valuation discrète et complet pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique. On a $\mathfrak{m} = \langle p \rangle$, $\boldsymbol{K} := \mathbb{Q}_p$, appelé « *le corps des nombres p-adiques* », et $k = \mathbb{F}_p$; $\boldsymbol{V}$ est d'inégale caractéristique.
- **Vecteurs de Witt.** (*cf.* [Ser] §II.6) Dans l'exemple précédent on donne un anneau de valuation discrète complet et séparé dont la réduction modulo l'idéal maximum est le corps $\mathbb{F}_p$. Une procédure générale (et fonctorielle) permet d'associer à tout corps k de caractéristique finie (et parfait) un anneau de valuation discrète complet, séparé et dont la réduction modulo l'idéal maximum est le corps k lui-même.

  Pour chaque nombre premier p et chaque entier positif ℓ, notons $\boldsymbol{X}_\ell$ l'ensemble des ℓ-uplets $\vec{a} = (a_0, \ldots, \ell - 1)$ où les a_i sont des éléments de l'anneau $\boldsymbol{Q} := \mathbb{Q}[X_i, Y_i, Z_i]_{i=0,\ldots,\ell-1}$ à 3ℓ variables, et soit $\varphi : \boldsymbol{X}_\ell \to \boldsymbol{X}_\ell$ l'application qui fait correspondre au ℓ-uplet $\vec{a}$ le ℓ-uplet $\varphi(\vec{a})$ de coefficients :

  $$\varphi(\vec{a})_j := \textstyle\sum_{i=0}^{j} p^i a_i^{p^{j-i}}, \qquad j = 0, \ldots, \ell.$$

  Par exemple, on a pour les trois premiers coefficients :

  $$\begin{cases} \varphi(\vec{a})_0 = a_0 \\ \varphi(\vec{a})_1 = a_0^p + p{\cdot}a_1 \\ \varphi(\vec{a})_2 = a_0^{p^2} + p{\cdot}a_1^p + p^2{\cdot}a_2 \end{cases}$$

On vérifie que φ est bijective et que $\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ et $\varphi(\mathbb{1}) = (1, \ldots, 1)$, où l'on a noté $\mathbf{0} := (0, \ldots, 0)$ et $\mathbb{1} := (1, 0, \ldots, 0)$. On définit alors une structure d'anneau $\big(\boldsymbol{X}_\ell, \oplus, \odot, \mathbf{0}, \mathbb{1}\big)$ en transportant par φ la structure d'anneau produit sur $\boldsymbol{X}_\ell = \boldsymbol{Q} \times \cdots \times \boldsymbol{Q}$; autrement dit, on pose $\vec{a} \circledast \vec{b} := \varphi^{-1}\big(\varphi(\vec{a}) * \varphi(\vec{b})\big)$, où $*$ désigne l'un des trois opérateurs binaires $+, -, \cdot$. Un théorème fondamental affirme que pour chaque $j = 0, \ldots, \ell$ et chaque opération $* \in \{+, -, \cdot\}$, il existe un polynôme ***à coefficients entiers et sans terme constant*** $P_{*,j} \in \mathbb{Z}[x_i, y_i]_{i=0,\ldots,\ell-1}$ tel que :

$$(\vec{a} \circledast \vec{b})_j = P_{*,j}(a_0, \ldots, a_{\ell-1}, b_0, \ldots, b_{\ell-1}) \,,$$

pour tous $\vec{a}, \vec{b} \in \boldsymbol{X}_\ell$ (*loc. cit.* th. 5 page 50). Les propriétés de : associativité, distributivité, éléments neutres, commutativité, etc., qui font de la structure $\big(\boldsymbol{X}_\ell, \oplus, \odot, \mathbf{0}, \mathbb{1}\big)$ un anneau, s'expriment alors à l'aide de propriétés « *universelles* » qui relient les polynômes $P_{+,j}$ et $P_{\cdot,j}$.

Soit $\boldsymbol{A}$ un anneau, « *l'anneau des vecteurs de Witt de longueur ℓ sur $\boldsymbol{A}$* », noté $W_\ell(\boldsymbol{A})$, est l'ensemble des ℓ-uplets à coefficients dans $\boldsymbol{A}$ muni des opérations binaires '$+$' et '$\cdot$' définies par :

$$\left\{\begin{array}{rl} \big(\vec{a} + \vec{b}\big)_j & := P_{+,j}(a_0, \ldots, a_{\ell-1}, b_0, \ldots, b_{\ell-1}) \\ \big(\vec{a} \cdot \vec{b}\big)_j & := P_{\cdot,j}(a_0, \ldots, a_{\ell-1}, b_0, \ldots, b_{\ell-1}) \end{array}\right\} \quad \text{pour } j = 0, \ldots, \ell - 1,$$

On démontre, grâce aux propriétés universelles qui relient les polynômes $P_{*,j}$, que $\big(W_\ell(\boldsymbol{A}), +, \cdot, \mathbf{0}, \mathbb{1}\big)$ est un anneau commutatif et, lorsque $\boldsymbol{A}$ est en plus de caractéristique positive p, que $W_\ell(\boldsymbol{A})$ est de caractéristique p^ℓ.

L'application de « *restriction* » $r_{\ell+1} : W_{\ell+1}(\boldsymbol{A}) \to W_\ell(\boldsymbol{A})$ qui fait correspondre $(a_0, \ldots, a_\ell) \mapsto (a_0, \ldots, a_{\ell-1})$ est un morphisme surjectif d'anneaux et la limite du système projectif défini par $\{r_m\}$ est appelée « *l'anneau de vecteurs Witt sur $\boldsymbol{A}$* » et est notée $W(\boldsymbol{A})$. Pour chaque ℓ, la surjection $r_2 \circ \cdots \circ r_\ell : W_\ell(\boldsymbol{A}) \twoheadrightarrow \boldsymbol{A}$ qui fait correspondre $\vec{a} \mapsto a_0$ est un morphisme d'anneaux de noyau nilpotent et un ℓ-uplet $\vec{a}$ est inversible dans $W_\ell(\boldsymbol{A})$, si et seulement si, son coefficient $a_0 \in \boldsymbol{A}$ l'est. On a les théorèmes suivants (*loc. cit.*) :

Si k est un corps parfait de caractéristique finie, $W(k)$ est un anneau de caractéristique nulle, de valuation discrète complet et séparé, et sa réduction modulo l'idéal maximum est k.

L'anneau $W(\mathbb{F}_p)$ est isomorphe à l'anneau des entiers p-adiques $\mathbb{Z}_p$.

Pour tout morphisme d'anneaux $\alpha : \boldsymbol{A}_1 \to \boldsymbol{A}_2$, l'application $W(\alpha) : W(\boldsymbol{A}_1) \to W(\boldsymbol{A}_2)$ définie par $W(\alpha)(a_0, a_1, \ldots) := \big(\alpha(a_0), \alpha(a_1), \ldots\big)$, est un morphisme d'anneaux et la correspondance $\boldsymbol{A} \rightsquigarrow W(\boldsymbol{A})$, $\alpha \rightsquigarrow W(\alpha)$ est fonctorielle. En particulier, lorsque $\boldsymbol{A}$ est de caractéristique p, l'homomorphisme de Frobenius $F : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}$, $a \mapsto a^p$, admet un « *relèvement* » canonique $W(F) : W(\boldsymbol{A}) \to W(\boldsymbol{A})$.

5.4.11. Exercice : Montrer qu'un anneau de valuation discrète d'inégale caractéristique est nécessairement de caractéristique nulle.

5.4.12. Relèvements de $\boldsymbol{k}$-algèbres. Les surjections canoniques $\boldsymbol{V} \hookrightarrow \boldsymbol{K}$ et $\boldsymbol{V} \twoheadrightarrow k$ donnent lieu aux morphismes de schémas affines : $\mathrm{Spec}(k) \hookrightarrow \mathrm{Spec}(\boldsymbol{V}) \leftarrow \mathrm{Spec}(\boldsymbol{K})$, et nous avons par changement de base deux foncteurs de la catégorie des schémas sur $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{V})$ vers les catégories des schémas sur $\mathrm{Spec}(k)$ et $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{K})$ appelés respectivement : « *la fibre spéciale* » et « *la fibre générique* ».

5.4.13. Définitions : Soit $\boldsymbol{X}_k$ un schéma sur $\mathrm{Spec}(k)$. On appelle « *relèvement (plat) de $\boldsymbol{X}_k$* » tout schéma $\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{V}}$ ***plat*** sur $\boldsymbol{V}$ dont la fibre spéciale est isomorphe à $\boldsymbol{X}_k$.

Lorsque $\boldsymbol{X}_k$ est lisse sur $\mathrm{Spec}(k)$, on appelle « *relèvement lisse de $\boldsymbol{X}_k$* » tout schéma $\boldsymbol{X}_{\boldsymbol{V}}$ ***lisse*** sur $\boldsymbol{V}$ dont la fibre spéciale est isomorphe à $\boldsymbol{X}_k$.

5.4.14. Remarque : Suite au théorème 4.4.6, un relèvement lisse d'un schéma lisse sur $\mathrm{Spec}(k)$ est un relèvement dont la fibre générique est lisse.

Le théorème suivant résume les principaux résultats des paragraphes précédents (th. 5.2.7, th. 5.4.5-(b), th. 5.4.8).

5.4.15. Théorème : *Soit $\boldsymbol{V}$ un anneau de valuation discrète. Alors :*

a) *Toute $k(\boldsymbol{V})$-algèbre lisse $\overline{\boldsymbol{A}}$ admet un relèvement $\boldsymbol{A}$ lisse sur $\boldsymbol{V}$.*

b) *De plus, la classe d'isomorphie dans $\mathrm{Alg}_{\mathrm{cs}}(\widehat{\boldsymbol{V}})$ de la $\boldsymbol{V}$-algèbre $\widehat{\boldsymbol{A}}$: complétée séparée de $\boldsymbol{A}$, dépend uniquement de la $k(\boldsymbol{V})$-algèbre $\overline{\boldsymbol{A}}$ et non pas du relèvement $\boldsymbol{V}$-lisse $\boldsymbol{A}$ choisi.*

c) *Pour tout morphisme de $k(\boldsymbol{V})$-algèbres $\overline{\alpha} : \overline{\boldsymbol{A}} \to \overline{\boldsymbol{B}}$, entre deux algèbres $k(\boldsymbol{V})$-lisses, il existe un morphisme de $\widehat{\boldsymbol{V}}$-algèbres $\widehat{\alpha} : \widehat{\boldsymbol{A}} \to \widehat{\boldsymbol{B}}$ qui relève $\overline{\alpha}$. Deux tels relèvements sont homotopes au sens des algèbres $\boldsymbol{I}$-adiquement complètes.*

5.4.16. Rappel : On insiste sur le fait que deux relèvements de $\overline{\boldsymbol{A}}$, lisses sur $\boldsymbol{V}$, peuvent ne pas être isomorphes (voir 5.2.9 et 6.1-(**7**)) alors que leurs complétions $\boldsymbol{I}$-adiques sont toujours isomorphes (bien que de manière non canonique), mais alors ces complétions ne sont plus nécessairement de présentation finie sur $\widehat{\boldsymbol{V}}$ (on dit qu'elles ne sont pas « *algébriques sur* $\widehat{\boldsymbol{V}}$ »).

Le théorème 5.4.15 affirme que tout relèvement $(\boldsymbol{V}, \mathfrak{m}(\boldsymbol{V}))$-formellement lisse, complet et séparé d'une $k(\boldsymbol{V})$-algèbre lisse s'obtient par complétion d'un relèvement lisse sur $\boldsymbol{V}$ (donc *algébrique sur* $\boldsymbol{V}$) (5.4.5).

§ 6. Exemples de calcul de la cohomologie de de Rham

6.1 La droite affine privée d'un nombre fini de points

Soit $\boldsymbol{R}$ un anneau intègre de caractéristique arbitraire et notons $\boldsymbol{Q}$ son corps de fractions. Pour tout sous-ensemble fini $\boldsymbol{F} = \{x_1, \ldots, x_r\}$ de $\boldsymbol{R}$, on désigne par $S_{\boldsymbol{F}}$ le système multiplicatif de $\boldsymbol{R}[X]$ des éléments de la forme $(X - x_1)^{m_1} \cdots (X - x_r)^{m_r}$ avec $m_i \in \mathbb{N}$. On note $\boldsymbol{A} := S_{\boldsymbol{F}}^{-1}\boldsymbol{R}[X]$.

1) Notons $\zeta = \prod_{i=1}^r (X - x_i)$. Comme l'inversibilité des éléments de $S_{\boldsymbol{F}}$ équivaut à l'inversibilité de ζ, on a $\boldsymbol{R}[X]_\zeta \equiv S_{\boldsymbol{F}}^{-1}\boldsymbol{R}[X]$. En particulier, $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$ est isomorphe en tant que schéma à l'ouvert principal $D(\zeta) \subseteq \mathrm{Spec}(\boldsymbol{R}[X]) = \mathbb{A}^1_{\boldsymbol{R}}$. Le complémentaire de $D(\zeta)$ est l'ensemble des idéaux premiers de $\boldsymbol{R}[X]$ qui contiennent l'un quelconque des $(X - x_i)$.

Lorsque $\boldsymbol{R}$ est un corps, les idéaux $\langle X - x_i \rangle$ sont maximaux et $D(\zeta)$ est alors le complémentaire dans $\mathbb{A}^1_{\boldsymbol{R}}$ d'un ensemble fini qui s'identifie canoniquement à $\boldsymbol{F}$.

2) Comme $\mathrm{Spec}(\boldsymbol{A})$ est ouvert dans $\mathbb{A}^1_{\boldsymbol{R}}$ au-dessus de $\boldsymbol{R}$, il est lisse de même dimension relative que $\mathbb{A}^1_{\boldsymbol{R}}$. D'autre part, l'équivalence $\boldsymbol{A} \equiv \boldsymbol{R}[X, Z]/\langle Z\zeta - 1 \rangle$ montre que $\boldsymbol{A}$ est intersection transverse puisque $\boldsymbol{R}[X, Z] = \langle Z\zeta - 1, \zeta, Z\zeta' \rangle$ (*cf.* lemme 4.5.3).

3) La localisation commute au foncteur Ω, par conséquent :

$$\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \equiv \boldsymbol{R}[X]_\zeta \otimes_{\boldsymbol{R}[X]} \Omega_{\boldsymbol{R}[X]/\boldsymbol{R}} \equiv \boldsymbol{A}\, dX$$

et le $\boldsymbol{A}$-module $\Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$ est libre de rang 1. On a donc $\Omega^i_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} = \bigwedge^i_{\boldsymbol{R}} \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{0}$ pour tout $i > 1$. Le complexe de de Rham $\left(\Omega^*_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}, d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}\right)$ est par conséquent réduit à deux termes et un morphisme :

$$\mathbf{0} \to \boldsymbol{A} \xrightarrow{d} \boldsymbol{A}\,dX \to \mathbf{0}$$

D'autre part, comme $\boldsymbol{A}$ est une algèbre de fractions de $\boldsymbol{R}[X]$, la différentielle $d_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}$ est entièrement déterminée par la différentielle $d_{\boldsymbol{R}[X]/\boldsymbol{R}}$ et l'on a la formule bien connue :

$$d\big(P(X)/\zeta^m\big) = \frac{P'(X)\,\zeta^m - P(X)\,m\,\zeta^{m-1}}{\zeta^{2m}}\,dX\,.$$

4) Pour chaque $f \in \boldsymbol{Q} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{A}$ il existe ***une et une seule*** famille $\{P_f(X), c(f)_{i,m}\}$ vérifiant :

$$f = P_f(X) + \sum_{i=1}^{r} \sum_{m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}} \frac{c(f)_{i,m}}{(X - x_i)^m}\,,$$

avec $P_f(X) \in \boldsymbol{Q}[X]$ et $c(f)_{i,m} \in \boldsymbol{Q}$.
Existence. Il suffit de le prouver pour f de la forme :

$$f = \frac{P(X)}{(X - x_1)^{m_1} \ldots (X - x_r)^{m_r}}\,, \quad \text{avec } d^\circ(P(X)) < \textstyle\sum_{i=1}^r m_i.$$

On procède par induction sur $m = \sum m_i$.

Lorsque $m < 2$ on n'a rien à prouver. Dans le cas général l'un des m_i sera non nul, supposons que ce soit m_1. On écrit alors $P(X) = Q(X)(X - x_1) + P(x_1)$ d'où l'égalité :

$$\begin{aligned} f &= \frac{Q(X)(X - x_1) + P(x_1)}{(X - x_1)^{m_1} \ldots (X - x_r)^{m_r}} = \\ &= \frac{Q(X)}{(X - x_1)^{m_1 - 1} \ldots (X - x_r)^{m_r}} + \frac{P(x_1)}{(X - x_1)^{m_1} \ldots (X - x_r)^{m_r}} \end{aligned}$$

où le premier terme admet, par l'hypothèse inductive, une décomposition du type cherché. Pour le second terme, il suffit de supposer $P(x) = 1$ et nous sommes amenés à étudier les expressions de la forme :

$$\frac{1}{(X - x_1)^{m_1} \ldots (X - x_r)^{m_r}} \tag{$\ddagger$}$$

où il existe au moins deux m_i non nuls. Or, comme les $x_i - x_j$ sont non nuls dans $\boldsymbol{Q}$ puisque $\boldsymbol{R}$ est intègre, on a les décompositions :

$$\frac{1}{(X - x_i)(X - x_j)} = \frac{(x_i - x_j)^{-1}}{X - x_i} + \frac{(x_j - x_i)^{-1}}{X - x_j}$$

qui ramènent les expressions (‡) à d'autres dans la portée de l'hypothèse inductive.

Unicité. Elle revient à prouver que si l'on a :

$$0 = P(X) + \sum_{i=1}^{r} \sum_{m\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \frac{c_{i,m}}{(X-x_i)^m}\,,$$

avec $P(X) \in \boldsymbol{Q}[X]$ et $c_{i,m} \in \boldsymbol{Q}$, alors $P(X) = 0$ et $c_{i,m} = 0$ pour tous i, m. Ceci résulte d'arguments élémentaires que nous ne détaillons pas.

Ceci étant, l'application :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{I} : \boldsymbol{Q} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{A} &\longrightarrow \boldsymbol{Q}^r \\ f &\longmapsto \big(c(f)_{1,1}, \ldots, c(f)_{r,1}\big) \end{aligned}$$

est une surjection linéaire. En effet, la linéarité résulte de l'unicité des décompositions (4) et la surjectivité est évidente puisque $\boldsymbol{I} : 1/(X - x_i) \mapsto \mathbf{e}_i$ pour tout $i = 1, \ldots, r$.

5) L'application $\boldsymbol{I}$ induit une surjection de $\boldsymbol{Q} \otimes_{\boldsymbol{R}} H^1_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R})$ sur $\boldsymbol{Q}^r$ qui est bijective lorsque $\boldsymbol{R}$ est de caractéristique nulle, mais elle possède un noyau de dimension infinie autrement.

En effet, comme $\boldsymbol{Q} \otimes_{\boldsymbol{R}} \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{Q} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{A}\, dX$, nous définissons $\boldsymbol{I} : \boldsymbol{Q} \otimes_{\boldsymbol{R}} \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \to \boldsymbol{Q}^r$ par $\boldsymbol{I}(f\, dX) = \boldsymbol{I}(f)$. De plus, pour tout $f \in \boldsymbol{Q} \otimes_{\boldsymbol{R}} \boldsymbol{A}$ on a d'après (3) et (4) :

$$(1 \otimes d)(f) = P_f(X)' - \sum_{i=1}^{r} \sum_{m\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} \frac{m\, c(f)_{i,m}}{(X-x_i)^{m+1}}\,, \tag{$\diamond$}$$

de sorte que $\boldsymbol{I} \circ d = 0$, puisque les décompositions en termes simples des images de $1 \otimes d$ ne font intervenir aucun des termes $1/(X - x_i)$.

La surjection $\boldsymbol{I} : \boldsymbol{Q} \otimes_{\boldsymbol{R}} \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}} \twoheadrightarrow \boldsymbol{Q}^r$ définit donc, par passage au quotient, une surjection :

$$\boldsymbol{Q} \otimes_{\boldsymbol{R}} H^1_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}) = \frac{\boldsymbol{Q} \otimes_{\boldsymbol{R}} \Omega_{\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R}}}{\mathrm{im}(1 \otimes d)} \xrightarrow{\ \boldsymbol{I}'\ } \boldsymbol{Q}^r$$

où l'égalité est justifiée par l'exactitude du foncteur (de localisation) $\boldsymbol{Q} \otimes_{\boldsymbol{R}} (\_)$.

Lorsque $\boldsymbol{Q}$ est de caractéristique nulle, on construit facilement une primitive pour tout $f \in \ker(\boldsymbol{I})$ et $\boldsymbol{I}'$ est bien un isomorphisme. Par contre, en caractéristique positive p il n'y a pas de primitive pour les éléments de $\ker(\boldsymbol{I})$

de la forme
$$c_1X^{p-1}+c_2X^{p^2-1}+\cdots+c_mX^{p^m-1}$$
et ceci quels que soient $m\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$ et $c_1,\ldots,c_m\in\boldsymbol{Q}$ non tous nuls. En particulier, ces éléments sont non cohomologues et constituent un sous-espace vectoriel de dimension infinie de $\boldsymbol{Q}\otimes_{\boldsymbol{R}}H^1_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R})$.

6) On a $\boldsymbol{Q}\otimes_{\boldsymbol{R}}H^0_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{A}/\boldsymbol{R})=\ker(1\otimes d)$. En caractéristique 0 l'égalité ($\diamond$) montre que $\ker(1\otimes d)=\boldsymbol{Q}$. En caractéristique positive p, on a $X^{p^\alpha}\in\ker(1\otimes d)$ pour tout $\alpha\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$ et $\ker(1\otimes d)$ est de dimension infinie.

7) Dans cette partie $\boldsymbol{R}:=\mathbb{F}_p$.

On note $\nu:\mathbb{Z}_p\to\mathbb{Z}_p/\langle p\rangle=:\mathbb{F}_p$ la projection canonique de l'anneau des entiers p-adiques sur son corps résiduel. Pour toute partie finie $\boldsymbol{G}$ de $\mathbb{Z}_p$ qui relève $\boldsymbol{F}$, *i.e.* telle que $\nu(\boldsymbol{G})=\boldsymbol{F}$, on note $\boldsymbol{B_G}:=S_{\boldsymbol{G}}^{-1}\mathbb{Z}_p[X]$.

a) La réduction modulo p d'une $\mathbb{Z}_p$-algèbre $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ est la $\mathbb{F}_p$-algèbre $\mathbb{F}_p\otimes_{\mathbb{Z}_p}\boldsymbol{\mathcal{A}}$. On a donc :
$$\mathbb{F}_p\otimes_{\mathbb{Z}_p}\boldsymbol{B_G}\equiv\mathbb{F}_p\otimes_{\mathbb{Z}_p}S_{\boldsymbol{G}}^{-1}\mathbb{Z}_p[X]\equiv S_{\nu(\boldsymbol{G})}^{-1}\mathbb{F}_p[X]=\boldsymbol{A}\,.$$
et $\boldsymbol{B_G}$ est une $\mathbb{Z}_p$-algèbre lisse qui relève la $\mathbb{F}_p$-algèbre lisse $\boldsymbol{A}$.

b) Les algèbres $\boldsymbol{B_G}$ rentrent dans le cadre de la question (6), par conséquent $\dim_{\mathbb{Q}_p}(\mathbb{Q}_p\otimes_{\mathbb{Z}_p}H^1_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{B_G}))=\#\boldsymbol{G}$. Comme les nombres de Betti sont des invariants pour les $\mathbb{Z}_p$-algèbres (de type fini), on conclut que $\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{G}_1}\not\equiv\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{G}_2}$ dès que $\#\boldsymbol{G}_1\neq\#\boldsymbol{G}_2$.

Cette question montre que la $\mathbb{F}_p$-algèbre lisse $\boldsymbol{A}$ admet des relèvements $\mathbb{Z}_p$-lisses non isomorphes (*cf.* rappel 5.4.16).

c) Pour toute inclusion d'ensembles $\boldsymbol{G}_1\subseteq\boldsymbol{G}_2$, l'inclusion $S_{\boldsymbol{G}_1}\subseteq S_{\boldsymbol{G}_2}$ donne le morphisme d'algèbres canonique habituel $h(\boldsymbol{G}_2,\boldsymbol{G}_1):\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{G}_1}=S_{\boldsymbol{G}_1}^{-1}\mathbb{Z}_p[X]\to S_{\boldsymbol{G}_2}^{-1}\mathbb{Z}_p[X]=\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{G}_2}$.

c-i) D'après les questions questions (1) et (2) on a des isomorphisme :
$$\xi(\boldsymbol{G}):\boldsymbol{B_G}\xrightarrow[\equiv]{}\frac{\mathbb{Z}_p[X,Z]}{\big\langle Z\prod_{y\in\boldsymbol{G}}(X-y)-1\big\rangle}\,.$$
vérifiant :
$$\xi(\boldsymbol{G})\left(\frac{P(X)}{\prod_{y\in\boldsymbol{G}}(X-y)^m}\right)=\overline{P(X)\,Z^m}\,.$$

c-ii) Soient $X':=\xi(\boldsymbol{G}_2)\circ h(\boldsymbol{G}_2,\boldsymbol{G}_1)\circ\xi(\boldsymbol{G}_1)^{-1}(X)$ et $Z':=\xi(\boldsymbol{G}_2)\circ h(\boldsymbol{G}_2,\boldsymbol{G}_1)\circ\xi(\boldsymbol{G}_1)^{-1}(Z)$. On a $X'=X$ et $Z'=Z\prod_{y\in\boldsymbol{G}_2\backslash\boldsymbol{G}_1}(X-y)$. En effet, Z représente l'inverse de $\prod_{y\in\boldsymbol{G}_1}(X-y)$ dans $\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{G}_1}$ tandis qu'il représente l'inverse de $\prod_{y\in\boldsymbol{G}_2}(X-y)$ dans $\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{G}_2}$.

c-iii) Pour chaque algèbre $\boldsymbol{B_G}$, on note $\widehat{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{G}}$ sa complétion pour la topologie p-adique. La composée $\xi(\boldsymbol{G}_2) \circ h(\boldsymbol{G}_2, \boldsymbol{G}_1) \circ \xi(\boldsymbol{G}_1)^{-1}$ induit une ***bijection*** entre les complétions p-adiques :

$$\widehat{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{G}_1} \equiv \frac{\widehat{\mathbb{Z}_p[X,Z]}}{\big\langle Z \prod_{y\in \boldsymbol{G}_1}(X-y)-1\big\rangle} \xrightarrow[\equiv]{} \frac{\widehat{\mathbb{Z}_p[X,Z]}}{\big\langle Z \prod_{y\in \boldsymbol{G}_2}(X-y)-1\big\rangle} \equiv \widehat{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{G}_2}\,.$$

En effet, d'après (c-ii) il suffira de prouver que $\prod_{y\in \boldsymbol{G}_2\backslash \boldsymbol{G}_1}(X-y)$ est inversible dans $\widehat{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{G}_1}$. Pour chaque $y \in \boldsymbol{G}_2\backslash\boldsymbol{G}_1$ il existe (par définition des ensembles $\boldsymbol{G}$) un $y_0 \in \boldsymbol{G}_1$ tel que $\nu(y) = \nu(y_0)$; autrement dit tel que $y - y_0 \in p\,\mathbb{Z}_p$. Alors :

$$(X-y) = X - y_0 + p\,w = (X-y_0)\big(1 + p\,w\,(X-y_0)^{-1}\big)$$

pour un certain $w \in \mathbb{Z}_p$, et le dernier facteur est inversible dans $\widehat{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{G}_1}$.
Remarque. Cette démonstration prouve que la même conclusion est vrai pour tous $\boldsymbol{G}_1 \subseteq \boldsymbol{G}_2 \subseteq \mathbb{Z}_p[X]$ vérifiant $\nu(\boldsymbol{G}_i) = \boldsymbol{F}$.

c-iv) Les algèbres $\widehat{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{G}}$ sont deux-à-deux isomorphes puisque pour $\boldsymbol{G}_1$ et $\boldsymbol{G}_2$ donnés, on a les isomorphisme de (c-iii) : $\widehat{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{G}_1} \equiv \widehat{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{G}_1\cup\boldsymbol{G}_2} \equiv \widehat{\boldsymbol{B}}_{\boldsymbol{G}_2}$. Conclusion qui corrobore par le calcul l'assertion (a) du théorème 5.4.5.

8) Dans cette dernière question on choisit $\boldsymbol{R} := \mathbb{C}$ et $\boldsymbol{U} \subseteq \mathbb{C}$ l'ouvert complémentaire d'un ensemble fini de nombres complexes $\boldsymbol{F} \subseteq \mathbb{C}$. On considère $\boldsymbol{U}(\mathbb{C})$ muni de la topologie transcendante induite par celle de $\mathbb{C}$. Les nombres de Betti de la cohomologie de de Rham des formes différentielles réelles de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\boldsymbol{U}(\mathbb{C})$ et à coefficients dans $\mathbb{C}$ se déterminent à l'aide de la suite exacte longue de cohomologie à support compact associée au triplet $\boldsymbol{U}(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{C} \supseteq \boldsymbol{F}(\mathbb{C})$, puis la dualité de Poincaré.

La suite exacte en question en degrés $0, 1$ est :

$$\begin{array}{ccccccccccc} H^0_{\mathrm{DR},c}(\boldsymbol{U};\mathbb{C}) & \to & H^0_{\mathrm{DR},c}(\mathbb{C};\mathbb{C}) & \to & H^0_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{F};\mathbb{C}) & \to & H^1_{\mathrm{DR},c}(\boldsymbol{U};\mathbb{C}) & \to & H^1_{\mathrm{DR},c}(\mathbb{C};\mathbb{C}) & \to & H^1_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{F};\mathbb{C}) \\ \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbb{C}^r & & & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \end{array}$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} \dim_{\mathbb{C}}\big(H^0_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{U};\mathbb{C})\big) = \mathbb{C}\,, & \text{par connexité}\,; \\ \dim_{\mathbb{C}}\big(H^1_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{U};\mathbb{C})\big) = \dim_{\mathbb{C}}\big(H^1_{\mathrm{DR},c}(\boldsymbol{U};\mathbb{C})\big) = r\,; \\ \dim_{\mathbb{C}}\big(H^2_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{U};\mathbb{C})\big) = \dim_{\mathbb{C}}\big(H^0_{\mathrm{DR},c}(\boldsymbol{U};\mathbb{C})\big) = 0\,; \end{cases}$$

où les dernières égalités résultent de la dualité de Poincaré.

6.2 À propos du complémentaire d'une hypersurface lisse de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$

Soit $\boldsymbol{X} \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ une hypersurface ***irréductible et lisse*** définie par un polynôme $f \in \mathbb{C}[X_0, \ldots, X_n]$ homogène de degré d. On note $\boldsymbol{U} \subseteq \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ l'ouvert complémentaire de $\boldsymbol{X}$. Comme f est homogène l'anneau $\mathbb{C}[X_0, \ldots, X_n][1/f]$ est gradué sur $\mathbb{Z}$, ses éléments homogènes de degré zéro constituent alors un sous-anneau noté $R[\boldsymbol{U}] := \mathbb{C}[X_0, \ldots, X_n][1/f]^0$. Le schéma $\boldsymbol{U}$ est isomorphe à $\mathrm{Spec}(R[\boldsymbol{U}])$.

Rappelons rapidement la démonstration de ce résultat dans le langage des schémas.

Pour tout anneau commutatif $\boldsymbol{R}$, le complémentaire d'une hypersurface $\boldsymbol{Y}$ de $\mathbb{P}^n_{\boldsymbol{R}}$ est isomorphe au schéma affine $\mathrm{Spec}\big(\boldsymbol{R}[X_0, \ldots, X_n][1/f]^0\big)$ où f désigne le polynôme homogène qui définit $\boldsymbol{Y}$.

Démonstration : On note $d = d^0(f)$ et nous allons supposer que f n'est divisible par aucun des X_i, ce qui est toujours possible quitte à faire un changement linéaire des variables $\{X_0, \ldots, X_n\}$. Une remarque fondamentale apparaît dans les diagrammes suivants qui dépendent de $i = 0, \ldots, n$:

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{R}[X_0, \ldots, X_n][1/f]^0 \arrow[r, hook, "\iota"] \arrow[d, "\nu"'] & \boldsymbol{R}[X_0, \ldots, X_n][1/f] \arrow[d, "\pi"'] \\
\boldsymbol{R}[X_0, \ldots, X_n][1/f]^0\big[f/X_i^d\big] \arrow[r, dashed, "\bar\iota", "\simeq"'] & \dfrac{\boldsymbol{R}[X_0, \ldots, X_n][1/f]}{\langle X_i - 1\rangle}
\end{tikzcd}$$

La première ligne est l'injection canonique et l'on montre aisément que l'idéal $\langle X_i - 1\rangle$ de l'anneau $\boldsymbol{R}[X_0, \ldots, X_n][1/f]$ ne contient aucune fraction homogène de degré 0. Par conséquent la composée $\pi \circ \iota$ est injective. Mais $(\pi \circ \iota)(X_i^d/f)$ est inversible et $\pi \circ \iota$ se factorise à travers ν en une injection $\bar\iota$ qui est surjective puisque :

$$\frac{X_i^{d-1} X_j}{f} \, \frac{f}{X_i^d} \xmapsto{\ \bar\iota\ } \overline{X}_j$$

On remarque ensuite que les anneaux $\boldsymbol{R}[X_0, \ldots, X_n][1/f]/\langle X_i - 1\rangle$ sont précisément les anneaux $\mathscr{O}_{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{U} \cap U_i)$ où U_i désigne le complémentaire dans $\mathbb{P}^n_{\boldsymbol{R}}$ de l'hypersurface $\{X_i = 0\}$. L'application ι définit donc un homomorphisme d'anneaux $\boldsymbol{R}[X_0, \ldots, X_n][1/f]^0 \to \mathscr{O}_{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{U})$ qui est un isomorphisme local. On en déduit une application

$$\sigma : \boldsymbol{U} \to \mathrm{Spec}\big(\boldsymbol{R}[X_0, \ldots, X_n][1/f]^0\big)$$

dont les restrictions aux ouverts $\boldsymbol{U} \cap U_i$ sont des plongements ouverts de schémas, en particulier σ est continue.

Pour l'étude de l'application ensembliste σ nous pouvons supposer que l'anneau $\boldsymbol{R}$ est réduit.

La surjectivité de σ résulte de l'égalité

$$\bigcup_i \sigma(\boldsymbol{U} \cap U_i) = \operatorname{Spec}\big(\boldsymbol{R}[X_0, \ldots, X_n][1/f]^0\big)\,.$$

Comme on a $\sigma(\boldsymbol{U} \cap U_i) = D(X_i^d/f)$, il suffit de montrer que 1 appartient à l'idéal $\langle X_0^d/f, \ldots, X_n^d/f\rangle$ de $\boldsymbol{R}[X_0, \ldots, X_n][1/f]^0$ ce qui est une conséquence du fait que $f^d \in \langle X_0^d, \ldots, X_n^d\rangle \subseteq \boldsymbol{R}[X_0, \ldots, X_n]$.

Enfin, l'injectivité de σ résulte de ce que pour tous $u_1, u_2 \in \boldsymbol{U}$ avec $u_1 \neq u_2$, il existe $g \in \boldsymbol{R}[X_0, \ldots, X_n][1/f]^0$ tel que $g(u_1) \neq g(u_2)$. Or, comme $\boldsymbol{U} \subseteq \mathbb{P}^n_{\boldsymbol{R}}$ on sait qu'il existe un polynôme homogène $g' \in \boldsymbol{R}[X_0, \ldots, X_n]$ tel que $g'(u_1) \neq g'(u_2)$. Soit $d' = d^\circ(g')$ alors $g := (g')^d/f^{d'}$ répond à la question. ∎

1) La $\mathbb{C}$-algèbre $R[\boldsymbol{U}]$ est de type fini puisqu'elle est clairement engendrée par les monômes $X_0^{m_1} \cdots X_n^{m_n}/f$ avec $\sum m_i = d$ et comme $\boldsymbol{U}$ est un ouvert de $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, $R[\boldsymbol{U}]$ est en plus lisse de dimension relative n.

2) Finitude des nombres de Betti $\dim_{\mathbb{C}}\big(H^i_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{U}/\mathbb{C})\big)$.

C'est un théorème que les nombres de Betti des variétés lisses sur un corps de caractéristique nulle sont finis ; il a été démontré pour la première fois sur le corps des nombres complexes par A. Grothendieck dans son article "On the de Rham cohomology of algebraic varieties" (IHES ; Publications Mathématiques, **29**, 351–359, 1966). Nous n'avons pas démontré ce théorème dans le cours mais le théorème de comparaison de Grothendieck donne des isomorphismes canoniques $H^i_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{U}/\mathbb{C}) \equiv H^i_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{U}(\mathbb{C}))$ et la dualité de Poincaré montre que $\dim_{\mathbb{C}}(H^i_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{U}(\mathbb{C}))) = \dim_{\mathbb{C}}(H^{2n-i}_{\mathrm{DR},c}(\boldsymbol{U}(\mathbb{C})))$ de sorte que la finitude des nombre de Betti résultera de la finitude de la cohomologie de de Rham à support compact de $\boldsymbol{U}(\mathbb{C})$ ce qui est expliqué dans la question suivante.

3) On considère $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$, $\boldsymbol{U}(\mathbb{C})$ et $\boldsymbol{X}(\mathbb{C})$ munis de la topologie transcendante. Les dimensions des espaces $H^i_{\mathrm{DR},c}(\boldsymbol{U}(\mathbb{C}))$, $H^i_{\mathrm{DR}}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}))$ et $H^i_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}(\mathbb{C}))$ est finie puisque la finitude des nombres de Betti des variétés $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$ et de $\boldsymbol{X}(\mathbb{C})$ résulte de leur compacité et celle des nombres de Betti de $\boldsymbol{U}(\mathbb{C})$, du fait que les $H^i_{\mathrm{DR},c}(\boldsymbol{U}(\mathbb{C}))$ sont dans la suite exacte longue de cohomologie à support compact associée au triplet $\boldsymbol{U}(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) \supseteq \boldsymbol{X}(\mathbb{C})$.

4) **Le but de cette question est de montrer que $H^r_{\mathrm{DR}}(U/\mathbb{C}) = 0$ pour tout $r \notin \{0, n\}$.**

a) Annulation des $H^{n+i}_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{U}(\mathbb{C}))$ lorsque $i > 0$ et

$$\begin{cases} H^{n-i}_{\mathrm{DR}}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})) \equiv H^{n-i}_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}(\mathbb{C}))\,, & \text{pour tout } i \geqslant 2\,; \\ H^{n-1}_{\mathrm{DR}}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})) \subseteq H^{n-1}_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}(\mathbb{C}))\,. \end{cases}$$

Comme $\boldsymbol{U}$ est (lisse) de dimension n le complexe de de Rham algébrique $\Omega^*_{\boldsymbol{U}/\mathbb{C}}$ est concentré en degrés $[0, \ldots, n]$ et donc $H^j_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{U}/\mathbb{C}) = 0$ pour tout $j > n$. D'autre part, le théorème de comparaison de Grothendieck nous dit précisément que puisque $\boldsymbol{U}$ est ***affine*** la cohomologie du complexe de de Rham algébrique s'identifie canoniquement à la cohomologie du faisceau constant $\underline{\mathbb{C}}_{\boldsymbol{U}(\mathbb{C})}$ qui est, à son tour, canoniquement isomorphe à la cohomologie du complexe de de Rham différentiable à coefficients dans $\mathbb{C}$ d'après le théorème de comparaison de de Rham.

On a donc $H^{n+j}_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{U}(\mathbb{C})) = 0$ pour tout $j > 0$, et alors $H^{n-j}_{\mathrm{DR},c}(\boldsymbol{U}(\mathbb{C})) = 0$ pour tout $j > 0$, par dualité de Poincaré. Lorsque l'on reporte cette information dans la suite exacte longue de cohomologie à support compact :

$$\begin{array}{ccccccccccccc} \to H^{n-2}_{\mathrm{DR},c}(\boldsymbol{U}) & \to & H^{n-2}_{\mathrm{DR}}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}) & \to & H^{n-2}_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}) & \to & H^{n-1}_{\mathrm{DR},c}(\boldsymbol{U}) & \to & H^{n-1}_{\mathrm{DR}}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}) & \to & H^{n-1}_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}) & \to & H^{n}_{\mathrm{DR},c}(\boldsymbol{U}) \\ \mathbf{0} & & & \equiv & & & \mathbf{0} & & & \subseteq & & & ? \end{array}$$

on obtient le résultat cherché.

b) L'anneau $H^*_{\mathrm{DR}}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}))$ est isomorphe en tant qu'algèbre graduée à $\mathbb{C}[T]/\langle T^n\rangle$ où T est considéré de degré 2. Soit $\omega \in H^2_{\mathrm{DR}}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}})$ ***non nul*** et notons ϖ sa restriction à $\boldsymbol{X}$. Le théorème de Lefschetz « *difficile* » affirme dans notre cas ($\boldsymbol{X}(\mathbb{C})$ est lisse) que l'application $L(\varpi^{\wedge i}) : H^{(n-1)-i}_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}(\mathbb{C})) \to H^{(n-1)+i}_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}(\mathbb{C}))$ qui fait correspondre $\mu \mapsto \varpi^{\wedge i} \wedge \mu$, est un ***isomorphisme*** pour tout $i > 0$.

A l'aide de ce théorème et des résultats précédents on prouve :

$$H^r_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{U}/\mathbb{C}) = \mathbf{0}\,, \qquad \text{pour tout } 0 < r < n.$$

En effet, par le théorème de comparaison de Grothendieck et la dualité de Poincaré, il revient au même de montrer que $H^r_{\mathrm{DR},c}(\boldsymbol{U}(\mathbb{C})) = \mathbf{0}$, pour tout $n < r < 2n$.

Pour chaque $i > 0$ on a :

$$\begin{array}{ccc}
H_{\mathrm{DR}}^{(n-1)-i}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})) & \xrightarrow[\equiv]{L(T^i)} & H_{\mathrm{DR}}^{(n-1)+i}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})) \\
\equiv\big\downarrow & \bigoplus & \big\downarrow \\
H_{\mathrm{DR}}^{(n-1)-i}(\boldsymbol{X}(\mathbb{C})) & \xrightarrow[\equiv]{L(\varpi^{\wedge i})} & H_{\mathrm{DR}}^{(n-1)+i}(\boldsymbol{X}(\mathbb{C}))
\end{array}$$

Le morphisme de la première ligne résulte de la structure d'anneau de $H^*_{\mathrm{DR}}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}})$ rappelée dans l'énoncé. Puis, les morphismes verticaux sont donnés par la restriction de classes de cohomologie et la question précédente a montré la bijectivité de celui de gauche. Enfin l'isomorphisme de la seconde ligne est celui du théorème de Lefschetz. La commutativité du diagramme résulte du fait que le morphisme de restriction est un morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres et que l'isomorphisme $H^2_{\mathrm{DR}}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}) \equiv H^2_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X})$ permet de supposer que la restriction de T à $\boldsymbol{X}$ est la classe ϖ. Les restrictions

$$H_{\mathrm{DR}}^{n+i}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})) \to H_{\mathrm{DR}}^{n+i}(\boldsymbol{X}(\mathbb{C}))$$

sont donc des isomorphisme pour tout $i \geqslant 0$, et lorsque l'on reporte cette information dans la suite exacte longue de cohomologie à support compact :

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
H^n_{\mathrm{DR},c}(\boldsymbol{U}) & \to & H^n_{\mathrm{DR}}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}) & \to & H^n_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}) & \to & H^{n+1}_{\mathrm{DR},c}(\boldsymbol{U}) & \to & H^{n+1}_{\mathrm{DR}}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}) & \to & H^{n+1}_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}) & \to & H^{n+2}_{\mathrm{DR},c}(\boldsymbol{U}) & \to \\
? & & 0 & \equiv & & & \mathbf{0} & & & \equiv & & & \mathbf{0} &
\end{array}$$

qui termine par :

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\to H^{2n-1}_{\mathrm{DR},c}(\boldsymbol{U}) & \to & H^{2n-1}_{\mathrm{DR}}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}) & \to & H^{2n-1}_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}) & \to & H^{2n}_{\mathrm{DR},c}(\boldsymbol{U}) & \to & H^{2n}_{\mathrm{DR}}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}) & \to & H^{2n}_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{X}) & \to & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0}_* & & \mathbb{C} & \equiv & \mathbb{C} & & \mathbf{0} & &
\end{array}$$

où le '0_*' se justifie par une simple raison de dimension : $\dim_{\mathbb{R}}(\boldsymbol{X}) = 2(n-1)$, on obtient le résultat demandé.

§ 7. Références bibliographiques

[B$_1$] N. Bourbaki. "*Algèbre, chapitres 1 à 3*" ; Éléments de mathématique. Herman (1970).

[B$_2$] N. Bourbaki. "*Commutative algebra*" ; Elements of mathematics. Herman (1972).

[BLR] S. Bosh, W. Lütkebohmert, M. Raynaud. "*Néron Models*" ; Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **3**. Folge–Band **21** (1980).

[E] R. Elkik. Solutions d'équations à coefficients dans un anneau hensélien ; Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, quatrième série, tome 6, pp. 553–604, (1973).

[EGA_1] A. GROTHENDIECK, J.A. DIEUDONNÉ. "*Éléments de géométrie algébrique-I*" ; Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen Band 166. Springer-Verlag, (1971).

[$EGA_{4,1}$] A. GROTHENDIECK. "*Éléments de géométrie algébrique-IV*" ; Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. Première partie. Publications mathématiques de l'I.H.E.S. **20**, (1964).

[$EGA_{4,4}$] ———. "*Éléments de géométrie algébrique-IV*" ; Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. Quatrième partie. Publications mathématiques de l'I.H.E.S. **32**, (1967).

[Har] R. HARTSHORNE. "*Algébraic Geometry*" ; Graduate texts in mathematices **52**. Springer–Verlag, (1977).

[Mat] H. MATSUMURA. "*Commutative Algebra (second edition)*" ; Mathematical lecture notes series. Benjamin (1980).

[MW] P. MONSKY, G. WASHNITZER. Formal cohomology : I ; Ann. of Math. (2) **88**, pp. 181–217, (1968).

[Ser] J.-P. SERRE. "*Corps locaux*" ; Actualités scientifiques et industrielles 1296. Hermann (1962).

Index terminologique

Alberto Arabia
CNRS
Institut de Mathématiques de Jussieu
Théorie des Groupes
Mercredi 16 mars 2003