

Complexe de de Rham

(en cours de rédaction...)

Par A. Arabia et Z. Mebkhout

×

Table des Matières

§ 1. Espace topologique quotient	4
1.1. Généralités	4
1.2. Sous-espaces topologiques d'un quotient	6
1.3. Séparation du quotient topologique	7
1.4. Relations induites par des applications continues	8
1.5. Relations induites par des actions de groupes	9
1.6. Recollement d'espaces topologiques	13
1.7. Quelques exemples à retenir	14
§ 2. Variétés différentiables	17
2.1. Généralités	17
2.2. Exemples de Variétés différentiables	19
2.3. Morphismes entre variétés différentiables	26
2.4. La catégorie des variétés différentiables	29
2.5. Sous-variétés d'une variété différentiable	29
2.6. Variété produit	30
2.7. Variétés quotients	31
2.8. Groupes de Lie	32
2.9. Fibrations localement triviales	38
2.10. Revêtements	41
2.11. Fibrés vectoriels sur les variétés différentiables	44
§ 3. Complexe de de Rham et cohomologie de de Rham des variétés différentiables	52
3.1. Formes alternées sur un espace vectoriel de dimension finie	52
3.2. Formes différentielles sur les espaces vectoriels	58
3.3. Intégration des formes différentielles de degré maximum sur les espaces vectoriels	64
3.4. Formes différentielles et cohomologie de de Rham sur les variétés	67
§ 4. Orientabilité et intégration sur les variétés	71
4.1. Partition de l'unité et variétés paracompactes	71
4.2. Variétés orientées	72
4.3. Intégration sur une variété orientée	73
4.4. L'intégration des classes de cohomologie à support compact	75
4.5. Morphisme de dualité	76
4.6. Variété d'orientations d'une variété différentiable	77
4.7. Cohomologie de de Rham de la base d'un revêtement	81
§ 5. Suites exactes de Mayer-Vietoris	85
5.1. Suites exactes courtes de Mayer-Vietoris	85
5.2. Suites exactes longues de Mayer-Vietoris	87
5.3. Compatibilité entre le morphisme de dualité et le morphisme de liaison	92
§ 6. Lemmes de Poincaré	94
6.1. Lemme de Poincaré pour la cohomologie de de Rham ordinaire	96
6.2. Lemme de Poincaré pour la cohomologie de de Rham à supports compacts	97
§ 7. Dualité de Poincaré et finitude des nombres de Betti	100
7.1. Bons recouvrements	101

7.2. Finitude des nombres de Betti	102
7.3. Dualité de Poincaré	103
§ 8. Généralités sur les catégories	104
8.1. Catégories et foncteurs	104
8.2. Foncteurs et naturalité	108
8.3. Catégories abéliennes	115
.2. Cohomologie et catégories abéliennes	117
.3. Exactitude des foncteurs additifs sur les catégories (de complexes) de modules	118
.4. Exactitude des foncteurs additifs dans les catégories d'espaces vectoriels	121
.5. Homotopies	122
8.4. Limites	124
.2. Exactitude du foncteur limite inductive	129
§ 9. Cohomologie des bicomplexes de modules	133
9.1. Complexe simple associé à un bicomplexe	133
9.2. Cohomologies sur un bicomplexe	134
9.3. Quelques propositions d'algèbre homologique à retenir	135
§ 10. Cohomologie de Čech relative à un recouvrement dénombrable	138
10.1. Préfaisceaux de groupes abéliens	138
10.2. Complexe de Čech relatif à un recouvrement dénombrable	140
10.3. Complexe de Čech-de Rham d'une variété différentiable	141
§ 11. Applications du complexe de Čech	142
11.1. Dualité de Poincaré revue par Čech	142
11.2. Formule de Künneth	144
§ 12. Cohomologie de Čech des préfaisceaux	146
12.1. Complexe de cochaînes singulières de Čech relatives à un recouvrement	146
12.2. Functorialités des complexes de Čech relatifs aux recouvrements	150
12.3. Cohomologie de Čech d'un espace topologique	152
12.4. Complexes de Čech d'un espace topologique	153
12.5. Functorialités du complexe et de la cohomologie de Čech	154
12.6. Préfaisceau de complexes de Čech et faisceaux	156
12.7. Etude locale du préfaisceau des complexes de Čech	158
12.8. Théorèmes d'annulation pour la cohomologie de Čech	162
§ 13. Cohomologie de faisceaux	163
13.1. Catégorie abélienne des préfaisceaux de \mathbf{A} -modules	163
13.2. Catégorie abélienne des faisceaux de \mathbf{A} -modules	166
13.3. Cohomologie des faisceaux	174
§ 14. Hyper-cohomologie des complexes de faisceaux	190
14.1. Définition de l'hyper-cohomologie d'un complexe de faisceaux de \mathbf{A} -modules	192
14.2. Propriétés élémentaires de l'hyper-cohomologie	192
14.3. Sous-catégorie de complexes de faisceaux de \mathbf{A} -modules bornés à gauche	196
14.4. Théorèmes fondamentaux de la cohomologie de faisceaux	198
§ 15. Cohomologie de Čech de faisceaux	201
15.1. Compléments sur les faisceaux flasques et les foncteurs \mathcal{C}^p de Godement	201
15.2. Faisceau de p -cochaînes de Čech d'un faisceau de \mathbf{A} -modules relatives à un recouvrement ...	203
15.3. Complexe de faisceaux des cochaînes de Čech à valeurs dans un faisceau et relatives à un recouvrement ouvert	204
15.4. Cohomologie singulière d'une variété différentiable	209
§ 16. Schémas affines et variétés algébriques affines	214
16.1. Espaces topologiques noethériens	214
16.2. Spectres associés à un anneau commutatif arbitraire	216

16.3. Spectres associés aux algèbres de type fini sur un corps	220
16.4. Le foncteur “Spec” vers la catégorie d’espaces topologiques	228
16.5. Catégorie des espaces (localement) annelés	230
16.6. Schéma affine associé à un anneau commutatif	231
16.7. Variétés algébriques affines	238
16.8. Catégorie des \mathcal{O}_X -modules quasi-cohérents	240
16.9. Cohomologie de faisceaux des \mathcal{O}_X -modules quasi-cohérents	245
§ 17. Schémas et variétés algébriques	253
17.1. Opérations dans la catégorie d’espaces localement annelés	254
17.2. Catégories des schémas et des variétés	260
17.3. Définitions et propriétés élémentaires des schémas	261
17.4. Cohomologie de faisceaux des modules quasi-cohérents	261
§ 18. Bibliographie	262

Avertissement. Ces notes sont une rédaction préliminaire du cours, on y trouvera les détails que les contraintes de temps ne nous permettent pas donner oralement. Bien de résultats importants sont mentionnés sans en donner la démonstration, dans ces cas nous renvoyons à la littérature spécialisée à chaque fois que cela nous a paru nécessaire compte tenu des insuffisances des programmes d’enseignement de licence et maîtrise.

Vous trouverez beaucoup de résultats théoriques énoncés sous forme d’exercice ; ceci répond à un fait d’expérience : c’est souvent en cherchant à démontrer une assertion que l’on comprend pleinement sa signification. Comme ces résultats font partie du bagage de connaissances “minimales” que l’on doit connaître et puisqu’ils seront utilisés dans le cours, vous êtes encouragés à y réfléchir et à les retenir.

Le niveau de difficulté des exercices est très variable. Certains sont triviaux, ne nécessitent aucune écriture et leur résolution devrait être “instantanée”, leur but est alors simplement d’appeler votre attention sur un fait qui, bien qu’évident, est ou sera significatif ultérieurement dans le cours. D’autres demanderont de la réflexion et une certaine dose d’initiative. Enfin, si certains exercices peuvent être laborieux, aucun ne nous paraît franchement difficile et leur ensemble constitue un très bon test de connaissances et de mise à niveau ; ne les négligez pas !

§1. Espace topologique quotient

1.1 Généralités

Dans cette section nous allons nous intéresser aux objets de la catégorie des espaces topologiques. Pour deux tels espaces \mathbf{X}, \mathbf{Y} , l'ensemble $\text{Mor}_{\text{Top}}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ des morphismes de \mathbf{X} vers \mathbf{Y} est l'ensemble des applications continues de \mathbf{X} à valeurs dans \mathbf{Y} ⁽¹⁾. On notera $\text{Homéom}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ le sous-ensemble de $\text{Mor}_{\text{Top}}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ des morphismes inversibles, et même $\text{Homéom}(\mathbf{X})$ lorsque $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$; ce dernier ensemble contient l'application identique sur \mathbf{X} , notée $\mathbf{1}_{\mathbf{X}}$, et le triplet $(\text{Homéom}(\mathbf{X}), \circ, \text{id}_{\mathbf{X}})$, où 'o' désigne l'opération de composition des applications, est une structure de groupe.

1.1.1 Relations d'équivalence sur un espace topologique

Soit \mathcal{R} une relation d'équivalence sur un espace topologique \mathbf{X} . Notons \mathbf{X}/\mathcal{R} l'ensemble des classes d'équivalence des éléments de \mathbf{X} modulo \mathcal{R} , et $\nu : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}/\mathcal{R}$ la surjection canonique qui associe à chaque $x \in \mathbf{X}$ sa classe modulo \mathcal{R} (notée également $\bar{x} := \nu(x)$).

Définition 1.1.1-1 : Rappelons que pour toute relation \mathcal{R} sur un ensemble \mathbf{X} , on appelle «*graphe de \mathcal{R}* » le sous-ensemble $\text{Gr}(\mathcal{R})$ de $\mathbf{X} \times \mathbf{X}$ des couples (x_1, x_2) tels que $x_1 \mathcal{R} x_2$.

Exercice 1.1.1-1 : Montrer qu'un sous-ensemble $\mathcal{R} \subseteq \mathbf{X} \times \mathbf{X}$ est une relation d'équivalence, si et seulement si, il existe une partition $\mathbf{X} = \coprod_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathbf{X}_{\alpha}$ telle que

$$\mathcal{R} = \coprod_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathbf{X}_{\alpha} \times \mathbf{X}_{\alpha}.$$

Lorsque \mathcal{R} est une relation d'équivalence, précisez le rapport entre les parties \mathbf{X}_{α} et les classes d'équivalence d'éléments de \mathbf{X} module \mathcal{R} .

Exercice 1.1.1-2 : Soient \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 deux relations sur \mathbf{X} . On dit que \mathcal{R}_1 est «*plus fine*»⁽²⁾ que \mathcal{R}_2 , ou bien que \mathcal{R}_2 est «*plus grossière*» que \mathcal{R}_1 lorsque $\text{Gr}(\mathcal{R}_1) \subseteq \text{Gr}(\mathcal{R}_2)$; autrement dit, si à chaque fois que l'on a $x_1 \mathcal{R}_1 x_2$, on a $x_1 \mathcal{R}_2 x_2$. Les relations de graphes : la diagonale⁽³⁾ de $\mathbf{X} \times \mathbf{X}$, notée $\Delta_{\mathbf{X}}$ et $\mathbf{X} \times \mathbf{X}$ sont respectivement les relations d'équivalence la plus fine et la plus grossière sur \mathbf{X} .

Soit \mathcal{R} une relation quelconque sur \mathbf{X} . Montrer qu'il existe une relation d'équivalence $\tilde{\mathcal{R}}$ plus fine que n'importe quelle relation d'équivalence \mathcal{R}' plus grossière que \mathcal{R} . On appelle $\tilde{\mathcal{R}}$ «*la relation d'équivalence engendrée par \mathcal{R}* ».

¹ Lorsque les objets d'une catégorie sont des ensembles et que les morphismes sont aussi des applications ensemblistes, l'opération de composition de morphismes sera, sauf mention explicite du contraire, la composition des applications. Dans un tel cas il faudra simplement s'assurer que la composition ensembliste de deux morphismes est encore un morphisme.

² En ce sens qu'elle distingue mieux les éléments.

³ Rappelons que l'on appelle ainsi le sous-ensemble de $\mathbf{X} \times \mathbf{X}$ constitué des couples (x, x) , pour tout $x \in \mathbf{X}$.

Soit maintenant Y un espace topologique et $f : X \rightarrow Y$ une application telle que, pour tous $x_1, x_2 \in X$ et vérifiant $x_1 \mathcal{R} x_2$, on ait $f(x_1) = f(x_2)$. L'application f est alors constante sur chaque classe modulo \mathcal{R} et induit une application, notée $\bar{f} : X/\mathcal{R} \rightarrow Y$ rendant le diagramme suivant commutatif.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \nu \searrow & & \nearrow \bar{f} \\ & X/\mathcal{R} & \end{array} \quad (*)$$

On a donc $\bar{f}(\bar{x}) = f(x)$, pour tout $x \in X$.

Exercice 1.1.1-3 :

- 1) Montrer que l'ensemble des parties $V \subseteq X/\mathcal{R}$ telles que $\nu^{-1}(V)$ est un ouvert de X , est une topologie sur X/\mathcal{R} vérifiant la "propriété universelle suivante" :

"Pour toute application f vérifiant les conditions du paragraphe précédent, on a :

$$\boxed{f \text{ est continue, si et seulement si, } \bar{f} \text{ l'est}}"$$

- 2) Montrer qu'une topologie sur X/\mathcal{R} vérifiant la propriété universelle précédente est nécessairement celle introduite dans la question (1).

Définitions 1.1.1-2 : Soit \mathcal{R} une relation d'équivalence sur un espace topologique X .

- 1) On appelle « *topologie quotient* » sur X/\mathcal{R} la topologie définie dans la question (1) de l'exercice 1.1.1-3.
- 2) On appelle « *espace topologique quotient de X par \mathcal{R}* », et on le note (abusivement) X/\mathcal{R} , l'ensemble des classes de X modulo \mathcal{R} muni de la topologie quotient.

Remarque 1.1.1-1 : Les fermés de la topologie quotient sont les parties F de X/\mathcal{R} telles que $\nu^{-1}(F)$ est une partie fermée de X .

Définitions 1.1.1-3 : Soit \mathcal{R} une relation d'équivalence sur un espace topologique X .

- 1) Une partie $A \subseteq X$ est dite « *\mathcal{R} -saturée* » (ou simplement « *saturée* » lorsque \mathcal{R} est sous-entendue) lorsque c'est une réunion de classes d'équivalences, ou encore, lorsque A contient tous les $x \in X$ équivalents à au moins un élément de A . Ainsi, les ouverts (resp. fermés) de la topologie quotient sont en correspondance bijective avec les ouverts (resp. fermés) \mathcal{R} -saturés de X .

L'intersection d'une famille de parties \mathcal{R} -saturées est \mathcal{R} -saturée. On appelle « *\mathcal{R} -saturation d'une partie $A \subseteq X$* » l'intersection de la famille de toutes les parties \mathcal{R} -saturées de X qui contiennent A .

- 2) La relation \mathcal{R} est dite « *ouverte* » (resp. « *fermée* ») lorsque la surjection canonique $\nu : X \rightarrow X/\mathcal{R}$ est une application ouverte (resp. fermée), ou, ce qui revient au même, lorsque la \mathcal{R} -saturation de toute partie ouverte (resp. fermée) de X est ouverte (resp. fermée).

Exercice 1.1.1-4 : Soit \mathcal{R} une relation d'équivalence sur un espace topologique \mathbf{X} . Notons $p_i : \mathbf{X} \times \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$ la projection canonique $p_i((x_1, x_2)) := x_i$.

1) Soit \mathbf{A} un sous-ensemble de \mathbf{X} et notons $\tilde{\mathbf{A}}$ la \mathcal{R} -saturation de \mathbf{A} . Montrer l'égalité :

$$\tilde{\mathbf{A}} = p_2(p_1^{-1}(\mathbf{A}) \cap \text{Gr}(\mathcal{R})).$$

2) Montrer que si la restriction $p_1|_{\text{Gr}(\mathcal{R})}$, de p_1 au graphe de \mathcal{R} , est une application *ouverte* (resp. *fermée*) la relation \mathcal{R} est *ouverte* (resp. *fermée*).

3) Montrer que si $\text{Gr}(\mathcal{R})$ est ouvert dans $\mathbf{X} \times \mathbf{X}$, le relation \mathcal{R} est ouverte.

4) Montrer à l'aide de la relation "identité" sur \mathbb{R} que la relation peut être ouverte sans que pour autant le graphe de la relation soit ouvert.

5) Soit $\mathbf{X} = \mathbb{R}$ et considérons la relation :

$$x_1 \mathcal{R} x_2, \quad \text{si et seulement si} \quad \begin{cases} x_1 = x_2, & \text{ou bien,} \\ x_i \neq 0 \quad \text{et} \quad x_1 x_2 = 1. \end{cases}$$

Montrer que cette relation est une équivalence *non fermée* sur \mathbf{X} dont le graphe est fermé.

6) Supposons l'espace \mathbf{X} localement fermé⁽⁴⁾. Montrer que si \mathcal{R} est une relation d'équivalence fermée sur \mathbf{X} , le graphe $\text{Gr}(\mathcal{R})$ est alors bien une partie fermée de $\mathbf{X} \times \mathbf{X}$.

Indication : Soit $(x, y) \notin \text{Gr}(\mathcal{R})$. Après avoir remarqué que la classe \bar{y} est fermée, on montrera qu'il existe un voisinage V_x de x dans \mathbf{X} , tel que $(V_x \times \{y\}) \cap \text{Gr}(\mathcal{R}) = \emptyset$ (faute de quoi $\bar{y} \ni x$ et donc $x \mathcal{R} y$). En particulier, si V_x est fermé, sa \mathcal{R} -saturation \bar{V}_x sera fermée dans \mathbf{X} et ne contiendra pas y . Il existe donc un voisinage V_y de y dans \mathbf{X} tel que $\bar{V}_x \cap V_y = \emptyset$, i.e. tel que $V_x \times V_y \cap \text{Gr}(\mathcal{R}) = \emptyset$.

1.2 Sous-espaces topologiques d'un quotient

Soit \mathcal{R} une relation d'équivalence sur un espace topologique \mathbf{X} . Notons \mathbf{X}/\mathcal{R} l'espace topologique quotient et $\nu : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}/\mathcal{R}$ la surjection canonique. Soit \mathbf{Z} un sous-espace topologique de \mathbf{X}/\mathcal{R} et notons $\mathbf{Y} \subseteq \mathbf{X}$ l'image inverse par ν de \mathbf{Z} , i.e. $\mathbf{Y} = \nu^{-1}(\mathbf{Z})$. En tant que sous-ensemble de \mathbf{X} , la partie \mathbf{Y} est \mathcal{R} -saturée, notons $\mathcal{R}|_{\mathbf{Y}}$ la "restriction" de \mathcal{R} à \mathbf{Y} , i.e. on pose pour tous $y_1, y_2 \in \mathbf{Y}$:

$$y_1 \mathcal{R}|_{\mathbf{Y}} y_2, \quad \text{si et seulement si,} \quad y_1 \mathcal{R} y_2.$$

A partir de maintenant considérons \mathbf{Y} munie de la topologie induite par \mathbf{X} . L'application $\nu|_{\mathbf{Y}}$, restriction de ν à \mathbf{Y} , est alors : continue, à valeurs dans \mathbf{X}/\mathcal{R} et d'image \mathbf{Z} ; elle est également constante sur les classes de $\mathcal{R}|_{\mathbf{Y}}$ et induit, par conséquent, une application **bijective** $\bar{\nu} : \mathbf{Y}/\mathcal{R}|_{\mathbf{Y}} \rightarrow \mathbf{Z}$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Y} & \hookrightarrow & \mathbf{X} \\ \downarrow \nu|_{\mathbf{Y}} & & \downarrow \nu \\ \mathbf{Y}/\mathcal{R}|_{\mathbf{Y}} & \xrightarrow[\cong]{\bar{\nu}} & \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{X}/\mathcal{R} \end{array}$$

Cette application **n'est pas**, en toute généralité, un homéomorphisme. On a cependant le résultat suivant qui nous sera souvent utile :

⁴ On appelle ainsi un espace topologique tel que tout point admet une base de voisinages fermés. Les espaces localement compacts, en particulier ceux localement homéomorphes à des ouverts des \mathbb{R} -espaces vectoriels de dimension finie (variétés topologiques) en sont des exemples.

Lemme 1.2-1 : Lorsque la relation \mathcal{R} est ouverte ou fermée, l'application $\bar{\nu}$ établit un homéomorphisme de $\mathbf{Y}/\mathcal{R}|_{\mathbf{Y}}$ sur \mathbf{Z} .

Démonstration : Nous détaillerons le cas où la relation est ouverte et laissons l'autre cas aux soins du lecteur.

La propriété universelle de la topologie quotient garantit la continuité de $\bar{\nu}$. Son image est par définition le sous-espace \mathbf{Z} . Soit maintenant V une partie ouverte de $\mathbf{Y}/\mathcal{R}|_{\mathbf{Y}}$. L'ensemble $U := (\nu|_{\mathbf{Y}})^{-1}(V)$ est alors une partie ouverte et $\mathcal{R}|_{\mathbf{Y}}$ -saturée de \mathbf{Y} (également par définition). Comme \mathbf{Y} est \mathcal{R} -saturée dans \mathbf{X} , la partie U est \mathcal{R} -saturée dans \mathbf{X} . Soit W un ouvert de \mathbf{X} (non nécessairement \mathcal{R} -saturé), tel que $W \cap \mathbf{Y} = U$. Notons \tilde{W} la \mathcal{R} -saturation de W dans \mathbf{X} ; alors $\tilde{W} \cap \mathbf{Y} = U$. En effet, soit $\tilde{w} \in \tilde{W} \cap \mathbf{Y}$, il existe $w \in W$ avec $w \mathcal{R} \tilde{w}$ et comme \mathbf{Y} est \mathcal{R} -saturé on a également $w \in \mathbf{Y}$ et alors $w \in U$; mais U est \mathcal{R} -saturée, donc $\tilde{w} \in U$. Enfin, le fait que \mathcal{R} soit ouverte assure que \tilde{W} est une partie ouverte de \mathbf{X} . L'ensemble $\nu(\tilde{W})$ est alors un ouvert de \mathbf{X}/\mathcal{R} dont l'intersection avec \mathbf{Z} coïncide avec $\bar{\nu}(V)$. L'application $\bar{\nu}$ établit donc une bijection continue et ouverte sur \mathbf{Z} , c'est donc bien un homéomorphisme. ■

1.3 Séparation du quotient topologique

La continuité des applications $\nu : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}/\mathcal{R}$ et $\nu \times \nu : \mathbf{X} \times \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}/\mathcal{R} \times \mathbf{X}/\mathcal{R}$ jointe au fait qu'un espace topologique \mathbf{Y} est séparé, si et seulement si, la diagonale $\Delta_{\mathbf{Y}}$ est une partie fermée de $\mathbf{Y} \times \mathbf{Y}$, fournissent aussitôt les deux conditions suivantes nécessaires à la séparation de l'espace topologique quotient \mathbf{X}/\mathcal{R} :

Lemme 1.3-1 : Lorsque l'espace topologique \mathbf{X}/\mathcal{R} est séparé, on a

Sep-1) Le graphe de la relation \mathcal{R} est une partie fermée de $\mathbf{X} \times \mathbf{X}$.

Sep-2) Les classes d'équivalence de \mathcal{R} sont des parties fermées de \mathbf{X} .

Exercice 1.3-1 : Démontrer le lemme précédent en prouvant les implications :

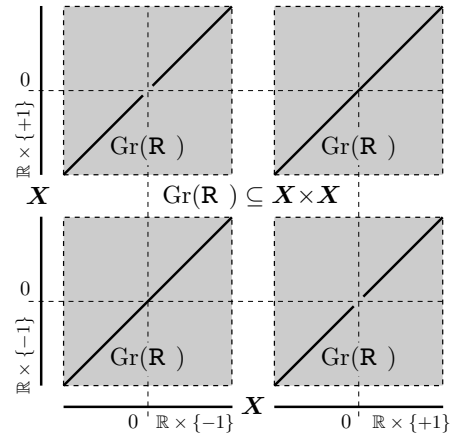
$$\mathbf{X}/\mathcal{R} \text{ est séparé} \Rightarrow (1.3-1\text{-Sep-1}) \Rightarrow (1.3-1\text{-Sep-2}).$$

Remarque 1.3-1 : La condition (Sep-2) ne suffit pas pour garantir la séparation de l'espace quotient. En effet, soit \mathbf{X} le sous-espace topologique de \mathbb{R}^2 constitué des couples de nombres réels de la forme $(x, \pm 1)$, avec $x \in \mathbb{R}$. Notons \mathcal{R} la relation d'équivalence définie par :

$$(x_1, y_1) \mathcal{R} (x_2, y_2), \quad \text{si et seulement si,}$$

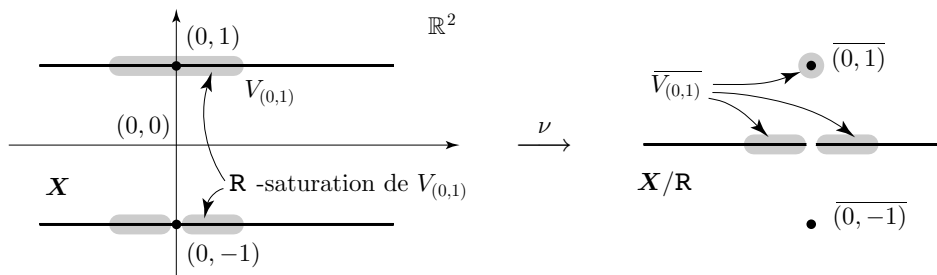
$$\begin{cases} x_1 \neq 0 \text{ et } x_1 = x_2, & \text{ou bien,} \\ x_1 = x_2 = 0 \text{ et } y_1 = y_2. \end{cases}$$

Les classes d'équivalence modulo \mathcal{R} sont de cardinal au plus deux et sont donc des parties fermées de \mathbf{X} . Par contre le graphe de \mathcal{R} n'est pas fermé dans $\mathbf{X} \times \mathbf{X}$ (cf. figure ci-contre). Le quotient \mathbf{X}/\mathcal{R} n'est donc pas séparé.



La non séparation de \mathbf{X}/\mathcal{R} concerne les classes $\overline{(0, 1)}$ et $\overline{(0, -1)}$. En effet, ces classes sont des éléments distincts de \mathbf{X}/\mathcal{R} et la \mathcal{R} -saturation de tout voisinage de $(0, 1)$ dans \mathbf{X} rencontre bien tout voisinage

de $(0, -1)$. Il n'est donc pas possible de séparer les points $\overline{(0, 1)}$ et $\overline{(0, -1)}$ dans l'espace topologique quotient.



Exercice 1.3-2 : Montrer que dans l'exemple de la remarque précédente

- 1) La surjection canonique $\nu : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}/\mathcal{R}$ est ouverte.
- 2) La restriction de la surjection canonique $\nu : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}/\mathcal{R}$ au sous-espace de \mathbf{X} des couples d'ordonnée égale à 1, est bien un homéomorphisme sur son image. L'espace \mathbf{X}/\mathcal{R} est donc réunion de deux copies de \mathbb{R} .

Remarque 1.3-2 : La condition (Sep-1) n'est pas non plus suffisante pour la séparation de \mathbf{X}/\mathcal{R} . Les exercices 10 et 28 (pages 101 et 105) du chapitre I de [Bou_T] en donnent des contre-exemples.

Il existe cependant des situations assez générales où la condition (Sep-1) est bien équivalente à la séparation de la topologie quotient comme le montre la proposition suivante.

Proposition 1.3-2 : Soient \mathbf{X} et \mathcal{R} comme précédemment. Lorsque la relation \mathcal{R} est ouverte, il y a équivalence entre les assertions suivantes :

- 1) L'espace topologique quotient \mathbf{X}/\mathcal{R} est séparé.
- 2) Le graphe $\text{Gr}(\mathcal{R})$ est une partie fermée de l'espace topologique produit $\mathbf{X} \times \mathbf{X}$.

Démonstration : Nous nous limiterons à rappeler la preuve de l'implication (2) \Rightarrow (1).

Commençons par observer que l'application $\nu \times \nu : \mathbf{X} \times \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}/\mathcal{R} \times \mathbf{X}/\mathcal{R}$ est ouverte. En effet, comme tout ouvert de $\mathbf{X} \times \mathbf{X}$ est réunion de parties de la forme $U \times U$, où U est un ouvert de \mathbf{X} , et que l'image par $\nu \times \nu$ d'une réunion est la réunion des images, on est ramené à montrer que $\nu \times \nu(U \times U) = \nu(U) \times \nu(U)$ est un ouvert de $\mathbf{X}/\mathcal{R} \times \mathbf{X}/\mathcal{R}$, ce qui résulte du fait que ν est ouverte. La démonstration de la proposition découle alors du fait que le complémentaire de $\nu \times \nu(\text{Gr}(\mathcal{R})) = \Delta_{\mathbf{X}/\mathcal{R}}$ est précisément $\nu \times \nu(\mathbf{X} \times \mathbf{X} \setminus \text{Gr}(\mathcal{R}))$ qui est ouvert d'après ce qui précède. ■

1.4 Relations induites par des applications continues

Soit $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ une application continue entre deux espaces topologiques. On définit alors la relation \mathcal{R}_f sur \mathbf{X} en posant :

$$x_1 \mathcal{R}_f x_2, \quad \text{si et seulement si,} \quad f(x_1) = f(x_2).$$

La relation \mathcal{R}_f est trivialement une équivalence sur \mathbf{X} . On note $\mathbf{X}/f := \mathbf{X}/\mathcal{R}_f$.

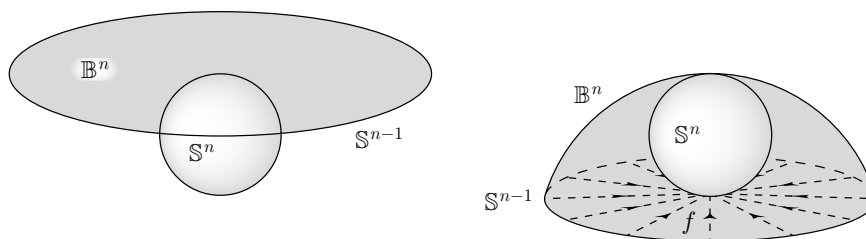
Exercice 1.4-1 :

- 1) Montrer que si Y est un espace topologique *séparé*, il en est de même de X/\mathcal{R} .
- 2) Montrer que si l'application f est ouverte (resp. fermée), la relation \mathcal{R}_f sera ouverte (resp. fermée).
- 3) Supposons X et Y compacts et f surjective. Montrer que $\bar{f} : X/\mathcal{R}_f \rightarrow Y$ est un homéomorphisme.

Exercice 1.4-2 : Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, notons \mathbb{B}^n la boule unité de \mathbb{R}^n (on suppose \mathbb{R}^n muni de sa structure d'espace euclidien canonique). Notons \mathbb{S}^n la sphère unité, frontière de \mathbb{B}^{n+1} dans \mathbb{R}^{n+1} . Considérons l'application $f : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ définie par :

$$f(\vec{x}) = \left(2\sqrt{\frac{1-\|\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|}} \vec{x}, 1 - 2\|\vec{x}\| \right).$$

Montrer que f est continue. Expliciter la relation d'équivalence \mathcal{R}_f et montrer que l'application $\bar{f} : \mathbb{B}^n/\mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^n$ est un homéomorphisme.



Plus généralement, on s'intéressera au cas où $f : X' \rightarrow Y$ et que $X' \subseteq X$. La relation \mathcal{R}_f sur X' engendre une relation d'équivalence sur X dont le graphe dans $X \times X$ est donné par $\text{Gr}(\mathcal{R}_f) \cup \Delta_X$. Cette relation sur X est également notée (par abus) \mathcal{R}_f . Le quotient de X par cette dernière relation est noté X/f .

Soit Y l'espace topologique réduit à un point $\{\bullet\}$. Soit $X' \subseteq X$ et $f : X' \rightarrow \{\bullet\}$ l'application constante. L'espace topologique quotient X/f est généralement noté X/X' .

Exercice 1.4-3 : Montrer que la projection canonique $\nu : X \rightarrow X/X'$ est ouverte (resp. fermée), si X' est ouverte (resp. fermée) dans X .

Exercice 1.4-4 : Supposons X séparé et localement fermé.

- 1) Montrer que la projection canonique $\nu : X \rightarrow X/X'$ est fermée, si et seulement si, X' est fermée.
- 2) Montrer que X/X' est séparé, si et seulement si, X' est fermé.

1.5 Relations induites par des actions de groupes

Soit G un groupe. Rappelons que l'on appelle « *action de G sur un espace topologique X* », la donnée d'un homomorphisme de groupes $\rho : G \rightarrow \text{Homéom}(X)$. Pour chaque $g \in G$, l'application $\rho(g)$ est alors un homéomorphisme de X et nous noterons $g \cdot x := \rho(g)(x)$ lorsque l'homomorphisme ρ ne mérite pas d'être précisé.

Définition 1.5-1 : Pour chaque $x \in X$, notons $G \cdot x$ l'ensemble des éléments de X de la forme $g \cdot x$, où $g \in G$; on l'appelle « l'orbite de G passant par x ».

Notons \mathcal{R}_G la relation d'équivalence sur X définie en posant :

$$x_1 \mathcal{R}_G x_2, \quad \text{si et seulement si,} \quad G \cdot x_1 = G \cdot x_2.$$

Définition 1.5-2 : L'espace topologique X/\mathcal{R}_G , également noté X/G , est appelé « espace des G -orbites ».

Exercice 1.5-1 :

- 1) Montrer que \mathcal{R}_G est une relation d'équivalence *ouverte*.
- 2) Montrer X/G est séparé, si et seulement si, $\text{Gr}(\mathcal{R}_G)$ est fermé dans $X \times X$.
- 3) Faisons agir G sur $X \times X$ par l'action sur la seconde coordonnée, *i.e.* $g_2(x_1, x_2) := (x_1, g \cdot x_2)$. Montrer l'égalité :

$$\text{Gr}(\mathcal{R}_G) = \cup_{g \in G} g_2 \Delta_X.$$

En conclure que si X est séparé et que G est de cardinal fini, l'espace quotient X/G est également séparé.

Exercice 1.5-2 : Soit X un espace topologique muni d'une action d'un groupe G . Soit Y un sous-espace de X stable sous l'action de G . Montrer que l'application canonique de $Y/G \rightarrow X/G$ qui associe à chaque G -orbite dans Y la G -orbite dans X est un homéomorphisme sur son image.

Exercice 1.5-3 : Soit X un espace topologique muni d'une action d'un groupe G . Soit $Y \subseteq X$ une partie rencontrant toute G -orbite de X , *i.e.* $X = G \cdot Y$. Notons $\mathcal{R}_G|_Y$ la restriction de la relation d'équivalence définie par G à l'ensemble Y . Supposons Y muni de la topologie induite par X . Montrer que l'application d'inclusion de Y dans X induit une bijection $Y/\mathcal{R}_G|_Y \rightarrow X/G$ qui est un homéomorphisme.

Indication : Utiliser le lemme 1.2-1.

1.5.1 Actions proprement discontinues sans point fixe

Dans cette section l'espace topologique X est supposé *séparé*.

Définition 1.5.1-1 : On dit que l'action de G sur X est *proprement discontinue et sans point fixe* lorsque les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- a) Pour tous $x, y \in X$ tels que $x \notin G \cdot y$, il existe des voisinages $V_x \ni x$ et $V_y \ni y$ vérifiant

$$V_x \cap G \cdot V_y = \emptyset.$$

b) Pour tout $x \in X$, il existe un voisinage $V_x \ni x$ tel que

$$V_x \cap g \cdot V_x = \emptyset,$$

pour tout $g \in G$ différent de l'élément neutre.

Exercice 1.5.1-1 : Soit G un groupe agissant sur un espace topologique X .

1) Soient A et B deux sous-ensembles de X . Montrer l'équivalence suivante :

$$(A \times B) \cap \text{Gr}(\mathcal{R}_G) = \emptyset \iff A \cap G \cdot B = \emptyset.$$

- 2) En déduire que la condition (a) équivaut à la fermeture du graphe de \mathcal{R} , et donc à la séparation de l'espace quotient X/G .
- 3) Montrer que la condition (b) équivaut au fait que la projection canonique $X \rightarrow X/G$ est un revêtement (cf. section 2.10) de fibre l'ensemble sous-jacent au groupe G .

Exercice 1.5.1-2 : Soit G un groupe agissant de manière proprement discontinue et sans point fixe sur un espace topologique X que l'on supposera *séparé et séparable*.

- 1) Montrer que les orbites de G sont des parties fermées et discrètes de X . En déduire que G est de cardinal au plus dénombrable.
- 2) Supposons X compacte. Montrer que G est nécessairement fini.
- 3) Montrer que si G est un groupe *fini* agissant librement sur X , l'action est proprement discontinue sans point fixe.

Exercice 1.5.1-3 : Pour tout entier naturel n considérons le groupe additif $G_n = \mathbb{Z}^n$ et définissons

$$(m_1, \dots, m_n) \cdot (x_1, \dots, x_n) = (x_1 + m_1, \dots, x_n + m_n),$$

pour tous $(m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n$ et $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

- 1) Montrer que l'opération ' \cdot ' définit une action proprement discontinue sans point fixe de \mathbb{Z}^n sur \mathbb{R}^n .
- 2) Montrer que l'espace topologique quotient $\mathbb{T}^n := \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$ est compact et localement homéomorphe à \mathbb{R}^n et isomorphe à $\mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1$ (n -facteurs).
- 3) Dessiner \mathbb{T}^0 , \mathbb{T}^1 et \mathbb{T}^2 .

Exercice 1.5.1-4 : Soient \mathbb{S}^{n-1} la sphère unité de \mathbb{R}^n et $G = \{\pm 1\}$. Faisons agir G sur \mathbb{S}^{n-1} par $\pm 1 \cdot x = \pm x$ (action antipodale).

- 1) Montrer que cette action est proprement discontinue sans point fixe.
- 2) Montrer que $\mathbb{S}^{n-1} / \{\pm 1\}$ est un espace compact localement homéomorphe à \mathbb{R}^{n-1} . On appelle cet espace « l'espace projectif réel de dimension $n - 1$ » et on le note $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{R})$.
- 3) En faisant correspondre à chaque droite vectorielle \mathbb{L} de \mathbb{R}^n les points de $\mathbb{S}^{n-1} \cap \mathbb{L}$, montrer que $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{R})$ est naturellement en correspondance bijective avec l'ensemble des droites vectorielles de \mathbb{R}^n .
- 4) Montrer que $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ est homéomorphe à l'espace quotient du disque $\mathbb{D}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ muni de la relation d'équivalence définie par l'action antipodale sur la sphère frontière $\mathbb{S}^1 \subseteq \mathbb{D}^2$.

Exercice 1.5.1-5 : Rappelons qu'un \mathbb{R} -espace vectoriel (de dimension finie) E muni d'une forme bilinéaire définie positive $\langle _ / _ \rangle$ est appelé un « *espace euclidien* ». En posant $N(x) := \sqrt{\langle x/x \rangle}$, le couple (E, N) est un \mathbb{R} -espace vectoriel normé. Lorsque ces données seront présentes on considérera E muni de la topologie associée à sa structure d'espace métrique pour la distance $d_N(x, y) = N(x - y)$.

Une application linéaire $\psi \in \mathcal{L}(E)$ est dite orthogonale si $\langle \varphi(x)/\varphi(y) \rangle = \langle x/y \rangle$, pour tous $x, y \in E$. On démontre qu'il y a équivalence, pour une application $\psi : E \rightarrow E$, entre : être une isométrie qui fixe l'origine, et être une application linéaire *orthogonale*. L'ensemble des isométries est stable par composition d'applications et constitue un groupe noté $O(E)$ (et même $O(n)$ lorsque $E = \mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire de vecteurs canonique).

Soient \mathbb{R}^n muni de sa structure canonique d'espace euclidien et $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une isométrie. Toute isométrie se décompose de manière unique comme la composée d'une translation et d'une application linéaire orthogonale. Il existe donc $\vec{v}_0 \in \mathbb{R}^n$ et $\psi \in O(n)$, tels que pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ on ait :

$$\varphi(\vec{x}) = \vec{v}_0 + \psi(\vec{x}).$$

1) Montrer que φ n'a pas de point fixe⁵, si et seulement si :

$$\begin{cases} 1 \text{ est valeur propre de } \psi, \text{ et} \\ \vec{v}_0 \notin \text{im}(\psi - \text{id}) \end{cases}$$

2) Considérons la décomposition orthogonale

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{E}_\psi(1) \oplus H, \tag{*}$$

où $\mathbb{E}_\psi(1)$ désigne le sous-espace ψ -propre de \mathbb{R}^n associé à la valeur propre 1, et où $H := \mathbb{E}_\psi(1)^\perp$. Notons \vec{w}_0 la projection orthogonale (qui découle de $(*)$) de \vec{v}_0 sur $\mathbb{E}_\psi(1)$.

Montrer que la condition : $\vec{v}_0 \notin \text{im}(\psi - \text{id})$, équivaut à : $\vec{w}_0 \neq 0$

3) Montrer la formule :

$$\varphi^n(\vec{x}) = (\text{id} + \psi + \psi^2 + \dots + \psi^{n-1})(\vec{v}_0) + \psi^n(\vec{x}),$$

pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ et tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Puis, à l'aide de (2), prouver que si φ est une isométrie *sans point fixe*, il en est de même de φ^n , quel que soit $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

4) Montrer la minoration :

$$\|\varphi^n(\vec{x}) - \vec{x}\| \geq \|(\text{id} + \psi + \psi^2 + \dots + \psi^{n-1})(\vec{v}_0)\| - 2\|\vec{x}\| \geq n\|\vec{w}_0\| - 2\|\vec{x}\|,$$

pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ et tout $n \in \mathbb{N}$. Prouver alors, toujours à l'aide de (2), que si φ est une isométrie *sans point fixe*,

$$\lim_{|n| \rightarrow \infty} \|\varphi^n(\vec{x}) - \vec{x}\| = \infty$$

et donc que pour chaque $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, il existe un nombre réel $\varepsilon_{\vec{x}} > 0$ tel que

$$\|\varphi^n(\vec{x}) - \vec{x}\| > \varepsilon_{\vec{x}},$$

pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

5) A l'aide des résultats qui précèdent, montrer que le groupe d'isométries de \mathbb{R}^n engendré par une isométrie *sans point fixe*, opère toujours de façon proprement discontinue et sans point fixe sur \mathbb{R}^n .

⁵ On dit que \vec{x} est un « *point fixe de φ* » lorsque $\varphi(\vec{x}) = \vec{x}$.

Exercice 1.5.1-6 : L'exercice précédent traite du cas des groupes d'isométries sur les espaces vectoriels euclidiens de dimension finie engendrés par une isométrie sans point fixe. La généralisation à un nombre fini de générateurs du fait que l'on obtient des actions proprement discontinues sans point fixe est fausse.

Soit G_s le groupe de translations de \mathbb{R} engendré par les translations $\tau_1(t) = t + 1$ et $\tau_s(t) = t + s$. Montrer que G_s opère sur \mathbb{R} de façon proprement discontinue sans point fixe, si et seulement si, $s \in \mathbb{Q}$.

Remarque 1.5.1-6.1 : La décomposition d'une isométrie de \mathbb{R}^n en composition d'une translation et une application linéaire orthogonale montre que le groupe d'isométries de \mathbb{R}^n est isomorphe (en tant que groupe) à un produit semi-direct $\mathbb{R}^n \rtimes O(n)$ (\mathbb{R}^n muni de sa structure de groupe additif). D'autre part $O(n) \subseteq GL(n; \mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^{n \times n}$ est une partie compacte et le groupe des isométries de \mathbb{R}^n se trouve canoniquement muni d'une structure de groupe topologique. On démontre alors que pour qu'un groupe d'isométries de \mathbb{R}^n opère de façon proprement discontinue et sans point fixe sur \mathbb{R}^n , il faut et il suffit, qu'il soit fermé et discret dans $\mathbb{R}^n \rtimes O(n)$ et qu'il agisse librement sur \mathbb{R}^n .

Exercice 1.5.1-7 : Soit G un groupe agissant sur l'espace topologique X et soit H un sous-groupe distingué de G .

1) Pour chaque $\bar{g} \in G/H$ et chaque $\bar{x} \in X/H$, posons $\bar{g} \cdot \bar{x} = \overline{g \cdot x}$.

Montrer que l'élément $\bar{g} \cdot \bar{x}$ est bien défini, *i.e.* est indépendant des représentants g, x choisis; puis que l'on obtient ainsi une action du groupe G/H sur X/H .

2) Considérons l'application

$$\mu : X/H \rightarrow X/G,$$

qui associe à chaque H -orbite de X la G -orbite que la contient.

a) Montrer que μ est continue est que la relation d'équivalence \mathcal{R}_μ qu'elle induit sur X/H est précisément la relation $\mathcal{R}_{G/H}$ donnée par l'action de G/H sur X/H de la question précédente.

b) Montrer que l'application canonique

$$\bar{\mu} : (X/H)/(G/H) \rightarrow X/G,$$

est un homéomorphisme.

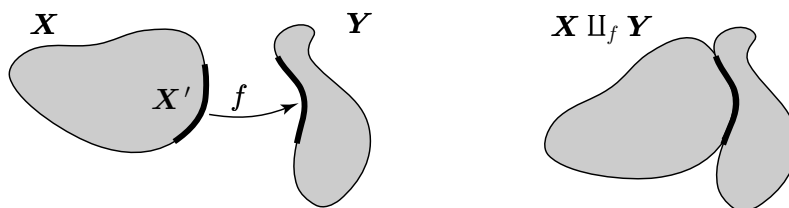
3) Montrer que G opère de façon proprement discontinue sans point fixe sur X , si et seulement si, il en est de même des actions de H et de G/H respectivement sur X et X/H .

En particulier, lorsque G opère de façon proprement discontinue sans point fixe sur X , l'application $\mu : X/H \rightarrow X/G$ est un revêtement de fibre : l'ensemble sous-jacent au groupe G/H .

1.6 Recollement d'espaces topologiques

Soient X et Y deux espaces topologique, et $f : X' \rightarrow Y$ une application définie sur un sous-espace X' de X , à valeurs dans Y . On considère sur l'espace topologique $Z := X \amalg Y$, "réunion disjointe" des espaces X et Y , la relation \mathcal{R}_f définie par :

$$z_1 \mathcal{R}_f z_2, \quad \text{si et seulement si,} \quad \begin{cases} z_1 = z_2, & \text{ou bien,} \\ z_1 \in X' \text{ et } z_2 = f(z_1), & \text{ou bien,} \\ z_2 \in X' \text{ et } z_1 = f(z_2), & \text{ou bien,} \\ z_1, z_2 \in X' \text{ et } f(z_1) = f(z_2). \end{cases}$$



Définition 1.6-1 : La relation \mathcal{R}_f est une relation d'équivalence sur Z , et l'espace topologique quotient, noté $X \amalg_f Y$, et appelé «*recollement de X et Y par f*». L'application f est dite «*application de recollement*».

Exercice 1.6-1 : Reprenons les données ci-dessus. Soit $F : (X' \amalg Y) \rightarrow Y$ l'application définie par :

$$F(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in Y, \\ f(x), & \text{si } x \in X'. \end{cases}$$

Montrer que F est bien continue et que $\mathcal{R}_F = \mathcal{R}_f$. Le recollement d'espaces topologiques est donc bien un cas particulier du quotient d'un espace par une fonction, *i.e.* $X \amalg_f Y \equiv (X \amalg Y)/F$.

Exercice 1.6-2 : Supposons X' ouvert dans X et $f : X' \rightarrow Y$ un plongement ouvert. Montrer que les applications canoniques $X \rightarrow X \amalg_f Y$ et $Y \rightarrow X \amalg_f Y$ sont également des plongements ouverts. On peut donc dire (par abus de langage) que $\{X, Y\}$ est un recouvrement ouvert de $X \amalg_f Y$ et que $X \cap Y = X' (= f(X'))$.

Exercice 1.6-3 : Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ l'application $f(x) = x$. Montrer que $\mathbb{R} \amalg_f \mathbb{R}$ est homéomorphe à l'espace quotient X/\mathcal{R} de la remarque 1.3-1.

Exercice 1.6-4 : Nous avons introduit dans l'exercice 1.5.1-4 l'espace projectif réel $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ à l'aide de l'action du groupe $G := \{\pm 1\}$ sur la sphère \mathbb{S}^n . Notons $\nu : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ l'application canonique. Soit \mathbb{S}_+^n le sous-espace de \mathbb{S}^n des points d'ordonnée ≥ 0 (hémisphère nord) ; on a $\nu(\mathbb{S}_+^n) = \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ et la restriction de la relation d'équivalence \mathcal{R}_G sur \mathbb{S}_+^n n'est autre que la relation d'équivalence «*antipodale*» sur l'équateur \mathbb{S}^{n-1} , frontière de \mathbb{S}_+^n dans \mathbb{S}^n . D'autre part \mathbb{S}_+^n est homéomorphe à la boule unité fermée \mathbb{B}^n de \mathbb{R}^n . On conclut ainsi à l'existence d'un homéomorphisme entre $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ et l'espace topologique

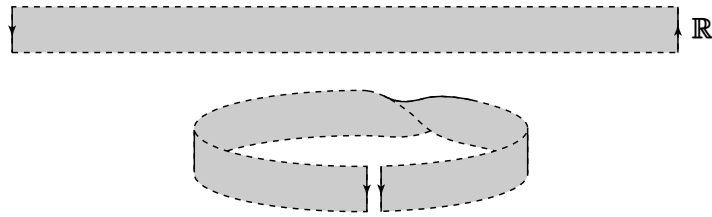
$$\boxed{\mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \sim \mathbb{B}^n \amalg_{f_n} \mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{R})}$$

où l'application de recollement f_n est définie sur \mathbb{S}^{n-1} et associe à $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ sa classe module G .

1.7 Quelques exemples à retenir

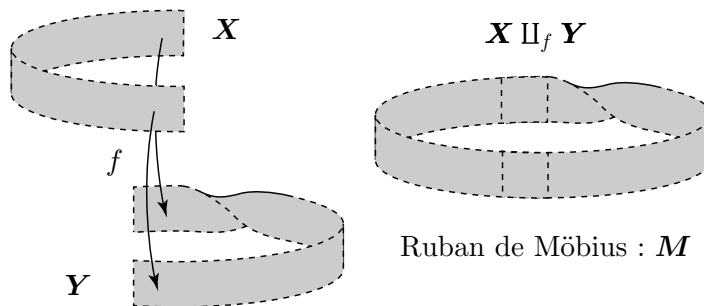
1.7.1 Ruban de Möbius

Par identification de points d'un rectangle. La construction pratique d'un ruban de Möbius est schématisée par l'illustration suivante.



Il s'agit donc de l'espace topologique obtenu à partir d'un rectangle $X = [-1, 1] \times \mathbb{R}$ en identifiant les points $(-1, t)$ et $(1, -t)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Par recollement de deux copies de \mathbb{R}^2 . Dans ce cas $X = Y = \mathbb{R}^2$. Nous laissons aux soins du lecteur d'imaginer l'application de recollement f .



Le ruban de Möbius comme quotient de \mathbb{R}^2 par l'action d'un groupe. Soit G le sous-groupe du groupe d'isométries de \mathbb{R}^2 engendré par l'application affine $\beta(x, y) = (x + 2, -y)$.

- 1) Montrer que l'action de G sur \mathbb{R}^2 est bien proprement discontinue sans point fixe.
- 2) Montrer que $G \cdot ([-1, 1] \times \mathbb{R}) = \mathbb{R}^2$ et que la relation d'équivalence $\mathcal{R}_G|_{([-1, 1] \times \mathbb{R})}$ coïncide avec celle introduite dans la construction du ruban de Möbius par identification de points d'un rectangle.
- 3) En conclure que \mathbb{R}^2/G est bien homéomorphe au ruban de Möbius.

1.7.2 Bouteille de Klein

Par identification de points d'un rectangle

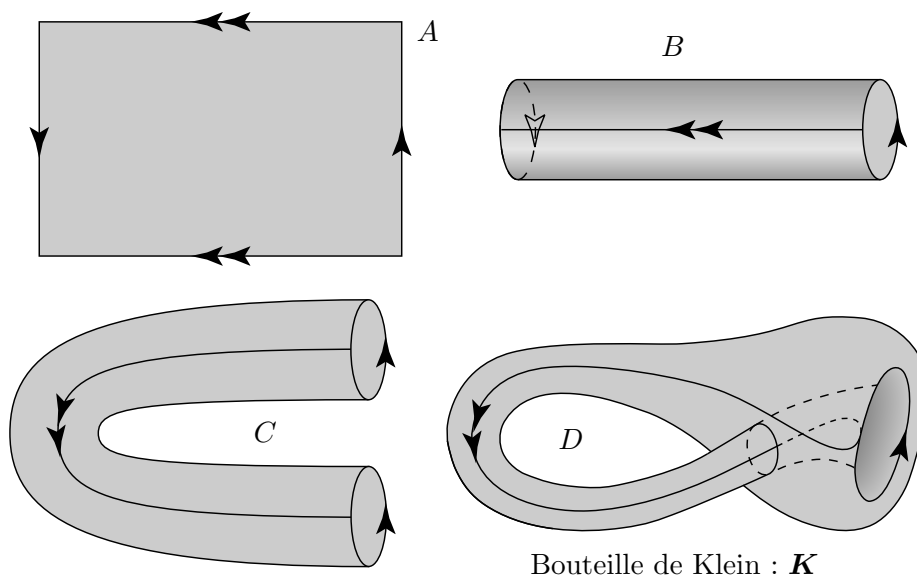
La bouteille de Klein⁽⁶⁾ est obtenue en identifiant des points d'une bande rectangulaire $[-1, 1] \times [-1, 1]$, par exemple, suivant la relation \mathcal{R} : la plus fine des relations d'équivalence dont le graphe contient les couples

$$((t, 1), (t, -1)) \quad \text{et} \quad ((1, t), (-1, -t))$$

L'illustration suivante décrit le processus d'identification de points suivant deux étapes. On commence par coller les bords "horizontaux", ce qui donne un cylindre; on colle ensuite les cercles

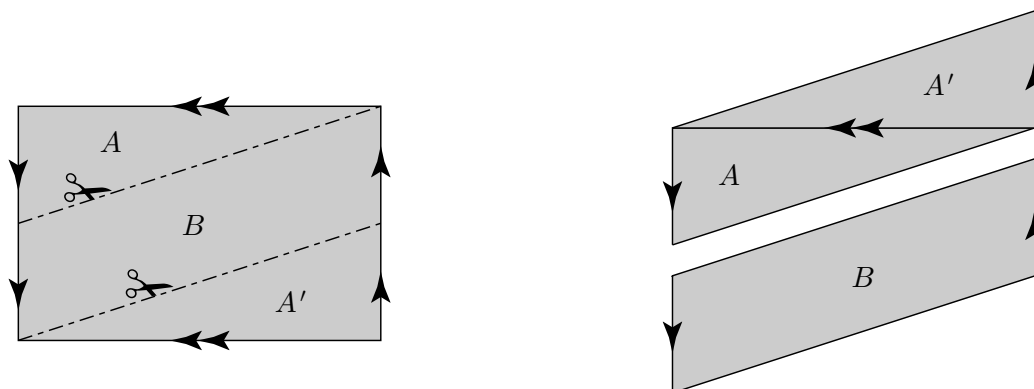
⁶ Les figures de cette section sont des reproductions de celles du petit livre "Introduction à la topologie combinatoire" de M. Fréchet et Ky Fan.

frontière. A remarquer que le passage de C à D ne peut se faire dans \mathbb{R}^3 puisqu'il n'est pas possible de plonger la bouteille de Klein dans cet espace (nous prouverons ceci dans un chapitre ultérieur).



Par recollement de deux rubans de Möbius

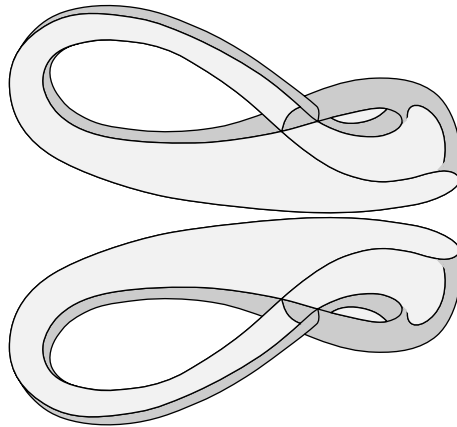
Dans les étapes d'identification de points de la construction précédente, nous aurions pu commencer par le recollement des bords "verticaux" ; cela nous aurait donné un ruban de Möbius sur lequel des identifications des points sur son bord auraient permis de retrouver la bouteille de Klein. Plutôt que de procéder ainsi, nous allons commencer par découper le rectangle $[-1, 1] \times [-1, 1]$ en trois parties A, A' et B comme indique l'illustration suivante :



On colle alors les parties A et A' le long de leur bord "horizontal", ce qui fait apparaître deux parallélogrammes. Sur chacun d'eux, l'identification des points se trouvant sur les côtés "verticaux" donnera lieu à un ruban de Möbius.

C'est ainsi que la bouteille de Klein peut être décrite comme le recollement de deux rubans de Möbius le long de leur (unique) bord. L'illustration suivante suggère la façon de disposer ces rubans

pour procéder au recollement voulu.



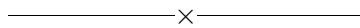
La bouteille de Klein comme quotient de \mathbb{R}^2 par l'action d'un groupe

Soit G le groupe d'isométries de \mathbb{R}^2 engendré par les applications :

$$\alpha(x, y) = (x, y + 2) \quad \text{et} \quad \beta(x, y) = (x + 2, -y).$$

- 1) Montrer l'égalité : $\beta \circ \alpha \circ \beta^{-1} = \alpha^{-1}$.
- 2) Montrer que les éléments de G sont les isométries de la forme : $\alpha^a \circ \beta^b$, avec $a, b \in \mathbb{Z}$.
On a : $\alpha^a \circ \beta^b(x, y) = (x + 2b, (-1)^b y + 2a)$.
- 3) Prouver que G opère de façon proprement discontinue sans point fixe sur \mathbb{R}^2 .
- 4) Montrer que la restriction de l'application canonique $\nu : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2/G$ à l'ensemble $[-1, 1] \times [-1, 1]$ reste surjective. Montrer également que l'équivalence que cette restriction induit sur $[-1, 1] \times [-1, 1]$ est précisément celle qui nous a permis d'introduire la bouteille de Klein par identification de points d'un rectangle. En déduire que \mathbb{R}^2/G est homéomorphe à la bouteille de Klein.

Exercice 1.7.2-1 : La question (1) montre que le sous-groupe $\langle \alpha \rangle$ est distingué dans $\langle \alpha, \beta \rangle$. On en déduit (cf. exercice 1.5.1-7) un revêtement $\mathbb{R}^2/\langle \alpha \rangle \rightarrow \mathbf{K}$. Montrez que $\mathbb{R}^2/\langle \alpha \rangle$ est homéomorphe au tore $\mathbb{T}^2 \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Décrivez l'action de $\langle \alpha, \beta \rangle/\langle \alpha \rangle \cong \{\pm 1\}$ sur \mathbb{T}^2 .



§ 2. Variétés différentiables

2.1 Généralités

Nous introduisons dans cette section le concept de variété différentiable de dimension finie et de classe \mathcal{C}^∞ . Les références [B-T,A-M-R,Die,Ber] suffiront largement pour les besoins du cours.

Avertissement

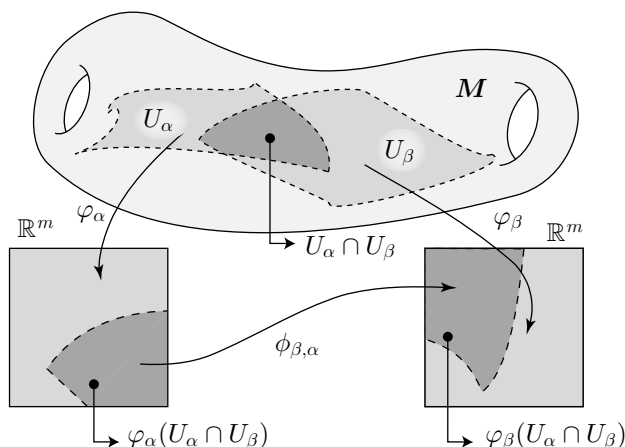
Dans la suite, le calcul différentiel sur les espaces vectoriels de dimension finie sur \mathbb{R} sera supposé connu. D'autre part, le mot "différentiel" sera synonyme de "de classe \mathcal{C}^∞ ", de même les concepts de : immersion, submersion, difféomorphisme, etc, présupposeront cette condition.

Définition 2.1-1 : Soit M un espace topologique (non nécessairement séparé). On appelle « *atlas m -dimensionnel (et de classe \mathcal{C}^∞) pour M* », la donnée d'une famille de couples $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ vérifiant les trois conditions suivantes :

- a) La famille $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ est un recouvrement ouvert de M .
- b) Pour chaque $\alpha \in \mathfrak{A}$, φ_α est un homéomorphisme $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^m$.
- c) Pour chaque couple d'indices $\alpha, \beta \in \mathfrak{A}$ tel que $U_{\alpha\beta} := U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, l'application, dite « *de transition* »,

$$\phi_{\beta,\alpha} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta),$$

définie par $\phi_{\beta,\alpha} := \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$, est différentiable.



La famille $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ est appelée « *l'atlas de définition* » de la structure de variété différentiable ainsi introduite. Chaque couple $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ est appelé : une « *carte de coordonnées locales* » de la variété.

Définition 2.1-2 : Soit M un espace topologique. On dira que deux atlas de M « *définissent la même structure différentiable* » si leur réunion est encore un atlas pour M .

La relation “définir la même structure différentiable” est clairement réflexive et symétrique ; elle est aussi transitive (le vérifier). On appelle alors « *structure différentiable sur M* » chaque classe d'équivalence d'atlas de M .

Remarque 2.1-1 sur l'atlas complet : Chaque classe d'équivalence d'atlas de M possède un représentant canonique appelé « *atlas complet de la structure* ». On l'introduit souvent comme “réunion de tous les atlas de la classe”, mais ceci n'est qu'une heuristique puisque la notion de “réunion de familles” n'a de sens en théorie des ensembles que lorsque la réunion disjointe des ensembles d'indices des différentes familles est encore un ensemble ce qui aurait présupposé des hypothèses que l'on ne fait pas dans la pratique. Il existe pourtant un moyen pour justifier l'existence de l'atlas complet. En effet, il résulte du fait que *chaque élément* d'un atlas est une application définie sur une partie de M à valeurs dans \mathbb{R}^m ; il se représente donc à l'aide d'un sous-ensemble de $M \times \mathbb{R}^m$: son graphe. Ainsi les éléments de tous les atlas d'une classe d'équivalence d'atlas constituent un sous-ensemble de $\mathcal{P}(M \times \mathbb{R}^m)$. Cet ensemble est bien canonique et comme tout ensemble est trivialement une famille ⁽⁷⁾, c'est bien un atlas.

⁷ On prend comme ensemble d'indices l'ensemble lui-même ; la fonction d'indexation étant alors l'identité.

Définition 2.1-3 : On appelle « *variété différentiable de dimension m* » la donnée d'un espace topologique muni d'une classe d'atlas m -dimensionnels, ou, ce qui revient au même, de l'atlas complet de la classe en question.

Notation 2.1-1 et terminologie : Une variété différentiable est donc la donnée d'un couple (M, \mathcal{A}) où M est un espace topologique et \mathcal{A} est un atlas sur M . Bien souvent l'atlas \mathcal{A} sera sous-entendu et la variété sera désignée simplement par la notation M .

On dira que M est : séparée, compacte, dénombrable à l'infini, etc., si l'espace topologique sous-jacent l'est.

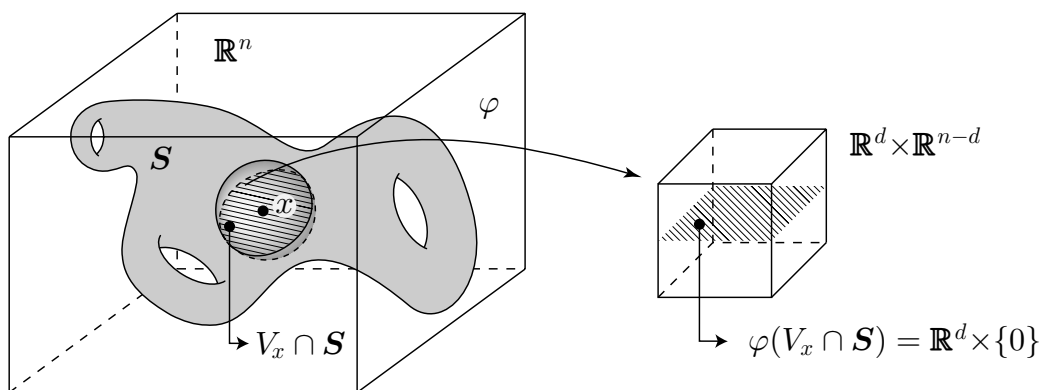
Exercice 2.1-1 : Toute variété différentiable est connexe par arcs, localement compacte et localement contractile, en particulier, localement connexe par arcs et localement simplement connexe. Chaque composante connexe d'une variété différentiable est une variété différentiable (de même dimension).

Exercice 2.1-2 : Montrer que les domaines de cartes d'un atlas complet constituent une base pour la topologie de l'espace topologique sous-jacent à la variété, *i.e.* tout ouvert admet un recouvrement par de domaines de cartes de coordonnées locales.

2.2 Exemples de Variétés différentiables

2.2.1 Sous-variétés de \mathbb{R}^n

Définition 2.2.1-1 : Une partie $S \subseteq \mathbb{R}^n$ est appelée « *sous-variété différentiable* » (et simplement « *sous-variété* » dans ce cours) de \mathbb{R}^n de dimension d , si pour tout $x \in S$ il existe un voisinage ouvert V_x est un difféomorphisme $\varphi : V_x \rightarrow \mathbb{R}^n$ tel que $\varphi(V_x \cap S) = \mathbb{R}^d \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$.



La famille de tous les couples $(V_x \cap S, \varphi|_{V_x \cap S})$ est un atlas (canonique) de variété différentiable pour S .

Remarque 2.2.1-1 : Les ouverts des sous-espaces affines de \mathbb{R}^n sont des sous-variétés. Une sous-variété de \mathbb{R}^m est toujours localement fermée et localement connexe (par arcs). Chaque composante connexe d'une sous-variété de dimension d est une sous-variété de même dimension.

Exercice 2.2.1-1 : Reprenons les notations de la définition ci-dessus. En composant φ avec la projection $p_2 : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d} \rightarrow \mathbb{R}^{n-d}$ qui associe $p_2 : (x, y) \mapsto y$, montrer qu'une sous-variété de dimension d de \mathbb{R}^n est, localement, l'image inverse d'un point par une submersion sur \mathbb{R}^{n-d} .

Exercice 2.2.1-2 : Les ouverts de \mathbb{R}^n sont les sous-variétés de \mathbb{R}^n de dimension n . Les parties discrètes (non nécessairement fermées) de \mathbb{R}^n sont les sous-variétés de \mathbb{R}^n de dimension 0.

Sous-variétés définies par des submersions

Soient $m \geq n \in \mathbb{N}$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, où U est un ouvert de \mathbb{R}^m , une application différentiable *submersive*, i.e. telle que l'application linéaire tangente $df_x : T_x(U) = \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ est surjective pour tout $x \in U$, ou, ce qui revient au même : telle que la matrice jacobienne

$$J_f(x) := \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right]_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m}},$$

est de rang n pour tout $x \in U$. Dans ce cas, le calcul différentiel (de licence) nous apprend que f est localement (par rapport à U) une projection. Ceci signifie que pour tout $x_0 \in U$, il existe un voisinage $V_{x_0} \subseteq U$, un voisinage $V_{f(x_0)} \subseteq \mathbb{R}^n$ et des difféomorphismes $\Psi_{x_0} : V_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $\Psi_{f(x_0)} : V_{f(x_0)} \rightarrow \mathbb{R}^n$, tels que la composition $\Psi_{f(x_0)} \circ f \circ \Psi_{x_0}^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ est la projection canonique

$$(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_n).$$

Notons $y_0 := f(x_0)$. On a donc $\Psi_{x_0}(f^{-1}(y_0) \cap V_{x_0}) = \{0\} \times \mathbb{R}^{m-n}$, ce qui correspond *très précisément* à la notion de sous-variété de \mathbb{R}^m . Dans un tel cas, la famille de *tous* les couples :

$$\left(f^{-1}(y_0) \cap V_{x_0}, \Psi_{x_0}|_{(f^{-1}(y_0) \cap V_{x_0})} \right),$$

définit une structure (canonique) de variété différentiable de dimension $(m - n)$ sur $M = f^{-1}(y_0)$.

Remarque 2.2.1-2 : On aura observé dans ce qui précède que le rang de f est supposé "maximal" en chaque point de l'ouvert U de définition de f . Dans la pratique il est inutile de vérifier cette condition sur U tout entier. En effet, le "théorème du rang" assure que le rang d'une application différentiable est une application (à valeurs dans \mathbb{N}) semi-continue *inférieurement*, ce qui signifie que les rangs d'une application f aux points voisins d'un point x_0 donné, majorent toujours $\text{rang}_f(x_0)$. En particulier, si $\text{rang}_f(x_0)$ est maximal, il en sera de même pour tous les points d'un certain voisinage de x_0 .

2.2.1-2.1 A retenir : Nous voyons donc que pour peu que $f : U \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ soit différentiable et submersive (de rang n) **en chaque point de $M = f^{-1}(y_0)$** , il existera un ouvert $W \subseteq U$ contenant M , tel que $f|_W$ est bien une submersion *en chaque point de W* . L'ensemble M sera alors une sous-variété de \mathbb{R}^m de dimension $m - n$.

Plus généralement, la définition même de sous-variété montre qu'une sous-variété de \mathbb{R}^n est une

partie qui se voit, localement, comme image inverse d'un point par une submersion (exercice 2.2.1-1).
 En particulier : Si dans le paragraphe précédent Y est une sous-variété de \mathbb{R}^n et f est submersive en tout point de $M = f^{-1}(Y)$, la partie M est une sous-variété de \mathbb{R}^m de dimension $m - n + \dim_{\mathbb{R}}(Y)$.

Exercice 2.2.1-3 : Soit $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ une surjection linéaire. Pour tout $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$, l'ensemble $f^{-1}(\vec{w})$ est une sous-variété de \mathbb{R}^m . Par conséquent toute sous-variété affine de \mathbb{R}^m est une sous-variété différentiable et possède une structure de variété différentiable.

Exercice 2.2.1-4 : Considérons une application $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ de la forme :

$$f(X_1, \dots, X_m) = \sum_{i=1}^m a_i X_i^{\varepsilon_i} \quad \text{où } \varepsilon_i \in \{1, 2\},$$

et notons $M_t := f^{-1}(t)$, pour chaque réel t .

Montrer que s'il existe i tel que $a_i \neq 0$ et $\varepsilon_i = 1$, M_t est une sous-variété pour tout $t \in \mathbb{R}$. Puis, en toute généralité, que si $t \neq 0$ et M_t n'est pas vide, c'est une sous-variété de \mathbb{R}^m de dimension $(m - 1)$.

En particulier les ellipsoïdes, hyperboloïdes, paraboloides sont des variétés différentiables.

Exercice 2.2.1-5 : Soit $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application différentiable. En considérant l'application $F : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par $F(x, y) = y - f(x)$. Montrer que $\text{Gr}(f) = F^{-1}(0)$ et que le graphe d'une application différentiable possède une structure canonique de variété différentiable.

Exercice 2.2.1-6 : Pour les parties suivantes de \mathbb{R}^2 :

$$M_0 = \{(t, \sin 1/t) \mid t \neq 0\} \quad M_1 = M_0 \cup \{(0, 0)\} \quad M_2 = M_0 \cup \{(0, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

préciser si elles sont localement fermées, localement connexes, des sous-variétés de \mathbb{R}^2 .

Exercice 2.2.1-7 : Soit $M(n; \mathbb{R})$ l'anneau des matrices à coefficients réels à n lignes et n colonnes.

- a) Notons $\text{GL}(n; \mathbb{R})$ le groupe (multiplicatif) des matrices de $M(n; \mathbb{R})$ de déterminant non nul. Montrer que $\text{GL}(n; \mathbb{R})$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n \times n}$.
- b) Notons $\text{SL}(n; \mathbb{R}) \subseteq \text{GL}(n; \mathbb{R})$ le sous-groupe des matrices de déterminant égal à un.

Soit $\det : M(n; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ l'application déterminant. En démontrant la formule

$$d(\det)_R(H) = \det(R) \text{tr}(R^{-1}H)$$

valable pour tout $R \in \text{GL}(n; \mathbb{R})$ et tout $H \in M(n; \mathbb{R})$ prouver que $\text{SL}(n; \mathbb{R})$ est une sous-variété de $M(n; \mathbb{R})$ de dimension $(n^2 - 1)$.

- c) Notons $O(n)$ le groupe des matrices orthogonales, *i.e.* les matrices A telles que $A \cdot {}^t A = \mathbf{1}$.

Soit maintenant $\text{Sym}(n; \mathbb{R}) \subseteq M(n; \mathbb{R})$, l'ensemble (sous-espace vectoriel) des matrices symétriques, *i.e.* telles que $A = {}^t A$. Soit $f : M(n; \mathbb{R}) \rightarrow \text{Sym}(n; \mathbb{R})$ l'application

$$f(A) := A \cdot {}^t A.$$

Montrez la formule :

$$df_A(H) = A \cdot {}^t H + H \cdot {}^t A,$$

pour tous $A, H \in M(n; \mathbb{R})$. En déduisez que f est une submersion en chaque point $A \in O(n)$ et que $O(n)$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n \times n}$ dont on précisera la dimension.

Indication : On doit prouver que pour toute matrice orthogonale $A \in O(n)$ et toute matrice symétrique S , il existe une matrice H telle que $S = A \cdot {}^t H + H \cdot {}^t A$, soit, telle que $S = {}^t(H \cdot {}^t A) + H \cdot {}^t A$; ce pour quoi il suffit de prendre $H = \frac{1}{2} S \cdot A$

- d) Montrer que $O(n)$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^{n \times n}$. Puis, en observant que le déterminant d'une matrice orthogonale est ± 1 , montrer que $O(n)$ possède exactement deux composantes connexes. On notera $SO(n; \mathbb{R}) := O(n) \cap SL(n; \mathbb{R})$.
- e) Expliciter $O(1)$ et $O(2)$.

Sous-variétés définies par des immersions

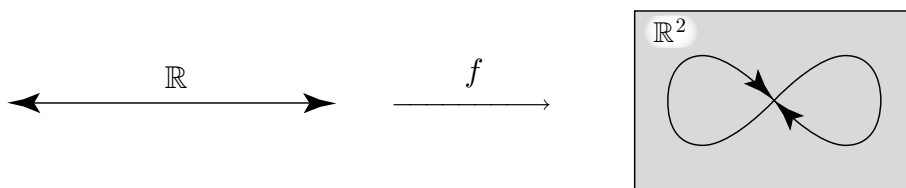
De manière analogue au cas précédent, soient $m \leq n \in \mathbb{N}$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, où U est un ouvert de \mathbb{R}^m , une application différentiable *immersiv*, i.e. telle que l'application linéaire tangente $df_x : T_x(U) = \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ est *injective* pour tout $x \in U$.

On démontre alors que pour tout $x_0 \in U$, il existe un voisinage $V_{x_0} \subseteq U$, un voisinage $V_{f(x_0)} \subseteq \mathbb{R}^n$ et des difféomorphismes $\Psi_{x_0} : V_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $\Psi_{f(x_0)} : V_{f(x_0)} \rightarrow \mathbb{R}^n$, tels que la composition $\Psi_{f(x_0)} \circ f \circ \Psi_{x_0}^{-1} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ est l'injection canonique :

$$(X_1, \dots, X_m) \mapsto (X_1, \dots, X_m, 0, \dots, 0).$$

On a donc $\Psi_{f(x_0)}(f(V_{x_0})) = \{0\} \times \mathbb{R}^{m-n}$, ce qui montre bien que $\Psi_{f(x_0)}(f(V_{x_0}))$ est une « sous-variété » de \mathbb{R}^n et possède donc une structure canonique de variété différentiable.

En faisant varier le point $x_0 \in \mathbb{R}^m$, les parties $f(V_{x_0})$ vont recouvrir l'ensemble $M := f(U)$ mais **il n'est pas vrai en général** que M soit une sous-variété de \mathbb{R}^n , et ceci même si cette image est fermée (voire compacte). L'illustration suivante en est un contre-exemple :



2.2.1-2 A retenir : La condition nécessaire et suffisante pour que l'image d'une immersion f soit une sous-variété, est que f soit un *homéomorphisme* sur son image (considérée munie de la topologie induite par l'espace ambiant \mathbb{R}^n).

Exercice 2.2.1-8 : Soit $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application différentiable. En considérant l'application $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ définie par $F(x) = (x, f(x))$. Montrer que F est bien une immersion et que $\text{Gr}(f) = F(\mathbb{R}^m)$. Montrer que l'application (ouverte) $p_1 : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est un inverse à gauche de F . En déduire que F est un homéomorphisme sur son image et redémontrez le fait que le graphe d'une application différentiable possède une structure canonique de variété différentiable.

2.2.2 Quotients de \mathbb{R}^n par des actions de groupes

Soit \mathbf{G} un groupe agissant (topologiquement) sur \mathbb{R}^n et notons $\mathbf{M} := \mathbb{R}^n/\mathbf{G}$. Supposons vérifiée la condition (b) caractérisant les actions proprement discontinues sans points fixes qui affirme l'existence, pour chaque point $x \in \mathbb{R}^n$, d'un voisinage V_x vérifiant la condition :

$$V_x \cap g \cdot V_x = \emptyset, \quad (*)$$

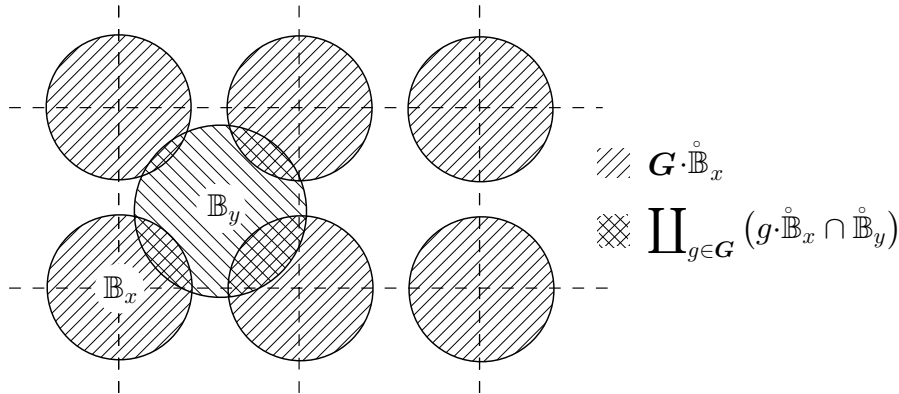
pour tout $g \in \mathbf{G}$ différent de l'élément neutre. Ceci signifie que la restriction de l'application canonique $\nu : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbf{M}$ à l'ouvert V_x est un plongement ouvert, *i.e.* un homéomorphisme entre V_x et son image (ouverte puisque ν est ouverte). Fixons maintenant, pour chaque $x \in \mathbb{R}^n$, une boule ouverte $\mathring{\mathbb{B}}_x$ centrée en x et contenue dans un voisinage vérifiant la condition (*). Pour chaque $x \in \mathbb{R}^n$, posons $U_x := \nu(\mathring{\mathbb{B}}_x)$ et $\psi_x : U_x \rightarrow \mathring{\mathbb{B}}_x$ l'application inverse de $\nu|_{\mathring{\mathbb{B}}_x}$. La famille $\{U_x\}_{x \in \mathbb{R}^n}$ est alors un recouvrement de \mathbf{M} .

Soient maintenant $x, y \in \mathbb{R}^n$ et étudions l'application :

$$\Psi_{y,x} = \psi_y \circ \psi_x^{-1} : \psi_x(U_x \cap U_y) \rightarrow \psi_y(U_x \cap U_y)$$

L'ensemble $\psi_x(U_x \cap U_y)$ est constitué des éléments de $\mathring{\mathbb{B}}_x$ dont la \mathbf{G} -orbite rencontre la boule $\mathring{\mathbb{B}}_y$; on a donc :

$$\psi_x(U_x \cap U_y) = \mathring{\mathbb{B}}_x \cap \mathbf{G} \cdot \mathring{\mathbb{B}}_y = \mathring{\mathbb{B}}_x \cap \left(\coprod_{g \in \mathbf{G}} g^{-1} \cdot \mathring{\mathbb{B}}_y \right) = \coprod_{g \in \mathbf{G}} (\mathring{\mathbb{B}}_x \cap g^{-1} \cdot \mathring{\mathbb{B}}_y).$$



En raisonnant de manière analogue pour $\psi_y(U_x \cap U_y)$, nous pouvons écrire :

$$\Phi_{y,x} : \coprod_{g \in \mathbf{G}} (\mathring{\mathbb{B}}_x \cap g^{-1} \cdot \mathring{\mathbb{B}}_y) \longrightarrow \coprod_{g \in \mathbf{G}} (g \cdot \mathring{\mathbb{B}}_x \cap \mathring{\mathbb{B}}_y)$$

d'où :

$$\Psi_{y,x}|_{(\mathring{\mathbb{B}}_x \cap g^{-1} \cdot \mathring{\mathbb{B}}_y)} = g|_{(\mathring{\mathbb{B}}_x \cap g^{-1} \cdot \mathring{\mathbb{B}}_y)},$$

où ' g ' désigne (par abus) à la fois : l'élément de \mathbf{G} et l'homéomorphisme de \mathbb{R}^n défini par l'action en cours.

On peut donc conclure que si \mathbf{G} opère sur \mathbb{R}^n par des homéomorphismes différentiables, les applications $\Psi_{y,x}$ seront également différentiables.

Ceci étant, fixons pour chaque $x \in \mathbb{R}^n$ un difféomorphisme $\theta_x : \mathring{\mathbb{B}}_x \rightarrow \mathbb{R}^n$ et posons $\varphi_x = \theta_x \circ \psi_x$. La famille $\mathcal{A} = \{(U_x, \varphi_x)\}_{x \in \mathbb{R}^n}$ est alors un atlas définissant une structure de variété différentiable sur \mathbb{R}^n/\mathbf{G} . En effet, la différentiabilité de $\phi_{y,x} = \varphi_y \circ \varphi_x^{-1}$ est équivalente à la différentiabilité de $\Psi_{y,x}$ puisque :

$$\phi_{y,x} = \theta_y \circ \Psi_{y,x} \circ \theta_x .$$

Remarque 2.2.2-1 : Les cartes de l'atlas \mathcal{A} que nous venons d'introduire dépendent évidemment des choix arbitraires qui sont intervenus lors de sa construction. On peut néanmoins vérifier que la famille de toutes les cartes, quels que soient les choix, constituent un atlas, canonique cette fois-ci, de variété différentiable sur \mathbf{M} . On référera à cette structure différentiable comme étant *la* structure de variété standard sur $\mathbf{M} := \mathbb{R}^n/\mathbf{G}$ (voir remarque 2.3-1.1).

Nous avons ainsi prouvé la proposition suivante.

Proposition 2.2.2-1 : *Soit \mathbf{G} un groupe agissant sur \mathbb{R}^n par des applications différentiables et supposons que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe un voisinage $V_x \ni x$ tel que*

$$V_x \cap g \cdot V_x = \emptyset ,$$

pour tout $g \in \mathbf{G}$ différent de l'élément neutre.

L'espace topologique quotient $\mathbf{M} = \mathbb{R}^n/\mathbf{G}$ admet alors une structure de variété différentiable canonique de dimension n .

De plus, \mathbf{M} est séparé, si et seulement si, l'action de \mathbf{G} est proprement discontinue sans point fixe.

Remarque 2.2.2-2 : Les tores \mathbb{T}^n , le ruban de Möbius, la bouteille de Klein possèdent des structures de variétés différentiables (séparées).

2.2.3 Espaces projectifs

Notons \mathbb{K} l'un des corps \mathbb{R} , \mathbb{C} , \mathbb{H} (corps de quaternions)⁽⁸⁾. L'espace projectif $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ est, du point de vue ensembliste, l'ensemble des droites vectorielles du \mathbb{K} -espace vectoriel \mathbb{K}^{n+1} .

⁸ Le corps de quaternions, introduit en 1843 par Hamilton, a été le premier exemple d'un corps non commutatif connu en mathématique. Il est obtenu comme extension algébrique de \mathbb{C} en introduisant une structure d'anneau (non commutatif) sur $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$. L'extension en question est déterminée sur les éléments : $\mathbf{1} = (1, 0)$, $\mathbf{i} = (i, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1)$, $\mathbf{k} = (0, i)$ en imposant les égalités :

$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1 = \mathbf{ijk} \tag{*}$$

La réalisation du corps de quaternions procède à partir de l'anneau $M(2, \mathbb{C})$ où l'on note \mathbb{H} le sous-ensemble

Notons \mathbb{K}^* le groupe multiplicatif des éléments non nuls de \mathbb{K} et faisons-le agir sur \mathbb{K}^{n+1} par multiplication (à gauche) de vecteurs. Il est immédiat de constater que l'application canonique $\nu : \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ qui associe à un vecteur non nul la droite \mathbb{K} -vectorielle qu'il engendre, est surjective et induit sur $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ la relation d'équivalence $\mathcal{R}_{\mathbb{K}^*}$. On a donc

$$\mathbb{P}_n(\mathbb{K}) \equiv \mathbb{K}^{n+1} / \mathbb{K}^*,$$

et l'on munit $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ de la topologie quotient.

Rappelons que $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$ et $\mathbb{H} \equiv \mathbb{R}^4$ et que les structures canoniques d'espace euclidien sur les espaces \mathbb{K}^n sont compatibles au produit, *i.e.*

$$\|t \cdot \vec{v}\| = |t| \|\vec{v}\|, \quad \text{pour tous } t \in \mathbb{K} \text{ et } \vec{v} \in \mathbb{K}^n.$$

Il s'ensuit donc que la restriction de ν à la sphère unité de \mathbb{K}^{n+1} est bien surjective et donc que $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ est un espace topologique quasi-compact. Sa compacité résultera alors de prouver qu'il est également séparé.

Or, la relation d'équivalence induite par ν sur la sphère unité de \mathbb{K}^{n+1} correspond très précisément à celle donnée par l'action du sous-groupe \mathbb{K}_u^* de \mathbb{K}^* des éléments de \mathbb{K} de "valeur absolue" égale à un. Ces ensembles sont respectivement les sphères unité de \mathbb{R} , \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^4 , *i.e.* $\{\pm 1\}$, \mathbb{S}^1 et \mathbb{S}^3 ⁽⁹⁾. On voit donc bien que les graphes des relations d'équivalence sur les sphères unités de \mathbb{K}^{n+1} sont compacts donc fermés; d'où la séparation de $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ d'après la proposition 1.3-2 et l'exercice 1.5-1.

La structure de variété différentiable sur $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ procède d'observer que pour chaque $i = 0, 1, \dots, n$, l'ensemble U_i des droites engendrées par des vecteurs $\vec{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tels que $x_i \neq 0$ est en bijection avec \mathbb{K}^n par l'application : $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{K}^n$, définie par ⁽¹⁰⁾

$$\varphi_i \left(\langle (x_0, \dots, x_i, \dots, x_n) \rangle \right) = \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right)$$

(\mathbb{R} -sous-espace vectoriel de dimension 4) des matrices de la forme :

$$\mathbf{x}(a, b) = \begin{bmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix},$$

pour tous $a, b \in \mathbb{C}$. On vérifie que \mathbb{H} est bien stable par les opérations d'anneau de $M(2, \mathbb{C})$, et en posant $\mathbf{1} = \mathbf{x}(1, 0)$, $\mathbf{i} = \mathbf{x}(i, 0)$, $\mathbf{j} = \mathbf{x}(0, 1)$, $\mathbf{k} = \mathbf{x}(0, i)$ les conditions (*) se trouvent vérifiées.

La relation :

$$|\mathbf{x}(a, b)| := \sqrt{\det(\mathbf{x}(a, b))} = \sqrt{|a|^2 + |b|^2}$$

montre que $|_$ est une "valeur absolue" pour \mathbb{H} (elle intervient dans démonstration du fait que tout élément non nul de \mathbb{H} est inversible).

⁹ Il convient de retenir le fait que \mathbb{K}_u^* est connexe uniquement dans les cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{H}$, ceci est à la base de l'orientabilité de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ et $\mathbb{P}_n(\mathbb{H})$ et de la non orientabilité de $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ pour n pair et différent de 0 (*cf.* 4.6.2-1)

¹⁰ Dans le cas des quaternions une fraction de la forme $\frac{a}{b}$ désignera dans ces notes l'élément $b^{-1}a$.

D'autre part, l'ensemble $U_i \subseteq \mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ est bien ouvert car son image inverse par ν est l'ensemble des points de $\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}$ dans le complémentaire de l'hyperplan $\{x_i = 0\}$. On réalise de cette manière $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ comme réunion des $n + 1$ ouverts U_0, U_1, \dots, U_n .

Montrons que la famille $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i=0, \dots, n}$ est un atlas de variété différentiable pour $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ de dimension :

$$\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{P}_n(\mathbb{K})) = n \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{K})$$

Pour $i \neq j$, l'ouvert $U_{ij} = U_i \cap U_j$ est l'ensemble des droites vectorielles engendrées par des vecteurs dont les coordonnées d'indices i et j sont *toutes les deux* non nulles. Supposons $i < j$. L'ensemble $V_{i,j}^n = \varphi_i(U_{ij})$ est alors l'ensemble de n -uplets (y_1, \dots, y_n) tels que $y_{j-1} \neq 0$ et $V_{j,i}^n = \varphi_j(U_{ij})$ celui des (y_1, \dots, y_n) tels que $y_i \neq 0$. L'application de transition $\phi_{ji} : V_{i,j}^n \rightarrow V_{j,i}^n$ est alors la suivante :

$$(y_1, \dots, y_n) \xrightarrow{\varphi_i^{-1}} \langle (y_1, \dots, y_{i-1}, 1, y_{i+1}, \dots, y_n) \rangle \xrightarrow{\varphi_j} \left(\frac{y_1}{y_j}, \dots, \frac{y_{i-1}}{y_j}, \frac{1}{y_j}, \frac{y_{i+1}}{y_j}, \dots, \widehat{\frac{y_j}{y_j}} = 1, \dots, \frac{y_n}{y_j} \right)$$

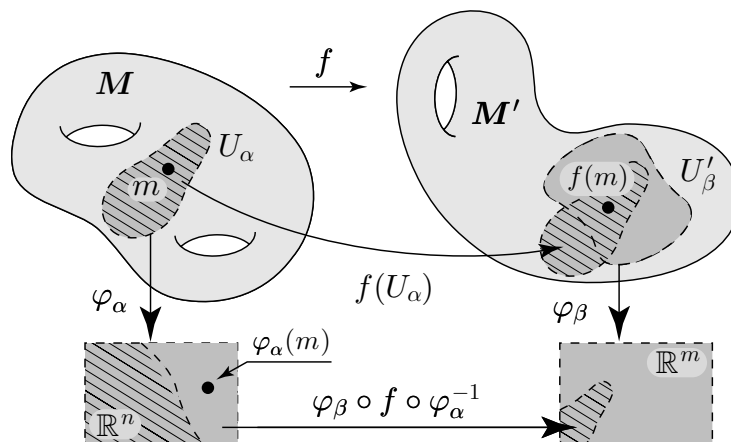
(où le terme sous le chapeau est à omettre). Les applications ϕ_{ji} sont donc bien différentiables et \mathcal{A} est un atlas de variété différentiable pour $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 2.2.3-1 : Prouver l'existence de difféomorphismes :

$$\mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \sim \mathbb{S}^1 \quad \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \sim \mathbb{S}^2 \quad \mathbb{P}_1(\mathbb{H}) \sim \mathbb{S}^4.$$

2.3 Morphismes entre variétés différentiables

Définition 2.3-1 : Soient (M, \mathcal{A}) et (M', \mathcal{A}') deux variétés différentiables. Une application *continue* $f : M \rightarrow M'$ est dite « *morphisme de variétés* » si pour chaque point $m \in M$ il existe des cartes $(U_\alpha, \varphi_\alpha) \in \mathcal{A}$ et $(U'_\beta, \varphi_\beta) \in \mathcal{A}'$ telles que $m \in U_\alpha$, $f(m) \in U'_\beta$ et telles que l'application composée $\varphi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ (définie sur un voisinage de $\varphi_\alpha(m)$) soit différentiable.



Les concepts habituels de «rang d'un morphisme en un point, immersion, submersion, morphisme étal, difféomorphisme, etc.» habituels en calcul différentiel sur les espaces vectoriels \mathbb{R}^n gardent bien évidemment un sens dans le cadre des variétés différentiables.

Lemme 2.3-1 :

- a) L'application identique sur une variété différentiable est un morphisme.
 b) La composition de morphismes est encore un morphisme.

Exercice 2.3-1 : Soit (M, \mathcal{A}) une variété différentiable et $h : M \rightarrow M$ un homéomorphisme de l'espace topologique sous-jacent. Notons $h \cdot \mathcal{A}$ l'atlas sur M dont les cartes sont de la forme $(h(U_\alpha), \varphi_\alpha \circ h^{-1})$. L'application $h : (M, \mathcal{A}) \rightarrow (M, h \cdot \mathcal{A})$ est alors tautologiquement un difféomorphisme.

Montrer que les atlas \mathcal{A} et $h \cdot \mathcal{A}$ sont compatibles, si et seulement si, l'application $h : (M, \mathcal{A}) \rightarrow (M, h \cdot \mathcal{A})$ est un difféomorphisme de variétés.

2.3-1 Variétés homéomorphes non difféomorphes : La correspondance $\mathcal{A} \mapsto h \cdot \mathcal{A}$ du dernier exercice définit une action du groupe $\text{Homéom}(M)$ sur l'ensemble des structures différentiables de l'espace topologique M . Une orbite pour cette action est très précisément un ensemble maximal de structures différentiables sur M deux-à-deux *difféomorphes*. L'exercice précédent montre que le stabilisateur d'une structure (M, \mathcal{A}) est le sous-groupe $\text{Difféom}(M, \mathcal{A}) \subseteq \text{Homéom}(M)$. L'ensemble $\text{Homéom}(M) / \text{Difféom}(M, \mathcal{A})$ paramètre donc l'ensemble des structures différentiables sur M difféomorphes à (M, \mathcal{A}) .

La subtilité dans ces considérations vient du fait que l'action de $\text{Homéom}(M)$ sur l'ensemble des structures différentiables sur M **n'est pas transitive**, *i.e.* un espace topologique **peut admettre des structures de variété différentiable non difféomorphes** comme l'a montré Milnor en 1956 pour la sphère S^7 et comme semble être également le cas pour \mathbb{R}^4 (*cf.* [A-M-R] page 126).

Il conviendra donc d'être précis et prudent dans la pratique lorsque, après avoir muni par des procédés divers un espace topologique de structures de variété différentiable, on affirmera qu'il s'agit bien de la "même" structure.

Remarque 2.3-1.1 : Dans ce cours, les \mathbb{R} -espaces vectoriels \mathbb{R}^n seront considérés munis de leur structure de variété différentiable *standard*, *i.e.* celle dont l'atlas complet contient la carte $(\mathbb{R}^n, \text{id})$. Également, toute sous-variété de \mathbb{R}^n le sera relativement à cette structure standard, d'où une structure de variété différentiable dite *standard* pour les sous-variétés de \mathbb{R}^n .

Plus généralement, si V est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie d , l'ensemble des cartes de la forme (V, φ) , où φ est un *isomorphisme \mathbb{R} -linéaire* de V sur \mathbb{R}^d constitue bien un atlas de variété pour V . La structure standard de variété de V est, par définition, celle donnée par cet atlas. (A la rigueur une seule de ces cartes suffirait, mais la définition perdrait alors de son caractère intrinsèque.)

Signalons pour terminer que toute variété différentiable connexe de dimension 1 est difféomorphe à \mathbb{R} ou à S^1 (munis de leur structure standard) (*cf.* [Mil]).

2.3.1 Fonctions sur les variétés différentiables

Définition 2.3.1-1 : Soit M une variété, on appelle «fonction sur M » tout morphisme de M à valeurs dans la variété \mathbb{R} . On note $\mathcal{C}^\infty(M)$ l'ensemble des fonctions sur M .

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(M)$, on appelle « *support de f* » et on le note $|f|$, l'adhérence de l'ensemble des $x \in M$ tels que $f(x) \neq 0$. On notera alors $\mathcal{C}_c^\infty(M)$ l'ensemble des fonctions sur M à supports compacts.

Exercice 2.3.1-1 : Montrer que sur toute variété les applications constantes sont des fonctions. Montrer que somme et produit de deux fonctions sont des fonctions et donc que $\mathcal{C}^\infty(M)$ est une \mathbb{R} -algèbre avec identité multiplicative.

Discuter chacune des assertions précédentes pour les fonctions à supports compacts sur une variété *non compacte*.

Proposition 2.3.1-1 : Soit M une sous-variété de \mathbb{R}^n . Les fonctions de M sont les restrictions des fonctions différentiables définies sur les voisinages ouverts de M dans \mathbb{R}^n et mutatis mutandis pour les fonctions à support compact.

Démonstration : Soient $W \subseteq \mathbb{R}^n$ un voisinage ouvert de M (supposée de dimension d) et $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Toute carte de l'atlas de définition de la structure de variété de M provient de la restriction d'un difféomorphisme $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ à $M \cap U$ tel que $\varphi(M \cap U) = \mathbb{R}^d \times \{0\}$. Dans un tel cas nous devons étudier la différentiabilité de l'application $f \circ \varphi^{-1}|_{\mathbb{R}^d \times \{0\}}$. Or, $f \circ \varphi^{-1}$ est définie sur le voisinage $\varphi(U \cap W) \subseteq \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d}$ de $\mathbb{R}^d \times \{0\}$ et est différentiable car composée des applications différentiables ; sa restriction au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}^d \times \{0\}$ est donc également différentiable. Comme ces raisonnements sont valables pour toute carte de l'atlas de définition, l'application f est bien une fonction de la variété M .

Réciproquement, soit $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. En reprenant les notations du paragraphe précédent, la fonction $f \circ (\varphi|_{M \cap U})^{-1}$ est différentiable sur $\mathbb{R}^d \times \{0\}$. Notons

$$F_\varphi := f \circ (\varphi|_{M \cap U})^{-1} \circ p_d^n,$$

où $p_d^n : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{n-d} \rightarrow \mathbb{R}^d \times \{0\}$ est la projection canonique $p_d^n : (x_1, \dots, x_d, x_{d+1}, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_d, 0, \dots, 0)$. L'application F_φ est clairement différentiable et sa restriction à $\mathbb{R}^d \times \{0\}$ coïncide avec $f \circ (\varphi|_{M \cap U})^{-1}$. Posons $F_U = F_\varphi \circ \varphi$, c'est une fonction différentiable définie sur $U \subseteq \mathbb{R}^n$ dont la restriction à $U \cap M$ est précisément f .

Ces raisonnements montrent bien que les fonctions de M se prolongent *localement par rapport aux points de M* en des fonctions différentiables définies sur des ouverts de \mathbb{R}^n ; il existe, par conséquent, un recouvrement $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ de M par des ouverts de \mathbb{R}^n sur lesquels f admet des prolongements différentiables F_{U_α} . Soit $\{\rho_\beta\}_{\beta \in \mathfrak{B}}$ une partition de l'unité à supports compacts⁽¹¹⁾ de l'ouvert $\cup_{\alpha \in \mathfrak{A}} U_\alpha$ subordonnée à \mathcal{U} et choisissons pour chaque $\beta \in \mathfrak{B}$ un indice $\alpha(\beta) \in \mathfrak{A}$ tel que $|\rho_\beta| \subseteq U_{\alpha(\beta)}$. La somme $\sum_{\beta \in \mathfrak{B}} \rho_\beta F_{U_{\alpha(\beta)}}$ est alors localement finie et définit bien une fonction différentiable F (dont le domaine est, par ailleurs, \mathbb{R}^n tout entier).

Lorsque f est à support compact on pourra se limiter à une famille *finie* de fonctions de partition et la fonction F sera elle aussi à support compact. ■

Remarque 2.3.1-1 : La démonstration précédente montre que l'application de restriction de $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ (resp. de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$) à $C^\infty(M)$ (resp. de $\mathcal{C}_c^\infty(M)$) est bien définie et *surjective*.

Exercice 2.3.1-2 : Soient $M \subseteq \mathbb{R}^m$ et $N \subseteq \mathbb{R}^n$ deux sous-variétés. Notons $\text{Mor}_{M,N}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des applications différentiables $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, telles que $f(M) \subseteq N$. En utilisant les idées de la démonstration de la proposition 2.3.1-1, montrer que le morphisme de restriction $f \mapsto f|_M$ est bien défini et est *surjectif* de $\text{Mor}_{M,N}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ sur l'ensemble $\text{Mor}(M, N)$ des morphismes de variétés de M vers N .

¹¹ Voir la section 4.1.

Exercice 2.3.1-3 : Soit G l'un des groupes déjà introduits dans l'exercice 2.2.1-7 : $GL(n, \mathbb{R})$, $SL(n, \mathbb{R})$ et $O(n)$. Montrer pour chacun de ces groupes que $G \times G$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^{n \times n}$, puis que l'application

$$\cdot : G \times G \longrightarrow G$$

est un morphisme de variétés.

De même, l'exercice 2.2.3 a mis en évidence les structures de groupes sur les variétés : $\mathbb{S}^0(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_u^*$, $\mathbb{S}^1(\mathbb{R}) = \mathbb{C}_u^*$ et $\mathbb{S}^3(\mathbb{R}) = \mathbb{H}_u^*$. Répondre à la question précédente pour ces groupes.

2.4 La catégorie des variétés différentiables

Les définitions précédentes de « variétés différentiables » et de « morphismes » constituent une catégorie que nous noterons Diff.

Pour M et N , deux variétés différentiables, on note $\text{Mor}(M, N)$ l'ensemble des morphismes de variétés. On notera $\text{Difféom}(M)$ le groupe des éléments inversibles de $\text{Mor}(M, M)$.

Notation 2.4-1 : On notera par $M \sim N$, l'existence d'un difféomorphisme entre deux variétés M et N , et par $M \equiv N$: l'existence d'un difféomorphisme *canonique*.

Proposition 2.4-1 : Soit M une variété différentiable connexe. Le groupe $\text{Difféom}(M)$ opère transitivement sur M .

Démonstration : Supposons $m = \dim_{\mathbb{R}}(M)$. L'idée est de montrer que sur \mathbb{R}^m l'orbite passant par 0 du sous-groupe de $\text{Difféom}(\mathbb{R}^m)$ des applications qui fixent les points extérieurs à $[-1, 1]^m$, contient l'ensemble $[-1/2, 1/2]^m$; ce pour quoi il suffit de raisonner par récurrence à partir de la dimension 1 où l'assertion se démontre de manière élémentaire. Or, sur chaque carte de coordonnées $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ de M , un difféomorphisme qui fixe tous les points extérieurs à $\varphi^{-1}([-1/2, 1/2]^m)$ se prolonge (par id) à un élément de $\text{Difféom}(M)$. La conséquence de cette remarque est que les orbites de $\text{Difféom}(M)$ dans M sont *ouvertes* (donc fermées). Il s'ensuit que si M est connexe l'action de $\text{Difféom}(M)$ est bien transitive. ■

Exercice 2.4-1 : Soit M une variété différentiable de dimension *supérieure ou égale* à deux, et soit \mathbb{D} une partie fermée et discrète de M .

- 1) Montrer que $M \setminus \mathbb{D}$ est connexe (par arcs).
- 2) Prouver que le groupe $\text{Difféom}_{\mathbb{D}}(M)$ des difféomorphismes de M qui fixent l'ensemble \mathbb{D} opère transitivement sur $M \setminus \mathbb{D}$.
- 3) En déduire que si M est une variété différentiable, l'action de $\text{Difféom}(M)$ est r -transitive, pour tout $r \in \mathbb{N}$. (*Indication : Par induction sur r .*)

2.5 Sous-variétés d'une variété différentiable

Soit M une variété différentiable de dimension m . Une partie $N \subseteq M$ est dite une « sous-variété de M de dimension n », si pour tout point $x \in N$ il existe une carte $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ (dans l'atlas complet de M) telle que $x \in U_\alpha$ et $\varphi_\alpha(N \cap U_\alpha)$ s'identifie au sous-espace $\mathbb{R}^n \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^m$.

Notons $p_n^m : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ la projection canonique : $p_n^m(x_1, \dots, x_m) \mapsto (x_1, \dots, x_n)$. On vérifie alors que la famille $\mathcal{B} = \{(U_\alpha \cap N, p_n^m \circ \varphi_\alpha)\}$, de telles cartes constitue bien un atlas pour N . La structure de variété différentiable ainsi obtenue sur N est « la structure de variété induite par M ».

Remarque 2.5-1 : Une condition nécessaire pour qu'une partie $N \subseteq M$ puisse être une sous-variété est qu'elle soit localement fermée.

Un ouvert de M est (trivialement) une sous variété de dimension m de M , de même, par ailleurs, que toute partie discrète (non nécessairement fermée).

Exercice 2.5-1 : En procédant de manière analogue au cas des sous-variétés de \mathbb{R}^n , considérons un morphisme entre deux variétés :

$$f : M \rightarrow N.$$

- a) Montrer que si f est un morphisme *submersif* et si $y \in \text{im}(f) \subseteq N$. L'ensemble $f^{-1}(y)$ est une sous-variété fermée de M .
- b) Montrer que si f est un morphisme *immersif* qui établit un *homéomorphisme* entre M et son image, l'ensemble $f(M)$ est une sous-variété de N . En particulier, si M est compacte, l'image de toute immersion de M dans N est bien une sous-variété de N .

Exercice 2.5-2 : Généraliser les assertions de la proposition 2.3.1-1 et de l'exercice 2.3.1-2 en remplaçant \mathbb{R}^m et \mathbb{R}^n par des variétés différentiables.

2.6 Variété produit

Soient (M, \mathcal{A}) et (N, \mathcal{B}) deux variétés différentiables avec $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \alpha)\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ et $\mathcal{B} = \{(U_\beta, \beta)\}_{\beta \in \mathfrak{B}}$. Notons $\mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B}$ la famille $\{(U_\alpha \times U_\beta, \alpha \times \beta)\}_{(\alpha, \beta) \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}}$. L'égalité ensembliste $(U_\alpha \times U_\beta) \cap (U_{\alpha'} \times U_{\beta'}) = (U_\alpha \cap U_{\alpha'}) \times (U_\beta \cap U_{\beta'})$ permet alors de définir les applications de transition en posant :

$$\phi_{(\alpha', \beta'), (\alpha, \beta)} = \phi_{\alpha', \alpha} \times \phi_{\beta', \beta},$$

d'où un atlas canonique sur $\mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B}$ pour l'espace topologique (produit) $M \times N$.

On appelle « *variété produit* » de (M, \mathcal{A}) et (N, \mathcal{B}) la variété $(M \times N, \mathcal{A} \boxtimes \mathcal{B})$.

Les projections canoniques :

$$\begin{array}{ccc} \pi_N : M \times N \longrightarrow N & \text{et} & \pi_M : M \times N \longrightarrow M \\ (m, n) \longmapsto n & & (m, n) \longmapsto m \end{array}$$

sont alors des morphismes submersifs de variétés. Les injections canoniques :

$$\begin{array}{ccc} \sigma_{m_0} : N \longrightarrow M \times N & \text{et} & \tau_{n_0} : M \longrightarrow M \times N \\ n \longmapsto (m_0, n) & & m \longmapsto (m, n_0) \end{array}$$

sont des immersions fermées (des plongements) de variétés pour tous $(m_0, n_0) \in M \times N$.

Remarque 2.6-1 : On observera que la structure standard de variété différentiable de \mathbb{R}^n coïncide avec la structure de variété produit associée à toute "mise en facteurs" : $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{n_i}$ (où $n = n_1 + \cdots + n_i$).

Exercice 2.6-1 : Soit M une variété différentiable et notons Δ_M la "diagonale de $M \times M$ ", *i.e.* l'ensemble des couples de la forme (x, x) pour $x \in M$. Montrer que Δ_M est une sous-variété de $M \times M$.

Exercice 2.6-2 Produit fibré de variétés : Soient $f : M \rightarrow B$ et $\pi : P \rightarrow B$ deux morphismes de variétés et supposons π **submersif**. Notons $M \times_{f,\pi} P$ le sous-ensemble de $M \times P$ des couples (m, p) tels que $f(m) = \pi(p)$. Soit $f \times \pi : M \times P \rightarrow B \times B$ le morphisme de variétés $(m, p) \mapsto (f(m), \pi(p))$.

a) Montrer que $(f \times \pi)^{-1}(\Delta_B)$ est une sous-variété différentiable de $M \times P$.

Indication : Pour chaque carte de coordonnées (U, φ) de B , on considère la carte $(U \times U, \varphi \times \varphi)$ de $B \times B$. Soit $\xi_\varphi : U \times U \rightarrow \mathbb{R}$ l'application $\xi_\varphi(a, b) = \varphi(a) - \varphi(b)$. Cette application est **submersive** et $\Delta_B \cap (U \times U) = \xi_\varphi^{-1}(0)$. En vous servant du fait que π est submersive, montrer que $\zeta_\varphi = \xi_\varphi \circ (f \times \pi)$ est submersive et que $\zeta_\varphi^{-1}(0) = (M \times_{f,\pi} P) \cap ((f \times \pi)^{-1}(U \times U))$. Conclure.

b) Montrer l'égalité ensembliste $M \times_{f,\pi} P = \coprod_{m \in M} \pi^{-1}(f(m))$ qui montre que $M \times_{f,\pi} P$ est un "recollement différentiable de fibres" de π .

c) Notons \bar{f} et $\bar{\pi}$ les restrictions à $M \times_{f,\pi} P$ des projections canoniques $M \times P \rightarrow P$ et $M \times P \rightarrow M$, respectivement. On a alors un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} M \times_{f,\pi} P & \xrightarrow{\bar{f}} & P \\ \bar{\pi} \downarrow & & \downarrow \pi \\ M & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

Montrer que les applications \bar{f} et $\bar{\pi}$ sont des morphismes de variétés et que $\bar{\pi}$ est submersif.

d) Montrer que pour tout $m \in M$, les ensembles $\bar{\pi}^{-1}(m)$ et $\pi^{-1}(f(m))$ sont des sous-variétés de $M \times_{f,\pi} P$ et P respectivement et que $\bar{f}|_{\bar{\pi}^{-1}(m)} : \bar{\pi}^{-1}(m) \rightarrow \pi^{-1}(f(m))$ est un difféomorphisme.

2.7 Variétés quotients

Le résultat suivant concerne le problème de l'existence d'une structure de variété sur le quotient d'une variété différentiable; il est dû à Godement et le lecteur pourra consulter sa démonstration dans [God₁,Pha,A-M-R].

Théorème 2.7-1 [Godement] : Soient M une variété différentiable et \mathcal{R} une relation d'équivalence sur M . Les assertions suivantes sont équivalentes.

a) L'espace topologique quotient M/\mathcal{R} admet une structure de variété différentiable (et une seule) telle que la projection canonique $M \rightarrow M/\mathcal{R}$ est une submersion.

b) Le graphe $\text{Gr}(\mathcal{R}) \subseteq M \times M$ est une sous-variété de la variété produit $M \times M$ et la restriction de la projection canonique $p_1 : M \times M \rightarrow M$ à $\text{Gr}(\mathcal{R})$ est une submersion.

Dans ces cas, la dimension de M/\mathcal{R} vaut $(2 \dim_{\mathbb{R}}(M) - \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{R}))$.

Remarque 2.7-1 : On exige souvent dans l'énoncé (b) du théorème que \mathcal{R} soit une sous-variété fermée de $M \times M$. Cette donnée supplémentaire n'est utile que pour garantir la *séparation* de l'espace topologique quotient.

Exercice 2.7-1 : Soient M une variété différentiable séparée et G un groupe agissant par des difféomorphismes de façon proprement discontinue et sans point fixe sur M .

Appliquer le théorème de Godement pour prouver l'existence d'une structure de variété différentiable sur le quotient M/G . Puis, montrer que lorsque $M = \mathbb{R}^n$, la structure ainsi obtenue doit nécessairement coïncider avec celle introduite dans la section 2.2.2.

2.8 Groupes de Lie

Définition 2.8-1 : On appelle « *groupe de Lie* » la donnée d'un groupe G muni d'une structure de variété différentiable telle que l'application :

$$\begin{aligned} \mu : G \times G &\longrightarrow G \\ (g, h) &\longmapsto gh \end{aligned} \tag{\diamond}$$

soit un morphisme de variétés.

Remarque 2.8-1 : Dans la catégorie des espaces topologiques, où les morphismes sont les applications continues, on définit un « *groupe topologique* » de la même manière mais on exige également que l'application $g \mapsto g^{-1}$ soit un morphisme. Cette condition est automatiquement vérifiée par les groupes de Lie (qui sont donc également des groupes topologiques).

En effet, une des conséquences immédiates de la définition est que pour tout $g \in G$, l'application $\gamma_g : G \rightarrow G$ qui fait correspondre $\gamma_g : h \mapsto gh$, est un difféomorphisme de G . Ceci découle immédiatement de la définition de structure produit puisque alors on a la décomposition $\gamma_g = \mu \circ \sigma_g$ (voir la section 2.6) qui montre que γ_g est un morphisme de variétés. Comme par ailleurs γ_g a comme inverse $\gamma_{g^{-1}}$ qui est également un morphisme, il s'ensuit que $\gamma_g \in \text{Difféom}(G)$.

Cela étant, la décomposition $\gamma_g = \mu \circ \sigma_g$, prouve la submersivité de μ . En particulier, l'ensemble $\mu^{-1}(e)$, où e désigne l'élément neutre de G , sera une sous-variété de $G \times G$, et comme $\mu^{-1}(e)$ est précisément le graphe de l'application $g \mapsto g^{-1}$, cette dernière est nécessairement un morphisme de variétés.⁽¹²⁾

Exemples 2.8-1 :

- Les variétés différentiables \mathbb{R}^m munies de leur structure de groupe additif sont des groupes de Lie.
- Nous avons introduit dans l'exercice 2.2.1-7 des structures de variétés différentiables sur les groupes $GL(n, \mathbb{R})$, $SL(n, \mathbb{R})$, $O(n)$, $SO(n)$. Chacun de ces exemples est une sous-variété de $M(n, \mathbb{R})$ et leur opération de groupe est restriction de l'opération de produit de matrices qui est différentiable; ces groupes, munis des structures de variétés en question, sont donc des groupes de Lie.
- Dans le même ordre d'idées, les groupes $\mathbb{R}_u^* = \mathbb{S}^0 = \{\pm 1\}$, $\mathbb{C}_u^* = \mathbb{S}^1$ et $\mathbb{H}_u^* = \mathbb{S}^3$ que nous avons mis en évidence lors de l'introduction des espaces projectifs (cf. 2.2.3) sont des groupes de Lie.

¹² On utilise le fait qui affirme qu'une involution $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est différentiable, si et seulement si, son graphe est une sous-variété de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Voici maintenant une généralisation des actions proprement discontinues sans points fixes. On supposera les variétés séparées.

Définition 2.8-2 : On dira qu'un «*groupe de Lie G agit sur une variété différentiable M* » lorsque l'on se donne un homomorphisme de groupes $\rho : G \rightarrow \text{Difféom}(M)$ telle que l'application :

$$\begin{aligned} \mu : G \times M &\longrightarrow M \\ (g, x) &\longmapsto \rho(g)(x) \end{aligned}$$

est un morphisme des variétés.

Les exercices et remarques suivants sont à la base de la théorie des groupes de Lie.

Exercice 2.8-1 : Soit M une variété différentiable munie d'une action du groupe de Lie $(\mathbb{R}, +, 0)$.

a) Pour tout $m \in M$, posons $\mu_m : \mathbb{R} \rightarrow M$ le morphisme défini par $\rho_m(t) = t \cdot m$. Montrer l'équivalence des assertions suivantes :

- 1) μ_m n'est pas une immersion en $0 \in \mathbb{R}$.
- 2) μ_m n'est immersive en aucun point de \mathbb{R} . L'application μ_m est donc constante et l'orbite $\mathbb{R} \cdot m$ est réduite à un point.

En particulier, si l'action de \mathbb{R} est libre, l'application μ_m est une immersion injective.

b) Généraliser ce qui précède en montrant que si $(\mathbb{R}^n, +, 0)$ agit librement sur M , ces orbites sont des images d'immersions injectives de \mathbb{R}^n .

Indication : Montrer que si μ_m n'était pas immersive en $x \in \mathbb{R}^n$, elle ne serait pas immersive en 0. Il existerait alors une droite vectorielle $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{R}^n$ telle que $\mu_m|_{\mathbb{L}}$ ne serait pas non plus immersive en 0. Appliquer la question (a) pour conclure que l'action de \mathbb{R}^n ne pourrait être libre.

Remarque 2.8-1.1 Groupes à un paramètre : Dans le dernier exercice, ce qui permet la généralisation de la question (a) à (b), c'est bien le fait que toute droite vectorielle est un sous-groupe et une sous-variété de \mathbb{R}^n . Plus précisément ce qui est utilisé c'est le fait que lorsque l'on considère pour chaque paramétrage linéaire $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{L}$ d'une droite vectorielle \mathbb{L} , le vecteur $\gamma'(0)$, l'ensemble de tous les vecteurs ainsi obtenus est précisément \mathbb{R}^n tout entier. Ceci relève du fait général suivant (théorème 2.8-1.1.1) pour les groupes de Lie.

Définition 2.8-1.1.1 : Soit G un groupe de Lie, on appelle «*groupe à un paramètre*» la donnée d'un homomorphisme de groupes $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow G$ qui soit également un morphisme de variétés.

Le résultat suivant joue un rôle important dans la partie élémentaire de la théorie des groupes de Lie ; on pourra consulter [God₁] ou [Pha] pour la démonstration.

Théorème 2.8-1.1.1 : Soient G un groupe de Lie de dimension d et $\Gamma(G)$ l'ensemble des groupes à un paramètre de G . Soit (U, φ) une carte arbitraire de G autour de son élément neutre et considérons l'application $\theta_\varphi : \Gamma(G) \rightarrow \mathbb{R}^d$ définie par $\gamma \mapsto (\varphi \circ \gamma)'(0)$. L'application θ_φ est bijective.

Utilisez ce résultat dans l'exercice suivant.

Exercice 2.8-2 : Soit \mathbf{G} un groupe de Lie agissant *librement* sur une variété différentiable \mathbf{M} . Montrer que quel que soit $m \in \mathbf{M}$, l'application $\mu_m : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{M}$, définie par $g \mapsto g \cdot m$, est une immersion. En particulier, si \mathbf{G} est *compact* ses orbites dans \mathbf{M} sont des sous-variétés de \mathbf{M} diffeomorphes à \mathbf{G} .

Théorème 2.8-2 [Godement] : Soit \mathbf{G} un groupe de Lie compact agissant librement ⁽¹³⁾ sur une variété différentiable \mathbf{M} . Il existe alors une et une seule structure de variété différentiable sur l'espace quotient \mathbf{M}/\mathbf{G} telle que la projection canonique $\mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}/\mathbf{G}$ est une submersion de variétés.

Démonstration : Nous allons vérifier les conditions sur le graphe de la relation $\mathcal{R}_{\mathbf{G}}$ exigées dans le théorème 2.7-1.

Le graphe en question est précisément l'image du morphisme :

$$\begin{aligned} \Gamma : \mathbf{G} \times \mathbf{M} &\longrightarrow \mathbf{M} \times \mathbf{M} \\ (g, x) &\longmapsto (gx, x) \end{aligned}$$

et comme \mathbf{G} est compact, cette application est propre donc fermée. L'ensemble $\text{Gr}(\mathbf{R})$ est par conséquent une partie fermée de $\mathbf{M} \times \mathbf{M}$ et sera une sous-variété de $\mathbf{M} \times \mathbf{M}$ si Γ est immersive. Or, Γ est une immersion en (g, m) , si et seulement si, elle l'est en (e, m) , ceci parce que le morphisme $\gamma_g \times \text{id}_{\mathbf{M}} : \mathbf{G} \times \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{G} \times \mathbf{M}$ est un difféomorphisme qui échange l'étude différentielle de Γ autour de (g, m) par celle autour du point (e, m) . Cela étant, et en prenant si besoin des cartes, nous aurons à étudier les solutions de l'équation :

$$d\Gamma_{e,m}(X, L) = \frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{G}}(e, m)(X) + \frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{M}}(e, m)(L) = 0 \quad (\ddagger)$$

mais comme $\frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{G}}(e, m)(X)$ est de la forme $(*, 0)$ et que $\frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{M}}(e, m)(L) = (*, L)$, on conclut que nécessairement $L = 0$ et alors l'équation (\ddagger) devient simplement $\frac{\partial \Gamma}{\partial \mathbf{G}}(e, m)(X) = (0, 0)$. Or, lorsque l'on fixe $m \in \mathbf{M}$, la dérivée partielle en question sera nulle, si et seulement si, l'application $\mu_m : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{M}$, définie par $\mu_m(g) = g \cdot m$, n'est pas immersive en $e \in \mathbf{G}$. L'exercice 2.8-2 nous dit alors que cela est impossible du fait de la liberté de l'action de \mathbf{G} .

Le graphe $\text{Gr}(\mathcal{R}_{\mathbf{G}})$ est donc bien une sous-variété fermée de $\mathbf{M} \times \mathbf{M}$.

Montrons maintenant que la restriction de la projection canonique $p_1 : \mathbf{M} \times \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}$, à $\text{Gr}(\mathcal{R}_{\mathbf{G}})$ est une submersion. Il suffira en fait de voir que la composition $p_1 \circ \Gamma : \mathbf{G} \times \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}$ l'est. Or, cette application associe $p_1 \circ \Gamma : (g, m) \mapsto m$ de sorte que la submersivité est évidente. ■

2.8.1 Somme amalgamée de variétés différentiables

Soient \mathbf{M} et \mathbf{N} deux variétés différentiables (séparées pour simplifier) **de même dimension $d > 0$** . Fixons deux points $m_0 \in \mathbf{M}$ et $n_0 \in \mathbf{N}$ et des cartes de coordonnées (V_{m_0}, φ_{m_0}) et (V_{n_0}, φ_{n_0}) respectivement dans \mathbf{M} et \mathbf{N} , vérifiant :

$$m_0 \in V_{m_0}, \quad \varphi_{m_0}(V_{m_0}) = \mathbb{R}^d \quad \text{et} \quad \varphi_{m_0}(m_0) = \mathbf{0},$$

¹³ On dit qu'un groupe agit « librement » sur un ensemble \mathbf{M} lorsque, quel que soit $x \in \mathbf{M}$, l'égalité $g \cdot x = x$ n'a lieu que pour $g = e$.

et *mutatis mutandis* pour N . (On considère \mathbb{R}^d muni de sa structure canonique d'espace euclidien.)

Soit \mathcal{R} la relation définie sur la réunion disjointe de variétés $Z := (M - m_0) \amalg (N - n_0)$, par les conditions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet z \mathcal{R} z \text{ pour tout } z \in Z; \\ \bullet \text{ si } x \in V_{m_0} \text{ et } y \in V_{n_0}, \text{ alors :} \\ \qquad x \mathcal{R} y, \text{ si et seulement si, } \varphi_{m_0}(x) = -\frac{\varphi_{n_0}(y)}{\|\varphi_{n_0}(y)\|^2}, \quad (\diamond_4) \\ \bullet \text{ et } \textit{mutatis mutandis} \text{ pour } x \in V_{n_0} \text{ et } y \in V_{m_0}. \end{array} \right.$$

(Penser à la projection stéréographique.)

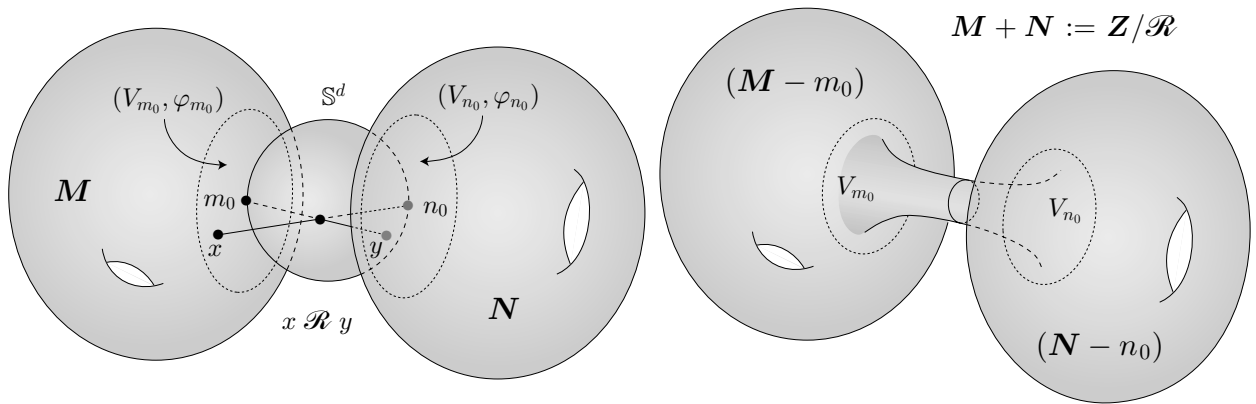
La relation \mathcal{R} est *réflexive et symétrique* par construction. Puis, la condition (\diamond_4) , implique :

$$\|\varphi_{m_0}(x)\| = \frac{\|\varphi_{n_0}(y)\|}{\|\varphi_{n_0}(y)\|^2} = \frac{1}{\|\varphi_{n_0}(y)\|},$$

et donc :

$$\frac{\varphi_{m_0}(x)}{\|\varphi_{m_0}(x)\|^2} = -\frac{\frac{\varphi_{n_0}(y)}{\|\varphi_{n_0}(y)\|^2}}{\frac{1}{\|\varphi_{n_0}(y)\|^2}} = -\varphi_{n_0}(y),$$

ce qui entraîne la *transitivité* de \mathcal{R} . La relation est donc bien une équivalence sur Z .



Graphe de \mathcal{R}

Dans notre cas, l'ensemble $\text{Gr}(\mathcal{R})$ est composé, d'une part, de la diagonale Δ_Z puisque \mathcal{R} est réflexive, et d'autre part, du graphe de l'application $\phi = \varphi_{n_0}^{-1} \circ \varphi_{m_0}$ entre les ouverts V_{m_0} et V_{n_0} et du graphe de ϕ^{-1} . Nous avons donc par symétrie

$$\text{Gr}(\mathcal{R}) = \Delta_Z \amalg \text{Gr}(\phi) \amalg \text{Gr}(\phi^{-1}),$$

et comme les variétés M et N sont séparées :

- Δ_Z sera fermé dans $Z \times Z$, et

- l'ensemble $\mathbf{G} := \text{Gr}(\phi) \cup \text{Gr}(\phi^{-1})$ sera fermé dans l'ouvert $U_\phi := ((\mathbf{V}_{m_0} \times \mathbf{V}_{n_0}) \amalg (\mathbf{V}_{n_0} \times \mathbf{V}_{m_0}))$ (car graphe d'applications continues); mais également dans $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$. En effet, soit (m, n) un point de la frontière de \mathbf{G} dans $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$; comme (m, n) ne peut appartenir à U_ϕ , on peut supposer que m est dans la frontière de $\mathbf{V}_{m_0} - m_0$ dans \mathbf{Z} , dans ce cas n ne peut être que n_0 ce qui est impossible.

On conclut que $\text{Gr}(\mathcal{R})$ est une partie *fermée* de $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$.

Enfin, l'application $x \mapsto (x, \phi(x))$ de $\mathbf{V}_{m_0} \rightarrow \text{Gr}(\phi)$ est une immersion et un homéomorphisme entre \mathbf{V}_{m_0} et $\text{im}(\phi)$ (et de manière analogue pour ϕ^{-1}), de sorte que toutes les conditions pour assurer que $\text{Gr}(\mathcal{R})$ est une sous-variété différentiable de $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ de dimension d sont réunies. Enfin la restriction de la projection canonique $p_1 : \mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}$ à $\text{Gr}(\mathcal{R})$ est trivialement une submersion aux points de la diagonale de $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$ et chacune des composantes de la forme $\text{Gr}(\phi)$ est $\text{Gr}(\phi^{-1})$. Le théorème de Godement peut donc être appliqué à notre situation.

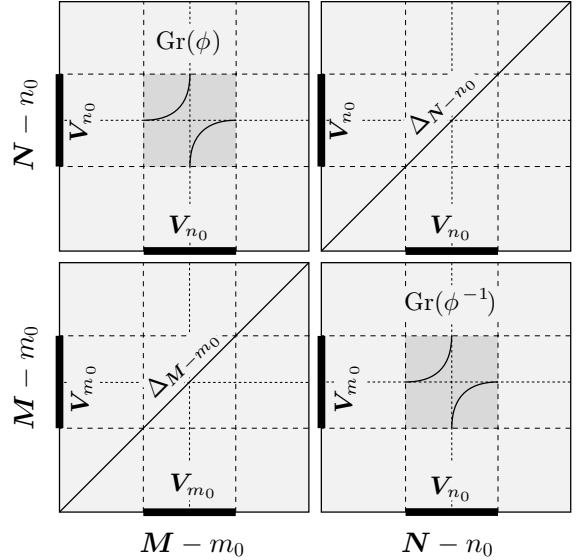
Nous exhibons les données du paragraphe précédent dans le graphique ci-après qui représente la variété produit $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$. On a :

$$\mathbf{Z} := (\mathbf{M} - m_0) \amalg (\mathbf{N} - n_0)$$

$$\text{Gr}(\mathcal{R}) = \Delta_{\mathbf{M}-m_0} \amalg \Delta_{\mathbf{N}-n_0} \amalg \text{Gr}(\phi) \amalg \text{Gr}(\phi^{-1})$$

$$\phi(z) = -\frac{z}{\|z\|^2}.$$

L'espace topologique \mathbf{Z}/\mathcal{R} , muni de l'unique la structure de variété différentiable rendant la projection $\pi : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}/\mathcal{R}$ submersive est appelée « *somme amalgamée* » de \mathbf{M} et \mathbf{N} . A remarquer que lorsque \mathbf{M} et \mathbf{N} sont connexes, bien que le choix des points m_0 et n_0 joue un rôle incontournable dans la construction effective de la somme amalgamée, la variété résultante en est « indépendante ». En effet, si d'autres points m_1 et n_1 sont choisis, les variétés obtenues restent tout de même *difféomorphes*. Ceci est conséquence du fait que, sur une variété connexe \mathbf{X} , le groupe des difféomorphismes $\text{Diff}(\mathbf{X})$ opère de façon *transitive* sur \mathbf{X} . Les variétés $\mathbf{M} - m_0$ et $\mathbf{M} - m_1$ sont donc difféomorphes par un certain difféomorphisme Ξ de \mathbf{M} et nous pouvons « transporter » (à l'aide de Ξ) les opérations de recollement entre $\mathbf{M} - m_0$ et $\mathbf{N} - n_0$ pour amalgamer $\mathbf{M} - m_1$ et $\mathbf{N} - n_0$. Sur les variétés obtenues, les difféomorphisme $\Xi : \mathbf{M} - m_0 \rightarrow \mathbf{M} - m_1$ et $\text{id} : \mathbf{N} - n_0 \rightarrow \mathbf{N} - n_0$ se recollent alors en un difféomorphisme global, etc, etc. . .



Remarque 2.8.1-1 et notation : Lorsque les variétés \mathbf{M} et \mathbf{N} sont toutes les deux connexes, les variétés \mathbf{Z}/\mathcal{R} sont deux-à-deux difféomorphes indépendamment des choix qui interviennent dans la construction précédente. On note souvent $\mathbf{M} + \mathbf{N}$ la structure différentiable ainsi obtenue.

Exercice 2.8.1-1 : Montrer que la projection canonique $\nu : \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{M} + \mathbf{N}$, identifie les variétés $\mathbf{M} - m_0$ et $\mathbf{N} - n_0$ à des ouverts de $\mathbf{M} + \mathbf{N}$, notés respectivement U_M et U_N , qui recouvrent $\mathbf{M} + \mathbf{N}$. Montrez que $U_M \cap U_N$ est difféomorphe à $\mathbb{S}^{d-1} \times \mathbb{R}$.

Exercice 2.8.1-2 : Montrer que lorsque $d > 1$, $\mathbf{M} + \mathbf{N}$ est respectivement : compacte, connexe, si et seulement si, il en est de même pour \mathbf{M} et \mathbf{N} (simultanément). Discuter le cas $d = 1$.

2.8.2 Variétés différentiables abstraites

Nous voudrions insister sur un point des fondements de la théorie des variétés différentiables. Dans la définition la plus répandue de la notion de variété différentiable, **on part** d'un espace topologique \mathbf{Y} (supposé souvent : séparé, paracompact, dénombrable à l'infini, etc, suivant les besoins de l'auteur) que l'on **munit d'une structure de variété différentiable de dimension n** à l'aide d'une famille de cartes recouvrant \mathbf{Y} et dont les applications de transition sont des difféomorphismes entre des ouverts de \mathbb{R}^n . On peut résumer cette démarche en disant que l'on part d'une vision globale et très floue de la variété (l'espace topologique \mathbf{Y}) pour, en s'en rapprochant, percevoir les détails de son aspect local (sa *structure différentiable* à travers les images des cartes). La démarche inverse, que nous allons décrire dans les paragraphes suivants, apparaît pourtant très naturellement dans la pratique, elle est validée par le théorème de Godement.

Soit $(\mathbf{M}, \mathcal{A})$ une variété différentiable de dimension m et d'atlas $\mathcal{A} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ et considérons l'ensemble $\mathcal{A}(m) := \coprod_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathbb{R}^m$ muni de structure de variété différentiable «réunion disjointe de variétés». Notons $\mathcal{A}(m)_\alpha$ la composante connexe de $\mathcal{A}(m)$ correspondante à l'indice α et considérons l'application

$$\Phi : \coprod_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathcal{A}(m)_\alpha \longrightarrow \mathbf{M}$$

définie par φ_α^{-1} sur $\mathcal{A}(m)_\alpha$, pour chaque $\alpha \in \mathfrak{A}$. L'application Φ est alors (tautologiquement) une submersion de variétés. Notons \mathcal{R} la relation sur $\mathcal{A}(m)$ définie par $x \mathcal{R} y$, si et seulement si, $\Phi(x) = \Phi(y)$. Le graphe $\text{Gr}(\mathcal{R})$ de \mathcal{R} dans $\mathcal{A}(m) \times \mathcal{A}(m)$ est l'image inverse de la diagonale de $\mathbf{M} \times \mathbf{M}$ par le morphisme $\Phi \times \Phi$ et comme ce dernier est submersif, l'ensemble $\text{Gr}(\mathcal{R})$ est une sous-variété de $\mathcal{A}(m) \times \mathcal{A}(m)$ de dimension m , ce qui équivaut à dire que sa «trace» sur chaque produit $\mathcal{A}(m)_\alpha \times \mathcal{A}(m)_\beta$ l'est également. Or, cette trace est, soit vide, soit le graphe d'un difféomorphisme d'un ouvert $U(\alpha, \beta)_\alpha \in \mathcal{A}(m)_\alpha$ sur un ouvert $U(\alpha, \beta)_\beta \in \mathcal{A}(m)_\beta$ qui n'est autre que l'application de transition entre les ouverts $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ et $\varphi_\beta(U_\beta)$. Ces remarques montrent le graphe de la relation \mathcal{R} dépend uniquement des applications de transition entre des ouverts de \mathbb{R}^m ; l'existence et la nature de l'espace topologique \mathbf{M} seront conséquences, *a posteriori*, du théorème 2.7-1, en particulier ces données ne sont pas indispensables pour définir la variété \mathbf{M} .

Définition 2.8.2-1 : Une variété différentiable *abstraite* de dimension m est la donnée :

- a) d'un ensemble d'indices \mathfrak{A} ,
- b) d'une partie $\mathfrak{J} \subseteq \mathfrak{A} \times \mathfrak{A}$ (d'incidences) symétrique et contenant la diagonale de $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A}$,

c) pour chaque $(\alpha, \beta) \in \mathfrak{I}$, d'un couple $(U(\alpha, \beta)_\alpha, U(\alpha, \beta)_\beta)$ d'ouverts de \mathbb{R}^m et d'une application différentiable :

$$\phi_{\beta, \alpha} : U(\alpha, \beta)_\alpha \longrightarrow U(\alpha, \beta)_\beta$$

de telle sorte que pour tous $(\alpha, \beta) \in \mathfrak{I}$ on ait :

c-1) $U(\alpha, \alpha)_\alpha = \mathbb{R}^m$ et $\phi_{\alpha, \alpha} = \text{id}_{\mathbb{R}^m}$.

c-2) $U(\alpha, \beta)_\alpha = U(\beta, \alpha)_\alpha$.

c-3) Pour tous (α, β) , (β, γ) et (γ, α) dans \mathfrak{I} , tels que $U(\alpha, \beta)_\beta \cap U(\gamma, \beta)_\beta \neq \emptyset$, les applications $\phi_{\gamma, \alpha}$ et $\phi_{\gamma, \beta} \circ \phi_{\beta, \alpha}$ prennent les mêmes valeurs aux points communs de leur domaine de définition.

Nous aurons l'occasion d'utiliser ce point de vue lors de l'introduction de la variété d'orientation associée à variété.

2.9 Fibrations localement triviales

Définitions 2.9-1 : Soit $\pi : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{B}$ une application continue entre deux espaces topologiques. On dit que π est un « *fibration localement triviale de fibre l'espace topologique \mathbf{F}* », si pour tout $b \in \mathbf{B}$, il existe un voisinage V_b et un homéomorphisme $\phi_{V_b} : \pi^{-1}(V_b) \rightarrow V_b \times \mathbf{F}$ rendant la diagramme suivant commutatif

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(V_b) & \xrightarrow{\phi_{V_b}} & V_b \times \mathbf{F} \\ \pi \downarrow & & p_1 \downarrow \\ V_b & \xrightarrow{\text{id}} & V_b \end{array}$$

où $p_1(v, z) = v$. On dit alors que π est « *trivialisable au-dessus de V_b* », ou encore que V_b est un « *ouvert de trivialisement de la fibration* ».

L'espace \mathbf{B} est appelé « *la base de la fibration* », et l'espace \mathbf{P} : « *l'espace total de la fibration* » ou encore « *l'espace fibré au-dessus de \mathbf{B}* ». On référera souvent à une fibration localement triviale par la notation $(\mathbf{P}, \mathbf{B}, \pi)$, et même uniquement par l'application π .

Une fibration localement triviale $(\mathbf{P}, \mathbf{B}, \pi)$ est dite « *trivialisable* », si \mathbf{B} est un ouvert de trivialisement. Dans ce cas $\mathbf{P} \sim \mathbf{B} \times \mathbf{F}$.

Lorsque les données appartiennent à la catégorie des variétés différentiables, on obtient la notion de « *fibration localement triviale de variétés* ». Notons d_B , d_F et d_P les dimensions respectives de \mathbf{B} , \mathbf{F} et \mathbf{P} , on a $d_P = d_B + d_F$.

2.9-1 Avertissement : Dans ce cours, les expressions « *fibration localement triviale* » et « *fibration* » seront synonymes.

Exercice 2.9-1 : Soit $(\mathbf{P}, \mathbf{B}, \pi)$ une fibration de fibre \mathbf{F} . L'espace \mathbf{P} est séparé, si et seulement si, \mathbf{B} et \mathbf{F} le sont.

Exercice 2.9-2 : Soit (P, B, π) une fibration de variétés de fibre F . L'application π est une submersion surjective, de sorte que si $B' \subseteq B$ une sous-variété, l'ensemble $\pi^{-1}(B')$ est une sous-variété de P . Montrer que $(\pi^{-1}(B'), B', \pi)$ est une fibration de variétés de fibre F ; on l'appelle « *la restriction de la fibration π à B'* »

Exercice 2.9-3 : En vous servant des idées de l'exercice 2.6-2 montrer que si (P, B, π) est une fibration de fibre F , et si $f : B' \rightarrow B$ est un morphisme, alors le produit fibré $(B' \times_{f, \pi} P, B', \tilde{\pi})$ est également une fibration de fibre F ; l'espace fibré total $B' \times_{f, \pi} P$ est appelé « *fibré image inverse par f* » et est souvent noté $f^{-1}(P)$, la projection $\tilde{\pi}$ sera notée alors $f^{-1}(\pi)$.

Morphisme de fibrations

Définition 2.9-2 : Soient (P_1, B_1, π_1) et (P_2, B_2, π_2) deux fibrations. Un « *morphisme de fibrations π_1 vers π_2* » est la donnée de deux morphismes $f : P_1 \rightarrow P_2$ et $g : B_1 \rightarrow B_2$, tels que $\pi_2 \circ f = g \circ \pi_1$, il sera noté par $(f, g) : (P_1, B_1, \pi_1) \rightarrow (P_2, B_2, \pi_2)$. En particulier, l'application f restreinte à "la fibre" $\pi_1^{-1}(b)$ est à valeurs dans la fibre $\pi_2^{-1}(g(b))$.

Lorsque $B_1 = B_2$, on dit que f est un « *morphisme de fibrations au-dessus de B* » ou encore un « *B -morphisme* » si (f, id_B) est un morphisme de fibrations; il sera noté par $f : (P_1, B, \pi_1) \rightarrow (P_2, B, \pi_2)$.

Exercice 2.9-4 : Les définitions qui précèdent permettent de définir la catégorie des fibrations au-dessus d'une variété donnée B . Pour tout morphisme $f : B' \rightarrow B$, et tout B -morphisme $g : (P_1, B, \pi_1) \rightarrow (P_2, B, \pi_2)$, on définit une application $f^{-1}(g) : f^{-1}(P_1) \rightarrow f^{-1}(P_2)$ fibre-à-fibre, *i.e.* : en composant, pour chaque $b' \in B'$:

$$(f^{-1}(\pi_1))^{-1}(b') \xrightarrow[\cong]{\tilde{f}} \pi_1^{-1}(f(b')) \xrightarrow{g} \pi_2^{-1}(f(b')) \xleftarrow[\cong]{\tilde{f}} (f^{-1}(\pi_2))^{-1}(b').$$

L'application $f^{-1}(g)$ est un B' -morphisme et la correspondance f^{-1} est alors fonctorielle et covariante de la catégorie de fibrations au-dessus de B vers la catégorie de fibrations au-dessus de B' .

Exercice 2.9-5 : Soient (P, B, π) une fibration de variétés et $f : B' \rightarrow B$ l'inclusion canonique d'une sous-variété B' de B . Montrer que les fibrations "restriction de π à B' " et "image inverse de π par f " des exercices 2.9-2 et 2.9-3 sont B' -isomorphes.

Sections d'une fibration

Définition 2.9-3 : Soit (P, B, π) une fibration. Une application continue $\sigma : U \rightarrow P$ définie sur un ouvert $U \subseteq B$ est appelée « *section de π* » si l'on a $\pi \circ \sigma = \text{id}_U$. Lorsque $U = B$, on dit que σ est une « *section globale* ».

Remarque 2.9-1 : Une section de (P, B, π) s'identifie donc à un B -morphisme de (B, B, id_B) vers (P, B, π) .

Remarque 2.9-2 : Dans une fibration, le liens d'interdépendance entre les faits *d'être trivialisable* et *de posséder des sections globales* sont subtils. Rappelons que :

a) Une fibration trivialisable possède toujours des sections globales, mais la réciproque est fautive (*cf.* exercice 2.9-2).

- b) Une fibration de fibre homéomorphe à un espace vectoriel de dimension finie admet des sections globales. (Voir [Die] **16.12.13** page 82.) Mais, en général, il n'y a aucune raison pour que la fibration soit triviale.

Exercice 2.9-2-b.1 : Reprenons la construction du ruban de Möbius sous la forme $M = \mathbb{R}^2/G$ de la section 1.7.1.

- 1) Montrer que le sous-espace $\mathbb{R} \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ est G -stable et que la projection canonique $p_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \times \{0\}$ est compatible à l'action de G ; puis que la projection p_1 induit une application $\pi : M \rightarrow \mathbb{R} \times \{0\}/G \sim \mathbb{S}^1$ qui est une fibration de fibre \mathbb{R} .
 - 2) Montrer que cette fibration n'est pas trivialisable en remarquant que pour toute section $\sigma : \mathbb{S}^1 \rightarrow M$ l'ensemble $M \setminus \text{im } \sigma$ est connexe
- c) L'équivalence entre la trivialisaton et l'existence de sections globales est pourtant vérifiée dans la situation suivante :

Soient M une variété différentiable et G un groupe de Lie. Supposons donnée une action libre et différentiable de G sur M telle que l'espace quotient M/G admette une structure de variété différentiable rendant l'application canonique $M \rightarrow M/G$ submersive (p.ex. si G est compact d'après 2.8-2).

- 1) Montrer que lorsque ces conditions sont réunies le morphisme canonique $M \rightarrow M/G$ est une fibration trivialisable, si et seulement si, elle admet une section globale. (Voir l'exercice 2.9-3.)
- 2) En conclure que $M \rightarrow M/G$ est toujours une fibration localement triviale.

Remarque 2.9-3 : Dans la catégorie des variétés différentiables, une fibration est toujours une submersion surjective.

Le théorème de Ehresmann donne une réciproque à cette assertion :

Une submersion propre à valeurs dans une variété connexe est une fibration localement triviale.

Ce résultat est faux lorsque l'application f n'est plus propre :

Exercice 2.9-2 : Soit $P \subseteq \mathbb{R}^2$ l'ouvert

$$P = \{(x, y) \mid xy \neq 1\} \setminus \{(0, 0)\},$$

considéré muni de la structure de variété différentiable standard.

- a) Montrer que l'application $\pi : P \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\pi(x, y) = x$, est une submersion de variétés surjective de fibres $\pi^{-1}(x) \sim \mathbb{R} \setminus \{0\}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- b) Montrer qu'il existe une section globale différentiable $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow P$.
- c) Montrer pourtant que $\pi : P \rightarrow \mathbb{R}$ n'est pas une fibration localement triviale.

Exercice 2.9-3 : Pour chaque entier naturel $n > 1$, fixons un élément $x_0 \in \mathbb{S}^{n-1}$ et considérons l'application $\pi_n : \text{SO}(n) \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ définie par $\pi_n(g) = g(x_0)$.

- a) Montrer que π_n est une fibration de fibre $\text{SO}(n-1)$.
- b) Montrer que π_n est trivialisable, si et seulement si, elle admet une section globale.

c) Montrer que π_n n'admet pas de sections globales lorsque n est impair supérieur à 1.

Indication : Supposons $x_0 = (1, 0, \dots, 0)$. Si la fibration était triviale, il existerait une section globale $\sigma : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \text{SO}(n)$ et comme $\text{SO}(n)$ s'identifie à l'ensemble des repères orientés de \mathbb{R}^n , si nous posons $\sigma(\vec{x}) = (\vec{x} = \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$, la correspondance $\tau : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ définie par $\tau(\vec{x}) = \sigma(\vec{x})_2 = \vec{x}_2$, serait continue et sans point fixe ce qui est connu comme étant impossible⁽¹⁴⁾ pour tout $n > 1$ impair.

d) Considérons maintenant le cas où $n = 4$, et rappelons que le groupe quaternionique (unitaire) \mathbb{H}_u^* s'identifie à \mathbb{S}^3 . Montrez que π_4 est trivialisable en construisant un inverse à l'application :

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbb{H}_u^* \times \text{SO}(3) &\longrightarrow \text{SO}(4) \\ (\alpha, \beta) &\longmapsto \alpha \cdot \beta \end{aligned}$$

2.10 Revêtements

Définition 2.10-1 : Une fibration (P, B, π) de fibre F est dite « un revêtement » lorsque F est munie de la topologie discrète (dans le cas différentiable, il revient donc au même de dire que F est une variété de dimension 0.)

Lorsque le cardinal de F est un nombre fini r , on dira que le revêtement est à r feuillets.

Exercice 2.10-1 : Soit $(f, g) : (P_1, B_1, \pi_1) \rightarrow (P_2, B_2, \pi_2)$ un morphisme topologique de revêtements différentiables. Montrer que f est différentiable, si et seulement si, g l'est.

Indication : Les applications π_1 et π_2 sont étales.

Remarque 2.10-1 : Soient M une variété différentiable et G un groupe agissant différentiablement sur M de façon proprement discontinue et sans point fixe. La projection $\nu : M \rightarrow M/G$ est alors un revêtement.

Remarque 2.10-2 : Rappelons qu'un espace topologique connexe par arcs Y est dit « simplement connexe » si son groupe fondamental (groupe de Poincaré) : $\Pi_1(Y)$ est réduit à l'élément neutre, *i.e.* si tout lacet dans Y peut être déformé en un lacet constant.

Exercice 2.10-2.1 : Soit (π, P, B) une fibration de fibre F . Supposons B et F connexes par arcs. Montrer que P est connexe par arcs et que si P est simplement connexe, B l'est également.

Indication : Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow B$ un chemin (continu) tel que $\gamma(0) = \gamma(1)$ (un lacet donc). Montrer, par approximations successives et à l'aide des trivialisations locales, l'existence d'une application continue $\Gamma : [0, 1] \rightarrow P$ vérifiant $\pi \circ \Gamma = \gamma$ (c'est ce que l'on appelle « un relèvement continu de γ »). En utilisant la connexité par arcs de la fibre de π montrer que le chemin Γ peut être « fermé » en un lacet Γ' de P dont l'image par π est le lacet γ ; puis que toute déformation homotopique de Γ' induit une déformation homotopique de γ . Conclure.

Nous avons montré que les espaces projectifs $\mathbb{P}_m(\mathbb{K})$, où $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ou \mathbb{H} , s'obtiennent comme quotients de la sphère unité $\mathbb{S}(\mathbb{K}^{m+1})$ de \mathbb{K}^{m+1} par le groupe \mathbb{K}_u^* (*cf.* section 2.2.3). Expliquer pourquoi les projections $\mathbb{S}(\mathbb{K}^{m+1}) \rightarrow \mathbb{P}_m(\mathbb{K})$ sont des fibrations; en déduire la simple-connexité des espaces projectifs $\mathbb{P}_m(\mathbb{C})$ et $\mathbb{P}_m(\mathbb{H})$.

¹⁴ Nous redémontrerons ce résultat dans un chapitre ultérieur.

Rappelons le résultat classique de la théorie de l'homotopie qui affirme que **tout revêtement de base simplement connexe est trivialisable**. En particulier, les revêtements dont la base est une sphère S^n , pour $n > 1$, sont trivialisables.

On retiendra la fait que si un revêtement de base simplement connexe est toujours trivialisable, **il n'en est pas de même** pour une fibration localement triviale à base simplement connexe (*cf.* exercice 2.9-3).

Structure de variété des revêtements d'une variété différentiable

Proposition 2.10-1 : Soient B une variété différentiable P un espace topologique et (P, B, π) un revêtement. Il existe alors une, et une seule, structure de variété différentiable sur P telle que π est un morphisme de variétés.

Démonstration : Supposons le problème résolu et notons F la fibre du revêtement. Soit (V, φ) une carte de B dont le l'ouvert V est trivialisant. Comme $\pi^{-1}(V) \sim V \times F$, une composante connexe U de $\pi^{-1}(V)$ sera ouverte dans P et homéomorphe par π à V . Le couple $(U, \varphi \circ \pi)$ est alors une carte de coordonnées pour P . En effet, soit (W, ψ) une carte de la structure de P telle que $W \cap U \neq \emptyset$. Comme π est supposée un morphisme de variétés, il s'ensuit que $\psi^{-1} \circ \pi \circ \varphi$ est différentiable sur son domaine de définition. Or, ceci veut très précisément dire que (W, ψ) et $(U, \varphi \circ \pi)$ sont des cartes compatibles et comme le choix de (W, ψ) est arbitraire dans l'atlas de P , on conclut que $(U, \varphi \circ \pi)$ est dans l'atlas complet de P .

Nous voyons ainsi que s'il existe une structure de variété sur P , comme annoncé dans la proposition, l'ensemble des couples $(U, \varphi \circ \pi)$ constituera un atlas de la structure en question. Montrons que les cartes de cet ensemble font nécessairement un atlas. Soient $(U_1, \varphi_1 \circ \pi)$ et $(U_2, \varphi_2 \circ \pi)$ deux cartes telles que $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, l'application de transition sera $(\varphi_2 \circ \pi) \circ (\varphi_1 \circ \pi)^{-1} = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ et la compatibilité est donc vérifiée, ce qui termine la démonstration. ■

Remarque 2.10-3 : Une variété différentiable M étant localement contractile⁽¹⁵⁾, sera localement connexe par arcs et localement simplement connexe. D'après un résultat classique d'homotopie, il existe alors un espace topologique \tilde{M} simplement connexe et un revêtement (π, \tilde{M}, M) dont la fibre $\pi^{-1}(x_0)$ en un point $x_0 \in M$ est en bijection canonique avec $\Pi_1(M; x_0)$. La proposition précédente montre que \tilde{M} est en fait une variété différentiable.

Rappelons que lorsque M est connexe, le revêtement (topologique) (\tilde{M}, M, π) est caractérisé par la propriété universelle suivante :

Pour tout revêtement $\tau : (y, Y) \rightarrow (x, M)$, il existe une unique application (continue) $f : (\tilde{x}, \tilde{M}) \rightarrow (y, Y)$, telle que $\pi = \tau \circ f$. (L'application f est alors également un revêtement.)

⁽¹⁶⁾ Cette propriété reste vraie dans la catégorie des variétés différentiables. Dans ce cas, la différentiabilité de f est une simple conséquence du fait que les revêtements différentiels sont étales. En particulier, la variété \tilde{M} est unique à difféomorphisme près ; on l'appelle « le revêtement universel de M ».

Exercice 2.10-2 : Les espaces projectifs $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ ne sont jamais simplement connexes des que $n > 0$; on a $\Pi_1(\mathbb{P}_n(\mathbb{R})) = \{\pm 1\}$. Par contre $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$, où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{H}$, sont toujours simplement connexes.

¹⁵ On appelle ainsi les espaces topologiques admettant une base de la topologie par des ouverts contractiles, *i.e.* homotopes à un point. Dans une variété de dimension m les domaines de cartes constituent bien une base de la topologie par des ouverts homéomorphes à \mathbb{R}^m donc contractiles.

¹⁶ Rappelons que la notation, usuelle en topologie, $\tau : (y, Y) \rightarrow (x, M)$ signifie que $f : Y \rightarrow M$ est continue et que $f(y) = x$.

2.10.1 Revêtement associé à une fibration localement triviale

Ce paragraphe prépare à la définition de la variété d'orientations d'une variété différentiable.

Soit $(\mathbf{P}, \mathbf{B}, \pi)$ une fibration de variétés de fibre \mathbf{F} . Notons $\simeq_{\mathbf{F}}$ la relation d'équivalence sur \mathbf{P} , définie par :

$$x \simeq_{\mathbf{F}} y, \quad \text{si et seulement si,} \quad \begin{cases} \pi(x) = \pi(y), & \text{et} \\ x \text{ et } y \text{ sont dans la même composante} \\ \text{connexe de la fibre } \pi^{-1}(\pi(x)). \end{cases}$$

Notons $\mathbf{P}/\simeq_{\mathbf{F}}$ l'espace topologique quotient de \mathbf{P} par $\simeq_{\mathbf{F}}$, on a un diagramme commutatif d'applications continues :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{P} & \xrightarrow{\nu_{\mathbf{F}}} & \mathbf{P}/\simeq_{\mathbf{F}} \\ \pi \downarrow & & \tilde{\pi} \downarrow \\ \mathbf{B} & \xrightarrow{\text{id}_{\mathbf{B}}} & \mathbf{B} \end{array}$$

Soit maintenant $\phi_{\alpha} : \pi^{-1}(U_{\alpha}) \rightarrow U_{\alpha} \times \mathbf{F}$ une trivialisatoin locale de π . L'ouvert $\pi^{-1}(U_{\alpha})$ est $\simeq_{\mathbf{F}}$ -saturé et l'on a :

$$\tilde{\pi}^{-1}(U_{\alpha}) \xleftarrow[\cong]{\nu_{\mathbf{F}}} \pi^{-1}(U_{\alpha})/\simeq_{\mathbf{F}} \xrightarrow[\cong]{\tilde{\phi}_{\alpha}} U_{\alpha} \times \Pi_0(\mathbf{F})$$

La composée de ces homéomorphismes définit donc une trivialisatoin locale de $\tilde{\pi}$, ce qui montre bien que $\tilde{\pi}$ est un revêtement topologique de \mathbf{B} , de fibre $\Pi_0(\mathbf{F})$. On munit alors l'espace $\mathbf{P}/\simeq_{\mathbf{F}}$ de l'unique structure de variété différentiable rendant $\tilde{\pi}$ différentiable (cf. proposition 2.10-1). Le revêtement de variétés $(\mathbf{P}/\simeq_{\mathbf{F}}, \mathbf{B}, \tilde{\pi})$ sera appelé « le revêtement associé à la fibration (localement triviale) π ». On remarquera enfin que le morphisme canonique $\nu_{\mathbf{F}} : (\mathbf{P}, \mathbf{B}, \pi_{\mathbf{P}}) \rightarrow (\mathbf{P}/\simeq_{\mathbf{F}}, \mathbf{B}, \tilde{\pi}_{\mathbf{P}})$ de fibrations au-dessus de \mathbf{B} est également différentiable puisque $\tilde{\pi}$ est étale.

L'application $\nu_{\mathbf{F}} : (\pi_{\mathbf{P}}, \mathbf{P}, \mathbf{B}) \rightarrow (\tilde{\pi}_{\mathbf{P}}, \mathbf{P}/\simeq_{\mathbf{F}}, \mathbf{B})$ vérifie la propriété universelle suivante :

Proposition 2.10.1-1 : Soit $(\mathbf{P}, \mathbf{B}, \pi_{\mathbf{P}})$ une fibration localement triviale de variétés différentiables de fibre \mathbf{F} . Notons $\tilde{\pi}_{\mathbf{P}} : \mathbf{P}/\simeq_{\mathbf{F}} \rightarrow \mathbf{B}$ le revêtement associé et $\nu_{\mathbf{F}} : (\mathbf{P}, \mathbf{B}, \pi_{\mathbf{P}}) \rightarrow (\mathbf{P}/\simeq_{\mathbf{F}}, \mathbf{B}, \tilde{\pi}_{\mathbf{P}})$ le \mathbf{B} -morphisme canonique. Pour tout \mathbf{B} -morphisme $g : (\mathbf{P}, \mathbf{B}, \pi_{\mathbf{P}}) \rightarrow (\mathbf{L}, \mathbf{B}, \pi_{\mathbf{L}})$, où $(\mathbf{L}, \mathbf{B}, \pi_{\mathbf{L}})$ est un revêtement, il existe un et un seul morphisme $\tilde{g} : (\mathbf{P}/\simeq_{\mathbf{F}}, \mathbf{B}, \tilde{\pi}_{\mathbf{P}}) \rightarrow (\mathbf{L}, \mathbf{B}, \pi_{\mathbf{L}})$ de revêtements au-dessus de \mathbf{B} , tel que : $g = \tilde{g} \circ \nu_{\mathbf{F}}$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{P} & \xrightarrow{g} & \mathbf{L} \\ \pi_{\mathbf{P}} \downarrow & \searrow \nu_{\mathbf{F}} \quad \nearrow \tilde{g} & \downarrow \pi_{\mathbf{L}} \\ & \mathbf{P}/\simeq_{\mathbf{F}} & \\ \mathbf{B} & \xrightarrow{\quad} & \mathbf{B} \\ \downarrow = & \downarrow \tilde{\pi}_{\mathbf{P}} & \downarrow = \\ & \mathbf{B} & \end{array}$$

Démonstration : Il suffira de monter l'existence "ensembliste" de \tilde{g} , les attributs de différentiabilité découleront alors automatiquement du fait que π_L et $\tilde{\pi}_P$ sont étales.

Le morphisme $g : (P, B, \pi_P) \rightarrow (L, B, \pi_L)$ étant donné, notons F et G les fibres respectives de π_P et π_L . On peut prendre *un même* ouvert U_α de trivialisations pour π_P et π_L ; on a alors le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 P & \xrightarrow{g} & L \\
 \uparrow \subseteq & & \uparrow \subseteq \\
 \pi_P^{-1}(U_\alpha) & \xrightarrow{g|_{\pi_P^{-1}(U_\alpha)}} & \pi_L^{-1}(U_\alpha) \\
 \uparrow \phi_\alpha \equiv & & \uparrow \psi_\alpha \equiv \\
 U_\alpha \times F & \xrightarrow{\psi_\alpha^{-1} \circ g \circ \phi_\alpha} & U_\alpha \times G \\
 (u, x) & \longmapsto & (u, \xi(u, x))
 \end{array}$$

où pour peu que U_α soit connexe, nous voyons que $\xi(u, x)$ est constante, indépendamment de $u \in U_\alpha$ et de x dans sa composante connexe dans F . Or ceci signifie très précisément que $g|_{\pi_P^{-1}(U_\alpha)}$ est compatible à la relation \simeq_F et donc qu'elle induit bien une application sur la restriction de $(P/\simeq_F, B, \tilde{\pi}_P)$ au-dessus de U_α qui est **indépendante** des trivialisations ϕ_α et ψ_α ; ce qui garantit le recollement de ces applications locales en l'application \tilde{g} cherchée. ■

Exercice 2.10.1-1 : Lorsque la fibre F de (P, B, π) est connexe, on a $P/\simeq_F = B$.

Exercice 2.10.1-2 : Nous avons donné dans l'exercice 2.9-2-b.1 un structure d'espace fibré de fibre \mathbb{R} sur le ruban de Möbius M en quotientant la projection canonique $p_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \times \{0\}$ par l'action de G . La projection p_1 étant à valeurs dans un sous-espace fixé par p_1 , elle admet une section globale également compatible à l'action de G . La fibration (M, \mathbb{S}^1, π) admet donc une section globale que nous noterons σ .

- Montrer que $\pi : M \setminus \text{im}(\sigma) \rightarrow \mathbb{S}^1$ est une fibration de fibre $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ *non trivialisable*.
- Montrer que le revêtement associé à $(M \setminus \text{im}(\sigma), \mathbb{S}^1, \pi)$ est isomorphe (en tant que revêtement de \mathbb{S}^1) au revêtement $(-)^2 : \mathbb{C}_u^* \rightarrow \mathbb{C}_u^*$ qui associe $(-)^2 : x \mapsto x^2$.

2.11 Fibrés vectoriels sur les variétés différentiables

Définition 2.11-1 : Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie r que l'on suppose muni de sa structure standard de variété différentiable. On appelle « *fibré vectoriel de base B et fibre E* » la donnée :

- d'une fibration de variétés (P, B, π) de fibre E ;
- d'un recouvrement de B par des ouverts trivialisants $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$; et pour chaque $\alpha \in \mathfrak{A}$, d'un difféomorphisme de trivialisations :

$$\begin{array}{ccc}
 \phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) & \xrightarrow{\equiv} & U_\alpha \times E \\
 x & \longmapsto & (\pi(x), \varphi_\alpha(x))
 \end{array}$$

de telle sorte que, pour tous $\alpha, \beta \in \mathfrak{A}$ tels que $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$, dans le difféomorphisme de transition :

$$\begin{array}{ccc}
 \phi_{\beta,\alpha} := \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : U_{\alpha\beta} \times E & \longrightarrow & U_{\beta\alpha} \times E \\
 (u, X) & \longmapsto & (u, \varphi_{\beta,\alpha}(u, X))
 \end{array}$$

l'application $X \in E \mapsto \varphi_{\beta,\alpha}(u, X) \in E$, soit \mathbb{R} -linéaire, pour tout $u \in U_{\alpha\beta}$.

La dimension $\dim_{\mathbb{R}}(E) = r$ est appelée «le rang du fibré».

Remarque 2.11-1 : Dans la définition ci-dessus les applications $\varphi_{\beta,\alpha} : U_{\alpha\beta} \times E \rightarrow E$ sont différentiables. Or, la différentiabilité (de classe \mathcal{C}^∞) est équivalente à la différentiabilité “coordonnée par coordonnée” et comme pour chaque $u \in U_{\alpha\beta}$ fixe, l'application $\varphi_{\alpha,\beta}(u, _)$ est un endomorphisme linéaire (d'un espace vectoriel réel de dimension finie), donc, est automatiquement différentiable, nous voyons que la différentiabilité de $\varphi_{\beta,\alpha} : U_{\alpha\beta} \times E \rightarrow E$ est équivalente à la différentiabilité de $\bar{\varphi}_{\beta,\alpha} : U_{\alpha\beta} \rightarrow \text{GL}(E) \subseteq \text{End}(E) \sim \mathbb{R}^{\dim_{\mathbb{R}}(E)^2}$, où $\bar{\varphi}_{\beta,\alpha}(u)(X) := \varphi_{\beta,\alpha}(u, X)$.

Les relations $\phi_{\alpha,\alpha} = \text{id}$, $\phi_{\beta,\alpha} = \phi_{\alpha,\beta}^{-1}$ et $\phi_{\gamma,\alpha} = \phi_{\gamma,\beta} \circ \phi_{\beta,\alpha}$ définies sur des ensembles de la forme $U_* \times E$, deviennent $\bar{\varphi}_{\alpha,\alpha} = \text{id}$, $\bar{\varphi}_{\beta,\alpha} = \bar{\varphi}_{\alpha,\beta}^{-1}$ et $\bar{\varphi}_{\gamma,\alpha} = \bar{\varphi}_{\gamma,\beta} \cdot \bar{\varphi}_{\beta,\alpha}$ et concernent des applications définies sur des ouverts de la forme U_* , à valeurs dans $\text{GL}(E)$ (en particulier, les opérations $(_)^{-1}$ et \cdot font référence à la structure multiplicative du groupe $(\text{GL}(E), \cdot, \text{id}_E)$).

Remarque 2.11-2 atlas complet d'une fibration vectorielle : De même que pour les variétés, on peut définir la notion d'atlas pour une fibration vectorielle comme une collection de cartes de trivialisations vérifiant les conditions 2.11-1-FV-1 et 2.11-1-FV-2. On dira que deux tels atlas définissent la «même structure fibrée vectorielle», si leur réunion est encore un atlas de variété fibrée vectorielle. Cette relation entre atlas est clairement une équivalence et une classe d'équivalence de tels atlas est appelée une «structure de variété fibrée vectorielle». La notion d'atlas complet de la structure relève de la même définition que pour les variétés.

2.11.1 Structure canonique d'espace vectoriel des fibres d'un fibré vectoriel

Soit $(\mathbf{P}, \mathbf{B}, \pi)$ un fibré vectoriel de fibre E . Pour chaque $b \in \mathbf{B}$, on munit la fibre $\pi^{-1}(b)$ d'une structure d'espace vectoriel par le procédé suivant. Soient $y_1, y_2 \in \pi^{-1}(b)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$; pour chaque ouvert de trivialisations U_α contenant b et pour chaque difféomorphisme de trivialisations de la structure fibrée vectorielle $\phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times E$, $y \mapsto (\pi(y), \varphi_\alpha(y))$, on pose :

$$y_1 +_\alpha \lambda \cdot_\alpha y_2 := \phi_\alpha^{-1} \left((b, \varphi_\alpha(y_1) + \lambda \cdot \varphi_\alpha(y_2)) \right).$$

L'égalité $y_1 +_\alpha \lambda \cdot_\alpha y_2 = y_1 +_\beta \lambda \cdot_\beta y_2$ découle alors des égalités :

$$\varphi_\beta(y_1) + \lambda \cdot \varphi_\beta(y_2) = \bar{\varphi}_{\beta,\alpha}(b)(\varphi_\alpha(y_1)) + \lambda \cdot \bar{\varphi}_{\beta,\alpha}(b)(\varphi_\alpha(y_2)) = \bar{\varphi}_{\beta,\alpha}(b)(\varphi_\alpha(y_1) + \lambda \cdot \varphi_\alpha(y_2)),$$

garanties par la linéarité des applications $\varphi_{*,*}(b) \in \text{GL}(E)$.

Exercice 2.11.1-1 et définition : Soit $(\mathbf{P}, \mathbf{B}, \pi)$ un fibré vectoriel. L'application qui associe à chaque $b \in \mathbf{B}$, le vecteur nul de l'espace vectoriel $\pi^{-1}(b)$ est une section différentiable; on l'appelle «la section nulle» du fibré. En particulier un fibré vectoriel admet toujours une section globale canonique (cf. 2.9-2-b).

La section nulle définit un plongement canonique \mathbf{B} dans \mathbf{P} , son image est souvent référée également par l'expression «section nulle», par abus de langage.

Exercice 2.11.1-2 et terminologie : Soit $(\mathbf{P}, \mathbf{B}, \pi)$ un fibré vectoriel de fibre E et notons, pour chaque ouvert $U \subseteq \mathbf{B}$, par $\Gamma(U; \pi)$ (ou $\Gamma(U; \mathbf{P})$) l'ensemble de toutes les sections (différentiables) de π au-dessus de U . Montrer que $\Gamma(U; \pi)$ muni d'une addition et d'une multiplication par des scalaires définies point par point est fermé pour ces opérations et est donc un \mathbb{R} -espace vectoriel. Montrer que si U est de trivialisatation, $\Gamma(U; \pi)$ s'identifie (non canoniquement) à $\mathcal{C}^\infty(U) \otimes_{\mathbb{R}} E$.

Soient U un ouvert de \mathbf{B} et $\sigma \in \Gamma(U; \mathbf{P})$. On définit le « *support de la section σ* » comme d'adhérence topologique de l'ensemble des $x \in U$ tels que $\sigma(x) \neq 0$, on le note $|\sigma|$. Montrer que l'ensemble $\Gamma_c(U; \mathbf{P})$ des « *sections à supports compacts* » est un sous-espace vectoriel de $\Gamma(U; \mathbf{P})$.

Définition 2.11.1-1 : Soient $(\mathbf{P}_1, \mathbf{B}_1, \pi_1)$ et $(\mathbf{P}_2, \mathbf{B}_2, \pi_2)$ deux fibrés vectoriels. Un morphisme de fibrations $(f, g) : \pi_1 \rightarrow \pi_2$ est dit « *morphisme de fibrés vectoriels* » lorsque, quel que soit $b \in \mathbf{B}_1$, la restriction :

$$f|_{\pi_1^{-1}(b)} : \pi_1^{-1}(b) \rightarrow \pi_2^{-1}(g(b))$$

est \mathbb{R} -linéaire relativement aux structures d'espace vectoriel des fibres.

Lorsque $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2 = \mathbf{B}$, on dira que $f : \mathbf{P}_1 \rightarrow \mathbf{P}_2$ est un « *morphisme de fibrés vectoriels au-dessus de \mathbf{B}* » ou un « *\mathbf{B} -morphisme de fibrés vectoriels* », si $(f, \text{id}_{\mathbf{B}})$ est un morphisme de fibrés vectoriels.

Explicitons la description locale d'un \mathbf{B} -morphisme f de fibrations vectorielles entre $(\mathbf{P}_1, \mathbf{B}, \pi_1)$ et $(\mathbf{P}_2, \mathbf{B}, \pi_2)$ de fibres respectives E_1 et E_2 . Supposons, pour simplifier, que les ouverts de trivialisatation le soient simultanément pour les deux fibrations¹⁷. On aura alors des diagrammes commutatifs de la forme :

$$\begin{array}{ccc} \pi_1^{-1}(U_\alpha) & \xrightarrow{f|_{U_\alpha}} & \pi_2^{-1}(U_\alpha) \\ \phi_{1,\alpha} \downarrow \cong & & \cong \downarrow \phi_{2,\alpha} \\ U_\alpha \times E_1 & \xrightarrow{f_\alpha} & U_\alpha \times E_2 \\ (u, v) & \longmapsto & (u, \bar{f}_\alpha(u)(v)) \end{array}$$

où $\bar{f}_\alpha : U_\alpha \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(E_1, E_2)$ est différentiable. Soit maintenant U_β un autre ouvert de trivialisatation avec $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$. Posons $\bar{f}_{\alpha,\beta} := \bar{f}_\alpha|_{U_{\alpha\beta}}$ et *mutatis mutandis* pour les autres notations à doubles indices ; on a alors les diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} U_{\alpha\beta} \times E_1 & \xrightarrow{f_{\alpha,\beta}} & U_{\alpha\beta} \times E_2 \\ \phi_{1,\beta,\alpha} \downarrow & & \downarrow \phi_{2,\beta,\alpha} \\ U_{\beta\alpha} \times E_1 & \xrightarrow{f_{\beta,\alpha}} & U_{\beta\alpha} \times E_2 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} (u, v) & \xrightarrow{f_{\alpha,\beta}} & (u, \bar{f}_{\alpha,\beta}(u)(v)) \\ \phi_{1,\beta,\alpha} \downarrow & & \downarrow \phi_{2,\beta,\alpha} \\ (u, \bar{\varphi}_{1,\beta,\alpha}(u)(v)) & \xrightarrow{f_{\beta,\alpha}} & (u, \bar{f}_{\beta,\alpha}(u)(\bar{\varphi}_{1,\beta,\alpha}(u)(v))) \\ & & = \\ & & (u, \bar{\varphi}_{2,\beta,\alpha}(u)(\bar{f}_{\alpha,\beta}(u)(v))) \end{array}$$

¹⁷ Cette hypothèse n'est pas restrictive puisque les ouverts de trivialisatation d'une fibration (même vectorielle) constituent une base de la topologie de la base.

où l'on remarque la contrainte de commutation :

$$\left(\bar{\varphi}_{2,\beta,\alpha}(u) \circ \bar{f}_{\alpha,\beta}(u)\right)(v) = \left(\bar{f}_{\beta,\alpha}(u) \circ \bar{\varphi}_{1,\beta,\alpha}(u)\right)(v). \quad (C)$$

pour tout $u \in U_{\alpha\beta}$.

Remarque 2.11.1-1 : Des descriptions analogues peuvent être données pour les morphismes de fibrations vectorielles à bases arbitraires.

Exercice 2.11.1-3 : Les définitions qui précèdent permettent de définir la catégorie $\text{Vec}_{\mathbb{R}}(\mathbf{B})$ des fibrés vectoriels (réels) au-dessus d'une variété \mathbf{B} donnée. Montrer que pour tout morphisme de variétés $f : \mathbf{B}' \rightarrow \mathbf{B}$, le foncteur f^{-1} "image inverse de fibrés" de l'exercice 2.9-3 est un foncteur de la catégorie des fibrés vectoriels au-dessus de \mathbf{B} vers la catégorie des fibrés vectoriels au-dessus de \mathbf{B}' .

Exercice 2.11.1-4 : Soient $(\mathbf{P}_1, \mathbf{B}, \pi_1)$ et $(\mathbf{P}_2, \mathbf{B}, \pi_2)$ deux fibrés vectoriels au-dessus de la variété \mathbf{B} , de fibres respectives E_1 et E_2 . Notons $\mathbf{P}_1 \times_{\mathbf{B}} \mathbf{P}_2$ le produit fibré $\mathbf{P}_1 \times_{\pi_1, \pi_2} \mathbf{P}_2$, on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{P}_1 \times_{\mathbf{B}} \mathbf{P}_2 & \xrightarrow{\pi_1^{-1}(\pi_2)} & \mathbf{P}_1 \\ \pi_2^{-1}(\pi_1) \downarrow & & \downarrow \pi_1 \\ \mathbf{P}_2 & \xrightarrow{\pi_2} & \mathbf{B} \end{array}$$

Montrer que l'application $\pi_2 \circ \pi_2^{-1}(\pi_1) = \pi_1 \circ \pi_1^{-1}(\pi_2)$, de $\mathbf{P}_1 \times_{\mathbf{B}} \mathbf{P}_2$ sur \mathbf{B} , est une fibration vectorielle de fibre $E_1 \oplus E_2$.

Exercice 2.11.1-5 : Soit $(\mathbf{P}, \mathbf{B}, \pi)$ un fibré vectoriel de fibre E et notons $\mathbf{P} \times_{\mathbf{B}} \mathbf{P}$ le produit fibré $\mathbf{P} \times_{\pi, \pi} \mathbf{P}$.

a) La variété $\mathbf{P} \times_{\mathbf{B}} \mathbf{P}$ est l'espace total d'une fibration vectorielle au-dessus de \mathbf{B} de fibre $E \oplus E$. Montrer que l'application :

$$\begin{aligned} + : \quad \mathbf{P} \times_{\mathbf{B}} \mathbf{P} &\longrightarrow \mathbf{P} \\ (b, (y_1, y_2)) &\longmapsto (b, (y_1 + y_2)) \end{aligned}$$

où la notation est relative à des cartes trivialisantes, est bien définie et est un \mathbf{B} -morphisme de fibrés vectoriels.

b) Vérifier la différentiabilité de l'application :

$$\begin{aligned} \mu : \mathbb{R} \times \mathbf{P} &\longrightarrow \mathbf{P} \\ (\lambda, y) &\longmapsto \lambda y \end{aligned}$$

c) Dédurre de (b) que \mathbf{P} est différentiablement homotope à la section nulle (et donc à \mathbf{B}).

Remarque 2.11.1-2 : Ces derniers exercices montrent que les ensembles de \mathbf{B} -morphisme de fibrés vectoriels au-dessus de \mathbf{B} , sont naturellement des \mathbb{R} -espaces vectoriels et que la catégorie $\text{Vec}_{\mathbb{R}}(\mathbf{B})$ est "additive". On remarquera que lorsque \mathbf{B} est réduit à un singleton, la catégorie en question est équivalente à la catégorie $\text{Vec}_{\mathbb{R}}$ d'espaces vectoriels ; on peut donc considérer $\text{Vec}_{\mathbb{R}}(\mathbf{B})$ comme une généralisation de $\text{Vec}_{\mathbb{R}}$. L'exercice 2.11.2-2 évoque le problème de l'existence de "noyaux" dans $\text{Vec}_{\mathbb{R}}(\mathbf{B})$; en particulier $\text{Vec}_{\mathbb{R}}(\mathbf{B})$ n'est pas une catégorie abélienne dès que $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbf{B}) > 0$.

Soit $f : \mathbf{B}' \rightarrow \mathbf{B}$ un morphisme de variétés. Montrer que le foncteur $f^{-1} : \text{Vec}_{\mathbb{R}}(\mathbf{B}) \rightsquigarrow \text{Vec}_{\mathbb{R}}(\mathbf{B}')$ est compatible aux produits fibrés, *i.e.* il existe un difféomorphisme naturel entre $f^{-1}(\mathbf{P}_1 \times_{\mathbf{B}} \mathbf{P}_2) \cong f^{-1}(\mathbf{P}_1) \times_{\mathbf{B}'} f^{-1}(\mathbf{P}_2)$. Cette propriété traduit le fait que f^{-1} est un foncteur dit « *additif* ».

2.11.2 Le fibré tangent à une variété

Le fibré tangent à une variété est sans doute le fibré vectoriel le plus naturellement rattaché à une variété. Voici comment il peut être introduit en tant que variété abstraite (voir la section 2.8.2) en utilisant le théorème de Godement 2.7-1.

Soit \mathbf{M} une variété de dimension d , d'atlas complet $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\} \alpha \in \mathfrak{A}$. On considère alors la variété différentiable réunion disjointe de variétés produits : $\mathcal{T}(\mathcal{A}) := \coprod_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathbb{R}_\alpha^d \times \mathbb{R}^d$ et l'on note :

$$\begin{aligned} \Pi : \coprod_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathbb{R}_\alpha^d \times \mathbb{R}^d &\longrightarrow \mathbf{M} \\ (x_\alpha, v) &\longmapsto \varphi_\alpha^{-1}(x) \end{aligned}$$

L'application Π est alors bien définie et différentiable.

Soit maintenant \mathcal{R} la relation sur $\mathcal{T}(\mathcal{A}) = \coprod_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathbb{R}_\alpha^d \times \mathbb{R}^d$ définie par :

$$(x_\alpha, v) \mathcal{R} (x_\beta, w), \quad \text{si et seulement si,} \quad \begin{cases} \Pi(x) = \Pi(y), \text{ et} \\ d(\phi_{\beta,\alpha})_{x_\alpha}(v) = w. \end{cases}$$

La réflexivité, symétrie et transitivité de \mathcal{R} découlent respectivement des relations $\phi_{\alpha,\alpha} = \text{id}_{\mathbb{R}^d}$, $\phi_{\alpha,\beta} = \phi_{\beta,\alpha}$ et $\phi_{\gamma,\alpha} = \phi_{\gamma,\beta} \circ \phi_{\beta,\alpha}$. D'autre part \mathcal{R} étant clairement compatible à la projection Π , on aura une surjection canonique

$$\pi : \mathcal{T}(\mathbf{M}) := \left(\coprod_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathbb{R}_\alpha^d \times \mathbb{R}^d \right) / \mathcal{R} \longrightarrow \mathbf{M}.$$

L'espace topologique $\mathcal{T}(\mathbf{M})$ admet une structure canonique de variété différentiable rendant $\nu : \mathcal{T}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{T}(\mathbf{M})$ submersive. En effet, la trace du graphe de \mathcal{R} sur la composante $(\mathbb{R}_\alpha^d \times \mathbb{R}^d) \times (\mathbb{R}_\beta^d \times \mathbb{R}^d)$ n'est autre que le graphe de l'application définie sur $U_{\alpha\beta} \times \mathbb{R}^d$ par :

$$(x_\alpha, u) \mapsto (\phi_{\beta,\alpha}(x_\alpha), d(\phi_{\beta,\alpha})_{x_\alpha}(u)), \quad (\diamond)$$

ce qui prouve immédiatement que $\text{Gr}(\mathcal{R})$ est une sous-variété de $\mathcal{T}(\mathcal{A}) \times \mathcal{T}(\mathcal{A})$ et que $p_1 : \text{Gr}(\mathcal{R}) \rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{A})$ est submersive. Le théorème de Godement permet alors de conclure que $\mathcal{T}(\mathbf{M})$ possède une structure de variété différentiable de dimension :

$$2 \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{T}(\mathcal{A})) - \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{R}) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{T}(\mathcal{A})) = 2 \dim_{\mathbb{R}}(\mathbf{M}).$$

La projection canonique $\nu : \mathcal{T}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{T}(\mathbf{M})$ est alors submersive entre variétés de même dimension ; elle est donc *étale*, et les restrictions $\nu|_{\mathbb{R}_\alpha^d \times \mathbb{R}^d}$ constituent des cartes de coordonnées pour $\mathcal{T}(\mathbf{M})$. Ces cartes définissent la structure fibrée vectorielle de $\mathcal{T}(\mathbf{M})$ que nous annonçons. Les diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}_\alpha^d \times \mathbb{R}^d & \xrightarrow[\cong]{\nu} & \pi^{-1}(U_\alpha) & \subseteq & \mathcal{T}(\mathbf{M}) \\ p_1 \downarrow & & \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ \mathbb{R}_\alpha^d & \xrightarrow[\cong]{\varphi_\alpha^{-1}} & U_\alpha & \subseteq & \mathbf{M} \end{array}$$

donnent la structure de fibré localement trivial de $\mathcal{J}(\mathbf{M})$ au-dessus de \mathbf{M} et comme l'application de transition de $\mathbb{R}_\alpha^d \times \mathbb{R}^r$ vers $\mathbb{R}_\beta^d \times \mathbb{R}^r$ est donnée par (\diamond) , où $x_\alpha \in U_\alpha \mapsto d(\phi_{\beta,\alpha})_{x_\alpha} \in \text{GL}(d, \mathbb{R})$ est différentiable, la famille de cartes en question constitue bien un atlas de fibré vectoriel au-dessus de \mathbf{M} de rang $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbf{M})$. La fibration $(\mathcal{J}(\mathbf{M}), \mathbf{M}, \pi)$ est appelée « *le fibré tangent de \mathbf{M}* ».

Définition 2.11.2-1 : L'espace vectoriel $\pi^{-1}(x)$ est noté $\mathcal{J}_x(\mathbf{M})$ et ses éléments sont appelés les « *vecteurs tangents à \mathbf{M} basés en $x \in \mathbf{M}$* ». Les éléments de $\mathcal{J}(\mathbf{M})$ sont appelés les « *vecteurs tangents de \mathbf{M}* », et les sections de $(\mathcal{J}(\mathbf{M}), \mathbf{M}, \pi)$ au-dessus d'un ouvert $U \subseteq \mathbf{M}$, s'appellent les « *champs de vecteurs (tangents) au-dessus de U* ».

Le foncteur \mathcal{J}

Nous venons de montrer comment associer à toute variété différentiable son fibré tangent. Soit maintenant $f : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}'$ un morphisme de variétés de dimensions d et d' respectivement ; on définit un morphisme de fibrés vectoriels $\mathcal{J}(f) : \mathcal{J}(\mathbf{M}) \rightarrow \mathcal{J}(\mathbf{M}')$ en posant, pour chaque couple de cartes trivialisantes $(U_\alpha \subseteq \mathbf{M}, U'_{\alpha'} \subseteq \mathbf{M}')$ vérifiant $f(U_\alpha) \subseteq U'_{\alpha'}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(f)_{\alpha',\alpha} : \mathbb{R}_\alpha^d \times \mathbb{R}^d &\longrightarrow \mathbb{R}_{\alpha'}^{d'} \times \mathbb{R}^{d'} \\ (x, v) &\longmapsto (\xi_{\alpha',\alpha}(x), d(\xi_{\alpha',\alpha})_x(v)) \end{aligned}$$

où $\xi_{\alpha',\alpha} := \varphi'_{\alpha'} \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1}$.

Exercice 2.11.2-1 : Vérifier que les applications $\mathcal{J}(f)_{\alpha',\alpha}$ définissent bien un morphisme de fibrés vectoriels de $\mathcal{J}(\mathbf{M})$ à valeurs dans $\mathcal{J}(\mathbf{M}')$.

Montrer que la correspondance $\mathbf{M} \rightsquigarrow \mathcal{J}(\mathbf{M})$ et $f \rightsquigarrow \mathcal{J}(f)$ définit un foncteur covariant de la catégorie des variétés vers la catégorie des fibrés vectoriels.

Exercice 2.11.2-2 Sous-fibré tangent associé à un morphisme submersif : Soit $f : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}'$ un morphisme de variétés différentiables de dimensions respectives d et d' , on note $\ker(\mathcal{J}(f)) \subseteq \mathcal{J}(\mathbf{M})$ l'ensemble des points $z \in \mathcal{J}(\mathbf{M})$ tels que $\mathcal{J}(f)(z)$ est le vecteur nul de la fibre $\mathcal{J}(\mathbf{M}')_{f(\pi(z))}$.

- Montrer que $\mathcal{J}(f) : \mathcal{J}(\mathbf{M}) \rightarrow \mathcal{J}(\mathbf{M}')$ est submersive ;
- Montrer l'égalité $\ker(\mathcal{J}(f)) = \mathcal{J}(f)^{-1}(\sigma_0(\mathbf{M}'))$, où $\sigma_0(\mathbf{M}')$ est la section nulle de $(\mathcal{J}(\mathbf{M}'), \mathbf{M}', \pi')$.
En déduire que $\ker(\mathcal{J}(f))$ est une sous-variété différentiable de $\mathcal{J}(\mathbf{M})$ de dimension $(2d - d')$.
- Montrer que $(\ker(\mathcal{J}(f)), \mathbf{M}, \pi)$ est une fibration vectorielle de rang $(d - d')$.
- Montrer que pour tout $x' \in \mathbf{M}'$, la restriction de $\ker(\mathcal{J}(f))$ à la sous-variété $f^{-1}(x')$, s'identifie à $\mathcal{J}(f^{-1}(x'))$.
- Démontrez que si $(\ker(\mathcal{J}(f)), \mathbf{M}, \pi)$ est un sous-fibré vectoriel de $\mathcal{J}(\mathbf{M})$, alors f est de rang constant.
- Soit l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f : x \mapsto x^2$. Expliciter l'ensemble $\ker(\mathcal{J}(f))$ en identifiant $\mathcal{J}(\mathbb{R})$ à \mathbb{R}^2 . Même question pour l'application $z \mapsto z^2$ définie sur \mathbb{C}_u^* .

2.11.3 Fibrés vectoriels associés par représentations de groupes

Nous allons tirer profit dans cette section et la suivante de la remarque 2.11-1 pour construire de nouveaux fibrés.

Soit $(\mathbf{P}, \mathbf{B}, \pi)$ un fibré vectoriel de fibre E ; l'atlas complet de sa structure de fibré vectoriel donne les trivialisations locales de la condition 2.11-1-FV-2 :

$$\begin{aligned} \phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) &\xrightarrow{\cong} U_\alpha \times E \\ x &\longmapsto (\pi(x), \varphi_\alpha(x)) \end{aligned}$$

et les difféomorphisme de transition :

$$\begin{aligned} \phi_{\beta,\alpha} := \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : U_{\alpha\beta} \times E &\longrightarrow U_{\beta\alpha} \times E \\ (u, X) &\longmapsto (u, \bar{\varphi}_{\beta,\alpha}(u)(X)) \end{aligned}$$

où $\bar{\varphi}_{\alpha,\beta} : U_{\alpha\beta} \rightarrow \text{GL}(E)$ est différentiable.

Soit maintenant F un \mathbb{R} -espace vectoriel et $\rho : \text{GL}(E) \rightarrow \text{GL}(F)$ un homomorphisme de groupes différentiable (¹⁸). On considère alors la réunion disjointe des $U_\alpha \times F$ et l'on substitue les difféomorphismes de transition $\phi_{\beta,\alpha}$ par les applications :

$$\begin{aligned} (\phi_\rho)_{\beta,\alpha} : U_{\alpha\beta} \times F &\longrightarrow U_{\beta\alpha} \times F \\ (u, X) &\longmapsto (u, \rho(\bar{\varphi}_{\beta,\alpha}(u))(X)) \end{aligned}$$

Ces applications ont les propriétés requises pour être les difféomorphismes de transition d'une structure fibrée vectorielle comme annoncée. En effet :

a) $(\phi_\rho)_{\beta,\alpha}$ est différentiable.

Il suffit pour cela de vérifier la différentiabilité de $u \mapsto \rho(\bar{\varphi}_{\beta,\alpha}(u)) \in \text{GL}(F)$. Or, cette application s'obtient en composant $u \mapsto \bar{\varphi}_{\beta,\alpha}(u)$ avec l'homomorphisme ρ ; des applications différentiables par hypothèse.

b) On a $(\phi_\rho)_{\alpha,\alpha} = \text{id}$, $(\phi_\rho)_{\beta,\alpha} = (\phi_\rho)_{\alpha,\beta}^{-1}$ et $(\phi_\rho)_{\gamma,\alpha} = (\phi_\rho)_{\gamma,\beta} \circ (\phi_\rho)_{\beta,\alpha}$.

Conséquences formelles du fait que ρ est un homomorphisme de groupes.

Les mêmes raisonnements que ceux qui nous ont permis d'introduire le fibré tangent, permettent le recollement des $U_\alpha \times F$ en un fibré vectoriel $(\mathbf{P}_\rho, \mathbf{B}, \pi_\rho)$.

Exemple 2.11.3-1 et définition : Soit \mathbf{M} une variété différentiable de dimension d . L'application de matrices $A \mapsto {}^t A^{-1}$ définit un homomorphisme de groupes $\text{GL}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \text{GL}((\mathbb{R}^d)^*)$. Le fibré associé est noté $\mathcal{T}^*(\mathbf{M})$; on l'appelle « le fibré cotangent à \mathbf{M} ».

¹⁸ Par exemple provenant d'un homomorphisme de \mathbb{R} -algèbres de $\text{End}_{\mathbb{R}}(E)$ vers $\text{End}_{\mathbb{R}}(F)$.

2.11.4 Fibrés vectoriels construits “par functorialité”

La construction de la section précédente, valable pour un fibré vectoriel donné, peut être vue comme un cas particulier d’une correspondance functorielle définie sur la catégorie $\text{Vec}_{\mathbb{R}}(\mathbf{M})$ de tous les fibrés vectoriels au-dessus d’une variété \mathbf{M} .

Notons $\text{Vec}_{\mathbb{R}}$ la catégorie dont les objets sont les \mathbb{R} -espaces vectoriels et les morphismes sont les applications linéaires. Nous allons nous intéresser aux foncteurs additifs \mathcal{F} (covariants pour simplifier l’exposé) définis sur $\text{Vec}_{\mathbb{R}}$ vers elle-même. En particulier, les morphismes :

$$\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V_1, V_2) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathcal{F}(V_1), \mathcal{F}(V_2)), \quad (\diamond)$$

sont \mathbb{R} -linéaires.

Soit maintenant $(\mathbf{P}, \mathbf{B}, \pi)$ un fibré vectoriel de fibre E et soit \mathcal{F} un foncteur additif comme ci-dessus. Nous allons décrire un procédé canonique pour associer à $(\mathbf{P}, \mathbf{B}, \pi)$ un fibré vectoriel $(\mathcal{F}\mathbf{P}, \mathbf{B}, \mathcal{F}\pi)$ de fibre $\mathcal{F}(E)$ et à un morphisme $f : (\mathbf{P}_1, \mathbf{B}, \pi_1) \rightarrow (\mathbf{P}_2, \mathbf{B}, \pi_2)$ de fibrés vectoriels au-dessus de \mathbf{B} , un morphisme $\mathcal{F}(f) : (\mathcal{F}(\mathbf{P}_1), \mathbf{B}, \mathcal{F}(\pi_1)) \rightarrow (\mathcal{F}(\mathbf{P}_2), \mathbf{B}, \mathcal{F}(\pi_2))$. La correspondance ainsi définie sera functorielle de la catégorie des fibrés vectoriels (au-dessus de \mathbf{B}) vers elle-même.

L’idée est assez simple et provient de remarquer que l’application (\diamond) étant linéaire, est automatiquement différentiable lorsque V_1 et V_2 sont de dimension finie, et d’autre part, que lorsque $V_1 = V_2 = V$, elle donne un homomorphisme de groupes $\rho_{\mathcal{F}}(V) : \text{GL}(V) \rightarrow \text{GL}(\mathcal{F}(V))$ qui permet, par le procédé décrit dans la section précédente, de construire la fibration $(\mathbf{P}_{\rho_{\mathcal{F}}}, \mathbf{B}, \pi_{\rho_{\mathcal{F}}})$ également notée $(\mathcal{F}(\mathbf{P}), \mathbf{B}, \mathcal{F}(\pi))$.

L’analyse locale d’un \mathbf{B} -morphisme de fibrés vectoriels $f : (\mathbf{P}_1, \mathbf{B}, \pi_1) \rightarrow (\mathbf{P}_2, \mathbf{B}, \pi_2)$ faite en page 47, donnait les descriptions :

$$\begin{array}{ccc} \pi_1^{-1}(U_\alpha) & \xrightarrow{f|_{U_\alpha}} & \pi_2^{-1}(U_\alpha) \\ \phi_{1,\alpha} \downarrow \cong & & \cong \downarrow \phi_{2,\alpha} \\ U_\alpha \times E_1 & \xrightarrow{f_\alpha} & U_\alpha \times E_2 \\ (u, v) & \longmapsto & (u, \bar{f}_\alpha(u)(v)) \end{array}$$

et la condition de commutation nécessaire (C) :

$$\left(\bar{\varphi}_{2,\beta,\alpha}(u) \circ \bar{f}_{\alpha,\beta}(u) \right)(v) = \left(\bar{f}_{\beta,\alpha}(u) \circ \bar{\varphi}_{1,\beta,\alpha}(u) \right)(v). \quad (C)$$

L’application du foncteur \mathcal{F} aux applications $\bar{f}_\alpha, \bar{f}_\beta, \bar{f}_{\alpha,\beta}, \bar{f}_{\beta,\alpha}, \bar{\varphi}_{\alpha,\beta}, \bar{\varphi}_{\beta,\alpha}$, donnera des applications différentiables satisfaisant toujours la relation de commutation (C). Or, c’est bien tout ce dont on a besoin pour montrer que la famille des $\mathcal{F}(\bar{f}_\alpha)$ se recollent en un morphisme de fibrés vectoriels $\mathcal{J}(f) : (\mathcal{F}(\mathbf{P}_1), \mathbf{B}, \mathcal{F}(\pi_1)) \rightarrow (\mathcal{F}(\mathbf{P}_2), \mathbf{B}, \mathcal{F}(\pi_2))$.

Remarque 2.11.4-1 : Ces idées se généralisent sans difficulté à la catégorie de fibrations vectorielles sur des bases arbitraires. En particulier, le foncteur \mathcal{J} peut être “composé” avec le foncteur induit par le foncteur qui associe à un espace vectoriel son algèbre extérieure : $\bullet \rightsquigarrow \mathcal{A}^*(\bullet)$. La section suivante est destinée à l’étude détaillée de ce foncteur.

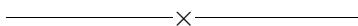
Remarque 2.11.4-2 Bifoncteurs : Plus généralement, soit \mathcal{B} un foncteur additif $\mathcal{B} : \text{Vec}_{\mathbb{R}} \times \text{Vec}_{\mathbb{R}} \rightsquigarrow \text{Vec}_{\mathbb{R}}$, où $\text{Vec}_{\mathbb{R}} \times \text{Vec}_{\mathbb{R}}$ désigne la catégorie dont les objets sont les couples d'espaces vectoriels et où :

$$\text{Mor}((V_1, W_1), (V_2, W_2)) := \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V_1, V_2) \times \text{Hom}_{\mathbb{R}}(W_1, W_2),$$

la composition étant définie coordonnée par coordonnée ; la catégorie résultante est alors additive (et même abélienne). Un tel foncteur est appelé un bifoncteur additif, sa variance dépendra de son comportement "coordonnée par coordonnée". La "somme directe", le "produit tensoriel", "le foncteur Hom" qui associe $(V, W) \rightsquigarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$, sont des exemples classiques de bifoncteurs, les deux premiers sont bi-covariants et le dernier contravariant en la première coordonnée et covariant en la seconde coordonnée.

Les constructions fonctorielles de fibrés vectoriels que nous avons décrites se généralisent, laborieusement mais sans difficulté, au cadre de bifoncteurs, c'est ainsi que l'on peut faire correspondre *de manière fonctorielle* à tout couple de fibrés vectoriels (P_1, B, π_1) et (P_2, B, π_2) au-dessus d'une même variété B , les fibrés au-dessus de B notés : $P_1 \oplus P_2, P_1 \otimes_{\mathbb{R}} P_2, \text{Hom}_{\mathbb{R}}(P_1, P_2)$.

Exercice 2.11.4-2.1 : L'espace vectoriel $\Gamma(B; \text{Hom}_{\mathbb{R}}(P_1, P_2))$ des sections globales du fibré vectoriel $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(P_1, P_2) \rightarrow B$ s'identifie canoniquement à l'espace $\text{Mor}_{\text{Vec}_{\mathbb{R}}(B)}(P_1, P_2)$ des B -morphisms de fibrés vectoriels au-dessus de B .



§ 3. Complexe de de Rham et cohomologie de de Rham des variétés différentiables

3.1 Formes alternées sur un espace vectoriel de dimension finie

Dans la suite, on désignera par E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie. On pourra consulter la référence [Car] pour toute cette section.

3.1.1 Formes multilinéaires

Soit m un entier naturel positif. On appelle « *forme m -multilinéaire* », toute application :

$$\varphi : \underbrace{E \oplus \dots \oplus E}_{m\text{-fois}} \rightarrow \mathbb{R}$$

qui soit \mathbb{R} -linéaire par rapport à chaque coordonnée indépendamment, *i.e.* telle que pour chaque $1 \leq k \leq m$ et chaque $(m-1)$ -uplet $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{k-1}, \vec{a}_{k+1}, \dots, \vec{a}_m) \in E^{m-1}$, l'application :

$$\vec{x} \in E \longmapsto \varphi(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{k-1}, \vec{x}, \vec{a}_{k+1}, \dots, \vec{a}_m) \in \mathbb{R},$$

est une forme \mathbb{R} -linéaire sur E . L'ensemble des formes m -linéaires sur E sera noté $\mathcal{L}^m(E)$.

En posant pour tous $\varphi, \psi \in \mathcal{L}^m(E)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} (\varphi + \psi)(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m) &= \varphi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m) + \psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m) \\ (\lambda \cdot \varphi)(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m) &= \lambda(\varphi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m)) \end{aligned}$$

les applications $(\varphi + \psi)$ et $(\lambda \cdot \varphi)$ sont encore m -multilinéaires. Muni de ces opérations, l'ensemble $\mathcal{L}^m(E)$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

Exercice 3.1.1-1 : Pour E et F deux \mathbb{R} -espaces vectoriels, notons $\mathcal{L}(E, F) := \text{Hom}_{\mathbb{R}}(E, F)$ le \mathbb{R} -espace vectoriel des applications linéaires de E à valeurs dans F . Pour chaque entier naturel m , l'application qui fait correspondre à $\varphi \in \mathcal{L}^{m+1}(E)$ l'application qui associe à $\vec{x}_0 \in E$ l'application $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m) \mapsto \varphi(\vec{x}_0, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m)$, établit un isomorphisme d'espaces vectoriels entre :

$$\mathcal{L}^{m+1}(E) \cong \mathcal{L}(E, \mathcal{L}^m(E)).$$

Lorsque l'on fixe un repère $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_d)$ de E , la multilinéarité suffit à montrer que pour chaque $\varphi \in \mathcal{L}^m(E)$ donnée, il existe une famille de nombres réels $\{A_{i_1, \dots, i_m}\}$ indexée par les suites d'entiers (i_1, \dots, i_m) avec $1 \leq i_k \leq d$, telle que :

$$\alpha(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m) = \sum_{(i_1, \dots, i_m)} A_{i_1, \dots, i_m} (\vec{x}_1)_{i_1} (\vec{x}_2)_{i_2} \cdots (\vec{x}_m)_{i_m} \quad (\diamond)$$

où $(\vec{x})_j$ désigne la j -ième coordonnée de \vec{x} dans le repère \mathcal{B} . Soit $\mathcal{B}^* = ((\vec{e}_1)^*, \dots, (\vec{e}_d)^*)$ le repère dual de \mathcal{B} , on a $(\vec{x})_j = (\vec{e}_j)^*(\vec{x})$, et l'égalité (\diamond) se réécrit :

$$\begin{aligned} \alpha(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m) &= \sum_{(i_1, \dots, i_m)} A_{i_1, \dots, i_m} ((\vec{e}_{i_1})^*(\vec{x}_1)) \cdots ((\vec{e}_{i_m})^*(\vec{x}_m)) \\ &= \sum_{(i_1, \dots, i_m)} A_{i_1, \dots, i_m} ((\vec{e}_{i_1})^* \cdots (\vec{e}_{i_m})^*)(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m) \end{aligned}$$

où $((\vec{e}_{i_1})^* \cdots (\vec{e}_{i_m})^*)$ désigne le produit des formes linéaires duales en question. Il s'ensuit que la famille de toutes les formes multilinéaires de la forme $((\vec{e}_{i_1})^* \cdots (\vec{e}_{i_m})^*)$ constitue une base pour $\mathcal{L}^m(E)$, en particulier :

$$\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{L}^m(E)) = \dim_{\mathbb{R}}(E)^m = d^m.$$

3.1.2 Action de \mathfrak{S}_m sur $\mathcal{L}^m(E)$

Notons \mathfrak{S}_m le groupe des permutations de l'ensemble des entiers $\{1, 2, \dots, m\}$; et posons pour chaque $\sigma \in \mathfrak{S}_m$ et chaque $\varphi \in \mathcal{L}^m(E)$:

$$(\sigma \cdot \varphi)(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m) := \varphi(\vec{x}_{\sigma(1)}, \dots, \vec{x}_{\sigma(m)}).$$

L'application $\sigma \cdot \varphi$ est alors une m -forme multilinéaire et $\cdot : \mathfrak{S}_m \times \mathcal{L}^m(E) \rightarrow \mathcal{L}^m(E)$ est une action du groupe \mathfrak{S}_m sur $\mathcal{L}^m(E)$ par des isomorphismes linéaires (on parle alors d'« action linéaire »).

Rappelons que l'on appelle « caractère » de \mathfrak{S}_m tout homomorphisme de groupes $\rho : \mathfrak{S} \rightarrow (\mathbb{C}, \cdot, 1)$. Le fait que \mathfrak{S}_m soit de cardinal fini entraîne que ρ est à valeurs dans le sous-groupe multiplicatif \mathbb{C}_u^* des nombres complexes de valeur absolue égale à 1. Et comme \mathbb{C}_u^* est abélien, la restriction de ρ au sous groupe « dérivé » $\mathfrak{A}_m := [\mathfrak{S}_m, \mathfrak{S}_m]$ (également appelé « sous-groupe alterné ») sera trivial. Il s'ensuit que ρ se factorise à travers du groupe $\mathfrak{S}_m/\mathfrak{A}_m$ que l'on sait être isomorphe à $\{\pm 1\}$ (signatures des permutations); de sorte que $\rho = \varepsilon^\ell$, où $\ell = 0, 1$, et où $\varepsilon(\sigma)$ dénote la signature de $\sigma \in \mathfrak{S}_m$.

3.1.3 Algèbre des formes multilinéaires

Posons $\mathcal{L}^0(E) = \mathbb{R}$ et notons $\mathcal{L}^*(E)$ le \mathbb{R} -espace vectoriel somme directe de tous les $\mathcal{L}^m(E)$ avec $m \in \mathbb{N}$. On désignera par $0, 1 \in \mathcal{L}^*(E)$, les scalaires $0, 1 \in \mathbb{R} = \mathcal{L}^0(E) \subseteq \mathcal{L}^*(E)$. L'application :

$$\cdot : \mathcal{L}^m(E) \oplus \mathcal{L}^n(E) \longrightarrow \mathcal{L}^{m+n}(E)$$

qui associe au couple (φ, ψ) la $(m+n)$ -forme multilinéaire :

$$(\varphi \cdot \psi)(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m, \vec{x}_{m+1}, \dots, \vec{x}_{m+n}) := \varphi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m) \psi(\vec{x}_{m+1}, \dots, \vec{x}_{m+n}),$$

est \mathbb{R} -bilinéaire et fait de $(\mathcal{L}^*(E), +, \cdot, 0, 1)$ une \mathbb{R} -algèbre graduée. Les formes de $\mathcal{L}^m(E) \subseteq \mathcal{L}^*(E)$ sont appelées « *homogènes de degré m* » ; on note $\deg(\alpha)$ le degré d'une forme multilinéaire homogène.

3.1.4 Formes alternées et opérateur d'antisymétrisation

On appelle « *m -forme alternée* » toute forme m -multilinéaire α telle que $\alpha(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m) = 0$ à chaque fois que $\vec{x}_i = \vec{x}_j$ pour *deux indices différents* i, j ; on notera $\mathcal{A}^m(E)$ ⁽¹⁹⁾ leur ensemble.

Exercice 3.1.4-1 :

a) Une application $\alpha \in \mathcal{L}^m(E)$ est alternée, si et seulement si,

$$\sigma \cdot \alpha = \varepsilon(\sigma) \alpha, \quad \text{pour tout } \sigma \in \mathfrak{S}_m,$$

i.e., si et seulement si,

$$\alpha(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m) = \varepsilon(\sigma) \alpha(\vec{x}_{\sigma(1)}, \dots, \vec{x}_{\sigma(m)}).$$

pour tout $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m) \in E^m$ et toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_m$.

b) L'ensemble $\mathcal{A}^m(E) \subseteq \mathcal{L}^m(E)$ est un sous-espace vectoriel.

c) Pour chaque entier positif m (plus grand que 1), l'application linéaire $\mathbf{a}_m : \mathcal{L}^m(E) \rightarrow \mathcal{L}^m(E)$ définie par :

$$\mathbf{a}_m(\alpha)(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m) := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \varepsilon(\sigma) (\sigma \cdot \alpha)(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \varepsilon(\sigma) \alpha(\vec{x}_{\sigma(1)}, \dots, \vec{x}_{\sigma(m)})$$

est à valeurs dans $\mathcal{A}^m(E)$ et l'on a : $\mathbf{a}_m(\alpha) = m! \alpha$, pour tout $\alpha \in \mathcal{A}^m(E)$.

L'application \mathbf{a}_m est appelée « *opérateur d'antisymétrisation* ».

d) En fixant un repère \mathcal{B} pour E , montrer dans l'écriture (\diamond) de $\alpha \in \mathcal{L}^m(E)$, que $\alpha \in \mathcal{A}^m(E)$, si et seulement si,

$$A_{(i_1, \dots, i_m)} = \varepsilon(\sigma) A_{(i_{\sigma(1)}, \dots, i_{\sigma(m)})}, \quad \text{pour tout } \sigma \in \mathfrak{S}_m.$$

e) Dédurre de la question précédente que $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{A}^m(E)) = 0$, pour tout $m > \dim_{\mathbb{R}}(E)$, et que :

$$\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{A}^m(E)) = \binom{\dim_{\mathbb{R}}(E)}{m}, \quad (*)$$

pour tout $m \leq \dim_{\mathbb{R}}(E)$.

¹⁹ La notation $\bigwedge^m(E^*)$ est également très classique.

Remarque 3.1.4-1-e.1 : Le cas $m = \dim_{\mathbb{R}}(E)$ jouera un rôle particulièrement important dans le cours. L'égalité (*) montre que $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{A}^{\dim_{\mathbb{R}}(E)}(E)) = 1$. Bien de subtilités seront conséquence directe de la **non existence** d'un isomorphisme canonique entre $\mathcal{A}^{\dim_{\mathbb{R}}(E)}(E)$ et \mathbb{R} (cf. page 58).

Remarque 3.1.4-1-e.2 : Lorsque $E = \mathbb{R}^n$, et que l'on identifie $(\mathbb{R}^n)^n$ à l'ensemble des matrices $M(n, \mathbb{R})$, l'application déterminant $\det : (\mathbb{R}^n)^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une application n -linéaire alternée. Rappelons que $\det(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ mesure le volume "signé" du parallélépipède de côtés donnés par les vecteurs $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$, ce qui explique de manière intuitivement claire à la fois la notion de multilinéarité et d'alternance. Par ailleurs, la remarque précédente montre que toute autre n -forme alternée est un multiple de celle-ci.

3.1.5 Algèbre extérieure

Notons $\mathcal{A}^*(E)$ ⁽²⁰⁾ le \mathbb{R} -espace vectoriel somme directe des $\mathcal{A}^m(E)$ pour $m \in \mathbb{N}$. On définit une opération binaire $\wedge : \mathcal{A}^m(E) \oplus \mathcal{A}^n(E) \rightarrow \mathcal{A}^{m+n}(E)$ appelée « *produit extérieur* » par :

$$\varphi \wedge \psi := \frac{1}{m!n!} \mathfrak{a}_{m+n}(\varphi \cdot \psi). \quad (\diamond)$$

L'opération \wedge est alors *associative et distributive* et définit une structure d'algèbre graduée « *anti-commutative* » sur $\mathcal{A}^*(E)$; on a la relation de commutation :

$$\boxed{\varphi \wedge \psi = (-1)^{\deg(\varphi)\deg(\psi)} \psi \wedge \varphi} \quad (\diamond\diamond)$$

Exercice 3.1.5-1 : Vérifier l'associativité, distributivité et anti-commutativité du produit extérieur de formes alternées (cf. [Car] propositions 1.5.1 et 1.5.2, en page 185).

Remarque 3.1.5-1.1 : Le lecteur peut comprendre sans difficulté la raison de la division par l'entier $(m!n!)$ dans l'égalité (\diamond) ; elle provient du fait que comme φ et ψ sont déjà alternées de degrés respectifs m et n , deux permutations $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathfrak{S}_{m+n}$, vérifiant $\sigma_1([1, m]) = \sigma_2([1, m])$ donneront deux formes identiques $\varepsilon(\sigma_1)\sigma_1 \cdot (\varphi \cdot \psi) = \varepsilon(\sigma_2)\sigma_2 \cdot (\varphi \cdot \psi)$ lors de l'application de l'opérateur d'antisymétrisation \mathfrak{a}_{m+n} . C'est donc bien dans un but de correction de ces redondances que l'on divise par $(m!n!)$. Plus précisément, la relation d'équivalence ' \sim_m ' sur \mathfrak{S}_{m+n} définie par

$$\sigma_1 \sim_m \sigma_2, \text{ si et seulement si, } \sigma_1([1, m]) = \sigma_2([1, m])$$

produit des classes d'équivalence de cardinal $(m!n!)$. En effet, pour chacune de ces classes, il existe une et une seule permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_{m+n}$ vérifiant

$$\sigma(1) < \dots < \sigma(m) \quad \text{et} \quad \sigma(m+1) < \dots < \sigma(m+n) \quad (\ddagger),$$

toute autre permutation de la classe s'en déduit par permutations des ensembles $\sigma([1, m])$ et $\sigma([m+1, m+n])$, ce qui explique le facteur $(m!n!)$. Notons $\mathfrak{S}_{m,n}$ le *sous-ensemble* des permutations $\sigma \in \mathfrak{S}_{m+n}$ vérifiant (\ddagger), nous aurions donc pu poser comme définition de produit extérieur, à la place de (\diamond) :

$$\varphi \wedge \psi(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_m, \vec{a}_{m+1}, \dots, \vec{a}_{m+n}) := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{m,n}} \varepsilon(\sigma) \varphi(\vec{a}_{\sigma(1)}, \dots, \vec{a}_{\sigma(m)}) \cdot \psi(\vec{a}_{\sigma(m+1)}, \dots, \vec{a}_{\sigma(m+n)}),$$

²⁰ Noté également $\bigwedge^*(E^*)$.

ce qui aurait donné exactement le même résultat, avec l'avantage bien évident que ne devant pas diviser par $(m!n!)$, la formule est valable sur des anneaux autres que \mathbb{Q} , en particulier sur des corps de caractéristique positive ; mais bien sûr, la preuve de l'associativité du produit extérieur, sera alors plus élaborée.

Les permutation de $\mathfrak{S}_{m,n}$ sont appelées « *permutations de battage en tas de m et n cartes* » pour des raisons intuitivement claires.

Exercice 3.1.5-2 : Montrer que $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{A}^*(E)) = 2^{\dim_{\mathbb{R}}(E)}$.

Exercice 3.1.5-3 et terminologie : Les éléments du sous-espace $\mathcal{A}^{2^*}(E) := \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{A}^{2m}(E)$ sont appelés des « *formes (alternées) paires* ». Montrer que $\mathcal{A}^{2^*}(E)$ est le centre $\mathfrak{Z}(\mathcal{A}^*(E))$ de l'algèbre $\mathcal{A}^*(E)$.

De manière analogue, les formes du sous-espace $\mathcal{A}^{2^{*+1}}(E) := \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{A}^{2m+1}(E)$ sont appelés « *formes (alternées) impaires* ».

Exercice 3.1.5-4 :

- Montrer qu'un élément $u \in \mathcal{A}^*(E)$ est *nilpotent*, si et seulement si, sa composante de degré zéro est nulle.
- Montrer que $u \in \mathcal{A}^*(E)$ est *invertible*, si et seulement si, sa composante de degré zéro est non nulle.
- Montrer que $\mathcal{A}^*(E)$ est un anneau local. Précisez son idéal maximal.

Exercice 3.1.5-5 : Montrer que si φ est homogène de degré *impair*, alors $\varphi \wedge \varphi = 0$. Que dire du même produit $\varphi \wedge \varphi$ lorsque φ est *non-homogène* et *impair* ?

Exercice 3.1.5-6 : Montrer que l'inclusion $\mathcal{A}^*(E) \subseteq \mathcal{L}^*(E)$ n'est pas en général une inclusion d'algèbres.

Exercice 3.1.5-7 : Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de repère $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_d)$ et repère dual $\mathcal{B}^* = ((\vec{e}_1)^*, \dots, (\vec{e}_d)^*)$. A l'aide de l'exercice 3.1.4-1-d montrer que dans $\mathcal{A}^m(E)$, on a pour chaque suite ordonnée $(i_1 < \dots < i_m)$, où $1 \leq i_k \leq d$:

$$(\vec{e}_{i_1})^* \wedge \dots \wedge (\vec{e}_{i_m})^* = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} \varepsilon(\sigma) (\vec{e}_{i_{\sigma(1)}})^* \dots (\vec{e}_{i_{\sigma(m)}})^*,$$

où \mathfrak{S}_m dénote le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, \dots, m\}$ et $\varepsilon(\sigma)$ désigne « *la signature* » de la permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_m$. La famille $\{(\vec{e}_{i_1})^* \wedge \dots \wedge (\vec{e}_{i_m})^*\}$ indexée par l'ensemble de toutes les suites $(i_1 < \dots < i_m)$ avec $1 \leq i_k \leq d$, est une base pour $\mathcal{A}^m(E)$.

3.1.6 Images inverses des formes multilinéaires et des formes alternées

Soient E, F deux \mathbb{R} -espaces vectoriels et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire, on définit $f^* : \mathcal{L}^m(F) \rightarrow \mathcal{L}^m(E)$ par :

$$f^*(\varphi)(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m) := \varphi(f(\vec{x}_1), \dots, f(\vec{x}_m))$$

On en déduit une application $f^* : \mathcal{L}^*(F) \rightarrow \mathcal{L}^*(E)$.

Exercice 3.1.6-1 : Sous les hypothèses en cours,

- Montrer que $f^* : \mathcal{L}^m(F) \rightarrow \mathcal{L}^m(E)$ est \mathbb{R} -linéaire et commute à l'action de \mathfrak{S}_m , en particulier, elle commute à l'action de l'opérateur d'antisymétrisation \mathfrak{a}_m . Lorsque φ est alternée, montrer que $f^*(\varphi)$ l'est également.
- Montrer l'égalité : $f^*(\varphi \wedge \psi) = f^*(\varphi) \wedge f^*(\psi)$, pour tous $\varphi, \psi \in \mathcal{A}^*(E)$.
- Les applications $f^* : \mathcal{L}^*(F) \rightarrow \mathcal{L}^*(E)$ et $f^* : \mathcal{A}^*(F) \rightarrow \mathcal{A}^*(E)$ sont des homomorphismes de \mathbb{R} -algèbres graduées.

Exercice 3.1.6-2 : Soient E et F des \mathbb{R} -espaces vectoriels de repères $\mathcal{B}_E = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_{d(E)})$ et $\mathcal{B}_F = (\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_{d(F)})$ respectivement. Notons $\mathcal{B}_E^* = ((\vec{e}_1)^*, \dots, (\vec{e}_{d(E)})^*)$ et $\mathcal{B}_F^* = ((\vec{f}_1)^*, \dots, (\vec{f}_{d(F)})^*)$ les repères duaux. Soit $g : E \rightarrow F$ une application linéaire de matrice $((g)) = (g_{j,i})$, relativement aux repères \mathcal{B}_E et \mathcal{B}_F .

- Pour chaque $1 \leq k \leq d(F)$, on a :

$$g^*((\vec{f}_k)^*) = \sum_{1 \leq i \leq d(E)} g_{k,i} (\vec{e}_i)^*.$$

- Pour chaque entier naturel r et chaque suite d'entiers $(1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq d(F))$, on a :

$$\begin{aligned} g^*((\vec{f}_{j_1})^* \wedge \dots \wedge (\vec{f}_{j_r})^*) &= g^*(\vec{f}_{j_1})^* \wedge \dots \wedge g^*(\vec{f}_{j_r})^* \\ &= \sum_{1 \leq i_1, \dots, i_r \leq d(E)} g_{j_1, i_1} g_{j_2, i_2} \dots g_{j_r, i_r} (e_{i_1})^* \wedge \dots \wedge (e_{i_r})^* \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq d(E)} \left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} \varepsilon(\sigma) g_{j_1, i_{\sigma(1)}} g_{j_2, i_{\sigma(2)}} \dots g_{j_r, i_{\sigma(r)}} \right) (e_{i_1})^* \wedge \dots \wedge (e_{i_r})^* \end{aligned}$$

où l'on voit apparaître entre parenthèses les « mineurs de rang r » de la matrice $((g))$.

- En particulier, si $d(E) = d(F) = d$, on a :

$$g^*((\vec{f}_1)^* \wedge \dots \wedge (\vec{f}_d)^*) = \det((g)) (\vec{e}_1)^* \wedge \dots \wedge (\vec{e}_d)^*.$$

Exercice 3.1.6-3 : Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire entre deux \mathbb{R} -espaces vectoriels de dimension finie. Montrer l'équivalence des assertions suivantes :

- f est un isomorphisme.
- $f^* : \mathcal{A}^*(F) \rightarrow \mathcal{A}^*(E)$ est un isomorphisme d'algèbres.
- Il existe un entier naturel $m > 0$ tel que $f^* : \mathcal{A}^m(F) \rightarrow \mathcal{A}^m(E)$ est un isomorphisme.

Exercice 3.1.6-4 : Notons $\text{Vec}_{\mathbb{R}}$ la catégorie des \mathbb{R} -espaces vectoriels de dimension finie où les morphismes sont les applications \mathbb{R} -linéaires et la composition de morphismes est la composition d'applications.

Notons $\text{Alg}^{\mathbb{N}}(\mathbb{R})$ la catégorie des \mathbb{R} -algèbres graduées sur \mathbb{N} dont les morphismes sont les \mathbb{R} -homomorphismes gradués (de degré 0) d'algèbres. Montrer que la correspondance qui associe à un espace vectoriel E l'algèbre graduée $\mathcal{L}^*(E)$ (resp. $\mathcal{A}^*(E)$) et à l'application linéaire $f : E \rightarrow F$ l'application $f^* : \mathcal{L}^*(F) \rightarrow \mathcal{L}^*(E)$ (resp. $f^* : \mathcal{A}^*(F) \rightarrow \mathcal{A}^*(E)$), est un *foncteur additif contravariant exact*⁽²¹⁾.

²¹ Un chapitre ultérieur est destiné à rappeler les notions de la théorie de catégories sous-jacentes à cette question.

3.1.7 Non naturalité d'une dualité

Pour tout nombre naturel $m \leq d = \dim_{\mathbb{R}}(E)$, le produit extérieur de formes alternées définit une application bilinéaire non dégénérée :

$$\wedge : \mathcal{A}^m(E) \oplus \mathcal{A}^{d-m}(E) \longrightarrow \mathcal{A}^d(E) \sim \mathbb{R}. \quad (\mathcal{D}(E))$$

On en déduit l'égalité $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{A}^m(E)) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{A}^{d-m}(E))$, mais ce qui est vraiment important à souligner c'est le fait que toute identification "par dualité" entre $\mathcal{A}^m(E)$ et $(\mathcal{A}^{d-m}(E))^*$ sera relative à un isomorphisme entre $\mathcal{A}^d(E)$ et \mathbb{R} autrement dit, relative à la donnée d'une forme alternée de degré maximal non nulle; or, il n'existe aucun choix naturel ou canonique (en dehors du cas $E = \mathbb{R}^d$) d'une telle forme alternée.

Exercice 3.1.7-1 : Soient E et F deux \mathbb{R} -espaces vectoriels et $f : E \rightarrow F$ une application \mathbb{R} -linéaire. Montrer la commutativité du diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}^m(F) \times \mathcal{A}^n(F) & \xrightarrow{\wedge} & \mathcal{A}^{m+n}(F) \\ f^* \downarrow & & \downarrow f^* \\ \mathcal{A}^m(E) \times \mathcal{A}^n(E) & \xrightarrow{\wedge} & \mathcal{A}^{m+n}(E) \end{array}$$

3.2 Formes différentielles sur les espaces vectoriels

Commençons cette section en rappelant que la notion de différentielle d'une application a un sens sur la catégorie des ouverts des espaces vectoriels normés complets (les espaces de Banach). Lorsque l'on se restreint à la sous-catégorie des ouverts des espaces vectoriels de dimension finie, le "calcul différentiel" y est indépendant des normes puisque dans ce cas toutes les normes sont équivalentes. Il importe cependant de retenir que si la différentielle d'une application ne dépend pas du "choix" d'une norme, elle dépend néanmoins du fait que les normes existent. Plus précisément, soient E et F deux \mathbb{R} -espaces vectoriels de dimension finie, la définition et l'étude de :

- la topologie de E et F ;
- la différentiabilité d'une application $f : U \subseteq E \rightarrow F$, pour U ouvert dans E ;
- la définition de la différentielle $df_{\mathbf{x}} \in \mathcal{L}(E, F)$ en chaque point $\mathbf{x} \in U$;
- la différentiabilité de l'application $df : U \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$;

se font à l'aide d'un choix de normes, mais les conclusions en sont indépendantes.

Une autre manière de procéder dans le cas de dimension finie, consiste à se ramener, à l'aide d'isomorphismes linéaires $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $\psi : F \rightarrow \mathbb{R}^n$, aux mêmes questions et à l'application $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ entre les ouverts $\varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^m$ et $\psi(V) \subseteq \mathbb{R}^n$. En effet, si l'on part d'espaces vectoriels normés E et F , la différentiabilité de f en un point $\mathbf{x} \in U$, équivaut à la différentiabilité de $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ en $\varphi(\mathbf{x})$; auquel cas, on a :

$$df_{\mathbf{x}}(H) = \psi^{-1} \left(d \left(\psi \circ f \circ \varphi^{-1} \right)_{\varphi(\mathbf{x})} \left(\varphi(H) \right) \right), \quad (*)$$

et ceci, quels que soient les isomorphismes φ et ψ . Ceci suggère que l'on puisse faire abstraction des normes sur E et F dans une définition de la différentiabilité et différentielle d'une application $f : U \subseteq E \rightarrow F$ basée sur l'égalité (*).

Cette deuxième manière d'introduire le calcul différentiel sur un espace vectoriel correspond très précisément au point de vue des variétés différentiables et c'est bien celle que nous allons privilégier.

Ces remarques préliminaires suffisent donc pour donner un sens intrinsèque à l'ensemble $\mathcal{C}^\infty(U, V)$ des « applications différentiables entre les ouverts $U \subseteq E$ et $V \subseteq F$ », pour tous \mathbb{R} -espaces vectoriels de dimension finie E et F .

Exercice 3.2-1 : Sous les hypothèses en cours et lorsque $V = F$, la somme point par point de deux applications différentiables et le produit point par point d'une application différentiable par un scalaire fixe, sont des fonctions différentiables. Ces opérations munissent l'ensemble $\mathcal{C}^\infty(U, F)$ d'une structure de \mathbb{R} -espace vectoriel.

Définition 3.2-1 : Soient E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie d , et $U \subseteq E$ une partie ouverte. Pour chaque entier naturel m , on note $\Omega^m(U)$ le \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathcal{C}^\infty(U, \mathcal{A}^m(E))$ d'applications différentiables de U à valeurs dans $\mathcal{A}^m(E)$. On pose :

$$\Omega^*(U) := \Omega^0(U) \oplus \Omega^1(U) \oplus \cdots \oplus \Omega^d(U).$$

Les éléments de $\Omega^m(U) \subseteq \Omega^*(U)$ sont appelés « les formes différentielles homogènes de degré m sur U » et aussi « les m -formes différentielles sur U ».

On munit $\Omega^*(U)$ d'une structure de \mathbb{R} -algèbre graduée anticommutative en définissant l'addition, multiplication par un scalaire et produit extérieur des formes différentielles, point par point. On pose donc pour le produit extérieur de deux formes différentielles ω_1 et ω_2 :

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(\mathbf{x}) := \omega_1(\mathbf{x}) \wedge \omega_2(\mathbf{x}),$$

pour tout $\mathbf{x} \in U$. On laisse aux soins du lecteur de vérifier que $\omega_1 \wedge \omega_2$ est une application différentiable de U à valeurs dans l'espace vectoriel $\mathcal{A}^*(E)$.

3.2.1 Formes différentielles à support compact

Définition 3.2.1-1 : Une forme différentielle $\omega \in \Omega^*(U)$ étant une application de $U \subseteq E$ à valeurs dans un espace vectoriel, l'ensemble des zéros de ω , i.e. l'ensemble des $\mathbf{x} \in U$ tels que $\omega(\mathbf{x}) = 0$, est bien défini. Une forme différentielle $\omega \in \Omega^*(U)$ sera dite « à support compact » lorsque l'adhérence de l'ensemble des zéros de ω , noté $|\omega|$, est compact. On note $\Omega_c^*(U)$ l'ensemble de telles formes différentielles, c'est un idéal gradué de $\Omega^*(U)$.

Exercice 3.2.1-1 : Montrer que lorsque $\dim_{\mathbb{R}}(E) > 0$ et $U \neq \emptyset$, les espaces vectoriels réels $\Omega^m(U)$ et $\Omega_c^m(U)$ sont de dimension infinie, de même, par ailleurs, que l'espace vectoriel quotient $\Omega^m(U)/\Omega_c^m(U)$.

Exercice 3.2.1-2 : Expliquer pourquoi, lorsque $\dim_{\mathbb{R}}(E) > 0$ et $U \neq \emptyset$, l'idéal $\Omega_c^*(U)$ n'est pas un anneau.

Exercice 3.2.1-3 : On a $\Omega^0(U) = \mathcal{C}^\infty(U)$ et $\Omega_c^0(U) = \mathcal{C}_c^\infty(U)$, et plus généralement :

$$\Omega^m(U) \equiv \mathcal{C}^\infty(U) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{A}^m(E) \quad \text{et} \quad \Omega_c^m(U) \equiv \mathcal{C}_c^\infty(U) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{A}^m(E).$$

Remarque 3.2.1-1 : Considérons l'espace vectoriel E muni de sa structure standard de variété différentiable; le fibré tangent $\mathcal{T}(E)$ s'identifie alors à $E \times E$. Le foncteur \mathcal{A}^m qui fait correspondre à un espace vectoriel l'espace des m -formes alternées fournit ensuite par le procédé décrit dans la section 2.11.4 le fibré $\mathcal{A}^m \mathcal{T}(E)$ qui sera également trivial et s'identifiera à la variété différentiable $E \times \mathcal{A}^m(E)$. Par restriction des fibrés à l'ouvert $U \subseteq E$, on obtient les fibrés vectoriels $\mathcal{A}^m \mathcal{T}(U)$ et le fibré $\mathcal{A}^* \mathcal{T}(U) := \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{A}^m \mathcal{T}(U)$. On a alors :

$$\Omega^*(U) = \Gamma(U; \mathcal{A}^* \mathcal{T}(U)) = \Gamma(U; \mathcal{A}^* \mathcal{T}(E)) \quad \text{et} \quad \Omega_c^*(U) = \Gamma_c(U; \mathcal{A}^* \mathcal{T}(U)) = \Gamma_c(U; \mathcal{A}^* \mathcal{T}(E))$$

3.2.2 Image inverse d'une forme différentielle

Soient des ouverts $U \subseteq E$ et $V \subseteq F$ et une application différentiable $f : U \rightarrow V$. Rappelons que pour tout $\mathbf{x} \in U$ la différentielle $df_{\mathbf{x}}$, de f en \mathbf{x} , est un élément de $\mathcal{L}(E, F)$ et que l'application $\mathbf{x} \mapsto df_{\mathbf{x}}$ de U à valeurs dans $\mathcal{L}(E, F)$ est différentiable. Pour chaque $\omega \in \Omega^m(V)$, on définit la forme différentielle $f^*(\omega) \in \Omega^m(U)$ en posant :

$$f^*(\omega)(\mathbf{x}) := (df_{\mathbf{x}})^*(\omega(f(\mathbf{x}))),$$

pour chaque $\mathbf{x} \in U$.

Exercice 3.2.2-1 : Vérifier la différentiabilité de $f^*(\omega)$.

Exercice 3.2.2-2 :

- Montrer que $f^* : \Omega^*(V) \rightarrow \Omega^*(U)$ est un homomorphisme de \mathbb{R} -algèbres graduées de degré 0.
- Soient $f : U \rightarrow V$ et $g : V \rightarrow W$ ou U, V et W sont des ouverts d'espaces vectoriels de dimension finie. Montrer l'égalité :

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*.$$

- Notons Ouv la catégorie dans les objets sont les parties ouvertes des \mathbb{R} -espaces vectoriels de dimension finie et où les morphismes sont les applications différentiables. La correspondance qui associe à un ouvert U l'algèbre $\Omega^*(U)$ et à un morphisme f , le morphisme f^* , définit un foncteur *contravariant* de Ouv vers la catégorie des \mathbb{R} -algèbres graduées.

Remarque 3.2.2-2.1 : On observera que la notion d'"image inverse d'une forme différentielle" n'est autre que le résultat de composer les foncteurs

$$\langle \text{variété} \rangle \rightsquigarrow \mathcal{A}^* \mathcal{T}(\langle \text{variété} \rangle) \quad \text{et} \quad \langle \text{fibré vectoriel} \rangle \rightsquigarrow \langle \text{sections globales du fibré} \rangle.$$

La contravariance finale est alors reflet de la contravariance des foncteurs qui associent à un espace vectoriel les espaces des formes alternées.

Remarque 3.2.2-2.2 : On prendra garde du fait que si l'image inverse par une application f d'une forme différentielle à support compact est bien une forme différentielle, elle **ne sera pas nécessairement à support compact**. (Une condition nécessaire et suffisante pour cela est que f soit *propre*.)

Exercice 3.2.2-3 : Soient U et V deux ouverts de \mathbb{R}^d et soit $\phi : U \rightarrow V$ une application différentiable. Les formes différentielles de degré d sur V sont de la forme $f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_d$, où $f \in \Omega^0(U)$ et où $\{dx_1, \dots, dx_d\}$ désigne la base duale de la base canonique de \mathbb{R}^d . À l'aide du résultat de l'exercice 3.1.6-2-c, prouver l'égalité :

$$\phi^*(f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_d) = (f \circ \phi) \det \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} \right) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_d.$$

La matrice $\left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} \right)$ est connue sous le nom de « *matrice jacobienne* » et son déterminant : $\det \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} \right)$, le « *jacobien de f* », on le notera également $J(f)$.

3.2.3 Différentielle d'une forme différentielle

Soit U un ouvert du \mathbb{R} -espace vectoriel E de dimension finie et $\omega \in \Omega^m(U)$; l'application $\omega : U \rightarrow \mathcal{A}^m(E)$ est différentiable et $d\omega : U \rightarrow \mathcal{L}(E, \mathcal{A}^m(E)) \subseteq \mathcal{L}^{m+1}(E)$ l'est également. On pose alors

$$d_m(\omega)(\mathbf{x}) := \frac{1}{m!} \mathbf{a}_{m+1}(d\omega \mathbf{x}) \quad (\diamond)$$

pour tout $\mathbf{x} \in U$.

Exercice 3.2.3-1 : Soit $\omega \in \Omega^m(U)$, prouver l'égalité :

$$d_m(\omega)(\mathbf{x})(\vec{h}_0, \vec{h}_1, \dots, \vec{h}_m) = \sum_{i=0}^m (-1)^i d\omega_{\mathbf{x}}(\vec{h}_i)(\vec{h}_0, \dots, \widehat{\vec{h}_i}, \dots, \vec{h}_m), \quad (\Delta)$$

où le terme sous le chapeau est à omettre.

Remarque 3.2.3-1.1 : On observera que l'égalité (Δ) est l'explicitation de l'antisymétrisation d'une $(m+1)$ -forme linéaire de $\mathcal{L}(E, \mathcal{A}^m(E))$ à l'aide des permutations de battage de $\mathfrak{S}_{1,m}$ (voir la remarque 3.1.5-1.1). L'expression (Δ) peut donc être utilisée dans la définition de la différentielle d'une forme différentielle lorsque la caractéristique du corps de base est positive (en géométrie algébrique par exemple).

Exercice 3.2.3-2 et terminologie : Soient $\omega_1 \in \Omega^{m_1}(U)$ et $\omega_2 \in \Omega^{m_2}(U)$.

- Montrer que $d_{m_1}(\omega_1) \in \Omega^{m_1+1}(U)$ et que $d_{m_1}(\omega_1) \in \Omega_c^{m_1+1}(U)$ lorsque $\omega_1 \in \Omega_c^{m_1}(U)$.
- Montrer que $d_{m_1+m_2}(\omega_1 \wedge \omega_2) = d_{m_1}(\omega_1) \wedge \omega_2 + (-1)^{m_1} \omega_1 \wedge d_{m_2}(\omega_2)$; on dit alors que $d_* : \Omega^*(U) \rightarrow \Omega^*(U)$ est une « *antidérivation* ».
- Montrer, à l'aide de (Δ) et de la symétrie de la différentielle seconde, l'égalité $(d_{m_1+1} \circ d_{m_1})(\omega_1) = 0$; on dit alors que $(\Omega^*(U), d_*)$ est une « *algèbre différentielle graduée* ».

Exercice 3.2.3-3 : Soit U un ouvert de \mathbb{R}^d et notons $x_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ l'application qui associe au d -uplet (a_1, \dots, a_d) sa i -ième coordonnée a_i . L'application x_i est alors un élément de $\Omega^0(U)$. Montrer que $d_0(x_i)$ coïncide tautologiquement avec la différentielle dx_i de l'application x_i . Ceci justifie donc que l'on confonde souvent les notations $d_0(x_i)$ et dx_i ; convention que nous adopterons dans ce cours.

- Montrer que $\{dx_1, \dots, dx_d\}$ est une base de $\Omega^1(U)$ en tant que $\Omega^0(U)$ -module.

- b) Généraliser (a) en montrant que pour chaque $k \in \mathbb{N}$, la famille $\{dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}\}_{i_1 < \cdots < i_k}$, où $1 \leq i_j \leq d$, est une base de $\Omega^k(U)$ en tant que $\Omega^0(U)$ -module.

Proposition 3.2.3-1 : Soit $f : U \rightarrow V$ une application différentiable entre deux ouverts d'espaces vectoriels. Soit $f^* : \Omega^m(V) \rightarrow \Omega^m(U)$ le morphisme image inverse. Alors :

$$f^* \circ d_m = d_m \circ f^*$$

Démonstration : La démonstration relève d'une simple vérification à partir des définitions. Pour chaque $\mathbf{x} \in U$ et chaque $\omega \in \Omega^m(V)$, on a :

$$\begin{aligned} f^*(d_m(\omega))(\mathbf{x}) &= (df_{\mathbf{x}})^*(d_m(\omega)(f(\mathbf{x}))) \\ &= (df_{\mathbf{x}})^*\left(\frac{1}{m!} \mathbf{a}_m(d\omega_{f(\mathbf{x})})\right) = \frac{1}{m!} \mathbf{a}_m((df_{\mathbf{x}})^*(d\omega_{f(\mathbf{x})})) \\ &= \frac{1}{m!} \mathbf{a}_m(d(f^*(\omega))_{\mathbf{x}}) = d_m(f^*(\omega))(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

■

3.2.4 Complexe de de Rham, cohomologie de de Rham et functorialité

Les remarques du paragraphe précédent montrent que, pour tout ouvert U d'un espace vectoriel de dimension finie n , le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathbf{0} & \rightarrow & \Omega^0(U) & \xrightarrow{d_0} & \Omega^1(U) & \xrightarrow{d_1} & \cdots & \xrightarrow{d_{n-2}} & \Omega^{n-1}(U) & \xrightarrow{d_{n-1}} & \Omega^n(U) & \rightarrow & \mathbf{0} \\ & & \uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow & & \uparrow & & \\ \mathbf{0} & \rightarrow & \Omega_c^0(U) & \xrightarrow{d_0} & \Omega_c^1(U) & \xrightarrow{d_1} & \cdots & \xrightarrow{d_{n-2}} & \Omega_c^{n-1}(U) & \xrightarrow{d_{n-1}} & \Omega_c^n(U) & \rightarrow & \mathbf{0} \end{array}$$

où les flèches verticales désignent les inclusions canoniques, est un morphisme de complexes différentiels gradués.

Définition 3.2.4-1 : Soit U un ouvert d'un espace vectoriel de dimension finie n . On appelle « *complexe des formes différentielles (resp. à supports compacts) sur U* » et aussi « *complexe de de Rham (resp. à supports compacts) sur U* », le complexe différentiel gradué $(\Omega^*(U), d_*)$ (resp. $(\Omega_c^*(U), d_*)$).

Définitions 3.2.4-2 et remarques :

- a) Le noyau de $d_* : \Omega^*(U) \rightarrow \Omega^*(U)$ est noté $\mathfrak{Z}^*(U)$. Les éléments de $\mathfrak{Z}^*(U)$ sont appelés des « *cocycles sur U* » et comme d_* est un morphisme gradué compatible au produit extérieur, $\mathfrak{Z}^*(U)$ est une sous-algèbre graduée (avec identité multiplicative) de $\Omega^*(U)$, ses éléments de degré m sont alors appelés des « *m-cocycles* ».
- b) L'image de $d_* : \Omega^*(U) \rightarrow \Omega^*(U)$ est notée $\mathfrak{B}^*(U)$. L'annulation de $d_* \circ d_*$ montre l'inclusion $\mathfrak{B}^*(U) \subseteq \mathfrak{Z}^*(U)$, et $\mathfrak{B}^*(U)$ est un idéal homogène de $\mathfrak{Z}^*(U)$, ses éléments sont appelés des « *cobords sur U* » et un élément de degré m est dit « *un m-cobord* ».

c) D'après ce qui précède le quotient :

$$H_{\text{DR}}^*(U) := \frac{\mathcal{Z}^*(U)}{\mathcal{B}^*(U)}$$

est une \mathbb{R} -algèbre graduée anticommutative ; elle est appelée « l'algèbre de cohomologie de de Rham de U »

d) De manière entièrement analogue on définit $\mathcal{B}_c^*(U) \subseteq \mathcal{Z}_c^*(U) \subseteq \Omega_c^*(U)$ et l'on pose

$$H_{\text{DR},c}^*(U) := \frac{\mathcal{Z}_c^*(U)}{\mathcal{B}_c^*(U)}$$

que l'on appelle « l'algèbre de cohomologie de de Rham à supports compacts de U ».

e) Deux formes différentielles sont dites « *cohomologues* » lorsque leur différence est un cobord. Les formes différentielles cohomologues à un cocycle ω sont également des cocycles et sont caractérisés par le fait qu'il définissent la même classe de cohomologie que ω .

Définition 3.2.4-3 : Soit M une variété différentiable. On appelle « *n*-ième nombre de Betti de M » et on le note $\mathbf{b}_n(M)$, la dimension, finie ou infinie, du \mathbb{R} -espace vectoriel $H_{\text{DR}}^n(M)$.

Exercice 3.2.4-1 : Soit U un ouvert d'un espace vectoriel de dimension d . On a $\mathcal{Z}^d(U) = \Omega^d(U)$ et $\mathcal{Z}_c^d(U) = \Omega_c^d(U)$.

Exercice 3.2.4-2 : Soit $f : U \rightarrow V$ une application différentiable entre deux ouverts d'espaces vectoriels de dimension finie.

a) Montrer que l'on a $f^*(\mathcal{B}^*(V)) \subseteq \mathcal{B}^*(U)$ et $f^*(\mathcal{Z}^*(V)) \subseteq \mathcal{Z}^*(U)$.

b) Dédurre de la question précédente que le morphisme f^* induit un homomorphisme d'algèbres graduées (de degré 0), noté encore f^* , entre :

$$f^* : H_{\text{DR}}^*(V) \longrightarrow H_{\text{DR}}^*(U).$$

Fonctorialité

Notons Ouv la catégorie dans les objets sont les parties ouvertes des \mathbb{R} -espaces vectoriels de dimension finie et où les morphismes sont les applications différentiables. La proposition 3.2.3-1 montre que la correspondance qui associe à un ouvert U l'algèbre différentielle graduée $(\Omega^*(U), d_*)$ (resp. l'algèbre $H_{\text{DR}}^*(U)$) et à un morphisme f l'application f^* , définit un foncteur *contravariant* de Ouv vers la catégorie des \mathbb{R} -algèbres différentielles graduées (resp. des \mathbb{R} -algèbres graduées).

Remarque 3.2.4-1 : La remarque 3.2.2-2.2 explique la raison pour laquelle la même idée ne permettra pas de définir un foncteur associant à U l'algèbre différentielle graduée $(\Omega_c^*(U), d_*)$.

3.3 Intégration des formes différentielles de degré maximum sur les espaces vectoriels

Soit U une partie ouverte d'un \mathbb{R} -espace vectoriel E de dimension d . Le but de cette section est de donner un sens intrinsèque, *i.e.* indépendant des choix des repères de E , à l'intégrale d'une d -forme différentielle à support compact sur U .

Le cas des ouverts de \mathbb{R}^d

Le fait que \mathbb{R}^d possède une base canonique permet de faire un choix canonique d'un élément non nul de $\mathcal{A}^d(\mathbb{R}^d)$, à savoir $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_d$ et par conséquent d'avoir un isomorphisme canonique entre $\Omega^0(U)$ et $\Omega^d(U)$ en associant à $f \in \Omega^0(U)$ la d -forme différentielle $\omega(\vec{x}) = f(\vec{x}) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_d$. La forme différentielle ω est à support compact, si et seulement si, f l'est.

On définit alors pour chaque $\omega \in \Omega_c^d(U)$ « l'intégrale de $\omega = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_d$ », à l'aide de l'intégrale de Riemann-Lebesgue, en posant :

$$\int_U \omega := \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{x}) dx_1 \cdots dx_d$$

où, dans l'expression de droite, on à « prolongé par zéro » l'application f à \mathbb{R}^d tout entier.

3.3.1 Effet des changements de variables

Soient U et V deux ouverts de \mathbb{R}^d , puis $\phi : U \rightarrow V$ un difféomorphisme, et $f \in \Omega_c^0(V) = \mathcal{C}_c^\infty(V)$. La formule de changement des variables pour l'intégrale de Riemann-Lebesgue établit l'égalité :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{x}) dx_1 \cdots dx_d = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(\phi(\vec{x})) \left| \det \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} \right) \right| dx_1 \cdots dx_d \quad (\diamond)$$

et nous avons vu dans l'exercice 3.2.2-3 que la forme différentielle $\omega_V = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_d \in \Omega_c^d(V)$ est contrainte de vérifier :

$$\phi^*(\omega_V) = \phi^*(f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_d) = (f \circ \phi) \det \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} \right) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_d.$$

En remplaçant dans (\diamond) , on aura une égalité :

$$\int_V \omega_V = \int_U \phi^*(\omega_V)$$

indépendamment de la forme différentielle ω_V **uniquement** lorsque le jacobien de ϕ ne prend pas de valeurs négatives.

Définition 3.3.1-1 : On dira qu'un difféomorphisme ϕ entre deux ouverts de \mathbb{R}^d « préserve l'orientation » ou bien qu'il est « orienté » lorsque son jacobien est de signe constant et positif.

3.3.2 Le cas des ouverts d'espaces vectoriels arbitraires

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension d . Le fait qu'il n'existe *a priori* aucun repère particulier pour E nous empêche de donner une définition de l'intégrale suivant le procédé choisi pour \mathbb{R}^d . L'idée alors est de nous ramener à \mathbb{R}^d à l'aide d'isomorphismes d'espaces vectoriels pour y calculer l'intégrale; il faudra alors vérifier que ces intégrales donnent bien le même nombre réel. Plus précisément, soit U un ouvert de E et $\omega \in \Omega_c^d(U)$; chaque isomorphisme $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}^d$ permet calculer une intégrale :

$$\int_{\varphi(U)} (\varphi^{-1})^*(\omega),$$

mais le choix d'un autre isomorphisme $\psi : E \rightarrow \mathbb{R}^d$ donnera, d'après la formule de changement de variables du paragraphe précédent :

$$\int_{\varphi(U)} (\varphi^{-1})^*(\omega) = \pm \int_{\psi(U)} (\psi^{-1})^*(\omega),$$

où le signe dépendra uniquement de la signature du déterminant du «*difféomorphisme de transition*» : $\psi \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$.

Cette remarque relève un point d'importance : L'intégration des formes différentielles dans le cas de \mathbb{R}^d est passé par le choix d'une forme différentielle non nulle de $\mathcal{A}^d(\mathbb{R}^d)$, à savoir $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_d$, mais en cherchant à donner un sens intrinsèque aux intégrales sur un espace vectoriel arbitraire E de dimension d , on s'aperçoit que si le choix d'un élément non nul de $\mathcal{A}^d(E)$ aurait suffi (on demanderait alors que φ le transforme en $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_d$), le simple fait de choisir l'une des deux composantes connexes de $\mathcal{A}^d(E) \setminus \{0\}$ et de demander à φ de transformer cette composante en la composante connexe de $\mathcal{A}^d(\mathbb{R}^d)$ contenant la forme $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_d$, suffit également.

Définition 3.3.2-1 : Chaque composante connexe de $\mathcal{A}^d(E) \setminus \{0\}$ est appelée «*une orientation de E* ». Un espace vectoriel accompagné d'une orientation est un «*un espace vectoriel orienté*».

Soient maintenant E_+ un espace vectoriel orienté de dimension d , et U une partie ouverte de E . Choisissons arbitrairement une forme différentielle ω_+ dans la composante connexe de $\mathcal{A}^*(E) \setminus \{0\}$ associée à l'orientation. Pour chaque forme différentielle $\omega \in \Omega_c^d(U)$, on définit son intégrale par la formule

$$\boxed{\int_U \omega := \int_{\varphi(U)} (\varphi^{-1})^*(\omega)}$$

où φ est un isomorphisme de E sur \mathbb{R}^d tel que $(\varphi^{-1})^*(\omega_+) = \lambda dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_d$ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

Les contraintes dans cette définition font que les jacobiens des isomorphismes de transition $\phi = \psi \circ \varphi^{-1}$ seront toujours de signe positif, ceci non seulement indépendamment de φ et de ψ , mais également indépendamment de la forme ω_+ choisie dans l'orientation de E_+ .

Remarque 3.3.2-1 : une subtilité supplémentaire : La définition de l'intégrale sur \mathbb{R}^d comporte en fait **deux** choix arbitraires (bien que devenus canoniques). D'une part : l'orientation canonique de \mathbb{R}^d , liée à son repère canonique qui privilégie la forme $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_d$; et d'autre part : la mesure du volume du parallélépipède de côtés donnés par les vecteurs de la base canonique dont on demande qu'il soit égale à 1 (choix sous-jacent à l'intégrale de Riemann-Lebesgue).

La subtilité apparaît lorsque l'on réalise que l'intégration sur un espace vectoriel quelconque (telle que nous l'avons introduite) n'a fait intervenir que le problème d'orientation et qu'**aucun choix supplémentaire** n'a été nécessaire... La réponse à ce mystère se trouve très précisément dans l'interdépendance entre "la formule de changement de variables" et les morphismes "images inverses". Ce lien fait que l'"image inverse" propage le choix de la mesure du parallélépipède de la base canonique de \mathbb{R}^d à tout autre espace vectoriel, mais seulement au signe près. Et c'est justement pour "déterminer" ce dernier qu'il suffit de fixer une orientation sur l'espace vectoriel; le caractère intrinsèque de l'intégrale est ainsi assuré.

Exercice 3.3.2-1 : Montrer que dans la définition de l'intégrale sur $\Omega_c^d(U)$, où U est un ouvert d'un \mathbb{R} -espace vectoriel orienté E_+ , il suffit de prendre un difféomorphisme $\varphi : U \rightarrow V$ sur un ouvert $V \subseteq \mathbb{R}^d$ tel que le $(\varphi^{-1})^*(\omega_+)(\mathbf{x}) = \lambda dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_d$ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, pour tout $\mathbf{x} \in U$.

Exercice 3.3.2-2 : Montrer que sous les hypothèses en cours, l'application $\int_U : \Omega_c^d(U) \rightarrow \mathbb{R}$ est \mathbb{R} -linéaire.

3.3.3 Théorème de Stokes faible

Le théorème de Stokes que l'on pourra consulter dans [B-T,A-M-R,Ber] concerne les variétés à bord (que nous n'allons pas introduire) et donne un résultat plus précis que celui dont nous aurons besoin dans ce cours. Voici la version affaiblie de ce théorème que nous utiliserons :

Proposition 3.3.3-1 : Soit U un ouvert d'un espace vectoriel orienté E_+ de dimension d . Pour toute forme différentielle à support compact $\omega \in \Omega_c^{d-1}(U)$, on a :

$$\int_U d_{d-1}(\omega) = 0$$

En particulier, l'intégration sur U induit une forme linéaire :

$$\int_U : H_{\text{DR},c}^d(U) \longrightarrow \mathbb{R}$$

Démonstration : Comme les morphismes d'image inverse sont compatibles à la différentielle des formes différentielles et transforment cobords en cobords, nous pourrions supposer $E = \mathbb{R}^d$. On a l'équivalence $\Omega_c^{d-1}(U) \cong \mathcal{C}_c^\infty(U) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{A}^{d-1}(\mathbb{R}^d)$ (cf. exercice 3.2.1-3) qui nous permet de nous limiter à vérifier l'assertion pour une $(d-1)$ -forme différentielle de la forme $\omega = f dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_d$, où f est à support compact dans U . On a :

$$d_{d-1}(\omega) = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_d,$$

et alors

$$\begin{aligned} \int_U d_{d-1}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_d \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_d \end{aligned}$$

où le terme entre parenthèses est la fonction nulle sur \mathbb{R}^{d-1} puisque f a été supposée de support compact. ■

3.4 Formes différentielles et cohomologie de de Rham sur les variétés

Dans cette section nous allons montrer comment les considérations des paragraphes précédents se généralisent au cadre des variétés différentiables. Nous aurons besoin, à la fois, de nous affranchir de l'hypothèse des "ouverts d'un espace vectoriel", et de recoller des structures algébriques de façon à généraliser le *formalisme* des formes différentielles et leur de intégration.

Définition 3.4-1 : Soit M une variété différentiable de dimension d et d'atlas de définition $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$. On appelle « *m*-forme différentielle sur M » la donnée d'une famille $\omega = \{\omega_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ de *m*-formes différentielles sur \mathbb{R}^d vérifiant « la condition de recollement » suivante :

3.4-1.1 Condition de recollement pour les formes différentielles : Pour chaque couple d'indices $\alpha, \beta \in \mathfrak{A}$, tels que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, on a :

$$\omega_\alpha|_{\varphi_\alpha(U_{\alpha\beta})} = \phi_{\beta,\alpha}^*(\omega_\beta|_{\varphi_\beta(U_{\alpha\beta})})$$

où $\phi_{\beta,\alpha}$ est l'application de transition $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$.

On note $\Omega^m(M)$ l'ensemble des *m*-formes différentielles sur M .

3.4.1 Caractère intrinsèque de $\Omega^*(M)$

Dans la définition que nous venons de donner, le choix de l'atlas \mathcal{A} intervient explicitement puisque la condition de recollement est "indexée" par les cartes de \mathcal{A} . Notons provisoirement par $\Omega^m(M)_{,\mathcal{A}}$ l'ensemble des formes différentielles obtenues relativement à l'atlas \mathcal{A} . Soit \mathcal{A}' un atlas de M compatible à \mathcal{A} ; nous allons construire une *bijection canonique* :

$$\Omega^m(M)_{,\mathcal{A}} \equiv \Omega^m(M)_{,\mathcal{A}'}$$

Soient $\omega \in \Omega^m(M)_{,\mathcal{A}}$ et (V, ψ) une carte de coordonnées de \mathcal{A}' . Notons alors $\omega_\psi \in \Omega^*(\mathbb{R}^d)$ la forme différentielle définie "point par point" de la manière suivante : Pour chaque $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, on choisit une carte de coordonnées $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ de \mathcal{A} telle que $U_\alpha \ni \psi^{-1}(\mathbf{x})$. L'application $\varphi_\alpha \circ \psi^{-1}$ est alors définie sur un voisinage de \mathbf{x} , ce qui nous conduit à poser :

$$\omega_\psi =_{\text{def}} (\varphi_\alpha \circ \psi^{-1})^*(\omega_\alpha)$$

sur le voisinage de \mathbf{x} en question. Assurons-nous maintenant de l'unicité locale de cette définition. La même procédure, à partir d'une autre carte $(U_{\alpha'}, \varphi_{\alpha'})$ de \mathcal{A} , nous emmènera à comparer

$$(\varphi_{\alpha} \circ \psi^{-1})^*(\omega_{\alpha}) \quad \text{et} \quad (\varphi_{\alpha'} \circ \psi^{-1})^*(\omega_{\alpha'}),$$

ou, ce qui revient au même, à comparer :

$$\omega_{\alpha} \quad \text{et} \quad (\psi \circ \varphi_{\alpha}^{-1})^*(\varphi_{\alpha'} \circ \psi^{-1})^*(\omega_{\alpha'}), \quad (\diamond)$$

or, $(\psi \circ \varphi_{\alpha}^{-1})^*(\varphi_{\alpha'} \circ \psi^{-1})^* \doteq (\varphi_{\alpha'} \circ \varphi_{\alpha}^{-1})^*$ ⁽²²⁾ et la condition de recollement relative à \mathcal{A} nous assure que les formes différentielles (\diamond) coïncident sur un voisinage de $\varphi \circ \psi^{-1}(\mathbf{x})$.

Notre définition "point par point" de ω_{ψ} est donc bien indépendante du choix de cartes de \mathcal{A} (elle est donc intrinsèque relativement à ψ), de plus la "cohérence locale" de différentes définitions garantit également la différentiabilité de ω_{ψ} .

Ceci étant si $\mathcal{A} = \{(V_{\beta}, \psi_{\beta})\}_{\beta \in \mathfrak{B}}$, nous avons la famille $\{\omega_{\psi_{\beta}}\}_{\beta \in \mathfrak{B}}$ dont nous devons vérifier la condition de recollement pour nous assurer qu'elle représente bien une forme différentielle de $\Omega^m(\mathbf{M})_{\mathcal{A}}$. Cela se fait, de manière élémentaire mais laborieuse, en suivant les procédures des paragraphes précédents. Nous laissons au soins du lecteur courageux de mener à bien cette vérification.

Nous aurons ainsi défini une application *canonique* :

$$\Theta_{\mathcal{A}, \mathcal{A}} : \Omega^m(\mathbf{M})_{\mathcal{A}} \longrightarrow \Omega^m(\mathbf{M})_{\mathcal{A}}.$$

On vérifie alors les identités $\Theta(\mathcal{A}'', \mathcal{A}') \circ \Theta(\mathcal{A}', \mathcal{A}) = \Theta(\mathcal{A}'', \mathcal{A})$ et $\Theta(\mathcal{A}, \mathcal{A}) = \text{id}$, qui prouvent le caractère intrinsèque de $\Omega^*(\mathbf{M})$.

Définition 3.4.1-1 : Soit \mathbf{M} une variété de dimension d et d'atlas complet $\mathcal{A} = \{(U_{\alpha}, \varphi_{\alpha})\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$, pour $\omega = \{\omega_{\alpha}\}_{\alpha \in \mathfrak{A}} \in \Omega^m(\mathbf{M})$, la forme différentielle $\omega_{\alpha} \in \Omega^m(\mathbb{R}^d)$ est appelée « *le représentant de ω dans la carte $(U_{\alpha}, \varphi_{\alpha})$* ».

Remarque 3.4.1-1 : Les paragraphes précédents donnent les détails de la construction du fibré $\mathcal{A}^*\mathcal{T}(\mathbf{M})$ des formes alternées sur la variété \mathbf{M} . Nous aurions donc fort bien pu l'introduire très rapidement par la même idée de la remarque 3.2.1-1, mais nous verrons que les précisions supplémentaires données dans les descriptions locales explicites des formes différentielles, nous seront de toutes façons indispensables pour introduire et bien comprendre le concept d'orientation d'une variété et sa nécessité pour l'intégration.

²² Nous utiliserons la notation $f \doteq g$ pour indiquer que f et g coïncident sur un voisinage d'un point sous-entendu dans par contexte.

3.4.2 Structure d'algèbre différentielle graduée sur $\Omega^*(M)$

Les différentes opérations sur les formes différentielles que nous avons introduites lorsque M est un ouvert d'un espace vectoriel trouvent leur pendant dans le cadre des variétés différentielles. Cela résulte du fait que les morphismes "image inverse" respectent la structure d'algèbre différentielle graduée des formes différentielles.

Voici, à titre d'illustration, comment on procède pour définir la somme de deux formes différentielles $\omega, \omega' \in \Omega^*(M)$, puis la différentielle $d(\omega)$:

Soit \mathcal{A} un atlas de la structure différentiable de M indexé par un ensemble \mathfrak{A} . Par définition, $\omega := \{\omega_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ et $\omega' := \{\omega'_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ sont des familles de formes différentielles sur \mathbb{R}^d vérifiant des conditions de recollement. On considère alors la famille

$$(\omega + \omega') := \{\omega_\alpha + \omega'_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$$

et la compatibilité des "images inverses" vis-à-vis de l'addition montre que les conditions de recollement seront également satisfaites par $\omega + \omega'$, d'où la définition de la somme de deux formes différentielles.

De même, la condition de recollement sur la famille $\{d(\omega_\alpha)\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ s'écrit :

$$d(\omega_\beta) = \phi_{\beta,\alpha}^*(d(\omega_\alpha)) ,$$

pour tous $\alpha, \beta \in \mathfrak{A}$, et la relation de commutation de la proposition 3.2.3-1 montre que la famille $\{d(\omega_\alpha)\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ définit bien une forme différentielle sur M , on la note $d(\omega)$.

En procédant de la même manière pour toutes les autres opérations, on obtient la structure de \mathbb{R} -espace vectoriel des $\Omega^m(M)$, puis la structure de \mathbb{R} -algèbre graduée anticommutative de $\Omega^*(M) := \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} \Omega^m(M)$, et enfin, celle d'algèbre différentielle graduée $(\Omega^*(M), d_*)$.

3.4.3 Formes différentielles à support compact

Soit $\omega \in \Omega^m(M)$, on dit que $x \in M$ est un « zéro de ω » lorsque la condition d'annulation suivante est vérifiée :

$$\text{Il existe une carte } (U, \varphi) \text{ de } M, \text{ telle que } x \in U \text{ et } \omega_\varphi(\varphi(x)) = 0.$$

La condition de recollement montre alors que si x est un zéro de ω , la condition d'annulation sera vérifiée par toute carte dont le domaine contient x . L'ensemble des zéros d'une forme différentielle est donc intrinsèque et son adhérence, notée $|\omega|$, est appelée « le support de ω ». On a :

Proposition 3.4.3-1 : *Le sous-ensemble $\Omega_c^*(M) \subseteq \Omega^*(M)$ des formes différentielles à supports compacts est une sous-algèbre différentielle graduée de $(\Omega^*(M), d_*)$.*

Définition 3.4.3-1 : Le complexe $(\Omega^*(M), d_*)$ est appelé « *le complexe de de Rham de M* » et sa cohomologie $H_{\text{DR}}^*(M)$, « *l'algèbre de cohomologie de de Rham de M* ».

Le complexe $(\Omega_c^*(M), d_*)$ est appelé « *le complexe de de Rham des formes différentielles à support compact de M* » et sa cohomologie $H_{\text{DR},c}^*(M)$, « *l'algèbre de cohomologie de de Rham à supports compacts de M* ».

3.4.4 Image inverse des formes différentielles sur les variétés

Soit $f : M \rightarrow N$ un morphisme de variétés différentiables et soit $\omega \in \Omega^m(N)$. Nous allons définir la forme différentielle $f^*(\omega) \in \Omega^m(M)$, « *image réciproque par f de ω* ». Il nous faudra pour cela choisir un atlas $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ de la structure différentiable de M et associer à chaque $\alpha \in \mathfrak{A}$ une m -forme différentielle sur $\mathbb{R}^{d(M)}$, puis, vérifier les conditions de recollement.

On procède alors suivant les mêmes idées qui nous ont permis de montrer le caractère intrinsèque de $\Omega^*(M)$. Pour chaque $\alpha \in \mathfrak{A}$ et chaque point $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{d(M)}$, on choisit une carte (V, ψ) de N contenant le point $f(\varphi_\alpha^{-1}(\mathbf{x}))$. L'application $\psi \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ est alors définie et différentiable sur un voisinage de \mathbf{x} à valeurs dans $\mathbb{R}^{d(N)}$. On pose

$$\varpi_\alpha := (\psi \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1})^*(\omega_\psi)$$

où ω_ψ dénote le représentant de ω associé à la carte (V, ψ) . Le caractère intrinsèque de cette définition résultera de comparer :

$$(\psi \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1})^*(\omega_\psi) \quad \text{et} \quad (\psi' \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1})^*(\omega_{\psi'})$$

où (V', ψ') est une autre carte de N possible. Or, la condition de recollement sur N assure l'égalité (locale) $\omega_\psi \doteq (\psi' \circ \psi^{-1})^*(\omega_{\psi'})$, d'où

$$(\psi \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1})^*(\omega_\psi) \doteq (\psi \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1})^*(\psi' \circ \psi^{-1})^*(\omega_{\psi'}) \doteq (\psi' \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1})^*(\omega_{\psi'})$$

où les égalités sont à prendre au sens local.

La forme ϖ_α est donc bien définie et différentiable pour chaque $\alpha \in \mathfrak{A}$. Reste maintenant à vérifier la relation de recollement pour la famille $\{\varpi_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ ce que nous laissons en exercice pour le lecteur courageux. On pose alors $f^*(\omega) = \{\varpi_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$.

Une fois ce point fixé, on peut dégager un principe pratique de travail qui simplifie les vérifications (et surtout l'écriture). Il résulte d'observer que le choix des atlas est inessentiel pourvu que l'on reste dans la même classe d'atlas. Par exemple, si $f : M \rightarrow N$ est un morphisme de variétés et si $\mathcal{A}' = \{(V_{\alpha'}, \varphi_{\alpha'})\}_{\alpha' \in \mathfrak{A}'}$ est un atlas de N , il est avantageux de prendre pour M un atlas $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ de telle sorte que le recouvrement $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ soit subordonné au recouvrement ouvert $\{f^{-1}(V_{\alpha'})\}_{\alpha' \in \mathfrak{A}'}$ (cf. exercice 2.1-2). Les propositions suivantes peuvent, par un tel choix d'atlas, être aisément prouvées et sont laissées en exercice.

Proposition 3.4.4-1 : Soit $f : M \rightarrow N$ un morphisme de variétés différentiables, le morphisme image inverse

$$f^* : \Omega^*(N) \rightarrow \Omega^*(M),$$

est un homomorphisme de \mathbb{R} -algèbres graduées (de degré 0). Il induit donc un homomorphisme de \mathbb{R} -algèbres graduées

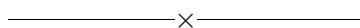
$$f^* : H_{\text{DR}}^*(N) \longrightarrow H_{\text{DR}}^*(M).$$

Proposition 3.4.4-2 : Soient $f_1 : M_1 \rightarrow M_2$ et $f_2 : M_2 \rightarrow M_3$ des morphismes de variétés différentiables et soient $f_i^* : \Omega^*(M_{i+1}) \rightarrow \Omega^*(M_i)$ les morphismes “image réciproque” induits. Alors :

$$(f_2 \circ f_1)^* = f_1^* \circ f_2^*.$$

Fonctorialité du complexe de de Rham et de la cohomologie de de Rham des variétés.

La correspondance de la catégorie des variétés différentiables Diff vers la catégorie des \mathbb{R} -algèbres différentielles graduées anticommutatives (resp. des \mathbb{R} -algèbres graduées anticommutatives) qui associe à une variété différentiable le complexe de de Rham $(\Omega^*(M), d_*)$ (resp. la cohomologie de de Rham $H_{\text{DR}}^*(M)$), et à un morphisme de variétés, le morphisme image inverse, est *fonctorielle et contravariante*.



§ 4. Orientabilité et intégration sur les variétés

Dans le but de généraliser l'intégration aux variétés différentiables nous aurons besoin des partitions de l'unité et de la notion d'orientation pour une variété. Nous commençons donc par un rappel rapide de ces notions.

4.1 Partition de l'unité et variétés paracompactes

Sur un espace topologique X , on appelle « *partition de l'unité* » une famille $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ de fonctions continues $\rho_\alpha : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ ⁽²³⁾, appelées des « *fonctions de partition* », telle que :

- a) Pour tout $x \in X$, il existe un voisinage $V_x \ni x$ tel que le sous-ensemble des indices $\alpha \in \mathfrak{A}$ vérifiant $\rho_\alpha|_{V_x} \neq 0$ est de cardinal **fini** (on dit que la famille des fonctions $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ est « *localement finie* »).
- b) Lorsque la condition précédente est vérifiée l'expression $\sum_{\alpha \in \mathfrak{A}} \rho_\alpha$ représente une fonction continue $X \rightarrow \mathbb{R}_+$, on demande alors que $\sum_{\alpha \in \mathfrak{A}} \rho_\alpha = \mathbf{1}_X$ (fonction constante de valeur 1).

La notion de partition de l'unité dans la catégorie des variétés différentiables est la même à ceci près que l'on exige aux applications de partition d'être des morphismes (*i.e.* différentiables).

²³ On note \mathbb{R}_+ l'ensemble des nombres réels t non négatifs *i.e.* tels que $t \geq 0$.

Définition 4.1-1 : On dit qu'une variété M «admet des partitions de l'unité» lorsque pour tout ouvert $U \subseteq M$ et pour tout recouvrement ouvert $\mathcal{U} = \{U_\beta\}_{\beta \in \mathfrak{B}}$ de U :

- a) il existe une partition de l'unité $\{\rho_\beta\}_{\beta \in \mathfrak{B}}$ «subordonnée à \mathcal{U} », i.e. telle que le support de ρ_β est contenu dans U_β , pour tout $\beta \in \mathfrak{B}$.
- b) il existe une partition de l'unité $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$, dont les supports des fonctions de partition sont compacts et contenus dans les ouverts de \mathcal{U} ; plus précisément, pour chaque $\alpha \in \mathfrak{A}$, il existe $\beta \in \mathfrak{B}$ tel que $|\rho_\alpha| \subseteq U_\beta$.

On démontre alors le théorème suivant (cf. [Ber] page 118) :

Théorème 4.1-1 : Une variété séparée et séparable admet des partitions de l'unité.

4.1-1 Avertissement : A partir de maintenant, nous supposons les variétés séparées et séparables, sauf mention explicite du contraire.

Exercice 4.1-1 : Toute sous-variété de \mathbb{R}^d , ainsi que toute variété quotient séparée de \mathbb{R}^d , admet des partitions de l'unité.

Exercice 4.1-2 : Montrer que la droite réelle avec l'origine dédoublé de l'exemple 1.3-1 (variété non séparée) admet des partitions de l'unité.

Lemme 4.1-2 (et exercice) : Soit M une variété différentiable admettant des partitions de l'unité. Pour toute partie fermée $K \subseteq M$ et toute famille d'ouverts $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ recouvrant K , i.e. telle que $\cup_{\alpha \in \mathfrak{A}} U_\alpha \supseteq K$, il existe une famille localement finie $\{\rho_\beta\}_{\beta \in \mathfrak{B}}$ de fonctions de partition à support compact telle que $\sum_{\beta \in \mathfrak{B}} \rho_\beta = 1$ sur un voisinage de K , et telle que, pour chaque $\beta \in \mathfrak{B}$, il existe $\alpha(\beta) \in \mathfrak{A}$ vérifiant $|\rho_\beta| \subseteq U_{\alpha(\beta)}$.

Lorsque K est une partie compacte de M , l'ensemble \mathfrak{B} sera de cardinal fini.

Définition 4.1-2 : La famille de fonctions de partitions $\{\rho_\beta\}_{\beta \in \mathfrak{B}}$ du lemme précédent sera appelée «une partition de l'unité de M d'un voisinage de K subordonnée au recouvrement \mathcal{U} de K ».

4.2 Variétés orientées

Rappelons qu'un difféomorphisme entre deux ouverts de \mathbb{R}^d est dit «orienté» ou qu'il «conserve l'orientation», si le signe de son jacobien est constant et positif (cf. définition 3.3.1-1).

Définition 4.2-1 : Soit M une variété différentiable.

- a) On dit qu'un atlas \mathcal{A} pour M est « orienté » lorsque les applications de transition sont orientées.
- b) On dit que la variété M est « orientable » si elle admet un atlas orienté.

Définition 4.2-2 : Lorsqu'une variété M est orientable on dit que deux atlas orientés de la structure de M « définissent la même orientation » si leur réunion est encore un atlas orienté.

On munit de cette manière la famille d'atlas orientés de la structure de M d'une relation d'équivalence. Chaque classe d'équivalence d'atlas orientés est appelée « une orientation de M ».

Une variété orientable munie d'une orientation est appelée « variété orientée ».

4.3 Intégration sur une variété orientée

Sur une variété orientable M de dimension d , le choix d'une orientation va nous permettre de donner un sens *intrinsèque* à l'intégrale d'une forme différentielle de degré d et à *support compact*. L'application, notée :

$$\int_M : \Omega_c^d(M) \longrightarrow \mathbb{R},$$

sera alors une forme linéaire de $\Omega_c^d(M)$, *i.e.* appartient à $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\Omega_c^d(M); \mathbb{R})$.

La définition de l'intégrale procède en deux étapes :

Int-1) Intégrale des d -formes différentielles à support compact contenu dans un domaine de carte.

Soit (U, φ) une carte de M et soit $\omega \in \Omega_c^d(U)$ de représentant dans la carte en question de la forme : $f(x_1, \dots, x_d) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_d$. On pose alors :

$$\int_M \omega = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_d) dx_1 \dots dx_d. \quad (\diamond)$$

Cette définition associe à la forme différentielle ω le nombre réel $\int_M \omega$ qui dépend, *a priori*, de la carte (U, φ) choisie.

Soit maintenant (V, ψ) une deuxième carte de M telle que $|\omega| \subseteq V$. Soit $\phi : \psi(V) \rightarrow \phi(U)$ le difféomorphisme de transition (entre deux ouverts de \mathbb{R}^d), le représentant de ω associé à la carte (V, ψ) est, par définition, la forme différentielle

$$\phi^*(f(\vec{x}) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_d) = f(\phi(\vec{x})) \det \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} \right) dx_1 \dots dx_d,$$

de sorte que l'on aura, par la formule de changement de variables :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{x}) dx_1 \dots dx_d = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(\phi(\vec{x})) \left| \det \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} \right) \right| dx_1 \dots dx_d$$

et donc la formule (\diamond) aura bien un sens indépendant de la carte dont le domaine contient le support de ω , si et seulement si, l'application de transition ϕ préserve l'orientation.

Nous voyons donc comment la donnée d'un atlas orienté permet de donner un sens intrinsèque à l'intégrale d'une forme différentielle à support compact "assez petit". Nous avons donc bien une forme \mathbb{R} -linéaire intrinsèque :

$$\boxed{\int_M : \Omega_c^d(U) \longrightarrow \mathbb{R}}$$

pour tout ouvert U , domaine de carte de M ⁽²⁴⁾.

Int-2) Intégrale des d -formes différentielles à support compact arbitrairement grand.

Soit maintenant $\omega \in \Omega_c^d(M)$. D'après le lemme 4.1-2 appliqué au compact $|\omega|$, il existe une partition de l'unité *finie* d'un voisinage de $|\omega|$ subordonnée aux ouverts des cartes de M ; notons-la $\mathcal{P} = \{\rho_1, \dots, \rho_r\}$. Nous considérons alors la décomposition :

$$\omega = \sum_{j=1}^r \rho_j \omega,$$

et posons :

$$\int_{\mathcal{P}} \omega = \sum_{j=1}^r \int_M \rho_j \omega$$

où les intégrales du terme de droite sont déterminées par le procédé (Int-1) ci-dessus, puisque les formes différentielles concernées sont à supports compacts contenus dans des ouverts de cartes de M .

Montrons que le nombre réel $\int_{\mathcal{P}} \omega$ est indépendant de la partition \mathcal{P} . Si $\mathcal{P}' = \{\rho'_1, \dots, \rho'_{r'}\}$ est une autre famille (finie) de fonctions de partition dont la somme est égale à 1 sur un voisinage de $|\omega|$, on aura :

$$\sum_{j=1}^r \int_M \rho_j \omega = \sum_{j=1}^r \int_M \rho_j \left(\sum_{k=1}^{r'} \rho'_k \omega \right) = \sum_{j=1}^r \int_M \left(\sum_{k=1}^{r'} \rho_j \rho'_k \omega \right) = \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^{r'} \int_M \rho_j \rho'_k \omega$$

où la dernière égalité découle de la linéarité de l'intégration sur les formes à supports compacts contenus dans un même domaine de carte. Comme le dernier terme de droite est symétrique en j et en k , nous aurons l'égalité :

$$\int_{\mathcal{P}} \omega := \sum_{j=1}^r \int_M \rho_j \omega = \sum_{k=1}^{r'} \int_M \rho_k \omega =: \int_{\mathcal{P}'} \omega.$$

²⁴ L'aspect non trivial dans cette assertion vient du fait que des cartes différentes peuvent avoir le même domaine de définition.

Ces procédés permettent donc d'associer à toute forme différentielle $\omega \in \Omega_c^d(\mathbf{M})$ un nombre réel bien déterminé, on le note $\int_{\mathbf{M}} \omega \in \mathbb{R}$. La vérification du fait que l'application :

$$\int_{\mathbf{M}} : \Omega_c^d(\mathbf{M}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

est \mathbb{R} -linéaire est aisée et laissée aux soins du lecteur.

Remarque 4.3-1 : Un changement d'orientation de \mathbf{M} n'aura d'autre effet, lorsque \mathbf{M} est connexe, que d'inverser les signes des intégrales.

Remarque 4.3-2 : Il est utile d'observer que ces considérations sur l'existence de l'intégration sur les variétés différentiables peuvent être condensées en un seul et unique diagramme de la manière suivante.

Soit $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ un atlas pour \mathbf{M} . Pour deux ouverts $U_a \subseteq U_b$, notons $\iota_a^b : \Omega_c^d(U_a) \rightarrow \Omega_c^d(U_b)$ (et même ι_a lorsque U_b est \mathbf{M}) l'application qui associe à une forme différentielle à support compact dans U_a son prolongement par zéro dans U_b ; notons aussi U_{ab} l'intersection $U_a \cap U_b$. Considérons alors le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc} \bigoplus_{\alpha, \beta \in \mathfrak{A}} \Omega_c^d(U_{\alpha\beta}) & \xrightarrow{\delta} & \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{A}} \Omega_c^d(U_\alpha) & \xrightarrow{\Sigma} & \Omega_c^d(\mathbf{M}) & \longrightarrow & 0 \\ & & \sum_{\alpha} \int_{\alpha} \downarrow & & \int_{\mathbf{M}} \swarrow & & \\ & & \mathbb{R} & & & & \end{array} \quad (*)$$

où les opérateurs Σ et δ sont définis *par linéarité* à partir de leur action sur chaque composante des sommes directes, par :

$$\begin{cases} \Sigma(\omega_\alpha) = \iota_\alpha(\omega_\alpha), & \text{pour tout } \omega_\alpha \in \Omega_c^d(U_\alpha); \\ \delta(\omega_{\alpha\beta}) = \iota_{\alpha\beta}^\beta(\omega_{\alpha\beta}) - \iota_{\alpha\beta}^\alpha(\omega_{\alpha\beta}), & \text{pour tout } \omega_{\alpha\beta} \in \Omega_c^d(U_{\alpha\beta}). \end{cases}$$

On a $\Sigma \circ \delta = 0$, et la première ligne de (*) est un complexe (on aura reconnu l'extrémité de la suite de Mayer-Vietoris (cf. section 5.1) pour les formes différentielles à support compact). Ce complexe est *exact*, i.e. Σ est surjective et $\ker(\Sigma) = \text{im}(\delta)$ (vous devriez démontrer entièrement cette assertion au moins une fois dans votre vie).

D'autre part, pour chaque $\alpha \in \mathfrak{A}$, le groupe $\Omega_c^d(U_\alpha)$ est (par définition) l'espace vectoriel réel des d -formes différentielles (à support compact) définies sur l'ouvert $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ de \mathbb{R}^d . Toute forme différentielle $\omega \in \Omega_c^d(U_\alpha)$ se représente donc, *de manière canonique*, sous la forme $\omega :: f(\vec{x}) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_d$, où $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\varphi_\alpha(U_\alpha))$. L'application \int_α est alors l'opérateur qui associe à ω l'intégrale de Riemann-Lebesgue de la fonction f .

Le problème de l'existence d'une intégrale sur \mathbf{M} s'exprime alors par l'interrogation suivante :

“Quelle condition doit satisfaire un atlas \mathcal{A} pour que, dans le diagramme (*), l'opérateur $\sum_{\alpha} \int_{\alpha}$ s'annule sur l'image de δ ?”

Et la réponse est : “L'atlas \mathcal{A} doit être orienté (i.e. les jacobiens des applications de transition doivent être tous positifs).”

4.4 L'intégration des classes de cohomologie à support compact

Supposons \mathbf{M} orientée et admettant des partitions de l'unité. Pour tout $\omega \in \Omega_c^d(\mathbf{M})$, cobord

d'une forme différentielle ν également à support compact, on a :

$$\int_{\mathbf{M}} \omega = \int_{\mathbf{M}} d\nu = \int_{\mathbf{M}} \sum_{\alpha} d(\rho_{\alpha} \nu) = \sum_{\alpha} \int_{\mathbf{M}} d(\rho_{\alpha} \nu) = 0 \quad (\diamond)$$

où $\{\rho_{\alpha}\}$ désigne une partition de l'unité *finie* à supports compacts d'un voisinage de $|\nu|$ subordonnée à l'atlas orienté de \mathbf{M} , et où la dernière égalité de (\diamond) résulte du théorème de Stokes faible pour les ouverts \mathbb{R}^d (cf. proposition 3.3.3-1). L'opérateur $\int_{\mathbf{M}}$ induit, par conséquent, un opérateur linéaire sur la cohomologie de de Rham à support compact de degré d de \mathbf{M} :

$$\boxed{\int_{\mathbf{M}} : H_{\text{DR},c}^d(\mathbf{M}) \longrightarrow \mathbb{R}}$$

4.5 Morphisme de dualité

Soit \mathbf{M} une variété orientable de dimension d admettant des partitions de l'unité. Pour chaque $r \in \mathbb{N}$, tel que $r \leq d$, l'application :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\mathbf{M})_r : \Omega^r(\mathbf{M}) &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\Omega_c^{d-r}(\mathbf{M}), \mathbb{R}) \\ \omega &\longmapsto \left(\nu \mapsto \int_{\mathbf{M}} \omega \wedge \nu \right) \end{aligned}$$

est linéaire et bien définie. Lorsque $\omega = d_{r-1}(\mu)$, on a (toujours par Stokes faible)

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(\mathbf{M})_r(d_{r-1}(\mu))(\nu) &= \int_{\mathbf{M}} d_{r-1}(\mu) \wedge \nu \\ &= \int_{\mathbf{M}} d_{d-1}(\mu \wedge \nu) - (-1)^{r-1} \int_{\mathbf{M}} \mu \wedge d_{d-r}(\nu) \\ &= (-1)^r \mathcal{D}(\mathbf{M})_{r-1}(\mu)(d_{d-r}(\nu)); \end{aligned}$$

il s'ensuit que lorsque les formes différentielles ω et ν sont toutes deux des cocycles, le nombre $\mathcal{D}(\mathbf{M})_r(\omega)(\nu)$ ne dépend que des classes de cohomologie qu'elles définissent. L'application $\mathcal{D}(\mathbf{M})_r$ induit donc bien une application linéaire :

$$\mathcal{D}(\mathbf{M})_r : H_{\text{DR}}^r(\mathbf{M}) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(H_{\text{DR},c}^{d-r}(\mathbf{M}); \mathbb{R}).$$

Le théorème de dualité de Poincaré, que l'on démontrera ultérieurement, affirme précisément que $\mathcal{D}(\mathbf{M})_r$ est un isomorphisme.

4.5.1 Naturalité du morphisme de dualité

Soient $V \subseteq U$ deux parties ouvertes de la variété orientée \mathbf{M} et considérons-les munies de leur structure de variété orientée induite par \mathbf{M} . Notons $\iota_V^U : V \hookrightarrow U$ l'injection canonique. On dispose alors de deux morphismes d'algèbres différentielles graduées de formes différentielles.

Le premier : l'image inverse ι_V^{U*} , appelé également dans le cas présent « la restriction de U à V », et noté aussi ρ_V^U :

$$\rho_V^U : \Omega^*(U) \xrightarrow{\iota_V^{U*}} \Omega^*(V).$$

On a la relation $\rho_W^U = \rho_W^V \circ \rho_V^U$, pour tous ouverts $W \subseteq V \subseteq U \subseteq \mathbf{M}$.

Le second : le « prolongement par zéro », noté $\iota_{V!}^U$:

$$\iota_{V!}^U : \Omega_c^*(V) \longrightarrow \Omega_c^*(U)$$

qui associe à une forme différentielle ω à support compact sur V la forme différentielle ϖ définie par $\varpi|_V = \omega$ et $\varpi(u) = 0$, lorsque $u \in U \setminus V$. Ce morphisme respecte évidemment les structures d'algèbres différentielles graduées et vérifie la relation $\iota_{W!}^U = \iota_{W!}^V \circ \iota_{V!}^U$, pour tous ouverts $W \subseteq V \subseteq U \subseteq \mathbf{M}$.

On aura donc, par adjonction :

$$\iota_{V!}^{U\vee} : \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\Omega_c^*(U); \mathbb{R}) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\Omega_c^*(V); \mathbb{R})$$

et donc $\iota_{W!}^{U\vee} = \iota_{W!}^{V\vee} \circ \iota_{V!}^{U\vee}$, pour tous ouverts $W \subseteq V \subseteq U \subseteq \mathbf{M}$.

Le lemme qui suit relève alors d'une simple vérification.

Lemme 4.5.1-1 : Soient $V \subseteq U$ des ouverts d'une variété orientée \mathbf{M} de dimension d . Le diagramme des morphismes de dualité de Poincaré

$$\begin{array}{ccc} H_{\text{DR}}^r(U) & \xrightarrow{\mathcal{Q}(U)_r} & \text{Hom}_{\mathbb{R}}(H_{\text{DR},c}^{d-r}(U); \mathbb{R}) \\ \rho_V^U \downarrow & & \downarrow \iota_{V!}^{U\vee} \\ H_{\text{DR}}^r(V) & \xrightarrow{\mathcal{Q}(V)_r} & \text{Hom}_{\mathbb{R}}(H_{\text{DR},c}^{d-r}(V); \mathbb{R}) \end{array}$$

est commutatif, quel que soit $0 \leq r \leq d$.

4.6 Variété d'orientations d'une variété différentiable

Soit \mathbf{M} une variété différentiable de dimension d et d'atlas complet $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$. Posons comme dans la section sur les variétés abstraites (2.8.2), $\mathcal{A}(d) := \coprod_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathbb{R}^d$ et notons $\mathcal{A}(d)_\alpha$ la composante connexe de $\mathcal{A}(d)$ correspondant à l'indice α .

Soit \mathcal{R} la relation d'équivalence dont le graphe est la réunion des graphes des applications de transition entre les différentes cartes, i.e. si $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$ la trace de $\text{Gr}(\mathcal{R})$ sur la composante connexe $\mathcal{A}(d)_\alpha \times \mathcal{A}(d)_\beta$ est le graphe de l'application $\phi_{\beta,\alpha} : \varphi_\alpha(U_{\alpha\beta}) \subseteq \mathbb{R}^d \rightarrow \varphi_\beta(U_{\beta\alpha}) \subseteq \mathbb{R}^d$ définie par $\phi_{\beta,\alpha} := \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$. Nous avons alors un isomorphisme canonique de variétés :

$$\left. \begin{array}{l} \Phi : \mathcal{A}(d) = \coprod_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbf{M} \\ x_\alpha \longmapsto \varphi_\alpha^{-1}(x_\alpha) \end{array} \right\} \bar{\Phi} : \mathcal{A}(d)/\mathcal{R} \xrightarrow{\cong} \mathbf{M}$$

Notons maintenant \mathcal{R}_{or} la relation dont le graphe est la réunion des parties “orientées” de graphes des applications de transition ; plus précisément, une application de transition $\phi_{\beta,\alpha} : \varphi_{\alpha}(U_{\alpha\beta}) \rightarrow \varphi_{\beta}(U_{\beta\alpha})$ établit une bijection entre les composantes connexes de $\varphi_{\alpha}(U_{\alpha\beta})$ et celles de $\varphi_{\beta}(U_{\beta\alpha})$ et sur chacune d’elles, le signe du jacobien sera constant. On appellera « *composante orientée de $\phi_{\beta,\alpha}$* » chaque restriction de $\phi_{\beta,\alpha}$ à une composante connexe de $\varphi_{\alpha}(U_{\alpha\beta})$ sur laquelle le signe de son jacobien est positif. On définit \mathcal{R}_{or} comme la relation dont la restriction du graphe à l’ouvert $\mathcal{A}(d)_{\alpha} \times \mathcal{A}(d)_{\beta}$ est la réunion des graphes de composantes orientées de $\phi_{\beta,\alpha}$

La relation \mathcal{R}_{or} est une équivalence. En effet, la symétrie, réflexivité et transitivité proviennent respectivement de ce que, pour tous $\alpha, \beta \in \mathfrak{A}$, et sur chaque composante connexe de l’ouvert de définition :

- $\phi_{\alpha,\alpha} = \text{id}_{\mathbb{R}^d}$ est orientée ;
- $\phi_{\beta,\alpha}$ est orientée, si et seulement si, $\phi_{\alpha,\beta}$ l’est ;
- si $\phi_{\gamma,\beta}$ et $\phi_{\beta,\alpha}$ sont orientées, alors la composée $\phi_{\gamma,\alpha} = \phi_{\gamma,\beta} \circ \phi_{\beta,\alpha}$, est encore orientée.

Enfin, $\text{Gr}(\mathcal{R}_{\text{or}})$ est une réunion de composantes connexes de $\text{Gr}(\mathcal{R})$ et est, par conséquent, une sous-variété de $\mathcal{A}(d) \times \mathcal{A}(d)$ de dimension d . L’application du théorème de Godement donne alors une variété $\mathcal{A}(d)/\mathcal{R}_{\text{or}}$ et un morphisme étale de variétés :

$$\Psi : \mathcal{A}(d)/\mathcal{R}_{\text{or}} \rightarrow \mathcal{A}(d)/\mathcal{R} = \mathbf{M} .$$

Proposition 4.6-1 : *Sous les hypothèses en cours, la variété $\mathcal{A}(d)/\mathcal{R}_{\text{or}}$ est canoniquement orientée et Ψ est un revêtement à deux feuillets de \mathbf{M} .*

Démonstration : La construction de la variété $\mathcal{A}(d)/\mathcal{R}_{\text{or}}$ repose sur des données canoniquement attachées à \mathbf{M} , en particulier son atlas de définition est canonique et les morphismes de transition (ce sont ceux dont les graphes constituent la relation \mathcal{R}_{or}) sont orientés par construction. L’atlas de définition de la variété $\mathcal{A}(d)/\mathcal{R}_{\text{or}}$ est donc canonique et orienté.

Avant de démontrer la deuxième partie de la proposition faisons quelques observations élémentaires sur les espaces topologiques quotients.

Soit \mathbf{X} un espace topologique muni d’une relation d’équivalence notée ‘ \sim ’. Soit $\xi : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$ une involution \sim -compatible, *i.e.*

$$\xi^2 = \text{id}_{\mathbf{X}} \quad \text{et} \quad \xi(x_1) = \xi(x_2) \quad \text{pour tous } x_1 \text{ et } x_2 \text{ vérifiant } x_1 \sim x_2$$

L’application ξ induit alors une involution Ξ sur \mathbf{X}/\sim , d’où le sous-groupe $\mathbf{G} := \{\text{id}, \Xi\} \subseteq \text{Homéom}(\mathbf{X}/\sim)$. L’espace $(\mathbf{X}/\sim)/\mathbf{G}$ est alors isomorphe à l’espace \mathbf{X}/\sim_{ξ} , où la relation \sim_{ξ} est définie par

$$x_1 \sim_{\xi} x_2, \quad \text{si et seulement si, } x_1 \sim x_2 \quad \text{ou} \quad x_1 \sim \xi(x_2)$$

en particulier, si l’on note ξ_2 l’involution de $\mathbf{X} \times \mathbf{X}$ définie par $\xi_2(x, y) := (x, \xi(y))$, on a

$$\text{Gr}(\mathcal{R}_{\xi}) = \mathcal{R} \cup \xi_2(\mathcal{R}), \quad (\diamond)$$

et l’on prouve aisément alors que

$$\Xi \text{ possède un point fixe, si et seulement si, } \mathcal{R} \cap \xi_2(\mathcal{R}) \neq \emptyset.$$

Appliquons ces remarques à l'espace $\mathcal{A}(d)$, la relation \mathcal{R}_{or} et l'involution $\xi : \mathcal{A}(d) \rightarrow \mathcal{A}(d)$ définie de la manière suivante : Soit $\epsilon : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ l'involution linéaire de \mathbb{R}^m définie par $\epsilon(x_1, x_2, \dots, x_d) = (-x_1, x_2, \dots, x_d)$, et définissons l'involution ε de l'ensemble d'indices \mathfrak{A} , en posant, pour toute carte $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ de \mathcal{A} :

$$(U_{\varepsilon(\alpha)}, \varphi_{\varepsilon(\alpha)}) := (U_\alpha, \epsilon \circ \varphi_\alpha).$$

On définit $\xi = \mathcal{A}(d) \rightarrow \mathcal{A}(d)$ par ses restrictions aux composantes connexes de $\mathcal{A}(d)$. La restriction de ξ à l'ouvert $\mathcal{A}(d)_\alpha$ sera, par définition, l'application *identique* de $\mathcal{A}(d)_\alpha \rightarrow \mathcal{A}(d)_{\varepsilon(\alpha)}$. La compatibilité de ξ à \mathcal{R}_{or} se lit dans l'inclusion $(\xi \times \xi)(\mathcal{R}_{\text{or}}) \subseteq \mathcal{R}_{\text{or}}$ qui est immédiate puisque $\phi_{\beta, \alpha} = \epsilon \circ \phi_{\varepsilon(\beta), \varepsilon(\alpha)} \circ \epsilon$.

La remarque fondamentale maintenant est que le graphe de \mathcal{R} est partitionné en :

$$\text{Gr}(\mathcal{R}) = \text{Gr}(\mathcal{R}_{\text{or}}) \amalg \xi_2(\text{Gr}(\mathcal{R}_{\text{or}})),$$

dont on déduit que le groupe $\mathbf{G} = \{\text{id}, \Xi\}$ opère *sans point fixe* sur la variété $\mathcal{A}(d)/\mathcal{R}_{\text{or}}$ (et donc de façon proprement discontinue) et que la projection canonique $\Psi : \mathcal{A}(d)/\mathcal{R}_{\text{or}} \rightarrow \mathcal{A}(d)/\mathcal{R}$ est très précisément la projection quotient $\mathcal{A}(d)/\mathcal{R}_{\text{or}} \rightarrow (\mathcal{A}(d)/\mathcal{R}_{\text{or}})/\mathbf{G} \equiv \mathcal{A}(d)/\mathcal{R}$. ■

Définition 4.6-1 : Soit M une variété différentiable de dimension d , et considérons le fibré vectoriel de rang 1 :

$$\pi : \mathcal{A}^d \mathcal{J}(M) \rightarrow M. \quad (\ddagger).$$

On appelle « *variété d'orientation de M* », et on la note $\text{Or}(M)$, l'espace total du revêtement associé à la fibration $\mathcal{A}^d \mathcal{J}(M) \setminus \sigma_0(M) \rightarrow M$, où σ_0 désigne la section nulle du fibré (\ddagger) .

Proposition 4.6-2 : Les revêtements $\pi : \text{Or}(M) \rightarrow M$ et $\Psi : \mathcal{A}(d)/\mathcal{R}_{\text{or}} \rightarrow M$ sont canoniquement isomorphes.

Démonstration : Reprenons les notations et objets des paragraphes précédents. Un atlas pour le fibré $\mathcal{A}^d \mathcal{J}(M)$ est donné par la collection $\{\mathcal{A}(d)_\alpha \times \mathbb{R}\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ où les applications de transition sont de la forme :

$$(x, \lambda) \mapsto (\phi_{\beta, \alpha}(x), J(\phi_{\beta, \alpha})(x) \lambda).$$

Il est alors naturel de considérer l'atlas de $\mathcal{A}^d \mathcal{J}(M) \setminus \sigma_0(M)$ donné par la réunion des familles $\{\mathcal{A}(d)_\alpha \times \mathbb{R}_+^*\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ et $\{\mathcal{A}(d)_\alpha \times \mathbb{R}_-^*\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ où l'inspection de l'application de transition de $\mathcal{A}(d)_\alpha \times \mathbb{R}_\pm^*$ vers $\mathcal{A}(d)_\beta \times \mathbb{R}_\pm^*$ se voit, sur la première coordonnée, comme la composante orientée de $\phi_{\beta, \alpha}$, tandis que la transition de $\mathcal{A}(d)_\alpha \times \mathbb{R}_\pm^*$ vers $\mathcal{A}(d)_\beta \times \mathbb{R}_\mp^*$ est donnée, toujours au niveau des premières coordonnées, par la composante non orientée de $\phi_{\beta, \alpha}$.

La famille de toutes les projections canoniques :

$$p_1 : \mathcal{A}(d)_\alpha \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathcal{A}(d)_\alpha \quad \text{et} \quad p_1 : \mathcal{A}(d)_\alpha \times \mathbb{R}_-^* \rightarrow \mathcal{A}(d)_{\varepsilon(\alpha)},$$

définit alors un M -isomorphisme canonique de $\text{Or}(M)$ vers $\mathcal{A}(d)/\mathcal{R}_{\text{or}}$. ■

4.6.1 Critères d'orientabilité

Proposition : Soit M une variété de dimension d . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- M est orientable.
- Le revêtement de M par sa variété d'orientations est trivial.

Si de plus M admet des partitions de l'unité :

c) Il existe une forme différentielle de degré d nulle part nulle.

Démonstration :

(a) \Rightarrow (b). Les cartes d'un atlas orienté pour M sont trivialement des cartes de l'atlas canonique de $\text{Or}(M)$; ceci définit un plongement canonique de M dans $\text{Or}(M)$ qui est une section du revêtement d'orientations. Comme ce dernier est à deux feuillets, le revêtement est trivial.

(b) \Rightarrow (a). Lorsque le revêtement de la variété d'orientations est trivial, la variété M peut être plongée dans $\text{Or}(M)$ par une immersion ouverte de sorte que M est difféomorphe à un ouvert de $\text{Or}(M)$ qu'on munit de l'orientation induite.

(a) \Rightarrow (c). Soit $\{(U_\beta, \varphi_\beta)\}_{\beta \in \mathfrak{B}}$ un atlas orienté de M , et considérons une partition de l'unité $\{\rho_\gamma\}_{\gamma \in \mathfrak{C}}$ de M à supports compacts subordonnée à $\mathfrak{B} = \{U_\beta\}_{\beta \in \mathfrak{B}}$. Pour chaque $\gamma \in \mathfrak{C}$, il existe donc $\beta(\gamma) \in \mathfrak{B}$ tel que $|\rho_\gamma| \subseteq U_{\beta(\gamma)}$. La forme différentielle $\omega_\gamma = \rho_\gamma \varphi_{\beta(\gamma)}^*(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_d)$ étant à support compact dans l'ouvert $U_{\beta(\gamma)}$ se prolonge par zéro à M tout entier. On pose alors $\omega = \sum_\gamma \omega_\gamma$. Cette forme est nulle part nulle. En effet, soit $(U_{\beta_0}, \varphi_{\beta_0})$ une carte de l'atlas orienté de M telle que les fonctions de partitions non identiquement nulles sur U soient en nombre fini, notons leur famille $\{\rho_{\gamma_1}, \dots, \rho_{\gamma_r}\}$. Le représentant de ω pour la carte $(U_{\beta_0}, \varphi_{\beta_0})$ s'écrit alors :

$$\omega_{\beta_0} := \sum_{k=1}^r \phi_{\beta(\gamma_k), \beta_0}^*(\rho'_{\gamma_k}) J(\phi_{\beta(\gamma_k), \beta_0}) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_d,$$

où ρ'_{γ_k} est la fonction de partition sur $\varphi_{\beta(\gamma_k)}(U_{\beta(\gamma_k)})^{-1}$ définie par $\rho_{\gamma_k} \circ \varphi_{\beta(\gamma_k)}^{-1}$. Comme les applications $\phi_{\beta(\gamma_k), \beta_0}$ sont orientées les coefficients de la somme sont des fonctions positives où nulles et comme les ρ_γ constituent une partition de l'unité de M , le représentant ω_{β_0} est nulle part nul.

(c) \Rightarrow (b). La donnée d'une forme différentielle nulle part nulle détermine une section globale du fibré

$$\mathcal{A}^d \mathcal{J}(M) \setminus \sigma_0(M) \rightarrow M.$$

On en déduit une section globale du revêtement à deux feuillets $\text{Or}(M) \rightarrow M$; ce revêtement est donc nécessairement trivial. ■

Exercice 4.6.1-1 : Une variété (connexe et) simplement connexe est orientable. En particulier, les espaces projectifs $\mathbb{P}_m(\mathbb{C})$ et $\mathbb{P}_m(\mathbb{H})$ sont orientables (voir exercice 2.10-2).

Exercice 4.6.1-2 : Soient M et N deux variétés orientables. Montrer que la somme amalgamée $M + N$ est également orientable.

4.6.2 Variété d'orientations d'une variété quotient

Proposition : Soit G un groupe agissant sur une variété connexe et orientée P de façon proprement discontinue et sans point fixe. Notons $M := P/G$, alors :

- a) L'ensemble $G_{\text{or}} \subseteq G$ des transformations orientées est un sous-groupe distingué de G d'indice un ou deux.
- b) La variété P/G_{or} est toujours canoniquement orientée.
- c) Lorsque $[G:G_{\text{or}}] = 2$, le revêtement $P/G_{\text{or}} \rightarrow M = P/G$ est isomorphe au revêtement d'orientations de M . En particulier, si G possède des transformations non orientées, le quotient M n'est pas orientable.

Démonstration :

- a) Résulte immédiatement du fait que le jacobien d'une composition est le produit des jacobiens et que le jacobien de l'inverse est l'inverse du jacobien.
- b) Le point de vue de variété abstraite pour $\mathbf{P}/\mathbf{G}_{\text{or}}$ met en évidence le fait que le graphe de la relation $\mathcal{R}_{\mathbf{G}_{\text{or}}}$ ne comporte que des graphes d'applications orientées. Ceci permet de voir que le revêtement de la variété d'orientations de $\mathcal{R}_{\mathbf{G}_{\text{or}}}$ est trivial et donc que $\mathcal{R}_{\mathbf{G}_{\text{or}}}$ est orientée.
- c) Évident. ■

Exercice 4.6.2-1 : Montrer que l'application antipodale $\vec{v} \mapsto -\vec{v}$ n'est pas orientable sur la sphère \mathbb{S}^n , si et seulement si, n est un nombre pair strictement positif.

En conclure que l'espace projectif $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ n'est pas orientable, si et seulement si, n est pair strictement positif.

Exercice 4.6.2-2 : En utilisant la description du ruban de Möbius \mathbf{M} et de la bouteille de Klein \mathbf{K} comme quotients de \mathbb{R}^2 . Montrer que ces variétés ne sont pas orientables et calculer leur variétés d'orientations. ⁽²⁵⁾

4.7 Cohomologie de de Rham de la base d'un revêtement

Lemme 4.7-1 : Soit $f : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{N}$ une submersion surjective de variétés différentiables. Le morphisme image inverse :

$$f^* : \Omega^*(\mathbf{N}) \longrightarrow \Omega^*(\mathbf{M})$$

est une injection. L'algèbre différentielle graduée $(\Omega^*(\mathbf{N}), d_*)$ est donc isomorphe à une sous-algèbre différentielle graduée de $(\Omega^*(\mathbf{M}), d_*)$.

Lorsque le morphisme f est, en plus, propre la même assertion concernant les formes différentielles à support compacte est également vérifiée.

Démonstration : Comme f est submersive et surjective, il existe, pour chaque $y \in \mathbf{N}$ donné, une carte (V, ψ) de \mathbf{N} , vérifiant $y \in V$, et une carte (U, φ) de \mathbf{M} , vérifiant $f(U) = V$, telles que

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^{d(\mathbf{M})} \cong \mathbb{R}^{d(\mathbf{N})} \times \mathbb{R}^{d(\mathbf{M})-d(\mathbf{N})} \rightarrow \mathbb{R}^{d(\mathbf{N})},$$

est la projection canonique. En particulier, il existe un morphisme $\sigma : V \rightarrow U$ tel que $f \circ \sigma = \text{id}_V$. Si maintenant $\omega \in \Omega^*(\mathbf{N})$ est telle que $f^*(\omega) = 0$, on aura

$$\omega|_U = \sigma^*(f^*(\omega|_U)) = \sigma^*(f^*(\omega))|_U = 0,$$

et comme le choix de $y \in \mathbf{N}$ est arbitraire, la forme ω est identiquement nulle. ■

Dans cette section nous nous intéresserons plus précisément aux revêtements de variété différentiable $\pi : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{M}$. Lorsque \mathbf{P} (et \mathbf{M}) est connexe, on démontre que chaque élément du groupe $\mathbf{G} := \text{Iso}(\pi)$, d'isomorphismes du revêtement π , est entièrement déterminé par son action sur une fibre $\pi^{-1}(m_0)$. Cette dernière est d'autre part entièrement déterminée par un élément du groupe fondamental $\Pi_1(m_0, \mathbf{M})$ dont on sait qu'il agit de manière transitive sur la fibre $\pi^{-1}(m_0)$. Il s'ensuit

²⁵ Rep. : le cylindre $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ pour \mathbf{M} et le tore $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ pour \mathbf{K} .

que \mathbf{G} agit de façon proprement discontinue et sans point fixe sur \mathbf{P} et que ses orbites coïncident avec les fibres de π . La donnée d'un revêtement de variétés est donc équivalent à la donnée d'une variété munie d'une action d'un groupe proprement discontinue et sans points fixes; d'où l'intérêt de la prochaine section.

4.7.1 Cohomologie de Rham d'une variété d'orbites discrètes

Soit \mathbf{M} une variété différentiable munie d'une action d'un groupe \mathbf{G} proprement discontinue et sans points fixes. Pour chaque $g \in \mathbf{G}$, notons $\gamma_g : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}$ la transformation $\gamma_g : m \mapsto g \cdot m$. On a $\gamma_g \in \text{Difféom}(\mathbf{M})$ et une action "induite" de \mathbf{G} sur $\Omega^*(\mathbf{M})$ par les isomorphismes γ_g^* d'algèbre différentielle graduée.

Notons $\nu : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}/\mathbf{G}$ la submersion canonique; l'égalité $\nu = \nu \circ \gamma_g$ pour tout $g \in \mathbf{G}$, montre que pour chaque $\omega \in \Omega^*(\mathbf{M}/\mathbf{G})$, la forme différentielle $\nu^*(\omega)$ est \mathbf{G} -invariante, *i.e.* vérifie :

$$\nu^*(\omega) = \gamma_g^*(\nu^*(\omega)) \quad \text{pour tout } g \in \mathbf{G},$$

en particulier $\nu^* : \Omega^*(\mathbf{M}/\mathbf{G}) \rightarrow \Omega^*(\mathbf{M})$ est une injection à valeurs dans la sous-ensemble $\Omega^*(\mathbf{M})^{\mathbf{G}}$ des formes différentielles de $\Omega^*(\mathbf{M})$ invariantes sous l'action de \mathbf{G} . La compatibilité des morphismes image inverse γ_g^* à la fois avec la graduation la différentielle et la structure d'algèbre anticommutative, montrent que $(\Omega^*(\mathbf{M})^{\mathbf{G}}, d_*)$ est un sous-algèbre différentielle graduée de $(\Omega^*(\mathbf{M}), d_*)$.

Proposition 4.7.1-1 : *Soit \mathbf{G} un groupe agissant de manière proprement discontinue et sans points fixes sur un variété différentiable \mathbf{M} . Notons $\nu : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}/\mathbf{G}$ la submersion canonique, le morphisme*

$$\nu^* : \Omega^*(\mathbf{M}/\mathbf{G}) \rightarrow \Omega^*(\mathbf{M})^{\mathbf{G}} \subseteq \Omega^*(\mathbf{M})$$

établit un isomorphisme d'algèbres différentielles graduées entre $\Omega^(\mathbf{M}/\mathbf{G})$ et $\Omega^*(\mathbf{M})^{\mathbf{G}}$.*

Démonstration : D'après les préliminaires qui précèdent, seul nous reste à vérifier que toute forme \mathbf{G} -invariante $\omega \in \Omega^m(\mathbf{M})^{\mathbf{G}}$ est de la forme $\nu^*(\varpi)$ pour une certaine forme $\varpi \in \Omega^m(\mathbf{M}/\mathbf{G})$.

Nous avons déjà signalé le fait que ν est un revêtement donc un morphisme étale. Soit $U \subseteq \mathbf{M}/\mathbf{G}$ un ouvert de carte; comme U est contractile, la restriction de ν à l'ouvert $\nu^{-1}(U)$ donne un fibré trivial, donc isomorphe à $U \times \mathbf{G}$. Notons alors σ_g la section de ν correspondante à la feuille indexée par $g \in \mathbf{G}$. On a $\sigma_{g_2 \cdot g_1} = \gamma_{g_2} \circ \sigma_{g_1}$ et donc :

$$\sigma_{g_2 \cdot g_1}^*(\omega) = \sigma_{g_1}^*(\gamma_{g_2}^*(\omega)),$$

en particulier, si $\omega \in \Omega^*(\mathbf{M})^{\mathbf{G}}$ les formes $\sigma_g^*(\omega)$ définissent une même et unique forme différentielle sur l'ouvert U . Il s'ensuit que, en faisant varier l'ouvert U , ces formes se recollent en une forme différentielle globale sur \mathbf{M}/\mathbf{G} que nous allons noter ϖ . La forme $\nu^*(\varpi)$ peut maintenant être étudiée localement (par rapport à \mathbf{M}). En reprenant le même choix d'ouvert U , on aura sur la feuille $U \times \{g\}$ l'égalité

$$\nu^*(\varpi|_U) = \nu^*(\sigma_g^*(\omega|_{U \times \{g\}})) = \omega|_{U \times \{g\}},$$

d'où $\nu^*(\varpi) = \omega$. ■

Exercice 4.7.1-1 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}_u^*$ l'application $t \mapsto \exp(2\pi i t)$. Montrer que c'est un revêtement isomorphe à $\nu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, où \mathbb{Z} opère sur \mathbb{R} par $m \cdot t := t + m$. En déduire que :

$$\Omega^0(\mathbb{S}^1) \equiv \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})^{\mathbb{Z}} \quad \text{et} \quad \Omega^1(\mathbb{S}^1) \equiv \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})^{\mathbb{Z}} dt,$$

où $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})^{\mathbb{Z}}$ est l'espace vectoriel des fonctions différentiables sur \mathbb{R} périodiques de période 1.

Calculer la cohomologie de de Rham de \mathbb{R} , puis de \mathbb{S}^1 . Observer que le morphisme :

$$\nu^* : H_{\text{DR}}^*(\mathbb{S}^1) \rightarrow H_{\text{DR}}^*(\mathbb{R})^{\mathbb{Z}},$$

induit par l'inclusion d'algèbres différentielles graduées $\nu^* : \Omega^*(\mathbb{S}^1) \hookrightarrow \Omega^*(\mathbb{R})$, n'est pas bijectif.

Généraliser l'étude précédente au cas du tore $\mathbb{T}^d = \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1 \equiv \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$ (cf. exercice 1.5.1-3-2).

4.7.2 Cohomologie des invariants et invariants de la cohomologie

Lorsque un groupe \mathbf{G} opère linéairement sur chaque terme d'un complexe différentiel gradué (C^*, d_*) de façon compatible à la différentielle d_* , son action transforme cocycle en cocycle et cobord en cobord, de sorte que si X et Y sont deux m -cocycles cohomologues, *i.e.* vérifiant $(X - Y) \in d_{m-1}(C^{m-1})$, on aura, pour tout $g \in \mathbf{G}$:

$$(g \cdot X - g \cdot Y) \in g \cdot d_{m-1}(C^{m-1}) = d_{m-1}(g \cdot C^{m-1}) = d_{m-1}(C^{m-1}),$$

d'où une action "induite" de \mathbf{G} sur la cohomologie $h^*(C^*, d_*)$. L'inclusion canonique de complexes $\iota_* : ((C^*)^{\mathbf{G}}, d_*) \hookrightarrow (C^*, d_*)$ induit un morphisme en cohomologie :

$$h(\iota)_* : h^*((C^*)^{\mathbf{G}}, d_*) \longrightarrow h^*(C^*, d_*),$$

dont l'image est contenue dans le sous-espace $h^m(C^*, d_*)^{\mathbf{G}}$ des classes de cohomologie \mathbf{G} -invariantes. Nous obtenons ainsi un morphisme canonique entre la cohomologie des invariants et les invariants de la cohomologie :

$$\boxed{h^*((C^*)^{\mathbf{G}}, d_*) \xrightarrow{h(\iota)_*} h^*(C^*, d_*)^{\mathbf{G}}}$$

Reprenons maintenant les données du paragraphe précédent : M une variété différentiable munie d'une action proprement discontinue et sans points fixes par un groupe \mathbf{G} , et soit $\nu : M \rightarrow M/\mathbf{G}$ la projection canonique. On a les morphismes d'algèbre différentielle graduée :

$$(\Omega^*(M/\mathbf{G}), d_*) \xrightarrow[\cong]{\nu^*} (\Omega^*(M)^{\mathbf{G}}, d_*) \xrightarrow{\subseteq} (\Omega^*(M), d_*),$$

dont on déduit par passage à la cohomologie :

$$H_{\text{DR}}^*(M/\mathbf{G}) \xrightarrow[\cong]{\nu^*} h^*(\Omega^*(M)^{\mathbf{G}}, d_*) \longrightarrow h^*(\Omega^*(M), d_*)^{\mathbf{G}} \xrightarrow{=} H_{\text{DR}}^*(M)^{\mathbf{G}} \xrightarrow{\subseteq} H_{\text{DR}}^*(M).$$

L'exercice 4.7.1-1 montre que le morphisme central n'est pas nécessairement bijectif. Le lemme suivant d'algèbre homologique donne une condition simple permettant de l'assurer.

Lemme 4.7.2-1 : Soit \mathbf{G} un groupe *fini* agissant sur un complexe différentiel gradué (C^*, d_*) de \mathbb{R} -espaces vectoriels par des automorphismes de complexe différentiel gradué, i.e. pour chaque $m \in \mathbb{Z}$ et chaque $g \in \mathbf{G}$:

$$(g \cdot : C^m \rightarrow C^m) \in \text{End}_{\mathbb{R}}(C^m) \quad \text{et} \quad d_m(g \cdot X) = g \cdot d_m(X), \quad \text{pour tout } X \in C^m.$$

Notons $\iota_* : ((C^*)^{\mathbf{G}}, d_*) \hookrightarrow (C^*, d_*)$ l'inclusion canonique du sous-complexe des cochaînes \mathbf{G} -invariantes de (C^*, d_*) . Alors, l'application induite en cohomologie :

$$h(\iota)_* : h^*((C^*)^{\mathbf{G}}, d_*) \rightarrow h^*(C^*, d_*),$$

est injective et son image coïncide avec l'espace des classes de cohomologie \mathbf{G} -invariantes. L'application :

$$\boxed{h^*((C^*)^{\mathbf{G}}, d_*) \xrightarrow[\equiv]{h(\iota)_*} (h^*(C^*, d_*))^{\mathbf{G}}}$$

est donc un *isomorphisme* :

Démonstration : Pour chaque $m \in \mathbb{Z}$, notons $\Sigma_m : C^m \rightarrow C^m$ l'opérateur \mathbb{R} -linéaire :

$$X \in C^m \longmapsto \Sigma_m(X) := \frac{1}{|\mathbf{G}|} \sum_{g \in \mathbf{G}} g \cdot X.$$

On vérifie aisément que $\Sigma_m \circ d_m = d_m \circ \Sigma_m$ et $\Sigma_m(X) \in (C^m)^{\mathbf{G}}$, pour tout $X \in C^m$. La composée des morphismes de complexes différentiels :

$$((C^*)^{\mathbf{G}}, d_*) \xrightarrow{\iota_*} (C^*, d_*) \xrightarrow{\Sigma_*} ((C^*)^{\mathbf{G}}, d_*),$$

est alors l'identité et l'injectivité du morphisme :

$$h^*((C^*)^{\mathbf{G}}, d_*) \xrightarrow{\iota_*} (h^*(C^*, d_*))^{\mathbf{G}} \subseteq (h^*(C^*, d_*))$$

en découle.

Montrons la surjectivité de $h(\iota)_*$. Soit $X \in C^m$ un cocycle tel que sa classe de cohomologie soit \mathbf{G} -invariante. Ceci signifie que l'on a, pour tout $g \in \mathbf{G}$:

$$X - g \cdot X \in d_{m-1}(C^{m-1});$$

en additionnant ces expressions suivant tous les $g \in \mathbf{G}$, on obtient :

$$|\mathbf{G}| X - \sum_{g \in \mathbf{G}} g \cdot X \in d_{m-1}(C^{m-1}),$$

soit, $X - \Sigma_m(X) \in d_{m-1}(C^{m-1})$, ce qui montre que toute classe de cohomologie \mathbf{G} -invariante de (C^*, d_*) peut être représentée par un cocycle \mathbf{G} -invariante, ce qui termine la démonstration du lemme. \blacksquare

Remarque 4.7.2-1 : Dans l'énoncé du lemme précédent, le corps \mathbb{R} peut être remplacé par un corps arbitraire k . Lorsque la caractéristique c de k sera positive, il faudra exiger que c et $|\mathbf{G}|$ soient relativement premiers.

Corollaire 4.7.2-2 : Soit M une variété différentiable munie d'une action proprement discontinue et sans points fixes par un groupe fini G , et soit $\nu : M \rightarrow M/G$ la projection canonique. Les morphismes d'algèbres différentielles graduées :

$$H_{\text{DR}}^*(M/G) \xrightarrow{\nu^*} (H_{\text{DR}}^*(M))^G \quad \text{et} \quad H_{\text{DR,c}}^*(M/G) \xrightarrow{\nu^*} (H_{\text{DR,c}}^*(M))^G$$

sont des *isomorphismes*.

—————×—————

§ 5. Suites exactes de Mayer-Vietoris

Nous introduisons dans cette section un instrument simple mais puissant pour “relier” des informations locales de nature cohomologique en une information globale pour une variété. L'idée de départ vient de comprendre le lien entre les complexes des formes différentielles et leurs cohomologies, pour : deux ouverts, leur réunion et de leur intersection. Ce lien est précisé par les suites exactes de Mayer-Vietoris dans les propositions 5.1-1, et 5.2.1-4.

Comme exemple d'application de ces techniques, nous prouverons dans le chapitre suivant la dualité de Poincaré pour les variétés compactes orientables et montrerons que les dimensions des groupes de cohomologie pour une variété compacte sont finies.

5.1 Suites exactes courtes de Mayer-Vietoris

Pour tout couple d'ouverts $W_2 \subseteq W_1$ d'une même variété différentiable M , nous avons défini les morphismes d'algèbres différentielles graduées :

$$\begin{aligned} \rho_{W_2}^{W_1} : \Omega^*(W_1) &\longrightarrow \Omega^*(W_2) && \text{“de restriction de } W_1 \text{ à } W_2\text{”}; \\ \imath_{W_2!}^{W_1} : \Omega_c^*(W_2) &\longrightarrow \Omega_c^*(W_1) && \text{“de prolongement par zéro de } W_2 \text{ à } W_1\text{”}. \end{aligned}$$

Des morphismes de ces types interviennent dans la construction des deux suites courtes, dites « *de Mayer-Vietoris* », associées à la donnée de deux ouverts arbitraires U_1 et U_2 de M :

$$\begin{aligned} \mathbf{0} \rightarrow \Omega^*(U_1 \cup U_2) &\xrightarrow{\rho_{U_1}^{U_1 \cup U_2} \oplus \rho_{U_2}^{U_1 \cup U_2}} \Omega^*(U_1) \oplus \Omega^*(U_2) \xrightarrow{\rho_{U_{12}}^{U_1} \oplus \rho_{U_{12}}^{U_2}} \Omega^*(U_{12}) \rightarrow \mathbf{0} \\ \omega &\longmapsto (\rho_{U_1}^{U_1 \cup U_2}(\omega), \rho_{U_2}^{U_1 \cup U_2}(\omega)) && \text{(MV}(U_1, U_2)) \\ & && (\omega_1, \omega_2) \longmapsto \rho_{U_{12}}^{U_1}(\omega_1) - \rho_{U_{12}}^{U_2}(\omega_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{0} \rightarrow \Omega_c^*(U_{12}) &\xrightarrow{\imath_{U_{12}}^{U_1} \oplus \imath_{U_{12}}^{U_2}} \Omega_c^*(U_1) \oplus \Omega_c^*(U_2) \xrightarrow{\imath_{U_1}^{U_1 \cup U_2} \oplus \imath_{U_2}^{U_1 \cup U_2}} \Omega_c^*(U_1 \cup U_2) \rightarrow \mathbf{0} \\ \omega &\longmapsto (\imath_{U_{12}}^{U_1}(\omega), -\imath_{U_{12}}^{U_2}(\omega)) && \text{(MV}_c(U_1, U_2)) \\ & && (\omega_1, \omega_2) \longmapsto \imath_{U_1}^{U_1 \cup U_2}(\omega_1) + \imath_{U_2}^{U_1 \cup U_2}(\omega_2) \end{aligned}$$

Proposition 5.1-1 : *Pour toute variété M et toute paire d'ouverts (U_1, U_2) , les suites $\mathbf{MV}(U_1, U_2)$ et $\mathbf{MV}_c(U_1, U_2)$ ci-dessus, sont toujours exactes à gauches, et sont exactes lorsque la variété M admet des partitions de l'unité. De plus, les morphismes sont des homomorphismes de complexes différentiels (de degré zéro).*

Démonstration : Le fait que les morphismes commutent aux différentielles découle aussitôt du fait que toute combinaison linéaire de morphismes de complexes est encore un morphisme de complexe. Prouvons maintenant l'exactitude des suites degré par degré, fixons donc un entier naturel $m \in \mathbb{N}$.

Exactitude à gauche des suites $\mathbf{MV}(U_1, U_2)$ et $\mathbf{MV}_c(U_1, U_2)$.

Soit $\omega \in \Omega^m(U_1 \cup U_2)$ telle que $\rho_{U_i}^{U_1 \cup U_2}(\omega) = 0$. Comme ω est une section d'un fibré vectoriel au-dessus de $U_1 \cup U_2$, il est clair que cette application sera nulle, si et seulement si, chaque restriction $\omega|_{U_i}$ est nulle; ceci explique l'injectivité de la flèche de gauche de $\mathbf{MV}(U_1, U_2)$.

L'injectivité de la flèche gauche dans la suite $\mathbf{MV}_c(U_1, U_2)$ est immédiate.

Soient $\omega_i \in \Omega^m$ vérifiant la relation $\omega_1|_{U_{12}} = \omega_2|_{U_{12}}$ (\dagger), la forme différentielle $\omega \in \Omega^m(U_1 \cup U_2)$ définie par $\omega(x) = \omega_i(x)$, si $x \in U_i$, est bien définie à cause de la condition (\dagger), et comme la différentiabilité sur une réunion d'ouverts équivaut à la différentiabilité des restrictions à chaque ouvert, la section ω du fibré vectoriel $\mathcal{A}^m \mathcal{J}(U_1 \cup U_2)$ sera différentiable.

Soient $\omega_i \in \Omega_c^m$ vérifiant $\iota_{U_1}^{U_1 \cup U_2}(\omega_1) = -\iota_{U_2}^{U_1 \cup U_2}(\omega_2)$. Comme le prolongement par zéro ne change pas le support, on déduit que $|\omega_1| = |\omega_2| \subseteq U_{12}$ et donc $|\omega_i| \subseteq U_{12}$; mais alors $\omega_i = \iota_{U_{12}}^{U_i}(\omega_1|_{U_{12}})$ et l'exactitude de la suite $\mathbf{MV}_c(U_1, U_2)$ en son terme central suit.

Exactitude à droite. Supposons maintenant que la variété M admette des partitions de l'unité, et soit $\{\rho_1, \rho_2\}$ une partition de l'unité de l'ouvert $U_1 \cup U_2$ subordonnée au recouvrement $\{U_1, U_2\}$, i.e. $|\rho_i| \subseteq U_i$.

Soit $\omega \in \Omega^m(U_{12})$ et considérons, pour chaque $i = 1, 2$, la section du fibré $\mathcal{A}^m \mathcal{J}(U_i)$ définie par :

$$\omega_i(x) = \begin{cases} \rho_i(x) \omega(x), & \text{si } x \in U_{12} \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Observons alors que lorsque $x \in U_1 \setminus U_2$, il existe un voisinage $V_x \ni x$, tel que $\rho_2(y) = 0$, pour tout $y \in V_x$; en particulier, la forme ω_2 sera identiquement nulle (donc différentiable) sur $U_1 \setminus U_2$ et $\omega_2 \in \Omega^m(U_1)$. Par un argument parfaitement symétrique, on aura $\omega_1 \in \Omega^m(U_2)$, d'où :

$$\rho_{U_{12}}^{U_1}(\omega_2) + \rho_{U_{12}}^{U_2}(\omega_1) = \rho_2|_{U_{12}} \omega + \rho_1|_{U_{12}} \omega = (\rho_1 + \rho_2)|_{U_{12}} \omega = \omega.$$

Le couple $(\omega_2, -\omega_1)$ est donc bien un relèvement de $\omega \in \Omega^m(U_{12})$ dans $\Omega^m(U_1) \oplus \Omega^m(U_2)$ et la flèche de droite de $\mathbf{MV}(U_1, U_2)$ est *surjective*.

Lorsque $\omega \in \Omega_c(U_1 \cup U_2)$, on considère

$$\omega_i(x) = \begin{cases} \rho_i(x) \omega(x), & \text{si } x \in U_i \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

de sorte que le support de ω_i vérifie : $|\omega_i| \subseteq |\rho_i| \cap |\omega| \subseteq U_i$ et est compact; en particulier, $\omega_i|_{U_i} \in \Omega_c^m(U_i)$, et $\iota_{U_i}^{U_1 \cup U_2}(\omega_i|_{U_i}) = \omega_i$. On a alors :

$$\iota_{U_1}^{U_1 \cup U_2}(\omega_1|_{U_1}) + \iota_{U_2}^{U_1 \cup U_2}(\omega_2|_{U_2}) = \omega_1 + \omega_2 = \omega$$

et la flèche de droite de $\mathbf{MV}_c(U_1, U_2)$ est *surjective*. ■

5.2 Suites exactes longues de Mayer-Vietoris

5.2.1 Rappel d'algèbre homologique

Dans cette section, on désigne par \mathcal{A} un anneau commutatif (avec identité multiplicative). Le livre [Bou_A] est une excellente référence pour ce qui suit.

Catégorie de \mathcal{A} -modules \mathbb{Z} -gradués

On appelle « \mathcal{A} -module \mathbb{Z} -gradué » toute famille $\mathbf{A}^* = \{\mathbf{A}^m\}_{m \in \mathbb{Z}}$ de \mathcal{A} -modules (on note souvent $\mathbf{A}^* = \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} \mathbf{A}^m$). Un « morphisme de \mathcal{A} -modules \mathbb{Z} -gradués » est alors la donnée d'une famille d'homomorphismes de \mathcal{A} -modules $f_* = \{f_m : \mathbf{A}_1^m \rightarrow \mathbf{A}_2^m\}_{m \in \mathbb{Z}}$. Ces données constituent une catégorie abélienne notée $\text{Mod}^{\mathbb{Z}}(\mathcal{A})$; son élément nul est noté $\mathbf{0}$ et est représenté par la famille dont chaque élément est le \mathcal{A} -module nul.

Catégorie de \mathcal{A} -modules différentiels \mathbb{Z} -gradués

Les objets de cette catégorie, que nous noterons $\mathbf{C}^*(\mathcal{A})$, sont les couples $\mathbf{A} = (\mathbf{A}^*, d(\mathbf{A})_*)$, où \mathbf{A}^* est un \mathcal{A} -module \mathbb{Z} -gradué, et $d(\mathbf{A})_*$ désigne une famille $\{d(\mathbf{A})_m : \mathbf{A}^m \rightarrow \mathbf{A}^{m+1}\}_{m \in \mathbb{Z}}$ de morphismes de \mathcal{A} -modules vérifiant l'égalité $d(\mathbf{A})_{m+1} \circ d(\mathbf{A})_m = 0$, pour tout $m \in \mathbb{Z}$.

La famille $d(\mathbf{A})_* = \{d(\mathbf{A})_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$ est appelée « la différentielle du \mathcal{A} -module différentiel \mathbf{A} ». La terminologie « complexe différentiel de \mathcal{A} -modules » pour référer à un \mathcal{A} -module différentiel \mathbb{Z} -gradué est aussi employée dans la littérature et sera également utilisée dans ce cours.

Un « morphisme » entre les complexes différentiels $(\mathbf{A}^*, d(\mathbf{A})_*)$ et $(\mathbf{B}^*, d(\mathbf{B})_*)$ est un morphisme $f_* : \mathbf{A}^* \rightarrow \mathbf{B}^*$ de \mathcal{A} -modules \mathbb{Z} -gradués, vérifiant les relation de commutation

$$d(\mathbf{B})_m \circ f_m = f_{m+1} \circ d(\mathbf{A})_m, \quad \text{pour tout } m \in \mathbb{Z}.$$

Exercice 5.2.1-1 et notations : Soit $f_* : \mathbf{A}^* \rightarrow \mathbf{B}^*$ un morphisme de complexes différentiels entre $(\mathbf{A}^*, d(\mathbf{A})_*)$ et $(\mathbf{B}^*, d(\mathbf{B})_*)$. Montrer que les sous- \mathcal{A} -modules gradués $\{\ker(f_m)\}_{m \in \mathbb{Z}}$ et $\{\text{coker}(f_m)\}_{m \in \mathbb{Z}}$ sont stables par $d(\mathbf{A})_*$ et $d(\mathbf{B})_*$ respectivement, et munis de ces différentielles ce sont des complexes différentiels notés $(\ker(f)_*, d_*)$ et $(\text{coker}(f)_*, d_*)$.

Les complexes différentiels de \mathcal{A} -modules et leurs morphismes, constituent une catégorie **abélienne**.

Foncteur de cohomologie

De même que nous l'avons fait dans le complexe des formes différentielles, on appelle « m -cocycle d'un complexe différentiel $\mathbf{A} = (\mathbf{A}^*, d_*)$ », tout élément X de \mathbf{A}^m vérifiant $d_m(X) = 0$; leur ensemble est noté $\mathcal{Z}^m(\mathbf{A}^*, d_*)$ (en abrégé $\mathcal{Z}^m(\mathbf{A})$) et, dû à la linéarité de d_* , c'est un sous- \mathcal{A} -module de \mathbf{A}^m . Les éléments du sous- \mathcal{A} -module $\mathcal{B}^m(\mathbf{A}^*, d_*) := d_{m-1}(\mathbf{A}^{m-1}) \subseteq \mathbf{A}^m$ sont appelés (en abrégé $\mathcal{B}^m(\mathbf{A})$) « les m -cobords de (\mathbf{A}^*, d_*) ». La relation $d_m \circ d_{m-1} = 0$ montre alors que $\mathcal{B}^m(\mathbf{A}^*, d_*) \subseteq \mathcal{Z}^m(\mathbf{A}^*, d_*)$,

pour tout $m \in \mathbb{Z}$. On définit «la cohomologie de (\mathbf{A}^*, d_*) » comme le module \mathbb{Z} -gradué de cohomologie de (\mathbf{A}^*, d_*) :

$$h^*(\mathbf{A}^*, d_*) := \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} \frac{\mathfrak{Z}^m(\mathbf{A}^*, d_*)}{\mathfrak{B}^m(\mathbf{A}^*, d_*)}$$

et l'on vérifie que lorsque $f_* : (\mathbf{A}_1^*, d_{1,*}) \rightarrow (\mathbf{A}_2^*, d_{2,*})$ est un morphisme de complexes différentiels, on a, pour chaque $m \in \mathbb{Z}$:

$$f_m(\mathfrak{Z}^m(\mathbf{A}_1^*, d_{1,*})) \subseteq \mathfrak{Z}^m(\mathbf{A}_2^*, d_{2,*}) \quad \text{et} \quad f_m(\mathfrak{B}^m(\mathbf{A}_1^*, d_{1,*})) \subseteq \mathfrak{B}^m(\mathbf{A}_2^*, d_{2,*})$$

de sorte que f_* induit un morphisme $h(f)_*$ de \mathcal{A} -modules \mathbb{Z} -gradués entre les cohomologies :

$$\begin{aligned} h^*(\mathbf{A}_1^*, d_{1,*}) &:= \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} \frac{\mathfrak{Z}^m(\mathbf{A}_1^*, d_{1,*})}{\mathfrak{B}^m(\mathbf{A}_1^*, d_{1,*})} \xrightarrow{h(f)_*} \bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} \frac{\mathfrak{Z}^m(\mathbf{A}_2^*, d_{2,*})}{\mathfrak{B}^m(\mathbf{A}_2^*, d_{2,*})} := h^*(\mathbf{A}_2^*, d_{2,*}) \\ X \text{ mod } \mathfrak{B}^m(\mathbf{A}_1^*, d_{1,*}) &\longmapsto f_m(X) \text{ mod } \mathfrak{B}^m(\mathbf{A}_2^*, d_{2,*}) \end{aligned}$$

le lemme suivant se démontre aisément.

Lemme 5.2.1-1 : *La correspondance qui associe à un complexe différentiel de \mathcal{A} -modules (\mathbf{A}^*, d_*) le \mathcal{A} -module gradué $h^*(\mathbf{A}^*, d_*)$, et à chaque morphisme de complexes $f_* : (\mathbf{A}_1^*, d_{1,*}) \rightarrow (\mathbf{A}_2^*, d_{2,*})$ le morphisme de \mathcal{A} -modules gradués $h(f)_*$, est **fonctorielle additive et covariante** de la catégorie des complexes différentiels $\mathbf{C}^*(\mathcal{A})$ vers la catégorie de \mathcal{A} -modules gradués $\text{Mod}^{\mathbb{Z}}(\mathcal{A})$.*

Catégorie des suites exactes courtes de complexes différentiels

Les objets de cette catégorie sont les “suites” de complexes différentiels de \mathcal{A} -modules de la forme :

$$\mathbf{0} \rightarrow (\mathbf{A}_1^*, d_{1,*}) \xrightarrow{f(\mathbf{A})_*} (\mathbf{A}_2^*, d_{2,*}) \xrightarrow{g(\mathbf{A})_*} (\mathbf{A}_3^*, d_{3,*}) \rightarrow \mathbf{0} \quad (\diamond_*)$$

où $f(\mathbf{A})_*$ et $g(\mathbf{A})_*$ sont des morphismes de complexes différentiels tels que, pour chaque $m \in \mathbb{Z}$ la suite :

$$\mathbf{0} \rightarrow \mathbf{A}_1^m \xrightarrow{f(\mathbf{A})_m} \mathbf{A}_2^m \xrightarrow{g(\mathbf{A})_m} \mathbf{A}_3^m \rightarrow \mathbf{0} \quad (\diamond_m)$$

de \mathcal{A} -modules est exacte.

Un «morphisme de suites exactes de complexes différentiels de \mathcal{A} -modules» est la donnée d'un triplet $(\alpha_{1,*}, \alpha_{2,*}, \alpha_{3,*})$ de morphismes de complexes :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{0} \rightarrow (\mathbf{A}_1^*, d_{1,*}) & \xrightarrow{f(\mathbf{A})_*} & (\mathbf{A}_2^*, d_{2,*}) & \xrightarrow{g(\mathbf{A})_*} & (\mathbf{A}_3^*, d_{3,*}) \rightarrow \mathbf{0} \\ & & \alpha_{1,*} \downarrow & & \alpha_{2,*} \downarrow & & \alpha_{3,*} \downarrow \\ \mathbf{0} \rightarrow (\mathbf{B}_1^*, d_{1,*}) & \xrightarrow{f(\mathbf{B})_*} & (\mathbf{B}_2^*, d_{2,*}) & \xrightarrow{g(\mathbf{B})_*} & (\mathbf{B}_3^*, d_{3,*}) \rightarrow \mathbf{0} \end{array}$$

tel que les sous-diagrammes de ce diagramme sont tous commutatifs.

En appliquant le foncteur de cohomologie à (\diamond_*) , on obtient, pour chaque $m \in \mathbb{Z}$, la suite de \mathcal{A} -modules :

$$h^m(\mathbf{A}_1^*, d_{1,*}) \xrightarrow{h(f)_m} h^m(\mathbf{A}_2^*, d_{2,*}) \xrightarrow{h(g)_m} h^m(\mathbf{A}_3^*, d_{3,*}) \quad (\diamond\diamond_m)$$

Lemme 5.2.1-2 : Pour tout $m \in \mathbb{Z}$, la suite (\diamond_m) est exacte et dépend fonctoriellement de la catégorie des suites exactes de complexes différentiels de \mathcal{A} -modules.

Démonstration : Soit $\omega \in \mathcal{Z}^m(\mathbf{A}_2^*, d_{2,*})$ et supposons que $g_m(\omega) \in \mathcal{B}^m(\mathbf{A}_3^*, d_{3,*})$. Il existe alors $\mu \in \mathbf{A}_3^{m-1}$ tel que $g_m(\omega) = d_{3,m-1}(\mu)$, et comme g_{m-1} est surjective il existe $\omega' \in \mathbf{A}_2^{m-1}$ vérifiant $g_{m-1}(\omega') = \mu$. Il s'ensuit que :

$$g_m(d_{2,m-1}(\omega') - \omega) = g_m(d_{2,m-1}(\omega')) - g_m(\omega) = d_{3,m-1}(\mu) - g_m(\omega) = 0$$

et par l'exactitude centrale de (\diamond_m) , il existe $\nu \in \mathbf{A}_1^m$ vérifiant :

$$f_m(\nu) = \omega - d_{2,m-1}(\omega'),$$

et comme f_m est injective et que $\omega - d_{2,m-1}(\omega')$ est un m -cocycle, ν l'est également et sa classe de cohomologie $\bar{\nu}$ à comme image par $h(f)_m$ la classe de $\omega - d_{2,m-1}(\omega')$ qui est bien $\bar{\omega}$.

Enfin la dépendance fonctorielle des suites (\diamond_m) est claire d'après les développements des paragraphes précédents. ■

Remarque 5.2.1-1 : La méthode de démonstration du lemme précédent qui consiste à poursuivre dans un diagramme des éléments, leurs images, relèvements et différentielles est connu sous le nom de « *chasse aux diagrammes* ». La démonstration en question peut être visualisée par :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \omega' & \xrightarrow{g_{m-1}} & \mu & \\
 & & & \downarrow d_{2,m-1} & & \downarrow d_{3,m-1} & \\
 0 \rightarrow & \nu \in \mathbf{A}_1^m & \xrightarrow{f_m} & \left\{ \begin{array}{l} d_{2,m-1}(\omega') \\ \bar{\omega} \in \mathbf{A}_2^m \end{array} \right. & \xrightarrow{g_m} & g_m(\omega) \in \mathbf{A}_3^m & \rightarrow 0 \\
 & \downarrow d_{1,m} & & \downarrow d_{2,m} & & \downarrow d_{3,m} & \\
 & d_{1,m}(\nu) & \xrightarrow{f_{m+1}} & 0 & \xrightarrow{g_{m+1}} & 0 &
 \end{array}$$

Le morphisme de liaison

Soit la suite exacte courte de complexes différentiels de \mathcal{A} -modules :

$$\mathbf{0} \rightarrow (\mathbf{A}_1^*, d_{1,*}) \xrightarrow{f(\mathbf{A})_*} (\mathbf{A}_2^*, d_{2,*}) \xrightarrow{g(\mathbf{A})_*} (\mathbf{A}_3^*, d_{3,*}) \rightarrow \mathbf{0}. \quad (f(\mathbf{A}), g(\mathbf{A}))$$

Le but de ce paragraphe est de définir **fonctoriellement** par rapport à la catégorie des suites exactes de complexes différentiels, des familles de morphismes $\{c(f(\mathbf{A}), g(\mathbf{A}))_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$, dits « *de liaison* » :

$$h^m(\mathbf{A}_1^*) \xrightarrow{h(f)_m} h^m(\mathbf{A}_2^*) \xrightarrow{h(g)_m} h^m(\mathbf{A}_3^*) \xrightarrow{c(f(\mathbf{A}), g(\mathbf{A}))_m} h^{m+1}(\mathbf{A}_1^*) \xrightarrow{h(f)_{m+1}} h^{m+1}(\mathbf{A}_2^*) \xrightarrow{h(g)_{m+1}} h^{m+1}(\mathbf{A}_3^*)$$

rendant la suite longue résultante **exacte**.

La définition la plus élémentaire procède par une chasse aux diagrammes sur une suite exacte de complexes donnée $(f(\mathbf{A}), g(\mathbf{A}))$.

L'idée à la base est la suivante : Soit $\omega \in \mathcal{Z}^m(\mathbf{A}_3)$ (un représentant d'une classe de cohomologie de $h^m(\mathbf{A}_3^*, d(\mathbf{A}_3)_*)$); comme g_m est surjective, il existe un relèvement $\mu \in \mathbf{A}_2^m$ de ω . On a alors

$g_{m+1}(d(\mu)) = d(g_m(\mu)) = d(\omega) = 0$ et donc $d(\mu)$ et l'image par l'injection f_{m+1} d'un unique élément $\omega' \in \mathbf{A}^{m+1}$ dont la différentielle sera nulle puisque $f_{m+2}(d(\omega')) = d(f_{m+1}(\omega')) = d(d(\mu)) = 0$.

$$\begin{array}{ccc} \mu & \xrightarrow{g_m} & \omega \in \mathfrak{Z}^m(\mathbf{A}_3) \rightarrow \mathbf{0} \\ & & \downarrow d(\mathbf{A}_3)_m \\ d(\mathbf{A}_2)_m \downarrow & & \downarrow d(\mathbf{A}_3)_m \\ \omega' \in \mathfrak{Z}^{m+1}(\mathbf{A}_1) & \xrightarrow{f_{m+1}} & d(\mu) \xrightarrow{g_{m+1}} 0 \end{array} \quad (\mathcal{D}_1)$$

On aura remarqué que dans cette procédure le seul choix non canonique concerne le relèvement μ de ω . Or, dû à l'exactitude centrale de nos suites, tout autre choix différera de μ par un élément de la forme $f(\varepsilon)$. Mais alors l'injectivité de f_{m+1} permet de voir que le cocycle de $\mathfrak{Z}^{m+1}(\mathbf{A}_1)$ obtenu sera $\omega' + d(\varepsilon)$.

$$\begin{array}{ccc} \varepsilon \in \mathbf{A}_1^m & \xrightarrow{f_m} & \mu + f(\varepsilon) \xrightarrow{g_m} \omega \in \mathfrak{Z}^m(\mathbf{A}_3) \rightarrow \mathbf{0} \\ & & \downarrow d(\mathbf{A}_3)_m \\ d(\mathbf{A}_2)_m \downarrow & & \downarrow d(\mathbf{A}_3)_m \\ \omega' + d(\varepsilon) & \xrightarrow{f_{m+1}} & d(\mu) + d(f(\varepsilon)) \xrightarrow{g_{m+1}} 0 \end{array} \quad (\mathcal{D}_2)$$

Ce procédé permet donc bien de définir un homomorphisme de \mathbf{A} -modules :

$$c_m : \mathfrak{Z}^{m+1}(\mathbf{A}_3) \longrightarrow \frac{\mathfrak{Z}^{m+1}(\mathbf{A}_1)}{\mathfrak{B}^{m+1}(\mathbf{A}_1)}$$

Montrons maintenant que c_m est nul lorsque restreint à $\mathfrak{B}^m(\mathbf{A}_3)$. Supposons $\omega = d(\varphi)$, alors la surjectivité de g_{m-1} permet de relever φ en un élément $\psi \in \mathbf{A}_2^{m-1}$ de sorte que $\omega = f_m(d_{m-1}(\psi))$. Nous pouvons donc prendre $\mu = d_{m-1}(\psi)$ dans le diagramme (\mathcal{D}_1) , auquel cas $d_m(\mu) = 0$ et $\omega' = 0$.

On note alors $c_m(f(\mathbf{A}), g(\mathbf{A}))$ l'application induite par c_m en cohomologie; elle sera appelée « *morphisme de liaison des suites de cohomologie associées à $(f(\mathbf{A}), g(\mathbf{A}))$* ». La correspondance :

$$(f(\mathbf{A}), g(\mathbf{A})) \rightsquigarrow \left(h^m(\mathbf{A}_3^*, d_*) \xrightarrow{c_m(f(\mathbf{A}), g(\mathbf{A}))} h^{m+1}(\mathbf{A}_1^*, d_*) \right)$$

dépend fonctoriellement de la catégorie des suites exactes de complexes différentiels de \mathbf{A} -modules. Ceci signifie que si $(\alpha_{1,*}, \alpha_{2,*}, \alpha_{3,*}) : (f(\mathbf{A}), g(\mathbf{A})) \rightarrow (f(\mathbf{B}), g(\mathbf{B}))$ est un morphisme de suites exactes, les diagrammes :

$$\begin{array}{ccc} h^m(\mathbf{A}_3^*, d_*) & \xrightarrow{c_m(f(\mathbf{A}), g(\mathbf{A}))} & h^{m+1}(\mathbf{A}_1^*, d_*) \\ h(\alpha_3)_m \downarrow & & \downarrow h(\alpha_1)_{m+1} \\ h^m(\mathbf{B}_3^*, d_*) & \xrightarrow{c_m(f(\mathbf{B}), g(\mathbf{B}))} & h^{m+1}(\mathbf{B}_1^*, d_*) \end{array}$$

sont commutatifs, pour tout $m \in \mathbb{Z}$. C'est un fait que l'on vérifie aisément en remarquant que toute chasse aux diagrammes liée à la suite $(f(\mathbf{A}), g(\mathbf{A}))$ se transforme à l'aide des morphismes $(\alpha_{1,*}, \alpha_{2,*}, \alpha_{3,*})$ en une chasse aux diagrammes équivalente pour $(f(\mathbf{B}), g(\mathbf{B}))$.

Proposition 5.2.1-3 et terminologie : *La correspondance qui associe à une suite exacte courte de complexes différentiels de \mathcal{A} -modules $(f(\mathbf{A}), g(\mathbf{A}))$:*

$$\mathbf{0} \rightarrow (\mathbf{A}_1^*, d_{1,*}) \xrightarrow{f(\mathbf{A})_*} (\mathbf{A}_2^*, d_{2,*}) \xrightarrow{g(\mathbf{A})_*} (\mathbf{A}_3^*, d_{3,*}) \rightarrow \mathbf{0} . \quad (\Delta)$$

la suite longue :

$$h^m(\mathbf{A}_1^*) \xrightarrow{h(f)_m} h^m(\mathbf{A}_2^*) \xrightarrow{h(g)_m} h^m(\mathbf{A}_3^*) \xrightarrow{c(f(\mathbf{A}), g(\mathbf{A}))_m} h^{m+1}(\mathbf{A}_1^*) \xrightarrow{h(f)_{m+1}} h^{m+1}(\mathbf{A}_2^*) \xrightarrow{h(g)_{m+1}} h^{m+1}(\mathbf{A}_3^*) \quad (\Delta\Delta)$$

dépend fonctoriellement des données de la catégorie des suites exactes de complexes de \mathcal{A} -modules. La suite $(\Delta\Delta)$ est elle-même une suite exacte ; on l'appelle «la suite exacte longue de cohomologie associée à la suite exacte courte (Δ) ».

Démonstration : D'après le lemme 5.2.1-2, il suffira de démontrer son exactitude au niveau des termes concernés par le morphisme de liaison.

Exactitude en $h^m(\mathbf{A}_3^*)$. Reprenons le diagramme (\mathcal{D}_1) de la définition du morphisme de liaison et supposons que ω' est un cobord, *i.e.* $\omega' = d(\zeta)$ pour un certain $\zeta \in \mathbf{A}_1^m$. L'élément $\mu - f_m(\zeta)$ est alors également un relèvement du cocycle ω , mais c'est maintenant aussi un cocycle de \mathbf{A}_2^* de sorte que la classe de cohomologie de ω est l'image par $h(g)_m$ de la classe de cohomologie de $\mu - f_m(\zeta)$.

$$\begin{array}{ccccc} \zeta \in \mathbf{A}_1^m & \xrightarrow{f_m} & \mu - f_m(\zeta) & \xrightarrow{g_m} & \omega \in \mathfrak{Z}^m(\mathbf{A}_3) \rightarrow \mathbf{0} \\ d(\mathbf{A}_1)_m \downarrow & & d(\mathbf{A}_2)_m \downarrow & & d(\mathbf{A}_3)_m \downarrow \\ d(\zeta) = \omega' & \xrightarrow{f_{m+1}} & d(\mu) - df(\zeta) = 0 & \xrightarrow{g_{m+1}} & 0 \end{array}$$

Exactitude en $h^{m+1}(\mathbf{A}_1^*)$. Elle est presque tautologique. En effet, soit $\omega' \in \mathfrak{Z}^{m+1}(\mathbf{A}_1)$ un cocycle tel que $f_{m+1}(\omega')$ est un cobord, *i.e.* $f_{m+1}(\omega') = d_m(\mu)$, pour un certain $\mu \in \mathbf{A}_2^m$. En posant $\omega = g_m(\mu)$, on retrouve très exactement la définition de l'action du morphisme de liaison $c(f, g)_m$ et la relation entre les classes de cohomologie $\bar{\omega}' = c(f, g)_m(\bar{\omega})$.

$$\begin{array}{ccccc} & & \mu & \xrightarrow{g_m} & \omega \in \mathfrak{Z}^m(\mathbf{A}_3) \rightarrow \mathbf{0} \\ & & & & d(\mathbf{A}_3)_m \downarrow \\ & & d(\mathbf{A}_2)_m \downarrow & & \\ \omega' \in \mathfrak{Z}^{m+1}(\mathbf{A}_1) & \xrightarrow{f_{m+1}} & d(\mu) & \xrightarrow{g_{m+1}} & 0 \end{array} \quad \blacksquare$$

Corollaire 5.2.1-4 et terminologie : *Pour toute variété M et toute paire d'ouverts (U_1, U_2) , les suites courtes exactes de Mayer-Vietoris $\mathbf{MV}(U_1, U_2)$ et $\mathbf{MV}_c(U_1, U_2)$ (²⁶) donnent lieu aux «suites*

²⁶ Voir page 86.

exactes longues de Mayer-Vietoris» :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \xrightarrow{c_{m-1}} & H_{\text{DR}}^m(U_1 \cup U_2) & \longrightarrow & H_{\text{DR}}^m(U_1) \oplus H_{\text{DR}}^m(U_2) & \longrightarrow & H_{\text{DR}}^m(U_{12}) \xrightarrow{c_m} \\
 & & \longleftarrow & & \longleftarrow & & \longleftarrow \\
 & & H_{\text{DR}}^{m+1}(U_1 \cup U_2) & \longrightarrow & H_{\text{DR}}^{m+1}(U_1) \oplus H_{\text{DR}}^{m+1}(U_2) & \longrightarrow & H_{\text{DR}}^{m+1}(U_{12}) \xrightarrow{c_{m+1}} \dots \\
 & & \longleftarrow & & \longleftarrow & & \longleftarrow \\
 \dots & \xrightarrow{c_{m-1}} & H_{\text{DR,c}}^m(U_{12}) & \longrightarrow & H_{\text{DR,c}}^m(U_1) \oplus H_{\text{DR,c}}^m(U_2) & \longrightarrow & H_{\text{DR,c}}^m(U_1 \cup U_2) \xrightarrow{c_m} \\
 & & \longleftarrow & & \longleftarrow & & \longleftarrow \\
 & & H_{\text{DR,c}}^{m+1}(U_{12}) & \longrightarrow & H_{\text{DR,c}}^{m+1}(U_1) \oplus H_{\text{DR,c}}^{m+1}(U_2) & \longrightarrow & H_{\text{DR,c}}^{m+1}(U_1 \cup U_2) \xrightarrow{c_{m+1}} \dots
 \end{array}$$

5.3 Compatibilité entre le morphisme de dualité et le morphisme de liaison

Rappelons la définition du morphisme de dualité donnée en 4.5 Pour toute variété orientable M de dimension d admettant des partitions de l'unité, on pose, pour chaque $r \in \mathbb{N}$ vérifiant $r \leq d$:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}(M)_r : H_{\text{DR}}^r(M) &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(H_{\text{DR,c}}^{d-r}(M), \mathbb{R}) \\
 \omega &\longmapsto \left(\nu \mapsto \int_M \omega \wedge \nu \right)
 \end{aligned}$$

où ω et ν désignent des représentants "forme différentielle" (des cocycles) de classes de cohomologie.

Ces morphismes interviennent dans les suites exactes longues de Mayer-Vietoris de la manière suivante :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \xrightarrow{c_{r-1}} & H_{\text{DR}}^r(U_1 \cup U_2) & \longrightarrow & H_{\text{DR}}^r(U_1) \oplus H_{\text{DR}}^r(U_2) & \longrightarrow & H_{\text{DR}}^r(U_{12}) & \xrightarrow{c_r} \\
 & \mathcal{D}_r(U_1 \cup U_2) \downarrow & & (\mathbf{I}_r) \quad \mathcal{D}_r(U_1) \downarrow & \oplus & \downarrow \mathcal{D}_r(U_2) \quad (\mathbf{II}_r) & \mathcal{D}_r(U_{12}) \downarrow & (\mathbf{III}_r) \\
 \xrightarrow{c_{d-r}^\vee} & H_{\text{DR,c}}^{d-r}(U_1 \cup U_2)^\vee & \longrightarrow & H_{\text{DR,c}}^{d-r}(U_1)^\vee \oplus H_{\text{DR,c}}^{d-r}(U_2)^\vee & \longrightarrow & H_{\text{DR,c}}^{d-r}(U_{12})^\vee & \xrightarrow{c_{d-r-1}^\vee}
 \end{array}$$

où nous avons noté $H_{\text{DR,c}}^r(-)^\vee := \text{Hom}_{\mathbb{R}}(H_{\text{DR,c}}^r(-), \mathbb{R})$, et, pour toute application linéaire $f : V_1 \rightarrow V_2$ entre deux espaces vectoriels, on désigne par $f^\vee : V_2^\vee \rightarrow V_1^\vee$ l'application transposée de f , *i.e.* $f^\vee(\gamma) = \gamma \circ f$, pour tout $\gamma \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V_2, \mathbb{R})$.

Commutativité des sous-diagrammes (\mathbf{I}_r)

Soit ω un cocycle de $\Omega^r(U_1 \cup U_2)$ et comparons les couples :

$$\left(\mathcal{D}_r(U_1)(\rho_{U_1}^{U_1 \cup U_2}(\omega)), \mathcal{D}_r(U_2)(\rho_{U_2}^{U_1 \cup U_2}(\omega)) \right) \quad \text{et} \quad \left(\iota_{U_1}^{U_1 \cup U_2}(\mathcal{D}_r(U_1 \cup U_2)(\omega))^\vee, \iota_{U_2}^{U_1 \cup U_2}(\mathcal{D}_r(U_1 \cup U_2)(\omega))^\vee \right)$$

pour tout couple (ν_1, ν_2) de cocycles de $\Omega_c^{d-r}(U_1) \oplus \Omega_c^{d-r}(U_2)$, on a :

$$\left(\mathcal{D}_r(U_1)(\rho_{U_1}^{U_1 \cup U_2}(\omega))(\nu_1), \mathcal{D}_r(U_2)(\rho_{U_2}^{U_1 \cup U_2}(\omega))(\nu_2) \right) = \left(\int_{U_1} \rho_{U_1}^{U_1 \cup U_2}(\omega) \wedge \nu_1, \int_{U_2} \rho_{U_2}^{U_1 \cup U_2}(\omega) \wedge \nu_2 \right)$$

et

$$\left(\imath_{U_1}^{U_1 \cup U_2} (\mathcal{D}_r(U_1 \cup U_2)(\omega))^\vee(\nu_1), \imath_{U_1}^{U_1 \cup U_2} (\mathcal{D}_r(U_1 \cup U_2)(\omega))^\vee(\nu_2) \right) = \left(\int_{U_1 \cup U_2} \omega \wedge \imath_{U_1}^{U_1 \cup U_2}(\nu_1), \int_{U_1 \cup U_2} \omega \wedge \imath_{U_2}^{U_1 \cup U_2}(\nu_2) \right)$$

où les termes de droite de deux égalités précédentes coïncident d'après le lemme 4.5.1-1 et prouvent la commutativité des diagrammes **(I_r)**.

Commutativité des sous-diagrammes **(II_r)**

Comme dans le cas précédent, soient des cocycles $\omega_i \in \Omega^r(U_i)$ et comparons :

$$\mathcal{D}_r(U_{12})(\rho_{U_{12}}^{U_1}(\omega_1) - \rho_{U_{12}}^{U_2}(\omega_2)) \quad \text{et} \quad \left(\imath_{U_{12}}^{U_1}(\mathcal{D}_r(U_1)(\omega_1))^\vee - \imath_{U_{12}}^{U_2}(\mathcal{D}_r(U_2)(\omega_2))^\vee \right).$$

Pour chaque $\nu \in \Omega_c^r(U_{12})$, on aura :

$$\mathcal{D}_r(U_{12})(\rho_{U_{12}}^{U_1}(\omega_1) - \rho_{U_{12}}^{U_2}(\omega_2))(\nu) = \int_{U_{12}} \rho_{U_{12}}^{U_1}(\omega_1) \wedge \nu - \int_{U_{12}} \rho_{U_{12}}^{U_2}(\omega_2) \wedge \nu$$

et

$$\imath_{U_{12}}^{U_1}(\mathcal{D}_r(U_1)(\omega_1))^\vee(\nu) - \imath_{U_{12}}^{U_2}(\mathcal{D}_r(U_2)(\omega_2))^\vee(\nu) = \int_{U_1} \omega_1 \wedge \imath_{U_{12}}^{U_1}(\nu) - \int_{U_2} \omega_2 \wedge \imath_{U_{12}}^{U_2}(\nu)$$

où nous retrouvons, à nouveau, égalité des termes de droite (*loc. cit.* 4.5.1-1), et donc commutativité des diagrammes **(II_r)**.

Commutativité des sous-diagrammes **(III_r)**

Ces sous-diagrammes sont les diagrammes :

$$\begin{array}{ccc} H_{\text{DR}}^r(U_{12}) & \xrightarrow{c_r} & H_{\text{DR}}^{r+1}(U_1 \cup U_2) \\ \mathcal{D}_r(U_{12}) \downarrow & \text{(III}_r\text{)} & \downarrow \mathcal{D}_{r+1}(U_1 \cup U_2) \\ H_{\text{DR},c}^{d-r}(U_{12})^\vee & \xrightarrow{c_{d-(r+1)}^\vee} & H_{\text{DR},c}^{d-(r+1)}(U_1 \cup U_2)^\vee \end{array}$$

Soit ω un cocycle de $\Omega^r(U_{12})$, la définition de l'application de liaison c_r demande à exprimer ω comme la différence de la restriction à U_{12} de deux formes différentielles $\omega_i \in \Omega^r(U_i)$ (pas forcément cocycliques) ; les formes $d(\omega_1)$ et $d(\omega_2)$ se recollent en un cocycle de $\Omega^{r+1}(U_1 \cup U_2)$, c'est le cocycle $c_r(\omega)$ que nous allons noter provisoirement : $d\omega_1 \underline{\vee} d\omega_2$. On a alors, pour tout cocycle $\nu \in \Omega_c^{d-(r+1)}(U_1 \cup U_2)$:

$$\mathcal{D}_{r+1}(U_1 \cup U_2)(c_r(\omega))(\nu) = \int_{U_1 \cup U_2} (d\omega_1 \underline{\vee} d\omega_2) \wedge \nu$$

On exprime alors ν comme **somme** de deux formes différentielles ν_1 et ν_2 à support compacts respectivement contenus dans U_1 et U_2 (tel que procède la définition de l'application de liaison) ; on a

alors

$$\begin{aligned}
 \int_{U_1 \cup U_2} (d\omega_1 \underset{\vee}{\wedge} d\omega_2) \wedge \nu &= \int_{U_1 \cup U_2} (d\omega_1 \underset{\vee}{\wedge} d\omega_2) \wedge \nu_1 + \int_{U_1 \cup U_2} (d\omega_1 \underset{\vee}{\wedge} d\omega_2) \wedge \nu_2 \\
 &= \int_{U_1} d\omega_1 \wedge \nu_1 + \int_{U_2} d\omega_2 \wedge \nu_2 \\
 &\stackrel{\text{ST}}{=} (-1)^{r+1} \int_{U_1} \omega_1 \wedge d\nu_1 + (-1)^{r+1} \int_{U_2} \omega_2 \wedge d\nu_2 \\
 &= (-1)^{r+1} \left(\int_{U_{12}} \omega_1 \wedge d\nu_1 + \int_{U_{12}} \omega_2 \wedge d\nu_2 \right) \\
 &= (-1)^{r+1} \int_{U_{12}} (\omega_1 - \omega_2) \wedge d\nu_1 \\
 &= (-1)^{r+1} \int_{U_1 \cup U_2} \omega \wedge d\nu_1 = (-1)^{r+1} c_{d-(r+1)}^\vee(\mathcal{D}_r(\omega))(\nu)
 \end{aligned}$$

où les égalités se justifient par :

- 1) puisque ν_i a son support dans U_i ;
- 2) application du théorème de Stokes ;
- 3) les cocycles $d\nu_i$ sont à support dans U_{12} ;
- 4) puisque $d\nu_1 = -d\nu_2$ sur U_{12} ;
- 5) puisque $\omega = \omega_1 - \omega_2$ et par définition du morphisme de liaison sur les formes à support compact.

Nous obtenons ainsi l'égalité :

$$\boxed{\mathcal{D}_{r+1} \circ c_r = (-1)^{r+1} c_{d-(r+1)}^\vee \circ \mathcal{D}_r}$$

Le morphisme de dualité vu comme morphisme de complexes

Les résultats des paragraphes précédents montrent que si dans la suite exacte longue de Mayer-Vietoris à supports compacts, on modifie le signe de l'application de liaison c_r^\vee par un facteur $(-1)^{d-r}$, le morphisme de dualité devient un morphisme de complexes.

—————×—————

§ 6. Lemmes de Poincaré

Nous allons travailler simultanément sur les catégories des variétés différentiables réelles et des variétés analytiques réelles et complexes. Le mot « *variété* » désignera un objet de l'une ou l'autre catégorie. De même, on notera Ω^* le complexe des formes différentielles réelles Ω_{diff}^* ou celui des formes analytiques réelles $\Omega_{\text{ann}(\mathbb{R})}^*$ ou holomorphes (analytiques complexes) $\Omega_{\text{ann}(\mathbb{C})}^* = \Omega_{\text{hol}}^*$, et H_{DR} leurs cohomologies. Enfin, \mathbb{K} désignera le corps \mathbb{R} ou \mathbb{C} suivant le cas.

Lemme 6-1 (de base) : Soit M une variété et munissons $\mathbb{K} \times M$ de la structure de variété produit. Considérons pour chaque $z \in \mathbb{K}$, le morphisme (propre) :

$$\begin{aligned} M &\xrightarrow{\iota_z} \mathbb{K} \times M \\ m &\longmapsto (z, m). \end{aligned}$$

Le morphisme “image inverse” en cohomologie :

$$\iota_z^* : H_{\text{DR}}^*(\mathbb{K} \times M) \longrightarrow H_{\text{DR}}^*(M),$$

et dans le cas réel différentiable :

$$\iota_z^* : H_{\text{DR,c}}^*(\mathbb{K} \times M) \longrightarrow H_{\text{DR,c}}^*(M),$$

sont indépendants de l’élément $z \in \mathbb{K}$.

Démonstration : Commençons par rappeler que la structure de variété de $\mathbb{K} \times M$ est donnée, par définition, par l’atlas construit à partir de l’atlas complet $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ de M , en prenant comme cartes les paires $(\mathbb{K} \times U_\alpha, \text{id}_{\mathbb{K}} \times \varphi_\alpha)$, pour $\alpha \in \mathfrak{A}$. Les morphismes de transition sont alors “scindés”, *i.e.* de la forme $\text{id}_{\mathbb{K}} \times (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})$. Ce scindage induit une décomposition *canonique* du complexe de de Rham $\Omega^*(\mathbb{K} \times M)$. Pour montrer cela, supposons M de dimension n , notons (x_1, \dots, x_n) les coordonnées d’un point \bar{x} de \mathbb{K}^n et z un élément de \mathbb{K} . Considérons une forme $\omega \in \Omega^r(\mathbb{K} \times M)$; son représentant dans une carte $(\mathbb{K} \times U_\alpha, \text{id}_{\mathbb{K}} \times \varphi_\alpha)$ s’écrit :

$$\omega_\alpha = \sum_{I=(i_1 < \dots < i_r)} A_\alpha^I(z, \bar{x}) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r} + \left[\sum_{J=(i_1 < \dots < i_{r-1})} B_\alpha^J(z, \bar{x}) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_{r-1}} \right] \wedge dz, \quad (1)$$

où $A_\alpha^I, B_\alpha^J \in \Omega^0(\mathbb{K} \times U_\alpha)$ et I, J désignent des multi-indices ($1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$), où $i_j = 1, \dots, n$. Cette expression admet la forme condensée suivante :

$$\omega_\alpha = \mathcal{A}_\alpha(z) + \mathcal{B}_\alpha(z) \wedge dz, \quad (2)$$

où $\mathcal{A}(z)$ désigne le premier terme de (1) et peut être interprété comme une famille d’éléments de $\Omega^r(\varphi_\alpha(U_\alpha))$ paramétrée par z (et de manière analogue pour $\mathcal{B}_\alpha(z)$). De plus, si l’on fixe un point $\bar{x}_0 \in \mathbb{K}^n$, les correspondances $z \mapsto \mathcal{A}(z)(\bar{x}_0) \in \mathcal{A}^r(\mathbb{K}^n)$ et $z \mapsto \mathcal{B}(z)(\bar{x}_0) \in \mathcal{A}^{r-1}(\mathbb{K}^n)$ sont respectivement différentiables ou analytiques.

Ceci étant, soit $(\mathbb{K} \times U_\beta, \text{id}_{\mathbb{K}} \times \varphi_\beta)$ une autre carte; le représentant ω_β sera contraint de satisfaire à l’égalité :

$$\omega_\alpha = (\text{id}_{\mathbb{K}} \times \phi_{\beta, \alpha})^*(\omega_\beta),$$

où $\phi_{\beta, \alpha} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$, et, compte tenu du scindage du morphisme de transition, on aura :

$$\mathcal{A}_\alpha(z) = \phi_{\beta, \alpha}^*(\mathcal{A}_\beta(z)) \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_\alpha(z) = \phi_{\beta, \alpha}^*(\mathcal{B}_\beta(z)).$$

On en tire les conséquences suivantes :

- Les familles $\{\mathcal{A}_\alpha(z)\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ et $\{\mathcal{B}_\alpha(z) \wedge dz\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ définissent des éléments *canoniques* de $\Omega^r(\mathbb{K} \times M)$, respectivement notés $\omega_{\mathbf{h}}$ et $\omega_{\mathbf{v}}$, et appelés « *composante horizontale* » et « *composante verticale* » de ω . De même, la famille $\{\mathcal{B}_\alpha(z)\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ définit une forme de $\Omega^{r-1}(\mathbb{K} \times M)$ et, enfin, pour chaque $z \in \mathbb{K}$ fixé, les familles $\{\mathcal{A}_\alpha(z)\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ et $\{\mathcal{B}_\alpha(z)\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ définissent des formes de $\Omega^r(M)$ et $\Omega^{r-1}(M)$ respectivement.

On a donc une décomposition *directe* de $\Omega^*(\mathbb{K} \times M)$:

$$\Omega^*(\mathbb{K} \times M) = \Omega^*(\mathbb{K} \times M)_{\mathbf{h}} \oplus \Omega^*(\mathbb{K} \times M)_{\mathbf{v}} = \Omega^*(\mathbb{K} \times M)_{\mathbf{h}} \oplus \Omega^{*-1}(\mathbb{K} \times M)_{\mathbf{h}} \wedge dz,$$

(la forme dz étant l'élément de $\Omega^1(\mathbb{K} \times \mathbf{M})$ défini par la projection canonique $\mathbb{K} \times \mathbf{M} \rightarrow \mathbb{K}$, vue comme élément de $\Omega^0(\mathbb{K} \times \mathbf{M})$).

On observera que suite à la décomposition $\omega = \omega_{\mathbf{h}} \oplus \omega_{\mathbf{v}}$ on aura la relation de supports : $|\omega| = |\omega_{\mathbf{h}}| \cup |\omega_{\mathbf{v}}|$, et par conséquent, ω est à support compact, si et seulement si, $\omega_{\mathbf{h}}$ et $\omega_{\mathbf{v}}$ le sont.

Notons $d_{\mathbf{M}}$ l'opérateur qui associe à $\omega \in \Omega^r(\mathbb{K} \times \mathbf{M})$ l'élément $d_{\mathbf{M}}(\omega) := d(\omega)_{\mathbf{h}}$. L'inspection de $d_{\mathbf{M}}$, à l'aide de cartes, met en évidence les égalités suivantes pour $\omega = \omega_1 + \omega_2 \wedge dz$, où les ω_i désignent des formes horizontales :

$$d(\omega) = d_{\mathbf{M}}(\omega) + (-1)^r \frac{\partial}{\partial z}(\omega) \wedge dz = d_{\mathbf{M}}(\omega_1) + [d_{\mathbf{M}}(\omega_2) + (-1)^r \frac{\partial}{\partial z}(\omega_1)] \wedge dz.$$

On vérifie, toujours grâce au scindage des application de transition, que l'opérateur $\frac{\partial}{\partial z}$ a un sens en tant qu'opérateur sur $\Omega^*(\mathbb{K} \times \mathbf{M})$ (dérivation de degré 0) et que :

$$\boxed{d(\omega) = 0, \quad \text{si et seulement si,} \quad d_{\mathbf{M}}(\omega_1) = 0 \quad \text{et} \quad d_{\mathbf{M}}(\omega_2) = (-1)^{r-1} \frac{\partial}{\partial z}(\omega_1)} \quad (3)$$

- Pour chaque $z \in \mathbb{K}$ fixé, considérons le morphisme $\mathbf{M} \xrightarrow{\iota_z} \mathbb{K} \times \mathbf{M}$, défini par $m \mapsto (z, m)$. Soit $\omega \in \Omega^r(\mathbb{K} \times \mathbf{M})$; on pose $\omega = \omega_1 + \omega_2 dz$, où les ω_i sont des formes horizontales. On a alors : $\iota_z^*(\omega) = \iota_z^*(\omega_1)$.

La démonstration du lemme résultera alors de prouver que lorsque ω est un cocycle, les formes $\iota_{z_1}^*(\omega_1)$ et $\iota_{z_0}^*(\omega_1)$ son cohomologues, quels que soient $z_0, z_1 \in \mathbb{K}$.

Raisonnons dans un premier temps sur une carte $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ de \mathbf{M} avec le représentant de ω , écrit sous la forme (2) : $\mathcal{A}(z) + \mathcal{B}(z) \wedge dz$. Nous cherchons alors à comparer $\mathcal{A}_\alpha(z_1)(\bar{x})$ et $\mathcal{A}_\alpha(z_0)(\bar{x})$, pour tout $\bar{x} \in \varphi_\alpha(U_\alpha)$. Or, pour chaque $\bar{x} \in \varphi(U_\alpha)$ fixe, l'application $z \mapsto \mathcal{A}_\alpha(z)(\bar{x})$ est différentiable et à valeurs dans l'espace vectoriel de dimension finie $\mathcal{A}^r(\mathbb{K}^n)$; par conséquent, si $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ est une application différentiable telle que $\gamma(0) = z_0$ et $\gamma(1) = z_1$ (facile à construire), on aura pour ω *cocyclique* :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\alpha(z_1)(\bar{x}) - \mathcal{A}_\alpha(z_0)(\bar{x}) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} [\mathcal{A}_\alpha(\gamma(t))(\bar{x})] dt = \int_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial z} \mathcal{A}_\alpha(\gamma(t)) \right] (\bar{x}) \gamma'(t) dt \\ &= (-1)^r \int_0^1 d[\mathcal{B}_\alpha(\gamma(t))] (\bar{x}) \gamma'(t) dt = (-1)^r d \left[\int_0^1 \mathcal{B}_\alpha(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \right] (\bar{x}), \end{aligned}$$

d'après (3). Les théorèmes classiques de différentiabilité ou analyticité par rapport à \bar{x} lors d'une intégration sur un compact par rapport à la variable t *indépendante* des x_i , peuvent être appliqués pour conclure que la forme $\int_0^1 \mathcal{B}_\alpha(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$ est respectivement différentiable ou analytique suivant le contexte de travail. Enfin, la même analyse sur une carte (U_β, φ_β) aurait donné :

$$\int_0^1 \mathcal{B}_\alpha(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_0^1 \phi_{\beta,\alpha}^* [\mathcal{B}_\beta(\gamma(t))] \gamma'(t) dt = \phi_{\beta,\alpha}^* \left[\int_0^1 \mathcal{B}_\beta(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \right].$$

Ces intégrales dans les images des cartes de \mathbf{M} définissent donc une forme "globale" $\nu_{[z_1, z_0]} \in \Omega^*(\mathbf{M})$ telle que $\iota_{z_1}^* \omega - \iota_{z_0}^* \omega = d(\nu_{[z_1, z_0]})$.

On remarquera, pour terminer, que la forme $\nu_{[z_1, z_0]}$ est à support compact lorsque ω l'est. ■

6.1 Lemme de Poincaré pour la cohomologie de de Rham ordinaire

Corollaire 6.1-1 [Lemme d'homotopie] : *Soit \mathbf{M} une variété et munissons $\mathbb{K} \times \mathbf{M}$ de la structure de variété produit. Considérons la suite de morphismes de variétés :*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{M} & \xrightarrow{\iota_z} & \mathbb{K} \times \mathbf{M} \xrightarrow{h} \mathbf{M} \\ m & \longmapsto & (z, m) \end{array}$$

où $z \in \mathbb{K}$ est arbitraire, et notons $h_z : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}$, l'application composée $h \circ \iota_z$, i.e. $h_z(m) = h(z, m)$.

Le morphisme en cohomologie :

$$h_z^* : H_{\text{DR}}^*(\mathbf{M}) \longrightarrow H_{\text{DR}}^*(\mathbf{M}),$$

est alors indépendant de l'élément $z \in \mathbb{K}$.

Démonstration : Le morphisme h_z^* est la composition $\iota_z^* \circ h^*$ de deux morphismes indépendants de $z \in \mathbb{K}$. ■

Corollaire 6.1-2 [Lemme de Poincaré] : Soit \mathbf{M} une variété et munissons $\mathbb{K} \times \mathbf{M}$ de la structure de variété produit. Le morphisme :

$$\pi^* : H_{\text{DR}}^*(\mathbf{M}) \rightarrow H_{\text{DR}}^*(\mathbb{K} \times \mathbf{M}),$$

induit par la projection canonique $\pi : \mathbb{K} \times \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}$, est un isomorphisme d'algèbres.

En particulier, si $\pi = \mathbb{K}^m \rightarrow \{0\} = \mathbb{K}^0$, on a :

$$\mathbb{K}[0] \equiv H_{\text{DR}}^*(\mathbb{K}^0) \xrightarrow[\equiv]{\pi^*} H_{\text{DR}}^*(\mathbb{K}^m),$$

quel que soit $m \in \mathbb{N}$ (²⁷).

Démonstration : On a $\text{id}_{\mathbf{M}} = \pi \circ \iota_0$, ce qui entraîne que $\iota_0^* \circ \pi^* = \text{id}$ et, par conséquent, que π^* est *injectif*.

D'autre part $\iota_0 \circ \pi$ est le morphisme de $\mathbb{K} \times \mathbf{M}$ donné par $(z, m) \mapsto (0, m)$, et si nous considérons $h : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \times \mathbf{M} \rightarrow \mathbb{K} \times \mathbf{M}$ défini par $(z_1, z_2, m) \mapsto (z_1 z_2, m)$; l'application $\iota_0 \circ \pi$ s'identifie à h_0 . Le lemme d'homotopie justifie alors l'égalité : $(\iota_0 \circ \pi)^* = h_0^* = h_1^* (= \text{id}_{\mathbb{K} \times \mathbf{M}}^*)$, et π^* est donc également *surjectif*.

La deuxième partie de l'assertion résulte alors d'un simple argument inductif. ■

6.2 Lemme de Poincaré pour la cohomologie de de Rham à supports compacts

Le lemme de Poincaré de la section précédente montre que le morphisme “image inverse” $\pi^* : H_{\text{DR}}^*(\mathbf{M}) \rightarrow H_{\text{DR}}^*(\mathbb{R} \times \mathbf{M})$, pour la projection canonique $\pi : \mathbb{R} \times \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}$, est un isomorphisme. Lorsque l'on cherche à étudier le lien établi par π entre $H_{\text{DR},c}^*(\mathbf{M})$ et $H_{\text{DR},c}^*(\mathbb{R} \times \mathbf{M})$, on rencontre un premier obstacle : le morphisme π **n'est pas propre** et l'image inverse d'une forme différentielle non nulle à support compact **n'est jamais à support compact**. Il existe néanmoins un morphisme de complexes différentiels appelé “image directe”, et aussi “intégration sur les fibres”, noté $\pi_* : \Omega_c^*(\mathbb{R} \times \mathbf{M}) \rightarrow \Omega_c^{*-1}(\mathbf{M})$, induisant un morphisme d'espaces vectoriels gradués :

$$\boxed{\pi_* : H_{\text{DR},c}^*(\mathbb{R} \times \mathbf{M}) \rightarrow H_{\text{DR},c}^{*-1}(\mathbf{M})}$$

qui est un *isomorphisme*. Ce résultat est connu sous le nom de « *Lemme de Poincaré pour la cohomologie de de Rham à supports compacts* » ; c'est le but de cette section de le prouver.

²⁷ Rappelons que pour chaque $r \in \mathbb{Z}$ et tout \mathbb{K} -espace vectoriel W , la notation $W[r]$ désigne, dans la catégorie des \mathbb{K} -espaces vectoriels gradués, l'espace vectoriel gradué $\bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} V^m$, où $V^m = \{0\}$ pour $m + r \neq 0$, et $V^{-r} = W$. On dit alors que $W[r]$ est « *concentré* » en degré $-r$.

6.2.1 Intégration sur les fibres

Soit \mathbf{M} une variété différentiable (réelle), considérons la variété produit $\mathbb{R} \times \mathbf{M}$ et soit $\pi : \mathbb{R} \times \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{M}$ la projection canonique. On note $\Omega_{\text{cv}}^*(\mathbb{R} \times \mathbf{M})$ le sous-ensemble de $\Omega^*(\mathbb{R} \times \mathbf{M})$ des formes différentielles ω telles que pour chaque $m \in \mathbf{M}$, il existe un voisinage $V_m \ni m$ dans \mathbf{M} et un compact $\mathbf{K}_m \subseteq \mathbb{R}$ de telle sorte que $|\omega| \cap \mathbb{R} \times V_m \subseteq \mathbf{K}_m \times V_m$. Les éléments de $\Omega_{\text{cv}}^*(\mathbb{R} \times \mathbf{M})$ seront appelés « *des formes différentielles de $\mathbb{R} \times \mathbf{M}$ à support compact le long des fibres* ».

On montre aisément alors que $\Omega_{\text{cv}}^*(\mathbb{R} \times \mathbf{M})$ est stable sous les opérations d'algèbre différentielle graduée de $\Omega^*(\mathbb{R} \times \mathbf{M})$ et que par conséquent cet ensemble est une sous-algèbre différentielle graduée de $\Omega^*(\mathbb{R} \times \mathbf{M})$; sa cohomologie sera notée $H_{\text{DR,cv}}^*(\mathbb{R} \times \mathbf{M})$.

Nous avons montré dans les sections précédentes que toute forme différentielle $\omega \in \Omega^m(\mathbb{R} \times \mathbf{M})$ admet une décomposition globale canonique sous la forme $\omega = \omega_1 \wedge dt + \omega_2$, où les formes ω_i sont horizontales et comme cette décomposition est liée à une décomposition vectorielle de l'espace des formes alternées, les formes ω_i appartiennent également à $\Omega_{\text{cv}}^*(\mathbb{R} \times \mathbf{M})$. On définit alors le morphisme « *image directe* » ou d'« *intégration sur les fibres* » :

$$\begin{aligned} \pi_* : \Omega_{\text{cv}}^m(\mathbb{R} \times \mathbf{M}) &\longrightarrow \Omega^{m-1}(\mathbf{M}) \\ \omega_1 \wedge dt + \omega_2 &\longmapsto \int_{-\infty}^{\infty} \omega_1(u, \bar{x}) du \end{aligned}$$

où le fait que l'on puisse se limiter à intégrer sur des compacts de \mathbb{R} au voisinage de chaque $\bar{x} \in \mathbf{M}$, permet de voir que $\pi_*(\omega)$ est bien une forme différentielle (de classe \mathcal{C}^∞) de \mathbf{M} .

Lemme 6.2.1-1 : *Le morphisme “image directe” π_* est un morphisme de complexes différentiels, i.e.*

$$\pi_{m+1} \circ d(\mathbb{R} \times \mathbf{M})_m = d(\mathbf{M})_{m-1} \circ \pi_m,$$

pour tout $m \in \mathbb{Z}$.

Démonstration : Soit $\omega = \omega_1 \wedge dt + \omega_2 \in \Omega_{\text{cv}}^m(\mathbb{R} \times \mathbf{M})$, avec les ω_i horizontales. En gardant les notations des sections précédentes, on a :

$$d_m(\omega) = d_{\mathbf{M},m-1}(\omega_1) \wedge dt + (-1)^r \frac{\partial}{\partial t}(\omega_2) \wedge dt + d_{\mathbf{M},m}(\omega_2),$$

et donc :

$$\pi_{m+1}(d_m(\omega))(\bar{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} d_{\mathbf{M},m-1}(\omega_1)(u, \bar{x}) du + (-1)^r \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t}(\omega_2)(u, \bar{x}) du$$

où la deuxième intégrale est nulle puisque ω_2 est dans $\Omega_{\text{cv}}(\mathbb{R} \times \mathbf{M})$; en particulier et suite à la commutation de la différentiation et de l'intégration sur des compacts :

$$\pi_{m+1}(d_m(\omega))(\bar{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} d_{\mathbf{M}}(\omega_1)(u, \bar{x}) du = d(\mathbf{M})_{m-1} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \omega_1(u, \bar{x}) du \right) = d(\mathbf{M})_{m-1}(\pi_m(\omega)) \quad \blacksquare$$

Soit maintenant $\delta \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ une fonction à support compact sur la droite réelle et notons :

$$\begin{aligned} \delta_* : \Omega^m(\mathbf{M}) &\longrightarrow \Omega_{\text{cv}}^{m+1}(\mathbb{R} \times \mathbf{M}) \\ \omega &\longmapsto \omega \wedge (\delta(t) dt). \end{aligned}$$

On observera que $\delta_*(\Omega_c^*(\mathbf{M})) \subseteq \Omega_c^{*+1}(\mathbb{R} \times \mathbf{M})$. Le lemme suivant est alors immédiat puisque $\delta(t) dt$ est un cocycle de $\Omega_c^*(\mathbb{R})$.

Lemme 6.2.1-2 : *L'application δ_* est un morphisme de complexes différentiels de $\Omega^*(\mathbf{M})$ vers $\Omega_{\text{cv}}^{*+1}(\mathbb{R} \times \mathbf{M})$, de degré $+1$. Et de même, par restriction, de $\Omega_c^*(\mathbf{M})$ vers $\Omega_c^{*+1}(\mathbb{R} \times \mathbf{M})$.*

Proposition 6.2.1-3 [Lemme de Poincaré pour la cohomologie à supports compacts] : *Le morphisme de complexes d'“intégration sur les fibres” induit un morphisme en cohomologie :*

$$\begin{aligned} h(\pi)_* : H_{\text{DR,cv}}^*(\mathbb{R} \times \mathbf{M}) &\longrightarrow H_{\text{DR}}^{*-1}(\mathbf{M}) \\ \omega = \omega_1 \wedge dt + \omega_2 &\longmapsto \left(\bar{x} \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_1(u, \bar{x}) du \right) \end{aligned}$$

qui est **bijectif**; son inverse est réalisé par les morphismes $h(\delta)_*$, quel que soit $\delta \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ vérifiant $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(u) du$. En particulier, le morphisme $h(\delta)_*$ est indépendant de la fonction δ choisie.

De manière entièrement analogue, la restriction $h(\pi)_* : H_{\text{DR,c}}^*(\mathbb{R} \times \mathbf{M}) \rightarrow H_{\text{DR}}^{*-1}(\mathbf{M})$, est un isomorphisme d'inverse δ_* .

Démonstration : La composition $\pi_* \circ \delta_*$ est donnée par :

$$\omega \longmapsto \omega \wedge (\delta(t) dt) \longmapsto \left(\bar{x} \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(\bar{x}) \wedge \delta(u) du \right) = \omega$$

le passage en cohomologie montre donc bien l'injectivité de $h(\delta)_*$. Montrons maintenant que ce dernier morphisme est également surjectif.

Pour ceci reprenons un élément $\omega = \omega_1 \wedge dt + \omega_2 \in \Omega_{\text{cv}}^r(\mathbb{R} \times \mathbf{M})$, où les ω_i sont horizontales, et rappelons que ω est un cocycle, si et seulement si :

$$d_M(\omega_2) = 0 \quad \text{et} \quad d_M(\omega_1) = -(-1)^r \frac{\partial}{\partial t}(\omega_2),$$

en particulier, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \omega_2(t, \bar{x}) &= \int_{-\infty}^t \frac{\partial}{\partial t}(\omega_2)(u, \bar{x}) du = -(-1)^r \int_{-\infty}^t d_M(\omega_1)(u, \bar{x}) du \\ &= -(-1)^r d_M \left(\int_{-\infty}^t \omega_1(u, \bar{x}) du \right). \end{aligned}$$

Étudions maintenant la forme différentielle de $\Omega^{r-1}(\mathbb{R} \times \mathbf{M})$ donnée par $\varpi(t, \bar{x}) = -(-1)^r \int_{-\infty}^t \omega_1(u, \bar{x}) du$. On voit bien que pour chaque $\bar{x} \in \mathbf{M}$, il existe un voisinage $V_{\bar{x}}$ tel que $\varpi(t, \bar{y}) = 0$, pour t assez négatif et pour tout $\bar{y} \in V_{\bar{x}}$. De manière analogue, la forme ϖ est constante pour t assez positif, i.e il existe une forme $\alpha \in \Omega^{r-1}(\mathbf{M})$ telle que $\varpi(t, \bar{y}) = \pi^*(\alpha)(t, \bar{y})$ quels que soient $t \in \mathbb{R}$ assez positif et $\bar{y} \in V_{\bar{x}}$. Ces quelques remarques montrent que la forme différentielle :

$$\tilde{\omega}(t, \bar{x}) = -(-1)^r \left(\int_{-\infty}^t \omega_1(u, \bar{x}) du \right) - \left(\int_{-\infty}^t \delta(u) \alpha(\bar{x}) du \right)$$

est bien un élément de $\Omega_{\text{cv}}^r(\mathbb{R} \times \mathbf{M})$ dont la différentielle est :

$$\begin{aligned} d(\tilde{\omega})(t, \bar{x}) &= -(-1)^r d_{\mathbf{M}} \left(\int_{-\infty}^t \omega_1(u, \bar{x}) du \right) - (-1)^r (-1)^{r-1} \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{-\infty}^t \omega_1(u, \bar{x}) du \right) \wedge dt \\ &\quad - d_{\mathbf{M}} \left(\int_{-\infty}^t \delta(u) \alpha(\bar{x}) du \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{-\infty}^t \delta(u) \alpha(\bar{x}) du \right) \wedge dt \end{aligned}$$

En développant et compte tenu du fait que α est cocyclique, on obtient :

$$d(\tilde{\omega})(t, \bar{x}) = \omega_2(t, \bar{x}) + \omega_1(t, \bar{x}) \wedge dt - \alpha(\bar{x}) \wedge (\delta(t) dt) = \omega(t, \bar{x}) - \delta_*(\alpha)(t, \bar{x}).$$

On conclut que tout cocycle de $\Omega_{\text{cv}}^*(\mathbb{R} \times \mathbf{M})$ est bien cohomologue à un cocycle de l'image de δ_* , ce qui prouve le surjectivité de $h(\delta)_*$.

On laisse aux soins du lecteur de vérifier que la même démonstration prouve que $h(\pi)_*$ établit également un isomorphisme entre $H_{\text{DR},c}^*(\mathbb{R} \times \mathbf{M})$ et $H_{\text{DR},c}^{*-1}(\mathbf{M})$. ■

Remarque 6.2.1-1 : On prendra garde du fait que contrairement au morphisme “image inverse”, l’intégration sur les fibres *ne respecte pas* le produit extérieur des formes différentiels et donc, n’établit pas de morphisme d’algèbres en cohomologie, il s’agit uniquement d’un morphisme d’espaces vectoriels gradués (homogène de degré -1).

Corollaire 6.2.1-4 : Pour tout $m \in \mathbb{N}$, l’itération des intégrations sur les fibrés donne un isomorphisme :

$$h(\pi)_* : H_{\text{DR},c}^*(\mathbb{R}^m) \xrightarrow{\cong} H_{\text{DR},c}^{*-m}(\mathbb{R}^0) = H_{\text{DR}}^{*-m}(\mathbb{R}^0) = \mathbb{R}[-m].$$

————— × —————

§ 7. Dualité de Poincaré et finitude des nombres de Betti

Comme annoncé précédemment, nous monterons dans ce chapitre comment utiliser les suites de Mayer-Vietoris pour obtenir des conditions de finitude pour les dimensions des groupes de cohomologie de de Rham d’une variété (les nombres de Betti) ; et, lorsque la variété est compacte et orientable, pour prouver que le morphisme de dualité donne une dualité parfaite entre les groupes de cohomologie de de Rham de dimensions complémentaires.

On remarquera que ces deux derniers résultats sont immédiats, d’après les lemmes de Poincaré, pour \mathbb{R}^d (et donc pour tout domaine de carte d’une variété) bien que cette variété ne soit pas compacte. L’idée des démonstrations de cette section consiste alors dans “le recollement” de propriétés “locales” (celles des domaines de cartes) en des propriétés “globale” (celles de la variété). On procède récursivement, à partir d’une carte, en rajoutant de nouvelles cartes, mais de façon à ce que les intersections soient, elles aussi, des domaines de cartes. Les suites exactes longues de Mayer-Vietoris vont permettre alors (modulo le “lemme des cinq” pour la dualité de Poincaré) de prouver les assertions en question pour la réunion des domaines cartes du type considéré. Une telle

démonstration sera donc valable pour toute variété admettant un recouvrement “fini” $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ tel que toute intersection finie :

$$U_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r} := U_{\alpha_1} \cap U_{\alpha_2} \cap \dots \cap U_{\alpha_r} \quad \text{où } \alpha_i \in \mathfrak{A},$$

soit difféomorphe à \mathbb{R}^d . Un tel recouvrement est appelé un « *bon recouvrement* » et les théorèmes de cette section seront valables pour les variétés admettant de bons recouvrements **finis**. En particulier, les espaces vectoriels, les variétés compactes, les fibrés vectoriels à base compacte, auront des nombres de Betti finis. Dans le cas orientable, ces variétés vérifieront également le théorème de dualité de Poincaré qui affirme que le morphisme de dualité entre $H_{\text{DR}}^r(\mathbf{M})$ et $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(H_{\text{DR},c}^{d-r}(\mathbf{M}), \mathbb{R})$ est un isomorphisme ⁽²⁸⁾. Ce dernier théorème sera ultérieurement généralisé à des variétés orientables arbitraires, mais une telle généralisation sera impossible pour la dualité parfaite et pour la finitude des nombres de Betti comme on s’en convainc aisément en considérant la variété “réunion disjointe d’une infinité de copies de \mathbb{R}^d ”. En effet, en posant $\mathbf{M} := \coprod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{R}^d$, on aura :

$$H_{\text{DR}}^0(\mathbf{M}) \equiv \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{R} \quad \text{et} \quad H_{\text{DR},c}^d(\mathbf{M}) \equiv \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{R}$$

où l’on a bien l’égalité :

$$\text{Hom}_{\mathbb{R}}(H_{\text{DR},c}^d(\mathbf{M})) \equiv \text{Hom}_{\mathbb{R}}\left(\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{R}, \mathbb{R}\right) \equiv \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{R} \equiv H_{\text{DR}}^0(\mathbf{M})$$

alors que le morphisme canonique de bidualité β , ci-dessous, est connu pour ne pas être bijectif dans ce cas :

$$\begin{array}{ccc} H_{\text{DR},c}^d(\mathbf{M}) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathbb{R}}(H_{\text{DR}}^0(\mathbf{M}), \mathbb{R}) \\ \parallel & & \parallel \\ \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{R} & \dashrightarrow & \text{Hom}_{\mathbb{R}}\left(\prod_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{R}, \mathbb{R}\right) \\ \parallel & & \parallel \\ \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{R} & \xrightarrow{\beta} & \text{Hom}_{\mathbb{R}}\left(\text{Hom}_{\mathbb{R}}\left(\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{R}, \mathbb{R}\right), \mathbb{R}\right) \end{array}$$

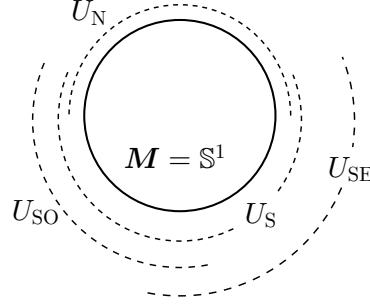
7.1 Bons recouvrements

Définition 7.1-1 : Soit \mathbf{M} une variété différentiable de dimension d . Une famille d’ouverts $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ est dite une « *bonne famille d’ouverts* » lorsque l’intersection de toute sous-famille finie et non vide est soit vide, soit difféomorphe à \mathbb{R}^d .

On appelle « *bon recouvrement pour \mathbf{M}* » toute bonne famille d’ouverts de \mathbf{M} qui recouvre \mathbf{M} .

²⁸ D’où une dualité parfaite entre $H_{\text{DR}}^r(\mathbf{M})$ et $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(H_{\text{DR},c}^{d-r}(\mathbf{M}), \mathbb{R})$ puisque les nombres de Betti sont finis.

Exemple 7.1-1 : Dans la figure ci-dessous, la famille $\{U_N, U_S\}$ n'est pas bonne alors que $\{U_N, U_{SE}, U_{SO}\}$ l'est.



Nous allons admettre le résultat suivant (cf. [B-T])

Proposition 7.1-1 : Soit M une variété séparée et séparable. Pour tout recouvrement $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ de M , il existe un bon recouvrement $\mathcal{V} = \{V_\beta\}_{\beta \in \mathfrak{B}}$ de M subordonné à \mathcal{U} , i.e. pour chaque $\beta \in \mathfrak{B}$, il existe $\alpha(\beta) \in \mathfrak{A}$ tel que $V_\beta \subseteq U_{\alpha(\beta)}$.

7.2 Finitude des nombres de Betti

Théorème 7.2-1 : Soit M une variété différentiable admettant un bon recouvrement fini. Les dimensions de ses groupes de cohomologie de de Rham de M sont finies, i.e. :

$$\dim_{\mathbb{R}} (H_{\text{DR}}^r(M)) < \infty \quad \text{et} \quad \dim_{\mathbb{R}} (H_{\text{DR},c}^r(M)) < \infty,$$

pour tout $0 \leq r \leq d(M)$.

Démonstration : Nous allons prouver les deux assertions, simultanément, pour les réunions des bonnes familles d'ouverts finies et ceci par récurrence sur le cardinal des familles en question.

Lorsque la famille ne possède qu'un unique ouvert, celui-ci est difféomorphe à $\mathbb{R}^{d(M)}$ et les lemmes de Poincaré justifient l'assertion.

Supposons maintenant le théorème démontré pour toute réunion de bonne famille d'ouverts possédant au plus r -termes. Soit $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_r, U_{r+1}\}$ une bonne famille d'ouverts de réunion notée U . La sous-famille $\mathcal{V} = \{U_1, \dots, U_r\}$ est également bonne, de réunion notée V . Nous savons alors, par hypothèse de récurrence, que les dimensions des groupes de cohomologie de V sont tous finis. Remarquons maintenant que $V \cap U_{r+1}$ est la réunion de la famille $\mathcal{V} \cap U_{r+1} := \{U_1 \cap U_{r+1}, \dots, U_r \cap U_{r+1}\}$ qui est également bonne d'après le définition de bonne famille. Comme $\mathcal{V} \cap U_{r+1}$ possède r -termes, les dimensions des groupes de cohomologie de $V \cap U_{r+1}$ sont tous finis également d'après l'hypothèse de récurrence.

Ceci étant, l'inspection des suites longues de Mayer-Vietoris $\mathbf{MV}(V, U_{r+1})$ et $\mathbf{MV}_c(V, U_{r+1})$ donne lieu aux suites exactes :

$$\begin{aligned} H_{\text{DR}}^{j-1}(V \cap U_{r+1}) &\longrightarrow H_{\text{DR}}^j(U) \longrightarrow H_{\text{DR}}^j(V) \oplus H_{\text{DR}}^j(U_{r+1}) \\ H_{\text{DR},c}^j(V) \oplus H_{\text{DR},c}^j(U_{r+1}) &\longrightarrow H_{\text{DR},c}^j(U) \longrightarrow H_{\text{DR},c}^{j+1}(V \cap U_{r+1}) \end{aligned}$$

pour tout $j \in \mathbb{N}$. On en déduit la finitude des dimensions de $H_{\text{DR},c}^j(U)$ et $H_{\text{DR}}^j(U)$, pour tout $j \in \mathbb{N}$, et comme M possède un bon recouvrement **fini**, le théorème est démontré. ■

7.3 Dualité de Poincaré

Théorème 7.3-1 : Soit M une variété orientable de dimension d admettant un bon recouvrement fini. Les morphismes de dualité :

$$\mathcal{D}_r(M) : H_{\text{DR}}^r(M) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(H_{\text{DR},c}^{d-r}(M, \mathbb{R})),$$

sont *bijectifs*, pour tout $0 \leq r \leq d$.

Démonstration : Nous allons montrer que l’assertion du théorème est vraie pour tout ouvert de M réunion d’une bonne famille finie d’ouverts de M .

Soit U un ouvert de M diffeomorphe à \mathbb{R}^d muni de l’orientation induite par M . On a :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_r(U) : H_{\text{DR}}^r(U) &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(H_{\text{DR},c}^{d-r}(U), \mathbb{R}) \\ \omega &\longmapsto \left(\nu \mapsto \int_U \omega \wedge \nu \right) \end{aligned}$$

et nous savons que $H_{\text{DR}}^*(U) \equiv \mathbb{R}[0]$ tandis que $H_{\text{DR},c}^*(U) \equiv \mathbb{R}[-d]$. L’assertion du théorème pour U résultera alors de montrer que $\mathcal{D}_0(U) \neq 0$, ou encore que $\mathcal{D}_0(U)(1) \neq 0$. Or, $\mathcal{D}_0(U)(1) = \left(\int_U : H_{\text{DR},c}^d(U) \rightarrow \mathbb{R} \right)$ est bien une forme linéaire non nulle.

Comme dans la démonstration de la finitude des nombres de Betti, nous supposons le théorème démontré pour toute réunion de bonne famille d’ouverts possédant au plus r -termes. Soit $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_r, U_{r+1}\}$ une bonne famille d’ouverts de réunion notée U . La sous-famille $\mathcal{V} = \{U_1, \dots, U_r\}$ étant également bonne, de réunion notée V , nous savons, par hypothèse de récurrence, que les morphismes $\mathcal{D}_r(V)$ sont tous bijectifs, et il en est de même pour la famille $\mathcal{V} \cap U_{r+1}$ et les morphismes $\mathcal{D}_r(V \cap U_{r+1})$.

Ceci étant reprenons les morphismes des suites longues de Mayer-Vietoris étudiés dans la section 5.3 mais pour les ouverts U, V et U_{r+1}

$$\begin{array}{ccccccc} \xrightarrow{c_{r-1}} & H_{\text{DR}}^r(U) & \longrightarrow & H_{\text{DR}}^r(V) \oplus H_{\text{DR}}^r(U_{r+1}) & \longrightarrow & H_{\text{DR}}^r(V \cap U_{r+1}) & \xrightarrow{c_r} \\ & \mathcal{D}_r(U) \downarrow & & \mathcal{D}_r(V) \downarrow \equiv \oplus \equiv \downarrow \mathcal{D}_r(U_{r+1}) & & \mathcal{D}_r(V \cap U_{r+1}) \downarrow \equiv & \\ \xrightarrow{c_{d-r}^\vee} & H_{\text{DR},c}^{d-r}(U)^\vee & \longrightarrow & H_{\text{DR},c}^{d-r}(V)^\vee \oplus H_{\text{DR},c}^{d-r}(U_{r+1})^\vee & \longrightarrow & H_{\text{DR},c}^{d-r}(V \cap U_{r+1})^\vee & \xrightarrow{c_{d-r-1}^\vee} \end{array}$$

La dernière remarque de la section 5.3 justifie alors l’application du lemme des cinq qui affirme que les morphismes $\mathcal{D}_r(U)$ sont bijectifs, pour tout $r \in \mathbb{N}$. La variété M étant elle-même la réunion d’un bon recouvrement fini, le théorème est démontré. ■

Remarque 7.3-1 : Le théorème précédent montre que pour toute variété orientable M de dimension d admettant un bon recouvrement fini, l’accouplement :

$$\begin{aligned} H_{\text{DR}}^r(M) \oplus H_{\text{DR},c}^{d-r}(M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\omega, \nu) &\longmapsto \int_M \omega \wedge \nu \end{aligned}$$

définit une dualité *parfaite* entre des espaces vectoriels de dimension finie. C’est le sens de l’expression “Dualité de Poincaré” qui est ainsi démontrée pour toute variété compacte et orientable.

Corollaire 7.3-2 : Soit M une variété *compacte et connexe* de dimension d . Alors :

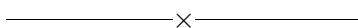
a) La variété M est orientable, si et seulement si, $\dim_{\mathbb{R}}(H_{\text{DR}}^d(M)) = 1$.

- b) La variété M n'est pas orientable, si et seulement si, $\dim_{\mathbb{R}}(H_{\text{DR}}^d(M)) = 0$.
 c) La variété M est orientable, si et seulement si, elle vérifie la dualité de Poincaré.

Démonstration : Supposons la variété orientable. La dualité de Poincaré donne un isomorphisme entre $H_{\text{DR}}^0(M)$ et $H_{\text{DR}}^d(M)$ et comme M est connexe, on a bien $\dim_{\mathbb{R}}(H_{\text{DR}}^d(M)) = 1$, ce qui prouve la partie "seulement si" de (a) et la partie "si" de (b).

Supposons M non orientable et notons $\text{Or}(M)$ sa variété d'orientations (cf. section 4.6). La variété $\text{Or}(M)$ est alors connexe, compacte et orientable de sorte que $\dim_{\mathbb{R}}(H_{\text{DR}}^d(\text{Or}(M))) = 1$. On a d'autre part, le revêtement à deux feuillets $\pi : \text{Or}(M) \rightarrow M$ qui peut être vu comme la projection canonique de $\text{Or}(M)$ vers la variété de ses $\{1, \sigma\}$ -orbites, où σ désigne l'involution de "changement de feuille". On aura alors l'équivalence $H_{\text{DR}}^d(M) \cong H_{\text{DR}}^d(\text{Or}(M))^\sigma$ (cf. corollaire 4.7.2-2) et comme l'involution σ change l'orientation de $\text{Or}(M)$, son action sur $H_{\text{DR}}^d(\text{Or}(M))$ se voit comme la multiplication par le scalaire -1 , de sorte que les σ -invariants de $H_{\text{DR}}^d(\text{Or}(M))$ se réduisent à l'élément nul et donc $H_{\text{DR}}^d(M) = \mathbf{0}$. Ceci termine la démonstration des assertions (a) et (b), dont décole immédiatement (c). ■

Exercice 7.3-1 : Soit \mathbb{K} l'un des corps $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$. Préciser quelles sont les espaces projectifs $\mathbb{P}_n(\mathbb{K})$ pour lesquels la dualité de Poincaré sera vérifiée.



§ 8. Généralités sur les catégories

8.1 Catégories et foncteurs

Le concept de «*catégorie*» fut introduit dans les années 40 par Eilenberg et Mac Lane dans le but de donner un sens précis à la notion de «*naturalité*». Les développements de cette théorie ont introduit tout un langage commode et omniprésent dans les mathématiques actuelles qu'il convient de maîtriser sans pour autant en faire nécessairement un objet d'étude (au même titre par ailleurs que la théorie des ensembles). Une bonne partie de ces notes est destinée à résumer les concepts et terminologies de base en théorie de catégories utiles aux applications à l'algèbre homologique et plus particulièrement à la cohomologie de de Rham.

Définition 8.1-1 : Une «*catégorie*» \mathcal{C} consiste en :

- 1) la donnée d'une classe $\text{Ob}(\mathcal{C})$ d'«*objets*» (notés A, B, \dots) ⁽²⁹⁾ ;
- 2) la donnée, pour chaque couple d'objets (A, B) , d'un ensemble $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, B)$ (ou simplement $\text{Mor}(A, B)$) dont on appelle les éléments les «*morphismes de \mathcal{C} de domaine A et codomaine B* » ;
- 3) la donnée, pour chaque triplet d'objets (A, B, C) , d'une application «*composition*» $(f, g) \mapsto g \circ f$ (noté également gf), de $\text{Mor}(A, B) \times \text{Mor}(B, C)$ à valeurs dans $\text{Mor}(A, C)$;

le tout astreint de satisfaire aux conditions suivantes :

- C-a) (Non ambiguïté des morphismes.) Les ensembles $\text{Mor}(A, B)$ et $\text{Mor}(C, D)$ sont disjoints lorsque les couples (A, B) et (C, D) sont distincts.

²⁹ La notation $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ est souvent utilisée pour exprimer le fait que A est un objet de la classe $\text{Ob}(\mathcal{C})$.

- C-b) (Associativité des compositions.) Pour $f \in \text{Mor}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, $g \in \text{Mor}(\mathbf{B}, \mathbf{C})$ et $h \in \text{Mor}(\mathbf{A}, \mathbf{C})$, on a $h(gf) = (hg)f$.
- C-c) (Existence d'identités.) Pour chaque objet \mathbf{A} , il existe un élément $\text{id}_{\mathbf{A}} \in \text{Mor}(\mathbf{A}, \mathbf{A})$, appelé « *morphisme identité de \mathbf{A}* », tel que $f \circ \text{id}_{\mathbf{A}} = f$ pour tout morphisme de f domaine \mathbf{A} , et $\text{id}_{\mathbf{A}} \circ g = g$ pour tout morphisme g de codomaine \mathbf{A} .

Remarque 8.1-1 et définitions :

- Pour tout objet \mathbf{A} de \mathcal{C} , le triplet $(\text{Mor}(\mathbf{A}, \mathbf{A}), \circ, \text{id}_{\mathbf{A}})$ est un *monoïde* ; ses éléments inversibles s'appellent les « *automorphismes* » de \mathbf{A} ; ils constituent un *groupe* noté $\text{Aut}(\mathbf{A})$.
- Un morphisme $f \in \text{Mor}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ est dit un « *isomorphisme* », lorsque il existe $g \in \text{Mor}(\mathbf{B}, \mathbf{A})$ tel que $g \circ f = \text{id}_{\mathbf{A}}$ et $f \circ g = \text{id}_{\mathbf{B}}$; on note $\text{Iso}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ l'ensemble de ces éléments.

Définition 8.1-2 : Une catégorie \mathcal{C}' est dite « *sous-catégorie* » d'une catégorie \mathcal{C} , si et seulement si :

- ▶ tout objet ou morphisme de \mathcal{C}' est également un objet ou morphisme de \mathcal{C} ;
- ▶ la "loi" de composition de morphismes dans \mathcal{C}' est la "restriction" de celle de \mathcal{C} ;
- ▶ pour tout objet \mathbf{A} de \mathcal{C}' , le morphisme identité $\text{Mor}_{\mathcal{C}'}(\mathbf{A}, \mathbf{A})$ est celui de $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathbf{A}, \mathbf{A})$.

La sous-catégorie \mathcal{C}' de \mathcal{C} est dite « *pleine* » lorsque l'inclusion $\text{Mor}_{\mathcal{C}'}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \subseteq \text{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ est une *égalité*.

Exemples 8.1-1 de catégories : Dans ce qui suit \mathcal{A} désignera un anneau *arbitraire*. Les catégories auxquelles nous serons le plus souvent confrontés dans ces notes sont les suivantes.

- 1) **Catégorie des espaces topologiques.** Notée Top , les objets sont les espaces topologiques, les morphismes : les applications *continues*, et la loi de composition : la composition d'applications ⁽³⁰⁾.
- 2) **Catégorie des variétés différentiables.** Notée Diff , les objets sont les variétés différentiables (réelles), et les morphismes : les applications *différentiables*.
- 3) **Catégorie associée à un ensemble préordonné.** Les catégories dont la classe d'objets est un *ensemble* constituent ce que l'on appelle les « *petites catégories* », parmi celle-ci les plus simples sont celles où les ensembles non vides des morphismes sont des singletons. Soit \mathcal{C} une telle catégorie et notons \mathcal{R} la relation sur l'ensemble $\text{Ob}(\mathcal{C})$ définie par $\mathbf{A} \mathcal{R} \mathbf{B}$, si et seulement si, $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) \neq \emptyset$. Les conditions 8.1-1-C-b et 8.1-1-C-c sont alors équivalentes au fait que \mathcal{R} est une relation de *préordre* (*i.e.* réflexive et transitive) sur $\text{Ob}(\mathcal{C})$. Tout ensemble préordonné (\mathcal{I}, \prec) détermine donc, par cette même remarque, une catégorie, nous parlerons alors de *la* catégorie (\mathcal{I}, \prec) .

Nous trouverons ce type de catégories essentiellement dans les deux situations suivantes :

- a) dans les préfaisceaux : la catégories associée à l'ensemble des ouverts d'un espace topologique, muni de l'ordre partiel d'*inclusion* ;

³⁰ Dans bien d'exemples de catégories, les objets sont des ensembles et les morphismes des applications ensemblistes, dans ces cas, et lorsque aucune précision supplémentaire n'est donnée, on sous-entendra que la loi de composition de la catégorie est la composition d'applications au sens ensembliste.

b) dans la définition des systèmes inductifs ou projectifs de modules.

- 4) **Catégorie de \mathcal{A} -modules.** On note $\text{Mod}(\mathcal{A})$ la catégorie dont les objets sont les \mathcal{A} -modules, et les morphismes : les homomorphismes de \mathcal{A} -modules, *i.e.*

$$\text{Mor}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathbf{A}, \mathbf{B}).$$

- 5) **Catégorie de \mathcal{A} -modules gradués.** Soit Δ un monoïde commutatif de « degrés » (p. ex. \mathbb{Z} , \mathbb{N} , $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{N} \dots$), on notera $\text{Mod}^{\Delta}(\mathcal{A})$ la catégorie dont les objets, appelés des \mathcal{A} -modules Δ -gradués, sont les familles $\mathbf{A}^* = \{\mathbf{A}^i\}_{i \in \Delta}$ de \mathcal{A} -modules, et les morphismes entre \mathbf{A}^* et \mathbf{B}^* sont les couples $f_*^{[d]} = (\{f_i\}_{i \in \Delta}, d \in \Delta)$, où $f_i : \mathbf{A}^i \rightarrow \mathbf{B}^{i+d}$ est un morphisme de \mathcal{A} -modules pour chaque $i \in \Delta$ (on parle alors de « morphismes de degré d »). La composition des morphismes étant alors définie *degré par degré*. L'ensemble des morphismes est donc naturellement un \mathcal{A} -module gradué noté $\text{Mor}^*(\mathbf{A}^*, \mathbf{B}^*)$. Dans ces notes nous serons essentiellement concernés par la sous-catégorie de Mod^{Δ} constituée des mêmes objets et des morphismes de degré 0.

Remarque 8.1-1-5.1 : On trouve souvent dans la littérature comme définition de \mathcal{A} -module gradué, la donnée d'un \mathcal{A} -module \mathbf{A} muni d'une décomposition directe :

$$\mathbf{A}^* = \bigoplus_{i \in \Delta} \mathbf{A}^i,$$

où chaque \mathbf{A}^i est un sous- \mathcal{A} -module de \mathbf{A} . Un morphisme $f : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ de \mathcal{A} -modules Δ -gradués est alors un morphisme de \mathcal{A} -modules qui respecte, à un décalage fixe près, ces décompositions, *i.e.* $f(\mathbf{A}^i) \subseteq \mathbf{B}^{i+d}$, pour tout $i \in \Delta$ et un certain $d \in \Delta$.

Les deux points de vue sont bien évidemment équivalents.

- 6) **Catégorie de \mathcal{A} -modules bigradués.** C'est un cas particulier du précédent où l'on remplace Δ par le produit de deux ensembles de degrés Δ_1 et Δ_2 . Il est alors commode de noter les objets par $\mathbf{A}^{\bullet,*} = \{\mathbf{A}^{i,j}\}_{i_1 \in \Delta_1, i_2 \in \Delta_2}$ et de manière analogue pour les morphismes.

Dans le cas où $\Delta_i = \mathbb{Z}$, on appelle « degré total » de la composante $\mathbf{A}^{i,j}$ de $\mathbf{A}^{\bullet,*}$ le nombre entier $i + j$.

- 7) **Catégorie de complexes différentiels gradués.** Notée $\mathbf{C}^*(\mathcal{A})$, ses objets notés (\mathbf{A}^*, d_*) sont des \mathcal{A} -modules \mathbb{Z} -gradués $\mathbf{A}^* = \{\mathbf{A}^i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ munis d'une famille $\{d(\mathbf{A})_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ (qu'on note par abus $\{d_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$) de morphismes de \mathcal{A} -modules $d(\mathbf{A})_i : \mathbf{A}^i \rightarrow \mathbf{A}^{i+1}$ vérifiant l'égalité :

$$d(\mathbf{A})_{i+1} \circ d(\mathbf{A})_i = 0.$$

Un tel objet est noté (\mathbf{A}^*, d_*) et sera représenté par :

$$\dots \xrightarrow{d_{i-2}} \mathbf{A}^{i-1} \xrightarrow{d_{i-1}} \mathbf{A}^i \xrightarrow{d_i} \mathbf{A}^{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} \dots$$

Un élément $\text{Mor}((\mathbf{A}^*, d_*), (\mathbf{B}^*, d_*))$ est la donnée d'un morphisme de \mathcal{A} -modules gradués $f_* \in \text{Mor}(\mathbf{A}^*, \mathbf{B}^*)$ tel que le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{d_{i-2}} & \mathbf{A}^{i-1} & \xrightarrow{d_{i-1}} & \mathbf{A}^i & \xrightarrow{d_i} & \mathbf{A}^{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} \dots \\ & & \downarrow f_{i-1} & & \downarrow f_i & & \downarrow f_{i+1} \\ \dots & \xrightarrow{d_{i-2}} & \mathbf{B}^{i-1} & \xrightarrow{d_{i-1}} & \mathbf{B}^i & \xrightarrow{d_i} & \mathbf{B}^{i+1} \xrightarrow{d_{i+1}} \dots \end{array}$$

est *commutatif*, i.e. on a $d_i \circ f_i = f_{i+1} \circ d_i$, pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

- 8) **Catégorie de \mathcal{A} -algèbres différentielles graduées.** Notée $\text{Adg}(\mathcal{A})$, un objet de cette catégorie est défini par la donnée d'un complexe différentiel gradué de \mathcal{A} -modules (\mathbf{A}^*, d_*) où $\mathbf{A}^k = 0$ pour $k \ll 0$, et d'une structure de \mathcal{A} -algèbre sur $\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathbf{A}^i$ vérifiant :
- a) $\mathbf{A}^i \cdot \mathbf{A}^j \subseteq \mathbf{A}^{i+j}$, pour tous $i, j \in \mathbb{Z}$;
 - b) l'opérateur $d := \sum_{j \in \mathbb{N}} d_j$ définit sur $\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathbf{A}^i$ une « *anti-dérivation* », i.e.

$$d(x \cdot y) = d(x) \cdot y + (-1)^k x \cdot d(y),$$

pour tous $k \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbf{A}^k$ et $y \in \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathbf{A}^i$.

Un morphisme dans $\text{Adg}(\mathcal{A})$ sera la donnée d'un morphisme f_* de \mathcal{A} -modules \mathbb{Z} -gradués, tel que $\sum_{i \in \mathbb{Z}} f_i$ est compatible aux structures d'algèbres associées au domaine et codomaine de f_* .

- 9) **Catégorie de bicomplexes différentiels gradués.** Notée $\mathbf{C}^{\bullet, \bullet}(\mathcal{A})$, ses objets notés $(\mathbf{A}^{\bullet, \bullet}, d_{\bullet, \bullet}, \delta_{\bullet, \bullet})$ sont définis par la donnée d'un \mathcal{A} -module $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ -gradué $\mathbf{A}^{\bullet, \bullet}$ et de deux familles $\{d_{i,j}\}_{i,j \in \mathbb{Z}}$ et $\{\delta_{i,j}\}_{i,j \in \mathbb{Z}}$, de morphismes de \mathcal{A} -modules : $d_{i,j} : \mathbf{A}^{i,j} \rightarrow \mathbf{A}^{i,j+1}$ et $\delta_{i,j} : \mathbf{A}^{i,j} \rightarrow \mathbf{A}^{i+1,j}$, telles que :
- a) pour chaque $i_0, j_0 \in \mathbb{Z}$ fixés, $(\mathbf{A}^{i_0, \bullet}, d_{i_0, \bullet})$ et $(\mathbf{A}^{\bullet, j_0}, \delta_{\bullet, j_0})$ sont des complexes différentiels gradués ;
 - b) pour tous $i, j \in \mathbb{Z}$, on a :

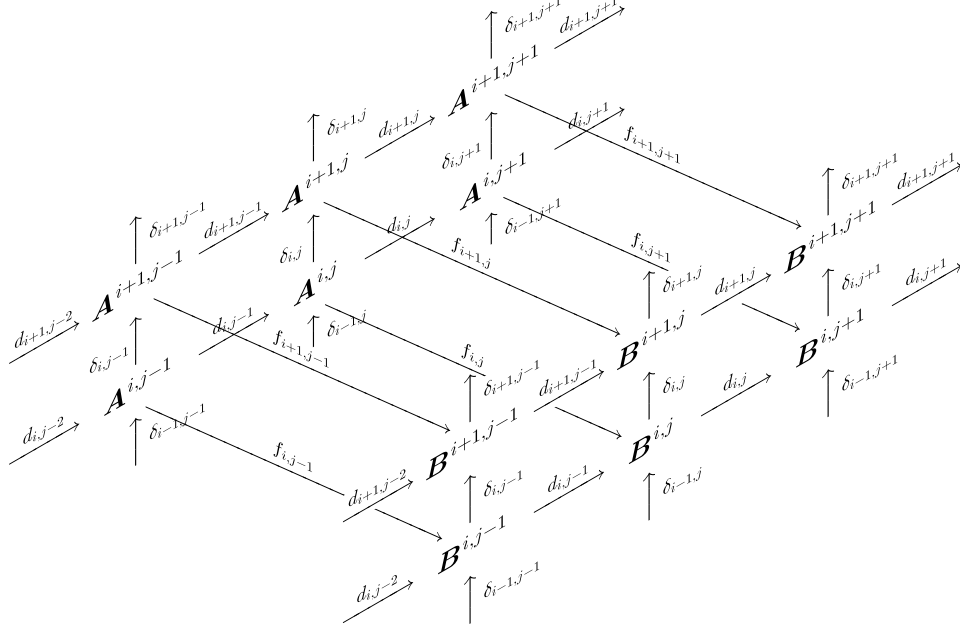
$$\delta_{i,j+1} \circ d_{i,j} = d_{i+1,j} \circ \delta_{i,j},$$

La condition (b) est, à son tour, équivalente à chacune des conditions suivantes :

- b₁) Pour chaque $i_0 \in \mathbb{Z}$ fixé, $\delta_{i_0, \bullet}$ est un morphisme de complexes différentiels gradués de $(\mathbf{A}^{i_0, \bullet}, d_{i_0, \bullet})$ vers $(\mathbf{A}^{i_0+1, \bullet}, d_{i_0+1, \bullet})$.
- b₂) Pour chaque $j_0 \in \mathbb{Z}$ fixé, d_{\bullet, j_0} est un morphisme de complexes différentiels gradués de $(\mathbf{A}^{\bullet, j_0}, \delta_{\bullet, j_0})$ vers $(\mathbf{A}^{\bullet, j_0+1}, \delta_{\bullet, j_0+1})$.
- b₃) les sous-diagrammes du diagramme suivant sont tous *commutatifs* :

$$\begin{array}{ccccc}
 & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & \uparrow \delta_{i+1,j-1} & & \uparrow \delta_{i+1,j} & & \uparrow \delta_{i+1,j+1} \\
 \dots & \xrightarrow{d_{i+1,j-2}} & \mathbf{A}^{i+1,j-1} & \xrightarrow{d_{i+1,j-1}} & \mathbf{A}^{i+1,j} & \xrightarrow{d_{i+1,j}} & \mathbf{A}^{i+1,j+1} & \xrightarrow{d_{i+1,j+1}} & \dots \\
 & \uparrow \delta_{i,j-1} & & \uparrow \delta_{i,j} & & \uparrow \delta_{i,j+1} \\
 \dots & \xrightarrow{d_{i,j-2}} & \mathbf{A}^{i,j-1} & \xrightarrow{d_{i,j-1}} & \mathbf{A}^{i,j} & \xrightarrow{d_{i,j}} & \mathbf{A}^{i,j+1} & \xrightarrow{d_{i,j+1}} & \dots \\
 & \uparrow \delta_{i-1,j-1} & & \uparrow \delta_{i-1,j} & & \uparrow \delta_{i-1,j+1} \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

Précisons maintenant les éléments de $\text{Mor}((\mathbf{A}^{\bullet,*}, d, \delta), (\mathbf{B}^{\bullet,*}, d, \delta))$. Il s'agit des familles $\{f_{i,j}\}_{i,j \in \mathbb{Z}}$, où $f_{i,j} : \mathbf{A}^{i,j} \rightarrow \mathbf{B}^{i,j}$ est un morphisme de \mathcal{A} -modules pour chaque $i, j \in \mathbb{Z}$, "commutant" aux opérateurs d et δ , *i.e.* rendant commutatifs tous les sous-diagrammes du diagramme suivant.



10) **Catégorie opposée associée à une catégorie.** Soit \mathcal{C} une catégorie et posons $\text{Ob}(\mathcal{C}^{\text{op}}) := \text{Ob}(\mathcal{C})$ et $\text{Mor}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(\mathbf{A}, \mathbf{B}) := \text{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathbf{B}, \mathbf{A})$. On vérifie alors que les conditions caractérisant les catégories sont également vérifiées pour $(\text{Ob}(\mathcal{C}^{\text{op}}), \text{Mor}_{\mathcal{C}^{\text{op}}})$, cette catégorie, notée \mathcal{C}^{op} est appelée la « *catégorie opposée à \mathcal{C}* ».

Lorsque la catégorie \mathcal{C} est celle associée à un ensemble préordonné, \mathcal{C}^{op} est la catégorie associée à la relation opposée.

8.2 Foncteurs et naturalité

8.2.1 Foncteurs covariants

Soient \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 deux catégories. Un « *foncteur covariant* » de \mathcal{C}_1 vers \mathcal{C}_2 consiste en la donnée :

F-1) d'une correspondance $\mathbf{A} \rightsquigarrow \mathbf{F}(\mathbf{A})$ de $\text{Ob}(\mathcal{C}_1)$ dans $\text{Ob}(\mathcal{C}_2)$;

F-2) et pour chaque couple d'objets (\mathbf{A}, \mathbf{B}) de \mathcal{C}_1 , d'une application $f \rightsquigarrow \mathbf{F}(f)$ de $\text{Mor}_{\mathcal{C}_1}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ à valeurs dans $\text{Mor}_{\mathcal{C}_2}(\mathbf{F}(\mathbf{A}), \mathbf{F}(\mathbf{B}))$.

On demande à ces dernières applications de satisfaire, en plus, aux conditions suivantes :

F-2a) si $f \circ g$ est défini dans \mathcal{C}_1 , alors $\mathbf{F}(f \circ g) = \mathbf{F}(f) \circ \mathbf{F}(g)$;

F-2b) $\mathbf{F}(\text{id}_{\mathbf{A}}) = \text{id}_{\mathbf{F}(\mathbf{A})}$.

8.2.2 Foncteurs contravariants

Soient \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 deux catégories. On appelle «foncteur contravariant» de \mathcal{C}_1 vers \mathcal{C}_2 tout foncteur *covariant* de $\mathcal{C}_1^{\text{op}}$ vers \mathcal{C}_2 .

Remarque 8.2.2-1 : Soient $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ et \mathcal{C}_3 , trois catégories, et $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ des foncteurs de \mathcal{C}_1 vers \mathcal{C}_2 et de \mathcal{C}_2 vers \mathcal{C}_3 respectivement. La composition des correspondances, notée $\mathbf{F}_2 \circ \mathbf{F}_1$, est un foncteur de \mathcal{C}_1 vers \mathcal{C}_3 .

8.2.3 Transformations naturelles entre foncteurs

Soient \mathbf{F} et \mathbf{G} deux foncteurs entre les catégories \mathcal{C} et \mathcal{D} . Une «*transformation naturelle*» η de \mathbf{F} vers \mathbf{G} est une correspondance qui associe à chaque objet \mathbf{A} de \mathcal{C} un morphisme $\eta(\mathbf{A}) \in \text{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathbf{F}(\mathbf{A}), \mathbf{G}(\mathbf{A}))$, de telle sorte que pour tout couple (\mathbf{A}, \mathbf{B}) d'objets de \mathcal{C} et tout $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{F}(\mathbf{A}) & \xrightarrow{\eta(\mathbf{A})} & \mathbf{G}(\mathbf{A}) \\
 \mathbf{F}(f) \downarrow & & \downarrow \mathbf{G}(f) \\
 \mathbf{F}(\mathbf{B}) & \xrightarrow{\eta(\mathbf{B})} & \mathbf{G}(\mathbf{B})
 \end{array} \tag{A}$$

Lorsque chaque $\eta(\mathbf{A})$ est un isomorphisme, on dit que η est un «*isomorphisme naturel*» de foncteurs.

Composition de transformations naturelles. Soient $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ et \mathbf{F}_3 trois foncteurs de \mathcal{C} vers \mathcal{D} . Soient $\eta_{21} : \mathbf{F}_1 \rightarrow \mathbf{F}_2$ et $\eta_{32} : \mathbf{F}_2 \rightarrow \mathbf{F}_3$ des transformations naturelles et notons $\eta_{32} \circ \eta_{21}$ la correspondance qui associe à chaque objet \mathbf{A} de \mathcal{C} le morphisme $\eta_{32}(\mathbf{A}) \circ \eta_{21}(\mathbf{A})$. Cette correspondance est une transformation naturelle de \mathbf{F}_1 vers \mathbf{F}_3 .

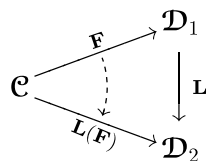
8.2.4 Catégories de foncteurs et foncteurs induits et coinduits

Soit \mathcal{P} une *petite* catégorie. La classe $\text{Fonct}(\mathcal{P}, \mathcal{C})$, de tous les foncteurs *covariants* de \mathcal{P} vers \mathcal{C} , admet une structure de catégorie en définissant $\text{Mor}_{\text{Fonct}(\mathcal{P}, \mathcal{C})}(\mathbf{F}, \mathbf{G})$ comme l'ensemble de transformations naturelles de \mathbf{F} vers \mathbf{G} , l'application "composition" étant alors la composition de transformations naturelles.

Question : En quoi le fait que \mathcal{P} soit une **petite** catégorie est-il indispensable dans la construction de $\text{Fonct}(\mathcal{P}, \mathcal{C})$?

Foncteurs induits

Soit maintenant \mathbf{L} un foncteur covariant de la catégorie \mathcal{D}_1 vers la catégorie \mathcal{D}_2 . Fixons une petite catégorie \mathcal{C} et considérons les catégories $\text{Fonct}(\mathcal{C}, \mathcal{D}_1)$ et $\text{Fonct}(\mathcal{C}, \mathcal{D}_2)$. La composition d'un objet \mathbf{F} de $\text{Fonct}(\mathcal{C}, \mathcal{D}_1)$ avec le foncteur \mathbf{L} donne un objet $\mathbf{L}(\mathbf{F}) := \mathbf{L} \circ \mathbf{F}$ de $\text{Fonct}(\mathcal{C}, \mathcal{D}_2)$.



Observons d'autre part que si η est une transformation naturelle entre deux foncteurs \mathbf{F} et \mathbf{G} de \mathcal{C} vers \mathcal{D}_1 , le foncteur \mathbf{L} préserve la commutativité des diagrammes (\mathcal{A}) pour tout couple (\mathbf{A}, \mathbf{B}) d'objets de \mathcal{C} , *i.e.* :

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbf{A} & & \mathbf{F}(\mathbf{A}) \xrightarrow{\eta(\mathbf{A})} \mathbf{G}(\mathbf{A}) & & \mathbf{L}\mathbf{F}(\mathbf{A}) \xrightarrow{\mathbf{L}\eta(\mathbf{A})} \mathbf{L}\mathbf{G}(\mathbf{A}) \\
 f \downarrow & \xrightarrow{(\mathbf{F}, \mathbf{G})} & \downarrow \mathbf{F}(f) & \mathbf{G}(f) \downarrow & \downarrow \mathbf{L}\mathbf{F}(f) & \mathbf{L}\mathbf{G}(f) \downarrow \\
 \mathbf{B} & & \mathbf{F}(\mathbf{B}) \xrightarrow{\eta(\mathbf{B})} \mathbf{G}(\mathbf{B}) & & \mathbf{L}\mathbf{F}(\mathbf{B}) \xrightarrow{\mathbf{L}\eta(\mathbf{B})} \mathbf{L}\mathbf{G}(\mathbf{B})
 \end{array}$$

de sorte que la correspondance $\mathbf{L}(\eta)$ qui associe à tout couple d'objets (\mathbf{A}, \mathbf{B}) de \mathcal{C} le couple de morphismes $(\mathbf{L}\eta(\mathbf{A}), \mathbf{L}\eta(\mathbf{B}))$, est bien une transformation naturelle entre les foncteurs $\mathbf{L} \circ \mathbf{F}$ et $\mathbf{L} \circ \mathbf{G}$. Il s'ensuit donc que la correspondance qui associe à un objet \mathbf{F} de $\text{Fonct}(\mathcal{C}, \mathcal{D}_1)$ l'objet $\mathbf{L}(\mathbf{F})$ de $\text{Fonct}(\mathcal{C}, \mathcal{D}_2)$, et à une transformation naturelle η la transformation naturelle $\mathbf{L}(\eta)$ est un *foncteur* de $\text{Fonct}(\mathcal{C}, \mathcal{D}_1)$ vers $\text{Fonct}(\mathcal{C}, \mathcal{D}_2)$. On l'appellera, dans ces notes, «*foncteur induit*» et sera noté, par abus, par le même symbole \mathbf{L} .

Foncteurs coinduits

Soient maintenant \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 deux petites catégories et \mathbf{L} un foncteur covariant de \mathcal{C}_1 vers \mathcal{C}_2 . Pour toute catégorie \mathcal{D} , la composition d'un foncteur \mathbf{F} de \mathcal{C}_2 vers \mathcal{D} avec \mathbf{L} donne un foncteur ${}^t\mathbf{L}(\mathbf{F}) := \mathbf{F} \circ \mathbf{L}$ de \mathcal{C}_1 vers \mathcal{D} .

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{C}_1 & \xrightarrow{{}^t\mathbf{L}(\mathbf{F})} & \mathcal{D} \\
 \mathbf{L} \downarrow & \dashrightarrow & \uparrow \\
 \mathcal{C}_2 & \xrightarrow{\mathbf{F}} & \mathcal{D}
 \end{array}$$

De même, une application naturelle η entre deux objets \mathbf{F}_1 et \mathbf{F}_2 de $\text{Fonct}(\mathcal{C}_2, \mathcal{D})$ se compose avec \mathbf{L} pour donner lieu à une transformation naturelle ${}^t\mathbf{L}(\eta) := \eta \circ \mathbf{L}$ de ${}^t\mathbf{L}(\mathbf{F}_1)$ vers ${}^t\mathbf{L}(\mathbf{F}_2)$. On vérifie alors que la correspondance ${}^t\mathbf{L}$ de $\text{Fonct}(\mathcal{C}_2, \mathcal{D})$ vers $\text{Fonct}(\mathcal{C}_1, \mathcal{D})$ est *fonctorielle* ; on l'appelle «*foncteur coinduit*» et on le note ${}^t\mathbf{L}$.

Catégories de systèmes inductifs et projectifs

Soit (\mathcal{I}, \preceq) un *ensemble* muni d'un ordre partiel « \preceq ». Soit \mathcal{C} une catégorie ; on appelle «*système inductif (resp. projectif) d'objets de \mathcal{C} relatif à (\mathcal{I}, \preceq)* » tout foncteur covariant (resp. contravariant) de la catégorie associée à (\mathcal{I}, \preceq) vers \mathcal{C} .

Dans le cas où $\mathcal{C} = \text{Mod}(\mathcal{A})$, un système inductif de \mathcal{A} -modules relatif à (\mathcal{I}, \preceq) est donc la donnée d'une famille $\{\mathbf{A}_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ de \mathcal{A} -modules, et pour chaque couple $i \preceq j \in \mathcal{I}$ d'un morphisme $f_{j,i} : \mathbf{A}_i \rightarrow \mathbf{A}_j$ de telle sorte que :

- ▶ $f_{i,i} = \text{id}_{\mathbf{A}_i}$, pour tout $i \in \mathcal{I}$;
- ▶ pour tous $i \preceq j \preceq k$ dans \mathcal{I} , $f_{k,i} = f_{k,j} \circ f_{j,i}$.

Exemple 8.2.4-1 : Soit M une variété différentiable et pour $x \in M$ considérons l'ensemble \mathcal{V}_x de tous les voisinages ouverts de x dans M , munissons \mathcal{V}_x de l'ordre partiel " \supseteq ". Le système qui fait correspondre à $U \in \mathcal{V}_x$ l'espace $\Omega^k(U)$ des k -formes différentielles sur U , et qui pour chaque inclusion $U \supseteq V$, fait correspondre le morphisme de restriction de formes différentielles de $\Omega^k(U)$ vers $\Omega^k(V)$, est *inductif*. Sa limite inductive (qu'on définira précisément dans la section 8.4) est connue sous le nom des « *germes de k -formes différentielles de M au point x* ».

8.2.5 Transformations naturelles vues comme foncteurs

Une transformation naturelle entre foncteurs peut être vue, elle-même, comme un foncteur ; l'idée sous-jacente résulte de l'observation suivante. Etant donnée une catégorie \mathcal{D} , on définit la catégorie $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ dont les objets sont "les morphismes" de \mathcal{D} , *i.e.* les "triplets" $(\alpha, \mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1)$, où $\alpha \in \text{Mor}(\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1)$. Un élément de $\text{Mor}_{\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}}((\alpha, \mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1), (\beta, \mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1))$ est alors la donnée d'un couple de morphismes

$$(f_0, f_1) \in \text{Mor}(\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0) \times \text{Mor}(\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1),$$

tel que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A}_0 & \xrightarrow{\alpha} & \mathbf{A}_1 \\ f_0 \downarrow & & \downarrow f_1 \\ \mathbf{B}_0 & \xrightarrow{\beta} & \mathbf{B}_1 \end{array} \quad (*)$$

On vérifie que les conditions caractéristiques des catégories sont bien vérifiées. (Vous devriez reconnaître une identification immédiate entre $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ et $\text{Fonct}([0 \rightarrow 1], \mathcal{D})$, où $[0 \rightarrow 1]$ est la catégorie associée à l'ensemble ordonné $\{0 \leq 1\}$.)

Soit maintenant \mathbf{F} un foncteur de \mathcal{C} vers $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$. Pour chaque objet \mathbf{A} de \mathcal{C} , notons $\mathbf{F}_0(\mathbf{A})$ et $\mathbf{F}_1(\mathbf{A})$ respectivement le domaine et codomaine du morphisme $\mathbf{F}(\mathbf{A})$ de \mathcal{D} . Pour tout morphisme $f \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, notons $\mathbf{F}_0(f)$ et $\mathbf{F}_1(f)$ respectivement les composantes f_0 et f_1 de $\mathbf{F}(f)$ (reportez-vous au diagramme (*)). On réalise alors que \mathbf{F}_0 et \mathbf{F}_1 sont des *foncteurs* de \mathcal{C} vers \mathcal{D} et que la correspondance $\mathbf{A} \rightsquigarrow \eta(\mathbf{A}) = \mathbf{F}(\mathbf{A})$ est une *transformation naturelle* de \mathbf{F}_0 vers \mathbf{F}_1 .

Réciproquement, la donnée d'une transformation naturelle entre deux foncteurs \mathbf{F}_0 et \mathbf{F}_1 de \mathcal{C} vers \mathcal{D} , détermine par le procédé inverse un foncteur \mathbf{F} de \mathcal{C} vers $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$.

Il y a donc équivalence entre les notions de transformation naturelle de foncteurs vers une catégorie \mathcal{D} et celle de foncteur vers la catégorie $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$.

Il convient de souligner le fait que les considérations de cette section ne se limitent pas seulement à la catégorie des morphismes d'une catégorie donnée. En effet, elles restent valables, *mutatis mutandis*, pour les catégories de "diagrammes (d'une forme donnée) d'objets d'une catégorie", auquel cas le concept de "transformation naturelle" devient celui de "diagramme naturel".

En topologie algébrique (par exemple), la plupart des diagrammes que vous rencontrerez sont naturels ; il en sera de même dans ce cours.

Exemples 8.2.5-1 de foncteurs :

- 1) **Complexe de de Rham.** La correspondance qui associe à une variété différentiable M le complexe $\Omega^*(M)$ des formes différentielles, et à une application différentiable $f \in \text{Mor}_{\text{Diff}}(M, N)$, le morphisme image réciproque de formes différentielles :

$$f^* : \Omega^*(N) \rightarrow \Omega^*(M)$$

est un foncteur **contravariant** de la catégorie Diff vers la catégorie $\text{Adg}(\mathbb{R})$ des \mathbb{R} -algèbres différentielles graduées.

- 2) **Complexe de cochaînes singulières.** Analogue au précédent mais défini de la catégorie Top des espaces topologiques vers $\text{Adg}(\mathcal{A})$, où \mathcal{A} peut être un anneau commutatif arbitrairement choisi. On note souvent $S^*(X; \mathcal{A})$ l'algèbre des cochaînes singulières de X à coefficients dans \mathcal{A} .
- 3) **Préfaisceau des formes différentielles sur une variété.** Foncteur **contravariant** très proche du précédent, il est défini sur la catégorie associée à l'ensemble partiellement ordonné $(\text{Ouv}(M), \subseteq)$ des ouverts d'une variété M muni de la relation d'inclusion ensembliste. Le foncteur associe à l'ouvert $U \subseteq M$ le complexe de de Rham $\Omega^*(U)$; le morphisme de $\Omega^*(U) \rightarrow \Omega^*(V)$ associé à une inclusion d'ouverts $V \subseteq U$ étant la restriction de formes différentielles.
- 4) **Copréfaisceau des formes différentielles à support compact sur une variété.** Foncteur **covariant** défini de $\text{Ouv}(M)$ vers $\text{Adg}(\mathbb{R})$; il associe à un ouvert $U \subseteq M$ l'algèbre différentielle $\Omega_c^*(U)$ des formes différentielles définies sur U à *support compact*; le morphisme de $\Omega_c^*(V) \rightarrow \Omega_c^*(U)$ associé à une inclusion d'ouverts $V \subseteq U$ étant le *prolongement par zéro*.
- 5) **Cohomologie des complexes différentiels gradués.** Foncteur **covariant** défini de la catégorie $\mathbf{C}^*(\mathcal{A})$ des complexes de \mathcal{A} -modules différentiels gradués, vers la catégorie des \mathcal{A} -modules \mathbb{Z} -gradués; il associe au complexe (A^*, d_*) le module gradué $\{H^k(A^*, d_*)\}_{k \in \mathbb{Z}}$, où :

$$H^k(A^*, d_*) := \frac{\ker(d_k)}{\text{im}(d_{k-1})};$$

l'action de ce foncteur sur un morphisme $f_* \in \text{Mor}((A^*, d_*), (B^*, d_*))$ découle des inclusions

$$f_k(\ker(d(A)_k)) \subseteq \ker(d(B)_k) \quad \text{et} \quad f_k(\text{im}(d(A)_k)) \subseteq \text{im}(d(B)_k),$$

induisant les morphismes :

$$H^k(A^*, d(A)_*) = \frac{\ker(d(A)_k)}{\text{im}(d(A)_{k-1})} \xrightarrow{H(f)_k} \frac{\ker(d(B)_k)}{\text{im}(d(B)_{k-1})} = H^k(B^*, d(B)_*),$$

pour tout $k \in \mathbb{Z}$. La famille $H(f)_* := \{H^k(f)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est le morphisme associé à f_* par le foncteur de cohomologie.

Exercice 8.2.5-1-5.1 : Lorsque l'on considère, au départ, la catégorie des *algèbres* différentielles graduées, montrez que le foncteur de cohomologie aboutit naturellement dans la catégorie des algèbres graduées.

Définition 8.2.5-1-5.1 : Un complexe de \mathcal{A} -modules (\mathbf{A}^*, d_*) est dit « exact », lorsque $H^k(\mathbf{A}^*, d_*) = 0$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Définition 8.2.5-1-5.2 : Un morphisme f_* de la catégorie des complexes différentiels gradués est dit un « quasi-isomorphisme », si et seulement si, $H(f)_*$ est un isomorphisme.

- 6) **Cohomologie de de Rham des variétés différentiables.** Foncteur **contravariant** obtenu en composant les foncteurs complexe-de-de Rham et cohomologie-de-complexes.
- 7) **Cohomologie singulière des espaces topologiques.** Foncteur **contravariant** obtenu en composant les foncteurs complexe-de-cochaînes-singulières et cohomologie-de-complexes.
- 8) **Troncatures bêtes de complexes.** Foncteurs **covariants** de la catégorie $C^*(\mathcal{A})$ vers elle-même définis pour chaque $k \in \mathbb{Z}$ de la manière suivante :

- Pour tout complexe $(\mathbf{A}^*, d(\mathbf{A})_*)$, on note $(\mathbf{A}^{\leq k}, d_*)$ le complexe $(\mathbf{B}^*, d(\mathbf{B})_*)$ où

$$\begin{cases} \mathbf{B}^i = \mathbf{A}^i & \text{pour } i \leq k, \\ \mathbf{B}^i = 0 & \text{autrement;} \end{cases}$$

puis $d(\mathbf{B})_i = d(\mathbf{A})_i$, pour tout $i \leq k - 1$, et $d(\mathbf{B})_i = 0$ sinon.

- Pour tout complexe $(\mathbf{A}^*, d(\mathbf{A})_*)$, on note $(\mathbf{A}^{> k}, d_*)$ le complexe $(\mathbf{C}^*, d(\mathbf{C})_*)$ où

$$\begin{cases} \mathbf{C}^i = \mathbf{A}^i & \text{pour } i > k, \\ \mathbf{C}^i = 0 & \text{autrement;} \end{cases}$$

puis $d(\mathbf{C})_i = d(\mathbf{A})_i$, pour tout $i > k$, et $d(\mathbf{C})_i = 0$ sinon.

On peut représenter ces définitions par le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccccccc} (\mathbf{A}^{\leq k}) & \longrightarrow & \mathbf{A}^{k-2} & \xrightarrow{d_{k-2}} & \mathbf{A}^{k-1} & \xrightarrow{d_{k-1}} & \mathbf{A}^k & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \\ & & \text{id} \uparrow & & \text{id} \uparrow & & \text{id} \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ (\mathbf{A}^*) & \longrightarrow & \mathbf{A}^{k-2} & \xrightarrow{d_{k-2}} & \mathbf{A}^{k-1} & \xrightarrow{d_{k-1}} & \mathbf{A}^k & \xrightarrow{d_k} & \mathbf{A}^{k+1} & \xrightarrow{d_{k+1}} & \mathbf{A}^{k+2} & \xrightarrow{d_{k+2}} & \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \text{id} \uparrow & & \text{id} \uparrow & & \\ (\mathbf{A}^{> k}) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbf{A}^{k+1} & \xrightarrow{d_{k+1}} & \mathbf{A}^{k+2} & \xrightarrow{d_{k+2}} & \end{array}$$

D'où l'on conclut que :

$$\begin{cases} H^j(\mathbf{A}^{\leq k}) = H^j(\mathbf{A}^*) & \text{pour tout } j < k; \\ H^k(\mathbf{A}^{\leq k}) = \frac{\mathbf{A}^k}{\text{im}(d_{k-1})}; \\ H^j(\mathbf{A}^{\leq k}) = 0 & \text{pour tout } j > k; \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} H^j(\mathbf{A}^{> k}) = 0 & \text{pour tout } j < k + 1; \\ H^{k+1}(\mathbf{A}^{> k}) = \ker(d_{k+1}); \\ H^j(\mathbf{A}^{> k}) = H^j(\mathbf{A}^*) & \text{pour tout } j > k + 1. \end{cases}$$

Ce type de troncature, qui a l'avantage de "préserver la simplicité" de termes, introduit en revanche des cohomologies, autour du degré de troncature, parfois peu contrôlables vis-à-vis des cohomologies du complexe initial.

Soit maintenant $f_* \in \text{Mor}(\mathbf{A}^*, \mathbf{B}^*)$, le morphisme $f_{\leq k} \in \text{Mor}(\mathbf{A}^{\leq k}, \mathbf{B}^{\leq k})$ est défini en précisant que ses "composantes" aux degrés $\leq k$ sont respectivement celles de f_* , et toutes les autres étant nulles. (Le morphisme $f_{>k}$ est défini de manière analogue.)

Remarque 8.2.5-1-8.1 : Nous avons indiqué dans le diagramme ci-dessus des morphismes (verticaux) canoniques de complexes gradués. Ils définissent de *transformations naturelles* : du foncteur $\bullet \rightsquigarrow \bullet^{>k}$ vers le foncteur "identité", et de ce dernier vers $\bullet \rightsquigarrow \bullet^{\leq k}$. L'application des considérations de la section 8.2.5 permettent, donc, de conclure que ces diagrammes sont "fonctoriels" de la catégorie des complexes vers la catégorie des bicomplexes différentiels gradués. Ces diagrammes représentent également des suites exactes courtes *de complexes* :

$$0 \longrightarrow (\mathbf{A}^{\geq k+1}, d_*) \longrightarrow (\mathbf{A}^*, d_*) \longrightarrow (\mathbf{A}^{\leq k}, d_*) \longrightarrow 0$$

d'où des suites exactes longues de cohomologie où les termes "litigieux" constituent des suites exactes à quatre termes :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^k(\mathbf{A}^*) & \longrightarrow & H^k(\mathbf{A}^{\leq k}) & \longrightarrow & H^{k+1}(\mathbf{A}^{\geq k}) & \longrightarrow & H^{k+1}(\mathbf{A}^*) & \longrightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & \frac{\ker d_k}{\text{im } d_{k-1}} & \longrightarrow & \text{coker}(d_{k-1}) & \xrightarrow{\bar{d}_k} & \ker(d_{k+1}) & \longrightarrow & \frac{\ker d_{k+1}}{\text{im } d_k} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où \bar{d}_k désigne le morphisme induit par d_k sur $\text{coker}(d_{k-1}) := A^k / \text{im}(d_{k-1})$.

9) **Troncatures intelligentes de complexes.** Foncteurs **covariants** de la catégorie $\mathbf{C}^*(\mathcal{A})$ vers elle-même définis pour chaque $k \in \mathbb{Z}$ de la manière suivante :

- Pour tout complexe $(\mathbf{A}^*, d(\mathbf{A})_*)$, on note $(\tau_k^{\leq k}(\mathbf{A})^*, d_*)$ le complexe de termes

$$\begin{cases} \tau_k^{\leq k}(\mathbf{A})^i = \mathbf{A}^i & \text{pour } i < k, \\ \tau_k^{\leq k}(\mathbf{A})^k = \ker(d_k), \\ \tau_k^{\leq k}(\mathbf{A})^i = 0 & \text{pour } k < i; \end{cases}$$

et de morphismes $d_i = d(\mathbf{A})_i$ pour tout $i < k$, et $d_i = 0$ autrement.

- Pour tout complexe $(\mathbf{A}^*, d(\mathbf{A})_*)$, on note $(\tau_k^{>k}(\mathbf{A})^*, d_*)$ le complexe de termes

$$\begin{cases} \tau_k^{>k}(\mathbf{A})^i = 0 & \text{pour } i < k, \\ \tau_k^{>k}(\mathbf{A})^k = \text{im}(d_k), \\ \tau_k^{>k}(\mathbf{A})^i = \mathbf{A}^i & \text{pour } k < i; \end{cases}$$

et de morphismes $d_i = d(\mathbf{A})_i$ pour tout $k \leq i$, et $d_i = 0$ autrement.

Comme dans le paragraphe précédent, représentons ces définitions sur un diagramme :

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 (\tau_k^{>k}(\mathbf{A})^*) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \text{im}(d_k) & \longrightarrow & \mathbf{A}^{k+1} & \xrightarrow{d_{k+1}} & \mathbf{A}^{k+2} & \xrightarrow{d_{k+2}} \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & d_k \uparrow & & \text{id} \uparrow & & \text{id} \uparrow & \\
 (\mathbf{A}^*) & \longrightarrow & \mathbf{A}^{k-2} & \xrightarrow{d_{k-2}} & \mathbf{A}^{k-1} & \xrightarrow{d_{k-1}} & \mathbf{A}^k & \xrightarrow{d_k} & \mathbf{A}^{k+1} & \xrightarrow{d_{k+1}} & \mathbf{A}^{k+2} & \xrightarrow{d_{k+2}} \\
 & & \text{id} \uparrow & & \text{id} \uparrow & & \text{inj} \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
 (\tau_k^{\leq k}(\mathbf{A})^*) & \longrightarrow & \mathbf{A}^{k-2} & \xrightarrow{d_{k-2}} & \mathbf{A}^{k-1} & \xrightarrow{d_{k-1}} & \ker(d_k) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow
 \end{array}$$

D'où l'on conclut que :

$$\begin{cases} H^j(\tau_k^{\leq k} \mathbf{A}^*) = H^j(\mathbf{A}^*) & \text{pour tout } j \leq k; \\ H^j(\tau_k^{\leq k} \mathbf{A}^*) = 0 & \text{pour tout } k < j; \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} H^j(\tau_k^{>k} \mathbf{A}^*) = 0 & \text{pour tout } j \leq k; \\ H^j(\tau_k^{>k} \mathbf{A}^*) = H^j(\mathbf{A}^*) & \text{pour tout } k < j. \end{cases}$$

Ce type de troncature, “préserver la simplicité” des cohomologies, mais introduit des termes nouveau dans les complexes.

Remarque 8.2.5-1-9.2 : Comme dans les troncatures bêtes, nous avons indiqué dans le diagramme précédent des morphismes de complexes (verticalement) naturels, d'où les suites exactes courtes fonctorielles :

$$0 \longrightarrow \tau_k^{\leq k}(\mathbf{A})^* \longrightarrow \mathbf{A}^* \longrightarrow \tau_k^{>k}(\mathbf{A})^* \longrightarrow 0.$$

Exercice 8.2.5-1-9.2 : Définissez le foncteur $\tau_i^{\leq k}$ en remplaçant dans la définition de $\tau_k^{\leq k}(\mathbf{A})^*$ le terme de degré k par $\text{im}(d_k)$. Précisez le conoyau du morphisme de complexes “évident” $\tau_i^{\leq k}(\mathbf{A})^* \rightarrow \mathbf{A}^*$ et refaites l'étude des cohomologies.

Remarque 8.2.5-1-9.3 : Il convient de souligner que la functorialité des troncatures garantit, non seulement le fait qu'appliquées ligne-à-ligne (à condition de garder fixe la limite de troncature) et/ou colonne-à-colonne, à un bicomplexe différentiel gradué, on obtienne encore un bicomplexe différentiel gradué; mais aussi que cela fournit des *foncteurs de troncature* de la catégorie des bicomplexes différentiels gradués vers elle-même.

8.3 Catégories abéliennes

Si l'on voulait résumer à outrance, on pourrait dire que les « *catégories abéliennes* » sont celles disposant de suffisamment de structure supplémentaire pour y transposer, *mutatis mutandis*, l'énorme majorité d'arguments d'algèbre homologique que l'on peut faire dans les catégories de modules et qui restent valables, quelle que soit la catégorie de modules choisie.

Une première question que l'on doit se poser concerne la notion de "complexe" elle-même. Que faut-t-il demander à une catégorie \mathcal{C} pour pouvoir introduire la catégorie des « complexes d'objets de \mathcal{C} ». La réponse simple est : qu'il existe un objet nul (le module nul dans les catégories de module). On appelle « objet nul » dans une catégorie \mathcal{C} , tout objet $\mathbf{0}$ tel que $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathbf{0}, \mathbf{A})$ et $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathbf{A}, \mathbf{0})$ soient des singletons pour tout objet \mathbf{A} de \mathcal{C} . Il s'en suit que deux objets nuls sont toujours isomorphes et, en composant $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{B}$, qu'il existe un (unique) « morphisme nul », note $\mathbf{0}_{\mathbf{A}, \mathbf{B}}$, dans chaque ensemble $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$. Maintenant, étant donnée une catégorie \mathcal{C} possédant un objet nul, on peut définir la catégorie $\mathbf{C}^*(\mathcal{C})$ comme la sous-catégorie pleine de $\text{Fonct}((\mathbb{Z}, \leq), \mathcal{C})$ dont les objets sont les systèmes (\mathbb{Z}, \leq) -inductifs dans lesquels la composition de deux flèches consécutives donne la flèche nulle. Ceci étant, le foncteur constant $z \in \mathbb{Z} \rightsquigarrow \mathbf{0}$ est trivialement un objet nul de la catégorie $\mathbf{C}^*(\mathcal{C})$, nous pouvons donc itérer la démarche ci-dessus pour construire la catégorie des bicomplexes, puis des tri-complexes, ... Remarquons que ces catégories de multicomplexes peuvent également être définies comme les sous-catégories pleines des catégories $\text{Fonct}((\mathbb{Z}^n, \leq), \mathcal{C})$, où ' \leq ' désigne l'ordre "lexicographique" des n -uples de nombres entiers, dont les objets sont les systèmes (\mathbb{Z}^n, \leq) -inductifs dans lesquels la composition de deux flèches consécutives *et de même direction* donne la flèche nulle.

Mais, bien sur, la seule demande d'objets nuls est très en-dessous de ce dont on a besoin pour travailler (notamment pour tout ce qui concerne les homotopies *cf.* 8.3.5), et une première approximation est donnée par les catégories **additives**.

Définition 8.3-1 : Une catégorie \mathcal{C} est dite « additive » lorsque :

Ad-1) \mathcal{C} possède un objet nul.

Ad-2) Les ensembles $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ possèdent une structure (additive) de groupe abélien dont l'élément neutre est le morphisme nul $\mathbf{0}_{\mathbf{A}, \mathbf{B}}$.

Ad-3) Distributivité des compositions : $f(g_1 + g_2) = fg_1 + fg_2$ et $(g_1 + g_2)h = g_1h + g_2h$.

Ad-4) Dans \mathcal{C} la somme directe d'un nombre fini d'objets est définie. Autrement dit, pour tout ensemble fini d'objets $\{\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n\}$, il existe un objet \mathbf{A} et des morphismes $p_j \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathbf{A}, \mathbf{A}_j)$ et $i_j \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathbf{A}_j, \mathbf{A})$, avec $j = 1, \dots, n$, tels que

$$p_j \circ i_j = \text{id}_{\mathbf{A}_j}, \quad p_k \circ i_j = \mathbf{0}_{\mathbf{A}_j, \mathbf{A}_k} \quad \text{si } j \neq k \quad , \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^n i_j \circ p_j = \text{id}_{\mathbf{A}} .$$

Ces conditions, évidentes dans les catégories de modules, sont *héréditaires* en ce sens que si \mathcal{C} est additive, les catégories $\mathbf{C}^*(\mathcal{C})$ et $\mathcal{C}^{\mathbb{Z}}$ (catégorie d'objets \mathbb{Z} -gradués de \mathcal{C} et morphismes de degré zéro pour simplifier), seront également additives. (Il en est évidemment de même des catégories $\text{Fonct}(\mathcal{P}, \mathcal{C})$, où \mathcal{P} désigne une petite catégorie.)

8.3.1 Foncteurs additifs entre catégories additives

Les foncteurs \mathbf{F} "intéressants" entre deux catégories additives seront ceux qui respectent l'additivité des morphismes, *i.e.* tels les que les applications

$$\mathbf{F} : (\text{Mor}(\mathbf{A}, \mathbf{B}); +; \mathbf{0}_{\mathbf{A}, \mathbf{B}}) \rightarrow (\text{Mor}(\mathbf{F}(\mathbf{A}), \mathbf{F}(\mathbf{B})); +; \mathbf{0}_{\mathbf{F}(\mathbf{A}), \mathbf{F}(\mathbf{B})}) ,$$

sont des *homomorphismes de groupes*. Dans ces cas, on dira que le foncteur \mathbf{F} est « additif ».

Remarque 8.3.1-1 et exercice : Un foncteur additif \mathbf{F} entre deux catégories additives \mathcal{C} et \mathcal{D} induit (au sens du paragraphe 8.2.4) un foncteur entre les catégories des multi-complexes d'objets de \mathcal{C} et \mathcal{D} . Tous ces foncteurs sont additifs.

Plus généralement,

- a) Si \mathcal{P} est une petite catégorie, $\text{Fonct}(\mathcal{P}, \mathcal{C})$ et $\text{Fonct}(\mathcal{P}, \mathcal{D})$ sont des catégories additives et le foncteur induit par \mathbf{F} est additif.
- b) Si \mathbf{F} est un foncteur entre deux petites catégories \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 , le foncteur ${}^t\mathbf{F}$ coinduit de $\text{Fonct}(\mathcal{P}_2, \mathcal{C})$ vers $\text{Fonct}(\mathcal{P}_1, \mathcal{C})$, est additif.

8.3.2 Cohomologie et catégories abéliennes

Disposant de la catégorie de complexes d'une catégorie additive, nous souhaiterions pouvoir parler de cohomologie. Pour ceci il nous faut des conditions garantissant l'existence de *noyau et conoyau d'un morphisme*.

Définition 8.3.2-1 : Soit \mathcal{C} une catégorie additive et soit $f \in \text{Mor}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$.

- On appelle «*noyau*» pour f la donnée à la fois d'un objet \mathbf{N} et d'un morphisme $n \in \text{Mor}(\mathbf{N}, \mathbf{A})$ tel que tout morphisme g de codomaine \mathbf{A} vérifiant $f \circ g = 0$, se factorise par n , i.e. il existe *un unique* h de codomaine \mathbf{N} tel que $g = n \circ h$. Soit graphiquement :

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbf{N} & \xrightarrow{n} & \mathbf{A} & \xrightarrow{f} & \mathbf{B} \\
 & \swarrow \exists! h & \uparrow g & & \nearrow 0_{M,B} \\
 & & \mathbf{M} & &
 \end{array}$$

Le morphisme $f \in \text{Mor}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ est dit «*injectif*» lorsque \mathbf{N} est un objet *nul*.

- On appelle «*conoyau*» pour f la donnée à la fois d'un objet \mathbf{C} et d'un morphisme $c \in \text{Mor}(\mathbf{B}, \mathbf{C})$ tel que tout morphisme g de domaine \mathbf{B} vérifiant $g \circ f = 0$, se factorise par c , i.e. il existe *un unique* h de domaine \mathbf{C} tel que $g = h \circ c$.

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbf{A} & \xrightarrow{f} & \mathbf{B} & \xrightarrow{c} & \mathbf{C} \\
 & \searrow 0_{A,M} & \downarrow g & & \swarrow \exists! h \\
 & & \mathbf{M} & &
 \end{array}$$

Le morphisme $f \in \text{Mor}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ est dit «*surjectif*» lorsque \mathbf{C} est un objet *nul*.

Remarque 8.3.2-1 : Les conditions d'existence de noyaux et conoyaux ne suffisent pas dans une catégorie additive, à elles toutes seules, à garantir qu'un morphisme à la fois injectif et surjectif est un isomorphisme. Cette conclusion résultera de l'axiome 8.3.2-2-Ab-2 des catégories abéliennes.

Définition 8.3.2-2 : Une catégorie «*abélienne*» est une catégorie *additive* dans laquelle :

- Ab-1) Tout morphisme possède un noyau et un conoyau.

Ab-2) Pour tout morphisme $f \in \text{Mor}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$, il existe un objet \mathbf{I} et une factorisation $f = q \circ p$ avec $p \in \text{Mor}(\mathbf{A}, \mathbf{I})$ et $q \in \text{Mor}(\mathbf{I}, \mathbf{B})$ tels que dans le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathbf{A} & \xrightarrow{f} & \mathbf{B} & & \\
 & \nearrow n & \parallel & & \parallel & \searrow c & \\
 \mathbf{N} & & \mathbf{A} & \xrightarrow{p} & \mathbf{I} & \xrightarrow{q} & \mathbf{B} & \xrightarrow{c} & \mathbf{C} \\
 & \searrow n & \parallel & & \parallel & \nearrow c & \\
 & & \mathbf{A} & \xrightarrow{p} & \mathbf{I} & \xrightarrow{q} & \mathbf{B} & \xrightarrow{c} & \mathbf{C}
 \end{array}
 \quad
 \left\{ \begin{array}{l}
 \bullet n \text{ est un noyau pour } f; \\
 \bullet c \text{ est un conoyau pour } f; \\
 \bullet p \text{ est un conoyau pour } n; \\
 \bullet q \text{ est un noyau pour } c.
 \end{array} \right.$$

Les couples (p, \mathbf{I}) et (\mathbf{I}, q) sont appelés respectivement «*image*» et «*coimage*» pour le morphisme f .

Exercice 8.3.2-1 : Montrez que dans une catégorie abélienne les isomorphismes sont précisément les morphismes à la fois injectifs et surjectifs.

Exercice 8.3.2-2 : Montrez que si \mathbf{C} est une catégorie additive (resp. abélienne) la catégorie opposée \mathbf{C}^{op} l'est également. (On dit que ces catégories sont autoduales.)

Exercice 8.3.2-3 : Indiquez quelles catégories dans la liste 8.1-1 sont additives et possèdent des noyaux et conoyaux.

Lorsque des choix “canoniques” des noyaux et conoyaux existent pour tous les morphismes d'une catégorie abélienne \mathbf{C} (comme c'est le cas dans les catégories de modules), nous pouvons définir le «*foncteur de cohomologie*» : $H^* : \mathbf{C}(\mathbf{C}) \rightsquigarrow \mathbf{C}^{\mathbb{Z}}$ en posant :

$$H^j(\mathbf{A}^*, d_*) := \text{coker}(\bar{d}_{i-1} : \mathbf{A}^{i-1} \rightarrow \ker(d_i)),$$

où \bar{d}_{i-1} désigne le morphisme factorisant d_{i-1} à travers $\ker(d_i)$.

Remarque 8.3.2-2 et exercice : Nous avons déjà signalé que l'additivité était une propriété des catégories héritée par les catégories des multi-complexes différentiels gradués d'objets. L'existence des noyaux et conoyaux (et même des choix canoniques de ces objets) l'est également. Ceci résulte de l'observation, élémentaire en catégories de modules, que lors d'un morphisme de complexes différentiels gradués, la différentielle induit une structure canonique de complexe différentiel gradué sur la suite des noyaux et conoyaux calculés terme-à-terme; les objets ainsi construits, munis des morphismes d'injection canonique et de projection canonique, sont alors des noyau et conoyau (canoniques) dans la catégorie de complexes différentiels gradués.

8.3.3 Exactitude des foncteurs additifs sur les catégories (de complexes) de modules

⁽³¹⁾Considérons un foncteur *additif* \mathbf{F} entre deux catégories de complexes de modules \mathbf{C} et \mathbf{D} . Comme \mathbf{F} induit des foncteurs sur $\mathbf{C}^*(\mathbf{C})$ et $\mathbf{C}^{\mathbb{Z}}$ et que le foncteur cohomologie est bien défini, on

³¹ Toutes les considérations de ce paragraphe sont valables pour les catégories abéliennes en général. Une difficulté essentielle dans les catégories abéliennes vient du manque de la notion d'*élément d'un objet* fort commode pour étudier le comportement des morphismes.

obtient un diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C}^*(\mathcal{C}) & \xrightarrow{\mathbf{F}} & \mathbf{C}^*(\mathcal{D}) \\ H^* \downarrow & & \downarrow H^* \\ \mathcal{C}^{\mathbb{Z}} & \xrightarrow{\mathbf{F}} & \mathcal{D}^{\mathbb{Z}} \end{array}$$

Définition 8.3.3-1 : Le foncteur additif \mathbf{F} est dit « exact » si le diagramme précédent est commutatif à isomorphisme naturel près, i.e. s'il existe un isomorphisme naturel reliant les foncteurs $H^* \circ \mathbf{F}$ et $\mathbf{F} \circ H^*$.

Définition 8.3.3-2 : Un complexe d'objets d'une catégorie abélienne est dit « exact » si toutes ses cohomologies sont nulles.

Un complexe exact de la forme $\cdots \rightarrow \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{0} \cdots$ est dit une « suite exacte courte ».

Proposition 8.3.3-1 : Les conditions suivantes sont équivalentes pour un foncteur additif \mathbf{F} entre catégories abéliennes.

- ▶ \mathbf{F} est exact.
- ▶ \mathbf{F} transforme un complexe exact en un complexe exact.
- ▶ \mathbf{F} transforme une suite exacte courte en une suite exacte courte.

Sa démonstration résulte des considérations suivantes que bien que nous exposons dans le cadre d'une catégorie de modules, se transposent à toute catégorie abélienne.

Soit (\mathbf{A}^*, d_*) un complexe de \mathcal{A} -modules, et considérons pour chaque $j \in \mathbb{Z}$, le diagramme commutatif suivant, où les lignes et colonnes sont des complexes :

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow \\ 0 & \rightarrow & I^j & \xrightarrow{p_j} & K^j & \xrightarrow{q_j} & H^j \rightarrow 0 & & I^{j+1} \\ & & \beta_{j-1} \uparrow & & \alpha_j \downarrow & & \beta_{j+1} \uparrow & & \\ \dots & \xrightarrow{d_{j-2}} & \mathbf{A}^{j-1} & \xrightarrow{d_{j-1}} & \mathbf{A}^j & \xrightarrow{d_j} & \mathbf{A}^{j+1} & \xrightarrow{d_{j+1}} & \dots & (\ddagger) \\ & & \alpha_{j-1} \uparrow & & \beta_j \downarrow & & \alpha_{j+1} \uparrow & & \\ & & K^{j-1} & & 0 \rightarrow I^{j+1} & \xrightarrow{p_{j+1}} & K^{j+1} & \xrightarrow{q_{j+1}} & H^{j+1} \rightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow & & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

Définition 8.3.3-3 : Une suite “courte” de modules (la composition de deux morphismes successifs étant nulle) :

$$0 \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_3 \rightarrow 0,$$

est dite «*exacte à gauche*» lorsque sa cohomologie aux termes 1, 2 est nulle, «*exacte à droite*» lorsque c’est le cas aux termes 2, 3.

Ceci étant, on repère cinq suites courtes dans le diagramme (‡), deux horizontales et trois verticales. Nous allons introduire des morphismes *naturels* entre H^* et $H^*(\mathbf{A}^*, d_*)$

Lorsque les suites courtes de (‡) sont toutes exactes à **droite**. On construit un morphisme fonctoriel sur la catégorie des diagrammes de la forme (‡) entre :

$$H^j \longrightarrow H^j(\mathbf{A}^*, d_*).$$

Voici comment : la surjectivité de q_j permet de relever tout élément de H^j . Soit $h \in H^j$ et posons $q_j(k) = h$. L’élément $\alpha_j(k)$ est alors un cocycle car $d_j \circ \alpha_j(k) = \alpha_{j+1} \circ p_{j+1} \circ \beta_j \circ \alpha_j(k) = 0$, puisque $\beta_j \circ \alpha_j = 0$. D’autre part si k' est un autre relèvement de h , l’exactitude en K^j de la suite exacte courte horizontale garantit que la différence $k - k'$ appartient à l’image de p_j , et même à l’image de $p_j \circ \beta_{j-1}$, puisque β_{j-1} est surjective. Il s’ensuit que l’élément $\alpha_j(k - k')$ appartient à l’image de $\alpha_j \circ p_j \circ \beta_{j-1} = d_{j-1}$. Par conséquent, l’élément que nous associons à $h \in H^j$ dans $H^j(\mathbf{A}^*)$ était bien défini.

Exercice 8.3.3-1 :

- ▶ Etudiez le problème de la naturalité de cette construction.
- ▶ Faites le cas où toutes les suites courtes sont exactes à gauche pour définir un morphisme naturel $H^j(\mathbf{A}^*) \rightarrow H^j$.
- ▶ Montrez, pour terminer, que ces morphismes sont inverses l’un de l’autre lorsque toutes les suites courtes sont *exactes*.

Exercice 8.3.3-2 : Définissez les suites courtes de (‡) de manière à ce que $K^* = \ker(d_*)$, $I^* = \text{im}(d_{*-1})$ et $H^* = H^*(\mathbf{A}^*, d_*)$. Donnez la démonstration de la proposition 8.3.3-1.

Remarque 8.3.3-1 et définitions : Un foncteur covariant \mathbf{F} entre deux catégories abéliennes est dit «*exact à droite*» lorsqu’il transforme toute suite exacte courte en une suite exacte à droite. Il est dit «*exact à gauche*» s’il transforme toute suite exacte courte en une suite exacte à gauche.

Les remarques qui précèdent montrent que pour tout foncteur \mathbf{F} exact à droite, il existe une transformation naturelle entre les foncteurs

$$\mathbf{F} \circ H^* \rightarrow H^* \circ \mathbf{F},$$

et *vice-versa* lorsque le foncteur est exact à gauche.

Exercice 8.3.3-3 : Indiquez dans la liste des foncteurs 8.2.5-1, ceux qui sont additifs, puis exacts.

Exercice 8.3.3-4 : Le foncteur de cohomologie est un foncteur additif de $\mathbf{C}^*(\text{Mod}(\mathcal{A}))$ vers $\text{Mod}^{\mathbb{Z}}(\mathcal{A})$. Est-il exact ?

8.3.4 Exactitude des foncteurs additifs dans les catégories d'espaces vectoriels

Soit k un corps abstrait et notons $\text{Vec}(k)$ la catégorie des espaces vectoriels sur k , où les morphismes sont les applications k -linéaires.

Proposition 8.3.4-1 : *Un foncteur additif de $\text{Vec}(k)$ vers une catégorie abélienne quelconque est toujours exact.*

Démonstration : Commençons par quelques rappels généraux. Soit \mathcal{A} un anneau arbitraire. Une suite exacte courte de \mathcal{A} -modules :

$$0 \longrightarrow \mathbf{A} \xrightarrow{p} \mathbf{B} \xrightarrow{q} \mathbf{C} \longrightarrow 0,$$

est dite « *scindée* » s'il existe un morphisme de \mathcal{A} -modules $\sigma : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{B}$ tel que $\sigma \circ q = \text{id}_{\mathbf{C}}$; un tel morphisme est appelé une « *section* » de q . Dans ce cas, le morphisme $b \in \mathbf{B} \mapsto b - \sigma \circ q(b)$ est à valeurs dans $\text{im}(p)$ et définit donc un morphisme $\pi_{\sigma} : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A}$ vérifiant $\pi_{\sigma} \circ p = \text{id}_{\mathbf{A}}$. Un tel morphisme est appelé une « *rétraction* » de p . L'existence de rétractions et de sections sont des phénomènes équivalents, et lorsqu'ils ont lieu les morphismes $p + \sigma : \mathbf{A} \oplus \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{B}$ et $\pi_{\sigma} \oplus q : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{A} \oplus \mathbf{C}$ sont inverses l'un de l'autre.

Ceci étant, démontrez qu'un foncteur *additif* transforme toujours une suite exacte scindée en suite scindée (donc exacte).

Or, dans la catégorie des espaces vectoriels, le théorème d'existence de bases garantit que toute suite exacte courte *est scindée*. Tout foncteur additif sur $\text{Vec}(k)$ préservera, par conséquent, l'exactitude des suites exactes courtes, et sera, d'après 8.3.3-1, *exact*. ■

Remarque 8.3.4-1 : Cette dernière proposition est également vraie si l'on remplace $\text{Vec}(k)$ par la catégorie $\text{Vec}^{\Delta}(k)$ d'espaces vectoriels Δ -gradués (morphismes de degré 0 pour simplifier). Par contre, il faut bien prendre garde du fait qu'elle est **fausse** lorsque l'on remplace $\text{Vec}(k)$ par la catégorie $\mathbf{C}^*(\text{Vec}(k))$ des complexes d'espaces vectoriels. La raison étant que si toute suite exacte courte de complexes admet un scindage *en tant que suite exacte courte espaces vectoriels gradués*, il n'existe pas toujours de scindage commutant aux différentielles, *i.e.* de scindage *dans* la catégorie $\mathbf{C}^*(\text{Vec}(k))$.

Exercice 8.3.4-1.1 : Voici un exemple illustrant cette difficulté : Pour tout k -espace vectoriel \mathbf{V} , la suite de complexes (verticaux) suivante est exacte dans la catégorie $\mathbf{C}^*(\text{Vec}(k))$:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathbf{0} \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathbf{V} & \xrightarrow{\text{id}_{\mathbf{V}}} & \mathbf{V} & \longrightarrow & \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathbf{0} \\
 & & \uparrow & & \text{id}_{\mathbf{V}} \uparrow & & \uparrow & & \\
 \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathbf{V} & \xrightarrow{\text{id}_{\mathbf{V}}} & \mathbf{V} & \longrightarrow & \mathbf{0} \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathbf{0} \\
 \hline \hline
 \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathbf{A}^* & \xrightarrow{p^*} & \mathbf{B}^* & \xrightarrow{q^*} & \mathbf{C}^* & \longrightarrow & \mathbf{0}
 \end{array}$$

Montrez que pour peu que $\dim_k(\mathbf{V}) > 0$, il n'existe pas de section σ_* pour le morphisme de complexes q_* , commutant aux différentielles (flèches verticales).

8.3.5 Homotopies

Revenons sur la notion de “suite courte de \mathcal{A} -modules *scindée*” introduite dans le paragraphe précédent. La donnée :

$$0 \longrightarrow \mathbf{A} \begin{array}{c} \xrightarrow{p} \\ \xleftarrow{\pi_\sigma} \end{array} \mathbf{B} \begin{array}{c} \xrightarrow{q} \\ \xleftarrow{\sigma} \end{array} \mathbf{C} \longrightarrow 0,$$

se représente classiquement sous la forme suivante de diagramme :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \xrightarrow{0} & \mathbf{A} & \xrightarrow{p} & \mathbf{B} & \xrightarrow{q} & \mathbf{C} & \xrightarrow{0} & 0 \\ & \searrow 0 & \downarrow \text{id}_A & \swarrow \pi_\sigma & \downarrow \text{id}_B & \swarrow \sigma & \downarrow \text{id}_C & \searrow 0 & \\ 0 & \xrightarrow{0} & \mathbf{A} & \xrightarrow{p} & \mathbf{B} & \xrightarrow{q} & \mathbf{C} & \xrightarrow{0} & 0 \end{array}$$

où l'on constate les égalités :

$$\begin{cases} 0 \circ 0 + \pi_\sigma \circ p = \text{id}_A ; \\ p \circ \pi_\sigma + \sigma \circ q = \text{id}_B ; \\ q \circ \sigma + 0 \circ 0 = \text{id}_C . \end{cases}$$

Ce type de données constitue ce que l'on appelle une *homotopie*.

Définition 8.3.5-1 : Soient \mathcal{C} une catégorie *additive*, et $(\mathbf{A}^*, d(\mathbf{A})_*)$ et $(\mathbf{B}^*, d(\mathbf{B})_*)$ deux complexes d'objets de \mathcal{C} (i.e. deux objets de $\mathbf{C}^*(\mathcal{C})$). On dit de deux morphismes de complexes f_* et g_* de $(\mathbf{A}^*, d(\mathbf{A})_*)$ vers $(\mathbf{B}^*, d(\mathbf{B})_*)$ qu'ils sont «*homotopes*», lorsqu'il existe une famille de morphismes $h_j \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathbf{A}_j, \mathbf{B}_{j-1})$, où $j \in \mathbb{Z}$, telle que :

$$d(\mathbf{B})_{j-1} \circ h_j + h_{j+1} \circ d(\mathbf{A})_j = f_j - g_j, \quad \text{pour tout } j \in \mathbb{Z}. \quad (h)$$

On a donc un diagramme de la forme :

$$\begin{array}{cccccccccccc} \xrightarrow{d(\mathbf{A})_{j-3}} & \mathbf{A}_{j-2} & \xrightarrow{d(\mathbf{A})_{j-2}} & \mathbf{A}_{j-1} & \xrightarrow{d(\mathbf{A})_{j-1}} & \mathbf{A}_j & \xrightarrow{d(\mathbf{A})_j} & \mathbf{A}_{j+1} & \xrightarrow{d(\mathbf{A})_{j+1}} & \mathbf{A}_{j+2} & \xrightarrow{d(\mathbf{A})_{j+2}} & \\ & \searrow h_{j-2} & \downarrow (f-g)_{j-2} & \swarrow h_{j-1} & \downarrow (f-g)_{j-1} & \downarrow h_j & \downarrow (f-g)_j & \swarrow h_{j+1} & \downarrow (f-g)_{j+1} & \swarrow h_{j+2} & \downarrow (f-g)_{j+2} & \\ \xrightarrow{d(\mathbf{B})_{j-3}} & \mathbf{B}_{j-2} & \xrightarrow{d(\mathbf{B})_{j-2}} & \mathbf{B}_{j-1} & \xrightarrow{d(\mathbf{B})_{j-1}} & \mathbf{B}_j & \xrightarrow{d(\mathbf{B})_j} & \mathbf{B}_{j+1} & \xrightarrow{d(\mathbf{B})_{j+1}} & \mathbf{B}_{j+2} & \xrightarrow{d(\mathbf{B})_{j+2}} & \end{array}$$

L'un des intérêts le plus remarquables des homotopies vient du résultat suivant (vrai sur les catégories abéliennes en général).

Proposition 8.3.5-1 : Soient (\mathbf{A}^*, d_*) et (\mathbf{B}^*, d_*) deux complexes de \mathcal{A} -modules. Deux morphismes de complexes f_* et g_* (\mathbf{A}^*, d_*) et (\mathbf{B}^*, d_*) homotopes, induisent le même morphisme en cohomologie, i.e. les morphismes :

$$H(f)_* : H^*(\mathbf{A}^*, d_*) \rightarrow H^*(\mathbf{B}^*, d_*) \quad \text{et} \quad H(g)_* : H^*(\mathbf{A}^*, d_*) \rightarrow H^*(\mathbf{B}^*, d_*),$$

sont identiques.

Démonstration : En effet, pour chaque $j \in \mathbb{Z}$, l'égalité $(f - g)_j = d(\mathbf{B})_{j-1} \circ h_j + h_{j+1} \circ d(\mathbf{A})_j$ appliquée à un j -cocycle ξ de (\mathbf{A}^*, d_*) montre que $(f - g)_j(\xi)$ est un j -cobord de (\mathbf{B}^*, d_*) ; il s'ensuit que $0 = H(f - g)_j = H(f)_j - H(g)_j$. ■

Définition 8.3.5-2 : Un complexe de modules est dit « *homotope à zéro* » lorsque le morphisme “identité” est homotope au “morphisme nul”.

La cohomologie d'un complexe de modules homotope à zéro est donc nulle en tous degrés et un tel complexe est nécessairement *exact*. L'équivalence entre “complexes homotopes à zéro” et “complexes exacts” est **fausse en générale**, pourtant l'exemple du scindage d'une suite exacte courte d'espaces vectoriels se généralise, dans un premier temps, de façon inductive à tout complexe d'espaces vectoriels bornée à droite ou à gauche; puis à un complexe arbitraire. La question (a) de l'exercice suivant révèle un phénomène d'extrême importance en catégories *dérivées*, la première partie en rapport avec les objets *injectifs* et la seconde avec les objets *projectifs*. Il s'avère que les objets de $\text{Vec}(k)$ sont précisément de ces deux types simultanément.

Exercice 8.3.5-1 : Soit (\mathbf{V}_*, d_*) un complexe *exact* de k -espaces vectoriels.

a) Montrer que les deux complexes suivants sont homotopes à zéro :

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & \ker(d_0) & \longrightarrow & \mathbf{V}_0 & \xrightarrow{d_0} & \mathbf{V}_1 & \xrightarrow{d_1} & \mathbf{V}_2 & \xrightarrow{d_2} & \mathbf{V}_3 & \xrightarrow{d_3} & \dots, \\ \dots & \longrightarrow & \mathbf{V}_{-4} & \xrightarrow{d_{-4}} & \mathbf{V}_{-3} & \xrightarrow{d_{-3}} & \mathbf{V}_{-2} & \xrightarrow{d_{-2}} & \mathbf{V}_{-1} & \xrightarrow{d_{-1}} & \ker(d_0) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

b) Reliez les homotopies de (a) en une homotopie pour (\mathbf{V}_*, d_*) .

Revenons encore sur la notion d'homotopie en observant attentivement les catégories qui entrent en jeu dans sa définition.

Les complexes $(\mathbf{A}^*, d(\mathbf{A})_*)$ et $(\mathbf{B}^*, d(\mathbf{B})_*)$ sont des objets de $\mathbf{C}^*(\mathcal{C})$, et lorsque l'on oublie leurs différentielles, \mathbf{A}^* et \mathbf{B}^* sont des objets de $\mathcal{C}^{\mathbb{Z}}$, auquel cas $d(\mathbf{A}) \in \text{Mor}_{\mathcal{C}^{\mathbb{Z}}}^{[1]}(\mathbf{A}^*, \mathbf{A}^*)$ et *mutatis mutandis* pour \mathbf{B}^* . D'autre part, f_* et g_* définissent des éléments de $\text{Mor}_{\mathcal{C}^{\mathbb{Z}}}^{[0]}(\mathbf{A}^*, \mathbf{B}^*)$. On demande alors à la famille $\{h_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ *seulement* d'être un morphisme $h \in \text{Mor}_{\mathcal{C}^{\mathbb{Z}}}^{[-1]}(\mathbf{A}^*, \mathbf{B}^*)$. La condition d'homotopie (h) est donc une condition *dans la catégorie* $\mathcal{C}^{\mathbb{Z}}$ donnée par :

$$h \circ d(\mathbf{A}) + d(\mathbf{B}) \circ h = f - g. \tag{h'}$$

Soit maintenant \mathbf{F} un foncteur *additif* de la catégorie \mathcal{C} vers une catégorie \mathcal{D} (additive). Nous avons déjà remarqué que ce foncteur induit deux autres foncteurs, également additifs, $\mathbf{F} : \mathbf{C}^*(\mathcal{C}) \rightsquigarrow \mathbf{C}^*(\mathcal{C})$ et $\mathbf{F} : \mathcal{C}^{\mathbb{Z}} \rightsquigarrow \mathcal{D}^{\mathbb{Z}}$. Or, l'*additivité* est précisément l'ingrédient nécessaire pour la conservation de la relation d'homotopie (h'), *i.e.* :

$$\mathbf{F}[h \circ d(\mathbf{A}) + d(\mathbf{B}) \circ h] = \mathbf{F}[f - g], \quad \text{soit} \quad \mathbf{F} h \circ d(\mathbf{F} \mathbf{A}) + d(\mathbf{F} \mathbf{B}) \circ \mathbf{F} h = \mathbf{F} f - \mathbf{F} g.$$

Nous avons ainsi démontré le résultat suivant qui relève l'importance, à la fois de la notion d'homotopie et des catégories et foncteurs additifs :

Lemme 8.3.5-2 : *Les foncteurs additifs définis sur une catégorie additive \mathcal{C} , transforment des morphismes homotopes de la catégorie $\mathbf{C}^*(\mathcal{C})$ en des morphismes homotopes.*

De tels foncteurs transforment, en particulier, des complexes homotopes à zéro en des complexes homotopes à zéro.

Remarque 8.3.5-1 : La définition d'homotopie et le lemme précédent peuvent être généralisés de façon évidente au contexte suivant. Soit \mathbf{F} un foncteur additif entre deux catégories additives \mathcal{C} et \mathcal{D} . Pour toute petite catégorie \mathcal{P} , notons \mathcal{P}° la sous-catégorie de \mathcal{P} comportant les mêmes objets mais ne comportant aucun autre morphisme que les identités de \mathcal{P} (la catégorie \mathcal{P}° est donc équivalente à l'ensemble d'objets de \mathcal{P}). Etant donné maintenant un complexe (\mathbf{A}^*, d_*) d'objets de $\text{Fonct}(\mathcal{P}, \mathcal{C})$, il suffira de demander des homotopies *au niveau de chaque objet* de \mathcal{P} (la définition d'homotopie a donc lieu dans la catégorie $\text{Fonct}(\mathcal{P}^\circ, \mathcal{C})$) pour pouvoir conclure que le complexe $\mathbf{F}(\mathbf{A}^*, d_*)$ dans $\mathbf{C}^*(\text{Fonct}(\mathcal{P}, \mathcal{D}))$ est lui aussi homotope à zéro.

Une manière d'illustrer cette remarque est la suivante : Un complexe exact de multicomplexes d'espaces vectoriels est, d'après l'exercice 8.3.5-1, scindé *au niveau de chaque multidegré*. L'application d'un foncteur additif quelconque, *induit à partir d'un foncteur additif de la catégorie $\text{Vec}(k)$* , transformera le complexe en question en un complexe exact.

Réciproquement, si le complexe obtenu en appliquant un foncteur additif, n'est pas exact, cela signifie nécessairement que ce foncteur ne dépend pas seulement des objets du multicomplexe, mais fait intervenir également ses différentielles. Le foncteur qui associe à un complexe sa cohomologie est l'exemple typique de cette situation, mais là la dépendance est claire.

Bien entendu, lorsque les catégories considérées sont abéliennes la notion d'homotopie donne des conditions très efficaces pour garantir la nullité des cohomologies non seulement d'un complexe mais aussi des complexes obtenus en lui appliquant un foncteur additif *arbitraire*.

8.4 Limites

8.4.1 Systèmes inductifs et projectifs

Définition 8.4.1-1 : Soient $\mathcal{A}\mathbf{b}$ une catégorie abélienne et \mathcal{J} une petite catégorie (³²). On appellera « *système inductif de $\mathcal{A}\mathbf{b}$* » (resp. « *système projectif* ») la donnée d'un foncteur **covariant** (resp. **contra-variant**) $\mathcal{F} : \mathcal{J} \rightsquigarrow \mathcal{A}\mathbf{b}$. On référera aux objets de \mathcal{J} comme étant les « *indices* » du système inductif (resp. projectif).

³² Une définition où $\mathcal{A}\mathbf{b}$ et \mathcal{J} sont des catégories quelconques est bien entendu possible, mais une telle généralité sera inutile pour ce cours.

Plus généralement, on appellera « *catégorie de systèmes inductifs de $\mathcal{A}b$ indexés par la catégorie \mathcal{J}* », la catégorie $\text{Fonct}(\mathcal{J}, \mathcal{A}b)$ des foncteurs covariants de \mathcal{J} vers $\mathcal{A}b$. On notera cette catégorie de préférence : $\text{Ind}(\mathcal{J}, \mathcal{A}b)$.

On définit *mutatis mutandis* la catégorie $\text{Prj}(\mathcal{J}, \mathcal{A}b)$ de « *systèmes projectifs de $\mathcal{A}b$ indexés par la catégorie \mathcal{J}* ».

Remarque 8.4.1-1 : Lorsque la catégorie \mathcal{J} est la catégorie associée à un ensemble partiellement ordonné (\mathfrak{A}, \preceq) on retrouve les notions habituelles de systèmes inductifs et projectifs (cf. 8.2.4 page 110).

Exercice 8.4.1-1 : Montrer que la catégorie des systèmes inductifs de $\mathcal{A}b$ (resp. projectifs) indexés par la petite catégorie \mathcal{J} est une catégorie abélienne.

Systèmes inductifs et projectifs constants

Pour tout objet M de $\mathcal{A}b$, le « *foncteur constant \mathcal{K}_M* » qui fait correspondre à tout indice $\alpha \in \text{Ob}(\mathcal{J})$ l'objet M et à tout morphisme d'indices le morphisme id_M , définit à la fois un système inductif et projectif. La correspondance qui associe $M \rightsquigarrow \mathcal{K}_M$ et qui fait correspondre à $\varphi \in \text{Mor}_{\mathcal{A}b}(M_1, M_2)$ la transformation naturelle $\mathcal{K}_\varphi : \alpha \rightsquigarrow (\varphi : \mathcal{K}_{M_1}(\alpha) \rightarrow \mathcal{K}_{M_2}(\alpha))$ est alors un foncteur covariant et une *équivalence de catégories* de $\mathcal{A}b$ vers la sous-catégorie pleine de $\text{Ind}(\mathcal{J}; \mathcal{A}b)$ (resp. de $\text{Prj}(\mathcal{J}; \mathcal{A}b)$) des foncteurs constants. Dans la suite, nous noterons de manière indistincte les objets et morphismes de cette sous-catégorie et ceux de $\mathcal{A}b$; les notations ' \mathcal{K}_M ' et ' \mathcal{K}_φ ' seront donc remplacées par ' M ' et ' φ ' lorsque le contexte ne pourra induire à confusion.

Définition 8.4.1-2 : Pour tout système inductif $\mathcal{F} \in \text{Ob}(\text{Ind}(\mathcal{J}; \mathcal{A}b))$, on appelle « *limite* » de \mathcal{F} , la donnée d'un objet $\varinjlim(\mathcal{F}) \in \text{Ob}(\mathcal{A}b)$ et d'une transformation naturelle de foncteurs $\Theta(\mathcal{F}) : \mathcal{F} \rightsquigarrow \mathcal{K}_{\varinjlim(\mathcal{F})}$ vérifiant la propriété universelle suivante :

- Pour tout objet $N \in \text{Ob}(\mathcal{A}b)$ et toute transformation naturelle $\Phi : \mathcal{F} \rightsquigarrow \mathcal{K}_N$, il existe un, et un seul, morphisme $\varphi \in \text{Mor}_{\mathcal{A}b}(\varinjlim(\mathcal{F}), N)$ tel que $\Phi = \varphi \circ \Theta(\mathcal{F})$.

En dualisant, on obtient la notion de limite d'un système projectif :

Pour tout système projectif $\mathcal{F} \in \text{Ob}(\text{Prj}(\mathcal{J}; \mathcal{A}b))$, on appelle « *limite* » de \mathcal{F} , la donnée d'un objet $\varprojlim(\mathcal{F}) \in \text{Ob}(\mathcal{A}b)$ et d'une transformation naturelle de foncteurs $\Theta(\mathcal{F}) : \mathcal{K}_{\varprojlim(\mathcal{F})} \rightsquigarrow \mathcal{F}$ vérifiant la propriété universelle suivante :

- Pour tout objet $N \in \text{Ob}(\mathcal{A}b)$ et toute transformation naturelle $\Phi : \mathcal{K}_N \rightsquigarrow \mathcal{F}$, il existe un, et un seul, morphisme $\varphi \in \text{Mor}_{\mathcal{A}b}(N, \varprojlim(\mathcal{F}))$ tel que $\Phi = \Theta(\mathcal{F}) \circ \varphi$.

Le lemme suivant est alors facile à prouver et est laissé en exercice.

Lemme 8.4.1-1 : Un système inductif de $\text{Ind}(\mathcal{J}; \mathcal{A}b)$ (resp. projectif de $\text{Prj}(\mathcal{J}; \mathcal{A}b)$) admet au plus une limite (à isomorphisme près).

Définition 8.4.1-3 : On dit qu'une catégorie abélienne $\mathcal{A}b$ «*possède des limites inductives*» lorsque *quelle que soit* la petite catégorie \mathcal{J} , tout système inductif de $\text{Ind}(\mathcal{J}; \mathcal{A}b)$ admet une limite.

De manière analogue, on dit que la catégorie $\mathcal{A}b$ «*possède des limites projectives*» lorsque *quelle que soit* la petite catégorie \mathcal{J} , tout système projectif de $\text{Prj}(\mathcal{J}; \mathcal{A}b)$ admet une limite.

Enfin, on dira que $\mathcal{A}b$ «*possède des limites*» lorsqu'elle possède, à la fois, des limites inductives et projectives.

Étude générale de la limite inductive

Supposons que $\mathcal{A}b$ possède des limites inductives. Soient $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \text{Ob}(\text{Ind}(\mathcal{J}, \mathcal{A}b))$ deux systèmes inductifs et soit $\mu : \mathcal{F} \rightsquigarrow \mathcal{G}$ une transformation naturelle. On a alors une transformation naturelle composée :

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\mu} \mathcal{G} \xrightarrow{\Theta(\mathcal{G})} \mathcal{K}_{\varinjlim}(\mathcal{G})$$

d'où une transformation naturelle canonique $\varinjlim(\mu) : \mathcal{K}_{\varinjlim}(\mathcal{F}) \rightsquigarrow \mathcal{K}_{\varinjlim}(\mathcal{G})$ rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{\mu} & \mathcal{G} \\ \Theta(\mathcal{F}) \downarrow & & \downarrow \Theta(\mathcal{G}) \\ \varinjlim(\mathcal{F}) & \xrightarrow{\varinjlim(\mu)} & \varinjlim(\mathcal{G}) \end{array}$$

Proposition 8.4.1-2 : Soit $\mathcal{A}b$ une catégorie de modules (plus généralement de multicomplexes de modules).

- La catégorie $\mathcal{A}b$ admet des limites inductives.
- Pour tout système inductif $\mathcal{F} \in \text{Ob}(\text{Ind}(\mathcal{J}; \mathcal{A}b))$, il existe un choix canonique pour $\varinjlim(\mathcal{F})$ et pour la transformation naturelle $\Theta(\mathcal{F}) : \mathcal{F} \rightsquigarrow \mathcal{K}_{\varinjlim}(\mathcal{F})$.
- Pour toute transformation naturelle de systèmes inductifs $\mu : \mathcal{F} \rightsquigarrow \mathcal{G}$, il existe un choix canonique pour le morphisme $\varinjlim(\mu) \in \text{Mor}_{\mathcal{A}b}(\varinjlim(\mathcal{F}), \varinjlim(\mathcal{G}))$.
- La correspondance $\varinjlim : \text{Ind}(\mathcal{J}; \mathcal{A}b) \rightsquigarrow \mathcal{A}b$ qui fait correspondre $\mathcal{F} \rightsquigarrow \varinjlim(\mathcal{F})$ et $\mu \rightsquigarrow \varinjlim(\mu)$ est fonctorielle additive et exacte **à droite**.

Démonstration : L'assertion (a) sera conséquence du fait que les catégories de modules (et plus généralement les catégories de multicomplexes de modules) possèdent des sommes directes de familles arbitrairement indexées (cf. exercice 8.4.1-2 pour l'équivalence). L'idée de la construction est la suivante.

Donnons nous une petite catégorie \mathcal{J} d'ensemble d'objets (indices) noté \mathfrak{A} . Soit $\mathcal{F} \in \text{Ob}(\text{Ind}(\mathcal{J}, \text{Mod}(\mathbf{A})))$. On considère le morphisme de \mathbf{A} -modules :

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{(\alpha, \beta) \in \mathfrak{A}^2} \left(\bigoplus_{\theta \in \text{Mor}_{\mathcal{J}}(\alpha, \beta)} \mathcal{F}(\alpha) \right) & \xrightarrow{\Pi(\mathcal{F})} & \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathcal{F}(\alpha) \xrightarrow{\nu(\mathcal{F})} \text{coker}(\Pi(\mathcal{F})) \rightarrow \mathbf{0} \\ x_{\alpha; \beta, \theta} & \longmapsto & (x_{\alpha}, -\mathcal{F}(\theta)(x_{\alpha})) \in \mathcal{F}(\alpha) \oplus \mathcal{F}(\beta) \end{array}$$

et l'on vérifie que la correspondance $\alpha \rightsquigarrow (\nu(\mathcal{F})|_{\mathcal{F}(\alpha)} : \mathcal{F}(\alpha) \rightarrow \text{coker}(\Pi(\mathcal{F})))$ définit une transformation naturelle $\Theta : \mathcal{F} \rightsquigarrow \mathcal{K}_{\text{coker}(\Pi(\mathcal{F}))}$.

Ceci étant, pour tout \mathbf{A} -module \mathbf{M} , la donnée d'une transformation naturelle $\Xi : \mathcal{F} \rightsquigarrow \mathcal{K}_{\mathbf{M}}$ équivaut à :

- $$\begin{cases} \text{a) se donner une famille d'homomorphismes } \mathcal{D} = \{\psi_\alpha : \mathbf{M}_\alpha \rightarrow \mathbf{M}\}_{\alpha \in \mathfrak{A}} \\ \text{b) telle que pour tout } \beta \in \mathfrak{A} \text{ et tout } \theta \in \text{Mor}_{\mathfrak{J}}(\alpha, \beta), \text{ on a } \psi_\alpha = \psi_\beta \circ \mathcal{F}(\theta). \end{cases}$$

Or, la famille \mathcal{D} définit le morphisme $\sum_{\alpha \in \mathfrak{A}} \psi_\alpha : \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathbf{M}_\alpha \rightarrow \mathbf{M}$, et l'on voit bien que les relations (b) assurent que $\sum_{\alpha \in \mathfrak{A}} \psi_\alpha$ s'annule sur l'image de $\Pi(\mathcal{F})$. Il s'ensuit qu'il existe un unique homomorphisme de \mathbf{A} -modules $\xi : \text{coker}(\Pi(\mathcal{F})) \rightarrow \mathbf{M}$ tel que $\Xi = \xi \circ \Theta$. Les assertions (a) et (b) de la proposition sont ainsi démontrées en posant :

$$\boxed{\varinjlim(\mathcal{F}) := \text{coker}(\Pi(\mathcal{F})) \quad \text{et} \quad \Theta(\mathcal{F}) := \Theta} \quad (*)$$

On retiendra l'existence d'une surjection canonique (naturelle) :

$$\boxed{\bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathcal{F}(\alpha) \xrightarrow{\nu(\mathcal{F})} \varinjlim(\mathcal{F})} \quad (\ddagger)$$

Pour (c), la donnée d'une transformation naturelle de systèmes inductifs $\mu : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$, donne lieu à un diagramme de \mathbf{A} -modules commutatif et **canonique** :

$$\begin{array}{ccccccc} \bigoplus_{(\alpha, \beta) \in \mathfrak{A}^2} \left(\bigoplus_{\theta \in \text{Mor}_{\mathfrak{J}}(\alpha, \beta)} \mathcal{F}(\alpha) \right) & \xrightarrow{\Pi(\mathcal{F})} & \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathcal{F}(\alpha) & \xrightarrow{\nu(\mathcal{F})} & \varinjlim(\mathcal{F}) & \rightarrow & \mathbf{0} \\ & & \downarrow \sum \mu(\alpha) & & \downarrow \sum \mu(\alpha) & & \downarrow \varinjlim(\mu) \\ \bigoplus_{(\alpha, \beta) \in \mathfrak{A}^2} \left(\bigoplus_{\theta \in \text{Mor}_{\mathfrak{J}}(\alpha, \beta)} \mathcal{G}(\alpha) \right) & \xrightarrow{\Pi(\mathcal{G})} & \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathcal{G}(\alpha) & \xrightarrow{\nu(\mathcal{G})} & \varinjlim(\mathcal{G}) & \rightarrow & \mathbf{0} \end{array}$$

où le morphisme $\varinjlim(\mu)$ est celui induit par les morphismes verticaux des deux premières colonnes.

La démonstration de l'additivité du foncteur \varinjlim est facile mais laborieuse à écrire ; nous la laissons aux soins du lecteur courageux. L'exactitude à droite est par contre plus intéressante.

On commence par remarquer que les correspondances de $\text{Ind}(\mathfrak{J}; \mathbf{Ab})$ vers \mathbf{Ab} :

$$\begin{array}{ll} \mathcal{F} \rightsquigarrow \bigoplus_{(\alpha, \beta) \in \mathfrak{A}^2} \left(\bigoplus_{\theta \in \text{Mor}_{\mathfrak{J}}(\alpha, \beta)} \mathcal{F}(\alpha) \right) & \text{et} \quad \mu \rightsquigarrow \sum_{(\alpha, \beta) \in \mathfrak{A}^2} \left(\sum_{\theta \in \text{Mor}_{\mathfrak{J}}(\alpha, \beta)} \mu(\alpha) \right) \\ \mathcal{F} \rightsquigarrow \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathcal{F}(\alpha) & \text{et} \quad \mu \rightsquigarrow \sum_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mu(\alpha) \end{array}$$

sont fonctorielles **additives et exactes**.

Soit maintenant $\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow \mathbf{0}$ une suite exacte de systèmes inductifs. On a le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \bigoplus_{(\alpha,\beta) \in \mathfrak{A}^2} \left(\bigoplus_{\theta \in \text{Mor}_{\mathfrak{J}}(\alpha,\beta)} \mathfrak{F}(\alpha) \right) & \xrightarrow{\Pi(\mathfrak{F})} & \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathfrak{F}(\alpha) & \xrightarrow{\nu(\mathfrak{F})} & \varinjlim(\mathfrak{F}) \rightarrow \mathbf{0} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \bigoplus_{(\alpha,\beta) \in \mathfrak{A}^2} \left(\bigoplus_{\theta \in \text{Mor}_{\mathfrak{J}}(\alpha,\beta)} \mathfrak{G}(\alpha) \right) & \xrightarrow{\Pi(\mathfrak{G})} & \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathfrak{G}(\alpha) & \xrightarrow{\nu(\mathfrak{G})} & \varinjlim(\mathfrak{G}) \rightarrow \mathbf{0} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \bigoplus_{(\alpha,\beta) \in \mathfrak{A}^2} \left(\bigoplus_{\theta \in \text{Mor}_{\mathfrak{J}}(\alpha,\beta)} \mathfrak{H}(\alpha) \right) & \xrightarrow{\Pi(\mathfrak{H})} & \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathfrak{H}(\alpha) & \xrightarrow{\nu(\mathfrak{H})} & \varinjlim(\mathfrak{H}) \rightarrow \mathbf{0} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0}
 \end{array}$$

où les trois lignes et deux premières colonnes sont exactes. La vérification de l'exactitude "à droite" de la colonne de droite se fait alors aisément par une chasse aux diagrammes que nous laissons en exercice. ■

Exercice 8.4.1-2 : Soit \mathfrak{A} un ensemble non vide et notons $(\mathcal{P}_f(\mathfrak{A}); \subseteq)$ l'ensemble des parties **non vides et finies** de \mathfrak{A} muni de l'ordre partiel d'inclusion. Pour chaque $\alpha \in \mathfrak{A}$, soit M_α un objet d'une catégorie abélienne $\mathcal{A}\mathbf{b}$. Soit le système inductif \mathfrak{F} de $\text{Ind}((\mathfrak{A}, \subseteq); \mathcal{A}\mathbf{b})$ défini par $\mathfrak{F}(F) := \bigoplus_{\alpha \in F} M_\alpha$, pour chaque partie finie $F \subseteq \mathfrak{A}$; puis si $\iota : F_1 \hookrightarrow F_2$ est l'inclusion canonique, $\mathfrak{F}(\iota) : \bigoplus_{\alpha \in F_1} M_\alpha \hookrightarrow \bigoplus_{\alpha \in F_2} M_\alpha$ désigne le morphisme d'inclusion canonique des sommes directes.

Montrer que si $\mathcal{A}\mathbf{b}$ admet des limites inductives la paire $(\varinjlim(\mathfrak{F}), \Theta(\mathfrak{F}))$ définit une somme directe pour la famille $\{M_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$.

Nous voyons donc que pour une catégorie abélienne, il y a équivalence entre les faits de posséder des somme directes de familles arbitraires et le fait de posséder des limites inductives.

Avertissement. Dans la suite de ce cours, à chaque fois que l'on considérera des catégories abéliennes abstraites, on supposera tacitement qu'elles possèdent des limites.

Étude générale de la limite projective

Résulte de dualiser le cas des limites projectives.

Supposons que $\mathcal{A}\mathbf{b}$ possède des limites projectives. Soient $\mathfrak{F}, \mathfrak{G} \in \text{Ob}(\text{Prj}(\mathfrak{J}, \mathcal{A}\mathbf{b}))$ deux systèmes projectifs et soit $\mu : \mathfrak{F} \rightsquigarrow \mathfrak{G}$ une transformation naturelle. On a alors une transformation naturelle composée :

$$\mathcal{K}_{\varinjlim(\mathfrak{F})} \xrightarrow{\Theta(\mathfrak{F})} \mathfrak{F} \xrightarrow{\mu} \mathfrak{G}$$

d'où une transformation naturelle canonique $\lim(\mu) : \mathcal{K}_{\lim(\mathcal{F})} \rightsquigarrow \mathcal{K}_{\lim(\mathcal{G})}$ rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \lim(\mathcal{F}) & \xrightarrow{\lim(\mu)} & \lim(\mathcal{G}) \\ \Theta(\mathcal{F}) \downarrow & & \downarrow \Theta(\mathcal{G}) \\ \mathcal{F} & \xrightarrow{\mu} & \mathcal{G} \end{array}$$

Proposition 8.4.1-3 : Soit $\mathcal{A}b$ une catégorie de modules (plus généralement de multicomplexes de modules).

- La catégorie $\mathcal{A}b$ admet des limites projectives.
- Pour tout système projectif $\mathcal{F} \in \text{Ob}(\text{Prj}(\mathcal{J}; \mathcal{A}b))$, il existe un choix canonique pour $\lim(\mathcal{F})$ et pour la transformation naturelle $\Theta(\mathcal{F}) : \mathcal{K}_{\lim(\mathcal{F})} \rightsquigarrow \mathcal{F}$.
- Pour toute transformation naturelle de systèmes projectifs $\mu : \mathcal{F} \rightsquigarrow \mathcal{G}$, il existe un choix canonique pour le morphisme $\lim(\mu) \in \text{Mor}_{\mathcal{A}b}(\lim(\mathcal{F}), \lim(\mathcal{G}))$.
- La correspondance $\lim : \text{Prj}(\mathcal{J}; \mathcal{A}b) \rightsquigarrow \mathcal{A}b$ qui fait correspondre $\mathcal{F} \rightsquigarrow \lim(\mathcal{F})$ et $\mu \rightsquigarrow \lim(\mu)$ est fonctorielle additive et exacte à gauche.

Indication : La démonstration est la même que pour la proposition 8.4.1-2 à ceci près que l'on doit renverser les flèches pour les systèmes projectifs et remplacer les sommes directes par des produits directs. ■

8.4.2 Exactitude du foncteur limite inductive

Définition 8.4.2-1 : Une catégorie \mathcal{C} est dite « filtrante »⁽³³⁾ lorsque les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- Pour chaque paire (M_1, M_2) d'objets de \mathcal{C} , il existe un objet N tel que $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(M_i, N) \neq \emptyset$.
- Pour toute paire d'objets (M, N) de \mathcal{C} et tout couple (θ_1, θ_2) de morphismes $\theta_i \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(M, N)$, il existe un objet I et un morphisme $\nu \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(N, I)$ vérifiant $\nu \circ \theta_1 = \nu \circ \theta_2$.

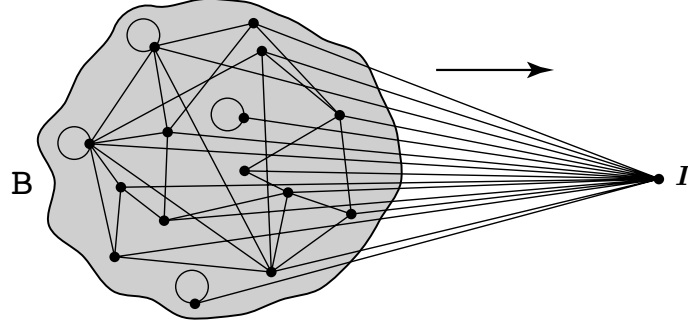
Exercice 8.4.2-1 : Montrer que la catégorie associée à un ensemble partiellement ordonné $(\mathcal{A}; \preceq)$ est filtrante, si et seulement si, pour tout couple d'éléments $(a, b) \in \mathcal{A}^2$ il existe un élément c vérifiant $a \preceq c$ et $b \preceq c$.

Exercice 8.4.2-2 : Soit \mathcal{C} une catégorie filtrante. Soient M, N_1 et N_2 trois objets de \mathcal{C} . Montrer que pour chaque donnée de deux morphismes $\theta_i \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(M, N_i)$ il existe un objet I et de morphismes $\mu_i \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(N_i, I)$ tels que l'on ait $\mu_1 \circ \theta_1 = \mu_2 \circ \theta_2$.

³³ On dira parfois « filtrante supérieurement » pour insister sur le sens de la filtration.

Lemme 8.4.2-1 (technique) : Soit \mathcal{C} une catégorie filtrante. Soit \mathcal{A} un ensemble fini de morphismes de \mathcal{C} . Notons \mathcal{B} l'ensemble (fini) de domaines et codomains des morphismes de \mathcal{A} . Il existe alors un objet $I \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ et pour chaque $P \in \mathcal{B}$ un morphisme $\pi_P \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(P, I)$ tels que l'on ait $\pi_{\text{Dom}(\theta)} = \pi_{\text{Codom}(\theta)} \circ \theta$, pour tout $\theta \in \mathcal{A}$.

Soit graphiquement :



où les points désignent des objets de \mathcal{C} , les traits à l'intérieur de la zone grisée désignent des morphismes (ou des ensembles finis de morphismes), dans un sens ou l'autre, et les traits menant à I désignent des morphismes de \mathcal{C} de codomaine I . Le lemme affirme l'existence des flèches menant à I de telle sorte que **tous** les sous-diagrammes "triangulaires" de sommet I soient commutatifs.

Démonstration : Remarquons dans un premier temps que le problème d'existence posé par ce lemme est équivalent à celui où l'on supposerait que \mathcal{A} contient les morphismes identiques pour tous les objets de \mathcal{B} . Nous allons admettre dans la suite cette hypothèse et raisonnerons par induction sur le cardinal du sous-ensemble \mathcal{A} de \mathcal{A} des morphismes *non identiques*.

Cardinal de \mathcal{A} nul. Dans ce cas une itération facile, à l'aide uniquement de la condition (a) des catégories filtrantes, suffit à prouver le lemme.

Cardinal de \mathcal{A} strictement positif. On enlève un morphisme non identique θ_0 de \mathcal{A} . Comme on a supposé que les morphismes identiques des domaines et codomains des morphismes de \mathcal{A} sont dans \mathcal{A} , l'ensemble \mathcal{B} n'est pas perturbé par le retrait de θ_0 . Nous pouvons supposer maintenant, par hypothèse inductive, l'existence d'un objet I_2 et d'une famille de morphismes $\{\pi'_P \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(P, I_2)\}_{P \in \mathcal{B}}$ satisfaisant les demandes du lemme pour tout morphisme de \mathcal{A} à l'exception près (éventuelle) de θ_0 . L'application du résultat de l'exercice 8.4.2-2 donne un objet I_1 et une paire de morphismes $\lambda \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(I_2, I_1)$ et $\xi_{\text{Codom}(\theta_0)} \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(\text{Codom}(\theta_0), I_1)$ tels que :

$$\xi_{\text{Codom}(\theta_0)} \circ \theta_0 = \lambda \circ \pi''_{\text{Dom}(\theta_0)}.$$

Ceci étant, la famille de morphismes $\{\pi'_P := \lambda \circ \pi''_P \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(P, I_1)\}_{P \in \mathcal{B}}$ continue de satisfaire les demandes du lemme pour tout morphisme de \mathcal{A} à exception près (éventuellement) de θ_0 . Sur l'objet $\text{Codom}(\theta_0)$ nous avons à présent deux morphismes de codomaine I_1 , à savoir $\pi'_{\text{Codom}(\theta_0)}$ et $\xi_{\text{Codom}(\theta_0)}$; l'application de la condition (b) des catégories filtrantes, donne alors un objet I et un morphisme $\mu \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(I_1, I)$ vérifiant :

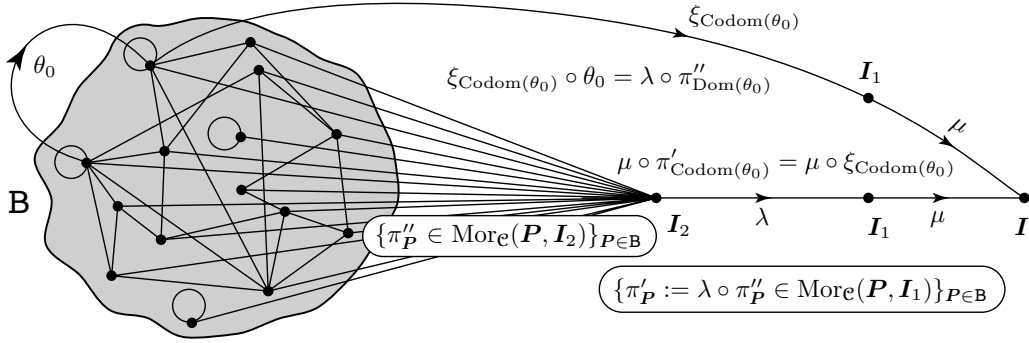
$$\mu \circ \pi'_{\text{Codom}(\theta_0)} = \mu \circ \xi_{\text{Codom}(\theta_0)}$$

On pose alors $\pi_P = \mu \circ \pi'_P$, pour chaque $P \in \mathcal{B}$. La famille $\{\pi_P\}_{P \in \mathcal{B}}$ continue de satisfaire les demandes du lemme pour tout morphisme de $\mathcal{A} \setminus \{\theta_0\}$. Pour θ_0 , on a

$$\pi_{\text{Codom}(\theta_0)} \circ \theta_0 = \mu \circ \pi'_{\text{Codom}(\theta_0)} \circ \theta_0 = \mu \circ \xi_{\text{Codom}(\theta_0)} \circ \theta_0 = \mu \circ \lambda \circ \pi''_{\text{Dom}(\theta_0)} = \pi_{\text{Dom}(\theta_0)},$$

ce qui prouve le lemme pour l'ensemble \mathcal{A} . ■

Illustration de la démonstration du lemme :



Remarque 8.4.2-1 : Le lemme technique précédent, dans le cas où la catégorie \mathcal{C} est la catégorie associée à un ensemble partiellement ordonné, admet une démonstration quasiment immédiate. L'exercice 8.4.2-1 montre que dans ce cas, il suffit que l'objet I majore tout élément de \mathcal{B} .

Théorème 8.4.2-2 : Soient \mathcal{J} une petite catégorie filtrante et \mathbf{Ab} une catégorie de modules (plus généralement de complexes de modules). Notons \mathfrak{A} l'ensemble d'objets de \mathcal{J} (des indices).

a) Soit \mathcal{F} un système inductif de $\text{Ind}(\mathcal{J}; \mathbf{Ab})$. Notons $\nu(\mathcal{F}) : \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathcal{F}(\alpha) \rightarrow \varinjlim (\mathcal{F})$ la surjection canonique (\ddagger) de la démonstration de la proposition 8.4.1-2.

- 1) Pour chaque $\omega \in \varinjlim (\mathcal{F})$, il existe un indice $\beta \in \mathfrak{A}$ et un élément $\varpi \in \mathcal{F}(\beta)$ tels que $\nu(\mathcal{F})(\varpi) = \omega$.
- 2) Pour chaque élément $\omega \in \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathcal{F}(\alpha)$, notons $\omega = \sum_{i=1}^{i=r} x_{\alpha_i}$ sa décomposition canonique avec $x_{\alpha_i} \in \mathcal{F}(\alpha_i)$. Un élément $\omega = \sum_{i=1}^{i=r} x_{\alpha_i}$ appartient au noyau de $\nu(\mathcal{F})$, si et seulement si, il existe $\beta \in \mathfrak{A}$ et des morphismes $\theta_1, \dots, \theta_r \in \text{Mor}_{\mathcal{J}}(\alpha_i, \beta)$, tels que :

$$\sum_{i=1}^{i=r} \mathcal{F}(\theta_i)(x_{\alpha_i}) = 0 \in \mathcal{F}(\beta).$$

b) Le foncteur $\varinjlim : \text{Ind}(\mathcal{J}; \mathbf{Ab}) \rightsquigarrow \mathbf{Ab}$ est *exact*.

Démonstration :

- a-1) Comme $\nu(\mathcal{F})$ est surjective, il existe un relèvement $\varpi_1 := \sum_{i=1}^{i=r} x_{\alpha_i}$ de ω . La propriété (a) des catégories filtrantes donne un indice β et des morphismes d'indices $\theta_i \in \text{Mor}_{\mathcal{J}}(\alpha_i, \beta)$, pour $i = 1, \dots, r$. L'élément ϖ_1 est alors équivalent, modulo l'image du morphisme $\Pi(\mathcal{F})$ (cf. démonstration de la proposition 8.4.1-2), à l'élément $\varpi := \sum_{i=1}^{i=r} \mathcal{F}(\theta_i)(x_{\alpha_i})$, et on a $\varpi \in \mathcal{F}(\beta)$.
- a-2) Dire que $\omega = \sum_{i=1}^{i=r} x_{\alpha_i}$ appartient au noyau de $\nu(\mathcal{F})$ signifie qu'il existe des morphismes $\theta_1, \dots, \theta_s$ et des éléments $y_{\text{Dom}(\theta_i)}$, pour $i = 1, \dots, s$ tels que :

$$\sum_{j=1}^{j=s} y_{\text{Dom}(\theta_j)} - \mathcal{F}(\theta_i)(y_{\text{Dom}(\theta_j)}) = \sum_{i=1}^{i=r} x_{\alpha_i}. \quad (*)$$

L'application du lemme technique à la famille des morphismes $\mathcal{A} = \{\theta_j\}$ fournit alors un indice β et une famille de morphismes d'indices de codomaine β qui, appliqués à chaque coordonnée des deux membres de (*), annule le membre de gauche et prouve l'assertion.

b) Compte tenu de l'exactitude à droite établie dans la proposition 8.4.1-2, il suffira de montrer que si $\mu : \mathcal{F} \rightsquigarrow \mathcal{G}$ est une transformation naturelle de systèmes inductifs telle que pour chaque $\alpha \in \text{Ob}(\mathcal{J})$, le morphisme $\mu(\alpha) : \mathcal{F}(\alpha) \rightarrow \mathcal{G}(\alpha)$ est **injectif**, alors $\varinjlim (\mu)$ est nécessairement injectif. On considère alors le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathcal{F}(\alpha) & \xrightarrow{\bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mu(\alpha)} & \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathcal{G}(\alpha) \\ \nu(\mathcal{F}) \downarrow & & \downarrow \nu(\mathcal{G}) \\ \varinjlim (\mathcal{F}) & \xrightarrow{\varinjlim (\mu)} & \varinjlim (\mathcal{G}) \end{array}$$

où les flèches verticales sont surjectives. Soit ω un relèvement dans $\bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathcal{F}(\alpha)$ d'un élément ϖ du noyau de $\varinjlim (\mu)$; son image par $\bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mu(\alpha)$ appartient alors au noyau de $\nu(\mathcal{G})$. L'application de l'assertion (a) de cette proposition permet alors de trouver un indice β et un représentant ω' de ϖ dans $\mathcal{F}(\beta)$ dont l'image dans $\mathcal{G}(\beta)$ est nulle ; mais comme $\mu(\beta)$ est supposée injective, ω' est nul et donc $\varinjlim (\mu)$ est nécessairement injective. ■

8.4.3 Cohomologie d'une limite inductive de complexes

Dans cette section nous allons nous intéresser aux systèmes inductifs à valeurs dans la catégorie (abélienne) $\mathbf{C}^*(\mathcal{A}\mathbf{b})$ des complexes d'objets d'une catégorie abélienne $\mathcal{A}\mathbf{b}$ possédant des limites inductives⁽³⁴⁾. Soit \mathcal{J} une (petite) catégorie, la catégorie $\text{Ind}(\mathcal{J}; \mathbf{C}^*(\mathcal{A}\mathbf{b}))$ des systèmes inductifs indexés par \mathcal{J} est alors abélienne. Des arguments assez généraux et presque tautologiques montrent que l'on peut interpréter $\text{Ind}(\mathcal{J}; \mathbf{C}^*(\mathcal{A}\mathbf{b}))$ comme la catégorie des complexes d'objets de $\text{Ind}(\mathcal{J}; \mathcal{A}\mathbf{b})$; autrement dit, un système inductif de complexes est (tautologiquement) un complexe de systèmes inductifs. On a donc une équivalence de catégories (abéliennes) :

$$\boxed{\text{Ind}(\mathcal{J}; \mathbf{C}^*(\mathcal{A}\mathbf{b})) \equiv \mathbf{C}^*(\text{Ind}(\mathcal{J}; \mathcal{A}\mathbf{b}))}$$

Soit maintenant $\mathcal{F}^* \in \text{Ob}(\mathbf{C}^*(\text{Ind}(\mathcal{J}; \mathcal{A}\mathbf{b})))$, pour chaque $r \in \mathbb{Z}$, on dispose alors du système inductif $h^r(\mathcal{F}^*)$ qui associe à chaque $\alpha \in \text{Ob}(\mathcal{J})$ le r -ième objet de cohomologie du complexe $\mathcal{F}^*(\alpha)$ d'objets de $\mathcal{A}\mathbf{b}$. Lorsque la catégorie d'indices \mathcal{J} est **filtrante** l'exactitude du foncteur \varinjlim donne une équivalence canonique entre la r -ième cohomologie du complexe limite inductive de \mathcal{F}^* et la limite inductive du système $h^r(\mathcal{F}^*)$. Énonçons ce résultat en clair.

Théorème 8.4.3-1 : *Soit $\mathcal{A}\mathbf{b}$ une catégorie abélienne possédant des limites inductives. Soit \mathcal{J} une petite catégorie filtrante. Pour tout système inductif $\mathcal{F}^* \in \text{Ob}(\text{Ind}(\mathcal{J}; \mathbf{C}^*(\mathcal{A}\mathbf{b})))$ de complexes de $\mathcal{A}\mathbf{b}$ et pour chaque $r \in \mathbb{Z}$, il existe un isomorphisme canonique entre :*

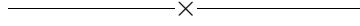
$$\boxed{\varinjlim (h^r(\mathcal{F}^*)) \equiv h^r(\varinjlim (\mathcal{F}^*))}$$

En particulier, la limite inductive d'un système inductif et filtrant de complexes acycliques est acyclique.

³⁴ On pourra se limiter au cas des catégories de modules ou des complexes de modules

8.4.4 Commentaire sur l'exactitude de la limite projective

Contrairement à ce que l'on pourrait penser, la limite projective comporte des subtilités qui font que l'on ne dispose pas de conditions aussi générales que pour la limite inductive garantissant son exactitude. Une condition connue sous le nom de « *condition de Mittag-Leffler* » est souvent utilisée mais nous n'en aurons pas besoin dans ce cours (cf. [Har] page 191).



§9. Cohomologie des bicomplexes de modules

9.1 Complexe simple associé à un bicomplexe

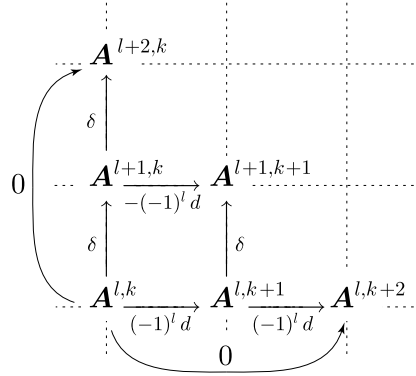
Soit \mathcal{C} une catégorie de modules. Notons Σ le foncteur de $\mathbf{C}^{\bullet,*}(\mathcal{C})$ vers $\mathbf{C}^*(\mathcal{C})$ qui associe au bicomplexe $(\mathbf{A}^{\bullet,*}, d_{\bullet,*}, \delta_{\bullet,*})$, le complexe (dit simple) $(\mathbf{A}^*, D(\mathbf{A})_*)$ (noté aussi (\mathbf{A}^*, D_*)), où :

$$\mathbf{A}^d = \bigoplus_{l+k=d} \mathbf{A}^{l,k}, \quad \text{pour chaque } d \in \mathbb{Z}, \tag{\diamond}$$

et où $D_d : \mathbf{A}^d \rightarrow \mathbf{A}^{d+1}$ est défini, en chaque $x \in \mathbf{A}^{l,k}$, tel que $l+k=d$, par :

$$D_d(x) = \delta_{l,k}(x) \oplus (-1)^l d_{l,k}(x) \in \mathbf{A}^{l+1,k} \oplus \mathbf{A}^{l,k+1}. \tag{\star}$$

Le diagramme suivant illustre l'égalité $D_{d+1} \circ D_d = 0$. Le couple (\mathbf{A}^*, D_*) est donc un complexe de modules.



Soit maintenant la donnée d'un morphisme de bicomplexes $f_{\bullet,*} : \mathbf{A}^{\bullet,*} \rightarrow \mathbf{B}^{\bullet,*}$. En conservant son action sur chaque facteur direct de (\diamond) , on obtient bien une application $f_* : \mathbf{A}^* \rightarrow \mathbf{B}^*$ vérifiant $f_{d+1} \circ D(\mathbf{A})_d = D(\mathbf{B})_d \circ f_d$, pour chaque $d \in \mathbb{Z}$.

La correspondance $\Sigma : \mathbf{C}^{\bullet,*}(\mathcal{C}) \rightsquigarrow \mathbf{C}^*(\mathcal{C})$ ainsi définie est *fonctorielle*.

Exercice 9.1-1 : Vérifiez que $\Sigma : \mathbf{C}^{\bullet,*}(\mathcal{C}) \rightsquigarrow \mathbf{C}^*(\mathcal{C})$ est un foncteur additif et *exact*.

Remarque 9.1-1 et exercice : Dans la définition de la différentielle du complexe simple associé, la définition de la différentielle totale D n'est pas symétrique relativement aux lignes et colonnes, et nous aurions tout aussi bien poser :

$$D'_d(x) = (-1)^k \delta_{l,k}(x) \oplus d_{l,k}(x) \in \mathbf{A}^{l+1,k} \oplus \mathbf{A}^{l,k+1}. \quad (\star')$$

Montrer que l'isomorphisme de modules gradués $\phi_* : \mathbf{A}^* \rightarrow \mathbf{A}^*$ qui fait correspondre à $x \in \mathbf{A}^{l,k}$ l'élément $(-1)^{lk}x$, définit un *isomorphisme* des complexes différentiels (\mathbf{A}^*, D_*) et (\mathbf{A}^*, D'_*) .

9.2 Cohomologies sur un bicomplexe

9.2.1 Cohomologies verticale et horizontale

Comme la catégorie des bicomplexes est également une catégorie de complexes (de complexes de modules), *i.e.* $\mathbf{C}^{\bullet,*}(\mathcal{C}) = \mathbf{C}^*(\mathbf{C}^*(\mathcal{C}))$, et ceci de deux manières différentes, on dispose de deux foncteurs de cohomologie, notés respectivement :

$$\begin{aligned} H_\delta^* : \mathbf{C}^{\bullet,*}(\mathcal{C}) &\rightsquigarrow \mathbf{C}^*(\mathcal{C}^{\mathbb{Z}}) & \text{et} & & H_d^* : \mathbf{C}^{\bullet,*}(\mathcal{C}) &\rightsquigarrow (\mathbf{C}^*(\mathcal{C}))^{\mathbb{Z}}, \\ &(\delta\text{-cohomologie}) & & & &(d\text{-cohomologie}) \end{aligned}$$

que l'on peut illustrer de la manière suivante :

$$\mathbf{C}^{\bullet,*}(\mathcal{C}) \ni \left(\begin{array}{ccccccc} & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \rightarrow & \mathbf{A}^{l+1,k-1} & \rightarrow & \mathbf{A}^{l+1,k} & \rightarrow & \mathbf{A}^{l+1,k+1} & \rightarrow \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ \rightarrow & \mathbf{A}^{l,k-1} & \rightarrow & \mathbf{A}^{l,k} & \rightarrow & \mathbf{A}^{l,k+1} & \rightarrow \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ \rightarrow & \mathbf{A}^{l-1,k-1} & \rightarrow & \mathbf{A}^{l-1,k} & \rightarrow & \mathbf{A}^{l-1,k+1} & \rightarrow \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \end{array} \right) \xrightarrow{\sim} \left(\begin{array}{ccccccc} \rightarrow & H_\delta^{l+1,k-1} & \rightarrow & H_\delta^{l+1,k} & \rightarrow & H_\delta^{l+1,k+1} & \rightarrow \\ \rightarrow & H_\delta^{l,k-1} & \rightarrow & H_\delta^{l,k} & \rightarrow & H_\delta^{l,k+1} & \rightarrow \\ \rightarrow & H_\delta^{l-1,k-1} & \rightarrow & H_\delta^{l-1,k} & \rightarrow & H_\delta^{l-1,k+1} & \rightarrow \end{array} \right) \in \mathbf{C}^*(\mathcal{C}^{\mathbb{Z}})$$

et

$$\mathbf{C}^{\bullet,*}(\mathcal{C}) \ni \left(\begin{array}{ccccccc} & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \rightarrow & \mathbf{A}^{l+1,k-1} & \rightarrow & \mathbf{A}^{l+1,k} & \rightarrow & \mathbf{A}^{l+1,k+1} & \rightarrow \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ \rightarrow & \mathbf{A}^{l,k-1} & \rightarrow & \mathbf{A}^{l,k} & \rightarrow & \mathbf{A}^{l,k+1} & \rightarrow \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ \rightarrow & \mathbf{A}^{l-1,k-1} & \rightarrow & \mathbf{A}^{l-1,k} & \rightarrow & \mathbf{A}^{l-1,k+1} & \rightarrow \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \end{array} \right) \xrightarrow{\sim} \left(\begin{array}{ccc} H_d^{l+1,k-1} & H_d^{l+1,k} & H_d^{l+1,k+1} \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ H_d^{l,k-1} & H_d^{l,k} & H_d^{l,k+1} \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ H_d^{l-1,k-1} & H_d^{l-1,k} & H_d^{l-1,k+1} \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \end{array} \right) \in (\mathbf{C}^*(\mathcal{C}))^{\mathbb{Z}}$$

Remarque 9.2.1-1 : Deux autres foncteurs, dont on parlera ultérieurement, peuvent être obtenus en calculant une seconde fois des cohomologies, ce sont : $H_{\delta,d} := H_\delta \circ H_d$ et $H_{d,\delta} := H_d \circ H_\delta$, tous les deux à valeurs dans $\mathcal{C}^{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}$.

Définition 9.2.1-1 : On appelle « *cohomologie d'un bicomplexe* $(\mathbf{A}^{\bullet,*}, d_{\bullet,*}, \delta_{\bullet,*})$ » la cohomologie du complexe simple associé : $(\mathbf{A}^*, D(\mathbf{A})_*)$.

9.3 Quelques propositions d'algèbre homologique à retenir

Nous allons nous intéresser dans cette section à la sous-catégorie pleine $\mathbf{C}^{+,+}(\mathcal{C})$ de $\mathbf{C}^{\bullet,\bullet}(\mathcal{C})$ des bicomplexes $(\mathbf{A}^{\bullet,*}, d, \delta)$ « du premier quadrant », i.e. tels que $\mathbf{A}^{l,k} = 0$, si $(l, k) \notin \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Proposition 9.3-1 : Soit $(\mathbf{A}^{\bullet,*}, d, \delta)$ un bicomplexe de modules du premier quadrant. Supposons que sa cohomologie horizontale (ou verticale) est nulle. Alors le complexe simple associé (\mathbf{A}^*, D_*) est exact.

Démonstration : Supposons que la cohomologie horizontale est nulle (l'autre cas résultera de raisonnements parfaitement analogues). Notons $(\mathbf{A}^{\geq 1,*}, d, \delta)$ le sous-bicomplexe de $(\mathbf{A}^{\bullet,*}, d, \delta)$ obtenu en tronquant bêtement la ligne d'indice 0. Nous avons alors une suite exacte courte de bicomplexes :

$$0 \longrightarrow (\mathbf{A}^{\geq 1,*}, d, \delta) \longrightarrow (\mathbf{A}^{\bullet,*}, d, \delta) \longrightarrow \frac{(\mathbf{A}^{\bullet,*}, d, \delta)}{(\mathbf{A}^{\geq 1,*}, d, \delta)} \longrightarrow 0. \quad (\diamond\diamond)$$

Soit graphiquement :

$$0 \rightarrow \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{A}^{3,0} \rightarrow \mathbf{A}^{3,1} \rightarrow \mathbf{A}^{3,2} \rightarrow \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{A}^{2,0} \rightarrow \mathbf{A}^{2,1} \rightarrow \mathbf{A}^{2,2} \rightarrow \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{A}^{1,0} \rightarrow \mathbf{A}^{1,1} \rightarrow \mathbf{A}^{1,2} \rightarrow \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{A}^{3,0} \rightarrow \mathbf{A}^{3,1} \rightarrow \mathbf{A}^{3,2} \rightarrow \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{A}^{2,0} \rightarrow \mathbf{A}^{2,1} \rightarrow \mathbf{A}^{2,2} \rightarrow \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{A}^{1,0} \rightarrow \mathbf{A}^{1,1} \rightarrow \mathbf{A}^{1,2} \rightarrow \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{A}^{0,0} \rightarrow \mathbf{A}^{0,1} \rightarrow \mathbf{A}^{0,2} \rightarrow \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \mathbf{A}^{0,1} \rightarrow \mathbf{A}^{0,1} \rightarrow \mathbf{A}^{0,2} \rightarrow \end{pmatrix} \rightarrow 0$$

On remarque alors que le complexe simple associé au terme de droite s'identifie canoniquement au complexe "ligne" $(\mathbf{A}^{0,*}, d_{0,*})$. L'application du foncteur exact Σ à la suite $(\diamond\diamond)$ fournit alors la suite exacte courte de complexes :

$$0 \longrightarrow \Sigma(\mathbf{A}^{\geq 1,*}, d, \delta) \longrightarrow (\mathbf{A}^*, D_*) \longrightarrow (\mathbf{A}^{0,*}, d_{0,*}) \longrightarrow 0, \quad (\star\star)$$

dont on déduit (à l'aide de la suite exacte longue de cohomologie), les égalités :

$$\begin{cases} H^0(\mathbf{A}^*, D_*) = 0; \\ H^k(\mathbf{A}^*, D_*) \equiv H^k(\Sigma(\mathbf{A}^{\geq 1,*}, d, \delta)); \quad \text{pour tout } k \geq 1, \end{cases}$$

puisque le complexe simple $\Sigma(\mathbf{A}^{\geq 1,*}, d, \delta)$ ne possède aucun terme en degrés ≤ 0 (et donc sa cohomologie sera nulle en de tels degrés), et que, par hypothèse le complexe $(\mathbf{A}^{0,*}, d_*)$ est exact.

Cela étant, les lignes de $(\mathbf{A}^{\geq 1,*}, d, \delta)$ sont des lignes du bicomplexe de départ et l'hypothèse d'exactitude horizontale pourra leur être également appliquée. L'itération des raisonnements précédents est alors possible (indéfiniment par ailleurs), pour prouver :

$$\begin{cases} H^n(\mathbf{A}^*, D_*) = 0, & \text{pour tout } n < N; \\ H^k(\mathbf{A}^*, D_*) \equiv H^k(\Sigma(\mathbf{A}^{\geq N,*}, d, \delta)), & \text{pour tout } k \geq N; \end{cases}$$

pour chaque $N \in \mathbb{N}$. Le complexe (\mathbf{A}^*, D_*) est donc bien exact en chacun de ses termes. ■

Corollaire 9.3-2 : Soient $(\mathbf{A}^{\bullet,*}, d, \delta)$ un bicomplexe du premier quadrant, et $(\mathbf{B}^{\bullet,*}, d(\mathbf{B}), \delta(\mathbf{B}))$ le bicomplexe du premier quadrant défini par :

$$\begin{cases} \mathbf{B}^{l,k} = \mathbf{A}^{l+1,k}; \\ d(\mathbf{B})_{l,k} = d_{l+1,k}; \\ \delta(\mathbf{B})_{l,k} = \delta_{l+1,k}; \end{cases}$$

pour tout $l, k \in \mathbb{N}$. Notons $(\mathbf{B}^*, D(\mathbf{B})_*)$ le complexe simple associé à $(\mathbf{B}^{\bullet,*}, d(\mathbf{B}), \delta(\mathbf{B}))$. Alors :

- Les applications $\delta_{0,k} : \mathbf{A}^{0,k} \rightarrow \mathbf{B}^k$ définissent un morphisme de complexes $\delta_{0,*}$ entre $(\mathbf{A}^{0,*}, d_{0,*})$ et $(\mathbf{B}^*, D(\mathbf{B})_*)$.
- La cohomologie du bicomplexe $(\mathbf{A}^{\bullet,*}, d, \delta)$ est nulle, si et seulement si, le morphisme $\delta_{0,*}$ est un quasi-isomorphisme.

Remarque 9.3-1 : Voici une illustration de cette assertion.

$$\begin{array}{ccc} \Sigma \left(\begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ \mathbf{A}^{3,0} & \rightarrow \mathbf{A}^{3,1} & \rightarrow \mathbf{A}^{3,2} & \rightarrow \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ \mathbf{A}^{2,0} & \rightarrow \mathbf{A}^{2,1} & \rightarrow \mathbf{A}^{2,2} & \rightarrow \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ \mathbf{A}^{1,0} & \rightarrow \mathbf{A}^{1,1} & \rightarrow \mathbf{A}^{1,2} & \rightarrow \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ \mathbf{A}^{0,0} & \rightarrow \mathbf{A}^{0,1} & \rightarrow \mathbf{A}^{0,2} & \rightarrow \end{array} \right) & \Sigma \left(\begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ \mathbf{A}^{3,0} & \rightarrow \mathbf{A}^{3,1} & \rightarrow \mathbf{A}^{3,2} & \rightarrow \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ \mathbf{A}^{2,0} & \rightarrow \mathbf{A}^{2,1} & \rightarrow \mathbf{A}^{2,2} & \rightarrow \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ \mathbf{A}^{1,0} & \rightarrow \mathbf{A}^{1,1} & \rightarrow \mathbf{A}^{1,2} & \rightarrow \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ (\mathbf{A}^{0,0} & \rightarrow \mathbf{A}^{0,1} & \rightarrow \mathbf{A}^{0,2} & \rightarrow) \end{array} \right) & \\ \text{exact} & \iff & \text{quasi-isomorphisme} \end{array}$$

Démonstration du corollaire 9.3-2 :

- Soit $x \in \mathbf{A}^{0,k}$. Alors $\delta_{0,k}(x) \in \mathbf{A}^{1,k} = \mathbf{B}^{0,k} \subseteq \mathbf{B}^k$, ce qui montre que $\delta_{0,*}$ est bien défini à valeurs dans le module gradué $\{\mathbf{B}^k\}_{k \in \mathbb{Z}}$. D'autre part :

$$\begin{aligned} D(\mathbf{B})_k(\delta_{0,k}(x)) &= \delta(\mathbf{B})_{0,k}(\delta_{0,k}(x)) + d(\mathbf{B})_{0,k}(\delta_{0,k}(x)) \\ &= d_{1,k}(\delta_{0,k}(x)) = \delta_{0,k+1}(d_{0,k}(x)). \end{aligned}$$

- Reprenons maintenant la suite exacte courte $(\star\star)$ pour les différentielles totales D' :

$$0 \longrightarrow \Sigma'(\mathbf{A}^{\geq 1,*}, d, \delta) \longrightarrow (\mathbf{A}^*, D'_*) \longrightarrow (\mathbf{A}^{0,*}, d_{0,*}) \longrightarrow 0. \quad (\star\star')$$

Supposons la cohomologie du terme central de $(\star\star')$ nulle. La suite exacte longue associée à $(\star\star')$ donne alors immédiatement l'isomorphisme de liaison $H(\delta_{0,*})$:

$$H^k(\mathbf{A}^{0,*}, d_{0,*}) \xrightarrow[\cong]{H(\delta_{0,*})} H^{k+1}(\Sigma'(\mathbf{A}^{\geq 1,*}, d, \delta)) \cong H^k(\mathbf{B}^*, D'_*),$$

où l'équivalence de droite résulte du fait que le signe qui intervient dans la définition de $D'(\mathbf{B})$ ne concerne que les indices colonnes qui, eux, n'ont pas changé pour $\mathbf{A}^{\geq 1,*}$ et $\mathbf{B}^{\bullet,*}$.

Ceci étant, l'isomorphisme des complexes de la remarque du 9.1-1 nous permet de faire aboutir la suite d'équivalences ci-dessus sur $H^k(\mathbf{B}^*, D(\mathbf{B})_*)$. On constate alors que leur composée est précisément le morphisme en cohomologie associé au morphisme de complexes de (a).

La réciproque découle également de la suite exacte longue associée à $(\star\star)$ et est laissée comme exercice. ■

Proposition 9.3-3 : Soit $f_{\bullet,*} : (\mathbf{A}^{\bullet,*}, d, \delta) \rightarrow (\mathbf{B}^{\bullet,*}, d, \delta)$ un morphisme de bicomplexes tel que le morphisme $H_d(f)_{\bullet,*} : H_d^*(\mathbf{A}^{\bullet,*}, d, \delta) \rightarrow H_d^*(\mathbf{B}^{\bullet,*}, d, \delta)$ est un isomorphisme. Alors le morphisme $f_* : (\mathbf{A}^*, D(\mathbf{A})_*) \rightarrow (\mathbf{B}^*, D(\mathbf{B})_*)$ est un quasi-isomorphisme.

Démonstration : La démonstration de ce résultat utilise des troncatures verticales. La functorialité des suites exactes courtes ($\star\star$) donne dans ce cas :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Sigma(\mathbf{A}^{\bullet, \geq 1}, d, \delta) & \longrightarrow & (\mathbf{A}^*, D_*) & \longrightarrow & (\mathbf{A}^{\bullet, 0}, \delta_{\bullet, 0}) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow f_*^{\geq 1} & & \downarrow f_* & & \downarrow f_{\bullet, 0} \\ 0 & \longrightarrow & \Sigma(\mathbf{B}^{\bullet, \geq 1}, d, \delta) & \longrightarrow & (\mathbf{B}^*, D_*) & \longrightarrow & (\mathbf{B}^{\bullet, 0}, \delta_{\bullet, 0}) \longrightarrow 0 \end{array}$$

où le troisième morphisme est un quasi-isomorphisme. L'inspection du morphisme des suites exactes longues associées, et l'application du "lemme des cinq", possible puisque les complexes de cohomologie sont bornés à gauche, permet de conclure que f_* est un quasi-isomorphisme, si et seulement si, $f_*^{\geq 1}$ l'est.

L'itération de cette procédure démontre, pour chaque $N \in \mathbb{N}$, que f_* est un quasi-isomorphisme, si et seulement si, $f_*^{\geq N}$ l'est. Il s'ensuit que si le bicomplexe $(\mathbf{A}^{\bullet,*})$ est borné à droite, i.e. s'il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbf{A}^{\bullet, k} = 0$ pour tout $k \geq N_0$, et de même pour $\mathbf{B}^{\bullet,*}$, le morphisme $f_*^{\geq N_0}$ est trivialement un isomorphisme (entre les objets nuls) et la proposition est démontrée.

Dans le cas général, on montre que f_* est un quasi-isomorphisme autour de chaque degré. Soit donc $d \in \mathbb{N}$ et appliquons le foncteur de troncature intelligente $\tau_k^{\leq d}$ à chaque ligne des bicomplexes $(\mathbf{A}^{\bullet,*})$ et $(\mathbf{B}^{\bullet,*})$ en le notant $\tau^{\bullet, \leq d}$. On obtient alors

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \Sigma(\tau^{\bullet, \leq d}(\mathbf{A}^{\bullet,*}, d, \delta)) & \longrightarrow & (\mathbf{A}^*, D_*) & \longrightarrow & \Sigma(\tau^{\bullet, > d}(\mathbf{A}^{\bullet,*}, d, \delta)) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \Sigma(\tau^{\bullet, \leq d}(f))_* & & \downarrow f_* & & \downarrow \Sigma(\tau^{\bullet, > d}(f))_* \\ 0 & \longrightarrow & \Sigma(\tau^{\bullet, \leq d}(\mathbf{B}^{\bullet,*}, d, \delta)) & \longrightarrow & (\mathbf{B}^*, D_*) & \longrightarrow & \Sigma(\tau^{\bullet, > d}(\mathbf{B}^{\bullet,*}, d, \delta)) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Or, les complexes de la forme $\Sigma(\tau^{\bullet, > d}(_))$ n'ayant pas de cohomologie en degrés $\leq d$, on en conclut que f_i est un quasi-isomorphisme pour tout $i \leq d$, si et seulement si, il en est autant pour $\Sigma(\tau^{\bullet, \leq d}(f))_i$. On termine la démonstration en remarquant que les cohomologies horizontales des complexes $\Sigma(\tau^{\bullet, \leq d}(_))$ sont, soit nulles, soit précisément celles des bicomplexes de départ. L'hypothèse concernant l'action de f sur la cohomologie des lignes est donc toujours vérifiée pour les complexes $\tau^{\bullet, \leq d}(_)$ qui se trouvent être, en plus, bornés à droite. Notre conclusion du paragraphe précédent peut donc leur être appliquée. ■

9.3.1 Application à la génération de la suite exacte de Mayer-Vietoris

Soit M une variété différentiable, pour chaque ouvert $U \subseteq M$, on note $\Omega^k(U)$ l'espace des k -formes différentiables sur U . Les suites :

$$0 \rightarrow \Omega^k(U_1 \cup U_2) \rightarrow \Omega^k(U_1) \oplus \Omega^k(U_2) \xrightarrow{\delta} \Omega^k(U_{12}) \rightarrow 0 \quad (\mathbf{MV}_2)$$

où U_1 et U_2 sont des ouverts, et où $U_{12} := U_1 \cap U_2$, sont *a priori exactes à gauche*. Dans le cas des variétés différentiables, l'existence de partitions de l'unité garanti la surjectivité des morphismes $\Omega^k(U_1) \oplus \Omega^k(U_2) \xrightarrow{\delta} \Omega^k(U_{12})$ et donc (\mathbf{MV}_2) est *exacte* pour les variétés différentiables.

Cela étant rappelé, remplaçons U_2 par $U_2 \cup U_3$ dans (\mathbf{MV}_2) et appliquons Mayer-Vietoris verticalement pour fabriquer le bicomplexe à colonnes exactes.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \oplus & \Omega^k(U_{23}) & \longrightarrow & \Omega^k(U_{123}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 0 & \rightarrow & \Omega^k(U_1 \cup U_2 \cup U_3) & \rightarrow & \Omega^k(U_1) \oplus \Omega^k(U_2) \oplus \Omega^k(U_3) & \rightarrow & \Omega^k(U_{12}) \oplus \Omega^k(U_{13}) & \rightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 0 & \rightarrow & \Omega^k(U_1 \cup (U_2 \cup U_3)) & \rightarrow & \Omega^k(U_1) \oplus \Omega^k(U_2 \cup U_3) & \rightarrow & \Omega^k(U_{12} \cup U_{13}) & \rightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & &
 \end{array}$$

La proposition 9.3-1 garanti alors que la cohomologie du bicomplexe est nulle et sa première ligne sera, d'après 9.3-2, quasi-isomorphe au complexe simple associé au bicomplexe obtenu en tronquant cette ligne. Or, la première ligne étant exacte, on obtient la *suite exacte de Mayer-Vietoris pour trois ouverts* :

$$0 \rightarrow \Omega^k(U_1 \cup U_2 \cup U_3) \rightarrow \Omega^k(U_1) \oplus \Omega^k(U_2) \oplus \Omega^k(U_3) \rightarrow \Omega^k(U_{12}) \oplus \Omega^k(U_{13}) \oplus \Omega^k(U_{23}) \rightarrow \Omega^k(U_{123}) \rightarrow 0$$

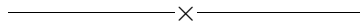
(\mathbf{MV}_3)

Il est clair que nous pouvons recommencer maintenant en remplaçant U_3 par une réunion de deux autres ouverts. L'itération de ces idées permettrait de construire de proche en proche la suite exacte de Mayer-Vietoris pour un nombre *fini* et arbitraire d'ouverts de la variété \mathbf{M} .

Remarque 9.3.1-1 : Il convient de souligner le fait que dans la construction itérative des suites de Mayer-Vietoris, l'exactitude de la suite courte intervient uniquement pour garantir celle des suites longues. En fait, les ingrédients essentiels qui permettent d'itérer indéfiniment la construction sont :

- a) Le morphisme de complexes canonique de la première ligne d'un bicomplexe dans le complexe simple associé au bicomplexe tronqué de cette ligne (*cf.* 9.3-2).
- b) La correspondance $U \rightsquigarrow \Omega^k(U)$ est *fonctorielle et contravariante* de la catégorie associée à l'ensemble préordonné $(\text{Ouv}(\mathbf{M}), \subseteq)$ vers une catégorie de groupes abéliens.

Comme (a) est toujours satisfaite, toute donnée astreinte à vérifier (b) donnera lieu automatiquement aux suites de Mayer-Vietoris.



§ 10. Cohomologie de Čech relative à un recouvrement dénombrable

10.1 Préfaisceaux de groupes abéliens

Soit \mathbf{Y} un espace topologique et notons $(\text{Ouv}(\mathbf{Y}), \subseteq)$ l'ensemble des ouverts de \mathbf{Y} muni de l'ordre partiel d'inclusion.

Définition 10.1-1 : Dans ce cours, un « *préfaisceau sur Y* » sera la donnée d'un foncteur \mathcal{P} contravariant de $(\text{Ouv}(Y), \subseteq)$ vers une catégorie de groupes abéliens et tel que $\mathcal{P}(\emptyset) = \mathbf{0}$. On appellera « *morphisme de préfaisceaux* » toute transformation naturelle entre préfaisceaux.

Remarque 10.1-1 : Les préfaisceaux peuvent évidemment posséder des structures plus riches que les groupes abéliens, par exemple : de complexe différentiel gradué, d'algèbre, etc ; en ce sens il serait plus approprié de parler de *catégories de préfaisceaux* qui seraient des catégories de la forme $\text{Préf}(Y; \mathbf{Ab}) := \text{Fonct}((\text{Ouv}(Y), \supseteq), \mathbf{Ab})$, où \mathbf{Ab} désigne une catégorie abélienne. Signalons enfin que la construction du complexe de Čech exigera que l'on dispose de produits et coproduits arbitraires dans la catégorie \mathbf{Ab} , celle-ci n'étant pas automatique dans une catégorie additive (où seuls les produits et coproduits *finis* sont dans leur axiomatique), leur existence sera alors sous-entendue.

Foncteur « *sections au-dessus d'un ouvert* »

Un ouvert U de Y constitue, à lui tout seul, une sous catégorie de $\text{Ouv}(Y; \subseteq)$. On a donc un foncteur coinduit de $\text{Préf}(Y; \mathbf{Ab}) \rightsquigarrow \text{Fonct}(U; \mathbf{Ab}) \equiv \mathbf{Ab}$, qui sera, en tant que tel, covariant et exact ; on l'appelle « *sections au-dessus de U* » et on le note $\Gamma(U; -) : \text{Préf}(Y; \mathbf{Ab}) \rightsquigarrow \mathbf{Ab}$. Lorsque \mathbf{Ab} est une catégorie de groupes abéliens, les éléments de $\Gamma(U; \mathcal{P})$ sont appelés « *les sections de \mathcal{P} au-dessus de l'ouvert U* ».

10.1.1 Images directe et inverse de préfaisceaux

Soit $f : X \rightarrow Y$ une application continue. La correspondance $f^{-1} : \text{Ouv}(Y) \rightarrow \text{Ouv}(X)$ est compatible aux inclusions d'ouverts ⁽³⁵⁾ et la composition d'un préfaisceau \mathcal{P} sur X avec f^{-1} définit un préfaisceau sur Y , noté $f_*\mathcal{P}$ et appelé le « *préfaisceau image directe de \mathcal{P} par f* ». Le préfaisceau $f_*\mathcal{P}$ fait donc correspondre à l'ouvert $U \subseteq Y$ l'objet $\mathcal{P}(f^{-1}(U))$.

On aura reconnu dans la correspondance $\mathcal{P} \rightsquigarrow f_*(\mathcal{P})$ le foncteur coinduit par $f^{-1} : (\text{Ouv}(X), \supseteq) \rightsquigarrow (\text{Ouv}(Y), \supseteq)$; il s'agit donc d'un foncteur à la fois *additif et exact*.

Cas des applications ouvertes

Supposons maintenant l'application $f : X \rightarrow Y$ *ouverte*. L'application qui associe à chaque ouvert $U \subseteq X$ l'ouvert $f(U) \subseteq Y$ est fonctorielle de $(\text{Ouv}(X), \subseteq)$ vers $(\text{Ouv}(Y), \subseteq)$. On a donc un foncteur coinduit, note f^{-1} , de $\text{Préf}(Y; \mathbf{Ab})$ vers $\text{Préf}(X; \mathbf{Ab})$ qu'on appelle « *image inverse* » ; il est *additif et exact*. On a donc pour tout préfaisceau \mathcal{P} sur Y et chaque ouvert $U \subseteq X$:

$$f^{-1}\mathcal{P}(U) = \mathcal{P}(f(U)).$$

Notation 10.1.1-1 : Lorsque X est une partie ouverte U de Y est que f est l'inclusion canonique de U dans Y , il est classique de noter $f^{-1}\mathcal{P}$ également par $\mathcal{P}|_U$. Le préfaisceau $\mathcal{P}|_U$ est alors appelé « *la restriction de \mathcal{P} à l'ouvert U* ».

³⁵ Correspondance fonctorielle de $(\text{Ouv}(Y), \supseteq)$ vers $(\text{Ouv}(X), \supseteq)$.

A remarquer, toujours dans le cas où f est ouverte, l'existence d'un morphisme de préfaisceaux sur \mathbf{Y}

$$\boxed{\mathcal{P} \longrightarrow f_* f^{-1} \mathcal{P}} \quad (*)$$

qui sur chaque ouvert $U \subseteq \mathbf{Y}$ est réalisé par l'application de restriction $\mathcal{P}(U) \rightarrow \mathcal{P}(f^{-1}(U))$. Le morphisme (*) provient d'une transformation naturelle entre les foncteurs id et $f_* \circ f^{-1}$ définis sur la catégorie $\text{Préf}(\mathbf{Y})$.

10.2 Complexe de Čech relatif à un recouvrement dénombrable

Soit $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ un recouvrement dénombrable de \mathbf{Y} , on note $U_{i_0 \dots i_p} := U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_p}$. Le diagramme suivant décrit la multiplicité d'injections canoniques dans la famille des intersections finies d'ouverts de \mathcal{U} .

$$\mathbf{Y} \longleftarrow \prod_{i_0} U_{i_0} \longleftarrow \prod_{i_0 < i_1} U_{i_0 i_1} \longleftarrow \prod_{i_0 < i_1 < i_2} U_{i_0 i_1 i_2} \longleftarrow \prod_{i_0 < i_1 < i_2 < i_3} U_{i_0 i_1 i_2 i_3} \longleftarrow \prod_{i_0 < i_1 < i_2 < i_3 < i_4} U_{i_0 i_1 i_2 i_3 i_4}$$

qui fait référence au fait qu'un ouvert $U_{i_0 i_1 i_2 \dots i_p}$ est, *a priori*, contenu dans les $p+1$ ouverts $U_{i_0 i_1 i_2 \dots \hat{i}_k \dots i_p}$, où $0 \leq k \leq p$.

Soit maintenant \mathcal{P} un préfaisceau sur \mathbf{Y} .

Définition 10.2-1 : On appelle groupe de « p -cochaînes (ordonnées) de Čech relatives au recouvrement \mathcal{U} et à valeurs dans le préfaisceau \mathcal{P} » le groupe :

$$C^p(\mathcal{U}; \mathcal{P}) := \prod_{i_0 < \dots < i_p} \mathcal{P}(U_{i_0 \dots i_p}).$$

Une p -cochaîne de Čech à valeurs dans le préfaisceau \mathcal{P} est donc un choix ω d'un élément $\omega_{i_0 \dots i_p}$ pour chaque groupe $\mathcal{P}(U_{i_0 \dots i_p})$.

Ceci étant, la functorialité de \mathcal{P} fournira pour chaque inclusion $U_{i_0 i_1 i_2 \dots i_p} \subseteq U_{i_0 i_1 i_2 \dots \hat{i}_k \dots i_p}$, un morphisme de «restriction» que nous désignerons très abusivement par ρ_k^p . On définit alors l'«opérateur cobord» :

$$d_p : C^p(\mathcal{U}; \mathcal{P}) \longrightarrow C^{p+1}(\mathcal{U}; \mathcal{P}),$$

en indiquant son action sur une p -cochaîne ω :

$$d_p(\omega)_{i_0 \dots i_{p+1}} := \sum_{k=0, \dots, p} (-1)^k \rho_k^p(\omega_{i_0 \dots \hat{i}_k \dots i_{p+1}}).$$

On vérifie alors que $d_{p+1} \circ d_p = 0$.

Définition 10.2-2 : Le complexe différentiel gradué $(C^*(\mathcal{U}; \mathcal{P}), d_*)$ est « le complexe des cochaînes de Čech relatif au recouvrement \mathcal{U} et à valeurs dans le préfaisceau \mathcal{P} ». Sa cohomologie, notée $H^*(\mathcal{U}; \mathcal{P})$ est appelée « la cohomologie de Čech relativement au recouvrement \mathcal{U} et à valeurs dans le préfaisceau \mathcal{P} ».

Remarque 10.2-1 : Un morphisme de préfaisceaux $\eta : \mathcal{P}_1 \rightarrow \mathcal{P}_2$ donne pour chaque ouvert $U \subseteq Y$ un morphisme $\eta(U) : \mathcal{P}_1(U) \rightarrow \mathcal{P}_2(U)$ qui commute aux restrictions. En posant, pour chaque $p \in \mathbb{N}$ et chaque composante $\mathcal{P}_1(U_{i_0 \dots i_p})$ de $C^p(\mathcal{U}; \mathcal{P}_1)$

$$\eta_p(\omega_{i_0 \dots i_p}) = \eta(U_{i_0 \dots i_p})(\omega_{i_0 \dots i_p}) \in \mathcal{P}_2(U_{i_0 \dots i_p}),$$

on obtient (canoniquement) un morphisme de complexes différentiels gradués :

$$\eta_* : (C^*(\mathcal{U}; \mathcal{P}_1), d_*) \longrightarrow (C^*(\mathcal{U}; \mathcal{P}_2), d_*),$$

induisant un morphisme en cohomologie de Čech :

$$H(\eta)_* : H^*(\mathcal{U}; \mathcal{P}_1) \longrightarrow H^*(\mathcal{U}; \mathcal{P}_2).$$

10.3 Complexe de Čech-de Rham d'une variété différentiable

Soit $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ un recouvrement dénombrable de une variété différentiable M . Le « complexe de Čech-de Rham » relatif au recouvrement \mathcal{U} de M est *par définition* le complexe de Čech relatif au recouvrement \mathcal{U} et à valeurs dans le préfaisceau d'algèbres différentielles graduées $U \rightsquigarrow \Omega^\bullet(U)$, où les morphismes de restriction sont donnés par les restrictions des formes différentielles; on le note $C^*(\mathcal{U}; \Omega^\bullet)$, c'est un *bicomplexe différentiel gradué* muni du morphisme (injectif) canonique $\Omega^\bullet(M) \rightarrow C^*(\mathcal{U}; \Omega^\bullet)$ donnant lieu à un bicomplexe où toutes les colonnes (indexées par \bullet) sont *exactes* d'après l'exactitude de la suite de Mayer-Vietoris pour une famille d'ouverts (*cf.* [B-T] proposition 8.5 page 94).

La proposition 9.3-2 prouve alors

Théorème 10.3-1 : La cohomologie du complexe de Čech-de Rham pour un recouvrement dénombrable de la variété différentiable M est canoniquement isomorphe à la cohomologie de de Rham de M , i.e.

$$H_{\text{DR}}^*(M) \equiv H^*(\mathcal{U}; \Omega^\bullet).$$

Ceci étant, une ligne $p \in \mathbb{N}$ du bicomplexe de Čech-de Rham est de la forme :

$$0 \rightarrow \prod_{i_0 < \dots < i_p} \Omega^0(U_{i_0, \dots, i_p}) \rightarrow \prod_{i_0 < \dots < i_p} \Omega^1(U_{i_0, \dots, i_p}) \rightarrow \prod_{i_0 < \dots < i_p} \Omega^2(U_{i_0, \dots, i_p}) \rightarrow \dots \quad (\ddagger)$$

Un recouvrement \mathcal{U} est dit « *de Rham-acyclique* » lorsque les cohomologies des complexes des formes différentielles de toutes les intersections des ouverts de \mathcal{U} sont concentrées en degré 0 (c'est le cas pour les bons recouvrements). Dans un tel cas comme la cohomologie d'un produit de complexes

est également le produit de leurs cohomologies, nous pouvons augmenter les complexes (‡) pour en faire des complexes exacts, ce qui fait apparaître naturellement les cochaînes de Čech à valeurs dans le préfaisceau $U \rightsquigarrow H_{\text{DR}}^0(U)$:

$$0 \rightarrow C^p(\mathcal{U}; H_{\text{DR}}^0) = \prod_{i_0 < \dots < i_p} H_{\text{DR}}^0(U_{i_0, \dots, i_p}) \rightarrow \prod_{i_0 < \dots < i_p} \Omega^0(U_{i_0, \dots, i_p}) \rightarrow \prod_{i_0 < \dots < i_p} \Omega^1(U_{i_0, \dots, i_p}) \rightarrow \dots$$

L'application de la proposition 9.3-1 et de son corollaire, démontre :

Théorème 10.3-2 : *Soit \mathcal{U} un recouvrement de Rham-acyclique d'une variété différentiable M . On a un isomorphisme canonique :*

$$H^*(\mathcal{U}; H_{\text{DR}}^0) \equiv H^*(\mathcal{U}; \Omega^*).$$

Exercice 10.3-1 : Justifier les corollaires suivants.

Corollaire 10.3-3 (I) : *Soit \mathcal{U} un recouvrement de Rham-acyclique et dénombrable d'une variété différentiable M . On a un isomorphisme canonique :*

$$H^*(\mathcal{U}; H_{\text{DR}}^0) \equiv H_{\text{DR}}^*(M).$$

Corollaire 10.3-4 (II) : *La cohomologie de de Rham d'une variété différentiable admettant un bon recouvrement fini est de dimension finie.*

Exercice 10.3-2 : Soit M une variété différentiable compacte et orientable. Prouver qu'un bon recouvrement pour M contient au moins $\dim_{\mathbb{R}}(M) + 1$ ouverts.

Corollaire 10.3-5 (III) : *Soient \mathcal{U}_1 et \mathcal{U}_2 deux recouvrements de Rham-acycliques et dénombrables d'une variété différentiable M . On a un isomorphisme canonique :*

$$H^*(\mathcal{U}_1; H_{\text{DR}}^0) \equiv H^*(\mathcal{U}_2; H_{\text{DR}}^0).$$

La cohomologie de Čech du préfaisceau des fonctions localement constantes est indépendante du recouvrement de Rham-acyclique et dénombrable choisi.

—————×—————

§ 11. Applications du complexe de Čech

11.1 Dualité de Poincaré revue par Čech

Soit M une variété différentiable de dimension m , compacte et orientée.

La correspondance : $U \rightsquigarrow \Omega_c^*(U)$, qui fait correspondre à une inclusion d'ouverts $U_1 \subseteq U_2$ l'application de *prolongement par zéro* des formes différentielles à support compact : $\Omega_c^*(U_1) \rightarrow \Omega_c^*(U_2)$, est un foncteur *covariant* vers la catégorie $\text{Adg}(\mathbb{R})$. Si nous le composons avec foncteur contravariant de "ℝ-dualité", $\bullet \rightsquigarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\bullet, \mathbb{R})$, on obtient un préfaisceau \mathcal{P} sur \mathbf{M} :

$$U \rightsquigarrow \mathcal{P}(U) := \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\Omega_c^*(U), \mathbb{R}).$$

qui associe à l'ouvert U le « *complexe différentiel gradué dual* » de $\Omega_c^*(U)$. Rappelons brièvement la définition de ce nouvel objet de la catégorie des complexes.

Définition 11.1-1 : Soit (\mathbf{A}^*, d_*) un complexe différentiel gradué de \mathcal{A} -modules. Pour chaque $k \in \mathbb{Z}$, on note :

$$\text{Hom}^{-k}((\mathbf{A}^*, d_*); \mathcal{A}) := \text{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathbf{A}^k; \mathcal{A}).$$

(Hom^{-k} représente donc le groupe des formes linéaires homogènes de degrés $-k$ du module gradué $\{\mathbf{A}^*\}_{* \in \mathbb{Z}}$.) Nous obtenons de cette manière le module gradué $\text{Hom}^\bullet((\mathbf{A}^*, d_*); \mathcal{A})$ sur lequel on définit

$$\begin{aligned} D_{-k} : \text{Hom}^{-k}((\mathbf{A}^*, d_*); \mathcal{A}) &\longrightarrow \text{Hom}^{-k+1}((\mathbf{A}^*, d_*); \mathcal{A}) \\ f &\longmapsto (-1)^{-k+1} f \circ d_{k-1} \end{aligned}$$

Autrement dit, $D_{-k} = (-1)^{-k+1} {}^t d_{k-1}$, et l'on vérifie que $D^2 = 0$. Le complexe

$$\left(\text{Hom}^\bullet((\mathbf{A}^*, d_*); \mathcal{A}), D_\bullet \right),$$

est appelé le « *complexe différentiel gradué dual de (\mathbf{A}^*, d_*)* ».

Notons, pour chaque ouvert $U \subseteq \mathbf{M}$, $\mathcal{P}^k(U) := \text{Hom}^{k-m}(\Omega_c^*(U), \mathbb{R})$. La correspondance

$$U \rightsquigarrow \mathcal{P}(U),$$

définit alors un préfaisceau sur \mathbf{M} à valeurs dans la catégorie des complexes différentiels gradués *positifs*.

Nous allons définir maintenant un morphisme de préfaisceaux de complexes différentiels gradués \mathcal{D}_\bullet (pour dualité) entre Ω^\bullet et \mathcal{P} . Nous aurons alors, pour chaque $U \subseteq \mathbf{M}$:

$$U \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{l} \Omega^\bullet(U) : 0 \rightarrow \Omega^0(U) \xrightarrow{d_0} \Omega^1(U) \xrightarrow{d_1} \Omega^2(U) \dots \xrightarrow{d_{m-1}} \Omega^m(U) \rightarrow 0 \\ \downarrow \mathcal{D}_\bullet(U) \quad \downarrow \mathcal{D}_0(U) \quad \downarrow \mathcal{D}_1(U) \quad \downarrow \mathcal{D}_2(U) \quad \downarrow \mathcal{D}_m(U) \\ \mathcal{P}(U) : 0 \rightarrow \tilde{\Omega}_c^m(U) \xrightarrow{(-1)^{m-1} {}^t d_{m-1}} \tilde{\Omega}_c^{m-1}(U) \xrightarrow{(-1)^{m-2} {}^t d_{m-2}} \tilde{\Omega}_c^{m-2}(U) \dots \xrightarrow{{}^t d_0} \tilde{\Omega}_c^0(U) \rightarrow 0 \end{array} \right.$$

où $\tilde{\Omega}_c^k(U)$ simplifie dans ce diagramme la notation $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\Omega_c^k(U), \mathbb{R})$.

Posons, pour chaque $k \in \mathbb{N}$ et chaque $\omega \in \Omega^k(U)$:

$$\mathcal{D}_k(U)(\omega) := (-1)^k \left(\nu \mapsto \int_U \nu \wedge \omega \right).$$

On a :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{k+1}(U) \circ d_k(\omega) &= (-1)^{k+1} \left(\nu \mapsto \int_U \nu \wedge d_k(\omega) \right) \\ &= (-1)^{k+1} (-1)^{m-k} \left(\nu \mapsto \int_U d_{m-k-1}(\nu) \wedge \omega \right) \\ &= (-1)^{m-k-1} \mathfrak{t}_{d_{m-k-1}} \circ \mathcal{D}_k(U) \end{aligned}$$

à cause de la formule de Stokes qui donne les égalités :

$$0 = \int_U d(\nu \wedge \omega) = \int_U d(\nu) \wedge \omega + \int_U (-1)^{m-k-1} \nu \wedge d(\omega).$$

Par conséquent, $\mathcal{D}_\bullet(U)$ est bien un morphisme de complexes différentiels gradués.

Pour terminer la preuve de la naturalité de \mathcal{D}_\bullet il reste seulement à vérifier la compatibilité de toutes ces constructions avec les morphismes de restriction d'ouverts, mais cela est simple et laissé aux soins du lecteur.

La transformation naturelle \mathcal{D}_\bullet définit maintenant, pour chaque recouvrement \mathcal{U} de M donné, un morphisme de complexes de Čech :

$$\mathcal{D}_{*,\bullet} : \mathcal{C}^*(\mathcal{U}; \Omega^\bullet) \longrightarrow \mathcal{C}^*(\mathcal{U}; \mathcal{P}^\bullet),$$

qui devient, après avoir calculé les d -cohomologies,

$$H_d(\mathcal{D}_{*,\bullet}) : \mathcal{C}^*(\mathcal{U}; H^\bullet) \longrightarrow \mathcal{C}^*(\mathcal{U}; H_c^{m-\bullet}).$$

Or, si nous prenons un *bon recouvrement* pour M , le morphisme $H_d(\mathcal{D}_{*,\bullet})$ sera un isomorphisme suite à la dualité de Poincaré sur les ouverts contractiles de \mathbb{R}^m , et comme les colonnes des bi-complexes $\mathcal{C}^*(\mathcal{U}; \Omega^\bullet)$ et $\mathcal{C}^*(\mathcal{U}; \mathcal{P}^\bullet)$ sont exactes lorsque elles sont augmentées respectivement par $\Omega^\bullet(M)$ et $\text{Hom}^{\bullet-m}(\Omega_c^*(M), \mathbb{R})$ (dans le second cas c'est une conséquence de l'exactitude des suites de Mayer-Vietoris à support compact que l'on dualise), l'application des propositions 9.3-2 et 9.3-3 implique que le morphisme

$$\mathcal{D}_k(M) : \Omega^k(M) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\Omega_c^{m-k}(M); \mathbb{R}),$$

est un *quasi-isomorphisme* ; ce qu'affirme le théorème de dualité de Poincaré 7.3-1.

11.2 Formule de Künneth

Soient M et F deux variétés différentiables et considérons la structure de variété produit sur $M \times F$. On a les deux les projections canoniques :

$$\begin{array}{ccc} M \times F & \xrightarrow{\pi} & F \\ p \downarrow & & \\ M & & \end{array}$$

Soit $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ un recouvrement ouvert dénombrable de M et notons $p^{-1}\mathcal{U} := \{p^{-1}U_i\}$ le recouvrement de $M \times F$ "image inverse de \mathcal{U} ". Nous allons nous intéresser au préfaisceau de complexes différentiels gradués \mathcal{P}^\bullet sur M qui fait correspondre à un ouvert $U \subseteq M$ le complexe :

$$U \rightsquigarrow \mathcal{P}^\bullet(U) := \left((\Omega^*(U) \otimes_{\mathbb{R}} H_{\text{DR}}^*(F))^\bullet, D_\bullet \right).$$

où l'on pose, pour chaque $k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} (\Omega^*(U) \otimes_{\mathbb{R}} H_{\text{DR}}^*(F))^k &:= \bigoplus_{a+b=k} \Omega^a(U) \otimes_{\mathbb{R}} H_{\text{DR}}^b(F); \\ D_k(\omega^{[a]} \otimes x^{[b]}) &:= d_a(\omega^{[a]}) \otimes x^{[b]}. \end{aligned}$$

L'exactitude des foncteurs $\bullet \rightsquigarrow \bullet \otimes H_{\text{DR}}^b(F)$ implique alors que la cohomologie de $\mathcal{P}^\bullet(U)$ est précisément $(H_{\text{DR}}^*(U) \otimes H_{\text{DR}}^*(F))^\bullet$. Enfin, les morphismes de restriction pour \mathcal{P}^\bullet sont ceux induits par les morphismes de restriction du préfaisceau Ω^* .

Notons $p^{-1}(\Omega)^\bullet$ le préfaisceau d'algèbres différentielles graduées sur M défini par :

$$U \rightsquigarrow p^{-1}(\Omega)^\bullet(U) := \Omega^\bullet(p^{-1}(U)) = \Omega^\bullet(U \times F),$$

avec les morphismes de restriction habituels.

Nous allons introduire maintenant une transformation naturelle $\tau_\bullet : \mathcal{P}^\bullet \rightarrow p^{-1}(\Omega)^\bullet$. Fixons pour cela une famille $\mathcal{F} = \{\xi_j^{[*]}\}$ de cocycles de $\Omega^*(F)$ donnant une base pour la cohomologie de de Rham de F . On pose alors pour chaque $U \subseteq M$ et chaque $k \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} \tau_k(U) : \bigoplus_{a+b=k} \Omega^a(U) \otimes_{\mathbb{R}} H_{\text{DR}}^b(F) &\longrightarrow \Omega^k(U \times F) \\ \omega^{[a]} \otimes [\xi^{[b]}] &\longmapsto p^*(\omega^{[a]}) \wedge \pi^*(\xi^{[b]}) \end{aligned}$$

Une vérification aisée montre que τ_\bullet est bien un morphisme de complexes différentiels gradués qui dépend fonctoriellement des ouverts de M .

La transformation τ_\bullet induit, par conséquent un morphisme de complexes de Čech :

$$\tau_{*,\bullet} : \mathbf{C}^*(\mathcal{U}; \mathcal{P}^\bullet) \longrightarrow \mathbf{C}^*(\mathcal{U}; p^{-1}(\Omega)^\bullet) \quad (\diamond).$$

Son action en d -cohomologie est donnée par les morphismes :

$$H_d(\tau_{*,\bullet}) : (H_{\text{DR}}^*(U) \otimes H_{\text{DR}}^*(F))^\bullet \xrightarrow{p^* \wedge \pi^*} H_{\text{DR}}^\bullet(U \times F),$$

dont on sait qu'ils sont des *isomorphismes* lorsque U est un ouvert difféomorphe à $\mathbb{R}^{\dim M}$ (lemme de Poincaré). Nous en concluons que le morphisme de complexes de Čech (\diamond) induira un *quasi-isomorphisme* des complexes simples associés aux bicomplexes de Čech lorsque \mathcal{U} est un bon recouvrement.

Or, l'exactitude de la suite de Mayer-Vietoris associée au recouvrement $p^{-1}\mathcal{U}$ permet d'augmenter le bicomplexe $\mathbf{C}^*(\mathcal{U}; p^{-1}(\Omega)^\bullet)$ de la ligne $p^{-1}(\Omega)^\bullet(M) = \Omega^\bullet(M \times F)$ pour avoir un bicomplexe

de colonnes exactes. Lorsque l'on veut en faire autant sur le bicomplexe $\mathcal{C}^*(\mathcal{U}; \mathcal{F}^\bullet)$ on remarque que ses termes vérifient :

$$\mathcal{C}^p(\mathcal{U}; \mathcal{F}^k) = \sum_{a+b=k} \left(\prod_{i_0 < \dots < i_p} \left(\Omega^a(U_{i_0 \dots i_p}) \otimes H_{\text{DR}}^b(\mathbf{F}) \right) \right) \xleftarrow{\cong} \sum_{a+b=k} \left(\left(\prod_{i_0 < \dots < i_p} \Omega^a(U_{i_0 \dots i_p}) \right) \otimes H_{\text{DR}}^b(\mathbf{F}) \right)$$

dans essentiellement deux cas :

- lorsque les espaces vectoriels $H_{\text{DR}}^b(\mathbf{F})$ sont tous *de dimension finie* ;
- lorsque le recouvrement \mathcal{U} est *fini*.

Dans ces cas, les colonnes du bicomplexe $\mathcal{C}^*(\mathcal{U}; \mathcal{F}^\bullet)$ pourront être augmentées, grâce à l'*exactitude des produits tensoriels*, par la ligne $(\Omega^*(M) \otimes H_{\text{DR}}^*(\mathbf{F}))^\bullet$, et l'application du corollaire 9.3-2, permettra de conclure que le morphisme

$$\tau_\bullet(M) : (\Omega^*(M) \otimes H_{\text{DR}}^*(\mathbf{F}))^\bullet \longrightarrow \Omega^\bullet(M \times \mathbf{F}),$$

est un *quasi-isomorphisme*. En passant aux cohomologies, le morphisme induit :

$$H(\tau(M))_\bullet : (H_{\text{DR}}^*(M) \otimes H_{\text{DR}}^*(\mathbf{F}))^\bullet \longrightarrow H_{\text{DR}}^\bullet(M \times \mathbf{F}),$$

sera un *isomorphisme* ; c'est bien ce qu'affirme le théorème de Künneth.

Exercice 11.2-1 : Montrez que le morphisme $H(\tau(M))_\bullet$ est $p^* \wedge \pi^*$; il est donc indépendant de la famille de cocycles \mathcal{F} choisie.

§ 12. Cohomologie de Čech des préfaisceaux

12.1 Complexe de cochaînes singulières de Čech relatives à un recouvrement

Dans le paragraphe 10.2 nous avons introduit le complexe de Čech à valeurs dans un préfaisceau, pour un recouvrement dénombrable dont l'ensemble d'indices est muni d'un ordre total. Nous allons expliquer dans cette section pourquoi ni la dénombrabilité ni l'ordre ne sont nécessaires. On donnera alors une définition générale du complexe de Čech pour un recouvrement *arbitraire*.

12.1.1 Catégorie des recouvrements d'un espace topologique

Soit \mathbf{Y} un espace topologique. Dans ces notes, on entendra par «*recouvrement ouvert*» (et même «*recouvrement*» lorsque aucune ambiguïté ne sera à craindre), toute *famille d'ouverts* dont la réunion est l'espace \mathbf{Y} tout entier.

Soient $\mathcal{U}_1 = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ et $\mathcal{U}_2 = \{U_\beta\}_{\beta \in \mathfrak{B}}$ deux recouvrements de \mathbf{Y} . On dit que \mathcal{U}_2 «*raffine*» \mathcal{U}_1 , lorsqu'il existe une application, appelée «*raffinement*», $\phi : \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A}$, telle que $U_{\phi(\beta)} \supseteq U_\beta$, pour tout $\beta \in \mathfrak{B}$. Lorsque de telles applications existent, elles constituent un ensemble noté $\text{Mor}_{\mathfrak{Rec}(\mathbf{Y})}(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2)$. La relation «*raffine*» est clairement réflexive et transitive, et la composition de raffinements est encore un raffinement ; nous pouvons donc parler de «*la catégorie des recouvrements de l'espace \mathbf{Y}* », elle sera notée $\mathfrak{Rec}(\mathbf{Y})$.

Exercice 12.1.1-1 : Soient $\mathcal{U}_1 = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ et $\mathcal{U}_2 = \{U_\beta\}_{\beta \in \mathfrak{B}}$ deux recouvrements de \mathbf{Y} . Notons

$$\mathcal{U}_{12} = \{U_{\alpha,\beta}\}_{(\alpha,\beta) \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{B}},$$

la famille d'ouverts de la forme $U_{\alpha,\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$.

- Montrez que \mathcal{U}_{12} est un recouvrement pour \mathbf{Y} et que $\text{Mor}_{\mathfrak{Rec}(\mathbf{Y})}(\mathcal{U}_i, \mathcal{U}_{12})$ est non vide pour $i = 1, 2$.
- Montrez que $\mathfrak{Rec}(\mathbf{Y})$ n'est généralement pas une catégorie filtrante supérieurement.

Recouvrements pointés

Soit $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ un recouvrement de \mathbf{Y} . Lorsque l'ensemble d'indices \mathfrak{A} est l'ensemble \mathbf{Y} lui-même et que la condition $U_y \ni y$ est satisfaite pour tout $y \in \mathbf{Y}$, on dit que \mathcal{U} est un « *recouvrement pointé de \mathbf{Y}* ».

La sous-catégorie $\mathfrak{Rec}_*(\mathbf{Y})$ de $\mathfrak{Rec}(\mathbf{Y})$ est celle où les objets sont les recouvrements pointés de \mathbf{Y} et où $\text{Mor}_{\mathfrak{Rec}_*(\mathbf{Y})}(\{U_y\}_{y \in \mathbf{Y}}, \{V_y\}_{y \in \mathbf{Y}})$ est un singleton ou l'ensemble vide, suivant que l'application identique $\text{id} : \mathbf{Y}$ soit un raffinement, ou non. Plus simplement :

$$\text{Mor}_{\mathfrak{Rec}_*(\mathbf{Y})}(\{U_y\}_{y \in \mathbf{Y}}, \{V_y\}_{y \in \mathbf{Y}}) \neq \emptyset, \quad \text{si et seulement si,} \quad U_y \supseteq V_y, \quad \text{pour tout } y \in \mathbf{Y}.$$

La catégorie $\mathfrak{Rec}_*(\mathbf{Y})$ est une petite catégorie équivalente à un ensemble partiellement ordonné *filtrant supérieurement*, en effet :

Exercice 12.1.1-2 : Soient $\mathcal{U}_1 = \{U_y\}_{y \in \mathbf{Y}}$ et $\mathcal{U}_2 = \{V_y\}_{y \in \mathbf{Y}}$ deux recouvrements de \mathbf{Y} . Notons

$$\mathcal{U}_{12} = \{U_y \cap V_y\}_{y \in \mathbf{Y}},$$

Vérifiez que \mathcal{U}_{12} est un recouvrement pour \mathbf{Y} et que $\text{Mor}_{\mathfrak{Rec}(\mathbf{Y})}(\mathcal{U}_i, \mathcal{U}_{12})$ est non vide pour $i = 1, 2$.

12.1.2 Différents types de cochaînes de Čech relatives à un recouvrement

Nous allons rappeler, puis comparer, trois définitions courantes de complexes de cochaînes de Čech.

Fixons un préfaisceau \mathcal{P} sur \mathbf{Y} et un recouvrement $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in \mathfrak{A}}$ de \mathbf{Y} , munissons \mathfrak{A} d'un ordre total noté ' \leq '. On définit alors pour chaque $p \in \mathbb{N}$, trois groupes de p -cochaînes de Čech relatives à \mathcal{U} et à valeurs dans \mathcal{P} , respectivement appelées « *ordonnées* », « *alternées* » et « *singulières* » :

$$\begin{array}{ccccc} C_{<}^p(\mathcal{U}; \mathcal{P}) & \xrightarrow{P_p} & C_{\varepsilon}^p(\mathcal{U}; \mathcal{P}) & \xrightarrow{Q_p} & C^p(\mathcal{U}; \mathcal{P}) \\ \parallel & & \parallel & & \parallel \\ \prod_{i_0 < \dots < i_p} \mathcal{P}(U_{i_0 \dots i_p}) & \longrightarrow & \left[\prod_{i_0, \dots, i_p} \mathcal{P}(U_{i_0 \dots i_p}) \right]^\varepsilon & \longrightarrow & \prod_{\sigma \in \mathfrak{A}^{\Delta_p}} \mathcal{P}(\mathcal{U}(\sigma)) \end{array}$$

Précisons les notations : On désigne par \mathfrak{A}^{Δ_p} l'ensemble de *toutes* les applications du “ p -simplexe standard” $\Delta_p := \{0, \dots, p\}$ à valeurs dans \mathfrak{A} , et pour chaque $\sigma \in \mathfrak{A}^{\Delta_p}$, on note $\mathcal{U}(\sigma)$ l'ouvert $U_{\sigma(0) \dots \sigma(p)}$. On a donc *identification* entre $\prod_{i_0, \dots, i_p} \mathcal{P}(U_{i_0 \dots i_p})$ et $\prod_{\sigma \in \mathfrak{A}^{\Delta_p}} \mathcal{P}(\mathcal{U}(\sigma))$. Notons $\mathfrak{A}_{<}^{\Delta_p}$ le sous-ensemble des application strictement croissantes \mathfrak{A}^{Δ_p} , le groupe $\prod_{i_0 < \dots < i_p} \mathcal{P}(U_{i_0 \dots i_p})$ ⁽³⁶⁾, s'identifie alors à $\prod_{\sigma \in \mathfrak{A}_{<}^{\Delta_p}} \mathcal{P}(\mathcal{U}(\sigma))$.

³⁶ Déjà introduit dans 10.2 pour $(\mathfrak{A}, \leq) = (\mathbb{N}, \leq)$.

Définition 12.1.2-1 : Le groupe des « *p-cochaînes singulières* » relatives à un recouvrement $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ et à valeurs dans un préfaisceau \mathcal{P} , est le groupe :

$$C^p(\mathcal{U}; \mathcal{P}) := \prod_{\sigma \in \mathfrak{A}^{\Delta_p}} \mathcal{P}(\mathcal{U}(\sigma))$$

Définition 12.1.2-2 : Le groupe des « *p-cochaînes ordonnées* » relatives à un recouvrement $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in \mathfrak{A}}$ dont l'ensemble d'indices est muni d'un ordre total et à valeurs dans un préfaisceau \mathcal{P} , est le groupe :

$$C^p_{<}(\mathcal{U}; \mathcal{P}) := \prod_{\sigma \in \mathfrak{A}^{\Delta_p}_{<}} \mathcal{P}(\mathcal{U}(\sigma))$$

Faisons agir le groupe \mathfrak{S}_{p+1} des bijections de Δ_p sur \mathfrak{A}^{Δ_p} par la formule :

$$\gamma \cdot \sigma(k) = \sigma(\gamma^{-1}(k)), \quad \text{pour tout } k = 0, \dots, p.$$

Il en découle une action sur $\prod_{i_0, \dots, i_p} \mathcal{P}(U_{i_0 \dots i_p})$ donnée par la formule :

$$(\gamma \cdot \omega)_{i_0, \dots, i_p} = \omega_{i_{\gamma(0)}, \dots, i_{\gamma(p)}}, \quad \text{pour tous } \gamma \in \mathfrak{S}_{p+1} \text{ et } \omega \in \prod_{i_0, \dots, i_p} \mathcal{P}(U_{i_0 \dots i_p}).$$

Définition 12.1.2-3 : Le groupe des « *p-cochaînes alternées* » relatives à un recouvrement $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ à valeurs dans un préfaisceau \mathcal{P} , noté $C^p_\varepsilon(\mathcal{U}; \mathcal{P})$, est le sous-groupe des *p-cochaînes singulières* de $\omega \in C^p(\mathcal{U}; \mathcal{P})$ vérifiant ⁽³⁷⁾ :

$$\begin{cases} \gamma \cdot \omega = \varepsilon(\gamma) \omega, & \text{où } \varepsilon(\gamma) \text{ désigne la signature de la permutation } \gamma. \\ \omega_\sigma = 0, & \text{lorsque } \sigma \in \mathfrak{A}^{\Delta_p} \text{ n'est pas injective.} \end{cases}$$

12.1.2-1 Remarque : Une *p-cochaîne singulière* $\omega \in C^p(\mathcal{U}; \mathcal{P})$ est alternée, si et seulement si,

$$\begin{cases} \omega_{i_0, \dots, i_j, \dots, i_k, \dots, i_p} = -\omega_{i_0, \dots, i_k, \dots, i_j, \dots, i_p}; & \text{pour tous } 0 \leq j < k \leq p, \\ \omega_{i_0, \dots, i, \dots, i, \dots, i_p} = 0; \end{cases}$$

Les groupes des *p-cochaînes* sont reliés par les homomorphismes Q_p et P_p . Le premier est l'inclusion canonique des *cochaînes alternées* dans les *cochaînes singulières* et le second est défini de la manière suivante : Pour toute suite strictement croissante des entiers naturels $i_0 < \dots < i_p$ et chaque bijection $\sigma \in \mathfrak{S}_{p+1}$, on pose :

$$P_p(\omega)_{i_{\sigma(0)}, \dots, i_{\sigma(p)}} := \varepsilon(\sigma) \omega_{i_0, \dots, i_p},$$

la *p-cochaîne* ainsi obtenue est alors trivialement alternée.

Exercice 12.1.2-1 : L'application $P_p : C^p_{<}(\mathcal{U}; \mathcal{P}) \rightarrow C^p_\varepsilon(\mathcal{U}; \mathcal{P})$ est un *isomorphisme*.

³⁷ La seconde condition est uniquement nécessaire pour éviter des problèmes de 2-torsion. En particulier, l'affirmation de l'exercice 12.1.2-1 aurait été fautive en toute généralité.

12.1.3 Complexes de cochaînes de Čech

Cobord des cochaînes singulières

Pour $p \in \mathbb{N}$ et chaque $i = 0, \dots, p$, on appelle « i -ème opérateur face » de Δ_p dans Δ_{p+1} , l'application :

$$f_p^i : j \mapsto f_p^i(j) = \begin{cases} j & \text{pour } j < i; \\ j + 1 & \text{pour } i \leq j. \end{cases}$$

Pour tout ensemble \mathfrak{A} , on dispose alors d'applications (adjointes) :

$$\begin{array}{ccc} f_p^i : \mathfrak{A}^{\Delta_{p+1}} & \longrightarrow & \mathfrak{A}^{\Delta_p} \\ \sigma & \longmapsto & \sigma \circ f_p^i := \sigma \circ f_p^i \end{array}$$

qui interviennent dans la définition du morphisme « cobord » des p -cochaînes singulières :

$$d_p : C^p(\mathcal{U}; \mathcal{P}) \longrightarrow C^{p+1}(\mathcal{U}; \mathcal{P}),$$

dans l'égalité :

$$d_p(\omega)_\sigma := \sum_{k=0, \dots, p} (-1)^k \omega_{\sigma \circ f_p^k}, \quad \text{pour tout } \sigma \in \mathfrak{A}^{\Delta_{p+1}}.$$

Exercice 12.1.3-1 :

- ▶ Vérifiez l'égalité suivante pour les morphismes face : $f_{p+1}^i \circ f_p^j = f_{p+1}^j \circ f_p^{i-1}$.
- ▶ En déduire l'égalité $d_{p+1} \circ d_p = 0$.
- ▶ Montrer que si $\omega \in C^p(\mathcal{U}; \mathcal{P})$ est alternée, il en est de même de $d_p(\omega)$.

Définition 12.1.3-1 :

- ▶ On appelle « complexe des cochaînes singulières de Čech relatives à un recouvrement \mathcal{U} de Y est à valeurs dans un préfaisceau \mathcal{P} », le complexe $(C^\bullet(\mathcal{U}; \mathcal{P}), d_\bullet)$. La cohomologie de ce complexe est notée $H^*(\mathcal{U}; \mathcal{P})$.
- ▶ On appelle « complexe des cochaînes alternées de Čech relatives à un recouvrement \mathcal{U} de Y est à valeurs dans un préfaisceau \mathcal{P} », le complexe $(C_\varepsilon^\bullet(\mathcal{U}; \mathcal{P}), d_\bullet)$. La cohomologie de ce complexe est notée $H_\varepsilon^*(\mathcal{U}; \mathcal{P})$.

12.1.3-1 Remarque et exercice : Montrer que l'action de l'opérateur sur les p -cochaînes ordonnées défini en transportant d_p à l'aide des isomorphismes P_p est bien donnée par la formule :

$$d_p(\omega)_{i_0, \dots, i_{p+1}} = \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k \omega_{i_0, \dots, \widehat{i_k}, \dots, i_{p+1}}.$$

La cohomologie du complexe des cochaînes ordonnées $(C^\bullet(\mathcal{U}; \leq); \mathcal{P}, d_\bullet)$ est notée $H_\leq^*(\mathcal{U}; \mathcal{P})$.

On voit donc apparaître dans ce formalisme les différents complexes de cochaînes de Čech que l'on rencontre dans la littérature sur le sujet. Il découle clairement de l'exercice 12.1.3-1 que le complexe des cochaînes ordonnées est isomorphe à celui des cochaînes alternées. Le lecteur observera l'avantage du second par rapport au premier : l'ordre sur l'ensemble d'indices n'intervient plus ⁽³⁸⁾. Cet avantage est sensible lorsque l'on considère des morphismes de complexes de Čech provenant de raffinements de recouvrements arbitraires où l'introduction de relations d'ordre sur les ensembles d'indices complique beaucoup leur analyse. Enfin, le fait qu'il existe des raffinements non injectifs introduit un nouvel obstacle, mais il est réglé par le résultat suivant démontré dans [God₂] (cf. 3.8 pages 58–59).

Proposition 12.1.3-1 : *Le morphisme de complexes $Q_\bullet : C_\varepsilon^\bullet(\mathcal{U}; \mathcal{P}) \longrightarrow C^\bullet(\mathcal{U}; \mathcal{P})$ est une équivalence d'homotopie.*

12.1.3-2 Remarque : En particulier, les morphismes en cohomologie induits par les applications P_\bullet et Q_\bullet :

$$H_{<}^*(\mathcal{U}; \mathcal{P}) \xrightarrow[\cong]{H(P)_*} H_\varepsilon^*(\mathcal{U}; \mathcal{P}) \xrightarrow[\cong]{H(Q)_*} H^*(\mathcal{U}; \mathcal{P})$$

sont des isomorphismes *canoniques*. On comprend ainsi que pour les besoins de la cohomologie de Čech, on pourra prendre indifféremment l'un ou l'autre des complexes de Čech.

Dans la suite, on entendra par *complexe des cochaînes de Čech* le complexe des cochaînes *singulières*. A remarquer l'existence d'une *augmentation* canonique :

$$\mathbf{0} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbf{Y}) \xrightarrow{\varepsilon(\mathcal{P})} C^\bullet(\mathcal{U}; \mathcal{P})$$

qui associe à une section $\omega \in \mathcal{P}(\mathbf{Y})$ la 0-cochaîne de Čech $\varepsilon(\omega)$ dont le coefficient sur l'ouvert $U_\alpha \in \mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ est donné par $\rho_{U_\alpha}^{\mathbf{Y}}(\omega)$.

Exercice 12.1.3-2 : Vérifiez que le complexe de Čech augmenté est encore un complexe.

12.2 Functorialités des complexes de Čech relatifs aux recouvrements

Un complexe de Čech dépend de la donnée d'un recouvrement d'un espace topologique \mathbf{Y} et d'un préfaisceau \mathcal{P} sur \mathbf{Y} à valeurs dans une catégorie abélienne \mathbf{Ab} , c'est-à-dire, de la donnée d'objets des catégories $\mathfrak{Rec}(\mathbf{Y})$ et $\text{Préf}(\mathbf{Y}; \mathbf{Ab})$.

12.2.1 Functorialité par rapport aux préfaisceaux

Fixons un recouvrement \mathcal{U} de \mathbf{Y} . Pour chaque morphisme de préfaisceaux $\pi : \mathcal{P}_1 \rightarrow \mathcal{P}_2$ et chaque $p \in \mathbb{N}$, notons $C_p(\mathcal{U}; \pi)$ le morphisme de groupes abéliens de $C^p(\mathcal{U}; \mathcal{P}_1)$ vers $C^p(\mathcal{U}; \mathcal{P}_2)$ défini par :

$$\begin{aligned} \prod_{\sigma \in \mathfrak{A}^{\Delta_p}} \mathcal{P}_1(\mathcal{U}(\sigma)) &\xrightarrow{C_p(\mathcal{U}; \pi)} \prod_{\sigma \in \mathfrak{A}^{\Delta_p}} \mathcal{P}_2(\mathcal{U}(\sigma)) \\ [\omega_\sigma]_{\sigma \in \mathfrak{A}^{\Delta_p}} &\longmapsto [\pi(\mathcal{U}(\sigma))(\omega_\sigma)]_{\sigma \in \mathfrak{A}^{\Delta_p}} \end{aligned}$$

³⁸ Quel que soit l'ordre total de l'ensemble d'indices, les complexes de Čech obtenus sont *canoniquement* isomorphes.

La famille $\{C_p(\mathcal{U}; \pi)\}_{p \in \mathbb{N}}$ définit alors un *morphisme de complexes de Čech* entre $(C^\bullet(\mathcal{U}; \mathcal{P}_1), d_\bullet)$ et $(C^\bullet(\mathcal{U}; \mathcal{P}_2), d_\bullet)$. La correspondance $C^\bullet(\mathcal{U}, -)$, qui associe

$$\mathcal{P} \rightsquigarrow (C^\bullet(\mathcal{U}; \mathcal{P}), d_\bullet) \quad \text{et} \quad \pi \rightsquigarrow C_\bullet(\mathcal{U}; \pi),$$

est un *foncteur additif et exact* de la catégorie $\text{Préf}(\mathbf{Y})$ vers la catégorie $\mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})$.

12.2.1-1 Rappel : Une suite courte de préfaisceaux sur \mathbf{Y} à valeurs dans une catégorie \mathbf{Ab} :

$$0 \longrightarrow \mathcal{P}_1 \xrightarrow{\pi_1} \mathcal{P}_2 \xrightarrow{\pi_2} \mathcal{P}_3 \longrightarrow 0,$$

est exacte, si et seulement si, la suite de $\mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})$:

$$0 \longrightarrow \mathcal{P}_1(U) \xrightarrow{\pi_1(U)} \mathcal{P}_2(U) \xrightarrow{\pi_2(U)} \mathcal{P}_3(U) \longrightarrow 0,$$

est exacte, pour chaque ouvert $U \subseteq \mathbf{Y}$. Il s'ensuit que pour chaque recouvrement $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ de \mathbf{Y} et chaque $\sigma \in \mathfrak{A}^{\Delta_p}$, les suites :

$$0 \longrightarrow \mathcal{P}_1(\mathcal{U}(\sigma)) \xrightarrow{\pi_1(\mathcal{U}(\sigma))} \mathcal{P}_2(\mathcal{U}(\sigma)) \xrightarrow{\pi_2(\mathcal{U}(\sigma))} \mathcal{P}_3(\mathcal{U}(\sigma)) \longrightarrow 0,$$

sont exactes. En particulier, la suite :

$$0 \longrightarrow C^\bullet(\mathcal{U}; \mathcal{P}_1) \xrightarrow{C^\bullet(\mathcal{U}; \pi_1)} C^\bullet(\mathcal{U}; \mathcal{P}_2) \xrightarrow{C^\bullet(\mathcal{U}; \pi_2)} C^\bullet(\mathcal{U}; \mathcal{P}_3) \longrightarrow 0,$$

est exacte dans la catégorie $\mathbf{Ab}^{\mathbb{Z}}$ et donc la suite :

$$0 \longrightarrow (C^\bullet(\mathcal{U}; \mathcal{P}_1), d_\bullet) \xrightarrow{C^\bullet(\mathcal{U}; \pi_1)} (C^\bullet(\mathcal{U}; \mathcal{P}_2), d_\bullet) \xrightarrow{C^\bullet(\mathcal{U}; \pi_2)} (C^\bullet(\mathcal{U}; \mathcal{P}_3), d_\bullet) \longrightarrow 0,$$

est exacte dans la catégorie $\mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})$.

Exercice 12.2.1-1 : Vérifiez que la famille $\{C_p(\mathcal{U}; \pi)\}_{p \in \mathbb{N}}$ définit bien un morphisme de complexes de Čech entre $(C^\bullet(\mathcal{U}; \mathcal{P}_1), d_\bullet)$ et $(C^\bullet(\mathcal{U}; \mathcal{P}_2), d_\bullet)$.

Exercice 12.2.1-2 : Posons $C_{-1}(\mathcal{U}, \pi) = \pi(\mathbf{Y})$. Montrez que la correspondance

$$\mathcal{P} \rightsquigarrow \left[\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbf{Y}) \xrightarrow{\varepsilon(\mathcal{P})} C^\bullet(\mathcal{U}; \mathcal{P}) \right] \quad \text{et} \quad \pi \rightsquigarrow C_\bullet(\mathcal{U}; \pi),$$

est un *foncteur additif et exact* de $\text{Préf}(\mathbf{Y})$ vers la catégorie $\mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{C}^{0 \leq * }(\mathbf{Ab})$ des complexes avec augmentation.

12.2.2 Functorialité par rapport aux recouvrements

Fixons maintenant le préfaisceau \mathcal{P} sur \mathbf{Y} à valeurs dans une catégorie abélienne \mathbf{Ab} . La correspondance $\mathcal{U} \rightsquigarrow C^\bullet(\mathcal{U}; \mathcal{P})$ associe à chaque objet de $\mathfrak{Rec}(\mathbf{Y})$ un objet de $\mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})$. Nous allons faire correspondre à chaque morphisme de recouvrements un morphisme de complexes de sorte à ce que nous obtenions une correspondance *fonctorielle*, notée $C(-, \mathcal{P})$, de $\mathfrak{Rec}(\mathbf{Y})$ vers $\mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})$.

Soient $\mathcal{U}_1 = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ et $\mathcal{U}_2 = \{V_\beta\}_{\beta \in \mathfrak{B}}$ deux recouvrements de \mathbf{Y} . Soit $\phi : \mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A}$ un raffinement de \mathcal{U}_1 par \mathcal{U}_2 . Pour chaque $p \in \mathbb{N}$, on a l'application

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}^{\Delta_p} &\longrightarrow \mathfrak{A}^{\Delta_p} \\ \sigma &\longmapsto \phi \sigma (= \phi \circ \sigma) \end{aligned}$$

qui, compte tenu du fait que $U_{\phi(\beta)} \supseteq V_\beta$ pour tout $\beta \in \mathfrak{B}$, vérifie

$$\mathcal{U}_1(\phi\sigma) := U_{\phi\sigma(0)} \cap \cdots \cap U_{\phi\sigma(p)} \supseteq V_{\sigma(0)} \cap \cdots \cap V_{\sigma(p)} =: \mathcal{U}_2(\sigma),$$

pour tout $\sigma \in \mathfrak{B}^{\Delta_p}$. Les morphismes de restriction du préfaisceau \mathcal{P} interviennent alors pour définir le morphisme $C_p(\phi, \mathcal{P}) : C^p(\mathcal{U}_1, \mathcal{P}) \rightarrow C^p(\mathcal{U}_2, \mathcal{P})$ suivant la formule :

$$\begin{array}{ccc} \prod_{\tau \in \mathfrak{A}^{\Delta_p}} \mathcal{P}(\mathcal{U}_1(\tau)) & \xrightarrow{C_p(\phi, \mathcal{P})} & \prod_{\sigma \in \mathfrak{B}^{\Delta_p}} \mathcal{P}(\mathcal{U}_2(\sigma)) \\ \omega & \longmapsto & [C_p(\phi, \mathcal{P})(\omega)]_\sigma := \rho(\mathcal{P})_{\mathcal{U}_2(\sigma)}^{\mathcal{U}_1(\phi\sigma)} [\omega]_{\phi\sigma} \end{array}$$

12.2.2-1 Remarque et exercice : Pour chaque $p \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{P} \in \text{Préf}(\mathbf{Y}; \mathbf{Ab})$, la correspondance $\mathcal{U} \rightsquigarrow C^p(\mathcal{U}; \mathcal{P})$ et $\phi \rightsquigarrow C_p(\phi; \mathcal{P})$ est *fonctorielle* de $\mathfrak{Rec}(\mathbf{Y})$ vers \mathbf{Ab} .

Lemme 12.2.2-1 : Soient $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ deux recouvrement de \mathbf{Y} .

► Pour chaque $\phi \in \text{Mor}_{\mathfrak{Rec}(\mathbf{Y})}(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2)$, la famille des morphismes :

$$C_p(\phi; \mathcal{P}) : C^p(\mathcal{U}_1, \mathcal{P}) \rightarrow C^p(\mathcal{U}_2; \mathcal{P}), \quad \text{pour tout } p \in \mathbb{N},$$

est un morphisme de complexes de Čech.

► Pour tous $\phi_1, \phi_2 \in \text{Mor}_{\mathfrak{Rec}(\mathbf{Y})}(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2)$, il existe une homotopie $h(\phi_1, \phi_2)$ entre morphismes de complexes de Čech $C_\bullet(\phi_1; \mathcal{P})$ et $C_\bullet(\phi_2; \mathcal{P})$. De plus, la correspondance $(\phi_1, \phi_2) \rightsquigarrow h(\phi_1, \phi_2)$ est naturelle par rapport aux ϕ_i .

Démonstration : La première assertion résulte d'une simple vérification d'écritures. Soit $\omega \in C^p(\mathcal{U}_1; \mathcal{P})$, notons \mathfrak{B} l'ensemble d'indices du recouvrement \mathcal{U}_2 et soit $\sigma \in \mathfrak{B}^{\Delta_{p+1}}$. Alors

$$\begin{aligned} [d_p(C_p(\phi; \mathcal{P})(\omega))]_\sigma &= \sum_{k=0, \dots, p+1} (-1)^k [C_p(\phi; \mathcal{P})(\omega)]_{\sigma f_p^k} = \sum_{k=0, \dots, p+1} (-1)^k \rho_{\mathcal{U}_2(\sigma f_p^k)}^{\mathcal{U}_1(\phi \sigma f_p^k)} [\omega]_{\phi \sigma f_p^k} \\ [C_{p+1}(\phi; \mathcal{P})(d_p \omega)]_\sigma &= \rho_{\mathcal{U}_2(\sigma)}^{\mathcal{U}_1(\phi \sigma)} [d_p \omega]_{\phi \sigma} = \rho_{\mathcal{U}_2(\sigma)}^{\mathcal{U}_1(\phi \sigma)} \sum_{k=0, \dots, p+1} (-1)^k \rho_{\mathcal{U}_1(\phi \sigma)}^{\mathcal{U}_1(\phi \sigma f_p^k)} [\omega]_{\phi \sigma f_p^k}. \end{aligned}$$

Pour l'assertion concernant l'homotopie, plutôt que de retranscrire la démonstration classique, nous préférons donner une référence ; voir par exemple [B-T] (lemme 10.4.2 page 111). ■

Le foncteur $C(-; \mathcal{P})$ de $\mathfrak{Rec}(\mathbf{Y})$ vers $\mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})$ est donc bien défini. La propriété d'homotopie énoncée par le lemme précédent va nous permettre maintenant de donner une définition intrinsèque, *i.e.* indépendante des recouvrements, de la cohomologie de Čech d'un espace topologique \mathbf{Y} .

12.3 Cohomologie de Čech d'un espace topologique

Vus les résultats de la section précédente, on est tenté de définir la cohomologie de Čech en prenant la limite inductive des cohomologies relatives aux recouvrements. Cependant une obstruction apparaît très rapidement : les recouvrements constituent une *classe* et non pas un *ensemble*, or les limites inductives (comme bien d'autres opérations) n'ont de sens que lorsque l'on se restreint à des familles d'objets. Plus précisément, lorsque des indices existent, ceux-ci doivent constituer un ensemble ; les complexes de Čech associés à des recouvrements sont indexés par les recouvrements eux-mêmes, d'où l'obstruction.

Petite catégorie des recouvrements tautologiques

Un recouvrement $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ sera appelé « *tautologique* » lorsque l'ensemble d'indices \mathfrak{A} est une partie de $\text{Ouv}(\mathbf{Y})$ et que l'on a : $U_\alpha = \alpha$, pour tout $\alpha \in \mathfrak{A}$. Il y a bien évidemment équivalence entre la donnée d'un recouvrement tautologique et la donnée d'un élément de l'ensemble $\text{Parties}(\text{Ouv}(\mathbf{Y}))$ dont la réunion est \mathbf{Y} tout entier. Notons $\mathfrak{Rec}_{\text{taut}}(\mathbf{Y})$ la sous-catégorie pleine de $\mathfrak{Rec}(\mathbf{Y})$ dont les objets sont les recouvrements tautologiques ; c'est une *petite catégorie, mais elle n'est pas filtrante supérieurement en général* bien que pour deux recouvrements arbitrairement choisis, il existe toujours un troisième qui les raffine.

Remarquons maintenant que tout recouvrement $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ détermine un recouvrement tautologique. En effet, l'ensemble $E(\mathcal{U}) := \{U_\alpha \mid \alpha \in \mathfrak{A}\}$ est un élément bien défini de $\text{Parties}(\text{Ouv}(\mathbf{Y}))$ et nous pouvons associer à \mathcal{U} le recouvrement tautologique $\mathcal{U}' = \{U\}_{U \in E(\mathcal{U})}$. Ceci étant, les recouvrements \mathcal{U} et \mathcal{U}' se raffinent mutuellement. En effet, l'application $\alpha \mapsto U_\alpha$ est un raffinement de \mathcal{U}' par \mathcal{U} , et l'axiome du choix permet de construire des applications $\phi : E(\mathcal{U}) \rightarrow \mathfrak{A}$ telles que $U_{\phi(V)} = V$ pour tout $V \in E(\mathcal{U})$. En particulier, les cohomologies de Čech associées à ces recouvrements sont canoniquement isomorphes d'après le lemme 12.2.2-1.

Nous pouvons maintenant définir la cohomologie de Čech en remarquant que pour $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in \mathfrak{Rec}_{\text{taut}}(\mathbf{Y})$, tels que $\phi \in \text{Mor}_{\mathfrak{Rec}(\mathbf{Y})}(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2) \neq \emptyset$, l'homomorphisme $H(\phi)_* : H^*(\mathcal{U}_1, \mathcal{P}) \rightarrow H^*(\mathcal{U}_2, \mathcal{P})$ est *indépendant* de ϕ . Ceci entraîne comme conséquence le fait que le système

$$\left\{ H^*(\mathcal{U}, \mathcal{P}); H_*(\phi) \mid \phi \in \text{Mor}(\mathcal{U}, \mathcal{V}); \mathcal{V}, \mathcal{U} \in \text{Ob}(\mathfrak{Rec}_{\text{taut}}(\mathbf{Y})) \right\} \quad (\diamond)$$

est un système *inductif et filtrant supérieurement* de la catégorie $\mathbf{C}^*(\mathbf{Ab})$. Nous pouvons donc légitimement définir « *la cohomologie de Čech de \mathbf{Y} à valeurs dans le préfaisceau \mathcal{P}* » par :

$$\boxed{\check{H}^*(\mathbf{Y}; \mathcal{P}) := \varinjlim_{\mathcal{U} \in \text{Ob}(\mathfrak{Rec}_{\text{taut}}(\mathbf{Y}))} H^*(\mathcal{U}; \mathcal{P})}$$

12.3-1 Cohomologie de Čech d'une variété différentiable : Sur une variété différentiable M , la sous-catégorie de $\mathfrak{Rec}_*(M)$ de **bons** recouvrements pointés est *cofinale*. Notons \mathbb{R} le préfaisceau constant qui associe à tout ouvert $U \subseteq M$ le corps des nombres réels et dans lequel les morphismes de restriction sont donnés par $\text{id}_{\mathbb{R}}$. Les résultats de la section 10.3 (page 141) prouvent alors que la cohomologie de Čech de M à valeurs dans le préfaisceau \mathbb{R} , est canoniquement isomorphe à la cohomologie de de Rham :

$$\check{H}^*(M; \mathbb{R}) \equiv H_{\text{DR}}^*(M)$$

12.4 Complexes de Čech d'un espace topologique

Dans le même ordre d'idées du paragraphe précédent, nous pouvons chercher à définir le complexe de Čech pour un espace topologique de manière intrinsèque. Mais pour cela la catégorie $\mathfrak{Rec}_{\text{taut}}(\mathbf{Y})$ ne peut nous être d'utilité puisque le système des complexes qu'elle fournit n'est pas filtrant (à cause de la multitude de morphismes reliant deux complexes donnés) ; c'est alors que la catégorie des recouvrements pointés $\mathfrak{Rec}_*(\mathbf{Y})$ intervient. En effet, on prouve assez trivialement que le système

$$\left\{ H^*(\mathcal{U}, \mathcal{P}); H_*(\phi) \mid \phi \in \text{Mor}_{\mathfrak{Rec}_*(\mathbf{Y})}(\mathcal{U}, \mathcal{V}); \mathcal{V}, \mathcal{U} \in \text{Ob}(\mathfrak{Rec}_*(\mathbf{Y})) \right\}$$

est *cofinal* dans (\diamond) , de sorte que sa limite inductive calculera également la cohomologie de Čech. Mais mieux encore, le système

$$\left\{ \mathbf{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{P}); \mathbf{C}_\bullet(\phi) \mid \in \text{Mor}_{\mathfrak{R}ec_*(\mathbf{Y})}(\mathcal{U}, \mathcal{V}); \mathcal{V}, \mathcal{U} \in \text{Ob}(\mathfrak{R}ec_*(\mathbf{Y})) \right\}$$

est, lui aussi filtrant supérieurement; nous pouvons donc définir «le complexe de Čech de \mathbf{Y} à valeurs dans le préfaisceau \mathcal{P} » par :

$$\boxed{(\check{\mathbf{C}}^\bullet(\mathbf{Y}; \mathcal{P}), d_\bullet) := \varinjlim_{\mathcal{U} \in \text{Ob}(\mathfrak{R}ec_*(\mathbf{Y}))} (\mathbf{C}^\bullet(\mathcal{U}; \mathcal{P}), d_\bullet)}$$

On aura alors :

$$\boxed{\check{\mathbf{H}}^*(\mathbf{Y}; \mathcal{P}) = H^*(\check{\mathbf{C}}^\bullet(\mathbf{Y}; \mathcal{P}), d_\bullet)}$$

Les augmentations $\varepsilon(\mathcal{P}) : \mathcal{P}(\mathbf{Y}) \rightarrow \mathbf{C}^\bullet(\mathcal{U}; \mathcal{P})$ passent également aux limites inductives induisant une augmentation et un morphisme canoniques :

$$\boxed{0 \rightarrow \mathcal{P}(\mathbf{Y}) \rightarrow \check{\mathbf{C}}^\bullet(\mathbf{Y}; \mathcal{P}) \quad \text{et} \quad \mathcal{P}(\mathbf{Y}) \rightarrow \check{\mathbf{H}}^0(\mathbf{Y}; \mathcal{P})}$$

12.5 Functorialités du complexe et de la cohomologie de Čech

12.5.1 Functorialité par rapport aux préfaisceaux

Suite à nos remarques de la section 12.2.1, nous pouvons affirmer que le foncteur

$$\check{\mathbf{C}}^\bullet(\mathbf{Y}, -) : \text{Préf}(\mathbf{Y}) \rightsquigarrow \mathbf{C}^*(\mathbf{Ab}),$$

étant limite inductive de foncteurs exacts, est *additif et exact*; en particulier, associée à toute suite exacte courte de préfaisceaux sur \mathbf{Y} :

$$0 \longrightarrow \mathcal{P}_1 \longrightarrow \mathcal{P}_2 \longrightarrow \mathcal{P}_3 \longrightarrow 0,$$

on a une la suite exacte de complexes de Čech :

$$\boxed{0 \longrightarrow \check{\mathbf{C}}^\bullet(\mathbf{Y}; \mathcal{P}_1) \longrightarrow \check{\mathbf{C}}^\bullet(\mathbf{Y}; \mathcal{P}_2) \longrightarrow \check{\mathbf{C}}^\bullet(\mathbf{Y}; \mathcal{P}_3) \longrightarrow 0}$$

et une suite exacte longue de cohomologies de Čech :

$$\boxed{\longrightarrow \check{\mathbf{H}}^k(\mathbf{Y}; \mathcal{P}_1) \longrightarrow \check{\mathbf{H}}^k(\mathbf{Y}; \mathcal{P}_2) \longrightarrow \check{\mathbf{H}}^k(\mathbf{Y}; \mathcal{P}_3) \xrightarrow{[+1]} \longrightarrow}$$

12.5.1-1 Remarque : On a le même type de dépendance fonctorielle pour les complexes de Čech augmentés.

12.5.2 Functorialité par rapport à l'espace topologique

Soit maintenant $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ une application continue. L'application $f^{-1} : \text{Ouv}(\mathbf{Y}) \rightarrow \text{Ouv}(\mathbf{X})$ respecte l'ordre d'inclusion, les intersections d'ouverts, et transforme tout recouvrement (resp. tautologique) de \mathbf{Y} en un recouvrement (resp. tautologique) de \mathbf{X} . On définit maintenant le foncteur

$f^{-1} : \mathfrak{Rec}_*(\mathbf{Y}) \rightsquigarrow \mathfrak{Rec}_*(\mathbf{X})$ de la manière suivante. Pour chaque recouvrement pointé $\mathcal{U} = \{U_x\}_{x \in \mathbf{Y}}$ de \mathbf{Y} , on pose $f^{-1}\mathcal{U} = \{f^{-1}(U_{f(x)})\}_{x \in \mathbf{X}}$. De plus, nous avons remarqué que la donnée de $\phi \in \text{Mor}_{\mathfrak{Rec}_*}(\mathbf{Y})(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2)$ équivaut au fait que pour chaque $y \in \mathbf{Y}$, l'ouvert de \mathcal{U}_1 indexé par y contient l'ouvert de \mathcal{U}_2 indexé par ce même élément; il est immédiat alors de constater que cette condition sera également satisfaite par les recouvrements pointés $f^{-1}\mathcal{U}_1$ et $f^{-1}\mathcal{U}_2$. Ainsi définie, la correspondance f^{-1} est fonctorielle entre les catégories des recouvrements pointés.

Ceci étant, on a un morphisme canonique

$$\begin{aligned} \check{C}^\bullet(\mathcal{U}; f_*\mathcal{P}) &\longrightarrow \check{C}^\bullet(f^{-1}\mathcal{U}; \mathcal{P}) \\ \omega &\longmapsto \bar{\omega} \end{aligned} \quad (**)$$

pour tout recouvrement pointé \mathcal{U} de \mathbf{Y} et tout préfaisceau \mathcal{P} sur \mathbf{X} ⁽³⁹⁾.

12.5.2-1 Précision : Le morphisme $(**)$ est défini de la manière suivante : Posons $\mathcal{U} = \{U_y\}_{y \in \mathbf{Y}}$ et $f^{-1}\mathcal{U} = \{V_x\}_{x \in \mathbf{X}}$, où $V_x = f^{-1}(U_{f(x)})$. Une p -cochaîne $\omega \in \check{C}^p(\mathcal{U}; f_*\mathcal{P})$ associe alors à chaque $p+1$ -uplet $(y_0, \dots, y_p) \in \mathbf{Y}$, un élément $\omega_{y_0, \dots, y_p} \in \mathcal{P}(f^{-1}(U_{y_0, \dots, y_p}))$. Or, lorsque $y_j = f(x_j)$, on a l'égalité

$$f^{-1}(U_{y_0, \dots, y_p}) = f^{-1}(U_{f(x_0)}) \cap \dots \cap f^{-1}(U_{f(x_p)}) = V_{x_0, \dots, x_p},$$

et la p -cochaîne $\bar{\omega} \in \check{C}^p(f^{-1}\mathcal{U}; \mathcal{P})$ qui associe au $p+1$ -uplet $(x_0, \dots, x_p) \in \mathbf{X}$, l'élément $\omega_{f x_0, \dots, f x_p} \in \mathcal{P}(V_{x_0, \dots, x_p})$ est bien définie.

Et lorsque \mathcal{U} parcourt les objets de la petite catégorie $\mathfrak{Rec}_*(\mathbf{Y})$, les recouvrements $f^{-1}\mathcal{U}$ parcourent une partie de $\text{Ob}(\mathfrak{Rec}_*(\mathbf{X}))$ ⁽⁴⁰⁾. On a donc une famille inductive de morphismes paramétrée par la catégorie $\mathfrak{Rec}_*(\mathbf{Y})$:

$$C^\bullet(f^{-1}\mathcal{U}; \mathcal{P}) \longrightarrow \varinjlim_{\mathcal{V} \in \mathfrak{Rec}_*(\mathbf{X})} C^\bullet(\mathcal{V}, \mathcal{P}) = \check{C}^\bullet(\mathbf{X}; \mathcal{P}),$$

qui composée à la famille de morphismes $(**)$ ⁽⁴¹⁾ donne lieu à un morphisme canonique :

$$\boxed{\check{C}^\bullet(\mathbf{Y}; f_*\mathcal{P}) \longrightarrow \check{C}^\bullet(\mathbf{X}; \mathcal{P})} \quad \text{pour tout } \mathcal{P} \in \text{Préf}(\mathbf{X}), \quad (\diamond)$$

fonctoriel sur la catégorie des préfaisceau sur \mathbf{X} . En passant aux cohomologies, on a donc

$$\boxed{\check{H}^*(\mathbf{Y}; f_*\mathcal{P}) \longrightarrow \check{H}^*(\mathbf{X}; \mathcal{P})} \quad \text{pour tout } \mathcal{P} \in \text{Préf}(\mathbf{X}), \quad (\infty)$$

Supposons maintenant $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ ouverte. Nous avons montré dans la section 10.1.1, l'existence d'un morphisme de préfaisceaux sur \mathbf{Y} entre $\mathcal{P} \rightarrow f_*f^{-1}\mathcal{P}$, et nous avons signalé dans le premier paragraphe de cette section la functorialité du complexe de Čech vis-à-vis des préfaisceaux; il en découle l'existence de morphismes canoniques de complexes de Čech :

$$\check{C}^\bullet(\mathbf{Y}; \mathcal{P}) \longrightarrow \check{C}^\bullet(\mathbf{Y}; f_*f^{-1}\mathcal{P}) \longrightarrow \check{C}^\bullet(\mathbf{X}; f^{-1}\mathcal{P}),$$

³⁹ On note $f_*\mathcal{P}$ et $f^{-1}\mathcal{P}$ les préfaisceaux *image directe* et *image inverse* introduits dans la section 10.1.1, en page 139.

⁴⁰ Lorsque \mathbf{X} est une partie ouverte V de \mathbf{Y} et que f est l'injection canonique, les recouvrements $f^{-1}\mathcal{U}$ parcourent, en fait, la *totalité* d'objets de $\mathfrak{Rec}_*(V)$.

⁴¹ Également paramétrée par $\mathfrak{Rec}_*(\mathbf{Y})$.

(le deuxième d'après (\diamond)) donnant lieu aux morphismes analogues de (\diamond) et $(\diamond\diamond)$:

$$\boxed{\begin{array}{l} \check{C}^\bullet(\mathbf{Y}; \mathcal{P}) \longrightarrow \check{C}^\bullet(\mathbf{X}; f^{-1}\mathcal{P}) \\ \check{H}^*(\mathbf{Y}; \mathcal{P}) \longrightarrow \check{H}^*(\mathbf{X}; f^{-1}\mathcal{P}) \end{array}} \quad \text{pour tout } \mathcal{P} \in \text{Préf}(\mathbf{Y}). \quad (\diamond\diamond')$$

Si maintenant on fait parcourir à f les inclusions des ouverts de \mathbf{Y} , nous obtenons un préfaisceau sur \mathbf{Y} (!); mais cela constitue le sujet de la section suivante.

12.6 Préfaisceau de complexes de Čech et faisceaux

Soit \mathcal{P} un préfaisceau sur l'espace topologique \mathbf{Y} . Nous venons de voir le caractère fonctoriel des correspondances qui associent aux ouverts $V \subseteq \mathbf{Y}$, à la fois, les complexes avec augmentation $\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{P}(V) \rightarrow \check{C}^\bullet(V; \mathcal{P}|_V)$, les cohomologues de Čech $\check{H}^k(V; \mathcal{P}|_V)$, et les morphismes $\mathcal{P}(V) \rightarrow \check{H}^0(V; \mathcal{P}|_V)$.

Ce comportement fonctoriel se retrouve également, pour un recouvrement (non nécessairement pointé) donné \mathcal{U} et pour l'injection canonique $j : V \hookrightarrow \mathbf{Y}$, dans les morphismes

$$C^\bullet(\mathcal{U}; \mathcal{P}) \longrightarrow C^\bullet(\mathcal{U}; j_*(\mathcal{P}|_V)) \longrightarrow C^\bullet(\mathcal{U} \cap V; \mathcal{P}|_V),$$

où $\mathcal{U} \cap V$ désigne le recouvrement $j^{-1}\mathcal{U}$ dont les ouverts sont, par conséquent, les *traces* des ouverts de \mathcal{U} sur V .

Nous allons donc pouvoir «*préfaisceautiser*» la section précédente en définissant :

$$\begin{cases} \mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U}; \mathcal{P}) : \text{le préfaisceau } V \rightsquigarrow C^\bullet(\mathcal{U} \cap V; \mathcal{P}|_V); \\ \check{\mathcal{C}}^\bullet(\mathbf{Y}; \mathcal{P}) : \text{le préfaisceau } V \rightsquigarrow \check{C}^\bullet(V; \mathcal{P}|_V); \\ \check{\mathcal{H}}^k(\mathbf{Y}; \mathcal{P}) : \text{le préfaisceau } V \rightsquigarrow \check{H}^k(V; \mathcal{P}|_V). \end{cases}$$

12.6-1 Remarque :

- Pour chaque ouvert $V \subseteq \mathbf{Y}$, le foncteur $\mathfrak{R}ec_*(\mathbf{Y}) \rightsquigarrow \mathfrak{R}ec_*(V)$ qui fait correspondre $\mathcal{U} \rightsquigarrow \mathcal{U} \cap V$ est “surjectif” ; tout recouvrement pointé de V de même que tout raffinement dans $\mathfrak{R}ec_*(V)$ proviennent de $\mathfrak{R}ec_*(\mathbf{Y})$. Il s'ensuit que la restriction du préfaisceau $\check{\mathcal{C}}^\bullet(\mathbf{Y}; \mathcal{P})$ à V , donne le préfaisceau $\check{\mathcal{C}}^\bullet(V; \mathcal{P}|_V)$:

$$\check{\mathcal{C}}^\bullet(\mathbf{Y}; \mathcal{P})|_V = \check{\mathcal{C}}^\bullet(V; \mathcal{P}|_V).$$

- D'autre part, la catégorie $\text{Préf}(\mathbf{Y})$, étant abélienne, la notion de préfaisceau de cohomologie pour un complexe de préfaisceaux est bien définie. Notons $h^k(\mathcal{P}, d_\bullet)$ le k -ième préfaisceau de cohomologie d'un complexe de préfaisceaux (\mathcal{P}, d_\bullet) , on a alors :

$$h^k(\check{\mathcal{C}}^\bullet(\mathbf{Y}; \mathcal{P})) \equiv \check{\mathcal{H}}^k(\mathbf{Y}; \mathcal{P}),$$

pour tout préfaisceau \mathcal{P} et tout $k \in \mathbb{N}$ (isomorphisme naturel).

- La naturalité de ces constructions par rapport à la donnée du préfaisceau \mathcal{P} , donne des foncteurs dans la catégorie $\text{Préf}(\mathbf{Y})$ vers elle-même (ou celle de ses complexes). Notons-les :

$$\mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U}; _), \quad \check{\mathcal{C}}^\bullet(\mathbf{Y}; _) \quad \text{et} \quad \check{\mathcal{H}}^\bullet(\mathbf{Y}; _).$$

Les deux premiers sont *exacts* et le dernier, appliqué à une suite exacte courte de préfaisceaux :

$$\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{P}_1 \longrightarrow \mathcal{P}_2 \longrightarrow \mathcal{P}_3 \rightarrow \mathbf{0},$$

donne lieu à une suite exacte longue :

$$\mathbf{0} \rightarrow \check{\mathcal{H}}^0(\mathbf{Y}; \mathcal{P}_1) \rightarrow \check{\mathcal{H}}^0(\mathbf{Y}; \mathcal{P}_2) \rightarrow \check{\mathcal{H}}^0(\mathbf{Y}; \mathcal{P}_3) \rightarrow \check{\mathcal{H}}^1(\mathbf{Y}; \mathcal{P}_1) \rightarrow \check{\mathcal{H}}^1(\mathbf{Y}; \mathcal{P}_2) \rightarrow \check{\mathcal{H}}^1(\mathbf{Y}; \mathcal{P}_3) \rightarrow \dots$$

En particulier, le foncteur $\check{\mathcal{H}}^0(\mathbf{Y}; -)$ est exact à gauche.

- A remarquer aussi que la naturalité de l'augmentation donne des morphismes de préfaisceaux canoniques :

$$\begin{cases} \mathbf{0} \rightarrow \mathcal{P} \xrightarrow{\varepsilon(\mathcal{U}; \mathcal{P})} \mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U}; \mathcal{P}) \\ \mathbf{0} \rightarrow \mathcal{P} \xrightarrow{\varepsilon(\mathbf{Y}; \mathcal{P})} \check{\mathcal{C}}^\bullet(\mathbf{Y}; \mathcal{P}) \\ \mathcal{P} \xrightarrow{\varepsilon(\mathcal{P})} \check{\mathcal{H}}^0(\mathbf{Y}; \mathcal{P}) \end{cases}$$

Définition 12.6-1 : Un préfaisceau \mathcal{P} sur \mathbf{Y} est appelé « *faisceau* » lorsque le morphisme :

$$\mathcal{P} \xrightarrow[\cong]{\varepsilon(\mathcal{P})} \check{\mathcal{H}}^0(\mathbf{Y}; \mathcal{P}),$$

est un *isomorphisme*.

Proposition 12.6-1 : Les assertions suivantes sont équivalentes pour un préfaisceau \mathcal{P} sur \mathbf{Y} :

- 1) \mathcal{P} est un faisceau ;
- 2) Pour tout ouvert $V \subseteq \mathbf{Y}$ et tout recouvrement \mathcal{V} de V , la suite :

$$\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{P}(V) \rightarrow C^0(\mathcal{V}; \mathcal{P}|_V) \rightarrow C^1(\mathcal{V}; \mathcal{P}|_V).$$

est exacte.

12.6-2 Remarque : La lecture de la condition (2) en termes de sections de préfaisceaux permet de retrouver la définition habituelle :

On dit qu'un préfaisceau \mathcal{P} sur \mathbf{Y} est un « *faisceau* », s'il satisfait aux deux conditions :

F-a) Unicité ou non trivialité locale. Une section σ de \mathcal{P} au-dessus d'un ouvert $U \subseteq \mathbf{Y}$ est nulle, s'il existe un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = \{V_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ de U , tel que les restrictions $\sigma|_{V_\alpha}$ soient toutes nulles.

F-b) Existence de recollements de sections. Pour toute famille d'ouverts $\mathcal{U} = \{V_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ et toute famille de sections $\{\sigma_\alpha \in \mathcal{P}(V_\alpha)\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$, telle que pour tous $\alpha, \beta \in \mathfrak{A}$ on ait

$$\sigma_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = \sigma_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta},$$

il existe une section σ de \mathcal{P} au-dessus de l'ouvert $U = \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} V_\alpha$, telle que $\sigma|_{V_\alpha} = \sigma_\alpha$ pour tout $\alpha \in \mathfrak{A}$.

La condition (F-a) équivaut à l'injectivité de l'augmentation dans la suite de (2), et la condition (F-b) équivaut à l'exactitude au niveau du terme central de la même suite.

Démonstration de 12.6-1 : [1 \Rightarrow 2] Soit \mathcal{P} un faisceau et supposons l'application $\mathcal{P}(V) \rightarrow C^0(\mathcal{U}; \mathcal{P}|_V)$ non injective pour un V donné et un certain recouvrement (pointé) \mathcal{V} de V . On vérifie alors que la sous-catégorie des recouvrements pointés de V , qui raffinent \mathcal{V} , est cofinale dans la catégorie $\mathfrak{Rec}_*(V)$. Le passage à la limite inductive suivant cette famille donne le morphisme $\mathcal{P}(V) \rightarrow \check{C}^0(V; \mathcal{P})$ dont le noyau restera nécessairement non trivial, et le préfaisceau \mathcal{P} ne s'injecte pas dans $\check{\mathcal{H}}^0(\mathbf{Y}; \mathcal{P})$ ce qui est contradictoire. On est donc forcé d'admettre que $\mathcal{P}(V) \rightarrow C^0(\mathcal{U}; \mathcal{P}|_V)$ est **toujours injective**.

Supposons maintenant que la suite de **2** ne soit pas exacte au terme milieu. On a alors un diagramme de la forme

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{0} & \rightarrow & \mathcal{P}(V) & \xrightarrow{\varepsilon(\mathcal{V})} & C^0(\mathcal{V}; \mathcal{P}|_V) & \xrightarrow{d_0(\mathcal{V})} & C^1(\mathcal{V}; \mathcal{P}|_V) \\ & & \parallel & & \downarrow \text{lim} & & \downarrow \text{lim} \\ \mathbf{0} & \rightarrow & \mathcal{P}(V) & \xrightarrow{\varepsilon(V)} & \check{C}^0(V; \mathcal{P}|_V) & \xrightarrow{d_0(V)} & \check{C}^1(V; \mathcal{P}|_V) \end{array}$$

et comme $\mathcal{P}(V) \equiv \check{H}^0(V; \mathcal{P}|_V)$, la deuxième ligne est exacte. Soit $\xi \in \ker d_0(\mathcal{V}) \setminus \text{im } \varepsilon(\mathcal{V})$, notons $\bar{\xi}$ son image dans $\check{C}^0(V; \mathcal{P}|_V)$; elle appartient au noyau de $d_0(V)$ et provient donc d'un certain $\zeta \in \mathcal{P}(V)$. L'élément $\tilde{\xi} = \xi - \varepsilon(\mathcal{V})(\zeta)$ est alors annulé par le morphisme vertical central de passage à la limite suivant les recouvrements de V . Comme nous travaillons avec des recouvrements pointés et que $\tilde{\xi} \neq 0$, on aura $0 \neq \tilde{\xi}_v \in V_v$ pour un certain $v \in V$ (V_v est alors l'ouvert de \mathcal{V} indexé par v). Ceci étant, on vérifie aisément que la catégorie des recouvrements $\mathcal{W} = \{W_w\}_{w \in V}$ vérifiant la relation $W_w \subseteq V_v$ pour tout $w \in V_v$, est *cofinale*. Il existe donc un raffinement \mathcal{V}' de \mathcal{V} de cette forme dans lequel l'image de $\tilde{\xi}$ est nulle. En particulier l'application

$$\mathcal{P}(V_v) \rightarrow C^0(\mathcal{V}' \cap V_v; \mathcal{P}|_{V_v})$$

annule $\tilde{\xi}_v$ et est donc non injective, ce qui est de nouveau contradictoire. La suite dans (2) est donc nécessairement exacte lorsque \mathcal{P} est un faisceau.

[2 \Rightarrow 1] L'exactitude des suites étant préservée par les limites inductives, la suite de préfaisceaux :

$$\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{P} \longrightarrow \check{C}^0(\mathbf{Y}; \mathcal{P}) \longrightarrow \check{C}^1(\mathbf{Y}; \mathcal{P}),$$

est exacte; cela signifie très précisément que \mathcal{P} est un faisceau. ■

12.7 Etude locale du préfaisceau des complexes de Čech

Chaque point $y \in \mathbf{Y}$ détermine un foncteur «germe» de la catégorie $\text{Préf}(\mathbf{Y}; \mathbf{Ab})$ vers la catégorie \mathbf{Ab} . Pour tout préfaisceau \mathcal{P} , on note $\mathcal{P}_{(y)}$ le germe de \mathcal{P} en y , on a :

$$\mathcal{P}_{(y)} = \varinjlim_{U \ni y} \mathcal{P}(U),$$

où U parcourt la catégorie des voisinages ouverts de y . De même, si $\varphi : \mathcal{P}_1 \rightarrow \mathcal{P}_2$ est un morphisme de préfaisceaux, la limite inductive de la famille de morphismes $\varphi(U) : \mathcal{P}_1(U) \rightarrow \mathcal{P}_2(U)$ suivant la catégorie des voisinages de y est également définie, cette limite notée $\varphi_{(y)}$ est appelée «le germe de φ en y ». Le foncteur ainsi obtenu est *additif et exact*.

Le résultat suivant joue un rôle fondamental en théorie de faisceaux. Dans ce contexte, on verra que le préfaisceau de complexes de Čech augmentés associés à un faisceau \mathcal{F} , est un complexe de *faisceaux*. La proposition suivante affirme alors que ce complexe est une *résolution* canonique (dans la catégorie des faisceaux) de \mathcal{F} .

Théorème 12.7-1 : *Soit \mathcal{P} un préfaisceaux sur \mathbf{Y} . Pour tout point $y \in \mathbf{Y}$, le complexe de germes en y du préfaisceau des complexes de Čech augmentés :*

$$\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{P} \rightarrow \check{C}^\bullet(\mathbf{Y}; \mathcal{P}),$$

est exact.

Démonstration : ⁽⁴²⁾ Fixons un point $y \in Y$. Nous devons prouver que le complexe :

$$0 \rightarrow \mathcal{P}_{(y)} \xrightarrow{\varepsilon_{(y)}} \check{\mathcal{C}}^0(Y; \mathcal{P})_{(y)} \xrightarrow{d_0(y)} \check{\mathcal{C}}^1(Y; \mathcal{P})_{(y)} \xrightarrow{d_1(y)} \check{\mathcal{C}}^2(Y; \mathcal{P})_{(y)} \xrightarrow{d_2(y)} \dots$$

est exact.

- **Exactitude aux termes supérieurs.** Soit $\tilde{\xi} \in \check{\mathcal{C}}^p(Y; \mathcal{P})_{(y)}$, tel que $d_p \tilde{\xi} = 0$. Il existe alors un voisinage $V \ni y$ et un représentant ξ de $\tilde{\xi}$ dans $\check{C}^p(V; \mathcal{P}|_V)$, tel que $d_p \xi = 0$. Comme d'autre part

$$\check{C}^p(V; \mathcal{P}|_V) = \varinjlim_{\mathcal{U} \in \mathfrak{R}_{\text{rec}}(V)} C^p(\mathcal{U}; \mathcal{P}|_V),$$

il existe un recouvrement $\mathcal{W} = \{W_v\}_{v \in V}$ de V et un représentant $\omega \in C^p(\mathcal{W}; \mathcal{P}|_V)$ de ξ , vérifiant également $d_p \omega = 0$. Nous pouvons maintenant restreindre nos considérations au voisinage ouvert W_y de y et regarder le complexe de Čech restreint $C^\bullet(\mathcal{W}'; \mathcal{P}|_{W_y})$, où $\mathcal{W}' := \mathcal{W} \cap W_y$. On remarquera une propriété essentielle du recouvrement \mathcal{W}' , à savoir,

$$W_y \text{ est l'ouvert de } \mathcal{W} \text{ indexé par } y, \text{ et } W_y \supseteq W_w, \text{ quel que soit } w \in W_y. \quad (\text{P})$$

L'image ω' de ω dans ce nouveau complexe continue de représenter le germe $\tilde{\xi}$ de départ et de vérifier la relation $d_p \omega' = 0$.

Soit $h(y) : C^p(\mathcal{W}'; \mathcal{P}|_{W_y}) \rightarrow C^{p-1}(\mathcal{W}'; \mathcal{P}|_{W_y})$ définie par :

$$[h(y)(\nu)]_{w_1, \dots, w_p} = \nu_{y, w_1, \dots, w_p} \in W_y \cap W_{w_1} \cap \dots \cap W_{w_p} = W_{w_1} \cap \dots \cap W_{w_p},$$

pour toute p -cochaîne $\nu \in \prod_{w \in W_y} \mathcal{P}(W_w)$, où l'égalité de droite résulte de la propriété (P). On a alors pour la cochaîne ω' :

$$\begin{aligned} \left[d_{p-1}(h(y)(\omega')) \right]_{w_0, w_1, \dots, w_p} &= \sum_{k=0, \dots, p} (-1)^k \left[h(y)(\omega') \right]_{w_0, \dots, \widehat{w_k}, \dots, w_p} \\ &= \sum_{k=0, \dots, p} (-1)^k \left[\omega' \right]_{y, w_0, \dots, \widehat{w_k}, \dots, w_p} \end{aligned} \quad (1)$$

Or, la condition de cocyclicité $d_p \omega'$, lue sur la coordonnée y, w_0, \dots, w_p , donne :

$$0 = \left[d_p \omega' \right]_{y, w_0, \dots, w_p} = \left[\omega' \right]_{w_0, \dots, w_k, \dots, w_p} - \sum_{k=0, \dots, p} (-1)^k \left[\omega' \right]_{y, w_0, \dots, \widehat{w_k}, \dots, w_p}, \quad (2)$$

ce qui reporté dans (1) montre l'égalité $d_{p-1}(h(y)(\omega')) = \omega'$.

On conclut ainsi que le germe de cocycle $\tilde{\omega}$ est le cobord du germe en y déterminé par le $(p-1)$ -cocycle $h(y)(\omega')$.

- **Injectivité de $\varepsilon_{(y)}$.** Les mêmes choix de voisinages que dans le cas des termes supérieurs donnent, à la place de l'égalité (2), l'égalité :

$$\left[\varepsilon(\omega') \right]_y = \omega',$$

d'où l'injectivité. ■

Exercice 12.7-1 : Indiquez quelles (légères) modifications doivent être apportés aux arguments de la démonstration précédente pour prouver l'exactitude au niveau des 0-cochaînes.

⁴² Vous retrouverez cette démonstration dans le cadre de la théorie des faisceaux dans [God₂] ; théorème 5.2.1 page 206.

12.7-1 Remarque : Il importe de bien remarquer que dans la démonstration de 12.7-1, la définition de l'opérateur $h(y)$ dépend *aussi* de la donnée du germe $\tilde{\xi}$. Les différents choix de voisinages intervenant dans les arguments sont intimement liés à $\tilde{\xi}$; en particulier, il n'existe pas, *a priori*, des choix universels, et il n'y a pas d'homotopie pour le complexe de germes.

Lorsque l'espace Y est une variété différentiable, nous avons pourtant donné pour chaque recouvrement \mathcal{U} donné, des homotopies du complexe augmenté $\mathbf{0} \rightarrow \underline{\Omega}^p \rightarrow C^\bullet(\mathcal{U}; \underline{\Omega}^p)$, où $\underline{\Omega}^p$ désigne le faisceau des p -formes différentielles sur Y . Cela a été possible essentiellement pour deux raisons :

- a) Y admet des partitions de l'unité dont les éléments appartiennent au faisceau des fonctions $\underline{\Omega}^0(Y)$.
- b) Les faisceaux $\underline{\Omega}^p(Y)$ sont des $\underline{\Omega}^0(Y)$ -modules.

A remarquer que (a) est une propriété *très spécifique* des espaces paracompacts et n'a pas d'analogue pour les variétés analytiques ou algébriques.

12.7.1 Préfaisceaux localement nuls

Définition 12.7.1-1 : Deux préfaisceaux \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 sur Y sont dits « *localement isomorphes* » lorsqu'il existe un morphisme de préfaisceaux $\varphi : \mathcal{P}_1 \rightarrow \mathcal{P}_2$ dont les germes sont tous des isomorphismes, i.e. :

$$\varphi_{(y)} : \mathcal{P}_{1(y)} \rightarrow \mathcal{P}_{2(y)} \quad \text{est bijectif pour tout } y \in Y.$$

Un tel morphisme de préfaisceau est alors appelé « *un isomorphisme local de préfaisceau* ».

Un préfaisceau \mathcal{P} est dit « *localement nul* » lorsque le morphisme $\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{P}$ est un isomorphisme local, i.e. lorsque tous les germes $\mathcal{P}_{(y)}$ sont nuls.

Corollaire 12.7.1-1 à 12.7-1 : Soit \mathcal{P} un préfaisceau sur Y .

- 1) Le morphisme canonique $\mathcal{P} \rightarrow \check{\mathcal{H}}^0(Y; \mathcal{P})$ est un isomorphisme local.
- 2) Les préfaisceaux $\check{\mathcal{H}}^k(Y; \mathcal{P})$ sont localement nuls pour $k \geq 1$.

Le résultat d'annulation suivant jouera un rôle important dans la suite :

Lemme 12.7.1-2 : Si \mathcal{P} est un préfaisceau localement nul, on a $\check{\mathcal{H}}^0(Y; \mathcal{P}) = 0$.

Démonstration : En effet, pour tout \mathcal{P} , on a une injection canonique (et naturelle) $\check{\mathcal{H}}^0(Y; \mathcal{P}) \hookrightarrow \check{\mathcal{C}}^0(Y; \mathcal{P})$. Une section σ au-dessus d'un ouvert $U \subseteq Y$ de $\check{\mathcal{C}}^0(Y; \mathcal{P})$ est donnée par un élément de

$$\check{\mathcal{C}}^0(U; \mathcal{P}|_U) = \varinjlim_{\mathcal{U} \in \mathfrak{Rec}_*(U)} C^0(\mathcal{U}; \mathcal{P}|_U),$$

de sorte que notre section sera représentée par une famille de sections $\{\sigma_y \in \mathcal{P}(U_y)\}_{y \in U}$, où les U_y constituent un recouvrement pointé de U . La nullité locale de \mathcal{P} , permet alors d'associer à chaque $y \in U$ un ouvert $W_y \subseteq U_y$ tel que $\sigma_y|_{W_y} = 0$. La famille $\mathcal{W} = \{W_y\}_{y \in U}$ est alors un recouvrement pointé de U qui raffine \mathcal{U} et qui représente σ par l'élément nul. Le préfaisceau $\check{\mathcal{C}}^0(Y; \mathcal{P})$, et donc aussi $\check{\mathcal{H}}^0(Y; \mathcal{P})$, est nul. ■

12.7.2 Faisceau associé à un préfaisceau

Les résultats qui précèdent montrent que la donnée d'un préfaisceau \mathcal{P} génère une suite *a priori* infinie de préfaisceaux localement isomorphes. Il s'agit de la suite dont les premiers termes sont :

$$\mathcal{P} \longrightarrow \check{\mathcal{H}}^0(\mathbf{Y}; \mathcal{P}) \longrightarrow \check{\mathcal{H}}^0(\mathbf{Y}; \check{\mathcal{H}}^0(\mathbf{Y}; \mathcal{P})) \longrightarrow \check{\mathcal{H}}^0(\mathbf{Y}; \check{\mathcal{H}}^0(\mathbf{Y}; \check{\mathcal{H}}^0(\mathbf{Y}; \mathcal{P}))) \longrightarrow \dots$$

Nous allons voir que cette suite stationne (*i.e.* les isomorphismes locaux deviennent des isomorphismes de préfaisceaux) à partir du troisième terme. Ceci signifie, en particulier, que :

$$\check{\mathcal{H}}^0(\mathbf{Y}; \check{\mathcal{H}}^0(\mathbf{Y}; \mathcal{P})) \text{ est un faisceau, pour tout préfaisceau } \mathcal{P}.$$

Proposition 12.7.2-1 : *Pour tout préfaisceau \mathcal{P} sur \mathbf{Y} , on a :*

- 1) Le préfaisceau $\check{\mathcal{H}}^0(\mathbf{Y}; \check{\mathcal{H}}^0(\mathbf{Y}; \mathcal{P}))$ est un faisceau.
- 2) Pour tout morphisme de préfaisceaux $\varphi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{F}$, où \mathcal{F} est un faisceau, il existe un unique morphisme $\psi(\varphi) : \check{\mathcal{H}}^0(\mathbf{Y}; \check{\mathcal{H}}^0(\mathbf{Y}; \mathcal{P})) \rightarrow \mathcal{F}$, tel que $\varphi = \psi(\varphi) \circ \nu(\mathcal{P})$, où $\nu(\mathcal{P}) : \mathcal{P} \rightarrow \check{\mathcal{H}}^0(\mathbf{Y}; \check{\mathcal{H}}^0(\mathbf{Y}; \mathcal{P}))$ est le morphisme canonique donné par les augmentations.
- 3) Le morphisme canonique $\nu(\mathcal{P}) : \mathcal{P} \rightarrow \check{\mathcal{H}}^0(\mathbf{Y}; \check{\mathcal{H}}^0(\mathbf{Y}; \mathcal{P}))$ est un isomorphisme local.

Démonstration :

- 1) Nous avons déjà remarqué que l'augmentation $\varepsilon(\mathcal{P}) : \mathcal{P} \rightarrow \check{\mathcal{H}}^0(\mathbf{Y}; \mathcal{P})$ est un isomorphisme local (cf. 12.7.1-1). Notons $\ker(\varepsilon)$, $\text{im}(\varepsilon)$, $\text{coker}(\varepsilon)$ respectivement les préfaisceaux noyau, image et conoyau de $\varepsilon(\mathcal{P})$. On a alors les deux suites exactes courtes suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{0} \rightarrow \ker(\varepsilon) &\longrightarrow \mathcal{P} \longrightarrow \text{im}(\varepsilon) \rightarrow \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \rightarrow \text{im}(\varepsilon) &\rightarrow \check{\mathcal{H}}^0(\mathbf{Y}; \mathcal{P}) \rightarrow \text{coker}(\varepsilon) \rightarrow \mathbf{0} \end{aligned}$$

Or, les préfaisceaux $\ker(\varepsilon)$ et $\text{coker}(\varepsilon)$, étant localement nuls, seront annulés par le foncteur $\check{\mathcal{H}}^0(\mathbf{Y}, -)$. On obtient alors, grâce à l'exactitude à gauche de ce foncteur (voir remarque 12.6-1) :

$$\check{\mathcal{H}}^0(\mathbf{Y}; \mathcal{P}) \xrightarrow{\text{(\equiv)}} \check{\mathcal{H}}^0(\mathbf{Y}; \text{im}(\varepsilon)) \xrightarrow{\text{(\equiv)}} \check{\mathcal{H}}^0(\mathbf{Y}; \check{\mathcal{H}}^0(\mathbf{Y}; \mathcal{P}))$$

où l'injection de préfaisceaux de gauche est un isomorphisme local. Le morphisme composé $\check{\mathcal{H}}^0(\mathbf{Y}; \mathcal{P}) \hookrightarrow \check{\mathcal{H}}^0(\mathbf{Y}; \check{\mathcal{H}}^0(\mathbf{Y}; \mathcal{P}))$ est donc une injection de conoyau localement nul que l'application de $\check{\mathcal{H}}^0(\mathbf{Y}, -)$ transformera en un *isomorphisme*. Le préfaisceau $\check{\mathcal{H}}^0(\mathbf{Y}; \check{\mathcal{H}}^0(\mathbf{Y}; \mathcal{P}))$ est donc bien un faisceau.

- 2) Soit maintenant $\varphi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{F}$ un morphisme de préfaisceaux où \mathcal{F} est un faisceau. On notera $\widehat{\mathcal{Q}}$ le préfaisceau $\check{\mathcal{H}}^0(\mathbf{Y}, \mathcal{Q})$ associé à un préfaisceau \mathcal{Q} . L'application itérée du foncteur $\check{\mathcal{H}}^0(\mathbf{Y}, -)$ donne alors :

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{P} & \xrightarrow[\text{(\equiv)}]{(\mathcal{P})} & \widehat{\mathcal{P}} & \xrightarrow[\text{(\equiv)}]{\varepsilon(\widehat{\mathcal{P}})} & \widehat{\widehat{\mathcal{P}}} \\ \downarrow \varphi & & \downarrow \widehat{\varphi} & & \downarrow \widehat{\varphi} \\ \mathcal{F} & \xrightarrow[\text{(\equiv)}]{\varepsilon(\mathcal{F})} & \widehat{\mathcal{F}} & \xrightarrow[\text{(\equiv)}]{\varepsilon(\widehat{\mathcal{F}})} & \widehat{\widehat{\mathcal{F}}} \end{array}$$

où les morphismes de la deuxième ligne sont des isomorphismes de préfaisceaux. La composition $\psi(\varphi) := \varepsilon(\widehat{\mathcal{F}})^{-1} \circ \varepsilon(\widehat{\widehat{\mathcal{F}}})^{-1} \circ \widehat{\varphi}$ vérifie alors (2). Ceci étant, les morphismes horizontaux du diagramme précédent étant des isomorphismes locaux, tout autre morphisme ψ' satisfaisant aux conditions demandées, aura les mêmes germes que $\psi(\mathcal{P})$; leur différence définit alors un morphisme $(\psi(\varphi) - \psi') : \widehat{\widehat{\mathcal{P}}} \rightarrow \widehat{\widehat{\mathcal{F}}}$ dont les germes sont nuls, mais $\widehat{\widehat{\mathcal{F}}}$ est un *faisceau* et $(\psi(\varphi) - \psi')$ sera nécessairement nul. ■

Définition 12.7.2-1 : Le faisceau $\check{\mathcal{H}}^0(\mathbf{Y}; \check{\mathcal{H}}^0(\mathbf{Y}; \mathcal{P}))$ sera appelé « *faisceau associé à un préfaisceau \mathcal{P}* »; on le notera $\tilde{\mathcal{P}}$.

12.7.2-1 Remarque et exercice : La correspondance $\mathcal{P} \rightsquigarrow \tilde{\mathcal{P}}$ à valeurs dans la catégorie de préfaisceaux est (*a priori*) uniquement exacte à gauche. Montrez que pour toute suite exacte courte de préfaisceaux :

$$\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{P}_1 \rightarrow \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_3 \rightarrow \mathbf{0}$$

on a une suite exacte :

$$\mathbf{0} \rightarrow \tilde{\mathcal{P}}_1 \rightarrow \tilde{\mathcal{P}}_2 \rightarrow \tilde{\mathcal{P}}_3 \rightarrow \check{\mathcal{H}}^1(\mathbf{Y}; \check{\mathcal{H}}^0(\mathbf{Y}; \mathcal{P}_1)) \rightarrow \check{\mathcal{H}}^1(\mathbf{Y}; \check{\mathcal{H}}^0(\mathbf{Y}; \mathcal{P}_2)),$$

le préfaisceau conoyau de $\tilde{\mathcal{P}}_2 \rightarrow \tilde{\mathcal{P}}_3$ est donc généralement localement nul mais pas forcément nul. Nous verrons plus tard que la sous-catégorie pleine de $\text{Préf}(\mathbf{Y})$ dont les objets sont les *faisceaux*, est **abélienne**; la suite

$$\mathbf{0} \rightarrow \tilde{\mathcal{P}}_1 \rightarrow \tilde{\mathcal{P}}_2 \rightarrow \tilde{\mathcal{P}}_3 \rightarrow \mathbf{0},$$

y sera alors exacte et le foncteur $\mathcal{P} \rightsquigarrow \tilde{\mathcal{P}}$ à valeurs dans la catégorie de *faisceaux* sera exact.

12.8 Théorèmes d'annulation pour la cohomologie de Čech

Nous avons vu dans la section précédente (voir 12.7.1-2) que le foncteur $\check{\mathcal{H}}^0(\mathbf{Y}; -)$ annule les préfaisceaux localement nuls et une inspection de la démonstration de la proposition 12.7.2-1 montre que s'il en était de même pour $\check{\mathcal{H}}^1(\mathbf{Y}; -)$, le préfaisceau $\check{\mathcal{H}}^0(\mathbf{Y}; \mathcal{P})$ aurait été un faisceau et donc la cohomologie de Čech en degré zéro de \mathcal{P} aurait été isomorphe à celle du faisceau associé $\tilde{\mathcal{P}}$. Plus généralement, si les foncteurs $\check{\mathcal{H}}^k(\mathbf{Y}; -)$, pour $0 \leq k \leq N$, annulent les préfaisceaux localement nuls alors :

$$\check{\mathcal{H}}^k(\mathbf{Y}, \mathcal{P}) \equiv \check{\mathcal{H}}^k(\mathbf{Y}, \tilde{\mathcal{P}}), \quad \text{et donc} \quad \check{H}^k(\mathbf{Y}, \mathcal{P}) \equiv \check{H}^k(\mathbf{Y}, \tilde{\mathcal{P}}), \quad \text{pour } 0 \leq k < N.$$

Sur les espaces paracompacts on démontre, à l'aide des partitions de l'unité, le résultat suivant.

Théorème 12.8-1 : Soit \mathbf{Y} un espace topologique séparé et paracompact. La cohomologie de Čech d'un préfaisceau \mathcal{P} localement nul, est nulle en tous degrés :

$$\check{H}^k(\mathbf{Y}; \mathcal{P}) = \mathbf{0}, \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

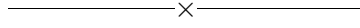
Démonstration : (Voir [God₂] théorème 5.10.2 page 228, ou [Spa] théorème 6.8.16 page 328.) ■

12.8-1 Remarque : Vous avez sans doute observé que l'énoncé fait référence à la cohomologie de Čech *globale*. En effet, le même résultat pour le préfaisceau $\check{\mathcal{H}}^k(\mathbf{Y}; \mathcal{P})$ aurait exigé l'existence de bases d'ouverts paracompacts pour la topologie de \mathbf{Y} . Or, la paracompacité d'un espace n'entraîne pas forcément celle de ses ouverts. Par contre, un espace métrique et séparable est toujours paracompact; ses ouverts, étant également métriques et séparables, seront donc paracompacts. Dans un tel cas le théorème précédent est vrai pour les préfaisceaux de cohomologie de Čech.

Vous devriez être maintenant en mesure de démontrer le théorème suivant

Théorème 12.8-2 :

- 1) Sur un espace séparé et paracompact Y , le morphisme canonique $\check{H}^k(Y; \mathcal{P}) \rightarrow \check{H}^k(Y; \tilde{\mathcal{P}})$ est un isomorphisme, pour tout $k \in \mathbb{N}$.
- 2) Sur un espace métrique Y , le morphisme canonique $\check{\mathcal{H}}^k(Y; \mathcal{P}) \rightarrow \check{\mathcal{H}}^k(Y; \tilde{\mathcal{P}})$ est un isomorphisme de faisceaux, pour tout $k \in \mathbb{N}$.



§13. Cohomologie de faisceaux

Dans ce chapitre, on désignera par \mathbf{A} un anneau commutatif avec identité multiplicative, et par \mathbf{X} un espace topologique arbitraire, *i.e.* un ensemble muni d'une topologie.

13.1 Catégorie abélienne des préfaisceaux de \mathbf{A} -modules

Notons $\text{Préf}_{\mathbf{A}}(\mathbf{X}) := \text{Préf}(\mathbf{X}; \text{Mod}(\mathbf{A}))$ la catégorie dont les objets sont les préfaisceaux \mathcal{P} sur \mathbf{X} "à valeurs" dans la catégorie des \mathbf{A} -modules (à gauche) et tels que $\mathcal{P}(\emptyset) = \mathbf{0}$. On appellera un tel préfaisceaux «un préfaisceau de \mathbf{A} -modules».

On retiendra que les morphismes de restriction d'un préfaisceau de \mathbf{A} -modules sont des homomorphismes de \mathbf{A} -modules. De même, les morphismes de la catégorie $\text{Préf}_{\mathbf{A}}(\mathbf{X})$ seront les morphismes de préfaisceaux $\varphi : \mathcal{P}_1 \rightarrow \mathcal{P}_2$ tels que, pour chaque ouvert $U \subseteq \mathbf{X}$, l'application $\varphi(U) : \mathcal{P}_1(U) \rightarrow \mathcal{P}_2(U)$ est \mathbf{A} -linéaire. Il convient, par ailleurs, de remarquer que l'application :

$$\begin{aligned} \text{Mor}_{\text{Préf}}(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) &\longrightarrow \prod_{U \subseteq \mathbf{X}} \text{Hom}_{\mathbf{A}}(\mathcal{P}_1(U), \mathcal{P}_2(U)) \\ \varphi &\longmapsto (U \mapsto \varphi(U)) \end{aligned}$$

est injective et réalise $\text{Mor}_{\text{Préf}}(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2)$ comme un sous- \mathbf{A} -module de $\prod_{U \subseteq \mathbf{X}} \text{Hom}_{\mathbf{A}}(\mathcal{P}_1(U), \mathcal{P}_2(U))$, d'où une structure canonique de groupe abélien sur l'ensemble de morphismes en question. En définissant le «préfaisceau nul» comme le préfaisceau constant qui fait correspondre à tout ouvert de \mathbf{X} le module nul, les axiomes Ad-1, Ad-2, Ad-3 des catégories additives (*cf.* page 116) sont vérifiés.

Soit $\{\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_s\}$ une famille finie de préfaisceaux de \mathbf{A} -modules. La correspondance :

$$\bigoplus_{i=1, \dots, s} \mathcal{P}_i : U \rightsquigarrow \bigoplus_{i=1, \dots, s} \mathcal{P}_i(U),$$

est un préfaisceau de \mathbf{A} -modules et $i_k : \mathcal{P}_k \rightarrow \bigoplus_{i=1, \dots, s} \mathcal{P}_i$ et $p_k : \bigoplus_{i=1, \dots, s} \mathcal{P}_i \rightarrow \mathcal{P}_k$, définies par :

$$U \rightsquigarrow i_k(U) : \mathcal{P}_k(U) \rightarrow \bigoplus_{i=1, \dots, s} \mathcal{P}_i(U), \quad \text{et} \quad U \rightsquigarrow p_k(U) : \bigoplus_{i=1, \dots, s} \mathcal{P}_i(U) \rightarrow \mathcal{P}_k(U),$$

où $i_k(U)$ et $p_k(U)$ désignent respectivement l'injection et la projection canoniques des somme directes de modules, sont des morphismes de préfaisceaux qui font de l'objet $\bigoplus_{i=1, \dots, s} \mathcal{P}_i$ une somme directe dans la catégorie $\text{Préf}_{\mathbf{A}}(\mathbf{X})$. La catégorie $\text{Préf}_{\mathbf{A}}(\mathbf{X})$ est donc **additive**.

Un élément de la catégorie $\text{Préf}_{\mathbf{A}}(\mathbf{X})$ s'interprète comme un foncteur *contravariant* de la petite catégorie $\text{Ouv}(\mathbf{X})$ associée à l'ensemble des ouverts de la topologie de \mathbf{X} partiellement ordonné par la relation d'inclusion d'ensembles, vers la catégorie $\text{Mod}(\mathbf{A})$ des \mathbf{A} -modules à gauche. Un morphisme de préfaisceaux est alors une transformation naturelle entre de tels foncteurs. Ainsi la catégorie $\text{Préf}_{\mathbf{A}}(\mathbf{X})$ s'identifie à la catégorie des foncteurs contravariants de $\text{Ouv}(\mathbf{X})$ vers $\text{Mod}(\mathbf{A})$. Ceci étant, la catégorie $\text{Mod}(\mathbf{A})$ est abélienne et les propriétés universelles de «noyau», «conoyau», «image» et «coimage» dans $\text{Mod}(\mathbf{A})$ montrent que pour tout morphisme de préfaisceaux $\varphi : \mathcal{P}_1 \rightarrow \mathcal{P}_2$, les correspondances qui associent à un ouvert $U \subseteq \mathbf{X}$ les modules :

$$U \rightsquigarrow \underline{\ker}(\varphi)(U), \quad U \rightsquigarrow \underline{\text{coker}}(\varphi)(U), \quad U \rightsquigarrow \underline{\text{im}}(\varphi)(U), \quad U \rightsquigarrow \underline{\text{coim}}(\varphi)(U),$$

où l'on pose par définition :

- $\underline{\ker}(\varphi)(U) := \ker(\varphi(U))$; le module «noyau» de $\varphi(U)$;
sous- \mathbf{A} -module de $\mathcal{P}_1(U)$ dont on note $\kappa(U) : \underline{\ker}(\varphi)(U) \rightarrow \mathcal{P}_1(U)$ l'inclusion canonique;
- $\underline{\text{im}}(\varphi)(U) := \text{im}(\varphi(U))$; le module «image» de $\varphi(U)$;
 \mathbf{A} -module quotient de $\mathcal{P}_1(U)$, canoniquement isomorphe à $\mathcal{P}_1(U)/\ker(\varphi(U))$; notons $p(U) : \mathcal{P}_1(U) \rightarrow \underline{\text{im}}(\varphi)(U)$ la projection canonique, “restriction” de $\varphi(U)$ à son module image;
- $\underline{\text{coker}}(\varphi)(U) := \text{coker}(\varphi(U))$; le module «conoyau» de $\varphi(U)$;
 \mathbf{A} -module quotient de $\mathcal{P}_2(U)$, canoniquement isomorphe à $\mathcal{P}_2(U)/\text{im}(\varphi(U))$; notons $\tilde{\kappa}(U) : \mathcal{P}_2(U) \rightarrow \underline{\text{coker}}(\varphi)(U)$ la projection canonique;
- $\underline{\text{coim}}(\varphi)(U) := \text{coim}(\varphi(U))$; le module «coimage» de $\varphi(U)$;
sous- \mathbf{A} -module de $\mathcal{P}_2(U)$, canoniquement isomorphe au noyau de la projection canonique $\mathcal{P}_2(U) \rightarrow \underline{\text{coker}}(\varphi)(U)$; notons $q(U) : \underline{\text{coim}}(\varphi)(U) \rightarrow \mathcal{P}_2(U)$ l'injection canonique;

sont des préfaisceaux de \mathbf{A} -modules. De même, les correspondances :

$$\begin{aligned} U \rightsquigarrow \kappa(U) : \underline{\ker}(\varphi)(U) &\rightarrow \mathcal{P}_1(U), & U \rightsquigarrow \tilde{\kappa}(U) : \mathcal{P}_2(U) &\rightarrow \underline{\text{coker}}(\varphi)(U), \\ U \rightsquigarrow p(U) : \mathcal{P}_1(U) &\rightarrow \underline{\text{im}}(\varphi)(U), & U \rightsquigarrow q(U) : \underline{\text{coim}}(\varphi)(U) &\rightarrow \mathcal{P}_2(U), \end{aligned}$$

définissent des morphismes de préfaisceaux de \mathbf{A} -modules et sont respectivement des «noyau», «conoyau», «image» et «coimage» de la catégorie $\text{Préf}_{\mathbf{A}}(\mathbf{X})$ qui est **abélienne** puisque le morphisme canonique $\underline{\text{im}}(\varphi) \rightarrow \underline{\text{coim}}(\varphi)$ est (tautologiquement) un isomorphisme.

Exercice 13.1-1 : Vérifier les assertions des paragraphes précédents.

Exercice 13.1-2 : Montrer qu’une suite courte de préfaisceaux :

$$\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{P}_1 \xrightarrow{\alpha} \mathcal{P}_2 \xrightarrow{\beta} \mathcal{P}_3 \rightarrow \mathbf{0},$$

est exacte, si et seulement si, la suite de \mathbf{A} -modules :

$$\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{P}_1(U) \xrightarrow{\alpha(U)} \mathcal{P}_2(U) \xrightarrow{\beta(U)} \mathcal{P}_3(U) \rightarrow \mathbf{0},$$

est exacte, quel que soit l’ouvert $U \subseteq \mathbf{X}$.

13.1.1 Foncteurs “sections” et “germes” dans la catégorie des préfaisceaux

• Foncteur “sections au-dessus d’un ouvert”

Soit U une partie ouverte de \mathbf{X} , le foncteur « sections au-dessus de U », noté $\Gamma(U; -)$, est la correspondance de $\text{Préf}_{\mathbf{A}}(\mathbf{X})$ vers $\text{Mod}(\mathbf{A})$ qui associe à un préfaisceau \mathcal{P} , le \mathbf{A} -module $\Gamma(U; \mathcal{P}) := \mathcal{P}(U)$, et à un morphisme de préfaisceaux $\varphi : \mathcal{P}_1 \rightarrow \mathcal{P}_2$, le morphisme de \mathbf{A} -modules $\varphi(U) : \mathcal{P}_1(U) \rightarrow \mathcal{P}_2(U)$ que l’on note également $\Gamma(U; \varphi) := \varphi(U)$. Cette correspondance est fonctorielle **covariante additive et exacte** de $\text{Préf}_{\mathbf{A}}(\mathbf{X})$ vers $\text{Mod}(\mathbf{A})$ (cf. exercice 13.1-2).

• Foncteur “germes en un point”

Soit $x \in \mathbf{X}$, le système $(\mathcal{V}(x), \subseteq)$ des voisinages de x dans \mathbf{X} , muni de l’ordre partiel d’inclusion est un système filtrant inférieurement⁴³. Pour tout préfaisceau de \mathbf{A} -modules \mathcal{P} , le système de \mathbf{A} -modules $\{\rho_V^U : \Gamma(U; \mathcal{P}) \rightarrow \Gamma(V; \mathcal{P})\}$, où $U \supseteq V$ sont des éléments de $\mathcal{V}(x)$ est alors inductif filtrant et comme les foncteurs sections sont exacts et que la catégorie des \mathbf{A} -modules possède des limites, il en découle que la correspondance $(-)_x$:

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \in \text{Ob}(\text{Préf}_{\mathbf{A}}(\mathbf{X})) &\rightsquigarrow \mathcal{P}_x := \varinjlim_{U \in \mathcal{V}(x)} \mathcal{P}(U) \\ \varphi \in \text{Mor}_{\text{Préf}_{\mathbf{A}}(\mathbf{X})}(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) &\rightsquigarrow \varphi_x := \varinjlim_{U \in \mathcal{V}(x)} \varphi(U), \end{aligned}$$

est bien définie, fonctorielle **covariante additive et exacte**.

Exercice 13.1.1-1 : Montrer que le foncteur “produit des foncteur germes” $\prod_{x \in \mathbf{X}} (-)_x$:

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \in \text{Ob}(\text{Préf}_{\mathbf{A}}(\mathbf{X})) &\rightsquigarrow \prod_{x \in \mathbf{X}} \mathcal{P}_x \\ \varphi \in \text{Mor}_{\text{Préf}_{\mathbf{A}}(\mathbf{X})}(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) &\rightsquigarrow \prod_{x \in \mathbf{X}} \varphi_x, \end{aligned}$$

est **covariant additif et exact** de la catégorie $\text{Préf}_{\mathbf{A}}(\mathbf{X})$ vers $\text{Mod}(\mathbf{A})$.

Supposons à partir de maintenant que $\mathbf{X} \neq \emptyset$. Montrer que la correspondance $\mathcal{Q}(\mathbf{X}) = \mathbf{A}$ et $\mathcal{Q}(U) = \mathbf{0}$, où les morphismes de restrictions (strictes) sont tous nuls, est bien un préfaisceau.

⁴³ Rappelons qu’un ensemble partiellement ordonné (\mathbf{S}, \leq) est dit « filtrant inférieurement » lorsque pour tous $s_1, s_2 \in \mathbf{S}$, il existe s_3 vérifiant $s_3 \leq s_1$ et $s_3 \leq s_2$.

A l'aide du préfaisceau \mathcal{D} montrer que le foncteur “produit des foncteur germes” n'est pas fidèle, *i.e.* que le morphisme défini par ce foncteur :

$$\begin{array}{ccc} \text{Mor}_{\text{Préf}_A(\mathbf{X})}(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) & \longrightarrow & \text{Hom}_A \left(\prod_{x \in \mathbf{X}} \mathcal{P}_1(x), \prod_{x \in \mathbf{X}} \mathcal{P}_2(x) \right) \\ \varphi & \longmapsto & \prod_{x \in \mathbf{X}} \varphi(x) \end{array}$$

peut ne pas être injectif.

Exercice 13.1.1-2 : Montrer qu'un foncteur \mathcal{F} entre deux catégories abéliennes \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 qui est additif, n'est pas fidèle, s'il existe un objet non nul \mathcal{P} de \mathcal{C}_1 dont l'objet image $\mathcal{F}(\mathcal{P})$ est un objet nul de \mathcal{C}_2 .

Prouver la réciproque de la dernière assertion lorsque le foncteur \mathcal{F} est en plus *exact*.

Refaire la dernière partie de l'exercice précédent en montrant que l'image par le foncteur “produit de germes” de l'objet \mathcal{D} est bien un A -module nul.

13.2 Catégorie abélienne des faisceaux de A -modules

Rappelons que d'après la proposition 12.6-1 et la remarque 12.6-2, on appelle « *faisceau de A -modules* » tout objet \mathcal{F} de $\text{Préf}_A(\mathbf{X})$, tel que pour tout ouvert $U \subseteq \mathbf{X}$ et tout recouvrement ouvert $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ de U , la suite de A -modules :

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\prod_{\alpha} \rho_{U_\alpha}^U} \prod_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathcal{F}(U_\alpha) \xrightarrow{\prod_{\alpha} (\prod_{\beta} \rho_{U_{\alpha\beta}}^{U_\alpha} - \rho_{U_{\beta\alpha}}^{U_\alpha})} \prod_{\alpha, \beta \in \mathfrak{A}} \mathcal{F}(U_{\alpha\beta}),$$

est *exacte*.

On note $\text{Fais}_A(\mathbf{X})$ la sous-catégorie pleine de $\text{Préf}_A(\mathbf{X})$ dont les objets sont des faisceaux. On appelle « *morphisme de faisceaux* » tout morphisme de préfaisceaux entre deux faisceaux.

Proposition 13.2-1 :

a) la catégorie $\text{Fais}_A(\mathbf{X})$ est *additive*.

b) Le préfaisceau noyau d'un morphisme de préfaisceaux $\varphi : \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2$, où \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 sont des faisceaux, est un faisceau. La catégorie des faisceaux possède des noyaux.

Démonstration :

a) L'additivité de la catégorie $\text{Fais}_A(\mathbf{X})$ résulte d'une part de ce qu'elle est une sous-catégorie pleine de $\text{Préf}_A(\mathbf{X})$, ce qui signifie que $\text{Mor}_{\text{Fais}_A(\mathbf{X})}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) = \text{Mor}_{\text{Préf}_A(\mathbf{X})}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$, et donc les axiomes Ad-1, Ad-2 et Ad-3 sont automatiquement vérifiés. L'existence des sommes directes (finies) de faisceaux résulte de la simple vérification que la somme directe préfaisceautique de faisceaux est un faisceau, ce qui est élémentaire.

b) Soit σ une section de $\underline{\ker}(\varphi)$ localement nulle, comme nous avons une injection de préfaisceaux $\underline{\ker}(\varphi)(U) \hookrightarrow \mathcal{F}_1(U)$ pour tout ouvert $U \subseteq \mathbf{X}$, la section φ s'identifie canoniquement à une section du faisceau \mathcal{F}_1 localement nulle, elle est donc nécessairement nulle. Soit maintenant $U \subseteq \mathbf{X}$ un ouvert et $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ un recouvrement ouvert de U ; donnons-nous pour chaque $\alpha \in \mathfrak{A}$, une section $\sigma_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, \underline{\ker}(\sigma))$ et supposons que $\rho_{U_{\alpha\beta}}^{U_\alpha}(\sigma_\alpha) = \rho_{U_{\alpha\beta}}^{U_\beta}(\sigma_\beta)$ pour tous $\alpha, \beta \in \mathfrak{A}$. L'injectivité de l'inclusion $\underline{\ker}(\varphi)(U) \hookrightarrow \mathcal{F}_1(U)$ montre que la famille de sections $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ s'identifie à une famille de sections de \mathcal{F}_1 qui se recolle en une section $\sigma \in \mathcal{F}_1(U)$. L'image $\tau := \varphi(\sigma)$ est trivialement la section nulle puisque localement nulle d'après les égalités $\varphi(\sigma_\alpha) = 0$ et comme \mathcal{F}_2 est un faisceau, il s'ensuit que $\sigma \in \underline{\ker}(\varphi)(U)$. ■

Notation 13.2-1 : Pour tout morphisme de faisceaux $\varphi : \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2$, on notera par $\kappa(\varphi) : \underline{\ker}(\varphi) \rightarrow \mathcal{F}_1$ le morphisme «noyau». Il s'agit bien évidemment d'une notation superflue dans la mesure où la démonstration précédente montre que $\underline{\ker}(\varphi) = \underline{\ker}(\varphi)$; elle se justifiera dans les sections suivantes par un besoin de cohérence notationalle où l'on notera $\underline{\coker}(\varphi)$ «le faisceau conoyau» qui sera, lui, généralement différent du préfaisceau conoyau $\underline{\coker}(\varphi)$.

Remarque 13.2-1 : Contrairement aux préfaisceau noyau, le préfaisceau conoyau d'un morphisme de faisceaux peut ne pas être un faisceau. En effet, soit $\mathbf{X} = \mathbb{S}^1$ muni de la structure standard de variété différentiable et notons $\underline{\mathbb{R}}_{\mathbf{X}}$ le faisceau des sections localement constantes définies sur les ouverts de \mathbf{X} (vérifier que c'est bien un faisceau). Le faisceau $\underline{\mathbb{R}}_{\mathbf{X}}$ est naturellement un sous-faisceau du faisceau $\underline{\Omega}_{\mathbf{X}}^0$ des fonctions de classe \mathcal{C}^∞ définies sur les ouverts de \mathbf{X} . Le préfaisceau conoyau de l'injection canonique $\underline{\mathbb{R}}_{\mathbf{X}} \hookrightarrow \underline{\Omega}_{\mathbf{X}}^0$, que nous noterons \mathcal{Q} , est le préfaisceau des fonctions \mathcal{C}^∞ modulo les fonctions localement constantes. D'autre part, le revêtement universel $\exp(\sqrt{-1}\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}_u \equiv \mathbf{X}$ n'admet pas de sections globales, mais admet des sections sur l'ouvert complémentaire d'un point de \mathbf{X} puisque un tel ouvert est simplement connexe (contractile en fait). Soient $x_1 \neq x_2 \in \mathbf{X}$ et notons, pour $j = 1, 2$, $U_j = \mathbf{X} \setminus \{x_j\}$ et $\sigma_j : U_j \rightarrow \mathbb{R}$ une section de $\exp(\sqrt{-1}\cdot)$, on a $\sigma_j \in \Gamma(U_j; \underline{\Omega}_{\mathbf{X}}^0)$; notons τ_j la section de \mathcal{Q} définie par σ_j . On vérifie aisément que sur l'ouvert intersection U_{12} , la section $\sigma_1 - \sigma_2$ est localement constante et son image $\tau_1 - \tau_2$ dans \mathcal{Q} sera nulle. Supposons maintenant que \mathcal{Q} est un faisceau. Il existe alors une section globale $\tau \in \Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{Q})$ recollant τ_1 et τ_2 . Or, les sections globales du *préfaisceau quotient* \mathcal{Q} proviennent de sections globales de $\underline{\Omega}_{\mathbf{X}}^0$ de sorte qu'il existe une section globale $\sigma \in \Gamma(\mathbf{X}; \underline{\Omega}_{\mathbf{X}}^0)$ et deux constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ telles que $\sigma|_{U_1} = \sigma_1 + c_1$ et $\sigma|_{U_2} = \sigma_2 + c_2$. Quitte à remplacer σ par $\sigma - c_1$, nous pouvons supposer $c_1 = 0$ et donc $\sigma_1 = \sigma_2 + c_2$ sur U_{12} , dont on déduit $\exp(\sqrt{-1}\cdot c_2) = 1$. Il s'ensuit que $\exp(\sqrt{-1}\cdot \sigma(x)) = x$, quel que soit $x \in \mathbf{X}$, ce qui est impossible. Le préfaisceau \mathcal{Q} n'est donc pas un faisceau.

13.2.1 Le foncteur “faisceau associé”

Rappelons que nous avons montré dans 12.7.2-1 comment associer *fonctoriellement* à tout préfaisceau de \mathbf{A} -modules \mathcal{P} , un morphisme de préfaisceaux $\nu_{\mathcal{P}} : \mathcal{P} \rightarrow \tilde{\mathcal{P}}$, où $\tilde{\mathcal{P}}$ est le «faisceau associé à \mathcal{P} » et où $\nu_{\mathcal{P}}$ est un *isomorphisme local* ⁽⁴⁴⁾, vérifiant la propriété universelle suivante :

“Pour tout morphisme de préfaisceaux $\varphi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{G}$, où \mathcal{G} est un faisceau, il existe un et un seul morphisme de faisceaux $\tilde{\varphi} : \tilde{\mathcal{P}} \rightarrow \mathcal{G}$ tel que $\varphi = \tilde{\varphi} \circ \nu_{\mathcal{P}}$.”

Exercice 13.2.1-1 : Notons $\underline{\mathbf{A}}_{\mathbf{X}}$ le préfaisceau “constant” qui associe à chaque ouvert non vide $U \subseteq \mathbf{X}$ l'anneau \mathbf{A} , et tel que les morphismes de restriction entre deux ouverts non vides est l'identité. Notons $\underline{\mathbf{A}}_{\mathbf{X}}$ le préfaisceau des fonctions localement constantes définies sur les ouverts de \mathbf{X} et à valeurs dans \mathbf{A} , les morphismes de restriction étant alors les restrictions des fonctions. Pour tout $U \subseteq \mathbf{X}$ soit $\nu(U) : \underline{\mathbf{A}}_{\mathbf{X}}(U) \rightarrow \underline{\mathbf{A}}_{\mathbf{X}}(U)$ l'application qui associe à un élément $a \in \mathbf{A}$ l'application constante de U dans \mathbf{A} de valeur a .

- a) Montrer que les morphismes $\nu(U)$ définissent un morphisme de préfaisceaux $\nu : \underline{\mathbf{A}}_{\mathbf{X}} \rightarrow \underline{\mathbf{A}}_{\mathbf{X}}$ qui est un *isomorphisme local*.

⁴⁴ Rappelons qu'un morphisme de préfaisceaux est dit un «*isomorphisme local*» lorsque les morphismes qu'il induit sur les germes en un point sont des isomorphismes, et ceci quel que soit le point en considération. La notation $\varphi : \mathcal{P}_1 \xrightarrow{(\cong)} \mathcal{P}_2$ indique que le morphisme de préfaisceaux φ est un isomorphisme local.

- b) Montrer que $\underline{\mathbf{A}}_{\mathbf{X}}$ est un faisceau et que le morphisme ν est le morphisme canonique entre le préfaisceaux $\underline{\mathbf{A}}_{\mathbf{X}}$ et son faisceau associé $\underline{\underline{\mathbf{A}}}_{\mathbf{X}}$.

Lemme 13.2.1-1 : Soit $\varphi : \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2$ un morphisme de faisceaux et notons $\underline{\text{coker}}(\varphi)$ le faisceau associé au préfaisceau conoyau $\underline{\text{coker}}(\varphi)$, et soit $\nu : \underline{\text{coker}}(\varphi) \rightarrow \underline{\underline{\text{coker}}}(\varphi)$ le morphisme canonique. La composition des morphismes de préfaisceaux :

$$\mathcal{P}_2 \xrightarrow{\bar{\kappa}(\varphi)} \underline{\text{coker}}(\varphi) \xrightarrow{\nu} \underline{\underline{\text{coker}}}(\varphi),$$

est un conoyau pour φ dans la catégorie des faisceaux.

Démonstration : Soit $\psi : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{G}$ un morphisme de faisceaux tel que $\psi \circ \varphi = 0$. On a la factorisation unique de ψ dans la catégorie de préfaisceaux :

$$\mathcal{P}_2 \xrightarrow{\bar{\kappa}(\varphi)} \underline{\text{coker}}(\varphi) \xrightarrow{\bar{\psi}} \mathcal{G},$$

dont on déduit d'après la propriété universelle du faisceau associé, la factorisation unique de $\bar{\psi}$:

$$\mathcal{P}_2 \xrightarrow{\bar{\kappa}(\varphi)} \underline{\text{coker}}(\varphi) \xrightarrow{\nu} \underline{\underline{\text{coker}}}(\varphi) \xrightarrow{\tilde{\psi}} \mathcal{G}.$$

Soit maintenant :

$$\mathcal{P}_2 \xrightarrow{\nu \circ \bar{\kappa}(\varphi)} \underline{\underline{\text{coker}}}(\varphi) \xrightarrow{\lambda} \mathcal{G}.$$

une autre factorisation de ψ . On a donc $\psi = \lambda \circ \nu \circ \bar{\kappa}(\varphi) = \tilde{\psi} \circ \nu \circ \bar{\kappa}(\varphi)$, et la propriété universelle de $\bar{\kappa}(\varphi)$ dans la catégorie abélienne $\text{Préf}_{\mathbf{A}}(\mathbf{X})$ permet de conclure à l'égalité $\lambda \circ \nu = \tilde{\psi} \circ \nu : \underline{\text{coker}}(\varphi) \rightarrow \mathcal{G}$, où la propriété universelle du faisceau associé à un préfaisceau exige que $\lambda = \tilde{\psi}$. Le morphisme de faisceaux $\nu \circ \bar{\kappa}(\varphi) : \mathcal{P}_2 \rightarrow \underline{\underline{\text{coker}}}(\varphi)$ est donc bien un conoyau dans la catégorie $\text{Fais}_{\mathbf{A}}(\mathbf{X})$. ■

Notation 13.2.1-1 : Le morphisme "conoyau dans la catégorie de faisceaux" $\nu \circ \bar{\kappa}(\varphi) : \mathcal{P}_2 \rightarrow \underline{\underline{\text{coker}}}(\varphi)$ du lemme précédent, sera noté $\tilde{\kappa}(\varphi)$.

Proposition 13.2.1-2 : La catégorie $\text{Fais}_{\mathbf{A}}(\mathbf{X})$ est abélienne.

- Pour chaque $x \in \mathbf{X}$, le foncteur "germes en x ", $(-)_{(x)} : \text{Fais}_{\mathbf{A}}(\mathbf{X}) \rightsquigarrow \text{Mod}(\mathbf{A})$, est **additif et exact**.
- Le foncteur "produit de foncteurs germes", $\prod_{x \in \mathbf{X}} (-)_{(x)} : \text{Fais}_{\mathbf{A}}(\mathbf{X}) \rightsquigarrow \text{Mod}(\mathbf{A})$, est **additif, exact et fidèle**.
- Un complexe de faisceaux (\mathcal{F}^*, d_*) est acyclique, si et seulement si, le complexe de \mathbf{A} -modules $(\mathcal{F}^*_{(x)}, d_{*(x)})$, est acyclique, quel que soit $x \in \mathbf{X}$.
- Le foncteur "faisceau associé" $(\simeq) : \text{Préf}_{\mathbf{A}}(\mathbf{X}) \rightsquigarrow \text{Fais}_{\mathbf{A}}(\mathbf{X})$ est **additif et exact**.

Démonstration : Nous avons déjà montré l'existence de noyaux et conoyaux dans $\text{Fais}_{\mathbf{A}}(\mathbf{X})$, il ne nous reste donc qu'à montrer que le morphisme canonique de l'image d'un morphisme dans sa coimage est un isomorphisme.

Soit $\varphi : \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2$ un morphisme de faisceaux. Nous avons dans la catégorie des préfaisceaux :

$$\mathbf{0} \rightarrow \underline{\text{ker}}(\varphi) \xrightarrow{\kappa(\varphi)} \mathcal{F}_1 \xrightarrow{p(\varphi)} \underline{\text{im}}(\varphi) \equiv \underline{\text{coim}}(\varphi) \xrightarrow{q(\varphi)} \mathcal{F}_2 \xrightarrow{\bar{\kappa}(\varphi)} \underline{\text{coker}}(\varphi) \rightarrow \mathbf{0} \quad (*)$$

où $p(\varphi)$ est un conoyau pour $\kappa(\varphi)$ et $q(\varphi)$ est un noyau pour $\bar{\kappa}(\varphi)$. Appliquons le foncteur “faisceau associé” à la suite (*), on obtient alors le diagramme commutatif de morphismes verticaux : les isomorphismes locaux canoniques :

$$\begin{array}{ccccccccccc} \mathbf{0} & \rightarrow & \underline{\ker}(\varphi) & \xrightarrow{\kappa(\varphi)} & \mathcal{F}_1 & \xrightarrow{p(\varphi)} & \underline{\text{im}}(\varphi) \equiv \underline{\text{coim}}(\varphi) & \xrightarrow{q(\varphi)} & \mathcal{F}_2 & \xrightarrow{\bar{\kappa}(\varphi)} & \underline{\text{coker}}(\varphi) & \rightarrow & \mathbf{0} \\ & & \cong \downarrow & & \cong \downarrow & & (\cong) \downarrow & & (\cong) \downarrow & & \cong \downarrow & & (\cong) \downarrow \\ \mathbf{0} & \rightarrow & \underline{\ker}(\varphi) & \xrightarrow{\kappa(\varphi)} & \mathcal{F}_1 & \xrightarrow{\tilde{p}(\varphi)} & \underline{\text{im}}(\varphi) \equiv \underline{\text{coim}}(\varphi) & \xrightarrow{\tilde{q}(\varphi)} & \mathcal{F}_2 & \xrightarrow{\tilde{\kappa}(\varphi)} & \underline{\text{coker}}(\varphi) & \rightarrow & \mathbf{0} \end{array}$$

où nous avons seulement à vérifier que $\tilde{q}(\varphi)$ est bien un noyau pour $\tilde{\kappa}(\varphi)$. Or, les morphismes verticaux étant des isomorphismes locaux le morphisme $\tilde{q}(\varphi)$ est *localement* injectif. Ceci signifie que si l’image par $\tilde{q}(\varphi)$ d’une section de $\underline{\text{coim}}(\varphi)$ est nulle, ses germes sont nuls et s’agissant d’une section d’un faisceau, la section est nulle. Le morphisme $\tilde{q}(\varphi)$ est donc bien injectif et $\tilde{\kappa}(\varphi) \circ \tilde{q}(\varphi) = 0$. Montrons pour terminer que le faisceau noyau de $\tilde{\kappa}(\varphi)$ est bien l’image de $\tilde{q}(\varphi)$. Le fait que les morphismes verticaux soient des isomorphismes locaux assure que pour chaque $x \in \mathbf{X}$ le morphisme $\tilde{q}(\varphi)_{(x)}$ est un noyau pour $\tilde{\kappa}(\varphi)_{(x)}$ de sorte que si $\sigma \in \Gamma(U; \mathcal{F}_2)$ est annulée par $\tilde{\kappa}(\varphi)$, les germes $\sigma_{(x)}$ proviennent tous de germes de sections de $\underline{\text{coim}}(\varphi)$. Il existe donc un recouvrement $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ et des sections $\tau_\alpha \in \Gamma(U_\alpha; \underline{\text{coim}}(\varphi))$ dont les images par $\tilde{q}(\varphi)$ sont les restrictions de σ aux ouverts U_α . L’injectivité de $\tilde{q}(\varphi)$ montre alors que la famille $\{\tau_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ vérifie les conditions de recollement et comme $\underline{\text{coim}}(\varphi)$ est un faisceau, il existe bien une section $\tau \in \Gamma(U; \underline{\text{coim}}(\varphi))$ recollant les τ_α ; son image par $\tilde{q}(\varphi)$ est alors nécessairement la section σ . La catégorie $\text{Fais}_{\mathbf{A}}(\mathbf{X})$ est donc bien **abélienne**.

a) L’additivité des foncteurs “germes” sur la catégorie des faisceaux est conséquence de la même propriété sur la catégorie des préfaisceaux. Soit maintenant une suite exacte courte de la catégorie de faisceaux :

$$\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{F}_1 \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F}_2 \xrightarrow{\psi} \mathcal{F}_3 \rightarrow \mathbf{0};$$

le morphisme φ est un noyau pour ψ , et ψ un conoyau pour φ , dans la catégorie des *faisceaux*. Cette suite, vue dans la catégorie des préfaisceaux, se factorise en :

$$\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{F}_1 \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F}_2 \xrightarrow{\bar{\kappa}(\varphi)} \underline{\text{coker}}(\varphi) \xrightarrow[\cong]{\nu} \underline{\text{coker}}(\varphi) \equiv \mathcal{F}_3 \rightarrow \mathbf{0}.$$

et comme, pour chaque $x \in \mathbf{X}$, le foncteur “germe en x ” est exact sur la catégorie de préfaisceaux et que ν est un isomorphisme local, la suite de \mathbf{A} -modules :

$$\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{F}_{1(x)} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F}_{2(x)} \xrightarrow{\psi} \mathcal{F}_{3(x)} \rightarrow \mathbf{0},$$

est nécessairement exacte.

b) L’exactitude du foncteur “produit de germes” découle évidemment de l’exactitude de chaque foncteur $(-)_{(x)}$. La fidélité résulte immédiatement après la remarque de l’exercice 13.1.1-2 puisque un *faisceau* est nul, si et seulement si, tous ses germes sont nuls.

c) Une suite de faisceaux :

$$\mathcal{F}_1 \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F}_2 \xrightarrow{\psi} \mathcal{F}_3, \tag{*}$$

est exacte, si et seulement si, le morphisme canonique $\underline{\text{im}}(\varphi) \rightarrow \underline{\ker}(\psi)$ est un isomorphisme de faisceaux.

Compte tenu des résultats déjà prouvés, nous avons uniquement à montrer que si, pour chaque $x \in \mathbf{X}$, le morphisme canonique $\underline{\text{im}}(\varphi)_{(x)} \rightarrow \underline{\ker}(\psi)_{(x)}$ est un isomorphisme, alors le morphisme de faisceaux $\underline{\text{im}}(\varphi) \rightarrow \underline{\ker}(\psi)$ est un isomorphisme.

Soit plus généralement $\xi : \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2$ un morphisme de faisceaux tel que pour tout $x \in \mathbf{X}$, le morphisme $\xi_{(x)}$ est un isomorphisme. Montrons que ξ est un isomorphisme de faisceaux. Fixons une partie ouverte U de \mathbf{X} . Soit $\sigma \in \Gamma(U; \mathcal{G}_1)$ une section telle que $0 = \xi(\sigma) \in \Gamma(U; \mathcal{G}_2)$. Alors, quel que soit $u \in U$, on aura $0 = \xi(\sigma)_{(u)} = \xi_{(u)}(\sigma_{(u)})$ et donc $\sigma_{(u)} = 0$, pour tout $u \in U$; comme \mathcal{G}_1 est un *faisceau* la nullité de σ en découle. Le morphisme $\xi(U)$ est donc *injectif*. Soit maintenant $\tau \in \Gamma(U; \mathcal{G}_2)$, la surjectivité des morphismes $\xi_{(u)}$, pour tout $u \in U$, permet de fixer un recouvrement $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ et des sections $\sigma_\alpha \in \Gamma(U_\alpha; \mathcal{G}_1)$ telles

que $\xi(U_\alpha)(\sigma_\alpha) = \tau|_{U_\alpha}$, pour tout $\alpha \in \mathfrak{A}$. L'injectivité des morphismes $\xi(V)$ (vraie quel que soit $V \subseteq \mathbf{X}$) montre que la famille $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ vérifie la condition de recollement et comme \mathcal{G}_1 est un faisceau, il existe une section $\sigma \in \Gamma(U; \mathcal{G}_1)$ recollant les σ_α . Les sections $\xi(U)(\sigma)$ et τ de \mathcal{G}_2 au-dessus de U ont les mêmes germes; le fait que \mathcal{G}_2 est un faisceau garantit alors que $\xi(U)(\sigma) = \tau$, et la surjectivité de $\xi(U)$ est prouvée.

d) Soit une suite exacte de préfaisceau :

$$\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{P}_1 \xrightarrow{\varphi} \mathcal{P}_2 \xrightarrow{\psi} \mathcal{P}_3 \rightarrow \mathbf{0},$$

et appliquons-lui le foncteur "faisceau associé", on obtient le diagramme commutatif de morphismes verticaux des isomorphismes locaux :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{0} & \rightarrow & \mathcal{P}_1 & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{P}_2 & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{P}_3 \rightarrow \mathbf{0} \\ & & \downarrow (\cong) & & \downarrow (\cong) & & \downarrow (\cong) \\ \mathbf{0} & \rightarrow & \tilde{\mathcal{P}}_1 & \xrightarrow{\varphi} & \tilde{\mathcal{P}}_2 & \xrightarrow{\psi} & \tilde{\mathcal{P}}_3 \rightarrow \mathbf{0} \end{array}$$

L'exactitude des morphismes germes sur la catégorie des préfaisceaux montre que, pour chaque $x \in \mathbf{X}$, la suite :

$$\mathbf{0} \rightarrow \tilde{\mathcal{P}}_{1(x)} \xrightarrow{\varphi} \tilde{\mathcal{P}}_{2(x)} \xrightarrow{\psi} \tilde{\mathcal{P}}_{3(x)} \rightarrow \mathbf{0},$$

est exacte; la question (c) affirme alors que la suite de faisceaux :

$$\mathbf{0} \rightarrow \tilde{\mathcal{P}}_1 \xrightarrow{\varphi} \tilde{\mathcal{P}}_2 \xrightarrow{\psi} \tilde{\mathcal{P}}_3 \rightarrow \mathbf{0},$$

est exacte dans la catégorie des faisceaux. ■

Corollaire 13.2.1-3 : Soit M une variété différentiable n -dimensionnelle et notons, pour $0 \leq r \leq n$, $\underline{\Omega}_M^r$ le faisceau des r -formes différentielles définies sur les ouverts de M . Le complexe de faisceaux :

$$\mathbf{0} \rightarrow \underline{\mathbb{R}}_M \xrightarrow{\varepsilon} \underline{\Omega}_M^0 \xrightarrow{d_0} \underline{\Omega}_M^1 \xrightarrow{d_1} \dots \xrightarrow{d_{n-2}} \underline{\Omega}_M^{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \underline{\Omega}_M^n \rightarrow \mathbf{0}$$

où $\underline{\mathbb{R}}_M$ désigne le faisceau des fonctions localement constantes et ε est l'injection canonique qui associe à une fonction localement constante la fonction \mathcal{C}^∞ qu'elle définit, est **exact** dans la catégorie des faisceaux de \mathbb{R} -espaces vectoriels sur M .

Démonstration : D'après la proposition précédente, il suffit de prouver l'exactitude du complexe des germes des faisceaux en question. Soit donc $x \in M$ et ϖ un germe de r -forme différentielle en x tel que $d_{r(x)}(\varpi) = 0 \in \underline{\Omega}_M^{r+1}(x)$. Il existe alors un représentant local ω de ϖ que l'on peut supposer défini sur un ouvert de carte V contenant x , vérifiant $d_r(\omega) = 0$. Le lemme de Poincaré sur \mathbb{R}^n prouve précisément qu'il existe une forme différentielle $\nu \in \Gamma(V, \underline{\Omega}_M^{r-1})$ telle que $d_{r-1}(\nu) = \omega$ et donc, telle que $d_{r-1(x)}(\nu(x)) = \varpi$. Par un raisonnement parfaitement analogue, on démontre l'exactitude autour de $\underline{\Omega}_M^0(x)$. Comme ε est trivialement injective, la démonstration du corollaire est terminée. ■

Exercice 13.2.1-2 : Soit $\{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ une famille arbitraire de faisceaux de \mathbf{A} -modules sur \mathbf{X} . Rappelons que la catégorie $\text{Mod}(\mathbf{A})$ possède des sommes et des produits directs pour des familles de modules arbitrairement indexées. Faisons correspondre à chaque ouvert $U \subseteq \mathbf{X}$ les \mathbf{A} -modules :

$$\left(\bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathcal{F}_\alpha \right)(U) := \left(\bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathcal{F}_\alpha(U) \right) \quad \text{et} \quad \left(\prod_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathcal{F}_\alpha \right)(U) := \left(\prod_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathcal{F}_\alpha(U) \right)$$

et définissons pour $V \subseteq U$, les morphismes de restriction $\rho_V^U : (\bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathcal{F}_\alpha)(U) \rightarrow (\bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathcal{F}_\alpha)(V)$ et $\rho_V^U : (\prod_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathcal{F}_\alpha)(U) \rightarrow (\prod_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathcal{F}_\alpha)(V)$ respectivement comme la somme et le produit directs des morphismes de restriction $(\rho_\alpha)_V^U : \mathcal{F}_\alpha(U) \rightarrow \mathcal{F}_\alpha(V)$. Ces données définissent trivialement des préfaisceaux de \mathbf{A} -modules sur \mathbf{X} notés respectivement $\bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathcal{F}_\alpha$ et $\prod_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathcal{F}_\alpha$.⁽⁴⁵⁾

a) Montrer que le préfaisceaux $(\prod_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathcal{F}_\alpha)$ est toujours un **faisceau**.

b) Notons $(\bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathcal{F}_\alpha)^\sim$ le faisceau associé au préfaisceau $\bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathcal{F}_\alpha$. Montrer que le morphisme canonique de préfaisceaux :

$$\nu : \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathcal{F}_\alpha \longrightarrow \left(\bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathcal{F}_\alpha \right)^\sim \quad (*)$$

est toujours **injectif**.

c) Fixons un élément $x \in \mathbf{X}$. Pour tout voisinage ouvert $U \subseteq \mathbf{X}$ de x , on dispose du morphisme canonique de \mathbf{A} -modules :

$$\bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathcal{F}_\alpha(U) \xrightarrow{\Sigma(U;x)} \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{A}} (\mathcal{F}_\alpha)_{(x)}$$

donné par la somme directe d'applications "germes en x ". Montrer que ces morphismes sont compatibles aux applications de restriction entre des voisinages de x . En déduire une application canonique :

$$\left(\bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathcal{F}_\alpha \right)_{(x)} \xrightarrow{\Sigma(x;x)} \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{A}} (\mathcal{F}_\alpha)_{(x)}.$$

Montrer que l'application $\Sigma(x, x)$ est toujours un **isomorphisme**.

d) Soit $\mathbf{X} = \mathbb{N}$ muni de la topologie discrète.

1) Montrer que le foncteur qui associe à un faisceau \mathcal{F} de \mathbf{A} -modules sur \mathbb{N} le \mathbf{A} -module $\prod_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{F}(m)$, est additif et définit une équivalence de catégories entre la catégorie $\text{Fais}_{\mathbf{A}}(\mathbb{N})$ et la catégorie $\text{Mod}(\mathbf{A})^{\mathbb{N}}$ des \mathbf{A} -modules de la forme $\mathcal{M} = \prod_{m \in \mathbb{N}} \mathbf{M}_m$, où chaque \mathbf{M}_m est un \mathbf{A} -module et où les morphismes entre deux objets $\mathcal{M} = \prod_{m \in \mathbb{N}} \mathbf{M}_m$ et $\mathcal{N} = \prod_{m \in \mathbb{N}} \mathbf{N}_m$ sont les produits des morphismes de \mathbf{A} -modules $\varphi_m : \mathbf{M}_m \rightarrow \mathbf{N}_m$.

2) Soit $\mathcal{M} = \{ \mathcal{M}_\alpha = \prod_{m \in \mathbb{N}} \mathbf{M}_{\alpha;m} \}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ une famille d'objets de $\text{Mod}(\mathbf{A})^{\mathbb{N}}$. Montrer que les objets :

$$\prod_{m \in \mathbb{N}} \left(\bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathbf{M}_{\alpha;m} \right) \quad \text{et} \quad \prod_{m \in \mathbb{N}} \left(\prod_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathbf{M}_{\alpha;m} \right)$$

sont respectivement une somme et un produit directs dans $\text{Mod}(\mathbf{A})^{\mathbb{N}}$ pour la famille \mathcal{M} . La catégorie $\text{Fais}_{\mathbf{A}}(\mathbb{N})$ possède donc des sommes et des produits directs pour des familles de faisceaux arbitrairement indexées.

3) Pour chaque $m \in \mathbb{N}$, notons $\underline{\mathbf{A}}(m)$ le faisceau sur \mathbb{N} dont les germes en $n \neq m$ sont nuls et dont l'ensemble des germes en m est l'anneau \mathbf{A} lui-même. Montrer, à l'aide de la question précédente que, dans $\text{Fais}_{\mathbf{A}}(\mathbb{N})$, la somme et le produit directs des faisceaux $\underline{\mathbf{A}}(m)$ coïncident avec le "faisceau constant" $\underline{\mathbf{A}}_{\mathbb{N}}$. En conclure que le morphisme canonique (*) n'est pas surjectif en général.

Plus généralement, soit \mathcal{M} la famille de faisceaux sur \mathbb{N} correspondante à la famille d'objets de $\text{Mod}(\mathbf{A})^{\mathbb{N}}$ définie par : $\mathcal{M} = \{ \prod_{m \in \mathbb{N}} \mathbf{M}_{\alpha;m} \}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$. Remarquer que le morphisme (*) correspond alors à l'inclusion canonique de \mathbf{A} -modules :

$$\bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{A}} \left(\prod_{m \in \mathbb{N}} \mathbf{M}_{\alpha;m} \right) \longrightarrow \prod_{m \in \mathbb{N}} \left(\bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathbf{M}_{\alpha;m} \right)$$

qui est bijective en toute généralité, si et seulement si, \mathfrak{A} est de cardinal fini.

⁴⁵ Lorsque $\{ \mathcal{F}_\alpha \}$ est une famille de préfaisceaux sur \mathbf{X} , les préfaisceaux $\bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathcal{F}_\alpha$ et $\prod_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathcal{F}_\alpha$ sont de manière naturelle une somme et un produit directs pour la famille $\{ \mathcal{F}_\alpha \}$, dans la catégorie $\text{Préf}_{\mathbf{A}}(\mathbf{X})$.

e) Revenons aux données générales des premières questions. Pour chaque $\alpha_0 \in \mathfrak{A}$, posons

$$\iota_{\alpha_0} : \mathcal{F}_{\alpha_0} \longrightarrow \left(\bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathcal{F}_{\alpha} \right)^{\sim} \quad \text{et} \quad \pi_{\alpha_0} : \left(\bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathcal{F}_{\alpha} \right)^{\sim} \longrightarrow \mathcal{F}_{\alpha_0}$$

et

$$\iota_{\alpha_0} : \mathcal{F}_{\alpha_0} \longrightarrow \prod_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathcal{F}_{\alpha} \quad \text{et} \quad \pi_{\alpha_0} : \prod_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathcal{F}_{\alpha} \longrightarrow \mathcal{F}_{\alpha_0}$$

les morphismes de faisceaux définis au niveau des sections au-dessus des ouverts des préfaisceaux somme et produit directs, respectivement comme les inclusions et projections associées à la somme et le produit directs de \mathbf{A} -modules.

Montrer alors que la catégorie $\text{Fais}_{\mathbf{A}}(\mathbf{X})$ possède des sommes et produits directs pour des familles de faisceaux arbitrairement indexées.

f) Dédurre de la question précédente que la catégorie $\text{Fais}_{\mathbf{A}}(\mathbf{X})$ possède des limites pour des systèmes inductifs et projectifs arbitraires.

*Indication : Utiliser le fait que dans une catégorie abélienne possédant des sommes et des produits directs pour des familles d'objets arbitrairement indexées, les limites des systèmes inductifs (resp. projectifs) d'objets, sont obtenues comme **conoyau** (resp. **noyau**) d'un morphisme entre deux sommes directes (resp. deux produits directs) (cf. exercice 8.4.1-2 en page 128 et sujets annexes).⁽⁴⁶⁾*

Exercice 13.2.1-3 : Plaçons nous dans la catégorie $\text{Fais}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{X})$ des faisceaux de groupes abéliens sur \mathbf{X} . On appelle «*faisceaux d'anneaux sur \mathbf{X}* » la donnée d'un faisceau $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ de $\text{Fais}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{X})$, tel que pour tout ouvert $U \subseteq \mathbf{X}$, le groupe commutatif $(\Gamma(U; \mathcal{O}_{\mathbf{X}}), 0, +)$ est le groupe additif sous-jacent à une structure d'anneau avec identité multiplicative⁽⁴⁷⁾, et tel que les morphismes de restriction $\rho_V^U : \Gamma(U; \mathcal{O}_{\mathbf{X}}) \rightarrow \Gamma(V; \mathcal{O}_{\mathbf{X}})$ sont des homomorphismes d'anneaux (avec identité multiplicative), quels que soient $V \subseteq U \subseteq \mathbf{X}$. On définit alors un « *$\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ -module*» comme la donnée d'un faisceau \mathcal{M} de $\text{Fais}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{X})$ et, pour chaque ouvert $U \subseteq \mathbf{X}$, d'une structure de $\Gamma(U; \mathcal{O}_{\mathbf{X}})$ -module sur $\Gamma(U; \mathcal{M})$ «compatible» aux morphismes de restriction, *i.e.* tels que pour tous $V \subseteq U$, le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(U; \mathcal{O}_{\mathbf{X}}) \times \Gamma(U; \mathcal{M}) & \xrightarrow{\mu(U)} & \Gamma(U; \mathcal{M}) \\ \rho(\mathcal{O}_{\mathbf{X}})_V^U \downarrow \times \downarrow \rho(\mathcal{M})_V^U & & \downarrow \rho(\mathcal{M})_V^U \\ \Gamma(V; \mathcal{O}_{\mathbf{X}}) \times \Gamma(V; \mathcal{M}) & \xrightarrow{\mu(V)} & \Gamma(V; \mathcal{M}) \end{array}$$

où $\mu(-)$ désigne le morphisme de multiplication des structures de modules, est *commutatif*.

Étant donnés deux $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ -modules \mathcal{M}_1 et \mathcal{M}_2 , on dit qu'un morphisme de faisceaux $\varphi : \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2$ est un «*morphisme de $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ -modules*», si le morphisme $\Gamma(U; \varphi) : \Gamma(U; \mathcal{M}_1) \rightarrow \Gamma(U; \mathcal{M}_2)$ est un morphisme de $\Gamma(U; \mathcal{O}_{\mathbf{X}})$ -modules, quel que soit l'ouvert $U \subseteq \mathbf{X}$.

On note $\text{Mod}(\mathcal{O}_{\mathbf{X}})$ la catégorie dont les objets sont des $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ -modules et où les morphismes sont les morphismes de $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ -modules. Le foncteur «oubli» de la catégorie $\text{Mod}(\mathcal{O}_{\mathbf{X}})$ vers la catégorie $\text{Fais}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{X})$ qui fait correspondre à un $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ -module le faisceau de \mathbb{Z} -modules sous-jacent est *fidèle*.

a) Soit $\varphi : \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2$ un morphisme de $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ -modules. Notons $(\underline{\ker}(\varphi), \kappa)$ et $(\underline{\coker}(\varphi), \tilde{\kappa})$ respectivement le noyau et conoyau de φ dans la catégorie abélienne $\text{Fais}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{X})$. Montrer que $\underline{\ker}(\varphi)$ et $\underline{\coker}(\varphi)$ sont naturellement des $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ -modules; puis que κ et $\tilde{\kappa}$ sont des morphismes de $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ -modules.

⁴⁶ Vous pouvez également consulter les exercices 15 et 16 du chapitre I (page 55) de «Algebra» de S. Lang; Addison-Wesley, sixième édition (1974).

⁴⁷ On remarquera que le groupe réduit à un élément : $(\{0\}, 0, +)$ est bien un anneau avec identité.

- b) Dédurre de la question précédente que $(\underline{\ker}(\varphi), \kappa)$ et $(\underline{\coker}(\varphi), \bar{\kappa})$ sont respectivement un noyau et un conoyau pour φ **dans la catégorie** $\text{Mod}(\mathcal{O}_X)$.
- c) Montrer que $\text{Mod}(\mathcal{O}_X)$ est une catégorie abélienne. Elle possède des sommes et des produits directs pour des familles de \mathcal{O}_X -modules arbitrairement indexées. De même, les limites pour des systèmes inductifs et projectifs arbitraires existent.
- d) Soit \mathcal{F} un faisceau de $\text{Fais}_A(\mathbf{X})$ et notons $\underline{\mathbf{A}}_X$ le faisceau associé au préfaisceau constant $U \rightsquigarrow \mathbf{A}$. Rappelons que les sections de $\underline{\mathbf{A}}_X$ s'identifient aux applications *localement constantes* définies sur les ouverts de \mathbf{X} et à valeurs dans \mathbf{A} (cf. exercice 13.2.1-1).

Pour toute partie ouverte $U \subseteq \mathbf{X}$, soient $\lambda \in \Gamma(U; \underline{\mathbf{A}}_X)$ et $\sigma \in \Gamma(U; \mathcal{F})$. Nous allons définir la section $\lambda \cdot \sigma$.

- 1) Pour chaque recouvrement ouvert $\mathcal{U} = \{V_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ de U tel que les restrictions $\lambda|_{V_\alpha}$ sont constantes, de valeurs respectivement notées $a_\alpha \in \mathbf{A}$, montrer que la famille $\{a_\alpha \cdot \sigma|_{V_\alpha}\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ est une famille de sections de \mathcal{F} vérifiant la condition de recollement des sections. Il existe donc une, et une seule, section $\tau(\mathcal{U}) \in \Gamma(U; \mathcal{F})$ telle que $\tau(\mathcal{U})|_{V_\alpha} = a_\alpha \cdot \sigma|_{V_\alpha}$.
- 2) Montrer que les sections $\tau(\mathcal{U}) \in \Gamma(U; \mathcal{F})$, obtenues par ce procédé, définissent une même section de \mathcal{F} au-dessus de U indépendamment du recouvrement \mathcal{U} vérifiant les conditions de la question précédente; elle sera notée $\lambda \cdot \sigma$.
- 3) Montrer que les opérations $\cdot : \Gamma(U; \underline{\mathbf{A}}) \oplus \Gamma(U; \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(U; \mathcal{F})$ définissent une structure de $\underline{\mathbf{A}}_X$ -module sur \mathcal{F} .
- 4) Montrer que cette manière de faire correspondre à chaque $\mathcal{F} \in \text{Ob}(\text{Fais}_A(\mathbf{X}))$ un $\underline{\mathbf{A}}_X$ -module, définit une équivalence de catégories entre $\text{Fais}_A(\mathbf{X})$ et la catégorie $\text{Mod}(\underline{\mathbf{A}}_X)$.

13.2.2 Foncteurs “sections” dans la catégorie des faisceaux

Une des différences fondamentales entre les catégories abéliennes $\text{Préf}_A(\mathbf{X})$ et $\text{Fais}_A(\mathbf{X})$ vient de ce que, compte tenu de la différence avec la notion de conoyau, les foncteurs des sections au-dessus des ouverts, exacts sur la catégorie $\text{Préf}_A(\mathbf{X})$, ne sont plus qu'exact à gauche en catégorie des faisceaux.

En effet, soit

$$\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{F}_1 \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F}_2 \xrightarrow{\psi} \mathcal{F}_3 \rightarrow \mathbf{0}$$

une suite exacte de faisceaux. Le morphisme φ est un noyau *dans la catégorie des préfaisceaux* du morphisme ψ , par contre ψ *n'est pas nécessairement* un conoyau pour φ *dans la catégorie des préfaisceaux*. On a la suite de préfaisceaux :

$$\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{F}_1 \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F}_2 \xrightarrow{\bar{\kappa}(\varphi)} \underline{\coker}(\varphi) \xrightarrow[\cong]{\nu} \underline{\underline{\coker}}(\varphi) \equiv \mathcal{F}_3 \rightarrow \mathbf{0}$$

et pour tout ouvert $U \subseteq \mathbf{X}$, on a :

$$\mathbf{0} \rightarrow \Gamma(U; \mathcal{F}_1) \xrightarrow{\Gamma(U; \varphi)} \Gamma(U; \mathcal{F}_2) \xrightarrow{\Gamma(U; \bar{\kappa}(\varphi))} \Gamma(U; \underline{\coker}(\varphi)) \xrightarrow[\dagger]{\Gamma(U; \nu)} \Gamma(U; \underline{\underline{\coker}}(\varphi)) \equiv \Gamma(U; \mathcal{F}_3) \rightarrow \mathbf{0}$$

où le morphisme $\Gamma(U; \nu)$ est *injectif*. En effet, soit $\sigma \in \Gamma(U; \underline{\underline{\coker}}(\varphi))$ une section dont l'image par $\Gamma(U; \nu)$ est nulle, notons $\tau \in \Gamma(U; \mathcal{F}_2)$ un relèvement de σ (possible puisque $\Gamma(U; \bar{\kappa}(\varphi))$ est surjective). Comme ν est un isomorphisme local tous les germes de σ sont nuls; ceci signifie que τ peut être relevée localement en des sections de \mathcal{F}_1 et comme φ est injectif et que \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 sont des faisceaux, la section τ est effectivement dans l'image de $\Gamma(U; \varphi)$ et $\sigma = 0$.

L'injectivité de $\Gamma(U; \nu)$ suffit alors à prouver, à partir de l'exactitude du foncteur $\Gamma(U; -)$ dans la catégorie de préfaisceaux et par la suite (\dagger) , l'exactitude à gauche du foncteur $\Gamma(U; -) : \text{Fais}_A(\mathbf{X}) \rightsquigarrow \text{Mod}(\mathbf{A})$. Énonçons ce résultat sous la forme de lemme.

Lemme 13.2.2-1 : Pour tout ouvert $U \subseteq X$, le foncteur additif “sections au-dessus de U ”

$$\Gamma(U; -) : \text{Fais}_{\mathbf{A}}(X) \rightsquigarrow \text{Mod}(\mathbf{A}),$$

est *exact à gauche*.

Remarque 13.2.2-1 : Reprenons l'exemple de la remarque 13.2-1 pour montrer que le foncteur “sections” n'est pas nécessairement exact dans la catégorie des faisceaux. Nous y considérons la variété différentiable $X = \mathbb{S}^1$ et avons montré que dans la suite exacte de préfaisceaux :

$$\mathbf{0} \rightarrow \underline{\mathbb{R}}_X \xrightarrow{\varepsilon} \underline{\Omega}_X^0 \xrightarrow{\bar{\kappa}(\varepsilon)} \underline{\text{coker}}(\varepsilon) =: \mathcal{Q} \rightarrow \mathbf{0},$$

le préfaisceau \mathcal{Q} n'est pas un faisceau. Le corollaire 13.2.1-3 montre, d'autre part, que la suite de faisceaux :

$$\mathbf{0} \rightarrow \underline{\mathbb{R}}_X \xrightarrow{\varepsilon} \underline{\Omega}_X^0 \xrightarrow{d_0} \underline{\Omega}_X^1 \rightarrow \mathbf{0},$$

est *exacte*. Il en découle un morphisme canonique $\nu : \underline{\text{coker}}(\varepsilon) \rightarrow \underline{\Omega}_M^1$ factorisant d_0 en $d_0 = \nu \circ \bar{\kappa}(\varepsilon)$. Ce morphisme est clairement un isomorphisme local et $\underline{\Omega}_X^1$ s'identifie par conséquent au faisceau associé à $\underline{\text{coker}}(\varepsilon)$, et le morphisme ν est nécessairement injectif mais pas forcément surjectif. Dans le cas présent, la non surjectivité est donnée par la 1-forme différentielle globale sur le cercle unité notée habituellement $d\theta$ dont on sait qu'elle n'est pas exacte malgré une notation des plus trompeuses.

13.3 Cohomologie des faisceaux

La dernière section 13.2.2 montre que pour toute suite exacte courte de la catégorie $\text{Fais}_{\mathbf{A}}(X)$:

$$\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{F}_1 \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F}_2 \xrightarrow{\psi} \mathcal{F}_3 \rightarrow \mathbf{0},$$

et pour chaque ouvert $U \subseteq X$, la suite de \mathbf{A} -modules :

$$\mathbf{0} \rightarrow \Gamma(U; \mathcal{F}_1) \xrightarrow{\Gamma(U; \varphi)} \Gamma(U; \mathcal{F}_2) \xrightarrow{\Gamma(U; \psi)} \Gamma(U; \mathcal{F}_3),$$

est, en général, uniquement exacte à gauche.

Une problématique fondamentale dans le contexte des catégories abéliennes et des foncteurs exacts à gauche est l'analyse fine du défaut d'exactitude; c'est le but de la «*théorie des foncteurs dérivés (à droite)*» d'y apporter une réponse aussi générale que possible. Dans le cas qui nous intéresse dans ce cours, *i.e.* catégorie des faisceaux et foncteurs “sections au-dessus d'un ouvert” la théorie des foncteurs dérivés peut être remarquablement simplifiée par le point de vue de Godement et sa construction fonctorielle (et exacte) de ce que l'on appelle «*les résolutions flasques canoniques de Godement*» que nous allons introduire dans les sections suivantes. Signalons, pour terminer, que les foncteurs dérivés (à droite) des foncteurs de “sections au-dessus des ouverts” constituent très précisément ce que l'on appelle également les «*foncteurs de cohomologie de faisceaux*».

13.3.1 L'idée de base des foncteurs dérivés (à droite)

Plaçons-nous dans le contexte général où l'on se donne un foncteur additif et *exact à gauche* entre deux catégories abéliennes $\mathcal{F} : \mathcal{C}_1 \rightsquigarrow \mathcal{C}_2$.

Soit une suite exacte de \mathcal{C}_1 :

$$\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{F}_1 \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F}_2 \xrightarrow{\psi} \mathcal{F}_3 \rightarrow \mathbf{0}, \quad (*)$$

et *supposons qu'il existe une suite exacte de complexes acycliques* de \mathcal{C}_1 dont la première ligne est précisément la suite (*).

$$\begin{array}{ccccccc} & & d_1(\mathcal{F}_1) \uparrow & & d_1(\mathcal{F}_2) \uparrow & & d_1(\mathcal{F}_3) \uparrow \\ \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathcal{A}_1^1 & \longrightarrow & \mathcal{A}_2^1 & \longrightarrow & \mathcal{A}_3^1 \longrightarrow \mathbf{0} \\ & & d_0(\mathcal{F}_1) \uparrow & & d_0(\mathcal{F}_2) \uparrow & & d_0(\mathcal{F}_3) \uparrow \\ \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathcal{A}_1^0 & \longrightarrow & \mathcal{A}_2^0 & \longrightarrow & \mathcal{A}_3^0 \longrightarrow \mathbf{0} \\ & & \varepsilon(\mathcal{F}_1) \uparrow & & \varepsilon(\mathcal{F}_2) \uparrow & & \varepsilon(\mathcal{F}_3) \uparrow \\ \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathcal{F}_1 & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{F}_2 & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{F}_3 \longrightarrow \mathbf{0} \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \end{array}$$

Et supposons, en plus, que les suites de \mathcal{C}_2 :

$$\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{A}_1^r) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{A}_2^r) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathcal{A}_3^r) \rightarrow \mathbf{0}$$

sont exactes, quel que soit $r \in \mathbb{N}$.

Si nous appliquons maintenant le foncteur \mathcal{F} au bicomplexe \mathcal{A}_* , on obtient la suite exacte de complexes de \mathcal{C}_2 :

$$\begin{array}{ccccccc} & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathcal{F}(\mathcal{A}_1^2) & \longrightarrow & \mathcal{F}(\mathcal{A}_2^2) & \longrightarrow & \mathcal{F}(\mathcal{A}_3^2) \longrightarrow \mathbf{0} \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathcal{F}(\mathcal{A}_1^1) & \longrightarrow & \mathcal{F}(\mathcal{A}_2^1) & \longrightarrow & \mathcal{F}(\mathcal{A}_3^1) \longrightarrow \mathbf{0} \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathcal{F}(\mathcal{A}_1^0) & \longrightarrow & \mathcal{F}(\mathcal{A}_2^0) & \longrightarrow & \mathcal{F}(\mathcal{A}_3^0) \longrightarrow \mathbf{0} \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \end{array}$$

d'où la suite exacte longue de cohomologie :

$$\dots \longrightarrow h^r(\mathcal{F}(\mathcal{A}_1^r)) \longrightarrow h^r(\mathcal{F}(\mathcal{A}_2^r)) \longrightarrow h^r(\mathcal{F}(\mathcal{A}_3^r)) \longrightarrow \dots$$

et comme le foncteur \mathcal{F} est supposé exact à gauche, on a $h^0(\mathcal{F}(\mathcal{A}_j^r)) \equiv \mathcal{F}(\mathcal{A}_j^r)$, pour $j = 1, 2, 3$, ce qui donne la suite exacte longue de \mathcal{C}_2 :

$$\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{F}_1) \xrightarrow{\mathcal{F}(\varphi)} \mathcal{F}(\mathcal{F}_2) \xrightarrow{\mathcal{F}(\psi)} \mathcal{F}(\mathcal{F}_3) \rightarrow h^1(\mathcal{F}(\mathcal{A}_1^1)) \rightarrow h^1(\mathcal{F}(\mathcal{A}_2^1)) \rightarrow h^1(\mathcal{F}(\mathcal{A}_3^1)) \rightarrow \dots$$

où l'on voit la suite exacte à gauche $\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{A}_1) \xrightarrow{\mathcal{F}(\varphi)} \mathcal{F}(\mathcal{A}_2) \xrightarrow{\mathcal{F}(\psi)} \mathcal{F}(\mathcal{A}_3)$, prendre place dans une suite exacte longue “de cohomologie”.

La théorie des foncteurs dérivés (à droite) donne des conditions suffisantes très générales (*i.e.* indépendantes du foncteur additif exact à gauche \mathcal{F} considéré), pour garantir, à la fois, l'existence des bicomplexes \mathcal{S}_* , l'exactitude des suites “lignes” : $\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{A}_1) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{A}_2) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{A}_3) \rightarrow \mathbf{0}$, et le caractère “intrinsèque” des objets de cohomologie $h^r(\mathcal{F}(\mathcal{S}_j^*))$. Cela se fait à l'aide de la notion d'objets «*injectif d'une catégorie abélienne*» moyennant un certain nombre de résultats techniques.

En théorie de faisceaux de modules, et lorsque l'on s'intéresse aux foncteurs de sections au-dessus d'ouverts, une construction *canonique* des bicomplexes \mathcal{S}_* , satisfaisant aux conditions requises et due à Godement, se substitue très avantageusement à la théorie générale. Cette construction est connue sous le nom de «*résolution flasque canonique de Godement*» ; nous abordons dans les sections suivantes sa description.

13.3.2 Faisceaux flasques

Définition 13.3.2-1 : Un faisceau de \mathbf{A} -modules \mathcal{F} est dit «*flasque*» lorsque les morphismes de restriction $\rho_V^U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ sont *surjectifs*, quels que soient les ouverts $V \subseteq U$; ou, ce qui revient au même, lorsque les morphismes de restriction $\rho_V^X : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ sont *surjectifs*, quel que soit $V \subseteq X$.

Existence des faisceaux flasques et foncteur \mathcal{C}^0 de Godement

Soit \mathcal{G} un faisceau de \mathbf{A} -modules et posons, pour tout ouvert $U \subseteq X$,

$$\mathcal{C}^0(\mathcal{G})(U) := \prod_{u \in U} \mathcal{G}(u),$$

et, pour deux ouverts $U \supseteq V$, soit $\rho_V^U : \mathcal{C}^0(\mathcal{G})(U) \rightarrow \mathcal{C}^0(\mathcal{G})(V)$ l'homomorphisme de \mathbf{A} -modules qui associe à la famille $\{\sigma_u \in \mathcal{G}(u)\}_{u \in U}$ la sous-famille $\{\sigma_v \in \mathcal{G}(u)\}_{v \in V}$. Ces données font de $\mathcal{C}^0(\mathcal{G})$ un *faisceau de \mathbf{A} -modules* (le vérifier) et comme les morphismes de restriction sont trivialement surjectifs $\mathcal{C}^0(\mathcal{G})$ est bien un faisceau *flasque*. Plus important encore, on a un morphisme *canonique* de faisceaux :

$$\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{G} \xrightarrow{\varepsilon(\mathcal{G})} \mathcal{C}^0(\mathcal{G})$$

défini sur un ouvert $U \subseteq X$ par :

$$\begin{aligned} \varepsilon(\mathcal{G})(U) : \mathcal{G}(U) &\longrightarrow \mathcal{C}^0(\mathcal{G})(U) \\ \sigma &\longmapsto \prod_{u \in U} \sigma(u) \end{aligned}$$

où la fidélité du produit de germes montre que $\varepsilon(\mathcal{G})$ est un morphisme *injectif* dans la catégorie $\text{Fais}_{\mathbf{A}}(\mathbf{X})$.

Soit maintenant $\varphi : \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2$ un morphisme de faisceaux. Pour chaque ouvert $U \subseteq X$, on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_1(U) \xrightarrow{\varepsilon(\mathcal{G}_1)(U)} \mathcal{C}^0(\mathcal{G}_1)(U) = \prod_{u \in U} \mathcal{G}_{1(u)} \ni \prod_{u \in U} \sigma_{(u)} \\ \varphi(U) \downarrow \qquad \qquad \downarrow \mathcal{C}^0(\varphi)(U) \qquad \downarrow \prod_{u \in U} \varphi_{(u)} \\ \mathcal{G}_2(U) \xrightarrow{\varepsilon(\mathcal{G}_2)(U)} \mathcal{C}^0(\mathcal{G}_2)(U) = \prod_{u \in U} \mathcal{G}_{2(u)} \ni \prod_{u \in U} \varphi_{(u)}(\sigma_{(u)}) \end{array}$$

compatible aux morphismes de restriction d'ouverts. Le diagramme de morphismes de faisceaux :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{0} \rightarrow \mathcal{G}_1 \xrightarrow{\varepsilon(\mathcal{G}_1)} \mathcal{C}^0(\mathcal{G}_1) \\ \varphi \downarrow \qquad \qquad \downarrow \mathcal{C}^0(\varphi) \\ \mathbf{0} \rightarrow \mathcal{G}_2 \xrightarrow{\varepsilon(\mathcal{G}_2)} \mathcal{C}^0(\mathcal{G}_2) \end{array}$$

est donc **commutatif**.

Proposition 13.3.2-1 : La correspondance définie sur la catégorie $\text{Fais}_A(X)$ qui associe à un faisceau de A -modules \mathcal{G} , le morphisme de faisceaux injectif :

$$\boxed{\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{G} \xrightarrow{\varepsilon(\mathcal{G})} \mathcal{C}^0(\mathcal{G})}$$

est **fonctorielle et exacte**.

Démonstration : La functorialité de la correspondance résulte immédiatement des commentaires préliminaires à la proposition. Pour l'exactitude, il convient tout d'abord d'en préciser le sens. Soit

$$\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{G}_1 \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G}_2 \xrightarrow{\psi} \mathcal{G}_3 \rightarrow \mathbf{0}, \quad (\ddagger)$$

une suite exacte de faisceaux. On a par functorialité le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \mathbf{0} \rightarrow & \mathcal{G}_1 & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{G}_2 & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{G}_3 & \rightarrow \mathbf{0} \\ & \varepsilon(\mathcal{G}_1) \downarrow & & \varepsilon(\mathcal{G}_2) \downarrow & & \varepsilon(\mathcal{G}_3) \downarrow & \\ \mathbf{0} \rightarrow & \mathcal{C}^0(\mathcal{G}_1) & \xrightarrow{\mathcal{C}^0(\varphi)} & \mathcal{C}^0(\mathcal{G}_2) & \xrightarrow{\mathcal{C}^0(\psi)} & \mathcal{C}^0(\mathcal{G}_3) & \rightarrow \mathbf{0} \end{array}$$

et l'exactitude dont il est question dans l'énoncé de la proposition concerne l'exactitude de sa dernière ligne :

$$\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{C}^0(\mathcal{G}_1) \xrightarrow{\mathcal{C}^0(\varphi)} \mathcal{C}^0(\mathcal{G}_2) \xrightarrow{\mathcal{C}^0(\psi)} \mathcal{C}^0(\mathcal{G}_3) \rightarrow \mathbf{0}. \quad (*)$$

Celle-ci résulte de l'exactitude des suites des sections de (*) au-dessus des ouverts $U \subseteq X$:

$$\mathbf{0} \rightarrow \prod_{u \in U} \mathcal{G}_{1(u)} \xrightarrow{\prod_{u \in U} \varphi_{(u)}} \prod_{u \in U} \mathcal{G}_{2(u)} \xrightarrow{\prod_{u \in U} \psi_{(u)}} \prod_{u \in U} \mathcal{G}_{3(u)} \rightarrow \mathbf{0},$$

que l'on établit aisément à partir de l'exactitude des suites des germes :

$$\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{G}_{1(x)} \xrightarrow{\varphi(x)} \mathcal{G}_{2(x)} \xrightarrow{\psi(x)} \mathcal{G}_{3(x)} \rightarrow \mathbf{0},$$

quel que soit $x \in \mathbf{X}$, résultant de l'exactitude de (‡) (cf. proposition 13.2.1-2-(c)). ■

Exercice 13.3.2-1 : (Suite de l'exercice 13.2.1-3.) Soit $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ un faisceau d'anneaux sur \mathbf{X} .

- a) Montrer que $\mathcal{C}^0(\mathcal{O}_{\mathbf{X}})$ est naturellement un faisceau d'anneaux et que le morphisme canonique $\varepsilon(\mathcal{O}_{\mathbf{X}})$ est alors un morphisme de faisceaux d'anneaux ; *i.e.* tel que pour tout ouvert $U \subseteq \mathbf{X}$, le morphisme $\Gamma(U; \varepsilon(\mathcal{O}_{\mathbf{X}}))$ est un homomorphisme d'anneaux avec identité multiplicative.
- b) Soit \mathcal{M} un $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ -module. Montrer que $\mathcal{C}^0(\mathcal{M})$ est naturellement un $\mathcal{C}^0(\mathcal{O}_{\mathbf{X}})$ -module, et donc un $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ -module *via* le morphisme de faisceaux d'anneaux $\varepsilon(\mathcal{O}_{\mathbf{X}})$.
- c) Le foncteur \mathcal{C}^0 de Godement est défini sur la catégorie abélienne $\text{Mod}(\mathcal{O}_{\mathbf{X}})$ et y est *additif et exact*.

13.3.3 Trois résultats fondamentaux sur les faisceaux flasques

Proposition 13.3.3-1 : *Pour toute suite exacte de faisceaux de \mathbf{A} -modules :*

$$\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G}_1 \xrightarrow{\psi} \mathcal{G}_2 \rightarrow \mathbf{0},$$

où \mathcal{F} est un faisceau *flasque*, la suite de \mathbf{A} -modules :

$$\mathbf{0} \rightarrow \Gamma(U; \mathcal{F}) \xrightarrow{\Gamma(U; \varphi)} \Gamma(U; \mathcal{G}_1) \xrightarrow{\Gamma(U; \psi)} \Gamma(U; \mathcal{G}_2) \rightarrow \mathbf{0},$$

est *exacte*, quel que soit l'ouvert $U \subseteq \mathbf{X}$.

Démonstration : Nous savons déjà que la suite des sections au-dessus de U est exacte à gauche (cf. lemme 13.2.2-1) et nous devons uniquement vérifier la surjectivité du morphisme $\Gamma(U; \psi)$.

Soit $\sigma \in \Gamma(U; \mathcal{G}_2)$. L'exactitude de la suite de faisceaux implique que les morphismes “germes” $\psi(x) : \mathcal{G}_{1(x)} \rightarrow \mathcal{G}_{2(x)}$ sont *surjectifs*, quel que soit $x \in \mathbf{X}$; il existe donc un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ de U et des sections $\tau_\alpha \in \Gamma(U_\alpha; \mathcal{G}_1)$, vérifiant l'égalité :

$$\psi(U_\alpha)(\tau_\alpha) = \sigma|_{U_\alpha},$$

pour tout $\alpha \in \mathfrak{A}$. Toute la difficulté de la question vient de ce que la famille $\{\tau_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ peut ne pas vérifier la condition de recollement de sections.

Supposons que le recouvrement \mathcal{U} possède uniquement deux éléments : $\mathcal{U} = \{U_1, U_2\}$. Si nous considérons la section “différence” $\rho_{U_{12}}^{U_1}(\tau_1) - \rho_{U_{12}}^{U_2}(\tau_2)$, son image par $\Gamma(U_{12}; \psi)$ est évidemment nulle. Il existe alors une section $\mu_{12} \in \Gamma(U_{12}; \mathcal{F})$ dont l'image par $\Gamma(U_{12}; \varphi)$ est précisément cette différence. Maintenant, **comme \mathcal{F} est flasque, la section μ_{12} se prolonge à une section $\mu_2 \in \Gamma(U_2; \mathcal{F})$** ; on a donc $\rho_{U_{12}}^{U_2}(\mu_2) = \mu_{12}$. Les sections $\tau_1 \in \Gamma(U_1; \mathcal{G}_1)$ et $\tau_2 + \Gamma(U_2; \varphi)(\mu_2) \in \Gamma(U_2; \mathcal{G}_1)$ donnent toujours les sections $\sigma|_{U_1}$ et $\sigma|_{U_2}$ par les morphismes $\Gamma(U_i, \psi)$, mais maintenant elles vérifient en plus la condition de recollement puisque :

$$\begin{aligned} \rho_{U_{12}}^{U_1}(\tau_1) - \rho_{U_{12}}^{U_2}(\tau_2 + \Gamma(U_2; \varphi)(\mu_2)) &= \left(\rho_{U_{12}}^{U_1}(\tau_1) - \rho_{U_{12}}^{U_2}(\tau_2) \right) - \rho_{U_{12}}^{U_2}(\Gamma(U_2; \varphi)(\mu_2)) \\ &= \Gamma(U_2; \varphi)(\mu_{12}) - \rho_{U_{12}}^{U_2}(\Gamma(U_2; \varphi)(\mu_2)) = 0 \end{aligned}$$

Il existe donc bien une section de \mathcal{G}_1 au-dessus de l'ouvert U qui relève la section $\sigma \in \Gamma(U; \mathcal{G}_2)$ donnée. Il importe de remarquer que dans ces raisonnements, on ne modifie que l'un des deux relèvements locaux τ_1, τ_2 pour obtenir des relèvements pouvant être recollés.

Reprenons maintenant la situation générale où l'on se donne une section arbitraire $\sigma \in \Gamma(U; \mathcal{G}_2)$, et notons $\mathcal{L}(\sigma)$ la famille des relèvements locaux de σ , *i.e.* la famille de tous les couples (V, τ_V) , où $V \subseteq U$ et $\tau_V \in \Gamma(V; \mathcal{G}_1)$ vérifie $\Gamma(V; \psi)(\tau) = \sigma|_V$. Munissons la famille $\mathcal{L}(\sigma)$ de la relation d'ordre partiel ' \preceq ' définie par : $(V_1, \tau_1) \preceq (V_2, \tau_2)$, si et seulement si, $V_1 \subseteq V_2$ et $\tau_2|_{V_1} = \tau_1$. La famille $\mathcal{L}(\sigma)$ est alors *inductive*. En effet, soit $\{(V_\beta, \tau_\beta)\}_{\beta \in \mathfrak{B}}$ un sous-ensemble totalement ordonné de $(\mathcal{L}(\sigma), \preceq)$ et posons $W = \cup_{\beta \in \mathfrak{B}} V_\beta$, les sections τ_β vérifient trivialement la condition de recollement de sections, et comme \mathcal{G}_1 est un faisceau, il existe une section $\tau \in \Gamma(W, \mathcal{G}_1)$ recollant les τ_β ; son image par $\Gamma(W; \psi)$ coïncide localement avec $\sigma|_W$ et comme \mathcal{G}_2 est également un faisceau, on a $\Gamma(W; \psi)(\tau) = \sigma|_W$. Par le lemme de Zorn, il existe un élément maximal (W, τ_W) dans $(\mathcal{L}(\sigma), \preceq)$. Supposons $W \subsetneq U$ et soit $u \in U \setminus W$; fixons un relèvement local τ_{V_u} de σ sur un voisinage V_u de u . Posons $W' = W \cup V_u$. Les considérations sur les recouvrements à deux ouverts du paragraphe précédent s'appliquent, et la section τ_{V_u} peut être modifiée pour vérifier la condition de recollement de sections avec τ_W . Or, ceci contredit la maximalité de (W, τ_W) ; ce qui signifie que nécessairement $W = U$ et la proposition est démontrée. ■

Proposition 13.3.3-2 : *Soit r un entier naturel et considérons une suite exacte de faisceaux de A -modules :*

$$\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_2 \longrightarrow \mathcal{F}_3 \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathcal{F}_r \longrightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathbf{0},$$

où les faisceaux $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \dots, \mathcal{F}_r$ sont flasques. Le faisceau \mathcal{G} est alors nécessairement **flasque**.

Démonstration : Par induction sur r . Lorsque $r = 1$ on a un isomorphisme entre \mathcal{F}_1 et \mathcal{G} et rien n'est à démontrer.

Cas $r = 2$. Soit $U \subseteq X$ un ouvert, on a le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{0} & \rightarrow & \Gamma(X; \mathcal{F}_1) & \xrightarrow{\Gamma(X; \varphi)} & \Gamma(X; \mathcal{F}_2) & \xrightarrow{\Gamma(X; \psi)} & \Gamma(X; \mathcal{G}) \rightarrow \mathbf{0} \\ & & \rho_U^X \downarrow & & \rho_U^X \downarrow & & \rho_U^X \downarrow \\ \mathbf{0} & \rightarrow & \Gamma(U; \mathcal{F}_1) & \xrightarrow{\Gamma(U; \varphi)} & \Gamma(U; \mathcal{F}_2) & \xrightarrow{\Gamma(U; \psi)} & \Gamma(U; \mathcal{G}) \rightarrow \mathbf{0} \end{array}$$

La proposition 13.3.3-1 montre que les lignes dans ce diagramme sont exactes et comme $\rho_U^X \circ \Gamma(X; \psi) = \Gamma(U; \psi) \circ \rho_U^X$, et que $\Gamma(U; \psi)$ et ρ_U^X sont toutes deux surjectives puisque \mathcal{F}_2 est flasque, on conclut à la surjectivité de $\rho_U^X : \Gamma(X; \mathcal{G}) \rightarrow \Gamma(U; \mathcal{G})$ qui prouve la première assertion de la proposition.

Cas général. Supposons la proposition démontrée pour $r - 1$, la suite

$$\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_2 \longrightarrow \mathcal{F}_3 \longrightarrow \dots \xrightarrow{d_{r-2}} \mathcal{F}_{r-1} \longrightarrow \mathcal{F}_r \longrightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathbf{0},$$

peut être scindée en deux suites exactes de faisceaux :

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & & & \mathbf{0} & & & & \\ & & & & & & \downarrow & & & & \\ \mathbf{0} & \rightarrow & \mathcal{F}_1 & \longrightarrow & \mathcal{F}_2 & \longrightarrow & \mathcal{F}_3 & \longrightarrow & \dots & \xrightarrow{d_{r-2}} & \mathcal{F}_{r-1} & \xrightarrow{\tilde{\kappa}(d_{r-2})} & \underline{\text{coker}}(d_{r-2}) & \rightarrow & \mathbf{0} \\ & & & & & & \kappa(d_r) \downarrow & & & & & & & & \\ & & & & & & \mathcal{F}_r & & & & & & & & \\ & & & & & & \downarrow & & & & & & & & \\ & & & & & & \mathcal{G} & & & & & & & & \\ & & & & & & \downarrow & & & & & & & & \\ & & & & & & \mathbf{0} & & & & & & & & \end{array}$$

où $\kappa(d_r) \circ \tilde{\kappa}(d_{r-2}) = d_{r-1}$ pour des raisons d'exactitude. L'hypothèse de récurrence implique que le faisceau $\underline{\text{coker}}(d_{r-2})$ est flasque et les hypothèses de la proposition pour $r = 2$ sont alors satisfaites pour la suite exacte verticale ; il en découle que \mathcal{G} est *flasque* et la démonstration de la proposition est terminée. ■

Proposition 13.3.3-3 : *Pour toute suite exacte de faisceaux flasques de \mathbf{A} -modules :*

$$\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{F}_0 \longrightarrow \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathcal{F}_r \longrightarrow \cdots$$

et tout ouvert $U \subseteq \mathbf{X}$, la suite de \mathbf{A} -modules :

$$\mathbf{0} \rightarrow \Gamma(U; \mathcal{F}_0) \longrightarrow \Gamma(U; \mathcal{F}_1) \longrightarrow \Gamma(U; \mathcal{F}_2) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Gamma(U; \mathcal{F}_r) \longrightarrow \cdots$$

est *exacte*.

Démonstration : Montrons l'exactitude de la suite des sections par induction sur le degré $r \in \mathbb{N}$.

Cas $r = 0, 1$. Résulte de l'exactitude à gauche du foncteur sections au-dessus de U .

Cas général. Supposons l'exactitude prouvée jusqu'au degré $r - 1$ avec $r \geq 2$, on a alors le scindage :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & \mathbf{0} & \\ & & & & & \downarrow & \\ \mathbf{0} & \rightarrow & \mathcal{F}_1 & \longrightarrow & \mathcal{F}_2 & \longrightarrow & \mathcal{F}_3 & \longrightarrow & \cdots & \xrightarrow{d_{r-2}} & \mathcal{F}_{r-1} & \xrightarrow{\tilde{\kappa}(d_{r-2})} & \underline{\text{coker}}(d_{r-2}) & \rightarrow & \mathbf{0} \\ & & & & & \kappa(d_r) \downarrow & & & & & & & & & \\ & & & & & \mathcal{F}_r & & & & & & & & & \\ & & & & & \downarrow & & & & & & & & & \\ & & & & & \mathcal{F}_{r+1} & & & & & & & & & \\ & & & & & \downarrow & & & & & & & & & \end{array}$$

où $\kappa(d_r) \circ \tilde{\kappa}(d_{r-2}) = d_{r-1}$ pour des raisons d'exactitude. La ligne est exacte et ne comporte que des faisceaux flasques d'après la proposition 13.3.3-2, nous pourrions donc lui appliquer l'hypothèse de récurrence. On obtient alors, suite à l'application du foncteur $\Gamma(U; _)$, le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & & \mathbf{0} & \\ & & & & & \downarrow & \\ \mathbf{0} & \rightarrow & \Gamma(U; \mathcal{F}_1) & \longrightarrow & \Gamma(U; \mathcal{F}_2) & \longrightarrow & \Gamma(U; \mathcal{F}_3) & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & \Gamma(U; \mathcal{F}_{r-1}) & \longrightarrow & \Gamma(U; \underline{\text{coker}}(d_{r-2})) & \rightarrow & \mathbf{0} \\ & & & & & \downarrow & & & & & & & & & \\ & & & & & \Gamma(U; \mathcal{F}_r) & & & & & & & & & \\ & & & & & \downarrow & & & & & & & & & \\ & & & & & \Gamma(U; \mathcal{F}_{r+1}) & & & & & & & & & \\ & & & & & \downarrow & & & & & & & & & \end{array}$$

où la ligne et la colonne sont exactes par hypothèse de récurrence. L'égalité $\Gamma(U; \kappa(d_r)) \circ \Gamma(U; \tilde{\kappa}(d_{r-2})) = \Gamma(U; d_{r-1})$ dit alors très précisément que la cohomologie du complexe des sections au-dessus de U en degré r est nulle. La démonstration de la proposition est ainsi achevée. ■

13.3.4 Résolution flasque canonique de Godement

Définition 13.3.4-1 : Soit \mathcal{G} un faisceau de \mathcal{A} -modules sur X . On appelle «*résolution de \mathcal{G} (à droite)*» la donnée d'un complexe de faisceaux :

$$\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{G}^0 \xrightarrow{d_0} \mathcal{G}^1 \xrightarrow{d_1} \dots \xrightarrow{d_{r-1}} \mathcal{G}^r \xrightarrow{d_r} \dots ,$$

muni d'une augmentation $\varepsilon : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}^0$ (⁴⁸) telle que le complexe augmenté :

$$\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{G} \xrightarrow{\varepsilon(\mathcal{G})} \mathcal{G}^0 \xrightarrow{d_0} \mathcal{G}^1 \xrightarrow{d_1} \dots \xrightarrow{d_{r-1}} \mathcal{G}^r \xrightarrow{d_r} \dots ,$$

est **exact**.

Remarque 13.3.4-1 : Le corollaire 13.2.1-3 montre que le complexe de faisceaux des formes différentielles sur une variété différentiable X (possédant ou non des partitions de l'unité) constitue une résolution du faisceau des fonctions localement constantes \mathbb{R}_X .

Nous allons maintenant expliquer comment l'on construit des résolutions flasques canoniques à l'aide du foncteur \mathcal{C}^0 de Godement pour chaque objet de $\text{Fais}_{\mathcal{A}}(X)$. Soit \mathcal{G} un faisceau de \mathcal{A} -modules et montrons, par récurrence sur $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, l'existence d'une suite *exacte* de faisceaux :

$$\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{G} \xrightarrow{\varepsilon(\mathcal{G})} \mathcal{F}^0 \xrightarrow{d_0} \mathcal{F}^1 \xrightarrow{d_1} \dots \xrightarrow{d_{r-1}} \mathcal{F}^r \xrightarrow{d_r} \dots$$

où les \mathcal{F}^j sont tous *flasques*.

Cas $r = 0$. Il résulte de considérer le foncteur \mathcal{C}^0 de Godement et de poser $\mathcal{F}^0 := \mathcal{C}^0(\mathcal{G})$ (cf. 13.3.2-1).

Cas $r = 1$. On a déjà la suite exacte de faisceau : $\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{G} \xrightarrow{\varepsilon(\mathcal{G})} \mathcal{C}^0(\mathcal{G})$. Complétons-la en une suite exacte de faisceaux en lui adjoignant le conoyau de $\varepsilon(\mathcal{G})$ et injectons celui-ci dans son faisceau flasque de Godement :

$$\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{G} \xrightarrow{\varepsilon(\mathcal{G})} \mathcal{C}^0(\mathcal{G}) \xrightarrow{\tilde{\kappa}(\varepsilon(\mathcal{G}))} \underline{\text{coker}}(\varepsilon(\mathcal{G})) \xrightarrow{\varepsilon(\underline{\text{coker}}(\varepsilon(\mathcal{G})))} \mathcal{C}^0(\underline{\text{coker}}(\varepsilon(\mathcal{G}))) .$$

Posons maintenant :

$$\boxed{\mathcal{C}^1(\mathcal{G}) := \mathcal{C}^0(\underline{\text{coker}}(\varepsilon(\mathcal{G})))} \quad \text{et} \quad \boxed{d_0(\mathcal{G}) := \varepsilon(\underline{\text{coker}}(\varepsilon(\mathcal{G}))) \circ \tilde{\kappa}(\varepsilon(\mathcal{G}))}$$

Une analyse simple, à l'aide des germes si nécessaire, montre alors que la suite :

$$\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{G} \xrightarrow{\varepsilon(\mathcal{G})} \mathcal{C}^0(\mathcal{G}) \xrightarrow{d_0(\mathcal{G})} \mathcal{C}^1(\mathcal{G}) ,$$

est **exacte**.

⁴⁸ Rappelons que le terme «*augmentation*» signifie dans le cas présent que $d_0 \circ \varepsilon(\mathcal{G}) = 0$, de sorte que la suite «*augmentée*» : $\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{G} \xrightarrow{\varepsilon(\mathcal{G})} \mathcal{G}^0 \xrightarrow{d_0} \mathcal{G}^1 \xrightarrow{d_1} \dots$, est un complexe.

Cas général. Supposons avoir ainsi défini la suite exacte de faisceaux :

$$\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{G} \xrightarrow{\varepsilon(\mathcal{G})} \mathcal{E}^0(\mathcal{G}) \xrightarrow{d_0(\mathcal{G})} \mathcal{E}^1(\mathcal{G}) \xrightarrow{d_1(\mathcal{G})} \dots \xrightarrow{d_{r-1}(\mathcal{G})} \mathcal{E}^r(\mathcal{G}),$$

On définit alors, tel que nous l'avons fait pour $r = 1$,

$$\boxed{\mathcal{E}^{r+1}(\mathcal{G}) := \mathcal{E}^0(\underline{\text{coker}}(d_{r-1}(\mathcal{G})))} \quad \text{et} \quad \boxed{d_r(\mathcal{G}) := \varepsilon(\underline{\text{coker}}(d_{r-1}(\mathcal{G}))) \circ \tilde{\kappa}(d_{r-1}(\mathcal{G}))}$$

La suite :

$$\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{G} \xrightarrow{\varepsilon(\mathcal{G})} \mathcal{E}^0(\mathcal{G}) \xrightarrow{d_0(\mathcal{G})} \mathcal{E}^1(\mathcal{G}) \xrightarrow{d_1(\mathcal{G})} \dots \xrightarrow{d_{r-1}(\mathcal{G})} \mathcal{E}^r(\mathcal{G}) \xrightarrow{d_r(\mathcal{G})} \mathcal{E}^{r+1}(\mathcal{G}),$$

est alors **exacte**.

Résumons dans une proposition le résultat complet sous-jacent à cette construction.

Théorème 13.3.4-1 : *Il existe une et une seule correspondance **fonctorielle** associant à un faisceau de \mathbf{A} -modules \mathcal{G} la résolution $(\mathcal{E}^*(\mathcal{G}), d_*(\mathcal{G}))$ qui soit “compatible” au foncteur “faisceau flasque associé de Godement”. Cette correspondance est en plus **additive et exacte**.*

Démonstration : Soit $\varphi : \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2$ un morphisme de faisceaux. On a par définition même de conoyaux, le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{0} \rightarrow \mathcal{G}_1 & \xrightarrow{\varepsilon(\mathcal{G}_1)} & \mathcal{E}^0(\mathcal{G}_1) & \xrightarrow{\tilde{\kappa}(\varepsilon(\mathcal{G}_1))} & \underline{\text{coker}}(\varepsilon(\mathcal{G}_1)) & \xrightarrow{\varepsilon(\underline{\text{coker}}(\varepsilon(\mathcal{G}_1)))} & \mathcal{E}^0(\underline{\text{coker}}(\varepsilon(\mathcal{G}_1))) \equiv \mathcal{E}^1(\mathcal{G}_1) \\ \varphi \downarrow & & \mathcal{E}^0(\varphi) \downarrow & & \nu(\varphi) \downarrow & & \mathcal{E}^0(\nu(\varphi)) \downarrow & & \downarrow \mathcal{E}^1(\varphi) \\ \mathbf{0} \rightarrow \mathcal{G}_2 & \xrightarrow{\varepsilon(\mathcal{G}_2)} & \mathcal{E}^0(\mathcal{G}_2) & \xrightarrow{\tilde{\kappa}(\varepsilon(\mathcal{G}_2))} & \underline{\text{coker}}(\varepsilon(\mathcal{G}_2)) & \xrightarrow{\varepsilon(\underline{\text{coker}}(\varepsilon(\mathcal{G}_2)))} & \mathcal{E}^0(\underline{\text{coker}}(\varepsilon(\mathcal{G}_2))) \equiv \mathcal{E}^1(\mathcal{G}_2) \end{array}$$

où nous avons noté $\nu(\varphi)$ le morphisme canonique naturel entre les conoyaux concernés. La propriété universelle vérifiée par les conoyaux et le caractère fonctoriel de la correspondance \mathcal{E}^0 , suffisent donc à prouver la fonctorialité et additivité de \mathcal{E}^1 . En itérant indéfiniment ce procédé, on définit de même les morphismes $\mathcal{E}^r(\varphi)$ et l'on prouve la fonctorialité et additivité non seulement de chaque \mathcal{E}^r , mais aussi de la correspondance qui associe à un faisceau \mathcal{G} la résolution $(\mathcal{E}^*(\mathcal{G}), d_*(\mathcal{G}))$.

Considérons maintenant une suite exacte de faisceaux :

$$\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{G}_1 \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G}_2 \xrightarrow{\psi} \mathcal{G}_3 \rightarrow \mathbf{0},$$

La fonctorialité de la résolution canonique de Godement donne lieu au bicomplexe :

$$\begin{array}{ccccccc} & & d_1(\mathcal{G}_1) \uparrow & & d_1(\mathcal{G}_2) \uparrow & & d_1(\mathcal{G}_3) \uparrow \\ \mathbf{0} \longrightarrow & \mathcal{E}^1(\mathcal{G}_1) & \xrightarrow{\mathcal{E}^1(\varphi)} & \mathcal{E}^1(\mathcal{G}_2) & \xrightarrow{\mathcal{E}^1(\psi)} & \mathcal{E}^1(\mathcal{G}_3) & \longrightarrow \mathbf{0} \\ & & d_0(\mathcal{G}_1) \uparrow & & d_0(\mathcal{G}_2) \uparrow & & d_0(\mathcal{G}_3) \uparrow \\ \mathbf{0} \longrightarrow & \mathcal{E}^0(\mathcal{G}_1) & \xrightarrow{\mathcal{E}^0(\varphi)} & \mathcal{E}^0(\mathcal{G}_2) & \xrightarrow{\mathcal{E}^0(\psi)} & \mathcal{E}^0(\mathcal{G}_3) & \longrightarrow \mathbf{0} \\ & & \varepsilon(\mathcal{G}_1) \uparrow & & \varepsilon(\mathcal{G}_2) \uparrow & & \varepsilon(\mathcal{G}_3) \uparrow \\ \mathbf{0} \longrightarrow & \mathcal{G}_1 & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{G}_2 & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{G}_3 & \longrightarrow \mathbf{0} \\ & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & \end{array}$$

où l'exactitude énoncée dans le théorème se réfère à l'exactitude de chaque ligne. Nous avons déjà prouvé l'exactitude du foncteur \mathcal{E}^0 et nous allons montrer maintenant celle de chaque foncteur \mathcal{E}^r en procédant inductivement par rapport à $r \geq 1$. Supposons donc avoir prouvé l'exactitude de $\mathcal{E}^0, \mathcal{E}^1, \dots, \mathcal{E}^{r-1}$ et considérons le bicomplexe :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \mathbf{0} \rightarrow & \underline{\text{coker}}(d_{r-2}(\mathcal{G}_1)) & \longrightarrow & \underline{\text{coker}}(d_{r-2}(\mathcal{G}_2)) & \longrightarrow & \underline{\text{coker}}(d_{r-2}(\mathcal{G}_3)) & \rightarrow \mathbf{0} \\
 & \tilde{\kappa}(d_{r-2}(\mathcal{G}_1)) \uparrow & & \tilde{\kappa}(d_{r-2}(\mathcal{G}_2)) \uparrow & & \tilde{\kappa}(d_{r-2}(\mathcal{G}_3)) \uparrow & \\
 \mathbf{0} \rightarrow & \mathcal{E}^{r-1}(\mathcal{G}_1) & \xrightarrow{\mathcal{E}^{r-1}(\varphi)} & \mathcal{E}^{r-1}(\mathcal{G}_2) & \xrightarrow{\mathcal{E}^{r-1}(\psi)} & \mathcal{E}^{r-1}(\mathcal{G}_3) & \rightarrow \mathbf{0} \\
 & d_{r-2}(\mathcal{G}_1) \uparrow & & d_{r-2}(\mathcal{G}_2) \uparrow & & d_{r-2}(\mathcal{G}_3) \uparrow & \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 & d_1(\mathcal{G}_1) \uparrow & & d_1(\mathcal{G}_2) \uparrow & & d_1(\mathcal{G}_3) \uparrow & \\
 \mathbf{0} \rightarrow & \mathcal{E}^1(\mathcal{G}_1) & \xrightarrow{\mathcal{E}^1(\varphi)} & \mathcal{E}^1(\mathcal{G}_2) & \xrightarrow{\mathcal{E}^1(\psi)} & \mathcal{E}^1(\mathcal{G}_3) & \rightarrow \mathbf{0} \\
 & d_0(\mathcal{G}_1) \uparrow & & d_0(\mathcal{G}_2) \uparrow & & d_0(\mathcal{G}_3) \uparrow & \\
 \mathbf{0} \rightarrow & \mathcal{E}^0(\mathcal{G}_1) & \xrightarrow{\mathcal{E}^0(\varphi)} & \mathcal{E}^0(\mathcal{G}_2) & \xrightarrow{\mathcal{E}^0(\psi)} & \mathcal{E}^0(\mathcal{G}_3) & \rightarrow \mathbf{0} \\
 & \varepsilon(\mathcal{G}_1) \uparrow & & \varepsilon(\mathcal{G}_2) \uparrow & & \varepsilon(\mathcal{G}_3) \uparrow & \\
 \mathbf{0} \rightarrow & \mathcal{G}_1 & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{G}_2 & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{G}_3 & \rightarrow \mathbf{0} \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
 & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} &
 \end{array}$$

où les colonnes et toutes les lignes, sauf éventuellement celle concernant les conoyaux, sont exactes dans la catégorie des faisceaux de \mathbf{A} -modules. La suite des raisonnements peut se faire directement dans la catégorie $\text{Fais}_{\mathbf{A}}(\mathbf{X})$ puisqu'ils sont valables dans toute catégorie abélienne, le lecteur pourra, s'il le désire, se ramener à une catégorie de modules en considérant les bicomplexes issus de l'application des foncteurs "germes", puis revenant à la catégorie des faisceaux à l'aide de la proposition 13.2.1-2-(c).

Nous allons utiliser la proposition 9.3-1 et son corollaire 9.3-2. L'exactitude des colonnes du bicomplexe ci-dessus implique l'annulation de la cohomologie de son complexe simple associé. Par conséquent, la cohomologie de la ligne des conoyaux est isomorphe à celle du bicomplexe obtenu en tronquant cette première ligne ; or, dans ce nouveau bicomplexe les lignes sont exactes et donc sa cohomologie est nulle. La suite des conoyaux est donc exacte et l'application du foncteur exact \mathcal{E}^0 à celle-ci, fournira la suite également **exacte** :

$$\mathbf{0} \longrightarrow \mathcal{E}^r(\mathcal{G}_1) \xrightarrow{\mathcal{E}^r(\varphi)} \mathcal{E}^r(\mathcal{G}_2) \xrightarrow{\mathcal{E}^r(\psi)} \mathcal{E}^r(\mathcal{G}_3) \longrightarrow \mathbf{0};$$

ce qui termine la démonstration du théorème. ■

Exercice 13.3.4-1 : (Suite de l'exercice 13.3.2-1.) Montrer que si \mathcal{M} est un $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ -module, les faisceaux $\mathcal{E}^p(\mathcal{M})$ sont des $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ -modules et que le complexe $(\mathcal{E}^*(\mathcal{M}), d_*(\mathcal{M}))$ est un complexe de la catégorie $\text{Mod}(\mathcal{O}_{\mathbf{X}})$.

En particulier, le théorème 13.3.4-1 reste vrai si l'on remplace la catégorie $\text{Fais}_{\mathbf{A}}(\mathbf{X})$ par $\text{Mod}(\mathcal{O}_{\mathbf{X}})$.

13.3.5 Définition de la cohomologie des faisceaux

Définition 13.3.5-1 : Soit \mathcal{G} un faisceau de \mathbf{A} -modules et considérons sa résolution canonique flasque de Godement

$$\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{G} \xrightarrow{\varepsilon(\mathcal{G})} (\mathcal{C}^*(\mathcal{G}), d_*(\mathcal{G})).$$

Pour chaque ouvert $U \subseteq \mathbf{X}$, on a le complexe de \mathbf{A} -modules $(\Gamma(U; \mathcal{C}^*(\mathcal{G})), \Gamma(U; d_*(\mathcal{G})))$:

$$\mathbf{0} \longrightarrow \Gamma(U; \mathcal{C}^0(\mathcal{G})) \xrightarrow{\Gamma(U; d_0(\mathcal{G}))} \Gamma(U; \mathcal{C}^1(\mathcal{G})) \xrightarrow{\Gamma(U; d_1(\mathcal{G}))} \Gamma(U; \mathcal{C}^2(\mathcal{G})) \xrightarrow{\Gamma(U; d_2(\mathcal{G}))} \dots \quad (*)$$

On appelle «groupes de cohomologie de faisceaux de \mathcal{G} sur U » les groupes de cohomologie du complexe $(*)$, ils sont notés $H^r(U; \mathcal{G})$, pour $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Lorsque $U = \mathbf{X}$, les groupes en question sont appelés «groupes de cohomologie de faisceaux de \mathcal{G} » et sont notés indifféremment par $H^r(\mathbf{X}; \mathcal{G})$ ou $H^r(\mathcal{G})$, pour $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Proposition 13.3.5-1 : Soit U une partie ouverte de \mathbf{X} .

- a) Pour chaque $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, la correspondance qui associe à un faisceau $\mathcal{G} \in \text{Fais}_{\mathbf{A}}(\mathbf{X})$ son r -ième groupe de cohomologie sur U , est de nature **fonctorielle et additive**.
- b) L'augmentation canonique $\varepsilon(\mathcal{G}) : \mathcal{G} \rightarrow (\mathcal{C}^*(\mathcal{G}), d_*(\mathcal{G}))$ induit un **isomorphisme canonique**

$$\Gamma(U; \varepsilon(\mathcal{G})) : \Gamma(U; \mathcal{G}) \xrightarrow{\cong} H^0(U; \mathcal{G}).$$

- c) Toute suite exacte courte de faisceaux de \mathbf{A} -modules :

$$\mathbf{0} \longrightarrow \mathcal{G}_1 \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G}_2 \xrightarrow{\psi} \mathcal{G}_3 \longrightarrow \mathbf{0},$$

donne lieu à une «suite exacte longue de cohomologie de faisceaux» :

$$\mathbf{0} \rightarrow \Gamma(U; \mathcal{G}_1) \xrightarrow{\Gamma(U; \varphi)} \Gamma(U; \mathcal{G}_2) \xrightarrow{\Gamma(U; \psi)} \Gamma(U; \mathcal{G}_3) \rightarrow H^1(U; \mathcal{G}_1) \xrightarrow{H^1(U; \varphi)} H^1(U; \mathcal{G}_2) \xrightarrow{H^1(U; \psi)} H^1(U; \mathcal{G}_3) \rightarrow \dots$$

- d) La correspondance qui associe à une suite exacte courte de faisceaux sa suite exacte longue de cohomologie de faisceaux est de nature **fonctorielle et additive**.

Démonstration :

- a) L'assertion résulte presque immédiatement de la nature fonctorielle et additive du foncteur “résolution flasque canonique de Godement” et du foncteur de cohomologie en degré r sur la catégorie (également abélienne) des complexes de \mathbf{A} -modules.
- b) Soit \mathcal{G} un faisceau de \mathbf{A} -modules. L'augmentation de la résolution flasque canonique est, par définition, un complexe exact de faisceaux :

$$\mathbf{0} \longrightarrow \mathcal{G} \xrightarrow{\varepsilon(\mathcal{G})} \mathcal{C}^0(\mathcal{G}) \xrightarrow{d_0(\mathcal{G})} \mathcal{C}^1(\mathcal{G}) \xrightarrow{d_1(\mathcal{G})} \mathcal{C}^2(\mathcal{G}) \xrightarrow{d_2(\mathcal{G})} \dots,$$

et comme le foncteur $\Gamma(U; -)$ est exact à gauche, la suite de \mathbf{A} -modules :

$$\mathbf{0} \longrightarrow \Gamma(U; \mathcal{G}) \xrightarrow{\Gamma(U; \varepsilon(\mathcal{G}))} \Gamma(U; \mathcal{C}^0(\mathcal{G})) \xrightarrow{\Gamma(U; d_0(\mathcal{G}))} \Gamma(U; \mathcal{C}^1(\mathcal{G})) \xrightarrow{\Gamma(U; d_1(\mathcal{G}))} \Gamma(U; \mathcal{C}^2(\mathcal{G})) \xrightarrow{\Gamma(U; d_2(\mathcal{G}))} \dots,$$

est exacte à gauche. L'assertion de la proposition résulte alors immédiatement.

c) Soit une suite exacte courte de faisceaux de \mathbf{A} -modules

$$\mathbf{0} \longrightarrow \mathcal{G}_1 \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G}_2 \xrightarrow{\psi} \mathcal{G}_3 \longrightarrow \mathbf{0}.$$

Le caractère fonctoriel exact du foncteur “résolution flasque canonique de Godement” donne le bicomplexe de lignes **exactes de faisceaux flasques** :

$$\begin{array}{ccccccc} & & d_4(\mathcal{G}_1) \uparrow & & d_4(\mathcal{G}_2) \uparrow & & d_4(\mathcal{G}_3) \uparrow \\ \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathcal{E}^4(\mathcal{G}_1) & \xrightarrow{\mathcal{E}^4(\varphi)} & \mathcal{E}^4(\mathcal{G}_2) & \xrightarrow{\mathcal{E}^4(\psi)} & \mathcal{E}^4(\mathcal{G}_3) \longrightarrow \mathbf{0} \\ & & d_3(\mathcal{G}_1) \uparrow & & d_3(\mathcal{G}_2) \uparrow & & d_3(\mathcal{G}_3) \uparrow \\ \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathcal{E}^3(\mathcal{G}_1) & \xrightarrow{\mathcal{E}^3(\varphi)} & \mathcal{E}^3(\mathcal{G}_2) & \xrightarrow{\mathcal{E}^3(\psi)} & \mathcal{E}^3(\mathcal{G}_3) \longrightarrow \mathbf{0} \\ & & d_2(\mathcal{G}_1) \uparrow & & d_2(\mathcal{G}_2) \uparrow & & d_2(\mathcal{G}_3) \uparrow \\ \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathcal{E}^2(\mathcal{G}_1) & \xrightarrow{\mathcal{E}^2(\varphi)} & \mathcal{E}^2(\mathcal{G}_2) & \xrightarrow{\mathcal{E}^2(\psi)} & \mathcal{E}^2(\mathcal{G}_3) \longrightarrow \mathbf{0} \\ & & d_1(\mathcal{G}_1) \uparrow & & d_1(\mathcal{G}_2) \uparrow & & d_1(\mathcal{G}_3) \uparrow \\ \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathcal{E}^1(\mathcal{G}_1) & \xrightarrow{\mathcal{E}^1(\varphi)} & \mathcal{E}^1(\mathcal{G}_2) & \xrightarrow{\mathcal{E}^1(\psi)} & \mathcal{E}^1(\mathcal{G}_3) \longrightarrow \mathbf{0} \\ & & d_0(\mathcal{G}_1) \uparrow & & d_0(\mathcal{G}_2) \uparrow & & d_0(\mathcal{G}_3) \uparrow \\ \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathcal{E}^0(\mathcal{G}_1) & \xrightarrow{\mathcal{E}^0(\varphi)} & \mathcal{E}^0(\mathcal{G}_2) & \xrightarrow{\mathcal{E}^0(\psi)} & \mathcal{E}^0(\mathcal{G}_3) \longrightarrow \mathbf{0} \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \end{array}$$

et, suite à la proposition 13.3.3-1, l’application du foncteur $\Gamma(U; _)$ donnera un bicomplexe de \mathbf{A} -modules où les lignes sont des **suites exactes courtes**, *i.e.* une suite exacte courte de complexes. D’après le théorème fondamental de l’algèbre homologique, une suite exacte longue de cohomologie en résulte et, tel que nous l’avons expliqué dans la section 13.3.1, l’exactitude à gauche du foncteur $\Gamma(U; _)$ intervient pour terminer la démonstration de cette assertion.

d) Le caractère *additif et fonctoriel* de la correspondance en question découle immédiatement de la même propriété satisfaite par le foncteur *exact* des “résolutions canoniques de Godement”. La fin de la démonstration est alors conséquence de la fonctorialité et additivité de la correspondance, définie sur la catégorie des suites exactes courtes d’une catégorie abélienne, donnant la suite exacte longue de cohomologie (*cf.* 5.2.1). ■

13.3.6 Cohomologie de faisceaux et cohomologie des sections d’une résolution

Soit \mathcal{G} un faisceau de \mathbf{A} -modules sur \mathbf{X} et considérons une résolution arbitraire (\mathcal{G}^*, d_*) de \mathcal{G} , notons $\varepsilon : \mathcal{G} \rightarrow (\mathcal{G}^*, d_*)$ le morphisme d’augmentation. On a la suite exacte longue de faisceaux :

$$\mathbf{0} \longrightarrow \mathcal{G} \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{G}^0 \xrightarrow{d_0} \mathcal{G}^1 \xrightarrow{d_1} \mathcal{G}^2 \xrightarrow{d_2} \dots$$

En appliquant le foncteur “résolution flasque canonique de Godement”, on obtient le bicomplexe de

faisceaux :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & d_1(\mathcal{G}) \uparrow & & d_1(\mathcal{G}^0) \uparrow & & d_1(\mathcal{G}^1) \uparrow & & d_1(\mathcal{G}^2) \uparrow & & \\
 \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathcal{E}^1(\mathcal{G}) & \xrightarrow{\mathcal{E}^1(\varepsilon)} & \mathcal{E}^1(\mathcal{G}^0) & \xrightarrow{\mathcal{E}^1(d_0)} & \mathcal{E}^1(\mathcal{G}^1) & \xrightarrow{\mathcal{E}^1(d_1)} & \mathcal{E}^1(\mathcal{G}^2) & \xrightarrow{\mathcal{E}^1(d_1)} & \dots \\
 & & d_0(\mathcal{G}) \uparrow & & d_0(\mathcal{G}^0) \uparrow & & d_0(\mathcal{G}^1) \uparrow & & d_0(\mathcal{G}^2) \uparrow & & \\
 \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathcal{E}^0(\mathcal{G}) & \xrightarrow{\mathcal{E}^0(\varepsilon)} & \mathcal{E}^0(\mathcal{G}^0) & \xrightarrow{\mathcal{E}^0(d_0)} & \mathcal{E}^0(\mathcal{G}^1) & \xrightarrow{\mathcal{E}^0(d_1)} & \mathcal{E}^0(\mathcal{G}^2) & \xrightarrow{\mathcal{E}^0(d_1)} & \dots \\
 & & \varepsilon(\mathcal{G}) \uparrow & & \varepsilon(\mathcal{G}^0) \uparrow & & \varepsilon(\mathcal{G}^1) \uparrow & & \varepsilon(\mathcal{G}^2) \uparrow & & \\
 \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathcal{G} & \xrightarrow{\varepsilon} & \mathcal{G}^0 & \xrightarrow{d_0} & \mathcal{G}^1 & \xrightarrow{d_1} & \mathcal{G}^2 & \xrightarrow{d_1} & \dots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & &
 \end{array} \quad (\mathcal{B})$$

l'exactitude des foncteurs \mathcal{E}^r assure que les lignes supérieures de ce bicomplexe sont des suites exactes longues de faisceaux flasques. En appliquant le foncteur $\Gamma(U; -)$ et, suite à la proposition 13.3.3-3, on peut affirmer que le morphisme canonique entre le groupe de cohomologie de faisceaux $H^r(U; \mathcal{G})$ et le groupe de cohomologie de même degré du complexe simple associé au bicomplexe $\Gamma(U; \mathcal{E}^\bullet(\mathcal{G}^*))$, est un **isomorphisme**.

En considérant maintenant le morphisme canonique entre le groupe $h^r(\Gamma(U; \mathcal{G}^*))$ et le groupe de cohomologie en degré r du complexe simple associé au bicomplexe $\Gamma(U; \mathcal{E}^\bullet(\mathcal{G}^*))$, on déduit les morphismes canoniques :

$$H^r(U; \mathcal{G}) \xrightarrow{\cong} h^r(\Gamma(U; \mathcal{E}^\bullet(\mathcal{G}^*))) \longleftarrow h^r(\Gamma(U; \mathcal{G}^*)) \quad (\diamond)$$

pour chaque $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. En inversant l'isomorphisme de gauche, on déduit les morphismes canoniques :

$$\boxed{\Xi_r : h^r(\Gamma(U; \mathcal{G}^*)) \longrightarrow H^r(U; \mathcal{G})}$$

pour tout entier $r \geq 0$.

Théorème 13.3.6-1 : Soit \mathcal{G} un faisceau de \mathbf{A} -modules et $\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{G} \xrightarrow{\varepsilon} (\mathcal{G}^*, d_*)$ une résolution de faisceaux de \mathcal{G} . Soit U une partie ouverte de \mathbf{X} .

Pour que les morphismes canoniques :

$$\Xi_r : h^r(\Gamma(U; \mathcal{G}^*)) \longrightarrow H^r(U; \mathcal{G}),$$

soient des **isomorphismes**, quel que soit $r \geq 0$, il suffit que les groupes de cohomologie de faisceaux au-dessus de U pour chacun des faisceaux \mathcal{G}^k de la résolution soient nuls **en degrés positifs**, i.e. :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} H^j(U, \mathcal{G}^k) = 0, \text{ pour} \\ \text{chaque } k \geq 0 \text{ et tout } j > 0 \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} \Xi_r : h^r(\Gamma(U; \mathcal{G}^*)) \longrightarrow H^r(U; \mathcal{G}), \\ \text{est un isomorphisme pour tout } r \geq 0 \end{array} \right\}}$$

Démonstration : Dire que les groupes de cohomologie de faisceaux supérieurs sont nuls signifie très exactement que les colonnes supérieures du bicomplexe (\mathcal{B}) restent exactes après application du foncteur $\Gamma(U; -)$ mais alors le morphisme de droite dans (\diamond) est un *isomorphisme* et le théorème est démontré. ■

Remarque 13.3.6-1 : Les exercices 13.2.1-3, 13.3.2-1 et 13.3.4-1, montrent que toutes les considérations de ce chapitre restent valables si l'on remplace la catégorie $\text{Fais}_{\mathcal{A}}(\mathbf{X})$ par la catégorie $\text{Mod}(\mathcal{O}_{\mathbf{X}})$.

Remarque 13.3.6-2 : La dernière proposition révèle un phénomène d'extrême importance. Il montre que les résolutions flasques peuvent être contournées pour le calcul de la cohomologie de faisceaux. C'est en particulier ce qui arrive avec la résolution du faisceau des fonctions localement constantes $\mathbb{R}_{\mathbf{X}}$ par le complexe des faisceaux des formes différentielles sur une variété différentiable \mathbf{X} (cf. corollaire 13.2.1-3) lorsque la variété \mathbf{X} possède des partitions de l'unité. La section suivante traitera de ce cas en détail.

13.3.7 Faisceaux $\Gamma(U; -)$ -acycliques

Définition 13.3.7-1 : Soit U un ouvert de \mathbf{X} . Un faisceau de \mathcal{A} -modules \mathcal{G} est dit « $\Gamma(U; -)$ -acyclique » lorsque l'on a :

$$H^r(U; \mathcal{G}) = 0, \quad \text{pour tout } r > 0.$$

Un faisceau $\Gamma(U; -)$ -acyclique pour tout ouvert $U \subseteq \mathbf{X}$ sera dit « Γ -acyclique ».

Définition 13.3.7-2 : Soit \mathcal{G} un faisceau de \mathcal{A} -modules. Une résolution $0 \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow (\mathcal{G}^*, d_*)$ de \mathcal{G} sera dite « $\Gamma(U; -)$ -acyclique » (resp. « Γ -acyclique ») lorsque chacun des termes \mathcal{G}^r l'est.

Remarque 13.3.7-1 : Le théorème 13.3.6-1 dit par conséquent que les résolutions $\Gamma(U; -)$ -acycliques d'un faisceau \mathcal{G} calculent les groupes de cohomologie de faisceaux $H^*(U; \mathcal{G})$.

Proposition 13.3.7-1 : Un faisceau *flasque* de $\text{Fais}_{\mathcal{A}}(\mathbf{X})$ est Γ -acyclique.

Démonstration : C'est une conséquence immédiate de la proposition 13.3.3-3 appliquée à la résolution canonique flasque de Godement d'un faisceau lui-même flasque. ■

Théorème 13.3.7-2 : Soit \mathbf{M} une variété différentiable *admettant des partitions de l'unité*.

- a) Le faisceau des r -formes différentielles $\underline{\Omega}_{\mathbf{M}}^r$ est Γ -acyclique, quel que soit $r \geq 0$.
- b) Le complexe de de Rham de \mathbf{M} calcule la cohomologie de faisceaux du faisceau des fonctions localement constantes $\mathbb{R}_{\mathbf{M}}$.
- c) La cohomologie de de Rham d'une variété différentiable est un invariant *topologique*. Autrement dit, deux variétés différentiables homéomorphes, mais *pas forcément difféomorphes*, ont des groupes de cohomologie de de Rham isomorphes.

Démonstration :

a) Fixons un entier $r \geq 0$ et considérons une suite exacte courte de faisceaux :

$$\mathbf{0} \rightarrow \underline{\Omega}_M^r \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F} \xrightarrow{\psi} \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{0}. \quad (*)$$

où \mathcal{F} est un $\underline{\Omega}_M^0$ -module.

Montrons alors que, quel que soit l'ouvert $U \subseteq M$, la suite :

$$\mathbf{0} \rightarrow \Gamma(U; \underline{\Omega}_M^r) \xrightarrow{\Gamma(U; \varphi)} \Gamma(U; \mathcal{F}) \xrightarrow{\Gamma(U; \psi)} \Gamma(U; \mathcal{D}) \rightarrow \mathbf{0},$$

est exacte.

Nous allons procéder de manière analogue à la démonstration de la proposition 13.3.3-1. Donnons-nous une section $\sigma \in \Gamma(U; \mathcal{D})$ et notons $\mathcal{L}(\sigma)$ la famille d'ouverts $V \subseteq U$ sur lesquels il existe des relèvements de σ , *i.e.* tels qu'il existe $\tau_V \in \Gamma(V; \mathcal{F})$ vérifiant $\Gamma(V; \psi)(\tau_V) = \sigma|_V$. Munissons $\mathcal{L}(\sigma)$ de l'ordre partiel d'inclusion ' \subseteq '⁽⁴⁹⁾. L'ensemble partiellement ordonné $(\mathcal{L}(\sigma), \subseteq)$ contient des voisinages ouverts de chaque point de U et est **inductif**.

Il contient des voisinages ouverts de chaque point de U puisque σ admet des relèvements locaux, c'est une conséquence directe de l'exactitude à droite de (*) en catégorie de faisceaux de modules. Montrons maintenant qu'il est également inductif. Soit $\{V_\beta\}_{\beta \in \mathfrak{B}}$ un sous-ensemble *totalemt ordonné* de $(\mathcal{L}(\sigma), \subseteq)$ et posons $W = \cup_{\beta \in \mathfrak{B}} V_\beta$. La variété M ayant été supposée posséder des partitions de l'unité, soit $\{\rho_\beta\}_{\beta \in \mathfrak{B}}$ une partition de l'unité subordonnée au recouvrement ouvert $\mathcal{U} = \{V_\beta\}_{\beta \in \mathfrak{B}}$ de W . Maintenant, comme \mathcal{F} est un $\underline{\Omega}_M^0$ -module, pour toute section $\tau_\beta \in \Gamma(V_\beta; \mathcal{F})$, la section $\rho_\beta \tau_\beta \in \Gamma(V_\beta; \mathcal{F})$ est bien définie et se prolonge (par zéro) en une section de $\Gamma(M; \mathcal{F})$. Posons alors $\tau = \sum_{\beta \in \mathfrak{B}} \rho_\beta \tau_\beta$, où $\tau_\beta \in \Gamma(V_\beta; \mathcal{F})$ est un relèvement de $\sigma|_{V_\beta}$; comme cette somme est localement finie, elle définit bien une section de $\Gamma(W; \mathcal{F})$. Ceci étant, l'image de τ par $\Gamma(W, \psi)$ donne une section de $\Gamma(W, \mathcal{D})$ qui coïncide avec σ (on peut s'en convaincre par une analyse locale ne rencontrant qu'un nombre fini de supports de fonctions partition). L'ouvert W appartient donc à $\mathcal{L}(\sigma)$, ce qui prouve que $(\mathcal{L}(\sigma), \subseteq)$ est bien inductif.

Ceci étant, soient W un élément maximal de $(\mathcal{L}(\sigma), \subseteq)$ et $\tau \in \Gamma(W; \mathcal{F})$ un relèvement de $\sigma|_W$. Supposons $W \subsetneq U$ et soit $u \in U \setminus W$; il existe alors un voisinage ouvert V_u de u et un relèvement $\tau_u \in \Gamma(V_u; \mathcal{F})$ de $\sigma|_{V_u}$. La section différence $\delta := \tau|_{W \cap V_u} - \tau_u|_{W \cap V_u}$ appartient clairement au noyau de ψ et représente une r -forme différentielle de l'ouvert $W \cap V_u$. L'existence de partitions de l'unité sur M intervient une nouvelle fois pour garantir, telle que cela s'est fait dans la démonstration de l'exactitude de la suite courte de Mayer-Vietoris (*cf.* proposition 5.1-1), l'existence de deux r -formes différentielles $\omega_W \in \Omega^r(W)$ et $\omega_u \in \Omega^r(V_u)$ telles que leur différence sur $W \cap V_u$ est précisément la section δ . Ceci signifie que les sections

$$\tau - \omega_W \in \Gamma(W; \mathcal{F}) \quad \text{et} \quad \tau_u - \omega_u \in \Gamma(V_u; \mathcal{F}), \quad (\dagger)$$

vérifient la condition de recollement puisque leur différence sur $W \cap V_u$ est précisément

$$\delta - (\omega_W|_{W \cap V_u} - \omega_u|_{W \cap V_u}) = 0.$$

Comme les sections (\dagger) sont des relèvements locaux de σ , leur recollement définit un relèvement de σ au-dessus de $W \cup V_u$, ce qui contredit la maximalité de W . L'ouvert maximal W doit donc être nécessairement égal à U .

Supposons maintenant que le faisceau \mathcal{F} dans (*) est un faisceau **flasque**⁽⁵⁰⁾. Le faisceau \mathcal{D} est alors également **flasque**.

⁴⁹ Remarquer la différence par rapport à l'ensemble $(\mathcal{L}(\sigma), \preceq)$ considéré dans la démonstration de la proposition 13.3.3-1.

⁵⁰ On pourrait prendre $\mathcal{F} = \mathcal{C}^0(\underline{\Omega}_M^r)$ et φ l'injection canonique $\varepsilon(\underline{\Omega}_M^r)$; puis \mathcal{D} le faisceau conoyau de $\varepsilon(\underline{\Omega}_M^r)$.

En effet, pour tout ouvert $U \subseteq M$, on a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{0} & \rightarrow & \Gamma(M; \underline{\Omega}_M^r) & \xrightarrow{\Gamma(M; \varphi)} & \Gamma(M; \mathcal{F}) & \xrightarrow{\Gamma(M; \psi)} & \Gamma(M; \mathcal{Q}) & \rightarrow & \mathbf{0} \\ & & \rho_U^M \downarrow & & \rho_U^M \downarrow & & \rho_U^M \downarrow & & \\ \mathbf{0} & \rightarrow & \Gamma(U; \underline{\Omega}_M^r) & \xrightarrow{\Gamma(U; \varphi)} & \Gamma(U; \mathcal{F}) & \xrightarrow{\Gamma(U; \psi)} & \Gamma(U; \mathcal{Q}) & \rightarrow & \mathbf{0} \end{array}$$

dont nous avons montré l'exactitude des lignes. En particulier, l'égalité $\rho_U^M \circ \Gamma(M; \psi) = \Gamma(U; \psi) \circ \rho_U^M$, où les morphismes du membre de droite sont tous deux surjectifs, entraîne la surjectivité du morphisme de restriction ρ_U^M en dernière colonne. Le faisceau \mathcal{Q} est donc bien flasque.

Sous les hypothèses en cours, appliquons le foncteur $\Gamma(U; _)$ à la suite exacte courte (*). On obtient la suite exacte longue de cohomologie de faisceau (cf. proposition 13.3.5-1) :

$$\mathbf{0} \rightarrow \Gamma(U; \underline{\Omega}_M^r) \xrightarrow{\Gamma(U; \varphi)} \Gamma(U; \mathcal{F}) \xrightarrow{\Gamma(U; \psi)} \Gamma(U; \mathcal{Q}) \longrightarrow H^1(U; \underline{\Omega}_M^r) \xrightarrow{H^1(U; \varphi)} H^1(U; \mathcal{F}) \xrightarrow{H^1(U; \psi)} H^1(U; \mathcal{Q}) \longrightarrow$$

où les $H^k(U; \mathcal{F})$ et $H^k(U; \mathcal{Q})$ sont nuls pour tout $k > 0$, d'après la proposition 13.3.7-1 ; et comme d'autre part $\Gamma(U; \psi)$ est surjective, il s'ensuit que $H^k(U; \underline{\Omega}_M^r) = 0$, pour tout $k > 0$. Le faisceau $\underline{\Omega}_M^r$ est donc $\Gamma(U; _)$ -acyclique et comme notre analyse est indépendante de l'ouvert U , le faisceau $\underline{\Omega}_M^r$ est Γ -acyclique.

- b) Découle du corollaire 13.2.1-3, du théorème 13.3.6-1 et de (a).
- c) La question précédente montre que la cohomologie du complexe de de Rham calcule la cohomologie de faisceaux du faisceau $\underline{\mathbb{R}}_M$. Ce faisceau ne fait intervenir dans sa définition que la topologie de M , il est donc de nature topologique. En particulier, il est fixé par tout homéomorphisme de M . La définition des groupes de cohomologie a procédé à l'aide de la résolution flasque canonique de Godement qui fait uniquement intervenir le faisceau $\underline{\mathbb{R}}_M$ et la topologie de M ; les groupes de cohomologie $H^r(M; \underline{\mathbb{R}}_M)$ dépendent donc uniquement de la topologie de M . ■

13.3.8 Acyclicité des $\underline{\Omega}_M^0$ -modules

La démonstration du dernier théorème (13.3.7-2) a mis en évidence un phénomène qu'il convient d'isoler dans une proposition.

Proposition 13.3.8-1 : *Sur une variété différentiable M possédant des partitions de l'unité tout $\underline{\Omega}_M^0$ -module est Γ -acyclique.*

Démonstration : Elle suit les raisonnements de la partie préliminaire de la démonstration de 13.3.7-2, où l'on remplacera systématiquement le faisceau $\underline{\Omega}_M^r$ par un $\underline{\Omega}_M^0$ -module. On remarquera que la seule propriété de $\underline{\Omega}_M^r$ intervenant dans cette démonstration est l'exactitude à droite des suites de Mayer-Vietoris ; or, cette exactitude est partagée, plus généralement par tout $\underline{\Omega}_M^0$ -module comme le montre l'inspection de la démonstration de la proposition 5.1-1 (page 86). ■

Ce résultat permettra de montrer l'existence d'isomorphismes canoniques entre les cohomologies « singulière », « simpliciale », « de de Rham » et « de Čech » et « de faisceaux » pour le faisceau des fonctions localement constantes, pour une variété différentiable possédant des partitions de l'unité (cf. section 15.4, page 209).

§ 14. Hyper-cohomologie des complexes de faisceaux

Comme dans le chapitre précédent, on désignera par \mathbf{A} un anneau commutatif avec identité multiplicative ; par \mathbf{X} un espace topologique arbitraire, *i.e.* un ensemble muni d'une topologie ; et par $\text{Fais}_{\mathbf{A}}(\mathbf{X})$ la catégorie (abélienne) des faisceaux de \mathbf{A} -modules sur \mathbf{X} .

Dans ce chapitre nous allons nous intéresser à la catégorie $\mathbf{C}^*(\text{Fais}_{\mathbf{A}}(\mathbf{X}))$ dont les objets sont les «faisceaux différentiels gradués», *i.e.* les complexes de faisceaux :

$$\dots \xrightarrow{d_{m-2}} \mathcal{G}^{m-1} \xrightarrow{d_{m-1}} \mathcal{G}^m \xrightarrow{d_m} \mathcal{G}^{m+1} \xrightarrow{d_{m+1}} \mathcal{G}^{m+2} \xrightarrow{d_{m+2}} \dots,$$

et où les morphismes sont les morphismes de complexes de faisceaux. Comme nous l'avons déjà signalé, la catégorie $\mathbf{C}^*(\text{Fais}_{\mathbf{A}}(\mathbf{X}))$ est abélienne puisque $\text{Fais}_{\mathbf{A}}(\mathbf{X})$ l'est, et le foncteur de $\text{Fais}_{\mathbf{A}}(\mathbf{X})$ vers $\mathbf{C}^*(\text{Fais}_{\mathbf{A}}(\mathbf{X}))$ qui fait correspondre à un faisceau \mathcal{G} le complexe de faisceaux, noté $\mathcal{G}[0]$, défini par :

$$\mathcal{G}[0]^j := \begin{cases} \mathcal{G} & \text{pour } j = 0; \\ \mathbf{0} & \text{sinon;} \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad \dots \xrightarrow{d_{-2}} \mathbf{0} \xrightarrow{d_{-1}} \mathcal{G} \xrightarrow{d_0} \mathbf{0} \xrightarrow{d_1} \dots,$$

où la différentielle est nulle, et qui fait correspondre au morphisme de faisceaux $\varphi : \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2$, le morphisme de complexes $\varphi[0]$, défini par :

$$\varphi[0]^j := \begin{cases} \varphi & \text{pour } j = 0; \\ \mathbf{0} & \text{sinon;} \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad \begin{array}{ccccccc} \dots & \xrightarrow{d_{-2}} & \mathbf{0} & \xrightarrow{d_{-1}} & \mathcal{G}_1 & \xrightarrow{d_0} & \mathbf{0} \xrightarrow{d_1} \dots \\ & & & & \downarrow \varphi & & \downarrow 0 \\ \dots & \xrightarrow{d_{-2}} & \mathbf{0} & \xrightarrow{d_{-1}} & \mathcal{G}_2 & \xrightarrow{d_0} & \mathbf{0} \xrightarrow{d_1} \dots \end{array}$$

est un foncteur **additif, exact et pleinement fidèle**.

Définition 14-1 : Un complexe de faisceaux (\mathcal{G}^*, d_*) sera dit «*concentré en degré r* » lorsque $\mathcal{G}^k = \mathbf{0}$, pour tout $k \neq r$; dans un tel cas la différentielle du complexe est nécessairement nulle. Les objets de l'image du foncteur $(-)[0]$ sont donc tous les complexes de faisceaux concentrés en degré 0.

Pour chaque ouvert $U \subseteq \mathbf{X}$, le foncteur des sections au-dessus de U , noté $\Gamma(U; -)$ et que nous avons défini sur la catégorie $\text{Fais}_{\mathbf{A}}(\mathbf{X})$ vers la catégorie $\text{Mod}(\mathbf{A})$, s'étend de manière évidente à un foncteur additif :

$$\Gamma(U; -) : \mathbf{C}^*(\text{Fais}_{\mathbf{A}}(\mathbf{X})) \rightsquigarrow \mathbf{C}^*(\text{Mod}(\mathbf{A}))$$

de sorte que le diagramme de foncteurs :

$$\begin{array}{ccc} \text{Fais}_{\mathbf{A}}(\mathbf{X}) & \xrightarrow{[0]} & \mathbf{C}^*(\text{Fais}_{\mathbf{A}}(\mathbf{X})) \\ \Gamma(U; -) \downarrow & & \downarrow \Gamma(U; -) \\ \text{Mod}(\mathbf{A}) & \xrightarrow{[0]} & \mathbf{C}^*(\text{Mod}(\mathbf{A})) \end{array}$$

est commutatif. Le foncteur $\Gamma(U; -) : \mathbf{C}^*(\text{Fais}_{\mathbf{A}}(\mathbf{X})) \rightsquigarrow \mathbf{C}^*(\text{Mod}(\mathbf{A}))$ est alors également exact à gauche.

Dans le chapitre précédent nous avons introduit la cohomologie de faisceaux dans le but de “mesurer” le défaut d’exactitude du foncteur $\Gamma(U; -)$ sur $\text{Fais}_{\mathbf{A}}(\mathbf{X})$: la donnée d’une suite exacte courte de faisceaux de \mathbf{A} -modules :

$$\mathbf{0} \longrightarrow \mathcal{G}_1 \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G}_2 \xrightarrow{\psi} \mathcal{G}_3 \longrightarrow \mathbf{0},$$

donne alors lieu à une « suite exacte longue de cohomologie de faisceaux » :

$$\mathbf{0} \rightarrow \Gamma(U; \mathcal{G}_1) \xrightarrow{\Gamma(U; \varphi)} \Gamma(U; \mathcal{G}_2) \xrightarrow{\Gamma(U; \psi)} \Gamma(U; \mathcal{G}_3) \rightarrow H^1(U; \mathcal{G}_1) \xrightarrow{H^1(U; \varphi)} H^1(U; \mathcal{G}_2) \xrightarrow{H^1(U; \psi)} H^1(U; \mathcal{G}_3) \rightarrow \dots$$

Le but de l’« hyper-cohomologie » peut être motivé essentiellement par la même interrogation. Étant donnée une suite exacte courte de **complexes de faisceaux de \mathbf{A} -modules** :

$$\mathbf{0} \longrightarrow \mathcal{G}_1^* \xrightarrow{\varphi_*} \mathcal{G}_2^* \xrightarrow{\psi_*} \mathcal{G}_3^* \longrightarrow \mathbf{0},$$

l’action du foncteur $\Gamma(U; -)$ donne, *a priori*, seulement une suite exacte à gauche de complexes de \mathbf{A} -modules :

$$\mathbf{0} \longrightarrow \Gamma(U; \mathcal{G}_1^*) \xrightarrow{\Gamma(U; \varphi_*)} \Gamma(U; \mathcal{G}_2^*) \xrightarrow{\Gamma(U; \psi_*)} \Gamma(U; \mathcal{G}_3^*).$$

l’hyper-cohomologie des complexes de faisceaux va alors donner lieu à une « suite exacte longue d’hyper-cohomologie de complexes de faisceaux » :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & \mathbb{H}^{-1}(U; \mathbf{G}_1^*) & \xrightarrow{\mathbb{H}^{-1}(U; \varphi_*)} & \mathbb{H}^{-1}(U; \mathbf{G}_2^*) & \xrightarrow{\mathbb{H}^{-1}(U; \psi_*)} & \mathbb{H}^{-1}(U; \mathbf{G}_3^*) & \longrightarrow & & \\ & & \text{-----} & & \text{-----} & & \text{-----} & & & \\ & \rightarrow & \mathbb{H}^0(U; \mathbf{G}_1^*) & \xrightarrow{\mathbb{H}^0(U; \varphi_*)} & \mathbb{H}^0(U; \mathbf{G}_2^*) & \xrightarrow{\mathbb{H}^0(U; \psi_*)} & \mathbb{H}^0(U; \mathbf{G}_3^*) & \longrightarrow & & \\ & & \text{-----} & & \text{-----} & & \text{-----} & & & \\ & \rightarrow & \mathbb{H}^1(U; \mathbf{G}_1^*) & \xrightarrow{\mathbb{H}^1(U; \varphi_*)} & \mathbb{H}^1(U; \mathbf{G}_2^*) & \xrightarrow{\mathbb{H}^1(U; \psi_*)} & \mathbb{H}^1(U; \mathbf{G}_3^*) & \longrightarrow & & \\ & & \text{-----} & & \text{-----} & & \text{-----} & & & \\ & \rightarrow & \mathbb{H}^2(U; \mathbf{G}_1^*) & \xrightarrow{\mathbb{H}^2(U; \varphi_*)} & \mathbb{H}^2(U; \mathbf{G}_2^*) & \xrightarrow{\mathbb{H}^2(U; \psi_*)} & \mathbb{H}^2(U; \mathbf{G}_3^*) & \rightarrow & \dots & \end{array} \quad (*)$$

qui prolonge la définition de la cohomologie des faisceaux, *i.e.* lorsque les complexes de faisceaux \mathcal{G}_i^* seront concentrés en degré 0, donc de la forme $\mathcal{G}_i^* = \mathcal{G}_i[0]$, on aura :

$$\boxed{\mathbb{H}^r(U; \mathcal{G}_i[0]) = H^r(U; \mathcal{G}_i), \quad \text{pour tout } r \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Et lorsque $\mathcal{G}_i^* = \mathbf{0}$, pour tout entier relatif $r < 0$ et pour $i = 1, 2, 3$, la suite longue (*) sera “tronquée” en degrés négatifs, *i.e.* de la forme :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{0} & \rightarrow & \mathbb{H}^0(U; \mathbf{G}_1^*) & \xrightarrow{\mathbb{H}^0(U; \varphi_*)} & \mathbb{H}^0(U; \mathbf{G}_2^*) & \xrightarrow{\mathbb{H}^0(U; \psi_*)} & \mathbb{H}^0(U; \mathbf{G}_3^*) & \longrightarrow & & \\ & & \text{-----} & & \text{-----} & & \text{-----} & & & \\ & \rightarrow & \mathbb{H}^1(U; \mathbf{G}_1^*) & \xrightarrow{\mathbb{H}^1(U; \varphi_*)} & \mathbb{H}^1(U; \mathbf{G}_2^*) & \xrightarrow{\mathbb{H}^1(U; \psi_*)} & \mathbb{H}^1(U; \mathbf{G}_3^*) & \longrightarrow & & \\ & & \text{-----} & & \text{-----} & & \text{-----} & & & \\ & \rightarrow & \mathbb{H}^2(U; \mathbf{G}_1^*) & \xrightarrow{\mathbb{H}^2(U; \varphi_*)} & \mathbb{H}^2(U; \mathbf{G}_2^*) & \xrightarrow{\mathbb{H}^2(U; \psi_*)} & \mathbb{H}^2(U; \mathbf{G}_3^*) & \rightarrow & \dots & \end{array}$$

avec, en plus :

$$\boxed{\mathbb{H}^0(U; \mathcal{G}_i^*) = h^0(\Gamma(U; \mathcal{G}_i^*))}$$

Remarque 14-1 : On prendra soin, par contre, de bien remarquer que s'il existe des morphismes canoniques :

$$h^r(\Gamma(U; \mathcal{G}^*)) \xrightarrow{\Xi_r(U; \mathcal{G})} \mathbb{H}^r(U; \mathcal{G}^*), \quad \text{pour tout } r \in \mathbb{Z},$$

ces morphismes n'ont en général, *a priori*, aucune raison d'être des isomorphismes (cf. 14.2.1-3).

14.1 Définition de l'hyper-cohomologie d'un complexe de faisceaux de \mathbf{A} -modules

Soit U une partie ouverte de l'espace topologique \mathbf{X} . Pour tout complexe de faisceaux de \mathbf{A} -modules sur \mathbf{X} :

$$\dots \xrightarrow{d_{m-2}} \mathcal{G}^{m-1} \xrightarrow{d_{m-1}} \mathcal{G}^m \xrightarrow{d_m} \mathcal{G}^{m+1} \xrightarrow{d_{m+1}} \mathcal{G}^{m+2} \xrightarrow{d_{m+2}} \dots,$$

l'application, terme à terme, du foncteur "résolution flasque canonique de Godement" donne le bicomplexe de colonnes exactes :

$$\begin{array}{cccccccc} & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & d_1(\mathcal{G}^{m-1}) & & d_1(\mathcal{G}^m) & & d_1(\mathcal{G}^{m+1}) & & d_1(\mathcal{G}^{m+2}) & & \\ \dots & \xrightarrow{\mathcal{E}^1(d_{m-2})} & \mathcal{E}^1(\mathcal{G}^{m-1}) & \xrightarrow{\mathcal{E}^1(d_{m-1})} & \mathcal{E}^1(\mathcal{G}^m) & \xrightarrow{\mathcal{E}^1(d_m)} & \mathcal{E}^1(\mathcal{G}^{m+1}) & \xrightarrow{\mathcal{E}^1(d_{m+1})} & \mathcal{E}^1(\mathcal{G}^{m+2}) & \xrightarrow{\mathcal{E}^1(d_{m+2})} & \dots \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ \dots & \xrightarrow{\mathcal{E}^0(d_{m-2})} & \mathcal{E}^0(\mathcal{G}^{m-1}) & \xrightarrow{\mathcal{E}^0(d_{m-1})} & \mathcal{E}^0(\mathcal{G}^m) & \xrightarrow{\mathcal{E}^0(d_m)} & \mathcal{E}^0(\mathcal{G}^{m+1}) & \xrightarrow{\mathcal{E}^0(d_{m+1})} & \mathcal{E}^0(\mathcal{G}^{m+2}) & \xrightarrow{\mathcal{E}^0(d_{m+2})} & \dots \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ \dots & \xrightarrow{d_{m-2}} & \mathcal{G}^{m-1} & \xrightarrow{d_{m-1}} & \mathcal{G}^m & \xrightarrow{d_m} & \mathcal{G}^{m+1} & \xrightarrow{d_{m+1}} & \mathcal{G}^{m+2} & \xrightarrow{d_{m+2}} & \dots \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \end{array}$$

On définit alors, pour chaque entier relatif $r \in \mathbb{Z}$, « l'hypercohomologie du complexe (\mathcal{G}^*, d_*) en degré r », et on la note $\mathbb{H}^r(U; (\mathcal{G}^*, d_*))$ (et même $\mathbb{H}^r(U; \mathcal{G}^*)$ lorsque la différentielle d_* est sous-entendue), la cohomologie en degré r du complexe simple associé au bicomplexe de \mathbf{A} -modules $(\Gamma(U; \mathcal{E}^\bullet(\mathcal{G}^*)))$, *i.e.* :

$$\boxed{\mathbb{H}^r(U; (\mathcal{G}^*, d_*)) := h^r(\Gamma(U; \mathcal{E}^\bullet(\mathcal{G}^*)))} \quad \text{pour chaque } r \in \mathbb{Z}.$$

14.2 Propriétés élémentaires de l'hyper-cohomologie

La proposition suivante donne des propriétés de l'hyper-cohomologie qui sont conséquences immédiates de la définition; nous laissons les démonstrations aux soins du lecteur.

Proposition 14.2-1 : Soit U une partie ouverte de X et soit (\mathcal{G}^*, d_*) un complexe de faisceaux de \mathbf{A} -modules sur X .

a) Pour chaque $r \in \mathbb{Z}$, la correspondance :

$$(\mathcal{G}^*, d_*) \rightsquigarrow \mathbb{H}^r(U; (\mathcal{G}^*, d_*)),$$

est **fonctorielle covariante et additive** de la catégorie $\mathbf{C}^*(\text{Fais}_{\mathbf{A}}(X))$ vers la catégorie $\text{Mod}(\mathbf{A})$.

b) Si les termes du complexe (\mathcal{G}^*, d_*) sont nuls en degrés inférieurs ou égaux $r_0 \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\mathbb{H}^r(U; (\mathcal{G}^*, d_*)) = \mathbf{0}, \quad \text{pour tout } r \leq r_0.$$

c) Si le complexe (\mathcal{G}^*, d_*) est concentré en degré 0, i.e. si $\mathcal{G}^* = \mathcal{G}[0]$, pour un certain $\mathcal{G} \in \text{Ob}(\text{Fais}_{\mathbf{A}}(X))$, on a :

$$\mathbb{H}^r(U; (\mathcal{G}^*, d_*)) = H^r(U; \mathcal{G}), \quad \text{pour tout } r \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

où le terme de droite désigne le r -ième groupe de cohomologie de faisceaux du faisceau \mathcal{G} .

Proposition 14.2-2 : Soit U une partie ouverte de X et soit (\mathcal{G}^*, d_*) un complexe de faisceaux de \mathbf{A} -modules sur X .

Il existe une correspondance canonique **fonctorielle et additive** associant à chaque suite exacte de complexes de faisceaux de \mathbf{A} -modules :

$$\mathbf{0} \longrightarrow \mathcal{G}_1^* \xrightarrow{\varphi_*} \mathcal{G}_2^* \xrightarrow{\psi_*} \mathcal{G}_3^* \longrightarrow \mathbf{0},$$

une suite exacte longue d'hyper-cohomologie de complexes de faisceaux :

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & \mathbb{H}^{-1}(U; \mathbf{G}_1^*) & \xrightarrow{\mathbb{H}^{-1}(U; \varphi_*)} & \mathbb{H}^{-1}(U; \mathbf{G}_2^*) & \xrightarrow{\mathbb{H}^{-1}(U; \psi_*)} & \mathbb{H}^{-1}(U; \mathbf{G}_3^*) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & \mathbb{H}^0(U; \mathbf{G}_1^*) & \xrightarrow{\mathbb{H}^0(U; \varphi_*)} & \mathbb{H}^0(U; \mathbf{G}_2^*) & \xrightarrow{\mathbb{H}^0(U; \psi_*)} & \mathbb{H}^0(U; \mathbf{G}_3^*) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & \mathbb{H}^1(U; \mathbf{G}_1^*) & \xrightarrow{\mathbb{H}^1(U; \varphi_*)} & \mathbb{H}^1(U; \mathbf{G}_2^*) & \xrightarrow{\mathbb{H}^1(U; \psi_*)} & \mathbb{H}^1(U; \mathbf{G}_3^*) & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & \mathbb{H}^2(U; \mathbf{G}_1^*) & \xrightarrow{\mathbb{H}^2(U; \varphi_*)} & \mathbb{H}^2(U; \mathbf{G}_2^*) & \xrightarrow{\mathbb{H}^2(U; \psi_*)} & \mathbb{H}^2(U; \mathbf{G}_3^*) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Démonstration : La démonstration résulte de la définition même de l'hyper-cohomologie. L'application du foncteur de résolution flasque canonique de Godement (exact), donne la suite exacte de **bicomplexes de faisceaux flasques** :

$$\mathbf{0} \longrightarrow \mathcal{C}^\bullet(\mathcal{G}_1^*) \xrightarrow{\mathcal{C}^\bullet(\varphi_*)} \mathcal{C}^\bullet(\mathcal{G}_2^*) \xrightarrow{\mathcal{C}^\bullet(\psi_*)} \mathcal{C}^\bullet(\mathcal{G}_3^*) \longrightarrow \mathbf{0},$$

d'où la suite exacte de bicomplexes de \mathbf{A} -modules :

$$\mathbf{0} \longrightarrow \Gamma(U; \mathcal{C}^\bullet(\mathcal{G}_1^*)) \xrightarrow{\Gamma(U; \mathcal{C}^\bullet(\varphi_*))} \Gamma(U; \mathcal{C}^\bullet(\mathcal{G}_2^*)) \xrightarrow{\Gamma(U; \mathcal{C}^\bullet(\psi_*))} \Gamma(U; \mathcal{C}^\bullet(\mathcal{G}_3^*)) \longrightarrow \mathbf{0},$$

qui donnera lieu à une suite exacte courte de complexes simples associés ; puis à la suite exacte longue de cohomologie de l'énoncé de la proposition. ■

14.2.1 Deux résultats d'algèbre homologique

Les deux propositions suivantes admettent des démonstrations élémentaires, mais dans le but de familiariser le lecteur avec les techniques des suites spectrales, nous avons préféré les démontrer à l'aide de ces dernières. Ces assertions généralisent la proposition 9.3-1 et son corollaire 9.3-2 au cas des bicomplexes du "demi-plan supérieur".

Proposition 14.2.1-1 : Soit $(C^{\bullet,*}, d, \delta)$ un bicomplexe de modules du "demi-plan supérieur", i.e. tel que $C^{l,k} = 0$, pour tout $l < 0$. Supposons que sa cohomologie verticale est nulle. Alors le complexe simple associé (C^*, D_*) est exact.

Démonstration : L'idée est celle classique qui consiste à filtrer le complexe simple (C^*, D_*) en posant :

$$C_p^* := \bigoplus_{k \geq p} C^{*,k}.$$

La filtration est évidemment régulière et l'hypothèse sur la cohomologie de colonnes dit que l'on a pour les termes de la suite spectrale associée : $E_1^{p,q} = 0$, pour tous $p, q \in \mathbb{Z}$. L'annulation de la cohomologie du complexe en question s'ensuit. ■

Corollaire 14.2.1-2 : Soient $(A^{\bullet,*}, d, \delta)$ un bicomplexe du demi-plan supérieur et $(B^{\bullet,*}, d(B), \delta(B))$ le bicomplexe du demi-plan supérieur défini par :

$$\begin{cases} B^{l,k} = A^{l+1,k}; \\ d(B)_{l,k} = d_{l+1,k}; \\ \delta(B)_{l,k} = \delta_{l+1,k}; \end{cases}$$

pour tout $(l, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$. Notons $(B^*, D(B)_*)$ le complexe simple associé à $(B^{\bullet,*}, d(B), \delta(B))$. Alors :

- a) Les applications $\delta_{0,k} : A^{0,k} \rightarrow B^k$ définissent un morphisme de complexes $\delta_{0,*}$ entre $(A^{0,*}, d_{0,*})$ et $(B^*, D(B)_*)$.
- b) La cohomologie du bicomplexe $(A^{\bullet,*}, d, \delta)$ est nulle, si et seulement si, le morphisme $\delta_{0,*}$ est un quasi-isomorphisme.

Démonstration : La démonstration est rigoureusement la même que celle du corollaire 9.3-2 moyennant la généralisation 14.2.1-1 de la proposition 9.3-1. ■

Remarque 14.2.1-1 : Voici une illustration de ce dernier corollaire.

$$\Sigma \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \rightarrow A^{3,0} \rightarrow A^{3,1} \rightarrow A^{3,2} \rightarrow \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \rightarrow A^{2,0} \rightarrow A^{2,1} \rightarrow A^{2,2} \rightarrow \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \rightarrow A^{1,0} \rightarrow A^{1,1} \rightarrow A^{1,2} \rightarrow \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \rightarrow A^{0,0} \rightarrow A^{0,1} \rightarrow A^{0,2} \rightarrow \end{pmatrix} \iff \Sigma \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \rightarrow A^{3,0} \rightarrow A^{3,1} \rightarrow A^{3,2} \rightarrow \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \rightarrow A^{2,0} \rightarrow A^{2,1} \rightarrow A^{2,2} \rightarrow \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \rightarrow A^{1,0} \rightarrow A^{1,1} \rightarrow A^{1,2} \rightarrow \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ (\rightarrow A^{0,0} \rightarrow A^{0,1} \rightarrow A^{0,2} \rightarrow) \end{pmatrix}$$

exact ⇔ quasi-isomorphisme

Ces deux résultats interviennent dans la démonstration du théorème suivant.

Théorème 14.2.1-3 : Soit U une partie ouverte de X et soit (\mathcal{G}^*, d_*) un complexe de faisceaux de \mathbf{A} -modules sur X .

a) Il existe des morphismes canoniques :

$$\Xi_r(U; \mathcal{G}^*) : h^r(\Gamma(U; (\mathcal{G}^*, d_*))) \longrightarrow \mathbb{H}^r(U; (\mathcal{G}^*, d_*)), \text{ pour chaque } r \in \mathbb{Z};$$

et lorsque $\mathcal{G}^k = \mathbf{0}$, pour tout $k < 0$, le morphisme $\Xi_0(U; \mathcal{G}^*)$ est un **isomorphisme**.

b) Les morphismes $\Xi_r(U; \mathcal{G}^*)$ sont des isomorphismes, quel que soit $r \in \mathbb{Z}$, lorsque chaque terme \mathcal{G}^m du complexe (\mathcal{G}^*, d_*) est $\Gamma(U; -)$ -acyclique.

Démonstration :

a) La définition de l'hyper-cohomologie du complexe (\mathcal{G}^*, d_*) passe par la résolution flasque canonique de Godement :

$$(\mathcal{G}^*, d_*) \xrightarrow{\varepsilon(\mathcal{G}^*)} \Sigma(\mathcal{C}^\bullet(\mathcal{G}^*)),$$

où Σ désigne le foncteur “complexe simple associé”, le morphisme canonique $\Xi_*(\mathcal{G}^*)$ est celui défini par le morphisme de complexes $\varepsilon(\mathcal{G}^*)$.

Supposons maintenant que $\mathcal{G}^k = \mathbf{0}$, pour tout $k < 0$; on a le bicomplexe de faisceaux de colonnes exactes :

$$\begin{array}{cccccccc} & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & d_1(\mathcal{G}^0) & & d_1(\mathcal{G}^1) & & d_1(\mathcal{G}^2) & & d_1(\mathcal{G}^3) & & \\ \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathcal{C}^1(\mathcal{G}^0) & \xrightarrow{\mathcal{C}^1(d_0)} & \mathcal{C}^1(\mathcal{G}^1) & \xrightarrow{\mathcal{C}^1(d_1)} & \mathcal{C}^1(\mathcal{G}^2) & \xrightarrow{\mathcal{C}^1(d_2)} & \mathcal{C}^1(\mathcal{G}^3) & \xrightarrow{\mathcal{C}^1(d_3)} & \dots \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathcal{C}^0(\mathcal{G}^0) & \xrightarrow{\mathcal{C}^0(d_0)} & \mathcal{C}^0(\mathcal{G}^1) & \xrightarrow{\mathcal{C}^0(d_1)} & \mathcal{C}^0(\mathcal{G}^2) & \xrightarrow{\mathcal{C}^0(d_2)} & \mathcal{C}^0(\mathcal{G}^3) & \xrightarrow{\mathcal{C}^0(d_3)} & \dots \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathcal{G}^0 & \xrightarrow{d_0} & \mathcal{G}^1 & \xrightarrow{d_1} & \mathcal{G}^2 & \xrightarrow{d_2} & \mathcal{G}^3 & \xrightarrow{d_3} & \dots \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \end{array}$$

et $h^0(U; \mathcal{G}^*) = \ker(\Gamma(U; d_0)) \subseteq \Gamma(U; \mathcal{G}^0)$. D'autre part $\mathbb{H}^0(U; \mathcal{G}^*)$ est donné par l'ensemble des $y \in \Gamma(U; \mathcal{C}^0(\mathcal{G}^0))$ vérifiant les deux relations d'annulation :

$$y \in \ker(\Gamma(U; d_0(\mathcal{G}^0))) \subseteq \Gamma(U; \mathcal{C}^0(\mathcal{G}^0)), \quad \text{et} \quad \Gamma(U; \mathcal{C}^0(d_0))(y) = 0 \in \mathcal{C}^0(\mathcal{G}^1);$$

or, l'exactitude à gauche de $\Gamma(U; -)$ donne l'**isomorphisme** de complexes :

$$\begin{array}{cccccccc} \mathbf{0} & \longrightarrow & \ker(\Gamma(U; d_0(\mathcal{G}^0))) & \xrightarrow{\Gamma(U; \mathcal{C}^0(d_0))} & \ker(\Gamma(U; d_0(\mathcal{G}^1))) & \xrightarrow{\Gamma(U; \mathcal{C}^0(d_1))} & \ker(\Gamma(U; d_0(\mathcal{G}^2))) & \xrightarrow{\Gamma(U; \mathcal{C}^0(d_2))} & & \\ & & \uparrow \cong & & \uparrow \cong & & \uparrow \cong & & & \\ \mathbf{0} & \longrightarrow & \Gamma(U; \mathcal{G}^0) & \xrightarrow{\Gamma(U; d_0)} & \Gamma(U; \mathcal{G}^1) & \xrightarrow{\Gamma(U; d_1)} & \Gamma(U; \mathcal{G}^2) & \xrightarrow{\Gamma(U; d_2)} & & \end{array}$$

et l'application canonique $\Xi_0(U; \mathcal{G}^*) : h^0\Gamma(U; \mathcal{G}^0) \rightarrow \mathbb{H}^0(U; \mathcal{G}^*)$ est bien **bijective**.

b) Lorsque chaque \mathcal{G}^m est $\Gamma(U; _)$ -acyclique, les colonnes du bicomplexe $\mathcal{E}^\bullet(\mathcal{G}^*)$ augmentées de la ligne \mathcal{G}^* restent exactes après application du foncteur $\Gamma(U; _)$; la cohomologie du complexe simple associé à ce bicomplexe augmenté est donc nulle d'après la proposition 14.2.1-1; son corollaire 14.2.1-2 entraîne alors l'assertion (b). \blacksquare

14.3 Sous-catégorie de complexes de faisceaux de \mathbf{A} -modules bornés à gauche

Définition 14.3-1 : Un complexe de faisceaux de \mathbf{A} -modules (\mathcal{G}^*, d_*) est dit « *borné à gauche* » lorsque il existe $N \in \mathbb{Z}$ tel que $\mathcal{G}^k = \mathbf{0}$, pour tout $k \leq N$. On note $\mathbf{C}^{bg}(\text{Fais}_A(\mathbf{X}))$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{C}^*(\text{Fais}_A(\mathbf{X}))$ dont les objets sont les complexes bornés à gauche. La catégorie $\mathbf{C}^{bg}(\text{Fais}_A(\mathbf{X}))$ est *abélienne*.

14.3.1 Suites spectrales pour l'hyper-cohomologie de complexes de faisceaux bornés à gauche

Soit (\mathcal{G}^*, d_*) un complexe de $\mathbf{C}^{bg}(\text{Fais}_A(\mathbf{X}))$, nous allons supposer dans la suite qu'il s'agit d'un complexe nul en degrés négatifs, cette hypothèse de travail n'invalidera nullement la généralité de nos arguments qui s'appliqueront à des complexes bornés quelconques.

Les premiers termes de la résolution flasque canonique de Godement sont :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & d_1(\mathcal{G}^0) & & d_1(\mathcal{G}^1) & & d_1(\mathcal{G}^2) & & d_1(\mathcal{G}^3) & & \\
 \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathcal{E}^1(\mathcal{G}^0) & \xrightarrow{\mathcal{E}^1(d_0)} & \mathcal{E}^1(\mathcal{G}^1) & \xrightarrow{\mathcal{E}^1(d_1)} & \mathcal{E}^1(\mathcal{G}^2) & \xrightarrow{\mathcal{E}^1(d_2)} & \mathcal{E}^1(\mathcal{G}^3) & \xrightarrow{\mathcal{E}^1(d_3)} & \dots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & d_0(\mathcal{G}^0) & & d_0(\mathcal{G}^1) & & d_0(\mathcal{G}^2) & & d_0(\mathcal{G}^3) & & \\
 \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathcal{E}^0(\mathcal{G}^0) & \xrightarrow{\mathcal{E}^0(d_0)} & \mathcal{E}^0(\mathcal{G}^1) & \xrightarrow{\mathcal{E}^0(d_1)} & \mathcal{E}^0(\mathcal{G}^2) & \xrightarrow{\mathcal{E}^0(d_2)} & \mathcal{E}^0(\mathcal{G}^3) & \xrightarrow{\mathcal{E}^0(d_3)} & \dots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathcal{G}^0 & \xrightarrow{d_0} & \mathcal{G}^1 & \xrightarrow{d_1} & \mathcal{G}^2 & \xrightarrow{d_2} & \mathcal{G}^3 & \xrightarrow{d_3} & \dots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & &
 \end{array}$$

et lorsque nous lui appliquons le foncteur $\Gamma(U; _)$ nous sommes face à un bicomplexe du premier quadrant (en général borné à gauche). Les filtrations “horizontale” et “verticale” sont donc **toutes deux** régulières. Il s'ensuit l'existence de deux suites spectrales convergeant vers la cohomologie du complexe simple associé, *i.e.* vers l'hyper-cohomologie de (\mathcal{G}^*, d_*) .

• **Filtration par les colonnes.** Dans ce cas, déjà considéré pour les complexes illimités, on obtient :

$$\boxed{E_1^{p,q} = H^{p+q}(U; \mathcal{G}^p) \implies H^q(U; \mathcal{G}^*)}$$

et l'on déduit immédiatement que si les \mathcal{G}^p sont tous $\Gamma(U; _)$ -acycliques, on a $\mathbb{E}_1^{p,q} = \mathbf{0}$, pour tout $q > 0$, et $\mathbb{E}_1^{p,0} \equiv \mathcal{G}^p$, pour tout $p \in \mathbb{Z}$. En particulier, $d_1 \equiv d_*$ sur $\mathbb{E}_1^{*,0} \equiv \mathcal{G}^*$ et alors :

$$\mathbb{E}_2^{p,0} \equiv h^p(\Gamma(U; \mathcal{G}^*)); \mathbb{E}_2^{p,q} = \mathbf{0}, \text{ pour tout } q > 0; \text{ et } d_r = 0 \text{ pour tout } r \geq 2,$$

il s'ensuit que $h^p(\Gamma(U; \mathcal{G}^*)) \equiv \mathbb{E}_2^{p,0} \equiv \mathbb{E}_\infty^{p,0}$ et $\mathbb{E}_\infty^{p,q} = \mathbf{0}$, pour tout $q > 0$, d'où un isomorphisme canonique entre $h^*(\Gamma(U; \mathcal{G}^*)) \rightarrow \mathbb{H}(U; \mathcal{G}^*)$ (cf. la démonstration de la proposition 14.2.1-3).

• **Filtration par les lignes.** Regardons maintenant les premiers termes de la suite spectrale associée à la filtration par les lignes. Le terme $\mathbb{E}_1^{p,q}$ est donné par la cohomologie au terme r du complexe :

$$\mathbf{0} \rightarrow \Gamma(U; \mathcal{E}^p(\mathcal{G}^0)) \xrightarrow{\Gamma(U; \mathcal{E}^p(d_0))} \Gamma(U; \mathcal{E}^p(\mathcal{G}^1)) \xrightarrow{\Gamma(U; \mathcal{E}^p(d_1))} \dots \xrightarrow{\mathcal{E}^p(\Gamma(U; d_{q-1}))} \Gamma(U; \mathcal{E}^p(\mathcal{G}^q)) \xrightarrow{\Gamma(U; \mathcal{E}^p(d_q))} \dots$$

Rappelons maintenant dans le contexte de la théorie des faisceaux les développements de la section 8.3.3, principalement pour ce qui est du diagramme en “serpent” (‡) en page 119. On a le diagramme de faisceaux :

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow \\ 0 & \rightarrow & \mathcal{I}^q & \xrightarrow{p_q} & \mathcal{K}^q & \xrightarrow{q_q} & \mathcal{H}^q \rightarrow 0 & & \mathcal{I}^{q+1} \\ & & \beta_{q-1} \uparrow & & \alpha_q \downarrow & & \beta_{q+1} \uparrow & & \\ \dots & \xrightarrow{d_{q-2}} & \mathcal{G}^{q-1} & \xrightarrow{d_{q-1}} & \mathcal{G}^q & \xrightarrow{d_q} & \mathcal{G}^{q+1} & \xrightarrow{d_{q+1}} & \dots & (\ddagger) \\ & & \alpha_{q-1} \uparrow & & \beta_q \downarrow & & \alpha_{q+1} \uparrow & & \\ & & \mathcal{K}^{q-1} & & 0 \rightarrow \mathcal{I}^{q+1} & \xrightarrow{p_{q+1}} & \mathcal{K}^{q+1} & \xrightarrow{q_{q+1}} & \mathcal{H}^{q+1} \rightarrow 0 \\ & & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow & & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

où les suites à trois termes sont toutes exactes, et où l'on désigne par \mathcal{I}^m : le faisceau image de d_{m-1} , puis par \mathcal{K}^m : le faisceaux noyau de d_m , et enfin par \mathcal{H}^m , qu'on notera également $\mathcal{H}^m(\mathcal{G}^*)$: le faisceau de cohomologie en degré m du complexe (\mathcal{G}^*, d_*) .

Si nous appliquons maintenant au diagramme (‡) le foncteur de Godement \mathcal{E}^p (resp. le foncteur “résolution canonique flasque de Godement”), on obtient également un diagramme où toutes les suites à trois termes sont exactes, mais maintenant tous les faisceaux seront en plus **flasques**. En particulier, l'application ultérieure du foncteur $\Gamma(U; _)$ préservera l'exactitude des suites à trois termes, et par conséquent, et suite aux remarques de la section 8.3.3, on obtient un isomorphisme **canonique** entre :

$$\boxed{h^p(\Gamma(U; \mathcal{E}^p(\mathcal{G}^*))) \xrightarrow{\cong} \Gamma(U; \mathcal{E}^p(\mathcal{H}^q(\mathcal{G}^*)))}$$

Nous avons donc $\mathbb{E}_1^{p,q} \equiv \Gamma(U; \mathcal{E}^p(\mathcal{H}^q(\mathcal{G}^*)))$ et une analyse rapide montre que la différentielle $d_1 : \mathbb{E}_1^{p,q} \rightarrow \mathbb{E}_1^{p+1,q}$ est précisément le morphisme $\Gamma(U; d_p(\mathcal{H}^q))$ provenant de la résolution flasque canonique de Godement appliquée au faisceau $\mathcal{H}^q(\mathcal{G}^*)$. En conclusion, on a :

$$\boxed{\mathbb{E}_2^{p,q} = H^p(U; \mathcal{H}^q(\mathcal{G}^*))}$$

où le terme de droite désigne le p -ième groupe de cohomologie de faisceaux de $\mathcal{H}^q(\mathcal{G}^*)$. Le théorème 14.4-1 qui débute la section suivante, connu sous le nom de «*théorème principal de la théorie de faisceaux*», se trouve ainsi démontré.

14.4 Théorèmes fondamentaux de la cohomologie de faisceaux

Théorème 14.4-1 principal de la théorie de faisceaux (Leray) : *Soit U un ouvert de X . Pour chaque complexe de faisceaux de \mathbf{A} -modules (\mathcal{G}^*, d_*) borné à gauche sur X , il existe une suite spectrale convergeant vers son hyper-cohomologie :*

$$\mathbb{E}_2^{p,q} \equiv H^p(U; \mathcal{H}^q(\mathcal{G}^*)) \implies \mathbb{H}^{p+q}(U; \mathcal{G}^*)$$

Corollaire 14.4-2 1 : *Soit U une partie ouverte de X . Soit $\varphi_* : (\mathcal{G}_1^*, d_{1,*}) \rightarrow (\mathcal{G}_2^*, d_{2,*})$ un **quasi-isomorphisme** de complexes de faisceaux de \mathbf{A} -modules ⁽⁵¹⁾ **bornés à gauche**. Les morphismes induits en hyper-cohomologie :*

$$\mathbb{H}^r(U; \varphi) : \mathbb{H}^r(U; (\mathcal{G}_1^*, d_{1,*})) \longrightarrow \mathbb{H}^r(U; (\mathcal{G}_2^*, d_{2,*})),$$

sont des **isomorphismes**, pour tout $r \in \mathbb{Z}$.

Démonstration : Résulte immédiatement du fait que le morphisme de complexes φ_* induit un morphisme des suites spectrales associées aux filtrations par les lignes des bicomplexes intervenant dans la définition de l'hyper-cohomologie. Le morphisme reliant les termes $\mathbb{E}_{i,2}^{p,q} \equiv H^p(U; \mathcal{H}^q(\mathcal{G}_i^*))$ est alors celui induit par l'isomorphisme $\mathcal{H}^*(\varphi) : \mathcal{H}^*(\mathcal{G}_1^*) \rightarrow \mathcal{H}^*(\mathcal{G}_2^*)$ et est donc un isomorphisme. L'isomorphisme annoncé dans ce corollaire est alors conséquence de la théorie générale des suites spectrales. ■

Remarque 14.4-1 : Ce corollaire est très important dans la théorie de faisceaux. Il affirme que sur la catégorie des complexes de faisceaux **bornés à gauche**, l'hyper-cohomologie est un invariant des classes d'équivalences des complexes quasi-isomorphes. En particulier, l'hyper-cohomologie d'un complexe de faisceaux borné à gauche et **exact** est **nulle**.

Définition 14.4-1 : Soit (\mathcal{G}^*, d_*) un complexe de faisceaux borné à gauche. On appelle «*résolution de (\mathcal{G}^*, d_*)* » la donnée d'un complexe de faisceaux borné à gauche (\mathcal{R}^*, d_*) est d'un morphisme de complexes de faisceaux : $\varepsilon_* : (\mathcal{G}^*, d_*) \rightarrow (\mathcal{R}^*, d_*)$ qui soit un **quasi-isomorphisme**.

La résolution est dite : «*flasque*», « $\Gamma(U; _)$ -acyclique», « Γ -acyclique» si chacun des termes \mathcal{R}^m l'est.

⁵¹ Ceci signifie que les morphismes de faisceaux induits $\mathcal{H}^q(\varphi_*) : \mathcal{H}^q(\mathcal{G}_1^*) \rightarrow \mathcal{H}^q(\mathcal{G}_2^*)$ sont des isomorphismes, quel que soit $q \in \mathbb{Z}$. Le point de vue de "germes" peut être également invoqué pour introduire cette notion : on demande alors que les morphismes de complexes de \mathbf{A} -modules $\varphi_{(x)} : (\mathcal{G}_{1(x)}^*, d_{1,*(x)}) \rightarrow (\mathcal{G}_{2(x)}^*, d_{2,*(x)})$ soient des quasi-isomorphismes, quel que soit $x \in X$.

Remarque 14.4-2 et exercice : Rappelons qu'on appelle « *résolution d'un faisceau \mathcal{G}* » la donnée d'un complexe de faisceaux (\mathcal{G}^*, d_*) muni d'une augmentation $\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{G} \xrightarrow{\varepsilon(\mathcal{G})} (\mathcal{G}^*, d_*)$ tel que le complexe augmenté est exact. Si nous considérons maintenant le point de vue de la catégorie $\mathbf{C}^{b_g}(\text{Fais}_{\mathbf{A}}(\mathbf{X}))$, le morphisme d'augmentation $\varepsilon(\mathcal{G})$ s'« intègre » dans un morphisme de complexes $\varepsilon(\mathcal{G})_* : \mathcal{G}[0] \rightarrow (\mathcal{G}^*, d_*)$ en posant $\varepsilon(\mathcal{G})_0 := \varepsilon(\mathcal{G})$ et $\varepsilon(\mathcal{G})_r = 0$, pour tout $r > 0$. Montrer que le morphisme $\varepsilon(\mathcal{G})_*$ fait alors du complexe (\mathcal{G}^*, d_*) une résolution de $\mathcal{G}[0]$. Imaginez l'énoncé réciproque et démontrez-le.

Corollaire 14.4-3 2 : Soit U une partie ouverte de \mathbf{X} . Soit $\varepsilon_* : (\mathcal{G}^*, d_*) \rightarrow (\mathcal{R}^*, d_*)$ une résolution $\Gamma(U; -)$ -acyclique de (\mathcal{G}^*, d_*) dans la catégorie $\mathbf{C}^{b_g}(\text{Fais}_{\mathbf{A}}(\mathbf{X}))$. Les groupes d'hyper-cohomologie de (\mathcal{G}^*, d_*) sont alors canoniquement isomorphes aux groupes $h^q(\Gamma(U; \mathcal{R}^*))$.

Démonstration : Le corollaire 14.4-2 prouve déjà que le morphisme :

$$\mathbb{H}^*(U; \varepsilon_*) : \mathbb{H}^*(U; \mathcal{G}^*) \rightarrow \mathbb{H}^*(U; \mathcal{R}^*),$$

est un isomorphisme canonique. Le théorème 14.2.1-3 montre d'autre part que le morphisme canonique :

$$\Xi_*(U; \mathcal{R}^*) : h^*(\Gamma(U; \mathcal{R}^*)) \rightarrow \mathbb{H}^*(U; \mathcal{R}^*),$$

est lui aussi un isomorphisme. L'assertion du corollaire résulte alors en considérant la composée :

$$(\Xi_*(U; \mathcal{R}^*))^{-1} \circ \mathbb{H}^*(U; \varepsilon_*). \quad \blacksquare$$

Remarque 14.4-3 : Les résultats cette dernière section ne peuvent être étendus, en toute généralité, à la catégorie de tous les complexes de faisceaux de \mathbf{A} -modules. Une condition de finitude connue sous le nom de « *dimension cohomologique finie de \mathbf{X}* » et qui affirme qu'il existe un entier positif N (dépendant uniquement de \mathbf{X}) tel que pour **tout** faisceaux de \mathbf{A} -modules \mathcal{G} ses groupes de cohomologie de faisceaux en degrés supérieurs à N sont nuls, suffit pour une telle extension.

Voici comment on procède lorsque une telle condition de finitude est présente. Soit :

$$\dots \xrightarrow{d_{m-2}} \mathcal{F}^{m-1} \xrightarrow{d_{m-1}} \mathcal{F}^m \xrightarrow{d_m} \mathcal{F}^{m+1} \xrightarrow{d_{m+1}} \mathcal{F}^{m+2} \xrightarrow{d_{m+2}} \dots,$$

un complexe **acyclique** de faisceaux **flasques**. Pour chaque $m \in \mathbb{Z}$ et tout $r \in \mathbb{N}$, on a les suites exactes de faisceaux :

$$\mathbf{0} \rightarrow \underline{\ker}(d_{m-r}) \hookrightarrow \mathcal{F}^{m-r} \xrightarrow{d_{m-r}} \mathcal{F}^{m-r+1} \dots \xrightarrow{d_{m-2}} \mathcal{F}^{m-1} \xrightarrow{d_{m-1}} \mathcal{F}^m \xrightarrow{d_m} \dots,$$

(c'est une résolution flasque du faisceau $\underline{\ker}(d_{m-r})$) qui donnent, d'après le théorème 13.3.6-1, les égalités :

$$h^m(\Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{F}^*)) \equiv H^r(\mathbf{X}; \underline{\ker}(d_{m-r})),$$

pour tout $r \in \mathbb{N}$. En particulier, pour peu que l'on prenne $r > N$, on aura $h^m(\Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{F}^*)) = 0$, et comme ceci est indépendant de $m \in \mathbb{Z}$, le complexe de \mathbf{A} -modules :

$$\dots \xrightarrow{\Gamma(\mathbf{X}; d_{m-2})} \Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{F}^{m-1}) \xrightarrow{\Gamma(\mathbf{X}; d_{m-1})} \Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{F}^m) \xrightarrow{\Gamma(\mathbf{X}; d_m)} \Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{F}^{m+1}) \xrightarrow{\Gamma(\mathbf{X}; d_{m+1})} \dots,$$

est **exact**.

Nous voyons ainsi que la généralisation de la proposition 13.3.3-3 au cas des complexes de faisceaux flasques illimités est également vraie moyennant l'hypothèse de finitude de la dimension cohomologique des ouverts de \mathbf{X} . Ce résultat suffit alors pour démontrer le corollaires 14.4-2 et 14.4-3 sur la catégorie $\mathbf{C}^*(\text{Fais}_{\mathbf{A}}(\mathbf{X}))$; mais auparavant démontrons le résultat suivant d'algèbre homologique.

Proposition 14.4-3.1 : Soit un morphisme de complexes de \mathbf{A} -modules

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 \dots & \longrightarrow & \mathbf{C}^{1,m-1} & \longrightarrow & \mathbf{C}^{1,m} & \longrightarrow & \mathbf{C}^{1,m+1} & \longrightarrow & \mathbf{C}^{1,m+2} & \longrightarrow & \dots \\
 & & \uparrow \nu_{m-1} & & \uparrow \nu_m & & \uparrow \nu_{m+1} & & \uparrow \nu_{m+2} & & \\
 \dots & \longrightarrow & \mathbf{C}^{0,m-1} & \longrightarrow & \mathbf{C}^{0,m} & \longrightarrow & \mathbf{C}^{0,m+1} & \longrightarrow & \mathbf{C}^{0,m+2} & \longrightarrow & \dots,
 \end{array} \quad (*)$$

Le morphisme ν_* est un **quasi-isomorphisme**, si et seulement si, la cohomologie du complexe simple associé au bicomplexe obtenu à partir du diagramme (*) en le complétant par des termes nuls, est nulle.

Démonstration : En filtrant le bicomplexe en question par les lignes (filtration régulière), *i.e.* en posant :

$$C_p^* := \bigoplus_{k \geq p} C^{k,*},$$

on voit que ν_* est un **quasi-isomorphisme**, si et seulement si, les termes de la suite spectrale associée vérifient :

$$\mathbb{E}_2^{p,q} = \mathbf{0}, \quad \text{pour tous } p, q \in \mathbb{Z}.$$

D'autre part, comme le bicomplexe en question ne possède que deux lignes *a priori* non triviales, on a :

$$d_r = 0, \quad \text{pour tout } r \geq 2,$$

de sorte que $\mathbb{E}_2^{p,q} = \mathbb{E}_\infty^{p,q}$, pour tous $p, q \in \mathbb{Z}$, et comme d'autre part la cohomologie du complexe en question est nulle, si et seulement si, $\mathbb{E}_\infty^{p,q} = \mathbf{0}$, pour tous $p, q \in \mathbb{Z}$; le résultat en découle. ■

Corollaire 14.4-3.2 1 : Soit U une partie ouverte de l'espace topologique \mathbf{X} , supposée de dimension cohomologique finie.

Soit $\varphi_* : (\mathcal{G}_1^*, d_{1,*}) \rightarrow (\mathcal{G}_2^*, d_{2,*})$ un **quasi-isomorphisme** de complexes de faisceaux de \mathbf{A} -modules. Les morphismes induits en hyper-cohomologie :

$$\mathbb{H}^r(U; \varphi) : \mathbb{H}^r(U; (\mathcal{G}_1^*, d_{1,*})) \longrightarrow \mathbb{H}^r(U; (\mathcal{G}_2^*, d_{2,*})),$$

sont des **isomorphismes**, pour tout $r \in \mathbb{Z}$.

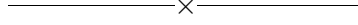
Démonstration : S'agissant d'un résultat non utilisé dans la suite de ce cours nous allons nous limiter à en esquisser la démonstration.

Le morphisme $\mathcal{C}^\bullet(\varphi_*)$ entre les résolutions flasques canoniques $\mathcal{C}^\bullet(\mathcal{G}_1^*)$ et $\mathcal{C}^\bullet(\mathcal{G}_2^*)$ induit également un quasi-isomorphisme entre les complexes simples associés aux bicomplexes des résolutions puisque ces complexes simples sont quasi-isomorphes aux complexes qu'ils résolvent est que la relation de quasi-isomorphie est transitive. En particulier, ce quasi-isomorphisme entre les deux complexes simples de faisceaux flasques s'intègre dans un bicomplexe comme nous l'avons fait dans la proposition 14.4-3.1 dont le complexe simple associé sera, d'après cette même proposition 14.4-3.1 et en raisonnant si besoin en termes de germes, un complexe acyclique de faisceaux flasques. L'application du foncteur $\Gamma(U; -)$ à ce dernier complexe, donne un complexe acyclique de \mathbf{A} -modules d'après notre remarque préliminaire; mais alors en appliquant à nouveau la proposition 14.4-3.1, il s'ensuit bien que les morphismes $\mathbb{H}^r(U; \varphi)$ sont des quasi-isomorphismes, ce qui termine la démonstration. ■

Corollaire 14.4-3.3 2 : Soit U une partie ouverte de \mathbf{X} . Soit $\varepsilon_* : (\mathcal{G}^*, d_*) \rightarrow (\mathcal{R}^*, d_*)$ une résolution $\Gamma(U; -)$ -acyclique de (\mathcal{G}^*, d_*) dans la catégorie $\mathbf{C}^\bullet(\text{Fais}_{\mathbf{A}}(\mathbf{X}))$. Les groupes d'hyper-cohomologie de (\mathcal{G}^*, d_*) sont alors canoniquement isomorphes aux groupes $h^q(\Gamma(U; \mathcal{R}^*))$.

Démonstration : La preuve suit de près celle du corollaire 14.4-3. ■

Remarque 14.4-3.1 : Signalons pour terminer que les variétés différentiables admettant des partitions de l'unité et les variétés algébriques sont de dimension cohomologique finie.



§ 15. Cohomologie de Čech de faisceaux

Comme dans les chapitres précédents, on désignera par \mathbf{A} un anneau commutatif avec identité multiplicative, et par \mathbf{X} un espace topologique arbitraire, *i.e.* un ensemble muni d'une topologie.

15.1 Compléments sur les faisceaux flasques et les foncteurs \mathcal{C}^p de Godement

Les propositions de cette section relèvent pour l'essentiel d'une simple vérification que nous laissons aux soins du lecteur.

15.1.1 Foncteurs “image directe” et “image inverse” pour un plongement ouvert

Pour chaque ouvert $U \subseteq \mathbf{X}$, notons $J_U : U \hookrightarrow \mathbf{X}$ l'inclusion canonique ; c'est un plongement ouvert (réciproquement, tout plongement ouvert est de cette forme là). On définit alors les foncteurs $J_{U,*} : \text{“image directe de faisceaux”}$ et $J_U^{-1} : \text{“image inverse de faisceaux”}$:

$$J_{U,*} : \text{Fais}_{\mathbf{A}}(U) \rightsquigarrow \text{Fais}_{\mathbf{A}}(\mathbf{X}) \quad \text{et} \quad J_U^{-1} : \text{Fais}_{\mathbf{A}}(\mathbf{X}) \rightsquigarrow \text{Fais}_{\mathbf{A}}(U).$$

Foncteur “image directe” pour un plongement ouvert

Pour $\mathcal{F} \in \text{Ob}(\text{Fais}_{\mathbf{A}}(U))$, on pose pour chaque ouvert $V \subseteq \mathbf{X}$:

$$(J_{U,*}(\mathcal{F}))(V) := \mathcal{F}(V \cap U).$$

Puis, lorsque l'on a deux ouverts $W \subseteq V \subseteq \mathbf{X}$, on définit le morphisme de restriction :

$$\rho_W^V : (J_{U,*}(\mathcal{F}))(V) \longrightarrow (J_{U,*}(\mathcal{F}))(W),$$

comme étant le morphisme $\rho(\mathcal{F})_{W \cap U}^{V \cap U}$. Enfin, si $\varphi : \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2$ est un morphisme de faisceaux de \mathbf{A} -modules sur U , on pose :

$$J_{U,*}(\varphi) : J_{U,*}(\mathcal{F}_1) \longrightarrow J_{U,*}(\mathcal{F}_2),$$

défini sur un ouvert $V \subseteq \mathbf{X}$ par l'égalité $\Gamma(V; J_{U,*}(\varphi)) = \varphi(V \cap U)$.

Proposition 15.1.1-1 : Soit \mathcal{F} un faisceau de \mathbf{A} -modules sur une partie ouverte $U \subseteq \mathbf{X}$.

- a) Le préfaisceau $J_{U,*}(\mathcal{F})$ est un **faisceau de \mathbf{A} -modules sur \mathbf{X}** .
- b) La correspondance définie dans les préliminaires de ce paragraphe :

$J_{U,*} : \text{Fais}_{\mathbf{A}}(U) \rightsquigarrow \text{Fais}_{\mathbf{A}}(\mathbf{X})$

est fonctorielle additive et exacte à gauche.

c) Si \mathcal{F} est flasque, le faisceau $j_{U,*}(\mathcal{F})$ l'est également.

Foncteur “image inverse” pour un plongement ouvert

Pour $\mathcal{G} \in \text{Ob}(\text{Fais}_{\mathbf{A}}(\mathbf{X}))$, on pose pour chaque ouvert $V \subseteq U$:

$$(j_U^{-1}(\mathcal{G}))(V) := \mathcal{G}(V).$$

Les morphismes de restriction sur $j_U^{-1}(\mathcal{G})$ sont alors ceux de \mathcal{G} pour les ouverts contenus dans U . De manière analogue, si $\varphi : \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2$ est un morphisme de faisceaux de \mathbf{A} -modules sur \mathbf{X} , on définit $j_U^{-1}(\varphi)$ par l'égalité : $\Gamma(V; j_U^{-1}(\varphi)) = \varphi(V)$, pour tout $V \subseteq U$.

Proposition 15.1.1-2 : Soit \mathcal{G} un faisceau de \mathbf{A} -modules sur \mathbf{X} . Pour toute partie ouverte $U \subseteq \mathbf{X}$:

- a) Le préfaisceau $j_U^{-1}(\mathcal{G})$ est un faisceau de \mathbf{A} -modules sur U .
- b) La correspondance définie dans le préliminaire de ce paragraphe :

$$\boxed{j_U^{-1} : \text{Fais}_{\mathbf{A}}(\mathbf{X}) \rightsquigarrow \text{Fais}_{\mathbf{A}}(U)}$$

est fonctorielle additive et exacte. ⁽⁵²⁾

- c) Si \mathcal{G} est flasque, le faisceau $j_U^{-1}(\mathcal{G})$ l'est également.
- d) Les foncteurs j_U^{-1} commutent aux foncteurs \mathcal{C}^p de Godement ; i.e. pour tout $\mathcal{G} \in \text{Ob}(\text{Fais}_{\mathbf{A}}(\mathbf{X}))$ et tout $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, on a un isomorphisme naturel $j_U^{-1}(\mathcal{C}^p(\mathcal{G})) \cong \mathcal{C}^p(j_U^{-1}(\mathcal{G}))$.

Proposition 15.1.1-3 : Soit \mathcal{G} un faisceau de \mathbf{A} -modules sur \mathbf{X} . Pour toute partie ouverte $U \subseteq \mathbf{X}$:

- a) Le foncteur composé $j_{U,*} \circ j_U^{-1} : \text{Fais}_{\mathbf{A}}(\mathbf{X}) \rightsquigarrow \text{Fais}_{\mathbf{A}}(\mathbf{X})$ est additif et exact à gauche.
- b) Pour toute partie ouverte $V \subseteq \mathbf{X}$, on a $(j_{U,*} \circ j_U^{-1})(\mathcal{G})(V) = \mathcal{G}(V \cap U)$.
- c) Si \mathcal{G} est flasque, le faisceau $(j_{U,*} \circ j_U^{-1})(\mathcal{G})$ l'est également.

Produit de faisceaux flasques et foncteurs \mathcal{C}^p de Godement

Proposition 15.1.1-4 : Soit $\{\mathcal{F}_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ une famille de faisceaux de \mathbf{A} -modules sur \mathbf{X} .

- a) Si chaque \mathcal{F}_α est un faisceau flasque, le faisceau produit direct $\prod_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathcal{F}_\alpha$ l'est également.
- b) Pour chaque $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, il existe un isomorphisme canonique naturel entre $\mathcal{C}^p(\prod_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathcal{F}_\alpha)$ et $\prod_{\alpha \in \mathfrak{A}} (\mathcal{C}^p(\mathcal{F}_\alpha))$

Indication : Reportez-vous à l'exercice 13.2.1-2. ■

⁵² Le faisceaux $j_U^{-1}(\mathcal{G})$ est couramment appelé « la restriction de \mathcal{G} à U » et on le note également $\mathcal{G}|_U$. De même, le foncteur j_U^{-1} est appelé « le foncteur de restriction à l'ouvert U ».

15.2 Faisceau de p -cochaînes de Čech d'un faisceau de \mathbf{A} -modules relatives à un recouvrement

Soit $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ un recouvrement ouvert de l'espace topologique \mathbf{X} . Pour tout ouvert $V \subseteq \mathbf{X}$, on notera $\mathcal{U} \pitchfork V = \{U_\alpha \cap V\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ le recouvrement ouvert de V «restriction de \mathcal{U} à V ».

Pour chaque préfaisceau de \mathbf{A} -modules \mathcal{F} , considérons la correspondance qui associe à l'ouvert $V \subseteq \mathbf{X}$ le \mathbf{A} -module des p -cochaînes de Čech de V à valeurs dans $\mathcal{F}|_V$ et relatives au recouvrement $\mathcal{U} \pitchfork V$, noté $\check{C}^p(\mathcal{U} \pitchfork V; \mathcal{F}|_V)$; il s'agit du \mathbf{A} -module des “applications” ω de \mathfrak{A}^{p+1} à valeurs dans les sections de \mathcal{F} vérifiant :

$$\omega(\alpha_{i_0}, \dots, \alpha_{i_p}) \in \mathcal{F}(U_{\alpha_{i_0} \dots \alpha_{i_p}} \cap V)$$

où la notation $U_{\alpha_{i_0} \dots \alpha_{i_p}}$ désigne comme d'habitude l'intersection $U_{\alpha_{i_0}} \cap \dots \cap U_{\alpha_{i_p}}$.

Lorsque $W \subseteq V$ sont deux ouverts de \mathbf{X} , on pose :

$$\begin{aligned} \rho_W^V : \check{C}^p(\mathcal{U} \pitchfork V; \mathcal{F}|_V) &\longrightarrow \check{C}^p(\mathcal{U} \pitchfork W; \mathcal{F}|_W) \\ \omega &\longmapsto \left((\alpha_{i_0}, \dots, \alpha_{i_p}) \mapsto \omega(\alpha_{i_0}, \dots, \alpha_{i_p})|_{U_{\alpha_{i_0} \dots \alpha_{i_p}} \cap W} \right) \end{aligned}$$

La donnée de la famille des \mathbf{A} -modules $\check{C}^p(\mathcal{U} \pitchfork V; \mathcal{F}|_V)$ et de la famille des morphismes (de \mathbf{A} -modules) ρ_W^V constitue alors un préfaisceau de \mathbf{A} -modules sur \mathbf{X} que nous noterons $\check{\mathcal{C}}^p(\mathcal{U}; \mathcal{F})$.

Proposition 15.2-1 : *Soit \mathcal{F} est un faisceau de \mathbf{A} -modules sur \mathbf{X} .*

a) *Pour chaque $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, le préfaisceau $\check{\mathcal{C}}^p(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ est un faisceau. En particulier, pour chaque ouvert $U \subseteq \mathbf{X}$, on a :*

$$\Gamma(U; \check{\mathcal{C}}^p(\mathcal{U}; \mathcal{F})) = \check{C}^p(\mathcal{U} \pitchfork U; \mathcal{F}|_U)$$

b) *Lorsque \mathcal{F} est un faisceau flasque, le faisceau $\check{\mathcal{C}}^p(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ est flasque, quel que soit $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.*

Démonstration :

a) Considérons le foncteur composé $J_{U,*} \circ J_U^{-1} : \text{Fais}_{\mathbf{A}}(\mathbf{X}) \rightsquigarrow \text{Fais}_{\mathbf{A}}(\mathbf{X})$. C'est un foncteur additif et exact à gauche, et, pour tout $\mathcal{F} \in \text{Ob}(\text{Fais}_{\mathbf{A}}(\mathbf{X}))$ et tout ouvert $V \subseteq \mathbf{X}$, on a :

$$\Gamma(V; (J_{U,*} \circ J_U^{-1})(\mathcal{F})) = \mathcal{F}(V \cap U).$$

En particulier, lorsque $U = U_{\alpha_0 \dots \alpha_p}$, on aura :

$$\mathcal{F}(U_{\alpha_0 \dots \alpha_p} \cap V) = \Gamma(V; (J_{U_{\alpha_0 \dots \alpha_p},*} \circ J_{U_{\alpha_0 \dots \alpha_p}}^{-1})(\mathcal{F})),$$

et par conséquent :

$$\begin{aligned} \check{C}^p(\mathcal{U} \pitchfork V; \mathcal{F}|_V) &= \prod_{\alpha_0, \dots, \alpha_p} \Gamma(V; (J_{U_{\alpha_0 \dots \alpha_p},*} \circ J_{U_{\alpha_0 \dots \alpha_p}}^{-1})(\mathcal{F})) \\ &= \Gamma\left(V; \prod_{\alpha_0, \dots, \alpha_p} (J_{U_{\alpha_0 \dots \alpha_p},*} \circ J_{U_{\alpha_0 \dots \alpha_p}}^{-1})(\mathcal{F})\right) \end{aligned}$$

où la deuxième égalité fait intervenir la notion de produit direct de faisceaux de \mathbf{A} -modules (cf. exercice 13.2.1-2). On en déduit l'égalité :

$$\check{\mathcal{C}}^p(\mathcal{U}; \mathcal{F}) = \prod_{\alpha_0, \dots, \alpha_p} (J_{U_{\alpha_0 \dots \alpha_p}, * } \circ J_{U_{\alpha_0 \dots \alpha_p}}^{-1})(\mathcal{F})$$

qui montre bien que le préfaisceaux des cochaînes de Čech à valeurs dans le faisceau \mathcal{F} et relatives au recouvrement \mathcal{U} est un produit direct, dans la catégorie des préfaisceaux, d'une famille de faisceaux, c'est donc bien un faisceau (cf. exercice 13.2.1-2) .

- b) Lorsque \mathcal{F} est flasque, chaque faisceaux $(J_{U_{\alpha_0 \dots \alpha_p}, * } \circ J_{U_{\alpha_0 \dots \alpha_p}}^{-1})(\mathcal{F})$ est flasque et donc leur produit l'est également d'après la proposition 15.1.1-4. ■

15.3 Complexe de faisceaux des cochaînes de Čech à valeurs dans un faisceau et relatives à un recouvrement ouvert

Soient $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ un recouvrement ouvert de \mathbf{X} et \mathcal{F} un faisceau de \mathbf{A} -modules sur \mathbf{X} . La section précédente a introduit, pour chaque $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, le faisceau $\check{\mathcal{C}}^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ dont les sections sur un ouvert $U \subseteq \mathbf{X}$ constituent le \mathbf{A} -module des p -cochaînes de Čech sur U , à valeurs dans le faisceaux $\mathcal{F}|_U$ et relatives au recouvrement $\mathcal{U} \cap U$; ce que nous avons noté $\check{\mathcal{C}}^p(\mathcal{U} \cap U; \mathcal{F}|_U)$.

Considérons maintenant, pour chaque ouvert $U \subseteq \mathbf{X}$, le complexe de Čech $(\check{\mathcal{C}}^*(\mathcal{U} \cap U; \mathcal{F}|_U), \delta(U)_*)$. Une vérification simple montre que, pour chaque $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, la famille (indexée par les ouverts de \mathbf{X}) des différentielles $\delta(U)_r : \check{\mathcal{C}}^r(\mathcal{U} \cap U; \mathcal{F}|_U), \delta(U)_* \rightarrow \check{\mathcal{C}}^{r+1}(\mathcal{U} \cap U; \mathcal{F}|_U), \delta(U)_*$ définit un morphisme de faisceaux de \mathbf{A} -modules :

$$\delta(\mathcal{U}; \mathcal{F})_r : \check{\mathcal{C}}^r(\mathcal{U}; \mathcal{F}) \longrightarrow \check{\mathcal{C}}^{r+1}(\mathcal{U}; \mathcal{F}).$$

On a clairement $\delta_{r+1} \circ \delta_r = 0$, d'où « le faisceau différentiel gradué des cochaînes de Čech à valeurs dans \mathcal{F} et relatives au recouvrement \mathcal{U} », noté $(\check{\mathcal{C}}^*(\mathcal{U}; \mathcal{F}), \delta(\mathcal{U}; \mathcal{F})_*)$.

On définit de manière analogue le morphisme d'augmentation $\varepsilon(\mathcal{F}) : \mathcal{F} \rightarrow \check{\mathcal{C}}^0(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ qui est un morphisme de faisceaux de \mathbf{A} -modules trivialement injectif.

La proposition suivante est fondamentale.

Proposition 15.3-1 : *Pour tout faisceau \mathcal{F} de \mathbf{A} -modules sur \mathbf{X} et tout recouvrement ouvert \mathcal{U} de \mathbf{X} , le complexe des faisceaux de \mathbf{A} -modules :*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varepsilon(\mathcal{F})} \check{\mathcal{C}}^0(\mathcal{U}; \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta(\mathcal{U}; \mathcal{F})_0} \check{\mathcal{C}}^1(\mathcal{U}; \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta(\mathcal{U}; \mathcal{F})_1} \check{\mathcal{C}}^2(\mathcal{U}; \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta(\mathcal{U}; \mathcal{F})_2} \dots$$

est *exact*.

Démonstration : Nous allons montrer l'exactitude au niveau des germes en chaque point $x \in \mathbf{X}$.

Soit $x \in \mathbf{X}$ et posons $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$. Pour chaque germe ϖ de section de $\check{\mathcal{C}}^p(\mathcal{U}; \mathcal{F})$ en x vérifiant $\delta_{p(x)}(\varpi) = 0$, notons ω un représentant de ϖ défini sur un voisinage ouvert V de x que l'on peut supposer suffisamment petit pour que $\delta(V)_p(\omega) = 0$. On a donc, pour tout $(\alpha_0, \dots, \alpha_{p+1}) \in \mathfrak{A}^{p+2}$:

$$\delta(V)_p(\omega)(\alpha_0, \dots, \alpha_{p+1}) = \sum_{j=0, \dots, p+1} (-1)^j \omega(\alpha_0, \dots, \widehat{\alpha}_j, \dots, \alpha_{p+1})|_{U_{\alpha_0 \dots \alpha_{p+1}} \cap V} = 0,$$

en particulier :

$$\omega(\alpha_1, \dots, \alpha_{p+1})|_{U_{\alpha_0 \dots \alpha_{p+1}} \cap V} = - \sum_{j=1, \dots, p+1} (-1)^j \omega(\alpha_0, \dots, \widehat{\alpha}_j, \dots, \alpha_{p+1})|_{U_{\alpha_0 \dots \alpha_{p+1}} \cap V}, \quad (*)$$

pour tout $(\alpha_0, \dots, \alpha_{p+1}) \in \mathfrak{A}^{p+2}$.

Or, comme $\omega \in \check{\mathcal{C}}^p(\mathcal{U} \pitchfork V, \mathcal{F}|_V)$ et que V est un voisinage arbitrairement petit de $x \in \mathbf{X}$, nous pouvons choisir α_0 tel que l'on ait $x \in V \subseteq U_{\alpha_0}$ ($\mathcal{U} \pitchfork V$ est un *recouvrement* de V). Dans un tel cas, on aura :

$$U_{\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_{p+1}} \cap V = U_{\alpha_1 \dots \alpha_{p+1}} \cap V. \quad (\ddagger)$$

Considérons alors la $(p-1)$ -cochaîne $\nu \in \check{\mathcal{C}}^{p-1}(\mathcal{U} \pitchfork V; \mathcal{F}|_V)$ définie par :

$$\nu(\alpha_1, \dots, \alpha_p) := \omega(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p),$$

où l'on remarquera que la définition a un sens puisque le domaine de définition de $\omega(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p)$ est, d'après (\ddagger) , le domaine naturel sur lequel la $(p-1)$ -cochaîne $\nu(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ doit être définie.

On a alors :

$$\delta(V)_{p-1}(\nu)(\alpha_1, \dots, \alpha_{p+1}) = \sum_{j=1, \dots, p+1} (-1)^j \omega(\alpha_0, \dots, \widehat{\alpha}_j, \dots, \alpha_{p+1})|_{U_{\alpha_1 \dots \alpha_{p+1}} \cap V},$$

ce qui, d'après (\ddagger) à nouveau, montre bien que ω est un cobord.

On laisse aux soins du lecteur d'adapter la démonstration précédente pour vérifier l'exactitude en degré 0. ■

Remarque 15.3-1 et définition : La proposition précédente montre que pour tout faisceau \mathcal{F} de \mathbf{A} -modules, le complexe des faisceaux de cochaînes de Čech $(\check{\mathcal{C}}^*(\mathcal{U}; \mathcal{F}))$ muni de l'augmentation $\varepsilon(\mathcal{F}) : \mathcal{F} \rightarrow (\check{\mathcal{C}}^*(\mathcal{U}; \mathcal{F}), d(\mathcal{U}; \mathcal{F})_*)$, est une *résolution* du faisceau \mathcal{F} , et ceci **quel que soit le recouvrement \mathcal{U} considéré**. On appelle parfois cette résolution « la résolution de \mathcal{F} par le recouvrement (ouvert) \mathcal{U} ».

15.3.1 Cohomologie de Čech de faisceaux relative à un recouvrement et cohomologie de faisceaux

Dans la section 13.3.6 du chapitre précédent nous avons montré l'existence d'un morphisme canonique, noté Ξ , entre la cohomologie des sections d'une résolution d'un faisceau \mathcal{F} de \mathbf{A} -modules, et sa cohomologie de faisceaux. Le théorème 13.3.6-1 donnait une condition garantissant la bijectivité de Ξ (l'acyclicité des termes de la résolution). Dans le cas de la résolution par un recouvrement, le morphisme Ξ relie la cohomologie de Čech de \mathbf{X} à valeurs dans \mathcal{F} relative au recouvrement considéré, à la cohomologie de faisceaux sur \mathbf{X} du faisceau \mathcal{F} ; le théorème suivant donne une condition permettant de garantir la bijectivité de Ξ dans ce cas.

Théorème 15.3.1-1 [Leray] : Soit \mathcal{F} un faisceau de \mathbf{A} -modules sur un espace topologique \mathbf{X} . Soit $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ un recouvrement ouvert de \mathbf{X} et $\varepsilon(\mathcal{F}) : \mathcal{F} \rightarrow (\check{\mathcal{C}}^*(\mathcal{U}; \mathcal{F}), d(\mathcal{U}; \mathcal{F})_*)$ la résolution de \mathcal{F} par \mathcal{U} . Le morphisme canonique reliant la cohomologie de Čech de \mathcal{F} à sa cohomologie de faisceaux :

$$\Xi_* : \check{H}^*(\mathcal{U}; \mathcal{F}) \longrightarrow H^*(\mathbf{X}; \mathcal{F}),$$

est un *isomorphisme* lorsque le faisceau \mathcal{F} est $\Gamma(U_{\alpha_0 \dots \alpha_p}, -)$ -acyclique, pour tout $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ et tout $(\alpha_0, \dots, \alpha_p) \in \mathfrak{A}^{p+1}$.

Démonstration : Considérons la résolution flasque canonique de Godement de \mathcal{F} :

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varepsilon(\mathcal{F})} \mathcal{C}^0(\mathcal{F}) \xrightarrow{d_0(\mathcal{F})} \mathcal{C}^1(\mathcal{F}) \xrightarrow{d_1(\mathcal{F})} \mathcal{C}^2(\mathcal{F}) \xrightarrow{d_2(\mathcal{F})} \dots,$$

et appliquons le foncteur résolution par \mathcal{U} à chacun de ses termes. On obtient alors le bicomplexe de faisceaux de \mathbf{A} -modules de colonnes exactes (d'après le théorème 15.3-1) :

$$\begin{array}{cccccccc} & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \rightarrow & \check{\mathcal{C}}^2(\mathcal{U}; \mathcal{F}) & \longrightarrow & \check{\mathcal{C}}^2(\mathcal{U}; \mathcal{C}^0(\mathcal{F})) & \longrightarrow & \check{\mathcal{C}}^2(\mathcal{U}; \mathcal{C}^1(\mathcal{F})) & \longrightarrow & \check{\mathcal{C}}^2(\mathcal{U}; \mathcal{C}^2(\mathcal{F})) & \rightarrow & \dots \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \rightarrow & \check{\mathcal{C}}^1(\mathcal{U}; \mathcal{F}) & \longrightarrow & \check{\mathcal{C}}^1(\mathcal{U}; \mathcal{C}^0(\mathcal{F})) & \longrightarrow & \check{\mathcal{C}}^1(\mathcal{U}; \mathcal{C}^1(\mathcal{F})) & \longrightarrow & \check{\mathcal{C}}^1(\mathcal{U}; \mathcal{C}^2(\mathcal{F})) & \rightarrow & \dots \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \rightarrow & \check{\mathcal{C}}^0(\mathcal{U}; \mathcal{F}) & \longrightarrow & \check{\mathcal{C}}^0(\mathcal{U}; \mathcal{C}^0(\mathcal{F})) & \longrightarrow & \check{\mathcal{C}}^0(\mathcal{U}; \mathcal{C}^1(\mathcal{F})) & \longrightarrow & \check{\mathcal{C}}^0(\mathcal{U}; \mathcal{C}^2(\mathcal{F})) & \rightarrow & \dots \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ 0 & \rightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{C}^0(\mathcal{F}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^1(\mathcal{F}) & \longrightarrow & \mathcal{C}^2(\mathcal{F}) & \rightarrow & \dots \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

Comme les colonnes au-dessus des faisceaux flasques de Godement sont des résolutions *flasques* des faisceaux $\mathcal{C}^p(\mathcal{F})$, l'application du foncteur des sections globales : $\Gamma(\mathbf{X}; -)$ fournira des colonnes exactes. Il s'ensuit que la cohomologie du bicomplexe $\Gamma(\mathbf{X}; \check{\mathcal{C}}^\bullet(\mathcal{U}; \mathcal{C}^*(\mathcal{F})))$ est *canoniquement isomorphe* à la cohomologie de faisceaux de \mathcal{F} .

Considérons maintenant chaque ligne $0 \rightarrow \Gamma(\mathbf{X}; \check{\mathcal{C}}^p(\mathcal{U}; \mathcal{F})) \rightarrow \Gamma(\mathbf{X}; \check{\mathcal{C}}^p(\mathcal{U}; \mathcal{C}^*(\mathcal{F})))$. On a, par définition :

$$\Gamma(\mathbf{X}; \check{\mathcal{C}}^p(\mathcal{U}; \mathcal{C}^*(\mathcal{F}))) = \prod_{\alpha_0, \dots, \alpha_p} \Gamma(U_{\alpha_0 \dots \alpha_p}; \mathcal{C}^*(\mathcal{F}))$$

et la cohomologie de ces lignes est précisément le produit des cohomologies de faisceaux : $H^*(U_{\alpha_0 \dots \alpha_p}; \mathcal{F})$. On voit donc bien que si \mathcal{F} est $\Gamma(U_{\alpha_0 \dots \alpha_p}, -)$ -acyclique, pour tout $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ et tout $(\alpha_0, \dots, \alpha_p) \in \mathfrak{A}^{p+1}$, la cohomologie des sections globales de la première colonne, *i.e.* la cohomologie de Čech de \mathbf{X} à valeurs dans \mathcal{F} et relative à \mathcal{U} , sera canoniquement isomorphe à la cohomologie du bicomplexe $\Gamma(\mathbf{X}; \check{\mathcal{C}}^\bullet(\mathcal{U}; \mathcal{C}^*(\mathcal{F})))$, ce qui termine la démonstration du théorème. \blacksquare

Définition 15.3.1-1 : Un recouvrement ouvert \mathcal{U} de \mathbf{X} est dit « *acyclique* » pour le faisceau \mathcal{F} lorsque les conditions d'acyclicité énoncées par le théorème précédent sont satisfaites.

15.3.2 Cohomologie de Čech de faisceaux et cohomologie de faisceaux

Préfaisceau de cohomologie de faisceaux associé à un faisceau

Soit \mathcal{F} un faisceau de \mathbf{A} -modules. Nous avons défini sa cohomologie de faisceaux au-dessus d'un ouvert $U \subseteq \mathbf{X}$ comme la cohomologie du complexe de \mathbf{A} -modules : $\Gamma(U; (\mathcal{C}^*(\mathcal{F}), d(\mathcal{F})_*))$, il en découle pour toute paire emboîtée d'ouverts $V \subseteq U$, un morphisme de complexes « de restriction » $\rho_V^U : \Gamma(U; (\mathcal{C}^*(\mathcal{F}), d(\mathcal{F})_*)) \rightarrow \Gamma(V; (\mathcal{C}^*(\mathcal{F}), d(\mathcal{F})_*))$ d'où un morphisme de restriction de cohomologie de faisceaux :

$$H^*(\rho_V^U) : H^*(U; \mathcal{F}) \rightarrow H^*(V; \mathcal{F}).$$

Pour chaque $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, la correspondance $U \rightsquigarrow H^p(U; \mathcal{F})$, jointe aux morphismes $H^p(\rho_V^U)$ définit un **préfaisceau** sur \mathbf{X} que nous noterons $\mathcal{H}^p(\mathcal{F})$.

Les considérations qui précèdent s'appliquent également à l'augmentation $\varepsilon : \mathcal{F} \rightarrow (\mathcal{C}^*(\mathcal{F}), d(\mathcal{F}))$ d'où un morphisme canonique de préfaisceaux $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{H}^0(\mathcal{F})$ qui est un *isomorphisme* en raison de l'exactitude à gauche des foncteurs de sections au-dessus des ouverts.

Proposition 15.3.2-1 : Soit \mathcal{F} un faisceau de \mathbf{A} -modules.

- Le préfaisceau $\mathcal{H}^0(\mathcal{F})$ est canoniquement isomorphe à \mathcal{F} .
- Pour chaque entier naturel positif p , le faisceau associé au préfaisceau $\mathcal{H}^p(\mathcal{F})$ est le faisceau nul.

Démonstration : L'assertion (a) est claire et (b) résulte de montrer que les germes des préfaisceaux $\mathcal{H}^q(\mathcal{F})$ sont nuls, ce qui est équivalent à l'exactitude, dans la catégorie de faisceaux, de la résolution canonique de Godement. ■

Reprenons maintenant les arguments de la démonstration du théorème 15.3.1-1. Rappelons que \mathcal{F} désigne un faisceau de \mathbf{A} -modules et que \mathcal{U} est un recouvrement ouvert de \mathbf{X} . Dans cette démonstration, nous avons remarqué l'existence d'un isomorphisme canonique entre la cohomologie du bicomplexe $\Gamma(\mathbf{X}; \check{\mathcal{C}}^\bullet(\mathcal{U}; \mathcal{C}^*(\mathcal{F})))$ et la cohomologie de faisceaux de \mathcal{F} . Si nous filtrons le bicomplexe $\Gamma(\mathbf{X}; \check{\mathcal{C}}^\bullet(\mathcal{U}; \mathcal{C}^*(\mathcal{F})))$ par ses lignes, on obtient une suite spectrale dont les termes $\mathbb{E}_1^{*,q}$ constituent précisément le complexe ce cochaînes de Čech à valeurs dans le préfaisceau $\mathcal{H}^q(\mathcal{F})$ et relatives au recouvrement \mathcal{U} , on a par conséquent :

$$\mathbb{E}_2^{p,q} \equiv \check{H}^p(\mathcal{U}; \mathcal{H}^q(\mathcal{F})),$$

et comme le bicomplexe est borné à gauche, cette suite spectrale converge vers la cohomologie du bicomplexe, donc vers la cohomologie de faisceaux de \mathcal{F} .

On vérifie également que si \mathcal{U}' est un raffinement de \mathcal{U} , le morphisme de raffinement entre les différentes colonnes des bicomplexes $\Gamma(\mathbf{X}; \check{\mathcal{C}}^\bullet(\mathcal{U}; \mathcal{C}^*(\mathcal{F})))$ et $\Gamma(\mathbf{X}; \check{\mathcal{C}}^\bullet(\mathcal{U}'; \mathcal{C}^*(\mathcal{F})))$ est un morphisme de *bicomplexes* et induit un isomorphisme (canonique) entre les termes $\mathbb{E}_2^{p,q}$ des suites spectrales associées. En particulier, le passage à la limite inductive (suivant les recouvrements) des morphismes au niveau des termes \mathbb{E}_2 donne lieu à une suite spectrale :

$$\boxed{\mathbb{E}_2^{p,q} = \check{H}^p(\mathbf{X}; \mathcal{H}^q(\mathcal{F})) \implies H^{p+q}(\mathbf{X}; \mathcal{F})}$$

le théorème suivant se trouve ainsi démontré.

Théorème 15.3.2-2 [Leray] : Soit \mathcal{F} un faisceau de A -modules sur X .

a) Pour tout recouvrement \mathcal{U} de X , il existe une suite spectrale convergeant vers la cohomologie de faisceaux au-dessus de X de \mathcal{F} :

$$\mathbb{E}_2^{p,q} \equiv \check{H}^p(\mathcal{U}; \mathcal{H}^q(\mathcal{F})) \implies H^{p+q}(X; \mathcal{F}).$$

b) Il existe une suite spectrale convergeant vers la cohomologie de faisceaux au-dessus de X de \mathcal{F}

$$\mathbb{E}_2^{p,q} \equiv \check{H}^p(X; \mathcal{H}^q(\mathcal{F})) \implies H^{p+q}(X; \mathcal{F}).$$

Corollaire 15.3.2-3 : Soit X un espace topologique séparé et paracompact. La cohomologie de Čech d'un faisceau \mathcal{F} de A -modules est canoniquement isomorphe à la cohomologie de faisceaux de \mathcal{F} au-dessus de X .

Démonstration : Le théorème d'annulation de la cohomologie de Čech pour les préfaisceaux localement nuls (cf. 12.8-1) appliqué aux préfaisceaux $\mathcal{H}^p(\mathcal{F})$, pour $p > 0$ (cf. 15.3.2-1) montre que les termes $\mathbb{E}_2^{p,q}$ du théorème 15.3.2-2-(b) sont nuls pour tout $q > 0$. Il s'ensuit un isomorphisme (degré par degré) entre $\check{H}^p(X; \mathcal{H}^0(\mathcal{F}))$ et $H^p(X; \mathcal{F})$ et comme $\mathcal{F} \equiv \mathcal{H}^0(\mathcal{F})$ (d'après 15.3.2-1), le corollaire résulte. ■

Corollaire 15.3.2-4 : Sur une variété différentiable séparée et paracompacte, la cohomologie de Čech et la cohomologie de faisceaux sont canoniquement isomorphes.

Remarque 15.3.2-1 : Dans le cas d'une variété différentiable M la cohomologie de faisceaux du faisceau constant $\underline{\mathbb{R}}_M$ sur un domaine de carte est concentrée en degré nul. Ceci signifie que tout bon recouvrement \mathcal{U} de M est acyclique pour le faisceau $\underline{\mathbb{R}}_X$ et, suite au théorème 15.3.1-1, que la cohomologie de Čech de M à valeurs dans $\underline{\mathbb{R}}_M$ et relative à \mathcal{U} est canoniquement isomorphe à la cohomologie de faisceaux sur M de $\underline{\mathbb{R}}_M$ et ceci **indépendamment du fait que M possède ou non des partitions de l'unité**. Comme les bons recouvrements constituent une famille cofinale dans la famille de tous les recouvrements tautologiques de M (cf. section 12.3), on a :

$$\boxed{\check{H}^*(M; \underline{\mathbb{R}}_M) \equiv H^*(M; \underline{\mathbb{R}}_M)}$$

Lorsque M possède des partitions de l'unité, l'isomorphisme ci-dessus est plus généralement vrai pour n'importe quel faisceau de modules et pas uniquement pour $\underline{\mathbb{R}}_M$. D'autre part, le théorème 13.3.7-2 montre que la cohomologie du complexe des formes différentielles (globales) sur M calcule la cohomologie de faisceaux de $\underline{\mathbb{R}}_M$. Il en découle, dans ce cas, un isomorphisme canonique entre les cohomologies de Čech du faisceau $\underline{\mathbb{R}}_X$, et la cohomologie de de Rham de M (pour sa définition naïve).

Dans le cas où M ne possède pas de partitions de l'unité, seule l'hypercohomologie du complexe des faisceaux des formes différentielles sur M sera, *a priori*, isomorphe à la cohomologie de faisceaux de $\underline{\mathbb{R}}_M$ et donc à la cohomologie de Čech du faisceau $\underline{\mathbb{R}}_M$ relativement à un bon recouvrement de M .

15.4 Cohomologie singulière d'une variété différentiable

Pour chaque $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, notons Δ_p l'enveloppe convexe des vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^{p+1} munie de la topologie induite; on l'appelle «*le p -simplexe standard*».

Soit \mathbf{X} un espace topologique et soit \mathbf{A} un anneau. On notera $S_p(\mathbf{X}; \mathbf{A})$ le \mathbf{A} -module libre ayant comme base les « *p -simplexes singuliers de \mathbf{X}* », *i.e.* les applications continues $\sigma : \Delta_p \rightarrow \mathbf{X}$. On définit alors un morphisme «*bord*» $\delta(\mathbf{X})_p : S_p(\mathbf{X}; \mathbf{A}) \rightarrow S_{p-1}(\mathbf{X}; \mathbf{A})$, en posant, pour chaque p -simplexe singulier σ

$$\delta(\mathbf{X})_p(\sigma) = \sum_{k=0, \dots, p} (-1)^k \sigma \circ f_p^k,$$

où $f_{p-1}^k : \Delta_{p-1} \rightarrow \Delta_p$ est l'application «*face*» que nous avons déjà définie dans 12.1.3, mais interprétée maintenant comme application continue entre simplexes standard. On a $\delta_{p-1} \circ \delta_p = 0$, d'où «*le complexe $(S_\bullet(\mathbf{X}), \delta_\bullet)$ des chaînes singulières à coefficients dans \mathbf{A}* ». Le complexe dual $(S^\bullet(\mathbf{X}; \mathbf{A}), d(\mathbf{X})_\bullet) := \text{Hom}_{\mathbf{A}}((S_\bullet(\mathbf{X}; \mathbf{A}), \delta(\mathbf{X})_\bullet); \mathbf{A})$ est «*le complexe de cochaînes singulières de \mathbf{X} à coefficients dans \mathbf{A}* ». La cohomologie de ce dernier est «*la cohomologie singulière de \mathbf{X} à coefficients dans \mathbf{A}* ».

Lorsque l'on se donne deux parties ouvertes $V \subseteq U \subseteq \mathbf{X}$, tout p -simplexe singulier de V est également une application continue à valeurs dans U et définit donc un p -simplexe singulier de U . Nous avons donc un morphisme canonique (et injectif) $S_p(V; \mathbf{A}) \hookrightarrow S_p(U; \mathbf{A})$, pour chaque $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. On vérifie aisément que le bord d'une chaîne singulière sur V est également le bord de la même chaîne vue dans U ; la famille de morphismes $S_p(V; \mathbf{A}) \hookrightarrow S_p(U; \mathbf{A})$, pour $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, définit donc un morphisme de complexes $(S_*(V; \mathbf{A}), \delta(V)_*) \hookrightarrow (S_*(U; \mathbf{A}), \delta(U)_*)$. En dualisant on obtient un morphisme de complexes de cochaînes singulières dit «*de restriction*» $(S^*(U; \mathbf{A}), d(U)_*) \rightarrow (S^*(V; \mathbf{A}), d(V)_*)$. La correspondance :

$$(U \subseteq \mathbf{X}) \rightsquigarrow (S^*(U; \mathbf{A}), d(U)_*)$$

jointe aux morphismes de restriction, définit un préfaisceau de complexes de \mathbf{A} -modules sur \mathbf{X} , noté $(\underline{S}_{\mathbf{X}; \mathbf{A}}^*, \underline{d}_*)$.

Ceci étant, une 0-chaîne σ sur une partie ouverte U est une somme formelle de points de U avec des coefficients dans \mathbf{A} , *i.e.* $\sigma = \sum_{i=1}^{i=r} a_i x_i$, où $a_i \in \mathbf{A}$ et $x_i \in U$; on a $S_0(U) = \bigoplus_{x \in U} \mathbf{A}$ et donc

$$S^0(U; \mathbf{A}) = \text{Hom}_{\mathbf{A}}\left(\bigoplus_{x \in U} \mathbf{A}; \mathbf{A}\right) \cong \prod_{x \in U} \mathbf{A} = \Gamma(U; \mathcal{C}^0(\underline{\mathbf{A}}_{\mathbf{X}}))$$

de sorte que le préfaisceau $\underline{S}_{\mathbf{X}; \mathbf{A}}^0$ est le faisceau flasque de Godement associé au faisceaux des fonctions localement constantes $\underline{\mathbf{A}}_{\mathbf{X}}$.

Une forme linéaire $\lambda \in \text{Hom}_{\mathbf{A}}(S_0(U; \mathbf{A}); \mathbf{A})$ est un 0-cocycle lorsque l'on a $\lambda(\delta_1(\sigma)) = 0$ pour toute 1-chaîne singulière. Or, come la forme linéaire λ est déterminée par ses valeurs sur la base des 0-simplexes singuliers $\{x\}_{x \in U}$, elle devra donc satisfaire à l'égalité :

$$\lambda(\delta_1(\sigma)) = \sum_{i=1, \dots, r} a_i [\lambda(\sigma_i(E_0)) - (\sigma_i(E_1))],$$

où Σ désigne une 1-chaine singulière $\Sigma = \sum_{i=1}^{i=r} a_i \sigma_i$, et où E_0 et E_1 désignent les sommets de Δ_1 . On vérifie alors que si deux points $x, y \in U$ se trouvent sur la même composante connexe par arcs de U et si l'on note $\gamma : \Delta_1 \rightarrow U$ un chemin reliant x à y , on aura $\delta_1(\gamma) = y - x$ et donc le cocycle λ est contraint de vérifier $\lambda(x) = \lambda(y)$. Un 0-cocycle sur U s'identifie donc à une fonction constante sur chaque composante connexe par arcs de U . Supposons, à partir de maintenant que \mathbf{X} est **localement connexe**. Les 0-cocycles sur un ouvert U s'identifient alors aux fonctions localement constantes; on en déduit que le préfaisceau noyau du morphisme $d_0 : \underline{S}_{\mathbf{X};\mathbf{A}}^0 \rightarrow \underline{S}_{\mathbf{X};\mathbf{A}}^1$ est le **faisceau** $\underline{\mathbf{A}}_{\mathbf{X}}$. Le complexe des préfaisceaux sur \mathbf{X} des cochaînes singulières à coefficients dans \mathbf{A} se trouve ainsi muni d'une augmentation canonique :

$$\mathbf{0} \rightarrow \underline{\mathbf{A}}_{\mathbf{X}} \xrightarrow{\underline{\varepsilon}} (\underline{S}_{\mathbf{X};\mathbf{A}}^*, \underline{d}_*)$$

Pour chaque $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, notons $\underline{S}_{\mathbf{X};\mathbf{A}}^p$ le faisceau associé au préfaisceau $\underline{S}_{\mathbf{X};\mathbf{A}}^p$. Le caractère fonctoriel de l'opération de faisceautisation appliquée aux considérations des paragraphes précédents, donne lieu au complexe **de faisceaux** $(\underline{S}_{\mathbf{X};\mathbf{A}}^*, \underline{d}_*)$ et à l'augmentation :

$$\mathbf{0} \rightarrow \underline{\mathbf{A}}_{\mathbf{X}} \xrightarrow{\underline{\varepsilon}} (\underline{S}_{\mathbf{X};\mathbf{A}}^*, \underline{d}_*)$$

Proposition 15.4-1 : *Soit \mathbf{X} un espace topologique localement contractile (une variété topologique par exemple).*

- a) *Le complexe de faisceaux $(\underline{S}_{\mathbf{X};\mathbf{A}}^*, \underline{d}_*)$ muni de l'augmentation $\underline{\varepsilon}$ est une résolution du faisceau $\underline{\mathbf{A}}_{\mathbf{X}}$.*
- b) *Lorsque \mathbf{X} est une variété différentiable admettant des partitions de l'unité, chaque faisceau $\underline{S}_{\mathbf{X};\mathbb{R}}^p$ est Γ -acyclique. En particulier, la cohomologie de faisceaux de $\underline{\mathbb{R}}_{\mathbf{X}}$ est canoniquement isomorphe à la cohomologie du complexe des sections globales de $(\underline{S}_{\mathbf{X};\mathbb{R}}^*, \underline{d}_*)$.*

Démonstration :

- a) Se démontre comme le corollaire 13.2.1-3 en faisant une étude au niveau des germes. Comme les germes des faisceaux $\underline{S}_{\mathbf{X};\mathbf{A}}^p$ sont ceux des préfaisceaux $\underline{S}_{\mathbf{X};\mathbf{A}}^p$, un germe de p -cocycle en un point $x \in \mathbf{X}$ est représenté par un p -cocycle de $S^p(U; \mathbf{A})$, où U désigne un voisinage ouvert de x . Comme \mathbf{X} est supposé localement contractile, on peut prendre l'ouvert U contractile, la trivialité de la cohomologie singulière des espaces contractiles assure alors que le germe de cocycle en question est un germe de cobord.
- b) D'après la proposition 13.3.8-1, il suffira de munir les faisceaux $\underline{S}_{\mathbf{X};\mathbb{R}}^p$ d'une structure de $\underline{\Omega}_{\mathbf{X}}^0$ -module.

Le faisceau $\underline{S}_{\mathbf{X};\mathbb{R}}^0$. Nous avons déjà remarqué que le faisceau $\underline{S}_{\mathbf{X};\mathbb{R}}^0$ est le faisceau flasque de Godement $\mathcal{C}^0(\underline{\mathbb{R}}_{\mathbf{X}})$. Les sections de ce faisceau au-dessus d'un ouvert $U \subseteq \mathbf{X}$ s'identifient aux applications de U à valeurs dans \mathbb{R} (sans aucune condition de continuité). D'autre part, $\mathcal{C}^0(\underline{\mathbb{R}}_{\mathbf{X}})$ est un faisceau d'anneaux et l'inclusion $\underline{\Omega}_{\mathbf{X}}^0 \subseteq \underline{S}_{\mathbf{X};\mathbb{R}}^0$ est alors un morphisme de faisceaux d'anneaux. En particulier, $\underline{S}_{\mathbf{X};\mathbb{R}}^0$ est bien un $\underline{\Omega}_{\mathbf{X}}^0$ -module.

Les faisceaux $\underline{S}_{\mathbf{X};\mathbb{R}}^p$, pour $p > 0$. La structure de $\underline{\Omega}_{\mathbf{X}}^0$ -module sera définie dans un premier temps sur le préfaisceau $\underline{S}_{\mathbf{X};\mathbb{R}}^p$, le procédé de faisceautisation induira alors une structure de $\underline{\Omega}_{\mathbf{X}}^0$ -module sur $\underline{S}_{\mathbf{X};\mathbb{R}}^p$. Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^∞ de \mathbf{X} . Une p -cochaîne singulière est une forme linéaire λ du \mathbb{R} -espace vectoriel

$S_p(U; \mathbb{R})$, elle est donc déterminée par les scalaires $\lambda(\sigma)$ où σ est une application continue $\sigma : \Delta_p \rightarrow \mathbf{X}$. Notons E_0 le premier sommet de Δ_p (par rapport à l'ordre naturel de la base canonique de \mathbb{R}^{p+1}); on définit alors $f \cdot \lambda$ comme la cochaîne singulière vérifiant :

$$(f \cdot \lambda)(\sigma) = f(\sigma(E_0)) \lambda(\sigma),$$

et l'on vérifie aisément que ce procédé donne bien une structure de $\Omega^0(U)$ -module pour $S^p(U; \mathbb{R})$, pour chaque ouvert $U \subseteq \mathbf{X}$, qui est compatible aux morphismes de restriction d'ouverts. ■

A partir de maintenant M désignera une variété différentiable. Nous avons montré dans 15.3.2-4 que lorsque M *admet des partitions de l'unité* la cohomologie de faisceaux sur M est canoniquement isomorphe à la cohomologie de Čech. Par conséquent, et suite à la proposition précédente, la cohomologie de Čech des faisceaux $\underline{S}_{M; \mathbb{R}}^p$ sera nulle en degrés positifs. Le théorème 12.8-2 montre alors que la cohomologie de Čech des **préfaisceaux** $\underline{S}_{M; \mathbb{R}}^p$ est également nulle en degrés positifs.

Soit \mathcal{U} un bon recouvrement pour M et considérons le bicomplexe de cochaînes de Čech :

$$\begin{array}{ccccccc} & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ \mathbf{0} & \rightarrow & \check{C}^2(\mathcal{U}; \underline{\mathbb{R}}_M) & \longrightarrow & \check{C}^2(\mathcal{U}; \underline{S}_{M; \mathbb{R}}^0) & \longrightarrow & \check{C}^2(\mathcal{U}; \underline{S}_{M; \mathbb{R}}^1) & \longrightarrow & \check{C}^2(\mathcal{U}; \underline{S}_{M; \mathbb{R}}^2) & \rightarrow \dots & \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ \mathbf{0} & \rightarrow & \check{C}^1(\mathcal{U}; \underline{\mathbb{R}}_M) & \longrightarrow & \check{C}^1(\mathcal{U}; \underline{S}_{M; \mathbb{R}}^0) & \longrightarrow & \check{C}^1(\mathcal{U}; \underline{S}_{M; \mathbb{R}}^1) & \longrightarrow & \check{C}^1(\mathcal{U}; \underline{S}_{M; \mathbb{R}}^2) & \rightarrow \dots & \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ \mathbf{0} & \rightarrow & \check{C}^0(\mathcal{U}; \underline{\mathbb{R}}_M) & \longrightarrow & \check{C}^0(\mathcal{U}; \underline{S}_{M; \mathbb{R}}^0) & \longrightarrow & \check{C}^0(\mathcal{U}; \underline{S}_{M; \mathbb{R}}^1) & \longrightarrow & \check{C}^0(\mathcal{U}; \underline{S}_{M; \mathbb{R}}^2) & \rightarrow \dots & \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \end{array}$$

Chaque ligne est un produit de complexes (augmentés) de cochaînes singulières d'ouverts contractiles de M , elle est donc exacte et la cohomologie du bicomplexe est nulle. En particulier, la cohomologie de la première colonne est isomorphe à la cohomologie du bicomplexe $(\check{C}^\bullet(\mathcal{U}; S_{M; \mathbb{R}}^*))$. Mais la cohomologie de la première colonne est indépendante du bon recouvrement \mathcal{U} considéré, c'est la cohomologie de faisceaux (et donc de Čech) de $\underline{\mathbb{R}}_M$ (cf. 15.3.1-1, 15.3.2-4) et c'est également la cohomologie de de Rham de M (cf. 13.3.7-2). Nous pouvons par conséquent considérer la limite des bicomplexes $(\check{C}^\bullet(\mathcal{U}; S_{M; \mathbb{R}}^*))$ suivant la catégorie des recouvrements pointés pour obtenir le bicomplexe de cochaînes de Čech de M :

$$\begin{array}{ccccccc} & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ \mathbf{0} & \rightarrow & \check{C}^2(M; \underline{S}_{M; \mathbb{R}}^0) & \longrightarrow & \check{C}^2(M; \underline{S}_{M; \mathbb{R}}^1) & \longrightarrow & \check{C}^2(M; \underline{S}_{M; \mathbb{R}}^2) & \longrightarrow & \check{C}^2(M; \underline{S}_{M; \mathbb{R}}^3) & \rightarrow \dots & \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ \mathbf{0} & \rightarrow & \check{C}^1(M; \underline{S}_{M; \mathbb{R}}^0) & \longrightarrow & \check{C}^1(M; \underline{S}_{M; \mathbb{R}}^1) & \longrightarrow & \check{C}^1(M; \underline{S}_{M; \mathbb{R}}^2) & \longrightarrow & \check{C}^1(M; \underline{S}_{M; \mathbb{R}}^3) & \rightarrow \dots & \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ \mathbf{0} & \rightarrow & \check{C}^0(M; \underline{S}_{M; \mathbb{R}}^0) & \longrightarrow & \check{C}^0(M; \underline{S}_{M; \mathbb{R}}^1) & \longrightarrow & \check{C}^0(M; \underline{S}_{M; \mathbb{R}}^2) & \longrightarrow & \check{C}^0(M; \underline{S}_{M; \mathbb{R}}^3) & \rightarrow \dots & \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \end{array}$$

dont la cohomologie est canoniquement isomorphe à la cohomologie de faisceaux de \mathbb{R}_M sur M .

En filtrant ce bicomplexe par les lignes, on obtient une suite spectrale vérifiant $\mathbb{E}_1^{p,q} \equiv \check{H}^p(\underline{S}_{M;\mathbb{R}}^q)$, en particulier $\mathbb{E}_1^{p,q} = \mathbf{0}$ pour tout $p > 0$. Les différentielles d_r de la suite spectrale seront alors nulles pour tout $r \geq 2$ et $\mathbb{E}_2 \equiv \mathbb{E}_\infty$. Il s'ensuit que la cohomologie du bicomplexe, est canoniquement isomorphe à la cohomologie du complexe défini par $(\mathbb{E}_1^{0,*}, d_1)$, *i.e.* le complexe :

$$\mathbf{0} \longrightarrow \check{H}^0(M; \underline{S}_{M;\mathbb{R}}^0) \longrightarrow \check{H}^0(M; \underline{S}_{M;\mathbb{R}}^1) \longrightarrow \check{H}^0(M; \underline{S}_{M;\mathbb{R}}^2) \longrightarrow \check{H}^0(M; \underline{S}_{M;\mathbb{R}}^3) \longrightarrow$$

qui n'est autre que le complexe limite des complexes :

$$\mathbf{0} \longrightarrow \check{H}^0(\mathcal{U}; \underline{S}_{M;\mathbb{R}}^0) \longrightarrow \check{H}^0(\mathcal{U}; \underline{S}_{M;\mathbb{R}}^1) \longrightarrow \check{H}^0(\mathcal{U}; \underline{S}_{M;\mathbb{R}}^2) \longrightarrow \check{H}^0(\mathcal{U}; \underline{S}_{M;\mathbb{R}}^3) \longrightarrow$$

où \mathcal{U} est un recouvrement ouvert de M .

Observons maintenant que pour chaque recouvrement \mathcal{U} de M , on a un morphisme de complexes (lié aux augmentations des complexes de Čech) :

$$\begin{array}{ccccccccccc} \mathbf{0} & \longrightarrow & \check{H}^0(\mathcal{U}; \underline{S}_{M;\mathbb{R}}^0) & \longrightarrow & \check{H}^0(\mathcal{U}; \underline{S}_{M;\mathbb{R}}^1) & \longrightarrow & \check{H}^0(\mathcal{U}; \underline{S}_{M;\mathbb{R}}^2) & \longrightarrow & \check{H}^0(\mathcal{U}; \underline{S}_{M;\mathbb{R}}^3) & \longrightarrow & \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & (\ddagger) \\ \mathbf{0} & \longrightarrow & \underline{S}^0(M; \mathbb{R}) & \longrightarrow & \underline{S}^1(M; \mathbb{R}) & \longrightarrow & \underline{S}^2(M; \mathbb{R}) & \longrightarrow & \underline{S}^3(M; \mathbb{R}) & \longrightarrow & \end{array}$$

L'équivalence entre la cohomologie singulière à coefficients dans \mathbb{R} d'une variété différentiable et sa cohomologie de de Rham découle du fait que les morphismes de complexes (\ddagger) *sont des quasi-isomorphismes*. Plus généralement, on a :

Théorème 15.4-2 : *Pour tout espace topologique X , tout recouvrement ouvert \mathcal{U} de X , et tout anneau A , le morphisme de complexes :*

$$\begin{array}{ccccccccccc} \mathbf{0} & \longrightarrow & \check{H}^0(\mathcal{U}; \underline{S}_{X;A}^0) & \longrightarrow & \check{H}^0(\mathcal{U}; \underline{S}_{X;A}^1) & \longrightarrow & \check{H}^0(\mathcal{U}; \underline{S}_{X;A}^2) & \longrightarrow & \check{H}^0(\mathcal{U}; \underline{S}_{X;A}^3) & \longrightarrow & \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ \mathbf{0} & \longrightarrow & \underline{S}^0(X; A) & \longrightarrow & \underline{S}^1(X; A) & \longrightarrow & \underline{S}^2(X; A) & \longrightarrow & \underline{S}^3(X; A) & \longrightarrow & \end{array}$$

est un quasi-isomorphisme.

Démonstration : Nous allons seulement esquisser l'idée de la démonstration ; le lecteur désireux de plus de précisions pourra se reporter au chapitre 4 de [Spa], notamment le théorème 4.4.14 (page 178).

Notons $S_p(\mathcal{U}; A)$ le A -module libre admettant comme base l'ensemble des p -simplexes singuliers $\sigma : \Delta_p \rightarrow X$ vérifiant $\sigma(\Delta_p) \subseteq U$ pour un certain $U \in \mathcal{U}$. On a trivialement $S_p(\mathcal{U}; A) \subseteq S_p(X; A)$ et il est clair que le bord d'une chaîne singulière $\sigma \in S_p(\mathcal{U}; A)$ appartient à $S_{p-1}(\mathcal{U}; A)$. On note alors $(S_*(\mathcal{U}; A), \delta_*)$ le sous-complexe de $(S_*(X; A), \delta_*)$ ainsi obtenu.

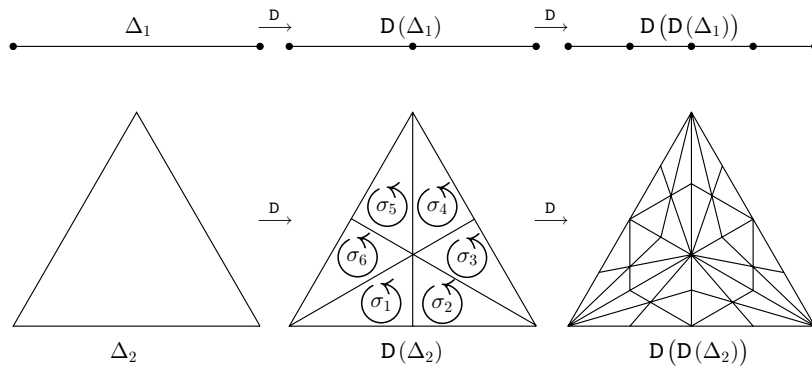
Posons $(S^*(\mathcal{U}; A), d_*)$ le complexe dual de $(S_*(\mathcal{U}; A), \delta_*)$. On a (en dualisant l'inclusion des complexes de chaînes) une surjection de complexes $\Xi : (S^*(X; A), d_*) \rightarrow (S^*(\mathcal{U}; A), d_*)$.

Remarque 1. Pour chaque $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, le A -module $S^p(\mathcal{U}; A)$ s'identifie canoniquement à $\check{H}^0(\mathcal{U}; \underline{S}_{X;A}^*)$ et, sous cette identification, le morphisme de complexes Ξ s'identifie à (\ddagger) .

En effet, posons $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$. Un élément de $\check{H}^0(\mathcal{U}; S_{\mathbf{X}; \mathbf{A}}^p)$ est une famille $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ de formes linéaires $\lambda_\alpha \in \text{Hom}_{\mathbf{A}}(S_p(U_\alpha; \mathbf{A}); \mathbf{A})$ telle que, pour toute paire d'indices $(\alpha, \beta) \in \mathfrak{A}^2$, les formes λ_α et λ_β prennent les mêmes valeurs sur les simplexes singuliers de $U_{\alpha\beta}$. Or, ceci équivaut très précisément à se donner une forme linéaire sur $S_p(\mathcal{U}; \mathbf{A})$. L'identification des complexes est laissée aux soins du lecteur.

Remarque 2. Le fait que Ξ est un quasi-isomorphisme est conséquence du fait que l'inclusion de complexes de chaînes $(S_*(\mathcal{U}; \mathbf{A}), \delta_*) \subseteq (S_*(\mathbf{X}; \mathbf{A}), \delta_*)$ est déjà un quasi-isomorphisme (⁵³). Ceci résulte de ce que, pour chaque $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, tout **simplexe** singulier $S_p(\mathbf{X}; \mathbf{A})$ est homologue, dans $(S_*(\mathbf{X}; \mathbf{A}), \delta_*)$, à une **chaîne** singulière de $S_p(\mathcal{U}; \mathbf{A})$. La vérification de cette dernière assertion passe par deux observations.

1) **La division barycentrique des simplexes standard.** (*loc. cit.* pages 123–124.) Il s'agit de l'opération \mathcal{D} qui subdivise un p -simplexe standard en réunion de p -simplexes standard plus petits. Plutôt que de donner la définition précise, pour tout p , nous indiquons dans une illustration l'effet de l'opération en question sur les 1-simplexes et 2-simplexes.



La propriété de compacité de Δ_p intervient alors pour assurer que pour tout recouvrement ouvert \mathcal{V} de Δ_p il existe un entier r (suffisamment grand) tel que chaque simplexe de $\mathcal{D}^r(\Delta_p)$ est contenu dans au moins l'un des ouverts du recouvrement \mathcal{V} , et ceci en raison du fait que le diamètre des simplexes de $\mathcal{D}^r(\Delta_p)$ converge **uniformément** vers zéro lorsque r tend vers l'infini.

2) Les chaînes singulières définies par division barycentrique sont homologues au simplexe standard de départ. Par exemple, dans le cas de Δ_2 , on a :

$$\Delta_2 \sim \mathcal{D}(\Delta_2) := \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 + \sigma_5 + \sigma_6,$$

en particulier, si $f : \Delta_2 \rightarrow \mathbf{X}$ est une application continue, le simplexe singulier défini par f sera homologue à la chaîne singulière $\sum_{j=1}^6 f \circ \sigma_j$.

Reprenons maintenant l'inclusion de complexes de chaînes : $(S_*(\mathcal{U}; \mathbf{A}), \delta_*) \subseteq (S_*(\mathbf{X}; \mathbf{A}), \delta_*)$. Soit $f : \Delta_p \rightarrow \mathbf{X}$ un p -**simplexe** singulier de \mathbf{X} et notons $f^{-1}(\mathcal{U})$ le recouvrement de Δ_p obtenu et considérant les images inverses par f des ouverts de \mathcal{U} . D'après la remarque (1) ci-dessus, il existe $r \in \mathbb{N}$ assez grand tel que les simplexes de la subdivision $\mathcal{D}^r(\Delta_p)$ sont contenus dans des ouverts de $f^{-1}(\mathcal{U})$. La relation d'homologie rappelée dans (2) nous dit alors que $\Delta_p \sim \sum_{\sigma \in \mathcal{D}^r(\Delta_p)} \sigma$ de sorte que $f \sim \sum_{\sigma \in \mathcal{D}^r(\Delta_p)} f \circ \sigma$ et bien évidemment $f \circ \sigma \in S_p(\mathcal{U}; \mathbf{A})$ pour chaque $\sigma \in \mathcal{D}^r(\Delta_p)$. Il s'ensuit que comme une **chaîne** singulière ω de $S_p(\mathbf{X}; \mathbf{A})$ est une somme (finie) de **simplexes** singuliers, les homologies entre les simplexes de ω et des chaînes de $S_p(\mathcal{U}; \mathbf{A})$ donnent une homologie entre ω et une chaîne de $S_p(\mathcal{U}; \mathbf{A})$. ■

⁵³ Le faits que les \mathbf{A} -modules $(S_*(\mathcal{U}; \mathbf{A}), \delta_*)$ et $(S_*(\mathbf{X}; \mathbf{A}), \delta_*)$ soient **libres** et que les complexes soient bornés à gauche, garantissent la validité de cette affirmation.

Corollaire 15.4-3 : Soit M une variété différentiable admettant de partitions de l'unité. Il existe des isomorphismes canoniques entre la cohomologie de de Rham de M , la cohomologie singulière de M à coefficients dans \mathbb{R} , la cohomologie de Čech du faisceaux des fonctions localement constantes $\underline{\mathbb{R}}_M$ et la cohomologie de faisceaux de $\underline{\mathbb{R}}_M$.

—————×—————

§ 16. Schémas affines et variétés algébriques affines

Le but de ce chapitre est l'introduction des concepts de *schéma affine associé à un anneau commutatif* et de *variété algébrique affine*. Il s'agira d'*espaces topologiques annelés*, *i.e.* des espaces topologiques munis d'un faisceaux d'anneaux : leur *faisceaux structural*. Nous rappellerons les définitions classiques de manière comparative, à la fois pour montrer leur différences, mais aussi leurs similitudes en particulier dans le cas des algèbres de type fini sur un corps algébriquement clos. Enfin, nous introduirons la catégorie des (faisceaux de) modules quasi-cohérents et démontrerons le théorème d'acyclicité de Serre qui affirme qu'un module quasi-cohérent sur un schéma noëthérien affine ou sur une variété algébrique affine est acyclique pour le foncteur des sections globales sur la *catégorie des faisceaux de groupes abéliens*.

16.1 Espaces topologiques noëthériens

Un espace topologique Y est dit «*noëthérien*» lorsque toute suite décroissante de fermés est stationnaire, *i.e.* pour tout suite de fermés de $Y : Z_1 \supseteq Z_2 \supseteq Z_3 \supseteq \dots \supseteq Z_n \supseteq \dots$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $Z_N = Z_{N+h}$, pour tout $h \in \mathbb{N}$.

Remarque 16.1-1 : De manière duale : un espace topologique est noëthérien, si et seulement si, toute suite croissante d'ouverts est stationnaire.

Tout sous-ensemble d'un espace noëthérien (muni de la topologie induite) est également noëthérien.

Exercice 16.1-1 et définition : Démontrer que sur un espace topologique noëthérien Y , de tout recouvrement ouvert de Y , on peut extraire un sous-recouvrement *fini*. Les espaces topologiques vérifiant cette propriété sont appelés «*quasi-compacts*».

Prouver que Y est noëthérien, si et seulement si, tout ouvert de Y est quasi-compact.

Définition 16.1-1 : Un fermé $Z \subseteq Y$ est dit «*réductible*» lorsqu'il est réunion d'un nombre **fini** de fermés différents de Z lui-même, *i.e.* s'il existe $Z_1, Z_2, \dots, Z_r \subsetneq Z$ tels que $Z = Z_1 \cup Z_2 \cup \dots \cup Z_r$. Le fermé Z est dit «*irréductible*» dans le cas contraire.

Remarque 16.1-2 : L'adhérence d'un point est toujours un fermé irréductible. On retiendra dans la définition 16.1-1 que ce qui est essentiel, c'est le fait que l'on s'y intéresse aux recouvrements fermés «*finis*» ; autrement tout fermé est réunion des adhérences des points qu'il contient.

Exercice 16.1-2 : Montrer qu'un fermé Z est irréductible, si et seulement si, une inclusion de la forme :

$$Z \subseteq Z_1 \cup \dots \cup Z_r,$$

où les Z_i sont fermés, n'est possible que si Z est contenu dans au moins l'un des Z_i .

Définition 16.1-2 : On appelle «*décomposition fermée (resp. irréductible)*» d'un espace noethérien Y , toute famille finie $\{Z_1, \dots, Z_r\}$ de fermés (resp. irréductibles) de Y telle que :

$$\begin{cases} Y = Z_1 \cup \dots \cup Z_r; \text{ et} \\ Z_i \subseteq Z_j, \text{ si et seulement si, } i = j. \end{cases}$$

Lemme 16.1-1 (et définition) : *Tout espace topologique noethérien Y admet une décomposition irréductible, et une seule à indexation près. Les fermés irréductibles ainsi déterminés sont appelés «les composantes irréductibles de Y ».*

Démonstration :

- **Existence de décompositions irréductibles.** Commençons par observer que un fermé Z de Y , n'admettant pas de décomposition irréductible, est nécessairement réductible, mais aussi, que dans toute décomposition $Z = Z_1 \cup Z_2$, où $Z_1, Z_2 \subsetneq Z$, l'un au moins des Z_i n'admettra pas non plus de décomposition irréductible (faute de quoi des décompositions irréductibles des Z_i donneraient une telle décomposition pour Z). Par conséquent, si $Y =: Z_0$ n'admettait pas de décomposition irréductible, l'application de cette remarque permettrait de construire une suite *infinie et strictement décroissante* de fermés de Y n'admettant pas de décompositions irréductibles :

$$Z_0 \supsetneq Z_1 \supsetneq Z_2 \supsetneq \dots \supsetneq Z_n \supsetneq \dots;$$

et ceci serait contraire à la noethérianité de Y .

- **Unicité des décompositions irréductibles.** Considérons maintenant deux décompositions irréductibles :

$$Y = Z_1 \cup \dots \cup Z_r \quad \text{et} \quad Y = Z'_1 \cup \dots \cup Z'_{r'}.$$

L'application de l'exercice 16.1-2 montre que Z_1 est contenu (après réindexation) dans Z'_1 ; mais aussi que $Z'_1 \subseteq Z_a$ pour un certain $a = 1, \dots, r$. Or, l'inclusion $Z_1 \subseteq Z'_1 \subseteq Z_a$ n'est possible (dans une *décomposition*) que si $a = 1$ et donc $Z_1 = Z'_1$. Un raisonnement inductif immédiat permet alors de conclure que $r = r'$ et que les deux décompositions sont (à l'indexation près) identiques. ■

Espaces topologiques noethériens irréductibles

Les assertions du lemme suivant sont vraies sur un espace topologique noethérien irréductible Y .

Lemme 16.1-2 (et exercice) :

- a) Deux ouverts non vides de Y ont toujours une intersection non triviale.
- b) Un ouvert non vide de Y est partout dense.
- c) Y est un espace topologique connexe.

Exercice 16.1-3 : Montrer qu'un espace topologique noethérien est séparé, si et seulement si, c'est un ensemble fini muni de la topologie discrète.

16.1.1 Dimension d'un espace topologique noëthérien

Soit Y un espace topologique, appelons «longueur» d'une suite *strictement décroissante* de fermés $Z_0 \supsetneq Z_1 \supsetneq \cdots \supsetneq Z_r$, le nombre r . On appelle «dimension topologique» de Y , et on note $\dim Y$, la borne supérieure des longueurs des suites strictement décroissantes de fermés *irréductibles*.

Exercice 16.1.1-1 :

- Soit $\{U_i\}$ un recouvrement ouvert fini de Y . Montrer que $\dim Y = \sup_i \{\dim U_i\}$.
- Soit F un fermé de Y , montrer que $\dim F \leq \dim Y$. Supposons Y irréductible de dimension finie. Montrer que tout fermé différent de Y , est de dimension strictement plus petite que $\dim Y$.
- Soit $Y = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ muni de la topologie dont les fermés sont les réunions finies de sous-espaces vectoriels de dimension finie. Vérifiez que l'on a bien une topologie d'espace noëthérien sur Y . Montrer que les fermés irréductibles de Y sont les sous-espaces vectoriels ; puis que Y est de dimension topologique infinie.

16.2 Spectres associés à un anneau commutatif arbitraire

Dans cette section nous associons à un anneau commutatif (avec identité multiplicative)⁽⁵⁴⁾, noté A , deux espaces topologiques : $\text{Spec}(A)$ et $\text{Spm}(A)$. Les espaces associés à un anneau noëthérien seront noëthériens.

16.2.1 Les espaces topologiques $\text{Spec}(A)$ et $\text{Spm}(A)$

Nous allons noter les idéaux d'un anneau A par des lettres gothiques majuscules. Pour des idéaux \mathfrak{A} et \mathfrak{B} , on notera $\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$, respectivement l'idéal "produit" et "somme" de \mathfrak{A} et \mathfrak{B} .

Définition 16.2.1-1 : On appelle «*radical*»⁽⁵⁵⁾ d'un idéal \mathfrak{A} , noté $\mathfrak{Rad}(\mathfrak{A})$, l'intersection des idéaux *maximaux* de A contenant \mathfrak{A} :

$$\mathfrak{Rad}(\mathfrak{A}) := \bigcap_{\mathfrak{M} \supseteq \mathfrak{A}} \mathfrak{M} \quad \text{où } \mathfrak{M} \text{ désigne un idéal } \textit{maximal} \text{ de } A.$$

On appelle «*radical de l'anneau* A » le radical de l'idéal $\mathbf{0}$.

On appelle «*radical nilpotent*» de \mathfrak{A} , noté $\sqrt{\mathfrak{A}}$, l'ensemble (l'idéal) des éléments $a \in A$ pour lesquels il existe $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ (dépendant de a), tel que $a^m \in \mathfrak{A}$. *Le radical nilpotent d'un idéal est l'intersection des idéaux premiers qui le contiennent ;*

$$\sqrt{\mathfrak{A}} := \bigcap_{\mathfrak{P} \supseteq \mathfrak{A}} \mathfrak{P} \quad \text{où } \mathfrak{P} \text{ désigne un idéal } \textit{premier} \text{ de } A.$$

On appelle «*radical de nilpotence de l'anneau* A », l'idéal $\sqrt{\mathbf{0}}$. Un anneau A est dit «*réduit*» lorsque son radical de nilpotence est nul, *i.e.* lorsque A ne possède pas d'élément nilpotent non nul.

⁵⁴ Dans la suite, tous les anneaux considérés seront commutatifs et posséderont une identité multiplicative. Il est important de **ne pas exclure** dans la définition d'anneau, l'anneau nul, *i.e.* l'anneau vérifiant $1 = 0$!

⁵⁵ Appelé également «*radical de Jacobson*».

Pour tout idéal \mathfrak{A} , on a trivialement :

$$\mathfrak{A} \subseteq \sqrt{\mathfrak{A}} = \sqrt{\sqrt{\mathfrak{A}}} \subseteq \mathfrak{Rad}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{Rad}(\mathfrak{Rad}(\mathfrak{A}))$$

Un idéal \mathfrak{A} sera dit «*radical*», resp. «*nil-radical*», lorsque $\mathfrak{A} = \mathfrak{Rad}(\mathfrak{A})$, resp. $\mathfrak{A} = \sqrt{\mathfrak{A}}$. ⁽⁵⁶⁾ ⁽⁵⁷⁾

Rappelons les résultats élémentaires suivants dont la démonstration est laissée en exercice :

Lemme 16.2.1-1 : Soit \mathbf{A} un anneau commutatif arbitraire. Pour toute partie (vide ou non) $A \subseteq \mathbf{A}$, notons $V_m(A)$ (resp. $V_p(A)$) l'ensemble des idéaux maximaux (resp. premiers) qui contiennent A . Alors :

Z-1) Si $A \subseteq B$, alors $V_m(A) \supseteq V_m(B)$ et $V_p(A) \supseteq V_p(B)$.

Z-2) $V_m(\mathbf{0})$ (resp. $V_p(\mathbf{0})$) est l'ensemble des idéaux maximaux (resp. premiers) de \mathbf{A} , et l'on a $V_*(\{1\}) = \emptyset$.

Z-3) $V_m(A) = V_m(\langle A \rangle) = V_m(\mathfrak{Rad}(\langle A \rangle))$ et $V_p(A) = V_p(\langle A \rangle) = V_p(\sqrt{\langle A \rangle})$.

Z-4) $V_*(\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}) = V_*(\mathfrak{A}) \cup V_*(\mathfrak{B})$.

Z-5) $V_*(\sum_i \mathfrak{A}_i) = \bigcap_i V_*(\mathfrak{A}_i)$, où $\sum_i \mathfrak{A}_i$ désigne la somme d'une famille arbitraire $\{\mathfrak{A}_i\}$ d'idéaux.

où V_* désigne indifféremment V_m et V_p et la notation $\langle A \rangle$ réfère à l'idéal de \mathbf{A} engendré par A .

Remarque 16.2.1-1 et définition : En particulier les parties $V_p(A)$ constituent les fermés pour une certaine topologie sur $V_p(\mathbf{0})$; c'est la «*topologie spectrale (souvent appelée de Zariski)*» de $V_p(\mathbf{0})$. (Mutatis mutandis pour V_m .)

L'inclusion ensembliste $V_m(\mathbf{0}) \subseteq V_p(\mathbf{0})$ sera alors un plongement d'espaces topologiques.

Définition 16.2.1-2 : On appelle «*spectre premier*» ou plus simplement «*spectre*» (resp. «*spectre maximal*») d'un anneau commutatif \mathbf{A} , l'ensemble $V_p(\mathbf{0})$ (resp. $V_m(\mathbf{0})$) de ses idéaux premiers (resp. maximaux); on le notera $\text{Spec}(\mathbf{A})$ (resp. $\text{Spm}(\mathbf{A})$) et sera muni de la topologie spectrale.

Exercice 16.2.1-1 : Montrer que le spectre premier d'un produit direct de deux anneaux est la réunion disjointe de leurs spectres, *i.e.* : $\text{Spec}(\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2) = \text{Spec}(\mathbf{A}_1) \amalg \text{Spec}(\mathbf{A}_2)$.

Définition 16.2.1-3 : Soit \mathbf{A} un anneau, on appelle «*dimension de Krull*» ou plus simplement «*dimension*» de \mathbf{A} , la dimension de $\text{Spec}(\mathbf{A})$.

⁵⁶ En particulier l'anneau \mathbf{A} est un idéal radical (et nil-radical) puisque la famille des idéaux maximaux le contenant est vide. On apprend en théorie des ensembles que l'intersection d'une famille vide de sous ensembles d'un ensemble A donné, est l'ensemble A lui-même.

⁵⁷ Nous verrons que dans le cas des algèbres de type fini sur un corps algébriquement clos, l'inclusion $\sqrt{\mathfrak{A}} \subseteq \mathfrak{Rad}(\mathfrak{A})$ est une égalité. Les notions d'idéal radical et de nil-radical y seront donc confondues.

Remarque 16.2.1-2 et exercice : Pour toute partie \mathbf{F} de $\text{Spec}(\mathbf{A})$ (resp. $\text{Spm}(\mathbf{A})$), notons $\mathfrak{J}(\mathbf{F})$ l'idéal intersection des idéaux de \mathbf{A} appartenant à \mathbf{F} ; L'idéal $\mathfrak{J}(\mathbf{F})$ est donc nil-radical (resp. radical). (On a $\mathfrak{J}(\emptyset) = \mathbf{A}$.) Notons aussi $\overline{\mathbf{F}}$ l'adhérence de \mathbf{F} pour la topologie spectrale, et $V_* = V_p$ (resp. V_m).

Montrer que les correspondances :

$$\begin{aligned} \{\text{fermés de } \text{Spec}(\mathbf{A})\} &\xrightarrow{\mathfrak{J}} \{\text{idéaux nil-radicaux (resp. radicaux) de } \mathbf{A}\} \\ \{\text{idéaux de } \mathbf{A}\} &\xrightarrow{V_*} \{\text{fermés de } \text{Spec}(\mathbf{A})\} \end{aligned}$$

vérifient :

- 1) $\mathfrak{J}(\mathbf{F})$ est un idéal nil-radical (resp. radical), $\mathfrak{J}(\mathbf{F}) = \mathfrak{J}(\overline{\mathbf{F}})$ et $V_*(\mathfrak{J}(\mathbf{F})) = \overline{\mathbf{F}}$.
- 2) $V_p(\mathfrak{A}) = V_p(\sqrt{\mathfrak{A}})$ et $\mathfrak{J}(V_p(\mathfrak{A})) = \sqrt{\mathfrak{A}}$ (resp. $V_m(\mathfrak{A}) = V_m(\mathfrak{Rad}(\mathfrak{A}))$ et $\mathfrak{J}(V_m(\mathfrak{A})) = \mathfrak{Rad}(\mathfrak{A})$).
- 3) $V_* \circ \mathfrak{J} \circ V_* = V_*$ et $\mathfrak{J} \circ V_* \circ \mathfrak{J} = \mathfrak{J}$. En particulier, \mathfrak{J} établit une *bijection* entre les parties fermées de $\text{Spec}(\mathbf{A})$ (resp. $\text{Spm}(\mathbf{A})$) et les idéaux nil-radicaux (resp. radicaux) \mathbf{A} .

16.2.2 Fermés irréductibles de $\text{Spec}(\mathbf{A})$ et $\text{Spm}(\mathbf{A})$

Toute partie fermée \mathbf{F} de $\text{Spec}(\mathbf{A})$ est de la forme $V_p(\mathfrak{J}(\mathbf{F}))$. Lorsque $\mathbf{F} = V_p(\mathfrak{B}) \cup V_p(\mathfrak{C})$, on a $\mathfrak{J}(\mathbf{F}) \supseteq \sqrt{\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{C}} \supseteq \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{C}$. En particulier, si $\mathfrak{J}(\mathbf{F})$ est un idéal premier, $\mathfrak{J}(\mathbf{F}) \supseteq \mathfrak{B}$, ou bien $\mathfrak{J}(\mathbf{F}) \supseteq \mathfrak{C}$; et \mathbf{F} est irréductible. Réciproquement, si $\mathfrak{J}(\mathbf{F})$ n'est pas premier, il existe $a_1, a_2 \in \mathbf{A} \setminus \mathfrak{J}(\mathbf{F})$ tels que $a_1 a_2 \in \mathfrak{J}(\mathbf{F})$ et clairement pour tout idéal premier $\mathfrak{P} \in \mathbf{F}$: ou bien $\mathfrak{P} \supseteq \langle a_1 \rangle$, ou bien $\mathfrak{P} \supseteq \langle a_2 \rangle$. Par conséquent,

$$\mathbf{F} = [\mathbf{F} \cap V_p(a_1)] \cup [\mathbf{F} \cap V_p(a_2)] = [V_p(\mathfrak{J}(\mathbf{F}) + \langle a_1 \rangle)] \cup [V_p(\mathfrak{J}(\mathbf{F}) + \langle a_2 \rangle)],$$

et nécessairement $\mathbf{F} \supsetneq V_p(\mathfrak{J}(\mathbf{F}) + \langle a_i \rangle)$ car autrement $a_i \in \mathfrak{J}(\mathbf{F})$. (Cette remarque est également vraie dans le cas de $\text{Spm}(\mathbf{A})$ et pour V_m .)

Le lemme suivant est donc démontré :

Lemme 16.2.2-1 : Soit \mathbf{A} un anneau commutatif arbitraire.

- 1) La correspondance qui associe à un fermé $\mathbf{F} \subseteq \text{Spec}(\mathbf{A})$ (resp. $\text{Spm}(\mathbf{A})$), l'idéal $\mathfrak{J}(\mathbf{F})$, est bijective entre les fermés irréductibles et les idéaux premiers de \mathbf{A} appartenant à l'image de \mathfrak{J} .
- 2) L'espace $\text{Spec}(\mathbf{A})$ est irréductible, si et seulement si, son radical nilpotent $\sqrt{\mathbf{0}}$ est premier; en particulier, si et seulement si, l'anneau réduit $\text{Red}(\mathbf{A}) := \mathbf{A}/\sqrt{\mathbf{0}}$ est intègre
- 3) L'espace $\text{Spm}(\mathbf{A})$ est irréductible, si et seulement si, son radical (de Jacobson) $\mathfrak{Rad}(\mathbf{0})$ est premier.

Remarque 16.2.2-1 et définition : La propriété (1) équivaut au fait que les fermés irréductibles du spectre *premier* d'un anneau contiennent un point «générique», *i.e.* un point partout dense dans le fermé en question. Pour tout $x \in \text{Spec}(\mathbf{A})$, le fermé \bar{x} est irréductible et l'application $\text{Spec}(\mathbf{A}) \rightarrow \{\text{fermés irréductibles}\}$ définie par $x \mapsto \bar{x}$ est une bijection. L'ensemble des points génériques d'un espace topologique est donné par l'intersection de ses ouverts non vides; pour un fermé d'un spectre *premier* d'un anneau, cette intersection contient *au plus* un élément.

Exercice 16.2.2-1 : Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes pour un anneau commutatif \mathbf{A} :

- a) \mathbf{A} est noëthérien ;
- b) les espaces $\text{Spec}(\mathbf{A})$ et $\text{Spm}(\mathbf{A})$ sont noëthériens.

Remarque 16.2.2-2 : On prendra garde du fait que la noëthérianité de $\text{Spm}(\mathbf{A})$ n'entraîne pas celle de \mathbf{A} . Le spectre maximal d'un anneau local, noëthérien ou non, est toujours réduit à un point.

Exemples 16.2.2-1 :

- a) Lorsque \mathbf{A} est un corps, on a $\text{Spec}(\mathbf{A}) = \text{Spm}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\}$. Sa dimension est nulle.
- b) Lorsque $\mathbf{A} = \mathbb{Z}$, l'espace $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ s'identifie à l'ensemble des nombres premiers plus 0. L'idéal nul est partout dense dans $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ et comme tout autre idéal premier est maximal, $\text{Spm}(\mathbb{Z}) = \text{Spec}(\mathbb{Z}) \setminus \mathbf{0}$. En particulier, $\dim(\mathbb{Z}) = 1$. (Cette remarque est également vraie pour tout domaine principal.)

Exercice 16.2.2-2 : Soit M une variété différentiable de classe \mathcal{C}^r compacte et de dimension d . Posons $\mathbf{A} = \mathcal{C}^r(M)$.

- 1) **Non Irréductibilité de $\text{Spec}(\mathbf{A})$.** Montrer que \mathbf{A} n'est pas intègre, puis que son radical nilpotent est l'idéal nul. En déduire que $\text{Spec}(\mathbf{A})$ n'est pas irréductible.
- 2) **Idéaux Maximaux.** Tout point $m \in M$ détermine un homomorphisme surjectif d'anneaux $v(m) : \mathbf{A} \rightarrow \mathbb{R}$ en posant $v(m)(f) := f(m)$, pour tout $f \in \mathbf{A}$. L'ensemble des fonctions s'annulant en m est donc un idéal maximal de \mathbf{A} , noté \mathfrak{M}_m .
 - a) Soit \mathfrak{A} un idéal de \mathbf{A} tel que, pour tout $m \in M$, il existe $f_m \in \mathfrak{A}$ vérifiant $f_m(m) \neq 0$. Montrer alors, à l'aide de fonctions plateaux de support arbitrairement petit, que pour tout $m \in M$, il existe $g_m \in \mathfrak{A}$, positive ou nulle, et telle que $g_m(m) > 0$; puis, à l'aide de partitions de l'unité, qu'il existe $g \in \mathfrak{A}$ nulle part nulle. Conclure que $\mathfrak{A} = \mathbf{A}$.
 - b) En déduire que si \mathfrak{M} est un idéal maximal de \mathbf{A} , il est de la forme \mathfrak{M}_m pour un certain $m \in M$. Ainsi, l'ensemble $\text{Spm}(\mathbf{A})$ s'identifie naturellement à M .
- 3) **Non Irréductibilité de $\text{Spm}(\mathbf{A})$.** Déduire de la question précédente que $\mathfrak{Rad}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ et donc que $\text{Spm}(\mathbf{A})$ n'est pas irréductible.
- 4) **Idéaux Premiers.** Soit \mathfrak{P} un idéal premier de \mathbf{A} . Déduire des questions précédentes qu'il existe un unique $m_{\mathfrak{P}} \in M$, tel que $\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{M}_{m_{\mathfrak{P}}}$. Puis, toujours à l'aide de fonctions plateaux, que \mathfrak{P} contient l'idéal des fonctions dont le germe en m est nul. En particulier, si $\mathbf{A}_{(m)}$ désigne l'anneau des germes de fonctions \mathcal{C}^r en m et si $\gamma_m : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}_{(m)}$ est le morphisme canonique, conclure que \mathfrak{P} est l'image inverse d'un idéal premier de $\mathbf{A}_{(m)}$.
- 5) **Non Noëthérianité-I.** Montrer que tout fermé irréductible de $\text{Spec}(\mathbf{A})$ rencontre $\text{Spm}(\mathbf{A})$ en un unique point. En conclure que $\text{Spec}(\mathbf{A})$ et $\text{Spm}(\mathbf{A})$ ne sont pas noëthériens. (*Indication* : Autrement, ils seraient réunion d'un nombre fini de composantes irréductibles...)
- 6) **Quasi-compactité.** Montrer que l'application $\psi : m \mapsto \mathfrak{M}_m$ de la variété M vers l'espace $\text{Spec}(\mathbf{A})$ est continue. En déduire que $\text{Spec}(\mathbf{A})$ et $\text{Spm}(\mathbf{A})$ sont quasi-compacts.
- 7) **Non Noëthérianité-II.** Pour tout $f \in \mathbf{A}$, notons $Z(f)$ l'ensemble des points de M où f s'annule. Prouver l'égalité :

$$Z(f) = \psi^{-1} \left(\overline{\psi(Z(f))} \cap \text{Spm}(\mathbf{A}) \right).$$

Redémontrer alors que $\text{Spec}(\mathbf{A})$ n'est pas un espace topologique noëthérien en montrant qu'il existe des suites strictement décroissantes de fermés, de longueur infinie.

8) **Dimension.** Pour chaque $m \in \mathbf{M}$, l'anneau $\mathcal{C}^r(\mathbf{M})_{(m)}$ est intègre, *local* et isomorphe à $\mathcal{C}^r(\mathbb{R}^d)_{(0)}$.

a) Soit $\iota : \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^d$ l'application $t \mapsto (t, 0, \dots, 0)$. Pour toute $f \in \mathcal{C}^r(\mathbb{R}^d)$, on a $f \circ \iota \in \mathcal{C}^r(\mathbb{R})$ et si le germe de f en 0 est nul, il en est de même pour la fonction $f \circ \iota$, d'où l'application $\iota_{(0)} : \mathcal{C}^r(\mathbb{R}^d)_{(0)} \rightarrow \mathcal{C}^r(\mathbb{R})_{(0)}$ induite sur les anneaux des germes de fonction \mathcal{C}^r . Montrer que $\iota_{(0)}$ est surjective et donc que $\text{Spec}(\mathcal{C}^r(\mathbf{M}))$ est de dimension infinie, s'il existe des suites infinies strictement décroissantes d'idéaux premiers dans $\mathcal{C}^r(\mathbb{R})_{(0)}$.

b) Soit \mathcal{D} l'ensemble des parties de \mathbb{R} constituées des points des suites de nombres réels positifs convergeant vers 0. Pour $\mathbf{S} \in \mathcal{D}$, on note $\mathfrak{P}_{\mathbf{S}}$ l'ensemble des fonctions f de $\mathcal{C}^r(\mathbb{R})$ telles que $f^{-1}(0) \cap \mathbf{S}$ est de cardinal infini.

► Montrer que pour tout $\mathbf{S} \in \mathcal{D}$, l'ensemble $\mathfrak{P}_{\mathbf{S}}$ est un idéal premier de \mathbf{A} .

► Munissons \mathcal{D} du préordre défini par $\mathbf{S}_1 \preccurlyeq \mathbf{S}_2$, si et seulement si, il existe un voisinage U de 0 en \mathbb{R} , tel que $\mathbf{S}_1 \cap U \subseteq \mathbf{S}_2 \cap U$. Montrer que :

$$\mathfrak{P}_{\mathbf{S}_1} \subseteq \mathfrak{P}_{\mathbf{S}_2}, \quad \text{si et seulement si, } \mathbf{S}_1 \succcurlyeq \mathbf{S}_2.$$

► Montrer que pour tous $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2 \in \mathcal{D}$, on a $\mathfrak{P}_{\mathbf{S}_1} = \mathfrak{P}_{\mathbf{S}_2}$, si et seulement si, \mathbf{S}_1 et \mathbf{S}_2 définissent le même "germe d'ensemble" en 0.

► Notons $\mathcal{D}_{(0)}$ l'ensemble des germes en zéro des éléments de \mathcal{D} . Muni de la relation induite par \preccurlyeq , on a un ensemble partiellement ordonné $(\mathcal{D}_{(0)}; \leq)$. Construire une suite infinie strictement décroissante d'éléments de $\mathcal{D}_{(0)}$. En déduire que $\text{Spec}(\mathbf{A})$ est de dimension infinie pour $\mathbf{A} = \mathcal{C}^r(\mathbf{M})$ où $r \in \mathbb{N}$ et où \mathbf{M} est une variété de classe \mathcal{C}^r de dimension supérieure ou égale à un.

16.3 Spectres associés aux algèbres de type fini sur un corps

16.3.1 Le cas des algèbres de polynômes

Soit k un corps *arbitraire*, et considérons la k -algèbre $\mathbf{A} = k[X_1, \dots, X_n]$ des polynômes à n variables, à coefficients dans k . L'espace $\text{Spec}(\mathbf{A})$ est noëthérien et comme \mathbf{A} est intègre, $\text{Spec}(\mathbf{A})$ est un espace irréductible.

Notons $\mathbb{A}_n(k)$ le k -espace affine k^n . Les éléments de l'algèbre \mathbf{A} définissent alors des *fonctions* sur $\mathbb{A}_n(k)$, *i.e.* des applications de $\mathbb{A}_n(k)$ à valeurs dans k . En effet, pour tout polynôme $P \in k[X_1, \dots, X_n]$ et tout $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{A}_n(k)$, on pose $P(\mathbf{a}) := P(a_1, \dots, a_n) \in k$. La correspondance ainsi définie $\mathbf{A} \rightarrow \text{Fonctions}(\mathbb{A}_n(k); k)$ est alors un homomorphisme d'anneaux (qui est injectif, si et seulement si, le corps k est de cardinal infini).

Pour tout $\mathbf{a} \in \mathbb{A}_n(k)$ le morphisme $v(\mathbf{a}) : \mathbf{A} \rightarrow k$, défini par $P \mapsto P(\mathbf{a})$, est un homomorphisme surjectif d'anneaux. Son noyau est donc un idéal *maximal* $\mathfrak{M}_{\mathbf{a}}$ de \mathbf{A} . Nous avons ainsi une application *injective* :

$$\begin{aligned} \Xi_{\mathbf{A}} : \mathbb{A}_n(k) &\longrightarrow \text{Spm}(\mathbf{A}) \\ \mathbf{a} &\longmapsto \mathfrak{M}_{\mathbf{a}} \end{aligned}$$

Ensembles algébriques et topologie de Zariski sur $\mathbb{A}_n(k)$

Définition 16.3.1-1 : Soit A un sous-ensemble de $\mathbf{A} = k[X_1, \dots, X_n]$. On appelle « ensemble des zéros de A » le sous-ensemble $Z(A)$ de $\mathbb{A}_n(k)$ constitué des points \mathbf{a} tels que $P(\mathbf{a}) = 0$ pour tout $P \in A$. On appelle « ensemble algébrique » ou « fermé de Zariski » de $\mathbb{A}_n(k)$ toute partie de la forme $Z(A)$.

Le lemme 16.2.1-1 est vrai en remplaçant V_p par Z . En particulier, les ensembles algébriques de $\mathbb{A}_n(k)$ définissent les fermés d'une topologie sur $\mathbb{A}_n(k)$, c'est sa « topologie de Zariski ».

Lemme 16.3.1-1 : L'application $\Xi_A : \mathbb{A}_n(k) \rightarrow \text{Spm}(\mathbf{A})$ est un homéomorphisme sur son image.

Démonstration : En effet, on a tautologiquement $\Xi_A^{-1}(V_m(\mathfrak{A})) = Z(\mathfrak{A})$. ■

Remarque 16.3.1-1 : Pour toute partie $F \subseteq \mathbb{A}_n(k)$, notons $\mathcal{J}(F)$ le sous-ensemble (idéal) de $\mathbf{A} = k[X_1, \dots, X_n]$ des polynômes s'annulant en tout point $\mathbf{a} \in F$, soit :

$$\mathcal{J}(F) = \bigcap_{\mathbf{a} \in F} \mathfrak{M}_{\mathbf{a}},$$

et $\mathcal{J}(F)$ est trivialement un idéal radical (et nil-radical). On a $Z(\mathcal{J}(F)) \supseteq F$ et $Z(\mathcal{J}(F))$ s'identifie à l'adhérence \overline{F} de F pour la topologie de Zariski de $\mathbb{A}_n(k)$.

Les correspondances :

$$\begin{aligned} \{\text{fermés de Zariski de } \mathbb{A}_n(k)\} &\xrightarrow{\mathfrak{J}} \{\text{idéaux radicaux de } \mathbf{A}\} \\ \{\text{idéaux de } \mathbf{A}\} &\xrightarrow{Z} \{\text{fermés de Zariski de } \mathbb{A}_n(k)\} \end{aligned}$$

vérifient donc les propriétés suivantes :

- 1) $\mathfrak{J}(F)$ est un idéal radical (et nil-radical), $\mathfrak{J}(F) = \mathfrak{J}(\overline{F})$ et $Z(\mathfrak{J}(F)) = \overline{F}$.
- 2) $Z(\mathfrak{A}) = Z(\mathfrak{Rad}(\mathfrak{A})) = Z(\sqrt{\mathfrak{A}})$ et $\mathfrak{J}(Z(\mathfrak{A})) = \mathfrak{Rad}(\mathfrak{A})$.
- 3) $Z \circ \mathfrak{J} \circ Z = Z$ et $\mathfrak{J} \circ Z \circ \mathfrak{J} = \mathfrak{J}$. En particulier, \mathfrak{J} établit une bijection entre les parties fermées de $\mathbb{A}_n(k)$ et les idéaux de l'image de \mathfrak{J} .

On prendra garde du fait qu'il est faux en général que l'image de \mathfrak{J} soit l'ensemble des idéaux radicaux de \mathbf{A} . Lorsque $\mathbf{A} = \mathbb{R}[X]$, l'idéal $\mathfrak{A} = \langle X^2 + 1 \rangle$ est maximal mais $Z(\mathfrak{A}) = \emptyset$ et donc \mathfrak{A} n'appartient pas à l'image de \mathfrak{J} .

Algèbres de polynômes à coefficients dans un corps algébriquement clos

Lorsque le corps k de coefficients est algébriquement clos, des simplifications considérables de la théorie ont lieu grâce au "Théorème des zéros de Hilbert" (le NullstellenSatz)⁽⁵⁸⁾. Il affirme que, pour tout idéal $\mathfrak{A} \in \mathbf{A} = k[X_1, \dots, X_n]$, on a :

$$\begin{aligned} Z(\mathfrak{A}) = \emptyset, \quad &\text{si et seulement si, } \mathfrak{A} = \mathbf{A} \\ \text{dont on déduit : } &\mathfrak{Rad}(\mathfrak{A}) = \mathcal{J}(Z(\mathfrak{A})) = \sqrt{\mathfrak{A}} \end{aligned}$$

Les propositions suivantes en découlent :

⁵⁸ On pourra consulter [Ful] pages 20–22, pour une démonstration très simple des théorèmes de Hilbert.

Proposition 16.3.1-2 : Soit $\mathbf{A} = k[X_1, \dots, X_n]$, où k est un corps algébriquement clos. L'application $\Xi_{\mathbf{A}} : \mathbb{A}_n(k) \rightarrow \text{Spm}(\mathbf{A})$ est un homéomorphisme sur $\text{Spm}(\mathbf{A})$.

Démonstration : D'après le théorème des zéros de Hilbert, tout idéal propre de \mathbf{A} possède au moins un zéro dans $\mathbb{A}_n(k)$, ceci signifie précisément qu'il est contenu dans un idéal maximal de la forme $\mathfrak{M}_{\mathbf{a}}$. En particulier, tout idéal maximal de \mathbf{A} est de la forme $\Xi_{\mathbf{A}}(\mathbf{a})$. ■

Théorème 16.3.1-3 : Soit $\mathbf{A} = k[X_1, \dots, X_n]$, où k est un corps algébriquement clos. Alors :

a) Les applications :

$$\begin{aligned} \{\text{fermés de } \text{Spec}(\mathbf{A})\} &\longrightarrow \{\text{fermés de } \text{Spm}(\mathbf{A})\} \\ \mathbf{F}_{\mathfrak{p}} &\longmapsto \mathbf{F}_{\mathfrak{m}} := \mathbf{F}_{\mathfrak{p}} \cap \text{Spm}(\mathbf{A}) \\ \{\text{ouverts de } \text{Spec}(\mathbf{A})\} &\longrightarrow \{\text{ouverts de } \text{Spm}(\mathbf{A})\} \\ U_{\mathfrak{p}} &\longmapsto U_{\mathfrak{m}} := U_{\mathfrak{p}} \cap \text{Spm}(\mathbf{A}) \end{aligned}$$

où les indices \mathfrak{p} et \mathfrak{m} font référence respectivement aux spectres \mathfrak{p} premier et \mathfrak{m} maximal, **sont bijectives**.

En particulier, pour tout ouvert $U_{\mathfrak{m}} \subseteq \text{Spm}(\mathbf{A})$, l'intersection des ouverts V de $\text{Spec}(\mathbf{A})$ vérifiant $U_{\mathfrak{m}} \subseteq V$, est un ouvert de $\text{Spec}(\mathbf{A})$, à savoir : l'ouvert $U_{\mathfrak{p}}$ (⁵⁹).

b) $\text{Spm}(\mathbf{A})$ est partout dense dans $\text{Spec}(\mathbf{A})$.

c) Les composantes irréductibles d'un fermé \mathbf{F} de $\text{Spm}(\mathbf{A})$ sont les "traces" des composantes irréductibles de l'adhérence de \mathbf{F} dans $\text{Spec}(\mathbf{A})$

d) $\dim(\text{Spec}(\mathbf{A})) = \dim(\text{Spm}(\mathbf{A}))$.

e) $\text{Spm}(\mathbf{A})$ est irréductible.

Démonstration :

a) La correspondance $\mathbf{F} \mapsto \mathbf{F} \cap \text{Spm}(\mathbf{A})$ est clairement surjective. Soit maintenant \mathbf{F} une partie fermée de $\text{Spec}(\mathbf{A})$, on a $\mathbf{F} = V_{\mathfrak{p}}(\mathbf{A})$ et $\mathbf{F} \cap \text{Spm}(\mathbf{A})$ est l'ensemble des idéaux maximaux de \mathbf{A} contenant \mathfrak{A} . L'adhérence de cet ensemble dans $\text{Spec}(\mathbf{A})$ est l'ensemble des idéaux premiers de \mathbf{A} contenant $\mathfrak{R} \text{ad}(\mathfrak{A})$, soit, d'après le théorème des zéros de Hilbert : $V_{\mathfrak{p}}(\sqrt{\mathfrak{A}})$, et cet ensemble est précisément \mathbf{F} ; la correspondance $\mathbf{F} \mapsto \mathbf{F} \cap \text{Spm}(\mathbf{A})$ admet donc un inverse à gauche (l'adhérence dans $\text{Spec}(\mathbf{A})$), ce qui entraîne son injectivité.

L'assertion concernant les ouverts en découle par "passage aux complémentaires".

b) Immédiat d'après (a).

c) Il suffit de montrer que si \mathbf{F} est irréductible dans $\text{Spm}(\mathbf{A})$, son adhérence $\overline{\mathbf{F}}$ dans $\text{Spec}(\mathbf{A})$ l'est également. Or si $\overline{\mathbf{F}} = \mathbf{F}_1 \cup \mathbf{F}_2$, on aura $\mathbf{F} = (\mathbf{F}_1 \cap \text{Spm}(\mathbf{A})) \cup (\mathbf{F}_2 \cap \text{Spm}(\mathbf{A}))$ et par exemple $\mathbf{F} = (\mathbf{F}_1 \cap \text{Spm}(\mathbf{A}))$, auquel cas $\overline{\mathbf{F}} = \overline{\mathbf{F}_1}$ d'après (a).

d,e) Immédiats d'après (c). ■

⁵⁹ Cette remarque sera particulièrement utile dans l'étude du foncteur de "restriction de faisceaux" (cf. encadré 16.3.1-1, page 223).

16.3.1-1 **Remarque sur le foncteur “image inverse de faisceaux”** : Soit $f : \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}$ une application continue entre deux espaces topologiques. Notons $\text{Fais}(\mathbf{Y})$ et $\text{Fais}(\mathbf{X})$ les catégories (abéliennes) des faisceaux de groupes abéliens sur \mathbf{Y} et \mathbf{X} respectivement.

Foncteur image inverse pour les catégories de faisceaux. Pour tout $\mathcal{F} \in \text{Ob}(\text{Fais}(\mathbf{X}))$, la correspondance :

$$U \text{ (ouvert de } \mathbf{Y}) \rightsquigarrow (\tilde{f}^{-1}\mathcal{F})(U) := \varinjlim_{f(U) \subseteq V} \mathcal{F}(V), \quad (V \text{ ouvert de } \mathbf{X}),$$

est un préfaisceau sur \mathbf{Y} mais n'est généralement pas un faisceau. On définit alors $f^{-1}(\mathcal{F})$ comme étant “le faisceau associé” au préfaisceau $\tilde{f}^{-1}\mathcal{F}$.

Il résulte immédiatement de cette définition que pour tout $y \in \mathbf{Y}$, on a un isomorphisme pour les germes : $(f^{-1}\mathcal{F})_{(y)} \cong \mathcal{F}_{(f(y))}$, et le foncteur $f^{-1} : \text{Fais}(\mathbf{X}) \rightsquigarrow \text{Fais}(\mathbf{Y})$ est additif et *exact*.

Restriction de faisceaux. Dans le cas particulier où \mathbf{Y} est un sous-ensemble de \mathbf{X} muni de la topologie induite et que $\iota : \mathbf{Y} \hookrightarrow \mathbf{X}$ est l'application canonique d'inclusion, on définit « la restriction d'un faisceau $\mathcal{F} \in \text{Ob}(\text{Fais}(\mathbf{X}))$ à \mathbf{Y} » comme étant le faisceau $\iota^{-1}\mathcal{F}$, noté également $\mathcal{F}|_{\mathbf{Y}}$.

Signalons que le préfaisceau :

$$U \text{ (ouvert de } \mathbf{Y}) \rightsquigarrow (\tilde{\iota}^{-1}\mathcal{F})(U) = \varinjlim_{U \subseteq V} \mathcal{F}(V), \quad (V \text{ ouvert de } \mathbf{X}),$$

n'est pas non plus, en toute généralité, un faisceau. C'est cependant le cas dans bien de situations, par exemple :

- 1) Lorsque \mathbf{Y} admet une base de voisinages paracompacts (*cf.* [God₂] §3.3 page 151).
- 2) Dans le cas où $\mathbf{Y} = \text{Spm}(\mathbf{A}) \subseteq \mathbf{X} = \text{Spec}(\mathbf{A})$ et \mathbf{A} est une algèbre de type fini sur un corps algébriquement clos.

Où seule la situation (2) nous concerne directement dans ce chapitre. Elle est conséquence immédiate de l'assertion (a) du théorème 16.3.1-3, qui montre que pour tout faisceau $\mathcal{F} \in \text{Ob}(\text{Fais}(\text{Spec}(\mathbf{A})))$ et tout ouvert $U_{\mathfrak{m}} \in \text{Spm}(\mathbf{A})$, on a :

$$\mathcal{F}(U_{\mathfrak{p}}) = \varinjlim_{U_{\mathfrak{m}} \subseteq V} \mathcal{F}(V) = (\tilde{\iota}^{-1}\mathcal{F})(U_{\mathfrak{m}}), \quad \text{soit,} \quad \Gamma(U_{\mathfrak{m}}; \tilde{\iota}^{-1}\mathcal{F}) = \Gamma(U_{\mathfrak{p}}; \mathcal{F}). \quad (\ddagger\ddagger)$$

Ce qui entraîne aussitôt l'exactitude de la suite :

$$0 \rightarrow (\tilde{\iota}^{-1}\mathcal{F})(U_{\mathfrak{m}}) \rightarrow \prod_{i \in \mathfrak{J}} (\tilde{\iota}^{-1}\mathcal{F})(U_{\mathfrak{m};i}) \rightarrow \prod_{i,j \in \mathfrak{J}} (\tilde{\iota}^{-1}\mathcal{F})(U_{\mathfrak{m};ij}),$$

pour tout ouvert $U_{\mathfrak{m}}$ de $\text{Spm}(\mathbf{A})$ et tout recouvrement ouvert $\{U_{\mathfrak{m};i}\}_{i \in \mathfrak{J}}$ de $U_{\mathfrak{m}}$. Par conséquent, $\iota^{-1} = \tilde{\iota}^{-1}$

Cohomologie de faisceaux de l'image inverse d'un faisceaux. Si nous composons maintenant le foncteur image inverse avec le foncteur “image directe” f_* , (déjà introduit dans ces notes et rappelé dans l'encadré 16.5-1 page 231), on obtient, pour tout $\mathcal{F} \in \text{Ob}(\text{Fais}(\mathbf{X}))$, un morphisme de faisceaux :

$$\mathcal{F} \longrightarrow f_* f^{-1}\mathcal{F},$$

dont on déduit un morphisme canonique entre les cohomologies de faisceaux :

$$H^*(\mathbf{X}; \mathcal{F}) \longrightarrow H^*(\mathbf{Y}; f^{-1}\mathcal{F}).$$

Ce morphisme n'est pas un isomorphisme en général, mais dans le cas particulier de spectres, on a :

Proposition 16.3.1-1.1 : Soit \mathbf{A} une algèbre de type fini sur un corps algébriquement clos, notons $\mathbf{Y} = \text{Spm}(\mathbf{A})$, $\mathbf{X} = \text{Spec}(\mathbf{A})$ et $\iota : \mathbf{Y} \hookrightarrow \mathbf{X}$ l'injection canonique. Alors, pour tout faisceau de groupes abéliens \mathcal{F} sur \mathbf{X} , le morphisme canonique :

$$H^*(\mathbf{X}; \mathcal{F}) \longrightarrow H^*(\mathbf{Y}; \iota^{-1}\mathcal{F}).$$

est un isomorphisme.

Démonstration : En effet, l'égalité $\Gamma(U_m; \iota^{-1}\mathcal{G}) = \Gamma(U_p; \mathcal{G})$, vérifiée pour tout $\mathcal{G} \in \text{Ob}(\text{Fais}(\mathbf{X}))$ et tout ouvert $U_m \subseteq \text{Spm}(\mathbf{A})$, entraîne que la restriction d'un faisceau flasque sur \mathbf{X} sera également flasque sur \mathbf{Y} , et comme d'autre part le foncteur ι^{-1} est exact, la restriction d'une résolution flasque de \mathcal{F} sur \mathbf{X} sera une résolution flasque de $\iota^{-1}\mathcal{F}$ sur \mathbf{Y} .

L'égalité $\Gamma(\text{Spm}(\mathbf{A}); \iota^{-1}\mathcal{G}) = \Gamma(\text{Spec}(\mathbf{A}); \mathcal{G})$, vérifiée pour tout $\mathcal{G} \in \text{Ob}(\text{Fais}(\mathbf{X}))$, termine la démonstration de cette proposition. ■

Equivalence de catégories de faisceaux. Plaçons-nous dans le cas où \mathbf{A} est une algèbre de type fini sur un corps algébriquement clos et $\mathbf{Y} = \text{Spm}(\mathbf{A})$ et $\mathbf{X} = \text{Spec}(\mathbf{A})$, notons $\iota : \mathbf{Y} \hookrightarrow \mathbf{X}$ l'inclusion canonique. Les remarques précédentes montrent le théorème suivant :

Théorème 16.3.1-1.2 : Les foncteurs additifs :

$$\iota_* : \text{Fais}(\text{Spm}(\mathbf{A})) \rightsquigarrow \text{Fais}(\text{Spec}(\mathbf{A})) \quad \text{et} \quad \iota^{-1} : \text{Fais}(\text{Spec}(\mathbf{A})) \rightsquigarrow \text{Fais}(\text{Spm}(\mathbf{A})),$$

sont inverses l'un de l'autre, il établissent donc des équivalences de catégories.

Avertissement. On prendra garde du fait que la définition du foncteur "image inverse de faisceaux", valable pour les faisceaux de groupes abéliens, est inadaptée dans la catégorie d'espaces annelés. En effet, si $f : (\mathbf{Y}; \mathcal{O}_{\mathbf{Y}}) \rightarrow (\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}})$ est un morphisme d'espaces annelés, et si \mathcal{M} est un $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ -module, le faisceau $f^{-1}\mathcal{M}$ n'a pas de structure canonique de $\mathcal{O}_{\mathbf{Y}}$ -module ; on définit alors l'« image inverse du $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ -module \mathcal{M} » par :

$$f^*\mathcal{M} := \mathcal{O}_{\mathbf{Y}} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_{\mathbf{X}}} f^{-1}\mathcal{M}.$$

Nous reviendrons sur cette notion ultérieurement.

Dimension de $k[\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n]$

Nous avons déjà remarqué dans les exemples 16.2.2-1 que $\dim(k) = 0$ et $\dim(k[X]) = 1$. On a plus généralement :

Proposition 16.3.1-3 : Soit k un corps arbitraire, alors $\dim(k[X_1, \dots, X_n]) = n$.

16.3.1-2 Rappel sur les anneaux de fractions-I : Soit \mathbf{A} un anneau commutatif arbitraire.

On appelle « système multiplicatif » tout ensemble $S \subseteq \mathbf{A}$ vérifiant : $1 \in S$, et $st \in S$, pour tous $s, t \in S$. (Les complémentaires des idéaux premiers sont des exemples importants de systèmes multiplicatifs.)

Soit S un système multiplicatif de \mathbf{A} et considérons l'ensemble $\mathbf{A} \times S$, muni de la relation d'équivalence :

$$(a, s) \mathcal{R} (b, t), \quad \text{si et seulement si, il existe } u \in S \text{ tel que } u(at - bs) = 0.$$

Notons $S^{-1}\mathbf{A}$ l'ensemble des classes d'équivalence de $\mathbf{A} \times S$; et $\frac{a}{s}$ ou a/s la classe d'équivalence du couple

(a, s) . Les expressions suivantes définissent deux opérations binaires : une “addition (+)”, et une “multiplication (\cdot)”, sur $S^{-1}\mathbf{A}$:

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} := \frac{at+bs}{st}; \quad \text{et} \quad \frac{a}{s} \cdot \frac{b}{t} := \frac{ab}{st}; \quad (\ddagger)$$

et $(S^{-1}\mathbf{A}, +, \cdot, \frac{0}{1}, \frac{1}{1})$ est un *anneau*. Posons $0 := \frac{0}{1}$ et $1 := \frac{1}{1}$, on a $0 \neq 1$, si et seulement si, $0 \notin S$.

Les anneaux \mathbf{A} et $S^{-1}\mathbf{A}$ sont reliés par l’homomorphisme :

$$\begin{aligned} \nu_S : \mathbf{A} &\longrightarrow S^{-1}\mathbf{A} \\ a &\longmapsto \frac{a}{1} \end{aligned}$$

dont le noyau est la réunion des annulateurs dans \mathbf{A} des éléments de S ; en particulier : si \mathbf{A} est intègre ν_S est *injectif*.

Lemme 16.3.1-2.1 (et exercice) : Soit \mathbf{A} un anneau commutatif et $S \subseteq \mathbf{A}$ un système multiplicatif.

a) Montrer que l’anneau $S^{-1}\mathbf{A}$ est caractérisé par la propriété universelle suivante :

“Pour **tout** anneau \mathbf{B} et tout homomorphisme d’anneaux $\alpha : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$, tel que : pour tout $s \in S$, $\alpha(s)$ est inversible dans \mathbf{B} , il existe un, et un seul, homomorphisme d’anneaux $\alpha' : S^{-1}\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ vérifiant $\alpha = \alpha' \circ \nu_S$.”

b) Soit $\{s_1, \dots, s_r\} \subseteq \mathbf{A}$ un ensemble fini, et notons S le système multiplicatif de \mathbf{A} consistant en tous les éléments de la forme $s_1^{m_1} \cdots s_r^{m_r}$, pour $m_i \in \mathbb{N}$. Dédurre de (16.3.1-2.1-a) que l’homomorphisme déterminé par :

$$\begin{aligned} A[X_1, \dots, X_r] / \langle s_1 X_1 - 1, \dots, s_r X_r - 1 \rangle &\longrightarrow S^{-1}\mathbf{A} \\ [X_i] &\longmapsto \frac{1}{s_i}, \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

En déduire que si S admet un système fini de générateurs, l’anneau $S^{-1}\mathbf{A}$ est une \mathbf{A} -algèbre de type fini.

c) Pour tout homomorphisme d’anneaux $\alpha : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ notons $\alpha(S)$ le système multiplicatif image par α de S . Il existe alors un, et un seul, homomorphisme $\nu_{\alpha, S} : S^{-1}\mathbf{A} \rightarrow \alpha(S)^{-1}\mathbf{B}$ qui commute aux morphismes ν_S et $\nu_{\alpha(S)}$.

Exercice 16.3.1-2.1 : Soient \mathbf{A} un anneau commutatif, et $S \subseteq T \subseteq \mathbf{A}$ deux systèmes multiplicatifs de \mathbf{A} .

- 1) Montrer qu’il existe un, et un seul, homomorphisme d’anneaux $\nu_{S, T} : S^{-1}\mathbf{A} \rightarrow T^{-1}\mathbf{A}$, tel que l’on ait : $\nu_T = \nu_{S, T} \circ \nu_S$.
- 2) Montrer que $\nu_S(T)$ est un système multiplicatif de l’anneau $S^{-1}\mathbf{A}$, et que l’application canonique $T^{-1}\mathbf{A} \rightarrow (\nu_S(T))^{-1}(S^{-1}\mathbf{A})$ donnée par le lemme 16.3.1-2.1, est un isomorphisme d’anneaux.
- 3) Pour tout système multiplicatif $S \subseteq \mathbf{A}$, notons \bar{S} l’ensemble des $t \in \mathbf{A}$ pour lesquels il existe $u \in \mathbf{A}$ et $s \in S$ tels que $stu \in S$; on a $\bar{S} \supseteq S$. Montrer que le morphisme canonique $\nu_{S, \bar{S}} : S^{-1}\mathbf{A} \rightarrow \bar{S}^{-1}\mathbf{A}$ est un isomorphisme d’anneaux.

Réciproquement, montrer que si T est un système multiplicatif de \mathbf{A} vérifiant : $S \subseteq T$ et le morphisme canonique $\nu_{S, T} : S^{-1}\mathbf{A} \rightarrow T^{-1}\mathbf{A}$, est un isomorphisme, alors $S \subseteq T \subseteq \bar{S}$.

Définition 16.3.1-2.1 : Soit \mathfrak{A} un idéal de \mathbf{A} , on note $S^{-1}\mathfrak{A}$ l'idéal de $S^{-1}\mathbf{A}$ engendré par $\nu_S(\mathfrak{A})$. Les éléments de $S^{-1}\mathfrak{A}$ sont alors les fractions de la forme $\frac{a}{s}$ où $a \in \mathfrak{A}$ et $s \in S$.

Lemme 16.3.1-2.2 : Les notations étant comme ci-dessus, on a :

- 1) Pour tout idéal $\mathfrak{B} \in S^{-1}\mathbf{A}$, on a $S^{-1}(\nu_S^{-1}(\mathfrak{B})) = \mathfrak{B}$, en particulier $\text{Spec}(\nu_S)$ est injective et $S^{-1}\mathbf{A}$ est noethérien si \mathbf{A} l'est.
- 2) Pour tout idéal $\mathfrak{A} \in \mathbf{A}$, on a $S^{-1}\mathfrak{A} = S^{-1}\mathbf{A}$, si et seulement si, $\mathfrak{A} \cap S \neq \emptyset$.
- 3) Lorsque \mathfrak{P} est un idéal premier de \mathbf{A} disjoint de S , l'idéal $S^{-1}\mathfrak{P}$ est premier dans $S^{-1}\mathbf{A}$ et

$$\nu_S^{-1}(S^{-1}\mathfrak{P}) = \mathfrak{P}.$$

- 4) L'application $\text{Spec}(\nu_S) : \text{Spec}(S^{-1}\mathbf{A}) \rightarrow \text{Spec}(\mathbf{A})$ établit une bijection entre les idéaux premiers (resp. maximaux) de $S^{-1}\mathbf{A}$ et ceux de \mathbf{A} disjoints de S .

En particulier, pour $f \in \mathbf{A}$, notons $S(f)$ le système multiplicatif $\{1, f, f^2, \dots, f^r, \dots\}$. L'anneau $S(f)^{-1}\mathbf{A}$, noté généralement \mathbf{A}_f , est tel que $\text{Spec}(\nu_{S(f)}) : \text{Spec}(\mathbf{A}_f) \rightarrow \text{Spec} \mathbf{A}$ est un homéomorphisme d'image : l'ouvert $D(f)$ complémentaire dans $\text{Spec}(\mathbf{A})$ de $V(\langle f \rangle)$.

- 5) Si \mathbf{A} est réduit, $S^{-1}\mathbf{A}$ l'est également.

Démonstration :

- 1) L'inclusion $S^{-1}(\nu_S^{-1}\mathfrak{B}) \subseteq \mathfrak{B}$ étant évidente; soit $b = \frac{a}{s} \in \mathfrak{B}$, l'élément $\frac{a}{1} = \frac{s}{1} \frac{a}{s}$ appartient alors à $\nu_S(\mathbf{A}) \cap \mathfrak{B}$ et donc $\frac{a}{1} \in \nu_S(\nu_S^{-1}\mathfrak{B})$ et comme $b = \frac{1}{s} \frac{a}{1}$, on a bien $b \in S^{-1}(\nu_S^{-1}\mathfrak{B})$.
- 2) Si $\frac{1}{1} = \frac{a}{s} \in S^{-1}\mathfrak{A}$, il existe $t \in S$ tel que $0 = t(s - a) = ts - ta$, et $ts \in \mathfrak{A} \cap S$. La réciproque est triviale.
- 3) En effet, supposons $\frac{a}{s} \frac{b}{t} \in S^{-1}(\mathfrak{P})$. Il existe alors $p \in \mathfrak{P}$ et $u \in S$ tels que $\frac{a}{s} \frac{b}{t} = \frac{p}{u}$. Par conséquent $0 = v(uab - stp)$ et $vuab \in \mathfrak{P}$, mais comme $vu \notin \mathfrak{P}$ et que \mathfrak{P} est premier, on a $a \in \mathfrak{P}$ ou $b \in \mathfrak{P}$ et donc $\frac{a}{s} \in S^{-1}\mathfrak{P}$ ou $\frac{b}{t} \in S^{-1}\mathfrak{P}$. L'idéal $S^{-1}\mathfrak{P}$ est donc bien premier.

Les éléments de $\nu_S^{-1}(S^{-1}\mathfrak{P})$ sont les $x \in \mathbf{A}$ pour lesquels il existe $a \in \mathfrak{A}$ et $s \in S$ vérifiant $\frac{x}{1} = \frac{a}{s}$. Par conséquent, $t(sx - a) = 0$ pour un certain $t \in S$, et comme $ts \notin \mathfrak{P}$, on a nécessairement $x \in \mathfrak{P}$ et $\nu_S^{-1}(S^{-1}\mathfrak{P}) = \mathfrak{P}$.

- 4,5) Résultent immédiatement des assertions précédentes. ■

La localisation des algèbres de type fini sur un corps algébriquement clos

Lorsque l'anneau \mathbf{A} est un quotient de $k[X_1, \dots, X_n]$, le localisé \mathbf{A}_f , étant canoniquement isomorphe à l'algèbre $\mathbf{A}[Y]/\langle fY - 1 \rangle$ (cf. lemme 16.3.1-2.1 (b)), est également une algèbre de type fini sur k .

Remarquons aussi que pour tout idéal maximal $\mathfrak{M} \in \mathbf{A}_f$, le corps résiduel de l'anneau local $(\mathbf{A}_f)_{\mathfrak{M}}$, que nous noterons $k(\mathfrak{M})$, est canoniquement isomorphe à k . On peut comprendre ceci par le fait que l'idéal \mathfrak{M} "provient" d'un idéal maximal \mathfrak{M}_a de $k[X_1, \dots, X_n]$ et que l'isomorphisme canonique $(\mathbf{A}_f)_{\mathfrak{M}} \rightarrow k$ est précisément l'évaluation en $\mathbf{a} \in \mathbb{A}_n(k)$. L'ensemble de ces applications d'évaluation donne une application canonique $\psi : \mathbf{A}_f \rightarrow \prod_{\mathfrak{M} \subseteq \mathbf{A}_f} k$. On a alors :

Proposition 16.3.1-2.3 : Sous les hypothèses ci-dessus :

- a) Pour tout idéal $\mathfrak{A} \subseteq \mathbf{A}_f$, on a $\mathfrak{Rad}(\mathfrak{A}) = \sqrt{\mathfrak{A}}$.
- b) Lorsque \mathbf{A} est une algèbre réduite l'application $\psi : \mathbf{A}_f \rightarrow \prod_{\mathfrak{M} \subseteq \mathbf{A}_f} k(\mathfrak{M})$ est injective.

Démonstration :

- a) Le théorème de zéros de Hilbert s'applique à \mathbf{A}_f puisque c'est une k -algèbre de type fini.
 b) Le noyau de ψ est le radical (de Jacobson) de \mathbf{A} . D'après la question précédente, c'est le radical de nilpotence de \mathbf{A}_f , nul puisque \mathbf{A} a été supposée réduite. ■

Démonstration de la proposition 16.3.1-3 : Nous allons procéder par induction sur le nombre n de variables. Pour $n = 0, 1$, le résultat a déjà été justifié ; supposons-le démontré pour $n - 1$ variables.

Notons \mathbf{A} l'anneau $k[X_1, \dots, X_n]$. La suite des idéaux premiers

$$\langle X_1, X_2, X_3, \dots, X_n \rangle \supseteq \langle X_2, X_3, \dots, X_n \rangle \supseteq \langle X_3, \dots, X_n \rangle \supseteq \dots \supseteq \langle X_n \rangle \supseteq \mathbf{0}$$

étant de longueur n , on a $\dim(\mathbf{A}) \geq n$.

Supposons maintenant l'existence d'une suite strictement décroissante d'idéaux premiers de \mathbf{A} de longueur $n + 1$:

$$\mathfrak{P}_0 \supseteq \mathfrak{P}_1 \supseteq \dots \supseteq \mathfrak{P}_n \supseteq \mathfrak{P}_{n+1} = \mathbf{0}; \quad (*)$$

et telle que \mathfrak{P}_0 est l'idéal $\mathfrak{M}_0 := \langle X_1, \dots, X_n \rangle$.

Pour chaque $j = 1, \dots, n$, notons $\mathbf{A}_j := k[X_j]$ le sous-anneau de \mathbf{A} des polynômes uniquement en la variable X_j . Les ensembles $S_j := \mathbf{A}_j \setminus \{0\}$ sont alors des systèmes multiplicatifs de \mathbf{A} , et l'anneau $S_j^{-1}\mathbf{A}$ s'identifie canoniquement à l'anneau des polynômes en $X_1, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_n$, à coefficients dans le corps de fractions $k(X_j)$ de $k[X_j]$, *i.e.* :

$$S_j^{-1}\mathbf{A} \cong k(X_j)[X_1, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_n].$$

En particulier, $\dim(S_j^{-1}\mathbf{A}) = n - 1$ par hypothèse de récurrence.

On remarque alors que si \mathfrak{P}_1 rencontre S_j , on a nécessairement $X_j \in \mathfrak{P}_1$. En effet, soit

$$P(X_j) = X_j^r(1 - X_jQ(X_j)) \in \mathfrak{P}_1,$$

et supposons que $X_j \notin \mathfrak{P}_1$; la primalité de \mathfrak{P}_1 impliquerait alors que $1 + X_jQ(X_j) \in \mathfrak{P}_1 \subseteq \mathfrak{P}_0 \ni X_j$, mais ceci est impossible. Ceci étant, si \mathfrak{P}_1 rencontre S_j , pour tout $j = 1, \dots, n$, on devrait avoir $\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{M}_0$, et ce serait contraire aux données initiales. Il existe donc j_0 tel que $S_{j_0} \cap \mathfrak{P}_1 = \emptyset$. Le rappel sur les anneaux de fractions montre alors que l'on a une suite strictement décroissante d'idéaux premiers de $S_{j_0}^{-1}\mathbf{A}$:

$$S_{j_0}^{-1}\mathfrak{P}_1 \supseteq \dots \supseteq S_{j_0}^{-1}\mathfrak{P}_n \supseteq S_{j_0}^{-1}\mathfrak{P}_{n+1} = \mathbf{0};$$

de longueur n , ce qui est impossible puisque $S_{j_0}^{-1}\mathbf{A}$ est de dimension $n - 1$.

Les suites (*) ne peuvent donc pas exister avec $\mathfrak{P}_0 = \mathfrak{M}_0$.

Or, si k est un corps algébriquement clos, l'idéal \mathfrak{P}_0 , que nous pouvons toujours supposer maximal, sera de la forme $\langle X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n \rangle$ et l'homomorphisme d'anneaux $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}$ déterminé par $X_j \mapsto X_j + a_j$, qui est un automorphisme, transformera la suite (*) en une suite de même longueur où le premier terme sera l'idéal \mathfrak{M}_0 , et ceci nous emmène de nouveau à une contradiction. On conclut donc que lorsque k est algébriquement clos, l'anneau $k[X_1, \dots, X_n]$ est de dimension n .

Lorsque k n'est pas algébriquement clos, on considère une clôture algébrique \bar{k} de k . L'extension d'anneaux $\mathbf{A} := k[X_1, \dots, X_n] \subseteq \bar{\mathbf{A}} := \bar{k}[X_1, \dots, X_n]$ est alors *entière* et l'on démontre en théorie d'extension d'anneaux que dans ce cas : pour tout idéal premier (resp. maximal) $\mathfrak{P} \subseteq \mathbf{A}$, il existe un idéal premier (resp. maximal) $\bar{\mathfrak{Q}}$ de $\bar{\mathbf{A}}$, tel que $\bar{\mathfrak{Q}} \cap \mathbf{A} = \mathfrak{P}$. Par conséquent, $\dim(\mathbf{A}) \leq \dim \bar{\mathbf{A}} = n$, ce qui termine la démonstration. ■

Remarque 16.3.1-2 : La proposition 16.3.1-3 est un cas particulier du résultat qui affirme que si \mathbf{A} est un anneau noëthérien, on a $\dim(\mathbf{A}[X]) = \dim(\mathbf{A}) + 1$. (Cf. [Mat] §14 page 83.)

16.3.2 Le cas des algèbres de type fini sur un corps algébriquement clos

Soient k un corps algébriquement clos et \mathbf{B} une k -algèbre de type fini engendrée par des éléments b_1, \dots, b_n . Le homomorphisme d'anneaux $\varphi : \mathbf{A} := k[X_1, \dots, X_n] \rightarrow \mathbf{B}$, déterminé par $X_i \mapsto b_i$, est alors *surjectif* ; notons \mathfrak{B} son noyau. La surjectivité de φ entraîne l'injectivité de l'application $\varphi^{-1} : \text{Parties}(\mathbf{B}) \rightarrow \text{Parties}(\mathbf{A})$, en particulier on a le diagramme⁽⁶⁰⁾ :

$$\begin{array}{ccccc}
 \text{Spec}(\mathbf{B}) & \xrightarrow[\cong]{\varphi^{-1}} & V_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{B}) & \subseteq & \text{Spec}(\mathbf{A}) \\
 \subseteq \uparrow & & \subseteq \uparrow & & \subseteq \uparrow \\
 \text{Spm}(\mathbf{B}) & \xrightarrow[\cong]{\varphi^{-1}} & V_{\mathfrak{m}}(\mathfrak{B}) & \subseteq & \text{Spm}(\mathbf{A}) \\
 & & \uparrow \Xi_{\mathbf{A}} & & \uparrow \Xi_{\mathbf{A}} \\
 & & \text{Z}(\sqrt{\mathfrak{B}}) = \text{Z}(\mathfrak{B}) & \subseteq & k^n
 \end{array}$$

qui montre que l'espace $\text{Spm}(\mathbf{B})$ s'identifie (topologiquement) à l'ensemble algébrique $V(\mathfrak{B})$. La proposition 16.3.1-2 et le théorème 16.3.1-3 sont donc également vérifiées pour l'algèbre \mathbf{B} .

Remarque 16.3.2-1 : On observera dans ce qui précède que le spectre d'une algèbre de type fini \mathbf{B} sur un corps algébriquement clos s'identifie à un ensemble algébrique "plongé" dans un espace affine k^n pour n suffisamment grand. L'espace topologique ainsi obtenu est indépendant du $n \gg 0$ mais aussi du radical de \mathbf{B} . En particulier l'application canonique $\text{Spec}(\text{Red}(\mathbf{B}) := \mathbf{B}/\sqrt{0}) \rightarrow \text{Spec}(\mathbf{B})$ est un *homéomorphisme* (de même pour Spm). Les constructions de cette section sont donc insuffisamment riches pour distinguer les anneaux. La notion de "schéma affine" comblera ce défaut. (Cf. le théorème 16.6.3-1)

16.4 Le foncteur "Spec" vers la catégorie d'espaces topologiques

16.4.1 Applications continues associées aux homomorphismes d'anneaux

Soit $\alpha : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ un homomorphisme d'anneaux. L'application $\alpha^{-1} : \text{Parties}(\mathbf{B}) \rightarrow \text{Parties}(\mathbf{A})$ associe à tout idéal (resp. premier) de \mathbf{B} , un idéal (resp. premier) de \mathbf{A} ; mais il est faux en général que l'image inverse d'un idéal maximal soit également un idéal maximal⁽⁶¹⁾. L'application α^{-1} définit en tout cas une application, notée $\text{Spec}(\alpha)$, de $\text{Spec}(\mathbf{B})$ à valeurs dans $\text{Spec}(\mathbf{A})$.

Lemme 16.4.1-1 : *L'application $\text{Spec}(\alpha) : \text{Spec}(\mathbf{B}) \rightarrow \text{Spec}(\mathbf{A})$ est continue.*

⁶⁰ Les deux lignes supérieures ont lieu en toute généralité, elle reposent uniquement sur le fait que φ est *surjectif*.

⁶¹ Un contre-exemple évident est donné par l'inclusion canonique $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$. L'image inverse d'un idéal maximal est toujours maximal lorsque α est surjective et aussi lorsque \mathbf{A} et \mathbf{B} sont des k -algèbres de type fini et que α est un homomorphisme de k -algèbres ; nous y reviendrons dans la section 16.4.2.

Démonstration : Il suffira de montrer que l'image inverse par $\text{Spec}(\alpha)$ d'une partie fermée $V_{\mathfrak{p}}(A)$ de $\text{Spec}(A)$ est fermée dans $\text{Spec}(B)$. Or, un idéal premier \mathfrak{P} de B appartient à l'image inverse par $\text{Spec}(\alpha)$ de $V_{\mathfrak{p}}(A)$, si et seulement si, $\alpha^{-1}(\mathfrak{P}) \supseteq A$; et ceci équivaut à dire que $\mathfrak{P} \supseteq \alpha(A)$. Par conséquent, $\text{Spec}(\alpha)^{-1}(V_{\mathfrak{p}}(A)) = V_{\mathfrak{p}}(\alpha(A))$. ■

Fonctorialité

La correspondance qui associe à un anneau A son spectre $\text{Spec}(A)$ et à un homomorphisme d'anneaux $\alpha : A \rightarrow B$ l'application $\text{Spec}(\alpha) : \text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$ est fonctorielle *contravariante* de la catégorie des anneaux vers la catégorie des espaces topologiques.

De plus, tout fermé $F \subseteq \text{Spec}(A)$ étant de la forme $V_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{A})$, où \mathfrak{A} est un idéal de A , on a une identification canonique entre l'espace topologique F et $\text{Spec}(A/\mathfrak{A})$. En effet, les idéaux premiers de A contenant \mathfrak{A} sont les images réciproques par la projection canonique $\nu : A \rightarrow A/\mathfrak{A}$, des idéaux premiers de A/\mathfrak{A} ; le plongement $F \hookrightarrow \text{Spec}(A)$ donné par l'inclusion, s'identifie alors à $\text{Spec}(\nu)$.

16.4.2 Le foncteur "Spm"

Le fait que l'image inverse par un homomorphisme d'anneaux d'un idéal maximal puisse ne pas être maximal, introduit un obstacle à la définition d'un foncteur de la catégorie des anneaux vers la catégorie des espaces topologiques dont tous les points sont fermés. Le but de cette section est de montrer que lorsque l'on se restreint aux catégories d'algèbres sur un corps algébriquement clos, cet obstacle disparaît et le foncteur Spm existe, de même qu'un plongement *naturel* $\text{Spm} \subseteq \text{Spec}$.

Les foncteurs Spec et Spm sur la catégorie des k -algèbres de type fini

Soit $\alpha : A = k[X_1, \dots, X_n] \rightarrow B = k[Y_1, \dots, Y_m]$ un homomorphisme de k -algèbres où n et m sont arbitraires. Notons $P_i(\mathbf{Y}) := \alpha(X_i)$, pour $i = 1, \dots, n$. Pour tout idéal maximal $\mathfrak{M}_{\mathbf{b}} \in B$, où $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m)$, l'anneau quotient $B/\mathfrak{M}_{\mathbf{b}}$ s'identifie au corps k et la composée :

$$A \xrightarrow{\alpha} B \longrightarrow B/\mathfrak{M}_{\mathbf{b}} \cong k,$$

est *surjective*; l'idéal $\alpha^{-1}(\mathfrak{M}_{\mathbf{b}})$ est donc maximal dans A et s'identifie à un certain $\mathfrak{M}_{\mathbf{a}}$. On vérifie que $\mathbf{a} = (P_1(\mathbf{b}), \dots, P_n(\mathbf{b}))$ et l'application $\text{Spec}(\alpha) : \text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$ se restreint en une application de $\text{Spm}(B)$ à valeurs dans $\text{Spm}(A)$, qui, modulo les homéomorphismes Ξ_B et Ξ_A de la section 16.3.1, est donnée par $\tilde{\alpha} : \mathbf{b} \mapsto \mathbf{a}$. On a donc :

$$\begin{array}{ccc} B & \xleftarrow{\alpha} & A \\ \text{Spec} \downarrow & & \downarrow \text{Spec} \\ \text{Spec}(B) & \xrightarrow{\text{Spec}(\alpha)} & \text{Spec}(A), & \text{où } \mathfrak{P} \xrightarrow{\text{Spec}(\alpha)} \alpha^{-1}(\mathfrak{P}) \\ \subseteq \uparrow & & \uparrow \subseteq & \\ \text{Spm}(B) & \xrightarrow{\text{Spec}(\alpha)} & \text{Spm}(A), & \text{où } \mathfrak{M}_{\mathbf{b}} \xrightarrow{\text{Spec}(\alpha)} \alpha^{-1}(\mathfrak{M}_{\mathbf{b}}) = \mathfrak{M}_{\mathbf{a}} \\ \Xi_B \uparrow \cong & & \cong \uparrow \Xi_A & \Xi_B \uparrow \quad \uparrow \Xi_A \\ k^m & \xrightarrow{\tilde{\alpha}} & k^n, & \text{où } \mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m) \xrightarrow{\tilde{\alpha}} (P_1(\mathbf{b}), \dots, P_n(\mathbf{b})) = \mathbf{a} \end{array} \quad (\mathcal{D})$$

Lorsque, dans ce qui précède, \mathbf{A} et \mathbf{B} sont des k -algèbres de type fini, il existe des entiers $n, m \in \mathbb{N}$, des surjections de k -algèbres $\nu : k[X_1, \dots, X_n] \rightarrow \mathbf{A}$ et $\mu : k[Y_1, \dots, Y_m] \rightarrow \mathbf{B}$, et un homomorphisme d'anneaux $\alpha' : k[X_1, \dots, X_n] \rightarrow k[Y_1, \dots, Y_m]$, tels que les diagrammes suivants sont commutatifs :

$$\begin{array}{ccc}
 k[X_1, \dots, X_n] & \xrightarrow{\alpha'} & k[Y_1, \dots, Y_m] & \text{Spec}(k[X_1, \dots, X_n]) & \xleftarrow{\text{Spec}(\alpha')} & \text{Spec}(k[Y_1, \dots, Y_m]) \\
 \nu \downarrow & & \downarrow \mu & \text{Spec}(\nu) \uparrow \subseteq & & \subseteq \uparrow \text{Spec}(\mu) \\
 \mathbf{A} & \xrightarrow{\alpha} & \mathbf{B} & \text{Spec}(\mathbf{A}) & \xleftarrow{\text{Spec}(\alpha)} & \text{Spec}(\mathbf{B})
 \end{array}$$

L'application $\text{Spec}(\alpha) : \text{Spec}(\mathbf{B}) \rightarrow \text{Spec}(\mathbf{A})$ est donc restriction de $\text{Spec}(\alpha')$ et par conséquent $\text{Spec}(\alpha)(\text{Spm}(\mathbf{B})) \subseteq \text{Spm}(\mathbf{A})$. Le diagramme (\mathcal{D}) est donc valable en toute généralité si l'on remplace k^n et k^m par les ensembles des zéros des idéaux noyaux de ν et μ respectivement.

16.5 Catégorie des espaces (localement) annelés

Définitions 16.5-1 :

- Soit \mathbf{Y} un espace topologique. Un faisceau $\underline{\mathbf{A}}$ sur \mathbf{Y} est dit « *faisceau d'anneaux* », si pour tout ouvert $U \subseteq \mathbf{Y}$, le groupe $\underline{\mathbf{A}}(U)$ est muni d'une structure d'anneau (avec identité multiplicative); de sorte que les morphismes de restriction $\rho_V^U : \underline{\mathbf{A}}(U) \rightarrow \underline{\mathbf{A}}(V)$, sont des homomorphismes d'anneaux.
- Soient $\underline{\mathbf{A}}$ et $\underline{\mathbf{B}}$ deux faisceaux d'anneaux sur \mathbf{Y} . On appelle « *morphisme de faisceaux d'anneaux de $\underline{\mathbf{A}}$ vers $\underline{\mathbf{B}}$* », la donnée d'un morphisme de faisceaux $\alpha : \underline{\mathbf{A}} \rightarrow \underline{\mathbf{B}}$ tel que pour tout $U \in \mathbf{Y}$, l'application $\alpha(U) : \underline{\mathbf{A}}(U) \rightarrow \underline{\mathbf{B}}(U)$, est un homomorphisme d'anneaux.

Exercice 16.5-1 : De manière analogue, on peut définir la notion de « *préfaisceau d'anneaux* ».

- Montrer que le faisceau associé à un préfaisceau d'anneau est un faisceau d'anneaux.
- Montrer qu'un faisceau d'anneau (non nul) possède des sections globales non nulles.

Définitions 16.5-2 :

- On appelle « *espace annelé* », la donnée d'un couple $(\mathbf{Y}; \mathcal{O}_{\mathbf{Y}})$ constitué d'un espace topologique \mathbf{Y} et d'un faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_{\mathbf{Y}}$ sur \mathbf{Y} , que l'on appelle « *le faisceau structural de l'espace annelé* ».
- On appelle « *espace localement annelé* », la donnée d'un espace annelé $(\mathbf{Y}; \mathcal{O}_{\mathbf{Y}})$ tel que pour tout $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$, l'anneau $(\mathcal{O}_{\mathbf{Y}})_{(\mathbf{y})}$ des germes des sections de $\mathcal{O}_{\mathbf{Y}}$ en \mathbf{y} , soit un *anneau local*.
- Soient $(\mathbf{X}, \mathcal{O}_{\mathbf{X}})$ et $(\mathbf{Y}, \mathcal{O}_{\mathbf{Y}})$ deux espaces annelés. On appelle « *morphisme d'espaces annelés de $(\mathbf{X}, \mathcal{O}_{\mathbf{X}})$ à valeurs dans $(\mathbf{Y}, \mathcal{O}_{\mathbf{Y}})$* », la donnée d'un couple $(f; f^\#)$, où $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ est une application continue et où $f^\# : \mathcal{O}_{\mathbf{Y}} \rightarrow f_*\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ est un morphisme de faisceaux d'anneaux.
- Un morphisme d'espaces annelés $(f; f^\#)$ entre deux espaces *localement annelés* : $(\mathbf{X}, \mathcal{O}_{\mathbf{X}})$ et $(\mathbf{Y}, \mathcal{O}_{\mathbf{Y}})$, est dit « *localement annelé* », lorsque les homomorphismes d'anneaux induits sur les germes $(\mathcal{O}_{\mathbf{Y}})_{(f(x))} \rightarrow (\mathcal{O}_{\mathbf{X}})_{(x)}$ sont des homomorphismes *locaux*⁽⁶²⁾, pour tout $x \in \mathbf{X}$.

⁶² Un homomorphisme d'anneaux $\alpha : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ entre deux anneaux locaux est dit « *local* » lorsque $\alpha^{-1}(\mathfrak{M}_{\mathbf{B}}) = \mathfrak{M}_{\mathbf{A}}$.

Remarque 16.5-1 et rappel : Pour toute application continue $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ et tout faisceau \mathcal{F} sur \mathbf{X} , on note $f_*\mathcal{F}$ le préfaisceau sur \mathbf{Y} « image directe par f », défini par : $U \rightsquigarrow \mathcal{F}(f^{-1}(U))$, pour tout ouvert $U \subseteq \mathbf{Y}$. Le préfaisceau $f_*\mathcal{F}$ est un faisceau. De même, si $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ est un morphisme de faisceaux sur \mathbf{X} , la correspondance qui associe

$$U \rightsquigarrow \alpha(f^{-1}(U)) : \mathcal{F}(f^{-1}(U)) \rightarrow \mathcal{G}(f^{-1}(U)),$$

est un morphisme de faisceaux, noté $f_*\alpha$, de $f_*\mathcal{F}$ vers $f_*\mathcal{G}$.

Notons $\text{Fais}(\mathbf{X})$ la catégorie des faisceaux sur \mathbf{X} . La correspondance $f_* : \text{Fais}(\mathbf{X}) \rightsquigarrow \text{Fais}(\mathbf{Y})$, qui associe $\mathcal{F} \rightsquigarrow f_*\mathcal{F}$ et $\alpha \rightsquigarrow f_*\alpha$, est un foncteur *additif* de $\text{Fais}(\mathbf{X})$ vers $\text{Fais}(\mathbf{Y})$; elle transforme la sous-catégorie de $\text{Fais}(\mathbf{X})$ des faisceaux d'anneaux sur \mathbf{X} (où les morphismes sont les morphismes de faisceaux d'anneaux), vers la sous-catégorie de $\text{Fais}(\mathbf{Y})$ des faisceaux d'anneaux.

Soient $(\mathbf{X}, \mathcal{O}_{\mathbf{X}})$ un espace annelé et $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ une application continue. Le couple $(\mathbf{Y}; f_*\mathcal{O}_{\mathbf{X}})$ est alors un espace annelé, et $(f, \text{id}_{f_*\mathcal{O}_{\mathbf{X}}})$ est un morphisme d'espaces annelés de $(\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}})$ vers $(\mathbf{Y}; \mathcal{O}_{\mathbf{Y}})$.

Soient $(\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}})$, $(\mathbf{Y}; \mathcal{O}_{\mathbf{Y}})$ et $(\mathbf{Z}; \mathcal{O}_{\mathbf{Z}})$ trois espaces annelés et

$$(f; f^\#) : (\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}}) \rightarrow (\mathbf{Y}; \mathcal{O}_{\mathbf{Y}}) \quad \text{et} \quad (g; g^\#) : (\mathbf{Y}; \mathcal{O}_{\mathbf{Y}}) \rightarrow (\mathbf{Z}; \mathcal{O}_{\mathbf{Z}}),$$

des morphismes d'espaces annelés. La composée $g \circ f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Z}$ est continue et l'on a des morphisme de faisceaux d'algèbres :

$$g^\# : \mathcal{O}_{\mathbf{Z}} \rightarrow g_*\mathcal{O}_{\mathbf{Y}} \quad \text{et} \quad f^\# : \mathcal{O}_{\mathbf{Y}} \rightarrow f_*\mathcal{O}_{\mathbf{X}},$$

et comme $g_* : \text{Fais}(\mathbf{Y}) \rightsquigarrow \text{Fais}(\mathbf{Z})$ est fonctorielle, l'image directe $g_*(f^\#)$ du morphisme d'anneaux $f^\#$, est un morphisme d'anneaux $g_*(f^\#) : g_*\mathcal{O}_{\mathbf{Y}} \rightarrow g_*f_*\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$, où $g_* \circ f_* = (g \circ f)_*$. On définit alors la composée de $(g; g^\#)$ par $(f; f^\#)$ par :

$$(g; g^\#) \circ (f; f^\#) := (g \circ f; g_*(f^\#) \circ g^\#)$$

Définition 16.5-1 : Les espaces (localement) annelés et les morphismes (localement) annelés munis de cette lois de composition, constituent la « catégorie des espaces (localement) annelés ».

16.6 Schéma affine associé à un anneau commutatif

Soit \mathbf{A} un anneau arbitraire et notons $\mathbf{X} = \text{Spec}(\mathbf{A})$. Nous allons munir l'espace topologique \mathbf{X} d'un faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$.

Ouverts principaux

La topologie spectrale admet une base d'ouverts qui jouera un rôle fondamental dans le développement de la théorie, c'est l'ensemble des « ouverts principaux ».

Définition 16.6-1 : On appelle « ouvert principal » de $\text{Spec}(\mathbf{A})$ le complémentaire d'un fermé de la forme $V_{\mathfrak{p}}(\langle a \rangle)$, où a désigne un élément arbitraire de \mathbf{A} ; on note $D(a) := V_{\mathfrak{p}}(\langle a \rangle)^c$.

Lemme 16.6-1 : Soit \mathbf{A} un anneau commutatif arbitraire.

- 1) L'ensemble des ouverts principaux de $\text{Spec}(\mathbf{A})$ constitue une base pour la topologie spectrale de $\text{Spec}(\mathbf{A})$.
- 2) Lorsque \mathbf{A} est noëthérien, tout ouvert est réunion finie d'ouverts principaux.

Démonstration :

- 1) En effet, soit U un ouvert de $\text{Spec}(\mathbf{A})$ de complémentaire, le fermé \mathbf{F} . On a $\mathbf{F} = V_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{A})$ pour un certain idéal \mathfrak{A} de \mathbf{A} . Notons $\mathfrak{A} = \langle f_i \rangle_{i \in I}$, alors $V_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{A}) = \bigcap_{i \in I} V_{\mathfrak{p}}(\langle f_i \rangle)$ et $U = \bigcup_{i \in I} D(f_i)$.
- 2) Lorsque \mathbf{A} est noëthérien, il existe un ensemble fini $\{a_1, \dots, a_r\}$ d'éléments de \mathbf{A} tel que :

$$\mathfrak{A} = \langle a_1, \dots, a_r \rangle = \langle a_1 \rangle + \dots + \langle a_r \rangle,$$

d'où $U = D(a_1) \cup \dots \cup D(a_r)$. ■

Exercice 16.6-1 :

- a) Montrer que la famille des ouverts principaux est stable par intersection finie.
- b) Montrer que l'intersection des ouverts $D(f)$ et $D(g)$ est vide, si et seulement si, fg est nilpotent.
- c) Montrer que $\text{Spec}(\mathbf{A}) = D(f_1) \cup \dots \cup D(f_r)$, si et seulement si, $1 \in \langle f_1, \dots, f_r \rangle$.

16.6.1 Faisceau d'anneaux sur $\text{Spec}(\mathbf{A})$

Nous allons définir maintenant la structure d'« espace localement annelé » de $\mathbf{X} = \text{Spec}(\mathbf{A})$; le couple $(\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}})$ sera alors appelé « le schéma affine associé à \mathbf{A} ».

16.6.1-1 Rappel sur les anneaux de fractions-II : (Suite du rappel 16.3.1-2, page 224.)

Soit \mathbf{A} un anneau commutatif arbitraire.

Définition 16.6.1-1.1 et remarque : Lorsque le système multiplicatif S est le complémentaire d'un idéal premier $\mathfrak{P} \subseteq \mathbf{A}$, l'anneau $S^{-1}\mathbf{A}$ se note $\mathbf{A}_{\mathfrak{P}}$; il est appelé : « le localisé de \mathbf{A} en \mathfrak{P} ». L'application canonique $\nu_S : \mathbf{A} \rightarrow S^{-1}\mathbf{A}$ sera notée $\nu_{\mathfrak{P}}$.

Le lemme 16.3.1-2.2 dans le rappel 16.3.1-2 (page 224), montre que $\mathbf{A}_{\mathfrak{P}}$ possède un unique idéal maximal, à savoir $S^{-1}\mathfrak{P}$, il s'agit donc d'un anneau *local*.

La localisation comme foncteur

Considérons un \mathbf{A} -module M . Soit S un système multiplicatif de \mathbf{A} et définissons, comme dans le cas des anneaux, la relation \mathcal{R}_M sur $M \times S$ par

$$(m, s) \mathcal{R}_M (n, t), \quad \text{si et seulement si, il existe } u \in S \text{ tel que } u(tm - sn) = 0.$$

La relation \mathcal{R}_M est une équivalence et l'on note $S^{-1}M$ l'ensemble quotient et $\frac{m}{s}$ ou m/s la classe du couple (m, s) ; tout élément de $S^{-1}M$ admet une représentation sous la forme $\frac{m}{s}$. Les expressions analogues à (§)(dans le rappel 16.3.1-2), munissent alors $S^{-1}M$ d'une structure de $S^{-1}\mathbf{A}$ -module et l'application

$$\begin{aligned} \nu(M)_S : M &\longrightarrow S^{-1}M \\ m &\longmapsto \frac{m}{1} \end{aligned}$$

notée également $\nu(M)_{\mathfrak{P}}$ lorsque $S = \mathbf{A} \setminus \mathfrak{P}$, est un morphisme de \mathbf{A} -modules dont le noyau est donné par l'ensemble des $m \in M$ dont l'annulateur dans \mathbf{A} rencontre S .

Soit $\alpha : M_1 \rightarrow M_2$ un morphisme de \mathbf{A} -modules. L'application $\alpha \times \text{id}_S : M_1 \times S \rightarrow M_2 \times S$ est compatible aux relations \mathcal{R}_{M_1} et \mathcal{R}_{M_2} et induit une application $S^{-1}\alpha : S^{-1}M_1 \rightarrow S^{-1}M_2$. On a :

$$S^{-1}\alpha\left(\frac{m}{s}\right) = \frac{\alpha(m)}{s}.$$

L'application $S^{-1}\alpha$ est un morphisme de $S^{-1}\mathbf{A}$ -modules et $S^{-1}(\alpha \circ \beta) = S^{-1}\alpha \circ S^{-1}\beta$. La correspondance $M \rightsquigarrow S^{-1}M$, $\alpha \rightsquigarrow S^{-1}\alpha$ est donc un fonctorielle (et additive) de $\text{Mod}(\mathbf{A})$ vers $\text{Mod}(S^{-1}\mathbf{A})$.

Exercice 16.6.1-1.1 : Soient \mathbf{A} un anneau commutatif, $S \subseteq \mathbf{A}$ un système multiplicatif et M un \mathbf{A} -module. Chaque élément $s \in S$ définit un endomorphisme de \mathbf{A} -module : $\mu(s) \in \text{End}_{\mathbf{A}}(M)$, par $\mu(s)(m) = sm$; notons $\mu(S) \subseteq \text{End}_{\mathbf{A}}(M)$ l'ensemble de ces endomorphismes. Prouver les assertions suivantes :

- Si $\mu(S) \subseteq \text{Iso}_{\mathbf{A}}(M)$, l'application canonique $M \rightarrow S^{-1}M$ est *bijective*.
- Tout $S^{-1}\mathbf{A}$ -module \mathcal{N} étant naturellement un \mathbf{A} -module, on peut calculer $S^{-1}\mathcal{N}$. Dédurre de la question précédente que l'application canonique $\mathcal{N} \rightarrow S^{-1}\mathcal{N}$ est *bijective*.
- Si $0 \in \mu(S)$, on a $S^{-1}M = \mathbf{0}$.

Proposition 16.6.1-1.1 :

- Le foncteur $S^{-1} : \text{Mod}(\mathbf{A}) \rightsquigarrow \text{Mod}(S^{-1}\mathbf{A})$ est exact.
- L'application $S^{-1}\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{A}} M \rightarrow S^{-1}M$, définie par $\frac{a}{s} \otimes m \mapsto \frac{am}{s}$, est un isomorphisme de $S^{-1}\mathbf{A}$ -modules.

Démonstration :

- Pour toute suite exacte de \mathbf{A} -modules :

$$\mathbf{0} \rightarrow M_1 \xrightarrow{\alpha} M_2 \xrightarrow{\beta} M_3 \rightarrow \mathbf{0}, \quad (*)$$

on doit montrer l'exactitude de la suite :

$$\mathbf{0} \rightarrow S^{-1}M_1 \xrightarrow{S^{-1}\alpha} S^{-1}M_2 \xrightarrow{S^{-1}\beta} S^{-1}M_3 \rightarrow \mathbf{0}.$$

Surjectivité de $S^{-1}\beta$. Evidente, puisque tout élément de $S^{-1}M_3$ est de la forme $(\frac{m_3}{s})$, et comme $m_3 = \beta(m_2)$ pour un certain $m_2 \in M_2$, on a $S^{-1}\beta(\frac{m_2}{s}) = \frac{m_3}{s}$.

Exactitude en $S^{-1}M_2$. Soit $\frac{m_2}{s} \in \ker(S^{-1}\beta)$. On a alors $\frac{\beta(m_2)}{s} = 0$, de sorte qu'il existe $u \in S$, tel que $0 = u\beta(m_2) = \beta(sm_2)$, et comme (*) est exacte, on aura $um_2 = \alpha(m_1)$, pour un certain $m_1 \in M_1$. Par conséquent, $\frac{um_2}{1} \in \text{im}(S^{-1}\alpha)$ et donc $\frac{m_2}{s} = \frac{1}{us} \frac{um_2}{1} \in \text{im}(S^{-1}\alpha)$.

Injectivité de $S^{-1}\alpha$. Lorsque $0 = S^{-1}\alpha(\frac{m_1}{s}) = \frac{\alpha(m_1)}{s}$, il existe $u \in S$ tel que $0 = u\alpha(m_1) = \alpha(sm_1)$, et comme α est injective dans (*), on déduit que $sm_1 = 0$ et donc $\frac{m_1}{s} = \frac{1}{s} \frac{m_1}{1} = 0$.

- Tout élément de $S^{-1}M$ est de la forme $\frac{m}{s}$, et l'application $S^{-1}\mathbf{A} \otimes M \rightarrow S^{-1}M$ est bien *surjective*. D'autre part, le morphisme canonique $\nu_S : \mathbf{A} \rightarrow S^{-1}\mathbf{A}$, vu comme morphisme de \mathbf{A} -modules, donne lieu, après application du foncteur $\bullet \rightsquigarrow \bullet \otimes_{\mathbf{A}} M$, à un morphisme (de \mathbf{A} -modules) $M \rightarrow S^{-1}\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{A}} M$ qui fait correspondre $m \mapsto \frac{1}{1} \otimes m$. La localisation par S , donne alors (cf. exercice 16.6.1-1.1 (b)) un morphisme :

$$\begin{array}{ccc} S^{-1}M & \longrightarrow & S^{-1}\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{A}} M \\ \frac{m}{s} & \longmapsto & \frac{1}{s} \otimes m \end{array}$$

La composition de $S^{-1}\mathbf{A} \otimes M \rightarrow S^{-1}M$ avec $S^{-1}M \rightarrow S^{-1}\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{A}} M$, est alors l'identité sur $S^{-1}\mathbf{A} \otimes M$, ce qui entraîne l'injectivité de $S^{-1}\mathbf{A} \otimes M \rightarrow S^{-1}M$. ■

Lemme 16.6.1-2 (technique et exercice) : Soient \mathbf{A} un anneau commutatif et $\mathfrak{P} \in \text{Spec}(\mathbf{A})$.

a) Montrer que $s \notin \mathfrak{P}$, si et seulement si, $D(s) \ni \mathfrak{P}$.

b) Soit $a \in \mathbf{A}$ tel que $\nu_{\mathfrak{P}}(a) = 0$. Montrer qu'il existe un voisinage principal $D(f)$ de \mathfrak{P} tel que, pour tout $\Omega \in D(f)$, on a $\nu_{\Omega}(a) = 0$.

c) Soit $a \in \mathbf{A}$ tel que $\nu_{\mathfrak{P}}(a)$ est inversible dans $\mathbf{A}_{\mathfrak{P}}$. Montrer qu'il existe un voisinage principal $D(f)$ de \mathfrak{P} tel que, pour tout $\Omega \in D(f)$, l'élément $\nu_{\Omega}(a) \in \mathbf{A}_{\Omega}$ est inversible.

Démonstration de (c) : Soit $\nu_{\mathfrak{P}}(a) = \frac{a}{1}$ inversible dans $S^{-1}\mathbf{A}$. Il existe alors $b \in \mathbf{A}$ et $s \in \mathbf{A} \setminus \mathfrak{P}$ tels que $\frac{a}{1} \frac{b}{s} = \frac{1}{1}$, et donc, $u(ab - s) = 0$ (*), pour un certain $u \in S$. La question (b) montre alors que sur le voisinage $W = D(u) \cap D(s) = D(su)$, la relation (*) continuera d'être vérifiée avec $us \notin \Omega \in W$; l'élément $\nu_{\Omega}(a)$ sera donc inversible dans \mathbf{A}_{Ω} , pour tout $\Omega \in W$. ■

Espace étalé au-dessus de $\text{Spec}(\mathbf{A})$

Soit \mathbf{A} un anneau commutatif arbitraire et notons $\mathbf{X} := \text{Spec}(\mathbf{A})$. Considérons l'ensemble $\mathcal{E}_{\mathbf{A}} := \coprod_{\mathfrak{P} \in \mathbf{X}} \mathbf{A}_{\mathfrak{P}}$ et la projection ensembliste $\pi : \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{X}$ qui associe à chaque élément de $\mathbf{A}_{\mathfrak{P}}$ le point $\mathfrak{P} \in \mathbf{X}$. Chaque élément $a \in \mathbf{A}$ définit alors une section $\Sigma(a)$ de π par $\Sigma(a)(\mathfrak{P}) := \nu_{\mathfrak{P}}(a)$.

Exercice 16.6.1-2 : Montrer que la section $\Sigma(a)$ est nulle, si et seulement si, $a = 0$.

Nous sommes maintenant en mesure de définir le faisceau $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$. Pour tout ouvert $U \subseteq \mathbf{X}$, on note $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}(U)$: l'ensemble des sections σ de π au-dessus de U , telles que pour tout $\mathfrak{P} \in U$, il existe un voisinage ouvert $V_{\mathfrak{P}} \subseteq U$ et des éléments $a, b \in \mathbf{A}$, où $\nu_{\Omega}(y)$ est *inversible* dans \mathbf{A}_{Ω} , pour tout $\Omega \in V_{\mathfrak{P}}$, tels que

$$\boxed{\sigma(\Omega) = \frac{\nu_{\Omega}(a)}{\nu_{\Omega}(b)} \in \mathbf{A}_{\Omega}} \quad \text{pour tout } \Omega \in V_{\mathfrak{P}}.$$

On remarquera maintenant que le fait que la famille de toutes les sections (locales) de $\pi : \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{X}$ constituent un *faisceau*, fait que notre définition des sections $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}(U)$, étant de nature locale, fait automatiquement de la correspondance $U \rightsquigarrow \mathcal{O}_{\mathbf{X}}(U)$ un *faisceau*.

Etant données deux sections arbitraires de $\pi : \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{X}$, au-dessus d'un ouvert $U \subseteq \mathbf{X}$, on définit leur somme $\sigma + \tau$ et leur produit $\sigma \cdot \tau$, point par point, par :

$$(\sigma + \tau)(\mathfrak{P}) := \sigma(\mathfrak{P}) + \tau(\mathfrak{P}) \in \mathbf{A}_{\mathfrak{P}} \quad \text{et} \quad (\sigma \cdot \tau)(\mathfrak{P}) := \sigma(\mathfrak{P})\tau(\mathfrak{P}) \in \mathbf{A}_{\mathfrak{P}},$$

pour tout $\mathfrak{P} \in U$.

Lemme 16.6.1-3 (et exercice) :

- a) Pour toutes $\sigma, \tau \in \mathcal{O}_X(U)$, les sections $\sigma + \tau$ et $\sigma \cdot \tau$ appartiennent à $\mathcal{O}_X(U)$. En particulier, $\mathcal{O}_X(U)$ est un anneau et \mathcal{O}_X est un faisceau d'anneaux sur X .
- b) Pour tout $\mathfrak{P} \in X$, l'anneau des germes de sections $(\mathcal{O}_X)_{(\mathfrak{P})}$ s'identifie à l'anneau local $\mathbf{A}_{\mathfrak{P}}$.

Démonstration de (b) : Soit $\mathfrak{P} \in X$. Pour tout voisinage ouvert U de \mathfrak{P} et toute section $\sigma \in \mathcal{O}_X(U)$, l'élément $\sigma(\mathfrak{P})$ appartient, par définition, à l'anneau $\mathbf{A}_{\mathfrak{P}}$, d'où une application bien définie, d'évaluation en $\mathfrak{P} : \mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathbf{A}_{\mathfrak{P}}$. Cette application étant clairement compatible aux opérations d'addition et produit, est un homomorphisme d'anneaux, compatible également aux restrictions d'ouverts. La limite inductive de ces applications :

$$\xi_{\mathfrak{P}} : \varinjlim_{U \ni \mathfrak{P}} \mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathbf{A}_{\mathfrak{P}},$$

est donc canoniquement définie.

Injectivité de $\xi_{\mathfrak{P}}$. Comme la famille des voisinages ouverts de \mathfrak{P} est filtrante supérieurement, tout germe de section de \mathcal{O}_X dont l'image dans $\mathbf{A}_{\mathfrak{P}}$ est nulle, admettra une représentation de la forme $\frac{a}{s}$, où $a \in \mathbf{A}$, $s \notin \mathfrak{P}$ et $\frac{s}{1}$ inversible dans $\mathbf{A}_{\mathfrak{P}}$. Lorsque $\frac{a}{s} = 0 \in \mathbf{A}_{\mathfrak{P}}$, il existe $u \notin \mathfrak{P}$ tel que $ua = 0$. Alors $\nu_{\Omega}(a) = 0$ sur le voisinage $D(u)$ de \mathfrak{P} et donc la restriction de $\frac{a}{s}$ à l'ouvert $U \cap D(u)$ sera nulle. Le germe $\xi_{\mathfrak{P}}$ est donc nul.

Surjectivité de $\xi_{\mathfrak{P}}$. Les éléments de $\mathbf{A}_{\mathfrak{P}}$ sont de la forme $\frac{a}{s}$, où $s \notin \mathfrak{P}$; en particulier $\frac{s}{1}$ est inversible dans $\mathbf{A}_{\mathfrak{P}}$. Or le lemme 16.6.1-2 (c) prouve bien l'existence d'un voisinage ouvert W de \mathfrak{P} sur lequel $\frac{s}{1}$ est inversible en chaque \mathbf{A}_{Ω} , pour tout $\Omega \in W$, d'où la surjectivité de $\xi_{\mathfrak{P}}$. ■

Définition 16.6.1-2 : Soit \mathbf{A} un anneau commutatif arbitraire et $X := \text{Spec}(\mathbf{A})$. L'espace topologique localement annelé $(X; \mathcal{O}_X)$ est appelé « le schéma affine associé à \mathbf{A} ».

On appellera « schéma affine noëthérien » tout schéma affine associé à un anneau noëthérien.

16.6.2 Sections du faisceau structural sur un schéma noëthérien

Dans toute cette section \mathbf{A} désignera un anneau *noëthérien* et l'on notera $X = \text{Spec}(\mathbf{A})$.

Sections du faisceau structural au-dessus des ouverts principaux

Pour tout $f \in \mathbf{A}$, les idéaux premiers $\mathfrak{P} \in D(f)$ sont ceux vérifiant $f \notin \mathfrak{P}$. Chaque élément a/f^m de \mathbf{A}_f définit alors une section $\xi_f(a/f^m) \in \mathcal{O}_X(D(f))$ par $\Omega \mapsto \nu_{\Omega}(a)/\nu_{\Omega}(f)^m$. L'application :

$$\xi_f : \mathbf{A}_f \rightarrow \mathcal{O}_X(D(f)),$$

ainsi définie est clairement un homomorphisme d'anneaux.

Proposition 16.6.2-1 : Soit \mathbf{A} un anneau *noëthérien* et $X = \text{Spec}(\mathbf{A})$.

- a) Pour tout $f \in \mathbf{A}$, l'application canonique $\xi_f : \mathbf{A}_f \rightarrow \mathcal{O}_X(D(f))$ est un isomorphisme d'anneaux.
- b) En particulier, $\Gamma(X; \mathcal{O}_X) \cong \mathbf{A}$.

Démonstration :

- a) **Injectivité de ξ_f .** Soit $a/f^m \in \mathbf{A}_f$ tel que pour tout $\mathfrak{P} \notin D(f)$, on ait $a/f^m = 0$ dans $\mathbf{A}_{\mathfrak{P}}$. Notons $\mathfrak{A} := \text{Annul}_{\mathbf{A}}(a)$ et supposons que $\mathfrak{A} \cap S(f) = \emptyset$, où $S(f) := \{f^k\}_{k \in \mathbb{N}}$. La famille $\mathcal{F}(f)$ des idéaux de \mathbf{A} qui ne rencontrent pas $S(f)$ est *inductive*, il existe donc un idéal \mathfrak{B} maximal dans la famille $\mathcal{F}(f)$ contenant \mathfrak{A} . On montre que \mathfrak{B} est *premier*; mais alors $\mathfrak{B} \in D(f)$ et $a/f^m \neq 0$ dans $\mathbf{A}_{\mathfrak{B}}$. Ceci est contradictoire et nécessairement $\mathfrak{A} \cap S(f) \neq \emptyset$, on a donc $a/f^m = 0$ dans \mathbf{A}_f .

a) **Surjectivité de ξ_f .** Soit $\sigma \in \mathcal{O}_X(D(f))$. Par définition, pour chaque $\mathfrak{P} \not\ni f$, il existe $a_{\mathfrak{P}} \in \mathbf{A}$ et $s_{\mathfrak{P}} \notin \mathfrak{P}$ tels que :

$$\sigma(\Omega) = \nu_{\Omega}(a_{\mathfrak{P}})/\nu_{\Omega}(s_{\mathfrak{P}}),$$

pour tout Ω appartenant au voisinage $D(f) \cap D(s_{\mathfrak{P}})$ de \mathfrak{P} . Comme \mathbf{X} est un espace noëthérien nous pouvons recouvrir $D(f)$ par un nombre fini des ouverts $D(s_{\mathfrak{P}})$, notons les $\{D(s_1), D(s_2), \dots, D(s_r)\}$. La condition de compatibilité pour chaque couple $a_i/s_i \in \mathbf{A}_{s_i}$ et $a_j/s_j \in \mathbf{A}_{s_j}$ se lit sur l'ouvert $D(s_i s_j)$ et, suite à la question précédente, il existera des entiers $n(i, j) \in \mathbb{N}$, tels que l'on ait les égalités suivantes dans \mathbf{A} :

$$a_i s_j (s_i s_j)^{n(i, j)} = a_j s_i (s_i s_j)^{n(i, j)}, \quad \text{soit,} \quad (a_i s_i^{n(i, j)}) s_j^{n(i, j)+1} = (a_j s_j^{n(i, j)}) s_i^{n(i, j)+1}.$$

Remarquons maintenant que ces égalités sont toujours valables si l'on remplace les entiers $n(i, j)$ par un seul et unique entier $N \in \mathbb{N}$ suffisamment grand. Posons alors pour chaque $i = 1, \dots, r$:

$$A_i := a_i s_i^N \quad \text{et} \quad S_i := s_i^{N+1},$$

de sorte que $A_i/S_i = a_i/s_i$ dans \mathbf{A}_{s_i} , $D(S_i) = D(s_i)$ et $A_i S_j = A_j S_i$ pour tous $i, j = 1, \dots, r$.

Ceci étant, la condition $D(f) \subseteq D(s_1) \cup D(s_2) \cup \dots \cup D(s_r)$, équivaut à $f \in \sqrt{\langle S_1, \dots, S_r \rangle}$; il existe donc un entier $M \in \mathbb{N}$ et des éléments $B_i \in \mathbf{A}$, tels que : $f^M = \sum_{i=1}^r B_i S_i$. Posons : $C = \sum_{i=1}^r B_i A_i$; alors, pour chaque $j = 1, \dots, r$, on a :

$$C S_j = \sum_{i=1}^r B_i A_i S_j = \sum_{i=1}^r B_i S_i A_j = f^M A_j,$$

et ceci signifie très précisément que la section de $\mathcal{O}_X(D(f))$ définie par $C/f^M \in \mathbf{A}_f$, lorsque restreinte à $D(f s_i)$, s'identifie à la section définie par a_i/s_i . Ce qui termine la démonstration de la question (a).

b) Comme $\mathbf{X} = D(1)$, on a bien $\mathcal{O}_X(\mathbf{X}) = \mathbf{A}$. ■

Exercice 16.6.2-1 : Soit \mathbf{A} un anneau tel que $\text{Spec}(\mathbf{A})$ possède deux composantes connexes : C_1 et C_2 .

a) Justifiez, à l'aide de la proposition 16.6.2-1, le fait qu'il existe un élément $e \in \mathbf{A}$ tel que :

$$\begin{cases} \nu_{\Omega}(e) = 1, & \text{si } \Omega \in C_1; \\ \nu_{\Omega}(e) = 0, & \text{autrement.} \end{cases}$$

b) Montrer qu'un tel élément est nécessairement *idempotent*, i.e., $e^2 = e$. En déduire que \mathbf{A} est isomorphe au produit de deux anneaux (non triviaux). (Cf. exercice 16.2.1-1.)

16.6.3 Le foncteur "Spec" vers la catégorie d'espaces topologiques annelés

Pour faire de la correspondance "Spec" un foncteur de la catégorie d'anneaux vers la catégorie d'espaces annelés nous devons encore définir, pour tout homomorphisme d'anneaux $\alpha : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$, le morphisme *d'espaces annelés* $\text{Spec}(\alpha) : (\text{Spec}(\mathbf{B}); \mathcal{O}_{\text{Spec}(\mathbf{B})}) \rightarrow (\text{Spec}(\mathbf{A}); \mathcal{O}_{\text{Spec}(\mathbf{A})})$. Dans la section 16.4.1 (page 228) nous avons défini $\text{Spec}(\alpha) : \text{Spec}(\mathbf{B}) \rightarrow \text{Spec}(\mathbf{A})$ et montré sa continuité dans le lemme 16.4.1-1, il ne nous reste donc qu'à définir le morphisme de faisceaux

$$\text{Spec}(\alpha)^{\#} : \mathcal{O}_{\text{Spec}(\mathbf{A})} \longrightarrow \text{Spec}(\alpha)_* (\mathcal{O}_{\text{Spec}(\mathbf{B})}).$$

16.6.3-1 Rappel sur les localisations-III : (Suite des rappels 16.3.1-2, page 224 et 16.6.1-1, page 232.)

Soit $\alpha : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ un homomorphisme d'anneaux. Pour tout idéal premier $\mathfrak{R} \subseteq \mathbf{B}$, notons $S(\mathfrak{R}) := \mathbf{B} \setminus \mathfrak{R}$. On a $\alpha^{-1}(S(\mathfrak{R})) = S(\alpha^{-1}(\mathfrak{R}))$ et par conséquent $\alpha(S(\alpha^{-1}(\mathfrak{R}))) \subseteq S(\mathfrak{R})$; en particulier, le lemme 16.3.1-2.1 montre que α induit un homomorphisme canonique :

$$\alpha_{\mathfrak{R}} : \mathbf{A}_{\alpha^{-1}(\mathfrak{R})} \longrightarrow \mathbf{B}_{\mathfrak{R}}$$

Soit U un ouvert de $\text{Spec}(\mathbf{A})$, les sections de $\mathcal{O}_{\text{Spec}(\mathbf{A})}(U)$ sont, par définition, les sections σ de $\mathcal{E}_{\mathbf{A}}$ (cf. 16.6.1 page 234), telles qu'en tout point $\mathfrak{P} \in U$, il existe $a, b \in \mathbf{A}$, où $\nu_{\mathfrak{P}}(b)$ est inversible dans $\mathbf{A}_{\mathfrak{P}}$ et $\sigma(\Omega) = \nu_{\Omega}(a)/\nu_{\Omega}(b)$, pour tout Ω dans un voisinage de \mathfrak{P} .

D'autre part, les sections de $\text{Spec}(\alpha)_*(\mathcal{O}_{\text{Spec}(\mathbf{B})})$ au-dessus de U sont des sections de $\mathcal{E}_{\mathbf{B}}$ au-dessus de $\text{Spec}(\alpha)^{-1}(U)$, et $\mathfrak{R} \in \text{Spec}(\alpha)^{-1}(U)$, si et seulement si, $\alpha^{-1}(\mathfrak{R}) \in U$. Nous pouvons donc associer, à toute section $\sigma \in \mathcal{O}_{\text{Spec}(\mathbf{A})}(U)$, une section $\text{Spec}(\alpha)^{\#}(\sigma)$ de $\mathcal{E}_{\mathbf{B}}$ au-dessus de $\text{Spec}(\alpha)^{-1}(U)$, en posant, pour $\mathfrak{R} \in \text{Spec}(\alpha)^{-1}(U)$:

$$\left(\text{Spec}(\alpha)^{\#}(\sigma) \right) (\mathfrak{R}) := \alpha_{\mathfrak{R}} \left(\sigma(\alpha^{-1}(\mathfrak{R})) \right) \in \mathbf{B}_{\mathfrak{R}}$$

Exercice 16.6.3-1 :

- Montrer que pour tout $\sigma \in \mathcal{O}_{\text{Spec}(\mathbf{A})}(U)$, on a $\text{Spec}(\alpha)^{\#}(\sigma) \in \mathcal{O}_{\text{Spec}(\mathbf{B})}(\text{Spec}(\alpha)^{-1}(U))$. Puis, que le couple $(\text{Spec}(\alpha), \text{Spec}(\alpha)^{\#})$ est un morphisme d'espaces localement annelés de $(\text{Spec}(\mathbf{B}); \mathcal{O}_{\text{Spec}(\mathbf{B})})$ vers $(\text{Spec}(\mathbf{A}); \mathcal{O}_{\text{Spec}(\mathbf{A})})$.
- Soient $\alpha : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ et $\beta : \mathbf{B} \rightarrow \mathbf{C}$ deux homomorphismes d'anneaux. Prouver l'égalité :

$$\text{Spec}(\beta)_*(\text{Spec}(\alpha)^{\#}) \circ \text{Spec}(\beta)^{\#} = \text{Spec}(\beta \circ \alpha)^{\#}.$$

Le foncteur “Spec” vers la catégorie d'espaces localement annelés

La correspondance “Spec” qui associe :

- $$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ à un anneau } \mathbf{A}, \text{ l'espace topologique localement annelé } (\text{Spec}(\mathbf{A}); \mathcal{O}_{\text{Spec}(\mathbf{A})}); \\ \bullet \text{ à un homomorphisme d'anneaux } \alpha : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}, \text{ le morphisme d'espaces d'espaces localement annelés : } (\text{Spec}(\alpha), \text{Spec}(\alpha)^{\#}); \end{array} \right.$$

est fonctorielle (contravariante) de la catégorie des anneaux vers la catégorie des espaces localement annelés.

Le résultat suivant affirme que tout morphisme d'espace localement annelé de $(\text{Spec}(\mathbf{B}); \mathcal{O}_{\text{Spec}(\mathbf{B})})$ vers $(\text{Spec}(\mathbf{A}); \mathcal{O}_{\text{Spec}(\mathbf{A})})$ provient d'un homomorphisme d'anneaux de \mathbf{A} vers \mathbf{B} (il ne sera pas utilisé dans la suite).

Proposition 16.6.3-1 : *Le foncteur qui fait correspondre à un anneau commutatif le schéma affine associé, est pleinement fidèle.*

Démonstration : [Har] proposition 2.3 page 73. ■

16.7 Variétés algébriques affines

Soit k un corps algébriquement clos, et notons $\mathbb{A}_n(k)$ l'espace affine k^n .

Définition 16.7-1 : On appelle « *hypersurface* » de l'espace affine $\mathbb{A}_n(k)$, l'ensemble des zéros d'un polynôme $P \in k[X_1, \dots, X_n]$, elle sera notée $Z(P)$. Tout fermé de Zariski $\mathbb{A}_n(k)$ est alors intersection d'un nombre fini d'hypersurfaces.

On appelle « *ouvert principal* » de $\mathbb{A}_n(k)$ le complémentaire d'une hypersurface $Z(P)$, il sera noté $D(P)$. Les ouverts principaux constituent une base d'ouverts pour la topologie de Zariski de $\mathbb{A}_n(k)$, et de même pour leurs traces sur un fermé de Zariski $Z \subseteq \mathbb{A}_n(k)$.

Remarque 16.7-1 et exercice : La notation des ouverts principaux est délibérément ambiguë. En effet, notons pour chaque $f \in \mathbf{A}(Z)$, par $D_p(f)$ l'ouvert principal de $\text{Spec}(\mathbf{A}(Z))$ des idéaux premiers ne contenant pas f . Prouver que, sous les hypothèses en cours, on a $D_p(f) \cap Z = D(f) =$ le complémentaire de l'hypersurface $Z(f)$ dans Z .

16.7.1 Fonctions régulières sur $Z \subseteq \mathbb{A}_n(k)$

Une « *fonction régulière* » sur Z est toute application définie sur Z et à valeurs dans k , obtenue en évaluant un polynôme de $k[X_1, \dots, X_n]$ aux différents points de Z . L'application de $k[X_1, \dots, X_n] \rightarrow \text{Appl}(Z; k)$ ainsi définie est un homomorphisme d'anneaux de noyau : l'idéal $\mathcal{I}(Z)$ des polynômes s'annulant sur Z ; cet idéal est toujours *radical* et l'anneau des « *fonctions régulières sur Z* » s'identifie à la k -algèbre *réduite* : $\mathbf{A}(Z) = k[X_1, \dots, X_n]/\mathcal{I}(Z)$.

16.7.2 Le faisceau des fonctions régulières sur un un fermé de Zariski $Z \subseteq \mathbb{A}_n(k)$

Pour tout ouvert $U \subseteq Z$, notons $\mathcal{O}_Z(U)$ l'ensemble des applications $\sigma : U \rightarrow k$ telles que pour tout $\mathbf{x} \in U$ il existe un voisinage $\mathbf{x} \in V_x \subseteq U$ et des polynômes $P, Q \in k[X_1, \dots, X_n]$ vérifiant $Q(\mathbf{y}) \neq 0$ et $\sigma(\mathbf{y}) = \frac{P(\mathbf{y})}{Q(\mathbf{y})}$, pour tout $\mathbf{y} \in V_x$.

Les sections ainsi définies appartiennent *a priori* au faisceau de *toutes* les applications des ouverts de Z à valeurs dans k . La définition des sections de $\mathcal{O}_Z(U)$ étant elle-même de nature locale, la correspondance $U \rightsquigarrow \mathcal{O}_Z(U)$ est *faisceautique*. Le couple $(Z; \mathcal{O}_Z)$ est donc un espace annelé.

Définition 16.7.2-1 : L'espace annelé $(Z; \mathcal{O}_Z)$ est appelé « *variété algébrique affine* ».

16.7.3 Liens entre les variétés algébriques affines et les schémas affines

Gardons les notations des sections précédentes et considérons le schéma affine associé à l'algèbre $\mathbf{A}(\mathbf{Z})$ que nous allons noter $(\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}})$, où $\mathbf{X} := \text{Spec}(\mathbf{A}(\mathbf{Z}))$. Rappelons que l'application qui associe à chaque point $z \in \mathbf{Z}$ l'idéal maximal $\mathfrak{M}_z \in \mathbf{A}(\mathbf{Z})$ est un homéomorphisme sur $\text{Spm}(\mathbf{A}(\mathbf{Z}))$. Dans ce qui suit nous allons identifier \mathbf{Z} au spectre maximal de $\mathbf{A}(\mathbf{Z})$ et considérer donc \mathbf{Z} plongé (topologiquement) dans \mathbf{X} ; notons $\iota : \mathbf{Z} \hookrightarrow \mathbf{X}$ ce plongement.

La notation U_p désignera une partie ouverte de \mathbf{X} et $U_m := U_p \cap \mathbf{Z}$. Nous avons déjà montré que l'application $U_p \mapsto U_m$ est *bijjective* entre les ouverts de \mathbf{X} et ceux de \mathbf{Z} (cf. 16.3.1-3 et, pour ce qui suit, la remarque encadrée 16.3.1-1, page 223).

Étudions maintenant le lien entre les faisceaux d'anneaux : $\mathcal{O}_{\mathbf{Z}}$ et $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}|_{\mathbf{Z}}$. Soit U_p une partie ouverte de \mathbf{X} . Une section $\sigma \in \mathcal{O}_{\mathbf{X}}(U_p)$ se représente, au voisinage d'un point $z \in U_m$ (l'idéal maximal $\mathfrak{M}_z \in \text{Spec}(\mathbf{A}(\mathbf{Z}))$), à l'aide de deux éléments p, q de $\mathbf{A}(\mathbf{Z})$ tels que le *localisé* de q en \mathfrak{M}_z est *invertible* (\ddagger). Or, les éléments p, q ont des relèvements polynomiaux $P, Q \in k[X_1, \dots, X_n]$ et la condition (\ddagger) dit précisément que $Q(z) \neq 0$. L'évaluation de σ sur un voisinage de z dans \mathbf{Z} , a donc un sens et définit une fonction régulière (qui ne dépend pas des choix de p et q). Nous avons donc bien une application :

$$\iota^\#(U_p) : \mathcal{O}_{\mathbf{X}}(U_p) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{Z}}(U_m) = (\iota_* \mathcal{O}_{\mathbf{Z}})(U_p).$$

qui est un morphisme de faisceaux d'anneaux.

Théorème 16.7.3-1 : *Le morphisme de faisceaux d'anneaux $\iota^\# : \mathcal{O}_{\mathbf{X}} \rightarrow \iota_* \mathcal{O}_{\mathbf{Z}}$ est un isomorphisme de faisceaux.*

Démonstration : Pour tout $f \in \mathbf{A}(\mathbf{Z})$ non nul, la composée des morphismes :

$$\mathbf{A}(\mathbf{Z})_f \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_{\mathbf{X}}(D(f)) \xrightarrow{\iota^\#(D(f))} \mathcal{O}_{\mathbf{Z}}(D(f))$$

est *injective*. En effet, tout élément de $q \in \mathbf{A}(\mathbf{Z})_f$ admet une représentation sous la forme P/F^m d'un quotient de polynômes de $k[X_1, \dots, X_n]$ (où F est un représentant de f). Supposons que pour tout $\mathbf{u} \in D(F)$, on ait $P(\mathbf{u})/F(\mathbf{u})^m = 0$. Alors nécessairement $P \in \mathcal{I}(\mathbf{Z}) \subseteq k[X_1, \dots, X_n]$ et $q = 0$.

Il s'ensuit, par passage aux germes, que $\iota^\#$ est un morphisme *injectif* de faisceaux sur \mathbf{X} .

Pour montrer la surjectivité de $\iota^\#$ il suffira d'étudier ses germes en \mathbf{X} , puisque $\iota^\#$ est injective; et même seulement ses germes en \mathbf{Y} grâce aux équivalences de catégories

$$\text{Fais}(\mathbf{X}) \xrightleftharpoons[\iota_*]{\iota^{-1}} \text{Fais}(\mathbf{Y}),$$

établies dans l'encadré 16.3.1-1 de la page 223. Or, sur un point fermé $z \in \mathbf{Z}$, la définition même de fonction régulière montre que $(\mathcal{O}_{\mathbf{Z}})_{(z)} \cong \mathbf{A}(\mathbf{Z})_{\mathfrak{M}_z}$, ce qui prouve bien $(\mathcal{O}_{\mathbf{X}})_{(\mathfrak{M}_z)} \cong (\mathcal{O}_{\mathbf{Z}})_{(z)}$. ■

Corollaire 16.7.3-2 : *Soient $(\mathbf{Z}, \mathcal{O}_{\mathbf{Z}})$ une variété affine et $\mathbf{A}(\mathbf{Z})$ son anneau de fonctions régulières.*

- a) *Pour tout $f \in \mathbf{A}(\mathbf{Z})$, l'application canonique $\xi_f : \mathbf{A}(\mathbf{Z})_f \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{Z}}(D(f))$ est un isomorphisme d'anneaux.*
- b) *En particulier, $\Gamma(\mathbf{Z}; \mathcal{O}_{\mathbf{Z}}) \cong \mathbf{A}(\mathbf{Z})$.*

Exercice 16.7.3-1 : Montrer que pour tout idéal premier $\mathfrak{P} \in \text{Spec}(\mathbf{A}(\mathbf{Z}))$, le germe du faisceau $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ en \mathfrak{P} s'identifie à l'aide de $\iota^\#$, avec les sections globales de la restriction du faisceau $\mathcal{O}_{\mathbf{Z}}$ à la sous-variété irréductible $\mathbf{Z}(\mathfrak{P})$.

Par restriction à \mathbf{Z} du morphisme de faisceaux d'anneaux $\iota^\#$, on a aussi :

Corollaire 16.7.3-3 : *Le morphisme de faisceaux $\iota^{-1}(\iota^\#) : \iota^{-1}(\mathcal{O}_{\mathbf{X}}) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{Z}}$ est un isomorphisme de faisceaux*

Le cas des algèbres de type fini sur un corps algébriquement clos

Soit \mathbf{A} une algèbre de type fini sur un corps algébriquement clos k et réalisons-la comme quotient d'une algèbre de polynômes $k[X_1, \dots, X_n]$ par un certain idéal (pas forcément radical) \mathfrak{J} . Notons $\mathbb{A}_n(k)$ l'espace affine k^n . Rappelons que la proposition 16.3.1-2 donne un homéomorphisme

$$\Xi_{\mathbf{A}} : \mathbf{Z}(\mathfrak{J}) \subseteq \mathbb{A}_n(k) \rightarrow \text{Spm}(\mathbf{A})$$

qui “réalise” le spectre maximal de \mathbf{A} comme sous-ensemble algébrique de $\mathbb{A}_n(k)$.

Notons $\text{Red}(\mathbf{A})$ l'algèbre réduite $\mathbf{A}/\sqrt{0}$. Les analyses précédentes suffisent à montrer la proposition suivante :

Proposition 16.7.3-4 : *Le faisceau des fonctions régulières sur $\mathbf{Z}(\mathfrak{J})$ s'identifie canoniquement à la restriction du faisceau structural du schéma affine associé à $\text{Red}(\mathbf{A})$.*

16.8 Catégorie des $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ -modules quasi-cohérents

A partir de cette section, tous les anneaux que nous considérerons seront noëthériens. Soit donc \mathbf{A} un anneaux noëthérien et notons $\mathbf{X} = \text{Spec}(\mathbf{A})$ et $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ le faisceaux structural de \mathbf{X} .

Catégories de \mathbf{A} -modules et de $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ -modules

Notons $\text{Mod}(\mathbf{A})$ la catégorie des \mathbf{A} -modules et $\text{Mod}_{\text{t.f.}}(\mathbf{A})$ la sous-catégorie (pleine) de $\text{Mod}(\mathbf{A})$ dont les objets sont les \mathbf{A} -modules de *type fini*.

Définition 16.8-1 : Un « $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ -module sur \mathbf{X} » est la donnée d'un faisceau de groupes abéliens \mathcal{M} sur \mathbf{X} et, pour chaque ouvert $U \subseteq \mathbf{X}$, d'une structure de $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}(U)$ -module sur $\mathcal{M}(U)$. Ces structures doivent être telles que les morphismes de restriction $\rho(\mathcal{M})_V^U$ soient des morphismes de $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}(U)$ -modules.

Soient \mathcal{M} et \mathcal{N} deux $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ -modules. Un morphisme de $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ -modules $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ est un morphisme de faisceaux de groupes abéliens, tel que pour chaque ouvert $U \subseteq \mathbf{X}$, le morphisme $\varphi(U) : \mathcal{M}(U) \rightarrow \mathcal{N}(U)$ est un morphisme de $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}(U)$ -modules.

La composée de deux morphismes de $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ -modules est un morphisme de $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ -modules.

Remarque 16.8-1 et définitions : La famille des \mathcal{O}_X -modules et des morphismes de \mathcal{O}_X -modules constitue une catégorie abélienne, notée $\mathcal{M}od(\mathcal{O}_X)$.

Définition 16.8-1.1 : Un \mathcal{O}_X -module \mathcal{M} est dit « *quasi-cohérent* » s'il admet des *présentations locales*, i.e. si pour tout $x \in X$, il existe un voisinage $U_x \ni x$, des ensembles (d'indices) \mathcal{I} et \mathcal{J} et des morphismes ν_x, μ_x de $\mathcal{O}_X|_{U_x}$ -modules, tels que :

$$\bigoplus_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{O}_X|_{U_x} \xrightarrow{\mu_x} \bigoplus_{j \in \mathcal{J}} \mathcal{O}_X|_{U_x} \xrightarrow{\nu_x} \mathcal{M}|_{U_x} \longrightarrow \mathbf{0}, \quad (*)$$

est une suite exacte de faisceaux.

Le \mathcal{O}_X -module \mathcal{M} est dit « *cohérent* » lorsque les ensembles \mathcal{I} et \mathcal{J} sont *finis*. Dans ce cas, la présentation (*) est dite « *une présentation finie* ».

La sous catégorie pleine de $\mathcal{M}od(\mathcal{O}_X)$ dont les objets sont les \mathcal{O}_X -modules quasi-cohérent, resp. cohérents, est notée $\mathcal{M}od_{q\text{-coh}}(\mathcal{O}_X)$, resp. $\mathcal{M}od_{\text{coh}}(\mathcal{O}_X)$. Il s'agit de catégories *abéliennes*.

On remarquera que ces définitions généralisent les notions de *modules* et de *modules de type fini* pour les anneaux noethériens. Elles sont plus généralement valables pour tout espace annelé, en particulier pour les variétés algébriques affines.

16.8-1 Equivalence de Catégories : Le théorème 16.7.3-1, la proposition 16.7.3-3 et l'équivalence de catégories de faisceaux entre $\text{Fais}(Z)$ et $\text{Fais}(\text{Spec}(\mathbf{A}(Z)))$ (cf. encadré 16.3.1-1, page 223), montrent que dans le cas d'une variété algébrique affine $(Z; \mathcal{O}_Z)$ d'anneau de fonctions régulières $\mathbf{A}(Z)$, les deux foncteurs additifs induits par l'injection $\iota : Z \rightarrow \text{Spec}(\mathbf{A}(Z))$, à savoir

$$\iota_* : \mathcal{M}od(\mathcal{O}_Z) \rightsquigarrow \mathcal{M}od(\mathcal{O}_{\text{Spec}(\mathbf{A}(Z))}) \quad \text{et} \quad \iota^{-1} : \mathcal{M}od(\mathcal{O}_{\text{Spec}(\mathbf{A}(Z))}) \rightsquigarrow \mathcal{M}od(\mathcal{O}_Z),$$

sont des équivalences de catégories inverses l'un de l'autre !

Cette remarque nous permettra, dans ce qui suit, de négliger le point de vue des variétés affines.

Le foncteur de localisation

Soient $V \subseteq U$ deux ouverts de $X = \text{Spec}(\mathbf{A})$ et notons $\rho(\mathbf{A})_V^U : \mathcal{O}_X(U) \rightarrow \mathcal{O}_X(V)$ le morphisme d'anneaux de restriction, pour des ouverts $V \subseteq U \subseteq X$.

Pour tout \mathbf{A} -module M , les correspondances :

$$\begin{array}{ccc} U \rightsquigarrow \mathcal{O}_X(U) \otimes_{\mathbf{A}} M & & \\ \subseteq \uparrow & & \downarrow \rho(\mathbf{A})_V^U \otimes \text{id}_M \\ V \rightsquigarrow \mathcal{O}_X(V) \otimes_{\mathbf{A}} M & & \end{array}$$

définissent un préfaisceaux de \mathcal{O}_X -modules, noté $\mathcal{O}_X \otimes M$. On note \tilde{M} le *faisceau associé* à $\mathcal{O}_X \otimes M$; c'est un \mathcal{O}_X -module.

Proposition 16.8-1 : Soit M un \mathbf{A} -module.

a) Pour tout $\mathfrak{P} \in \text{Spec}(\mathbf{A})$, l'application $m \mapsto \frac{m}{1}$ de M vers le module $(\mathcal{O}_X \otimes M)_{(\mathfrak{P})}$, des germes de $\mathcal{O}_X \otimes M$ en \mathfrak{P} , induit un isomorphisme entre $M_{\mathfrak{P}}$ et $(\mathcal{O}_X \otimes M)_{(\mathfrak{P})}$.

b) Pour tout $f \in \mathbf{A}$, on a $\Gamma(D(f); \tilde{M}) = \mathbf{A}_f \otimes_{\mathbf{A}} M = M_f$.

Démonstration :

- a) Découle du fait que la limite inductive commute au produit tensoriel et que $M_{\mathfrak{P}} \equiv \mathbf{A}_{\mathfrak{P}} \otimes_{\mathbf{A}} M$ (cf. 16.6.1-1.1).
 b) La question précédente montre que les sections du faisceau associé au préfaisceau $\mathcal{O}_{\mathbf{X}} \otimes M$ sont, localement au voisinage de chaque $\mathfrak{P} \in \mathbf{X}$, de la forme $\frac{\nu(M)_{\Omega}(m)}{\nu_{\Omega}(b)}$, où $\nu(M)_{\Omega} : M \rightarrow M_{\Omega}$ est l'application canonique du rappel 16.6.1-1, et où $m \in M$, $b \in \mathbf{A}$ et $\nu_{\mathfrak{P}}(b)$ est inversible dans $\mathbf{A}_{\mathfrak{P}}$. A partir de là, la démonstration de l'assertion (a) de la proposition 16.6.2-1 s'adapte pour démontrer cette question. ■

Soit maintenant $\varphi : M \rightarrow N$ un morphisme de \mathbf{A} -modules. Pour tout ouvert U dans \mathbf{X} , on note $(\mathcal{O}_{\mathbf{X}} \otimes \varphi)(U) : \mathcal{O}_{\mathbf{X}}(U) \otimes M \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{X}}(U) \otimes N$ le morphisme de $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}(U)$ -modules $\varphi(U) := \text{id}_{\mathcal{O}_{\mathbf{X}}(U)} \otimes \varphi$. La correspondance $U \mapsto (\mathcal{O}_{\mathbf{X}} \otimes \varphi)(U)$ est un morphisme de préfaisceaux de $\mathcal{O}_{\mathbf{X}} \otimes M$ vers $\mathcal{O}_{\mathbf{X}} \otimes N$ noté $\mathcal{O}_{\mathbf{X}} \otimes \varphi$; il induit un morphisme de $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ -modules noté $\tilde{\varphi} : \tilde{M} \rightarrow \tilde{N}$.

Lemme 16.8-2 : Soit \mathbf{A} un anneau noethérien et

$$\mathbf{0} \rightarrow M_1 \xrightarrow{\alpha} M_2 \xrightarrow{\beta} M_3 \rightarrow \mathbf{0},$$

une suite exacte de \mathbf{A} -modules. La suite de $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ -modules :

$$\mathbf{0} \rightarrow \tilde{M}_1 \xrightarrow{\tilde{\alpha}} \tilde{M}_2 \xrightarrow{\tilde{\beta}} \tilde{M}_3 \rightarrow \mathbf{0}, \quad (**)$$

est exacte dans la catégories de $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ -modules.

Démonstration : Il suffit de regarder les suites de germes en chaque point de \mathbf{X} , induites par (**). La proposition 16.8-1 montre que l'opération de "passage aux germes" est équivalente à celle *exacte* (cf. 16.6.1-1.1) de localisation; les suites des germes de (**) sont donc toutes exactes et (**) est exacte dans la catégorie des faisceaux. ■

Proposition 16.8-3 : Soit M un \mathbf{A} -module. Le $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ -module \tilde{M} est quasi-cohérent. Il est cohérent lorsque M est un \mathbf{A} -module de type fini.

Démonstration : L'exactitude du foncteur $M \rightsquigarrow \tilde{M}$, prouvée dans le lemme 16.8-2, assure que pour toute présentation d'un \mathbf{A} -module M :

$$\bigoplus_{\mathfrak{J}} \mathbf{A} \longrightarrow \bigoplus_{\mathfrak{J}} \mathbf{A} \longrightarrow M \rightarrow \mathbf{0},$$

la suite :

$$\bigoplus_{\mathfrak{J}} \tilde{\mathbf{A}} \longrightarrow \bigoplus_{\mathfrak{J}} \tilde{\mathbf{A}} \longrightarrow \tilde{M} \rightarrow \mathbf{0},$$

sera exacte. Or, on a $\tilde{\mathbf{A}} \equiv \mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ par définition.

Lorsque le module M est de type fini, il admet des présentations finies puisque \mathbf{A} est noethérien. Par conséquent \tilde{M} sera cohérent. ■

Remarque 16.8-2 : On observera que les modules \tilde{M} possèdent, en fait, des présentations *globales*.

La correspondance qui associe à tout \mathbf{A} -module M le $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ -module \tilde{M} , et à tout morphisme φ , le morphisme $\tilde{\varphi}$, est un foncteur additif *exact* de la catégorie $\text{Mod}(\mathbf{A})$ vers la catégorie $\mathcal{M}od_{\mathfrak{q}\text{-coh}}(\mathcal{O}_{\mathbf{X}})$. Sa restriction à la sous-catégorie pleine $\text{Mod}_{\text{l.f.}}(\mathbf{A})$ est "à valeurs" dans $\mathcal{M}od_{\text{coh}}(\mathcal{O}_{\mathbf{X}})$.

16.8.1 Equivalence de catégories

Notons $\Gamma(\mathbf{X}; -) : \mathcal{M}od(\mathcal{O}_{\mathbf{X}}) \rightsquigarrow \text{Mod}(\mathbf{A})$, le foncteur « sections globales ».

Théorème 16.8.1-1 : Soit \mathbf{A} un anneau noëthérien et notons $\mathbf{X} := \text{Spec}(\mathbf{A})$. Les foncteurs

$$(\tilde{}) : \text{Mod}(\mathbf{A}) \rightsquigarrow \mathcal{M}od_{\text{q-coh}}(\mathcal{O}_{\mathbf{X}}) \quad \text{et} \quad \Gamma(\mathbf{X}; -) : \mathcal{M}od_{\text{q-coh}}(\mathcal{O}_{\mathbf{X}}) \rightsquigarrow \text{Mod}(\mathbf{A}),$$

sont inverses l'un de l'autre. En particulier, les foncteurs :

$$\text{Mod}(\mathbf{A}) \xrightleftharpoons[\Gamma(\mathbf{X}; -)]{(\tilde{})} \mathcal{M}od_{\text{q-coh}}(\mathcal{O}_{\mathbf{X}}) \quad \text{et} \quad \text{Mod}_{\text{t.f.}}(\mathbf{A}) \xrightleftharpoons[\Gamma(\mathbf{X}; -)]{(\tilde{})} \mathcal{M}od_{\text{coh}}(\mathcal{O}_{\mathbf{X}}),$$

sont des équivalences de catégories.

Démonstration : Commençons par remarquer l'existence d'une transformation naturelle de foncteurs de $\text{id}_{\text{Mod}(\mathbf{A})}$ vers $\Gamma(\mathbf{X}; (\tilde{}))$. Elle provient de la définition même de \tilde{M} comme faisceau engendré par le préfaisceau $U \rightsquigarrow \mathcal{O}_{\mathbf{X}}(U) \otimes_{\mathbf{A}} M$; l'application $M \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{X}} \otimes_{\mathbf{A}} M$, donnée par $m \mapsto 1 \otimes m$, induit un morphisme de \mathbf{A} -modules de $M \rightarrow \Gamma(\mathbf{X}; \tilde{M})$ naturel par rapport à M .

La proposition 16.8-1 montre alors que pour tout \mathbf{A} -module M , le morphisme $M \rightarrow \Gamma(\mathbf{X}; \tilde{M})$, est un isomorphisme.

De manière analogue, pour tout $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ -module \mathcal{M} , on a un morphisme de $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ -modules $\Xi_{\mathcal{M}} : \Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{M})^{\sim} \rightarrow \mathcal{M}$, naturel par rapport à \mathcal{M} . Nous allons montrer qu'il s'agit d'un isomorphisme de faisceaux lorsque \mathcal{M} est quasi-cohérent. Ce pour quoi, il suffira d'étudier l'action de $\Xi_{\mathcal{M}}$ au niveaux des germes de chaque point $\mathfrak{P} \in \mathbf{X}$.

Lorsque \mathcal{M} est de la forme \tilde{M} , le morphisme $(\Xi_{\mathcal{M}})_{(\mathfrak{P})}$ est bien un isomorphisme d'après 16.8-1. Le cas général résultera de montrer que tout $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ -module quasi-cohérent sur $\mathbf{X} = \text{Spec}(\mathbf{A})$, est bien de la forme \tilde{M} pour un certain \mathbf{A} -module M .

Soit \mathcal{M} un $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ -module quasi-cohérent. Les présentations locales (*) de la remarque 16.8-1 (définition 16.8-1.1) :

$$\bigoplus_{i \in \mathfrak{J}} \mathcal{O}_{\mathbf{X}}|_{U_x} \xrightarrow{\mu_x} \bigoplus_{j \in \mathfrak{J}} \mathcal{O}_{\mathbf{X}}|_{U_x} \xrightarrow{\nu_x} \mathcal{M}|_{U_x} \longrightarrow \mathbf{0},$$

s'écrivent également :

$$\left(\bigoplus_{i \in \mathfrak{J}} \mathbf{A} \right)^{\sim} \Big|_{U_x} \xrightarrow{\tilde{\mu}_x(\mathbf{X})} \left(\bigoplus_{j \in \mathfrak{J}} \mathbf{A} \right)^{\sim} \Big|_{U_x} \xrightarrow{\tilde{\nu}_x(\mathbf{X})} \mathcal{M}|_{U_x} \longrightarrow \mathbf{0}.$$

Comme l'anneau \mathbf{A} est supposé noëthérien, les ouverts U_x peuvent être de la forme $D(f_i)$ pour une famille finie $\{f_1, \dots, f_r\}$ d'éléments de \mathbf{A} . Remplaçons les indices 'x' par 'f_j'. En posant $M_j = \text{coker } \mu_{f_j}(D(f_j))$, on a $\mathcal{M}|_{U_{f_j}} \cong \tilde{M}_j$ et le $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ -module \mathcal{M} est le recollement des faisceaux $\tilde{M}_j \in \mathcal{M}od_{\text{q-coh}}(\mathcal{O}_{\mathbf{X}_j})$, où $\mathbf{X}_j = \text{Spec}(\mathbf{A}_{f_j})$.

On remarque, d'autre part, que le morphisme canonique du localisé vers les germes : $\Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{M})_{\mathfrak{P}} \rightarrow \mathcal{M}_{(\mathfrak{P})}$, est un *isomorphisme*.

Le passage du "local" au "global" utilise le résultat suivant, dont la preuve sera donnée à la fin cette démonstration.

Proposition 16.8.1-2 : Soient \mathbf{A} un anneau noëthérien, $\mathbf{X} = \text{Spec}(\mathbf{A})$, \mathcal{M} un $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ -module quasi-cohérent.

- a) Pour tout $f \in \mathbf{A}$ et toute section $\sigma \in \Gamma(D(f); \mathcal{M})$, il existe un entier naturel $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^n \sigma$ se prolonge en une section de \mathcal{M} sur \mathbf{X} .

b) Pour tout $f \in \mathbf{A}$ et toute section $\sigma \in \Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{M})$ telle que la restriction de σ à $D(f)$ soit nulle, il existe un entier naturel $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^n \sigma = 0$.

Ceci étant, pour chaque $\mathfrak{P} \in \mathbf{X}$, il existe f_j tel que $\mathfrak{P} \in D(f_j)$; on considère alors la factorisation du morphisme canonique $\Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{M})_{\mathfrak{P}} \rightarrow \mathcal{M}_{(\mathfrak{P})}$, du localisé des sections globales vers les germes des sections de \mathcal{M} en $\mathfrak{P} \in \mathbf{X}$, donné par :

$$\Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{M})_{\mathfrak{P}} \equiv (\Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{M})^{\sim})_{(\mathfrak{P})} \longrightarrow \Gamma\left(D(f_j); \mathcal{M}|_{D(f_j)}\right)_{\mathfrak{P}} \xrightarrow{\equiv} \mathcal{M}_{(\mathfrak{P})}.$$

La proposition 16.8.1-2 montre que cette composition est un isomorphisme.

Par conséquent, les morphismes $(\Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{M})^{\sim})_{(\mathfrak{P})} \rightarrow \mathcal{M}_{(\mathfrak{P})}$ sont des isomorphismes, pour tout $\mathfrak{P} \in \mathbf{X}$ et le morphisme de faisceaux $\Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{M})^{\sim} \rightarrow \mathcal{M}$ est un *isomorphisme* de faisceaux. ■

16.8.1-1 **Démonstration de la proposition 16.8.1-2 :** (Cf. aussi [EGA] théorème 1.4.1 page 205.)

a) La quasi-cohérence de \mathcal{M} et la noëthérianité de \mathbf{A} , permettent de recouvrir $\text{Spec}(\mathbf{A})$ par un nombre fini d'ouverts principaux $D(s_1), \dots, D(s_r)$, tels que, pour chaque $i = 1, \dots, r$, la restriction de faisceau de \mathcal{M} à $D(s_i)$ est isomorphe en tant que $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}|_{D(s_i)}$ -module à la restriction d'un $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ -module de la forme \tilde{M}_i , où M_i est un \mathbf{A} -module. En particulier, on a :

$$\Gamma(D(s_i); \mathcal{M}) \equiv M_{s_i} \equiv A_{s_i} \otimes_{\mathbf{A}} M_i,$$

mais aussi, pour tout $h \in \mathbf{A}$, le morphisme canonique :

$$\Gamma(D(s_i), \mathcal{M})_h \equiv \Gamma(D(s_i), \mathcal{M}) \otimes_{A_{s_i}} (A_{s_i})_h \longrightarrow \Gamma(D(hs_i); \mathcal{M}), \quad (*)$$

est un *isomorphisme* d'après la proposition 16.8-1.

Soit $f \in \mathbf{A}$ et considérons une section $\sigma \in \Gamma(D(f); \mathcal{M})$. Pour chaque $i = 1, \dots, r$, la restriction $\sigma|_{D(fs_i)}$ appartient au module des fractions en f de $\Gamma(D(s_i); \mathcal{M})$, il existe donc $m_i \in \mathbb{N}$, tel que $f^{m_i} \sigma$ se prolonge de $D(fs_i)$ à $D(s_i)$. On voit donc que, quitte à prendre $m \geq \sup_i \{m_i\}$, la section $f^m \sigma$ admet, dans chaque $D(s_i)$ (séparément), un prolongement que nous noterons $\Sigma_i \in \Gamma(D(s_i); \mathcal{M})$.

Ceci étant, lorsque l'on regarde pour chaque couple $i, j \in \{1, \dots, r\}$, la différence :

$$\Sigma_i|_{D(s_i s_j)} - \Sigma_j|_{D(s_i s_j)} \in \Gamma(D(s_i s_j); \mathcal{M}), \quad (\dagger)$$

et que l'on remarque :

- ▶ que la restriction de (\dagger) à $D(fs_i s_j)$ est nulle ;
- ▶ et que $\Gamma(D(fs_i s_j); \mathcal{M}) \equiv \Gamma(D(s_i s_j); \mathcal{M})_f$, d'après $(*)$;

on conclut qu'il existe un entier $m_{i,j} \in \mathbb{N}$, pour chaque couple $i, j \in \{1, \dots, r\}$, vérifiant :

$$f^{m_{i,j}} \left(\Sigma_i|_{D(s_i s_j)} - \Sigma_j|_{D(s_i s_j)} \right) = 0, \quad \text{i.e.,} \quad f^{m_{i,j}} \Sigma_i|_{D(s_i s_j)} = f^{m_{i,j}} \Sigma_j|_{D(s_i s_j)}.$$

En prenant, $M \geq \sup_{i,j} \{m_{i,j}\}$, on voit donc bien que la famille $\{f^M \Sigma_i \in \Gamma(D(s_i); \mathcal{M})\}_{i=1, \dots, r}$ de sections locales du faisceau \mathcal{M} , satisfait à la condition de recollement sur un recouvrement de $\text{Spec}(\mathbf{A})$. Notons $\tilde{\Sigma}$ la section globale déterminée par cette famille, on a : $\tilde{\Sigma}|_{D(f)} = f^{M+m} \sigma$; ce qu'il fallait démontrer.

b) Soit $\sigma \in \Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{M})$ telle que $\sigma|_{D(f)} = 0$, et reprenons les notations des arguments précédents.

En raisonnant en termes d'anneaux de fractions, on a aussitôt le fait que si Σ_i est une section de $\Gamma(D(s_i); \mathcal{M})$, de restriction nulle sur $D(fs_i)$, il existe un entier $\ell \in \mathbb{N}$, tel que $f^\ell \Sigma_i = 0$. Dans le cas particulier qui nous intéresse, nous aurons, pour chaque $i = 1, \dots, r$, un entier ℓ_i tel que $f^{\ell_i} \sigma|_{D(s_i)} = 0$. Par conséquent, si $N \geq \sup_i \{\ell_i\}$, on aura bien $f^N \sigma = 0$, car ses restrictions sur les ouverts du recouvrement $\mathcal{U} = \{D(s_i)\}$ sont toutes nulles.

16.9 Cohomologie de faisceaux des \mathcal{O}_X -modules quasi-cohérents

16.9.1 Modules injectifs

Soit \mathbf{A} un anneau commutatif ⁽⁶³⁾ *arbitraire* et $\text{Mod}(\mathbf{A})$ la catégorie des \mathbf{A} -modules.

Le foncteur $\text{Hom}_{\mathbf{A}}(\bullet, M)$

Etant donnés deux \mathbf{A} -modules N et M ; considérons le groupe $\text{Hom}_{\mathbf{A}}(N, M)$ muni de sa structure canonique de \mathbf{A} -module. Pour tout morphisme de \mathbf{A} -modules $\alpha : N_1 \rightarrow N_2$, notons $\text{Hom}_{\mathbf{A}}(\alpha, M)$ le morphisme (de \mathbf{A} -modules) de $\text{Hom}_{\mathbf{A}}(N_2, M)$ vers $\text{Hom}_{\mathbf{A}}(N_1, M)$ dont l'action est définie par $\text{Hom}_{\mathbf{A}}(\alpha, M) : \beta \mapsto \beta \circ \alpha$. La correspondance qui associe : $N \rightsquigarrow \text{Hom}_{\mathbf{A}}(N, M)$ et $\alpha \rightsquigarrow \text{Hom}_{\mathbf{A}}(\alpha, M)$ est alors fonctorielle (contravariante et additive) de la catégorie $\text{Mod}(\mathbf{A})$ vers elle-même, on la notera $\bullet \rightsquigarrow \text{Hom}_{\mathbf{A}}(\bullet, M)$.

Lemme 16.9.1-1 : *Pour tout $M \in \text{Ob}(\text{Mod}(\mathbf{A}))$, le foncteur $\text{Hom}_{\mathbf{A}}(-, M)$ est exact à gauche.*

Démonstration : Soit une suite exacte courte de \mathbf{A} -modules

$$0 \rightarrow N_1 \xrightarrow{\alpha} N_2 \xrightarrow{\beta} N_3 \rightarrow 0,$$

nous devons montrer que la suite :

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{A}}(N_3, M) \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathbf{A}}(\beta, M)} \text{Hom}_{\mathbf{A}}(N_2, M) \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathbf{A}}(\alpha, M)} \text{Hom}_{\mathbf{A}}(N_1, M),$$

est *exacte*.

L'injectivité de $\text{Hom}_{\mathbf{A}}(\beta, M)$ résulte de la surjectivité de β ; puis si $\varphi : N_2 \rightarrow M$ est tel que $\varphi \circ \alpha = 0$, l'application φ induit une application de $\psi : N_3 \equiv \text{coker}(\alpha) \rightarrow M$, telle que $\varphi = \psi \circ \beta = \text{Hom}_{\mathbf{A}}(\beta, M)(\psi)$. ■

Définition 16.9.1-1 : Un \mathbf{A} -module I est dit « *injectif* », si et seulement si, le foncteur $\text{Hom}_{\mathbf{A}}(-, I)$ est *exact*.

⁶³ Cette sous-section s'inspire des exposés de [God₂] et [Har]; l'hypothèse de commutativité pour les anneaux n'est pas indispensable mais nous permet de simplifier notre exposition.

Exercice 16.9.1-1 : Montrer qu'un \mathbf{A} -module \mathbf{I} est injectif, si et seulement si, pour tout injection de \mathbf{A} -modules $\alpha : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{N}$ et tout morphisme $\varphi : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{I}$, il existe un morphisme $\psi : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{I}$, tel que $\psi \circ \alpha = \varphi$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{M} & \xrightarrow{\alpha} & \mathbf{N} \\ \varphi \downarrow & \swarrow \psi & \\ & & \mathbf{I} \end{array}$$

En particulier, si \mathbf{I} est un \mathbf{A} -module injectif et si \mathfrak{A} est un idéal de \mathbf{A} (vu comme \mathbf{A} -module), tout morphisme de \mathbf{A} -modules $\alpha : \mathfrak{A} \rightarrow \mathbf{I}$ se prolonge à \mathbf{A} tout entier, *i.e.* il existe $x_\alpha \in \mathbf{I}$ tel que $\alpha(a) = ax_\alpha$, pour tout $a \in \mathfrak{A}$.

Exercice 16.9.1-2 : Soient \mathfrak{A} un idéal de \mathbf{A} , et \mathbf{I} un \mathbf{A} -module tel que tout morphisme $\alpha : \mathfrak{A} \rightarrow \mathbf{I}$ se prolonge à \mathbf{A} tout entier.

- Soient $\mathbf{M} = \langle m \rangle$ un \mathbf{A} -module *cyclique*, et $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{M}$ un sous-module. Montrer que tout morphisme $\alpha : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{I}$ admet un prolongement à \mathbf{M} .
- Soient \mathbf{M} un \mathbf{A} -module arbitraire, $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{M}$ un sous-module, et $\alpha : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{I}$ un morphisme. Montrer que la famille \mathcal{F} des couples $(\mathbf{L}, \alpha_{\mathbf{L}})$, où $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{L} \subseteq \mathbf{M}$, et où $\alpha_{\mathbf{L}} : \mathbf{L} \rightarrow \mathbf{I}$ prolonge α , munie de l'ordre partiel :

$$(\mathbf{L}_1, \alpha_{\mathbf{L}_1}) \preccurlyeq (\mathbf{L}_2, \alpha_{\mathbf{L}_2}), \quad \text{si et seulement si, } \mathbf{L}_1 \subseteq \mathbf{L}_2 \quad \text{et} \quad \alpha_{\mathbf{L}_1} = \alpha_{\mathbf{L}_2}|_{\mathbf{L}_1},$$

est une famille *inductive*. Conclure, en utilisant (a) et le lemme de Zorn, que α admet des prolongements globaux et donc que \mathbf{I} est un \mathbf{A} -module injectif.

Remarque 16.9.1-1 et définition : Les deux derniers exercices montrent que *sur un anneau commutatif arbitraire*, les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- Un \mathbf{A} -module \mathbf{I} est injectif,
- Les morphismes de $\mathfrak{A} \rightarrow \mathbf{I}$, où \mathfrak{A} désigne un idéal de \mathbf{A} , se prolongent à \mathbf{A} tout entier.

La deuxième condition donne un critère commode pour vérifier qu'un \mathbf{A} -module est injectif. Dans la suite nous y référerons par le nom de « *critère d'injectivité par les idéaux de \mathbf{A}* ».

Lorsque \mathbf{A} est un anneau *intègre et principal*, il y a équivalence donc entre :

- Un \mathbf{A} -module \mathbf{I} est injectif,
- $a\mathbf{I} = \mathbf{I}$, pour tout $a \neq 0$.

Un \mathbf{A} -module vérifiant la deuxième condition est dit « *divisible* ».

Dans la catégorie des \mathbb{Z} -modules, le corps des nombres rationnels \mathbb{Q} , mais aussi \mathbb{Q}/\mathbb{Z} , sont divisibles, donc, *injectifs* dans $\text{Mod}(\mathbb{Z})$.

Lemme 16.9.1-2 (et exercice) :

- Soit $\{\mathbf{I}_j\}_{j \in \mathfrak{J}}$ une famille arbitraire de \mathbf{A} -modules injectifs. Prouver que le module produit $\prod_{j \in \mathfrak{J}} \mathbf{I}_j$ est un \mathbf{A} -module injectif.
- Montrer que si \mathbf{A} est noethérien, toute limite inductive de modules injectifs est un module injectif. (Utiliser le critère par les idéaux de \mathbf{A} .)

Lemme 16.9.1-3 (et exercice) : Pour tout \mathbf{A} -module \mathbf{M} , on appelle «facteur direct» tout sous- \mathbf{A} -module \mathbf{N} tel qu'il existe un sous- \mathbf{A} -module $\mathbf{Q} \subseteq \mathbf{M}$, vérifiant : $\mathbf{N} + \mathbf{Q} = \mathbf{M}$ et $\mathbf{N} \cap \mathbf{Q} = \mathbf{0}$.

- a) Soit \mathbf{I} un sous-module d'un \mathbf{A} -module \mathbf{M} . Montrer que si \mathbf{I} est un \mathbf{A} -module injectif, il est facteur direct de \mathbf{M} .
- b) Montrer que tout facteur direct d'un \mathbf{A} -module injectif est lui-même injectif.

Existence d'assez d'injectifs

La notion de module injectif à un sens pour toute catégorie *abélienne*. En effet, dans une telle catégorie \mathcal{C} , les ensembles $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2)$ sont munis de structures de groupes abéliens, et donc tout objet \mathbf{M} définit un foncteur (additif) $\bullet \rightsquigarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}}(\bullet, \mathbf{M})$, de \mathcal{C} vers $\text{Mod}(\mathbb{Z})$ (dont l'action sur les morphismes découle également des axiomes de catégories abéliennes). L'analogie du lemme 16.9.1-1 est alors vrai.

On appelle «*objet injectif de la catégorie \mathcal{C}* » tout objet \mathbf{I} , tel que le foncteur $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(\bullet, \mathbf{I})$ de \mathcal{C} vers $\text{Mod}(\mathbb{Z})$ est *exact*.

Définition 16.9.1-2 : Soit \mathcal{C} une catégorie abélienne. On dit que \mathcal{C} «*possède assez d'injectifs*» lorsque, pour tout objet $\mathbf{M} \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, il existe un objet injectif $\mathbf{I}(\mathbf{M})$ et un élément de $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(\mathbf{M}, \mathbf{I}(\mathbf{M}))$ qui soit un *morphisme injectif*.

Proposition 16.9.1-4 : Soit \mathbf{A} un anneau (commutatif) arbitraire ⁽⁶⁴⁾; il existe un foncteur *covariant additif et exact* $\mathcal{I} : \text{Mod}(\mathbf{A}) \rightsquigarrow \text{Mod}(\mathbf{A})$, et une transformation naturelle $\Xi : \text{id} \rightsquigarrow \mathcal{I}$ tels que :

- a) Pour tout \mathbf{A} -module \mathbf{M} , le \mathbf{A} -module $\mathcal{I}(\mathbf{M})$ est injectif.
- b) Pour tout \mathbf{A} -module \mathbf{M} , le morphisme $\Xi(\mathbf{M}) : \mathbf{M} \rightarrow \mathcal{I}(\mathbf{M})$ est injectif.

Démonstration : Tout \mathbf{A} -module \mathbf{M} étant naturellement un \mathbb{Z} -module, on considère $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{M}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ muni de la structure de \mathbf{A} -module définie par $(a\varphi)(m) := \varphi(am)$. Pour tout morphisme de \mathbf{A} -modules $\alpha : \mathbf{M}_1 \rightarrow \mathbf{M}_2$ le morphisme induit $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{M}_2, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{M}_1, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, donné par $\psi \mapsto \psi \circ \alpha$, est alors un morphisme de \mathbf{A} -modules. On a donc bien un foncteur additif de la catégorie $\text{Mod}(\mathbf{A})$ vers elle-même, noté $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

Rappelons que les applications :

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathbf{A}}(\mathbf{M}, \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{N}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})) & \xrightarrow{\Xi} & \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{M} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{N}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \\ \alpha & \longmapsto & m \otimes n \mapsto \alpha(m)(n) \end{array} \tag{*}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{M} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{N}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\Xi} & \text{Hom}_{\mathbf{A}}(\mathbf{M}, \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{N}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})) \\ \varphi & \longmapsto & m \mapsto (n \mapsto \varphi(m \otimes n)) \end{array}$$

sont des *isomorphismes* de \mathbf{A} -modules, inverses l'un de l'autre.

⁶⁴ La démonstration que donnons s'adapte sans difficulté au cas des anneaux non commutatifs en introduisant les catégories $\text{Mod-}\mathbf{A}$ et $\mathbf{A}\text{-Mod}$ des \mathbf{A} -modules respectivement à gauche et à droite.

Prouvons maintenant que $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{A}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ est un \mathbf{A} -module injectif à l'aide du critère par les idéaux injectifs de \mathbf{A} de l'encadré 16.9.1-1 (page 246) :

Pour tout idéal $\mathfrak{A} \subseteq \mathbf{A}$, nous devons montrer que l'application :

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}, \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{A}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{A}, \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{A}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})) \\ \alpha & \longrightarrow & \alpha|_{\mathfrak{A}} \end{array}$$

est *surjective*. Or, les isomorphismes (*) donnent les équivalences :

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}, \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{A}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{A}, \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{A}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{A}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathfrak{A} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{A}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \\ \cong \uparrow & & \uparrow \cong \\ \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{A}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathfrak{A}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \end{array}$$

où la surjectivité de la dernière ligne résulte du fait que \mathbb{Q}/\mathbb{Z} est injectif dans la catégorie $\text{Mod}(\mathbb{Z})$.

Ceci étant, soit \mathbf{R} un \mathbf{A} -module et considérons la surjection de \mathbf{A} -modules

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{L}(\mathbf{R}) := \bigoplus_{m \in \mathbf{R}} \mathbf{A} & \xrightarrow{\pi(\mathbf{R})} & \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{0} \\ \mathbf{1}_m & \longmapsto & m \end{array} \quad (**)$$

(On remarquera que la correspondance $\bullet \rightsquigarrow \mathbf{L}(\bullet)$ est fonctorielle, covariante, additive et exacte de $\text{Mod}(\mathbf{A})$ vers elle-même.)

D'après l'exactitude à gauche du foncteur $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\bullet, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, on a une *injection* :

$$\mathbf{0} \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{R}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathbf{A}}(\pi, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{L}(\mathbf{R}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}),$$

où $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{L}(\mathbf{R}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\bigoplus_{\mathbf{R}} \mathbf{A}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong \prod_{\mathbf{R}} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{A}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, est un \mathbf{A} -module injectif (cf. lemme 16.9.1-2).

Voici, pour terminer, la définition du foncteur \mathcal{I} : On pose, pour tout \mathbf{A} -module \mathbf{M} :

$$\boxed{\left(\Xi(\mathbf{M}) : \mathbf{M} \rightarrow \mathcal{I}(\mathbf{M}) \right) := \left(\mathbf{M} \xrightarrow{\Xi(\mathbf{M})} \mathcal{I}(\mathbf{M}) := \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{L}(\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{M}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \right)}$$

où le morphisme $\Xi(\mathbf{M})$ est obtenu en composant l'application canonique $\mathbf{M} \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{M}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ qui associe $m \mapsto (\varphi \mapsto \varphi(m))$, à l'application (***) pour $\mathbf{R} = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{M}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

Le \mathbf{A} -module $\mathcal{I}(\mathbf{M})$ est bien injectif, et \mathcal{I} étant défini à l'aide de foncteurs additifs exacts, sera lui-même un foncteur additif (covariant) exact. Enfin, la transformation Ξ est naturelle et il ne reste qu'à vérifier l'injectivité des morphismes $\Xi(\mathbf{M})$.

Soit \mathbf{M} un \mathbf{A} -module et $m \in \mathbf{M}$ non nul. Nous devons montrer qu'il existe un morphisme $\psi : \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{M}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ tel que $\psi(m) \neq 0$ (ce qui concerne uniquement des structures de \mathbb{Z} -modules). On observe alors que puisque $\text{Annul}_{\mathbb{Z}}(m) = (r)$, pour un certain $r \in \mathbb{N}^*$, l'application $\psi_m : \langle m \rangle \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, qui associe $m \mapsto \frac{1}{r} \in \mathbb{Q} \pmod{\mathbb{Z}}$, est bien définie et est non nulle. Comme \mathbb{Q}/\mathbb{Z} est un \mathbb{Z} -module injectif, l'application ψ_m admet un prolongement à \mathbf{M} tout entier ; ce qui termine la démonstration de la proposition. ■

Corollaire 16.9.1-5 : Soit \mathbf{A} un anneau commutatif arbitraire.

Il existe un foncteur additif et exact $\mathcal{S}^\bullet : \text{Mod}(\mathbf{A}) \rightsquigarrow \mathbf{C}^{\geq 0}(\text{Mod}(\mathbf{A}))$ et une augmentation $\varepsilon(-) : (-) \rightarrow \mathcal{S}^\bullet(-)$ (naturelle), tels que, pour tout $M \in \text{Ob}(\text{Mod}(\mathbf{A}))$, le complexe :

$$\mathbf{0} \rightarrow M \xrightarrow{\varepsilon(M)} \mathcal{S}^0(M) \xrightarrow{d(M)_0} \mathcal{S}^1(M) \xrightarrow{d(M)_1} \dots$$

est exact. En particulier, tout \mathbf{A} -module admet une résolution injective.

Démonstration : En effet, soit $M =: M_0$ un \mathbf{A} -module ; la suite de morphismes :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{0} \rightarrow M_0 & \xrightarrow{\frac{\varepsilon(M_0)}{\Xi(M_0)}} & \mathcal{S}(M_0) =: \mathcal{S}^0(M) & \xrightarrow{\nu(\varepsilon(M_0))} & \text{coker}(\varepsilon(M_0)) =: M_1 & \rightarrow & \mathbf{0} \\ & & & \downarrow d(M)_0 & & & \\ \mathbf{0} \rightarrow M_1 & \xrightarrow{\frac{\varepsilon(M_1)}{\Xi(M_1)}} & \mathcal{S}(M_1) =: \mathcal{S}^1(M) & \xrightarrow{\nu(\varepsilon(M_1))} & \text{coker}(\varepsilon(M_1)) =: M_2 & \rightarrow & \mathbf{0} \\ & & & \downarrow d(M)_1 & & & \\ \mathbf{0} \rightarrow M_2 & \xrightarrow{\frac{\varepsilon(M_2)}{\Xi(M_2)}} & \mathcal{S}(M_2) =: \mathcal{S}^2(M) & \xrightarrow{\nu(\varepsilon(M_2))} & \text{coker}(\varepsilon(M_2)) =: M_3 & \rightarrow & \mathbf{0} \\ & & & \downarrow d(M)_2 & & & \end{array}$$

où $d(M)_j := \varepsilon(M_{j+1}) \circ \nu(\varepsilon(M_j))$, vérifie les propriétés du corollaire.

On laisse en exercice la preuve du fait que \mathcal{S}^\bullet est exact. Une démarche simple consiste à montrer que la correspondance $M \rightsquigarrow \text{coker}(\Xi(M))$ fait partie d'un foncteur additif exact, ce qui découle du fait plus général qui affirme que le conoyau (resp. noyau) d'une transformation naturelle entre deux foncteurs additifs exacts, est également exact. ■

Supports et modules injectifs

Soient \mathbf{A} un anneau commutatif arbitraire M un \mathbf{A} -module. Tout élément $m \in M$ détermine une section globale du \mathcal{O}_X -module quasi-cohérent \widetilde{M} défini sur le spectre premier de \mathbf{A} .

Définition 16.9.1-3 : On appelle support d'un élément m d'un \mathbf{A} -module, et on le note $|m|$, l'ensemble des idéaux premiers \mathfrak{P} de \mathbf{A} , pour lesquels $\nu_{\mathfrak{P}}(m) \in M_{\mathfrak{P}}$ est non nul, où $\nu_{\mathfrak{P}} : M \rightarrow M_{\mathfrak{P}}$ désigne le morphisme canonique de localisation.

Le support de $m \in M$ s'identifie donc au support de la section globale qu'il détermine sur le faisceau \widetilde{M} . On a :

$$\boxed{|m| = V(\text{Annul}_{\mathbf{A}}(m))}$$

Exercice 16.9.1-3 : Soit \mathbf{A} un anneau commutatif arbitraire et $Z \subseteq \text{Spec}(\mathbf{A})$ un fermé de Zariski.

- Montrer que l'ensemble des éléments d'un \mathbf{A} -module M dont le support est contenu dans Z , est un sous- \mathbf{A} -module de M .
- Montrer que pour tout morphisme de \mathbf{A} -modules $\alpha : M \rightarrow N$, on a $|\alpha(m)| \subseteq |m|$, pour tout $m \in M$.

Définition 16.9.1-4 et notation : Soit Z un fermé de Zariski dans $\text{Spec}(\mathbf{A})$. Pour tout \mathbf{A} module M , on note $\Gamma_Z(M)$ le sous-module des éléments de M dont le support est contenu dans Z .

La correspondance $M \rightarrow \Gamma_Z(M)$ est fonctorielle additive, on l'appelle «sections à support dans Z ».

Proposition 16.9.1-6 : Soient \mathbf{A} un anneau commutatif noethérien, $Z = V(\mathfrak{A}) \subseteq \text{Spec}(\mathbf{A})$ un fermé de Zariski et M un \mathbf{A} -module

a) $m \in \Gamma_Z(M)$, si et seulement si, $V(\mathfrak{A}) \supseteq V(\text{Annul}_{\mathbf{A}}(m))$, si et seulement si, $\mathfrak{A} \subseteq \sqrt{\text{Annul}_{\mathbf{A}}(m)}$.

En particulier, lorsque \mathbf{A} est noethérien :

$$\boxed{m \in \Gamma_{V(\mathfrak{A})}(M), \text{ si et seulement si, } \mathfrak{A}^r \subseteq \text{Annul}_{\mathbf{A}}(m), \text{ pour } r \in \mathbb{N} \text{ et } r \gg 0} \quad (\ddagger)$$

b) Supposons \mathbf{A} noethérien et considérons le système projectif :

$$\cdots \rightarrow \frac{\mathbf{A}}{\mathfrak{A}^r} \rightarrow \cdots \rightarrow \frac{\mathbf{A}}{\mathfrak{A}^2} \rightarrow \frac{\mathbf{A}}{\mathfrak{A}} \rightarrow \mathbf{A},$$

où les morphismes sont les projections canoniques. Le système

$$M \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{A}}\left(\frac{\mathbf{A}}{\mathfrak{A}}, M\right) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{A}}\left(\frac{\mathbf{A}}{\mathfrak{A}^2}, M\right) \rightarrow \cdots \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{A}}\left(\frac{\mathbf{A}}{\mathfrak{A}^r}, M\right) \rightarrow$$

est alors inductif et le morphisme induit par passage à la limite :

$$\begin{array}{ccc} \varinjlim_{r \in \mathbb{N}} \text{Hom}_{\mathbf{A}}\left(\frac{\mathbf{A}}{\mathfrak{A}^r}, M\right) & \longrightarrow & M \\ \alpha & \longmapsto & \alpha(1) \end{array}$$

est un isomorphisme sur $\Gamma_Z(M)$.

Démonstration :

a) Un élément $m \in M$ est à support dans Z , si et seulement si, $\mathbf{A} \setminus \mathfrak{P}$ rencontre $\text{Annul}_{\mathbf{A}}(m)$ pour tout $\mathfrak{P} \not\supseteq \mathfrak{A}$; condition tautologiquement équivalente à : si $\mathfrak{P} \supseteq \text{Annul}_{\mathbf{A}}(m)$, alors $\mathfrak{P} \supseteq \mathfrak{A}$. On a donc :

$$m \in \Gamma_Z(M), \text{ si et seulement si, } V(\mathfrak{A}) \supseteq V(\text{Annul}_{\mathbf{A}}(m)), \text{ si et seulement si, } \mathfrak{A} \subseteq \sqrt{\text{Annul}_{\mathbf{A}}(m)}.$$

Lorsque \mathbf{A} est supposé en plus noethérien, l'inclusion $\mathfrak{A}^r \subseteq \text{Annul}_{\mathbf{A}}(m)$ sera satisfaite pour $r \in \mathbb{N}$ suffisamment grand.

b) Remarquons, pour commencer, que les idéaux premiers \mathfrak{P} du complémentaire de $Z = V(\mathfrak{A})$ sont ceux vérifiant $\mathfrak{P} \not\supseteq \mathfrak{A}$, et donc aussi $\mathfrak{P} \not\supseteq \mathfrak{A}^r$, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$. Il s'ensuit que $\left(\frac{\mathbf{A}}{\mathfrak{A}^r}\right)_{\mathfrak{P}} = \mathbf{0}$ et également : $\text{Hom}_{\mathbf{A}}\left(\frac{\mathbf{A}}{\mathfrak{A}^r}, M\right)_{\mathfrak{P}} = \mathbf{0}$, pour tout $\mathfrak{P} \not\supseteq \mathfrak{A}$. Ainsi, pour chaque $r \in \mathbb{N}^*$ et tout $\varphi \in \text{Hom}_{\mathbf{A}}\left(\frac{\mathbf{A}}{\mathfrak{A}^r}, M\right)$, l'élément $\varphi(1) \in M$ vérifiera $|\varphi(1)| \subseteq Z$.

Réciproquement, la remarque pour les anneaux noethériens de la question précédente montre que pour chaque $m \in \Gamma_Z$ et tout $r \gg 0$, il existe un morphisme $\varphi_m : \frac{\mathbf{A}}{\mathfrak{A}^r} \rightarrow M$ vérifiant $\varphi_m(1) = m$, ce qui termine la preuve de cette proposition. ■

Exercice 16.9.1-4 : Montrer que le foncteur des sections à support dans un fermé est exact à gauche.

Proposition 16.9.1-7 : Soient \mathbf{A} un anneau commutatif et noethérien et $Z \subseteq \text{Spec}(\mathbf{A})$ un fermé de Zariski. Pour tout \mathbf{A} -module injectif I :

a) le sous-module $\Gamma_Z(I)$ est injectif.

b) la sous-module $\Gamma_Z(\mathbf{I})$ admet des supplémentaires dans \mathbf{I} ; ceux-ci sont tous des \mathbf{A} -modules injectifs.

Démonstration :

a) Nous allons appliquer le critère d'injectivité par les idéaux de \mathbf{A} de l'encadré 16.9.1-1 (page 246). Posons $Z = V(\mathfrak{A})$. Soit \mathfrak{B} un idéal de \mathbf{A} et $\varphi : \mathfrak{B} \rightarrow \mathbf{I}$ un morphisme de \mathbf{A} -modules. Pour chaque $b \in \mathfrak{B}$, il existe, d'après la proposition 16.9.1-6, un entier $r(b) \in \mathbb{N}$ tel que $\mathfrak{A}^{r(b)} \subseteq \text{Ann}_{\mathbf{A}}(\varphi(b))$ et comme \mathfrak{B} est de type fini, il existera $r \in \mathbb{N}$, suffisamment grand, vérifiant : $\mathfrak{A}^r \subseteq \text{Ann}_{\mathbf{A}}(\varphi(\mathfrak{B}))$. En particulier $\varphi(\mathfrak{A}^r \mathfrak{B}) = \mathbf{0}$.

Le théorème d'Artin-Rees (cf. [Mat] §11 page 67) affirme alors qu'il existe $r' \gg r$ tel que $\mathfrak{A}^{r'} \cap \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{A}^r \mathfrak{B}$. On en déduit une factorisation du morphisme φ en $\varphi' \circ \nu$:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \varphi & & \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
 \mathfrak{B} & \xrightarrow{\nu} & \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}^{r'} \cap \mathfrak{B}} \cong \frac{\mathfrak{B} + \mathfrak{A}^{r'}}{\mathfrak{A}^{r'}} & \xrightarrow{\varphi'} & \mathbf{I} \\
 \subseteq \downarrow & & \subseteq \downarrow & \nearrow \psi & \\
 \mathbf{A} & \longrightarrow & \frac{\mathbf{A}}{\mathfrak{A}^{r'}} & &
 \end{array}$$

et le morphisme φ' admet un prolongement en un morphisme ψ puisque \mathbf{I} est injectif. Le morphisme ψ composé à la projection canonique $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}/\mathfrak{A}^{r'}$ fournit alors un prolongement de φ dont l'image (celle de ψ) est clairement dans $\Gamma_Z(\mathbf{I})$.

b) Résulte immédiatement de (a) et du lemme 16.9.1-3. ■

Localisation de modules injectifs

Supposons l'anneau \mathbf{A} commutatif et noethérien.

Proposition 16.9.1-8 : Soit \mathbf{I} un \mathbf{A} -module injectif.

a) Pour tout système multiplicatif S de \mathbf{A} , le morphisme canonique :

$$\mathbf{I} \xrightarrow{\nu_S} S^{-1}\mathbf{I},$$

est surjectif.

b) Pour tout idéal premier $\mathfrak{P} \subseteq \mathbf{A}$, le \mathbf{A} -module $\mathbf{I}_{\mathfrak{P}}$ est injectif.

Démonstration :

a) Tout élément de $S^{-1}\mathbf{I}$ étant de la forme $\frac{x}{s}$ pour $x \in \mathbf{I}$ et $s \in S$, on cherche $y \in \mathbf{I}$ tel que $\frac{y}{1} = \frac{x}{s}$, i.e., tel qu'il existe $t \in S$ vérifiant :

$$tsy = tx. \tag{*}$$

Considérons la suite :

$$\text{Ann}_{\mathbf{A}}(s) \subseteq \text{Ann}_{\mathbf{A}}(s^2) \subseteq \text{Ann}_{\mathbf{A}}(s^3) \subseteq \dots$$

Comme \mathbf{A} est supposé noethérien, cette suite stationne ; il existe donc $r \in \mathbb{N}$, tel que $\text{Ann}_{\mathbf{A}}(s^r) = \text{Ann}_{\mathbf{A}}(s^{r+1})$. On considère alors l'application de l'idéal $\langle s \rangle^{r+1} \subseteq \mathbf{A}$ vers \mathbf{I} , définie par $\varphi : s^{r+1} \mapsto s^r x$. L'application φ est bien définie puisque

$$\text{Ann}_{\mathbf{A}}(s^{r+1}) = \text{Ann}_{\mathbf{A}}(s^r) \subseteq \text{Ann}_{\mathbf{A}}(s^r x).$$

D'autre part, le fait que le module \mathbf{I} est injectif entraîne l'existence d'un prolongement $\psi : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{I}$ de φ . Notons $y := \psi(1)$, alors :

$$s^{r+1}y = s^r x.$$

Or, cette égalité est précisément (*) pour $t = s^r$.

- b) Cette question résultera de montrer que le noyau du morphisme canonique $\nu_{\mathfrak{P}} : \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{I}_{\mathfrak{P}}$ est un \mathbf{A} -module injectif (cf. 16.9.1-3), ce pour quoi on appliquera le critère des idéaux.

On remarque pour cela que $x \in \ker(\nu_{\mathfrak{P}})$, si et seulement si, $|x| \not\subseteq \mathfrak{P}$; en particulier :

$$x \in \ker(\nu_{\mathfrak{P}}), \quad \text{si et seulement si,} \quad x \in \bigcup_{\mathfrak{P} \notin \mathbf{Z}} \Gamma_{\mathbf{Z}}(\mathbf{I}). \quad (**)$$

Soit maintenant $\varphi : \mathfrak{B} \rightarrow \ker(\nu_{\mathfrak{P}})$ un morphisme de \mathbf{A} -modules. Pour chaque $b \in \mathfrak{B}$, l'équivalence (**) montre qu'il existe \mathbf{Z}_b tel que $\varphi(b) \in \Gamma_{\mathbf{Z}_b}(\mathbf{I})$. La noëthérianité de \mathbf{A} entraîne alors l'existence d'un nombre fini de fermés de Zariski $\mathbf{Z}_1, \dots, \mathbf{Z}_r$, tels que $\varphi(\mathfrak{B}) \subseteq \Gamma_{\mathbf{Z}_1}(\mathbf{I}) \cup \dots \cup \Gamma_{\mathbf{Z}_r}(\mathbf{I})$. Par conséquent, en notant $\mathbf{Z} = \bigcup_{j=1}^r \mathbf{Z}_j$, on a $\varphi(\mathfrak{B}) \subseteq \Gamma_{\mathbf{Z}}(\mathbf{I})$ et la proposition 16.9.1-7 assure l'existence d'un prolongement de φ à \mathbf{A} tout entier, à valeurs dans $\Gamma_{\mathbf{Z}}(\mathbf{I})$ donc dans $\ker(\nu_{\mathfrak{P}})$. ■

Proposition 16.9.1-9 : Soient \mathbf{A} un anneau commutatif noëthérien, $\mathbf{X} = \text{Spec}(\mathbf{A})$ et \mathbf{I} un \mathbf{A} -module injectif. Le faisceau de $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ -modules $\tilde{\mathbf{I}}$ est flasque.

Démonstration : Nous devons montrer que les morphismes $\mathbf{I} \rightarrow \tilde{\mathbf{I}}(U)$ sont surjectifs pour tout ouvert $U \subseteq \text{Spec}(\mathbf{A})$.

Pour les ouverts principaux. Soit $f \in \mathbf{A}$ et $U = D(f)$. La morphisme $\mathbf{I} \rightarrow \tilde{\mathbf{I}}(U)$ n'est autre que le morphisme de localisation $\mathbf{I} \rightarrow \mathbf{I}_f$ dont la surjectivité est donnée par la proposition 16.9.1-8.

Pour les ouverts arbitraires. Soit $\sigma_0 \in \tilde{\mathbf{I}}(U)$ et notons $|\sigma_0|$ son support dans U , i.e. l'ensemble des $\mathfrak{P} \in U$ tels que $(\sigma_0)_{\mathfrak{P}} \neq 0$; c'est un fermé de Zariski de U dont on notera \mathbf{Z}_0 l'adhérence dans \mathbf{X} . La proposition 16.9.1-7 donne une factorisation $\mathbf{I} = \Gamma_{\mathbf{Z}_0}(\mathbf{I}) \oplus \mathbf{Q}$ et l'additivité du foncteur de localisation entraîne alors l'égalité : $\tilde{\mathbf{I}}(U) = \Gamma_{\mathbf{Z}_0}(\mathbf{I}) \tilde{\sim}(U) \oplus \tilde{\mathbf{Q}}(U)$. En particulier $\sigma_0 \in \Gamma_{\mathbf{Z}_0}(\mathbf{I}) \tilde{\sim}(U)$.

Soient maintenant $x \in |\sigma_0|$ et $f_0 \in \mathbf{A}$ tels que $x \in D(f) \subseteq U$. La restriction $\sigma|_{D(f_0)}$ provient d'une section globale $\Sigma_0 \in \Gamma_{\mathbf{Z}_0}(\mathbf{I})$ d'après la remarque précédente; notons $\sigma_1 = \sigma_0 - \Sigma_0|_U$. Alors $|\sigma_1| \subseteq \mathbf{Z}_1 \subsetneq \mathbf{Z}_0 \cap V(f)$, où \mathbf{Z}_1 est l'adhérence de Zariski de $|\sigma_1|$ dans \mathbf{X} .

Les raisonnements du paragraphe précédent montrent alors que $\sigma_1 \in \Gamma_{\mathbf{Z}_1}(\mathbf{I}) \tilde{\sim}(U)$.

En itérant ce procédé, on obtient une suite de sections non nulles et équivalentes modulo les sections globales :

$$\sigma_0 \in \Gamma_{\mathbf{Z}_0}(\mathbf{I}) \tilde{\sim}(U), \quad \sigma_1 \in \Gamma_{\mathbf{Z}_1}(\mathbf{I}) \tilde{\sim}(U), \quad \sigma_2 \in \Gamma_{\mathbf{Z}_2}(\mathbf{I}) \tilde{\sim}(U), \quad \dots, \quad \sigma_l \in \Gamma_{\mathbf{Z}_l}(\mathbf{I}) \tilde{\sim}(U), \quad \dots$$

On a $\mathbf{Z}_0 \supsetneq \mathbf{Z}_1 \supsetneq \mathbf{Z}_2 \supsetneq \dots \supsetneq \mathbf{Z}_l \dots$, et comme \mathbf{A} est supposé noëthérien, cette suite stationne; mais ceci n'est possible que si $\sigma_l = 0$ pour $l \gg 0$, ce qui termine la démonstration de la proposition. ■

16.9.2 Acyclicité des modules quasi-cohérents

Théorème 16.9.2-1 [d'acyclicité de Serre] : Soit $(\mathbf{X}; \mathcal{O}_{\mathbf{X}})$ un schéma noëthérien affine ou une variété algébrique affine. Tout $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ -module quasi-cohérent \mathcal{M} est acyclique pour le foncteur de

sections globales et la cohomologie de faisceaux sur \mathbf{X} , i.e. :

$$H^j(\mathbf{X}, \mathcal{M}) = \mathbf{0}, \quad \text{pour tout } j > 0.$$

Démonstration :

Dans le cas du schéma affine associé à un anneau noëthérien \mathbf{A} . Soit $\mathcal{M} = \widetilde{M}$. D'après le corollaire 16.9.1-5, il existe une résolution injective de M :

$$\mathbf{0} \longrightarrow M \xrightarrow{\varepsilon} I^0 \xrightarrow{d_0} I^1 \xrightarrow{d_1} I^2 \xrightarrow{d_2} \dots \quad (*)$$

et l'application du foncteur (exact) de localisation $(\widetilde{})$ donnera la résolution de faisceaux :

$$\mathbf{0} \longrightarrow \mathcal{M} = \widetilde{M} \xrightarrow{\widetilde{\varepsilon}} \widetilde{I}^0 \xrightarrow{\widetilde{d}_0} \widetilde{I}^1 \xrightarrow{\widetilde{d}_1} \widetilde{I}^2 \xrightarrow{\widetilde{d}_2} \dots \quad (**)$$

dont la proposition 16.9.1-9 a montré que les \widetilde{I}^j sont flasques. La résolution $(**)$ est donc une résolution acyclique pour le foncteur des sections globales sur la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur \mathbf{X} . Il s'ensuit que :

$$H^j(\mathbf{X}, \mathcal{M}) = h^j(\Gamma(\mathbf{X}, \widetilde{I}^*), \widetilde{d}_*),$$

et le théorème résulte du fait que $\Gamma(\mathbf{X}, \bullet)$ inverse le foncteur $(\widetilde{})$ et nous ramène à calculer la cohomologie de la suite exacte $(*)$.

Dans le cas d'une variété algébrique affine. On se ramène au cas précédent à l'aide l'équivalence de catégories entre $\mathcal{M}od_{q\text{-coh}}(\mathcal{O}_{\mathbf{X}})$ et $\mathcal{M}od_{q\text{-coh}}(\mathcal{O}_{\text{Spec}(\mathbf{A}(\mathbf{X}))})$ (cf. l'encadré 16.8-1, page 241). Ceci permet de conclure que le $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$ module quasi-cohérent \mathcal{M} sur la variété affine est restriction (de faisceaux) d'un module quasi-cohérent du schéma affine associé à l'anneau $\mathbf{A}(\mathbf{X})$ des fonctions régulières sur \mathbf{X} . On applique alors l'équivalence de catégories entre $\text{Fais}(\mathbf{X})$ et $\text{Fais}(\text{Spec}(\mathbf{A}(\mathbf{X})))$, en particulier la proposition 16.3.1-1.1, qui montre que l'opération de restriction de $\text{Spec}(\mathbf{A}(\mathbf{X}))$ à \mathbf{X} ne change pas la cohomologie de faisceaux. ■

—————×—————

§ 17. Schémas et variétés algébriques

Ce chapitre commence par une révision rapide de la catégorie des espaces localement annelés ; principalement pour ce qui est des concepts de la *structure d'espace annelé induite* sur un sous-ensemble d'un espace annelé, de celui de *recollement d'espaces annelés* et de celui de *produit fibré d'espaces annelés*. On s'intéressera alors à la sous-catégorie des "schémas" (resp. "variétés algébriques") dont les objets seront définis par recollement des *schémas affines* (resp. *variétés affines*) introduits au chapitre précédent. Nous préciserons quelles modifications doivent être apportées aux concepts de sous-espace, de recollement, et de produits fibrés d'espaces annelés pour rester *dans* la catégorie de schémas (resp. des variétés). On introduira, enfin, les définitions classiques concernant à la fois les schémas et les morphismes de schémas, principalement les notions de *schéma noëthérien*, et de *morphisme et schéma séparé*, nécessaires à l'énoncé et démonstration du théorème (de type Leray) qui affirme essentiellement que la cohomologie *de faisceaux* d'un module quasi-cohérent sur un schéma noëthérien séparé est calculée par la cohomologie de Čech.

17.1 Opérations dans la catégorie d'espaces localement annelés

17.1.1 Foncteurs adjoints

Soit $f : \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}$ une application continue entre deux espaces topologiques. Notons $f_* : \text{Fais}(\mathbf{Y}) \rightsquigarrow \text{Fais}(\mathbf{X})$ et $f^{-1} : \text{Fais}(\mathbf{X}) \rightsquigarrow \text{Fais}(\mathbf{Y})$ les foncteurs *image directe* et *image inverse* de faisceaux (tels qu'ils ont été introduits dans les encadrés 16.5-1, page 231, et 16.3.1-1, page 223). Soient $\mathcal{A} \in \text{Ob}(\text{Fais}(\mathbf{X}))$ et $\mathcal{B} \in \text{Ob}(\text{Fais}(\mathbf{Y}))$, nous allons définir un homomorphisme de groupes abéliens canonique entre $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(f^{-1}\mathcal{A}, \mathcal{B}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{A}, f_*\mathcal{B})$, connu sous le nom de « *morphisme d'adjonction pour le couple de foncteurs* : (f^{-1}, f_*) » ; on dit alors que « f^{-1} est l'adjoint à gauche de f_* » et que « f_* est l'adjoint à droite de f^{-1} ».

Commençons par remarquer l'existence de morphismes canoniques :

$$\mathcal{A} \xrightarrow{\varphi(\mathcal{A})} f_*f^{-1}\mathcal{A} \quad \text{et} \quad f^{-1}f_*\mathcal{B} \xrightarrow{\psi(\mathcal{B})} \mathcal{B}.$$

En effet, le faisceau $f_*f^{-1}\mathcal{A}$ est le *faisceau associé* au préfaisceau :

$$\begin{array}{ccc} U \rightsquigarrow f_*(\tilde{f}^{-1}\mathcal{A})(U) := (\tilde{f}^{-1}\mathcal{A})(f^{-1}U) := \varinjlim_{W \supseteq ff^{-1}U} \mathcal{A}(W) & \left\| \begin{array}{c} \xleftarrow{\text{rest}} \mathcal{A}(U) \\ \downarrow \rho(\mathcal{A})_U^U \\ \xleftarrow{\text{rest}} \mathcal{A}(V) \end{array} \right. & (*) \\ \subseteq \uparrow & \downarrow \varinjlim_{W' \supseteq ff^{-1}U} \rho(\mathcal{A})_{W'}^U & \\ V \rightsquigarrow f_*(\tilde{f}^{-1}\mathcal{A})(V) := (\tilde{f}^{-1}\mathcal{A})(f^{-1}V) := \varinjlim_{W' \supseteq ff^{-1}V} \mathcal{A}(W') & \left\| \begin{array}{c} \xleftarrow{\text{rest}} \mathcal{A}(U) \\ \downarrow \rho(\mathcal{A})_V^U \\ \xleftarrow{\text{rest}} \mathcal{A}(V) \end{array} \right. & \end{array}$$

où $U \supseteq V$ désignent des ouverts de \mathbf{X} . Or, comme $U \supseteq ff^{-1}U$, on a *fonctoriellement par rapport à* $U \subseteq \mathbf{X}$, un morphisme “de restriction” de $\mathcal{A}(U) \rightarrow f_*\tilde{f}^{-1}\mathcal{A}(U)$ (à droite dans $(*)$) ; la collection de ces applications définit donc un morphisme de *préfaisceaux* de \mathcal{A} vers le préfaisceau $f_*\tilde{f}^{-1}\mathcal{A}$ qui, composé au morphisme canonique reliant un préfaisceaux à son faisceau associé, fournit le morphisme $\varphi(\mathcal{A}) : \mathcal{A} \rightarrow f_*f^{-1}\mathcal{A}$ annoncé.

Soient maintenant $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \in \text{Ob}(\text{Fais}(\mathbf{X}))$ et $\alpha : \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2$ un morphisme de faisceaux ; on a alors, pour chaque ouvert $U \subseteq \mathbf{X}$, un diagramme commutatif :

$$U \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{A}_1(U) & \xrightarrow{\text{rest}} & \varinjlim_{V \supseteq ff^{-1}U} \mathcal{A}_1(V) \\ \alpha(U) \downarrow & & \downarrow \varinjlim_{V \supseteq ff^{-1}U} \alpha(V) \\ \mathcal{A}_2(U) & \xrightarrow{\text{rest}} & \varinjlim_{V \supseteq ff^{-1}U} \mathcal{A}_2(V) \end{array} \right.$$

compatible aux diagrammes de restriction $(*)$, et définissant, par conséquent, un morphisme de faisceaux $f_*f^{-1}(\alpha) : f_*f^{-1}\mathcal{A}_1 \rightarrow f_*f^{-1}\mathcal{A}_2$ compatible aux morphismes $\varphi(\mathcal{A}_1)$ et $\varphi(\mathcal{A}_2)$ comme l'indique le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_1 & \xrightarrow{\varphi(\mathcal{A}_1)} & f_*f^{-1}\mathcal{A}_1 \\ \alpha \downarrow & & \downarrow f_*f^{-1}(\alpha) \\ \mathcal{A}_2 & \xrightarrow{\varphi(\mathcal{A}_2)} & f_*f^{-1}\mathcal{A}_2 \end{array}$$

Nous voyons donc que φ est une transformation naturelle entre les foncteurs (additifs) de la catégorie $\text{Fais}(\mathbf{X})$ vers elle-même, définis par $\bullet \rightsquigarrow \bullet$ (le foncteur *identité*) et $\bullet \rightsquigarrow f_*f^{-1}\bullet$.

Exercice 17.1.1-1 :

- a) En procédant de manière analogue, construisez le morphisme canonique $\psi(\mathcal{B}) : f^{-1}f_*\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$.
 b) Vérifiez que ψ est une transformation naturelle entre les foncteurs additifs $\bullet \rightsquigarrow f^{-1}f_*\bullet$, et $\bullet \rightsquigarrow \bullet$ de la catégorie $\text{Fais}(\mathbf{Y})$ vers elle-même.

Exercice 17.1.1-2 : Soit \mathbf{Z} un sous-espace topologique de \mathbf{X} . Par une étude aux germes, prouver les assertions suivantes.

- a) Soit $\mathcal{A} \in \text{Ob}(\text{Fais}(\mathbf{Z}))$, le morphisme de faisceaux $\psi(\mathcal{A}) : \iota^{-1}\iota_*\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ est un *isomorphisme*.
 b) Soit $\mathcal{B} \in \text{Ob}(\text{Fais}(\mathbf{X}))$ et supposons \mathbf{Z} fermé dans \mathbf{X} ; montrez que le morphisme $\varphi(\mathcal{B}) : \mathcal{B} \rightarrow f_*f^{-1}\mathcal{B}$ est un *isomorphisme*.

Faisceaux gratte-ciel

Soient \mathbf{X} un espace topologique, $\iota_x : \{x\} \hookrightarrow \mathbf{X}$ l'application d'inclusion d'un point (non nécessairement fermé) de \mathbf{X} , et M un groupe abélien. La correspondance $\iota_{x,*}M$, qui (nous rappelons) associe à chaque ouvert $U \subseteq \mathbf{X}$:

$$U \mapsto \iota_{x,*}M \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{si } U \not\ni x; \\ M, & \text{si } U \ni x, \end{cases}$$

est un *faisceau*.

Définition 17.1.1-1 : Le faisceau $\iota_{x,*}M$ est appelé « *faisceau gratte-ciel de fibre M est de base x* ».

Lemme 17.1.1-1 (et exercice) : Soient \mathbf{X} un espace topologique, $\iota_x : \{x\} \hookrightarrow \mathbf{X}$ l'application d'inclusion d'un point $x \in \mathbf{X}$, et M un groupe abélien. Alors :

- a) Les germes de $\iota_{x,*}M$ vérifient :

$$\iota_{x,*}M_{(y)} = \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{si } y \notin \bar{x}; \\ M, & \text{autrement,} \end{cases}$$

où \bar{x} dénote l'adhérence de x dans \mathbf{X} , et le support du faisceau $\iota_{x,*}M$ est le fermé \bar{x} .

- b) Pour tout faisceau \mathcal{A} de groupes abéliens sur \mathbf{X} , le morphisme “de restriction aux germes” :

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{A}, \iota_{x,*}M) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{A}_{(x)}, M),$$

est un isomorphisme.

- c) Pour tout faisceau \mathcal{A} de groupes abéliens sur \mathbf{X} , l'application :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\longrightarrow \prod_{x \in \mathbf{X}} \iota_{x,*}(\mathcal{A}_{(x)}) \\ \sigma \in \mathcal{A}(U) &\longmapsto (y \mapsto \sigma_{(y)}) \in \prod_{y \in U} \mathcal{A}_{(y)}, \end{aligned}$$

est une injection de faisceaux.

- d) Tout faisceau de groupes abéliens \mathcal{A} sur \mathbf{X} admet une résolution : $\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{G}_0 \rightarrow \mathcal{G}_1 \rightarrow \dots$, où les \mathcal{G}_i sont des produits de faisceaux gratte-ciel. (De plus la résolution est fonctorielle.)

Démonstration :

b) Un morphisme $\varphi \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{A}, \iota_{x,*}M)$ est la donnée, pour chaque ouvert $U \subseteq X$, d'un homomorphisme de groupes abéliens $\varphi(U) : \mathcal{A}(U) \rightarrow \iota_{x,*}M(U)$; or comme $\iota_{x,*}M(U) = \mathbf{0}$ lorsque $x \notin U$, le morphisme φ est entièrement déterminé par “ses valeurs” au-dessus des ouverts qui contiennent x . Dans ce dernier cas, les diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{A}(U) & \xrightarrow{\varphi(U)} & \iota_{x,*}M(U) = M \\
 \rho_V^U \swarrow & & \parallel \\
 \mathcal{A}(V) & \xrightarrow{\varphi(V)} & \iota_{x,*}M(V) = M \\
 \rho_x^V \swarrow & \searrow \rho_x^U & \parallel \\
 \mathcal{A}(x) & \xrightarrow{\varphi(x)} & M
 \end{array}$$

montrent bien que la donnée du morphisme φ équivaut à celle de $\varphi(x)$.

d) C'est une conséquence de (c) qui se démontre exactement comme pour les résolutions injectives de modules (cf. la preuve du corollaire 16.9.1-5). ■

Propriétés d'adjonction du couple (f^{-1}, f_*)

Soit $\alpha : f^{-1}\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un morphisme de faisceaux de groupes abéliens. L'application du foncteur $f^{-1} : \text{Fais}(X) \rightsquigarrow \text{Fais}(Y)$ donne le morphisme $f_*(\alpha) : f_*f^{-1}\mathcal{A} \rightarrow f_*\mathcal{B}$; on pose alors :

$$\begin{aligned}
 \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(f^{-1}\mathcal{A}, \mathcal{B}) &\xrightarrow{\Xi(\mathcal{A}, \mathcal{B})} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{A}, f_*\mathcal{B}) \\
 \alpha &\longmapsto \Xi(\mathcal{A}, \mathcal{B})(\alpha) := f_*(\alpha) \circ \varphi(\mathcal{A})
 \end{aligned}$$

L'additivité des catégories des faisceaux montre que Ξ est un homomorphisme de groupes abéliens.

De manière analogue, on pose :

$$\begin{aligned}
 \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{A}, f_*\mathcal{B}) &\xrightarrow{\Theta(\mathcal{A}, \mathcal{B})} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(f^{-1}\mathcal{A}, \mathcal{B}) \\
 \beta &\longmapsto \Theta(\mathcal{A}, \mathcal{B})(\beta) := \psi(\mathcal{B}) \circ f^{-1}(\beta).
 \end{aligned}$$

Proposition 17.1.1-2 : *Les homomorphismes $\Xi(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ et $\Theta(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ sont inverses l'un de l'autre.*

Démonstration : Commençons par observer que le lemme 17.1.1-1 dans son assertion (b) prouve précisément cette proposition lorsque \mathcal{B} est un faisceau gratte-ciel. Soit maintenant \mathcal{B} un faisceau de groupes abéliens sur Y et fixons une résolution par des produits de faisceaux gratte-ciel : $\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{G}_0 \rightarrow \mathcal{G}_1 \cdots$. On obtient alors des morphismes de suites exactes :

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbf{0} \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{A}, f_*\mathcal{B}) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{A}, f_*\mathcal{G}_0) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{A}, f_*\mathcal{G}_1) \\
 \Xi(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \uparrow \downarrow \Theta(\mathcal{A}, \mathcal{B}) & & \Xi(\mathcal{A}, \mathcal{G}_0) \uparrow \downarrow \Theta(\mathcal{A}, \mathcal{G}_0) & & \Xi(\mathcal{A}, \mathcal{G}_1) \uparrow \downarrow \Theta(\mathcal{A}, \mathcal{G}_1) \\
 \mathbf{0} \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(f^{-1}\mathcal{A}, \mathcal{B}) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(f^{-1}\mathcal{A}, \mathcal{G}_0) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(f^{-1}\mathcal{A}, \mathcal{G}_1)
 \end{array}$$

puisque les foncteurs $\bullet \rightsquigarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{A}, f_*\bullet)$ et $\bullet \rightsquigarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(f^{-1}\mathcal{A}, \bullet)$ sont, tous les deux, exacts à gauche. Il suffira donc de prouver la proposition pour des faisceaux \mathcal{B} qui sont des produits de faisceaux gratte-ciel. On fait appel alors aux deux résultats élémentaires suivantes :

- ▶ L'image directe d'un produit de faisceaux est le produit des images directes, i.e. $f_*(\prod_{\alpha} \mathcal{F}_{\alpha}) \cong \prod_{\alpha} f_*\mathcal{F}_{\alpha}$.
- ▶ $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{F}, \prod_{\alpha} \mathcal{F}_{\alpha}) \cong \prod_{\alpha} (\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{F}, \mathcal{F}_{\alpha}))$.

et la proposition découle aussitôt du cas où \mathcal{B} est gratte-ciel. ■

Remarque 17.1.1-1 : Un morphisme d'espaces annelés $(f, f^\#) : (\mathbf{Y}; \mathcal{O}_Y) \rightarrow (\mathbf{X}; \mathcal{O}_X)$ est donc équivalent à la donnée d'une application continue $f : \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}$ et d'un morphisme de faisceaux d'anneaux $f^\flat : f^{-1}\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_Y$. On pose alors $f^\# = \Xi(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_Y)(f^\flat) = f_*(f^\flat) \circ \varphi(\mathcal{O}_X)$.

Soient $(f, f^\#) : (\mathbf{X}; \mathcal{O}_X) \rightarrow (\mathbf{Y}; \mathcal{O}_Y)$ et $(g, g^\#) : (\mathbf{Y}; \mathcal{O}_Y) \rightarrow (\mathbf{Z}; \mathcal{O}_Z)$ des morphismes d'espaces annelés. Le morphisme de faisceaux $(g \circ f)^\flat$ vérifie alors l'égalité :

$$(g \circ f)^\flat = g^\flat \circ f^{-1}(f^\flat).$$

17.1.2 Sous-espace d'un espace localement annelé

Soit $(\mathbf{X}; \mathcal{O}_X)$ un espace annelé, on appelle « sous-espace » de $(\mathbf{X}; \mathcal{O}_X)$ la donnée d'un espace annelé $(\mathbf{Z}; \mathcal{O}_Z)$ et d'un morphisme d'espaces annelés $\iota : (\mathbf{Z}; \mathcal{O}_Z) \rightarrow (\mathbf{X}; \mathcal{O}_X)$ vérifiant la propriété universelle suivante :

Pour tout morphisme d'espaces annelés $(f; f^\#) : (\mathbf{Y}; \mathcal{O}_Y) \rightarrow (\mathbf{X}; \mathcal{O}_X)$ vérifiant $f(\mathbf{Y}) \subseteq \mathbf{Z}$, il existe un morphisme d'espaces annelés, et un seul, $(\varphi; \varphi^\#) : (\mathbf{Y}; \mathcal{O}_Y) \rightarrow (\mathbf{Z}; \mathcal{O}_Z)$, tel que :

$$(f; f^\#) = (\iota; \iota^\#) \circ (\varphi; \varphi^\#);$$

soit, en termes de diagrammes :

$$\begin{array}{ccc} (\mathbf{Y}; \mathcal{O}_Y) & \xrightarrow{(f; f^\#)} & (\mathbf{X}; \mathcal{O}_X) \\ & \searrow (\varphi; \varphi^\#) & \uparrow (\iota; \iota^\#) \\ & & (\mathbf{Z}; \mathcal{O}_Z) \end{array}$$

Proposition 17.1.2-1 : Soit $(\mathbf{X}; \mathcal{O}_X)$ un espace (localement) annelé. Sur chaque sous-espace topologique $\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{X}$, il existe un faisceaux d'anneaux (locaux) \mathcal{O}_Z , et un seul, tel que le couple $(\mathbf{Z}; \mathcal{O}_Z)$ est un sous-espace (localement) annelé de $(\mathbf{X}; \mathcal{O}_X)$.

Démonstration : En effet, soient $(\mathbf{X}, \mathcal{O}_X)$ un espace (localement) annelé, $\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{X}$ un sous-espace topologique et $\iota_Z : \mathbf{Z} \hookrightarrow \mathbf{X}$ l'injection canonique. Pour chaque morphisme d'espaces annelés $(f; f^\#) : (\mathbf{Y}; \mathcal{O}_Y) \rightarrow (\mathbf{X}; \mathcal{O}_X)$ vérifiant $f(\mathbf{Y}) \subseteq \mathbf{Z}$, on considère la factorisation $f = \iota_Z \circ \varphi$, où φ désigne l'application $\varphi : \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{Z}$ obtenue par restriction du codomaine de f à \mathbf{Z} . Le morphisme de faisceaux d'anneaux $f^\# : \mathcal{O}_X \rightarrow f_*\mathcal{O}_Y = \iota_{Z,*}(\varphi_*\mathcal{O}_Y)$ est un morphisme de faisceaux de groupes abéliens, et l'équivalence d'adjonction :

$$f^\# \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{O}_X; \iota_{Z,*}(\varphi_*\mathcal{O}_Y)) \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\iota_Z^{-1}\mathcal{O}_X; \varphi_*\mathcal{O}_Y) \ni \varphi^\#,$$

lui fait correspondre le morphisme $\varphi^\#$ qui est également un morphisme (annelé) de faisceaux d'anneaux. Posons $\mathcal{O}_Z := \iota_Z^{-1}\mathcal{O}_X$, on a alors :

$$\begin{cases} \iota_Z^\# : \mathcal{O}_X \rightarrow \iota_{Z,*}\mathcal{O}_Z; \\ \varphi^\# : \mathcal{O}_Z \rightarrow \varphi_*\mathcal{O}_Y; \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} f^\# = \iota_{Z,*}(\varphi^\#) \circ \iota_Z^\#; \\ f = \iota_Z \circ \varphi \end{cases}$$

où $\iota_Z^\# : \mathcal{O}_X \rightarrow \iota_{Z,*}(\iota_Z^{-1}\mathcal{O}_X) = \iota_{Z,*}\mathcal{O}_Z$ est le morphisme canonique (introduit dans 17.1.1 et noté alors $\varphi(\mathcal{O}_X)$). Le couple $(\mathbf{Z}, \mathcal{O}_Z)$ est un espace (localement) annelé, et le morphisme :

$$(\iota_Z, \iota_Z^\#) : (\mathbf{Z}, \mathcal{O}_Z) \rightarrow (\mathbf{X}; \mathcal{O}_X),$$

lui confère la structure de sous-espace cherchée. ■

17.1.3 Produit d'espaces annelés

Définition 17.1.3-1 : Soient $(\mathbf{X}_1; \mathcal{O}_{\mathbf{X}_1})$ et $(\mathbf{X}_2; \mathcal{O}_{\mathbf{X}_2})$ deux espaces annelés. On appelle « *produit de $(\mathbf{X}_1; \mathcal{O}_{\mathbf{X}_1})$ et de $(\mathbf{X}_2; \mathcal{O}_{\mathbf{X}_2})$ » », la donnée d'un espace annelé $(\mathbf{P}; \mathcal{O}_{\mathbf{P}})$ et de deux morphismes :*

$$\begin{cases} (\pi_1, \pi_1^\#) : (\mathbf{P}; \mathcal{O}_{\mathbf{P}}) \rightarrow (\mathbf{X}_1; \mathcal{O}_{\mathbf{X}_1}); \\ (\pi_2, \pi_2^\#) : (\mathbf{P}; \mathcal{O}_{\mathbf{P}}) \rightarrow (\mathbf{X}_2; \mathcal{O}_{\mathbf{X}_2}); \end{cases}$$

tels que pour tout espace annelé $(\mathbf{Y}; \mathcal{O}_{\mathbf{Y}})$ et tout couple de morphismes $(\varphi_i, \varphi_i^\#) : (\mathbf{Y}; \mathcal{O}_{\mathbf{Y}}) \rightarrow (\mathbf{X}_i; \mathcal{O}_{\mathbf{X}_i})$, il existe un morphisme d'espaces annelés, et un seul, $(\psi, \psi^\#) : (\mathbf{Y}; \mathcal{O}_{\mathbf{Y}}) \rightarrow (\mathbf{P}; \mathcal{O}_{\mathbf{P}})$, tel que

$$(\varphi_i, \varphi_i^\#) = (\pi_i, \pi_i^\#) \circ (\psi, \psi^\#).$$

Soit, en termes de diagrammes commutatifs :

$$\begin{array}{ccc} & & (\mathbf{X}_1; \mathcal{O}_{\mathbf{X}_1}) \\ & \nearrow^{(\varphi_1, \varphi_1^\#)} & \\ (\mathbf{Y}; \mathcal{O}_{\mathbf{Y}}) & \xrightarrow{(\psi, \psi^\#)} & (\mathbf{P}; \mathcal{O}_{\mathbf{P}}) \\ & \searrow_{(\varphi_2, \varphi_2^\#)} & \\ & & (\mathbf{X}_2; \mathcal{O}_{\mathbf{X}_2}) \end{array}$$

(Note: The diagram above is a simplified representation of the commutative diagram in the image. The image shows a commutative diagram with $(\mathbf{Y}; \mathcal{O}_{\mathbf{Y}})$ on the left, $(\mathbf{P}; \mathcal{O}_{\mathbf{P}})$ in the middle, $(\mathbf{X}_1; \mathcal{O}_{\mathbf{X}_1})$ at the top right, and $(\mathbf{X}_2; \mathcal{O}_{\mathbf{X}_2})$ at the bottom right. Arrows are: $(\varphi_1, \varphi_1^\#) : (\mathbf{Y}; \mathcal{O}_{\mathbf{Y}}) \rightarrow (\mathbf{X}_1; \mathcal{O}_{\mathbf{X}_1})$, $(\varphi_2, \varphi_2^\#) : (\mathbf{Y}; \mathcal{O}_{\mathbf{Y}}) \rightarrow (\mathbf{X}_2; \mathcal{O}_{\mathbf{X}_2})$, $(\psi, \psi^\#) : (\mathbf{Y}; \mathcal{O}_{\mathbf{Y}}) \rightarrow (\mathbf{P}; \mathcal{O}_{\mathbf{P}})$, $(\pi_1, \pi_1^\#) : (\mathbf{P}; \mathcal{O}_{\mathbf{P}}) \rightarrow (\mathbf{X}_1; \mathcal{O}_{\mathbf{X}_1})$, and $(\pi_2, \pi_2^\#) : (\mathbf{P}; \mathcal{O}_{\mathbf{P}}) \rightarrow (\mathbf{X}_2; \mathcal{O}_{\mathbf{X}_2})$. The arrow $(\psi, \psi^\#)$ is dashed in the image.)

Produit tensoriel total de faisceaux

Soient \mathbf{X}, \mathbf{Y} deux espaces topologiques et $\mathcal{F} \in \text{Ob}(\text{Fais}(\mathbf{X}))$ et $\mathcal{G} \in \text{Ob}(\text{Fais}(\mathbf{Y}))$. On note $\mathcal{F} \boxtimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{G}$ le faisceau des sections continues de l'espace étalé au-dessus de $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ définies à l'aide de la correspondance qui associe à des ouverts $U \subseteq \mathbf{X}$ et $V \subseteq \mathbf{Y}$ le groupe $\mathcal{F}(U) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{G}(V)$ ⁽⁶⁵⁾.

Définition 17.1.3-2 : Soient $\mathcal{F} \in \text{Ob}(\text{Fais}(\mathbf{X}))$ et $\mathcal{G} \in \text{Ob}(\text{Fais}(\mathbf{Y}))$, le faisceau $\mathcal{F} \boxtimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{G}$ est appelé « *produit tensoriel total de \mathcal{F} et \mathcal{G} » ». On a :*

$$(\mathcal{F} \boxtimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{G})_{(x,y)} = \mathcal{F}_{(x)} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{G}_{(y)}.$$

Remarque 17.1.3-1s et exercice :

- a) Soient \mathbf{X} un espace topologique et $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \text{Ob}(\text{Fais}(\mathbf{X}))$. Notons $\Delta_{\mathbf{X}} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X} \times \mathbf{X}$ l'application diagonale. L'application qui, pour chaque couple d'ouverts (U, V) de \mathbf{X} , fait correspondre l'application naturelle de restriction : $\mathcal{F}(U) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{G}(V) \rightarrow \mathcal{F}(U \cap V) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{G}(U \cap V)$, définit un *isomorphisme canonique* de faisceaux :

$$\Delta_{\mathbf{X}}^{-1}(\mathcal{F} \boxtimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{G}) \xrightarrow{\cong} \mathcal{F} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{G}$$

⁶⁵ On remarquera que c'est bien le fait que les produits cartésiens d'ouverts constituent une base pour la topologie de $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$, qui permet de définir une topologie sur l'espace $\prod_{(x,y) \in \mathbf{X} \times \mathbf{Y}} \mathcal{F}_{(x)} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{G}_{(y)}$.

b) Soient \mathbf{Y} , \mathbf{X}_1 et \mathbf{X}_2 , des espaces topologiques et $\varphi_i : \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}_i$ des applications continues. Notons $\varphi_1 \times \varphi_2 : \mathbf{Y} \times \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2$ l'application définie par $\varphi_1 \times \varphi_2(y_1, y_2) := (\varphi_1(y_1), \varphi_2(y_2))$, et $(\varphi_1, \varphi_2) : \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2$, l'application $(\varphi_1, \varphi_2)(y) := (\varphi_1(y), \varphi_2(y))$. On a $\varphi_1 \times \varphi_2 \circ \Delta_{\mathbf{Y}} = (\varphi_1, \varphi_2)$; soit le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbf{Y} \times \mathbf{Y} \\ & \nearrow \Delta_{\mathbf{Y}} & \downarrow \varphi_1 \times \varphi_2 \\ \mathbf{Y} & & \mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 \\ & \searrow (\varphi_1, \varphi_2) & \end{array}$$

En particulier, pour tous faisceaux (d'anneaux) $\mathcal{O}_{\mathbf{X}_i}$ sur \mathbf{X}_i , on a des isomorphismes canoniques de faisceaux (d'anneaux) sur \mathbf{Y} :

$$(\varphi_1, \varphi_2)^{-1}(\mathcal{O}_{\mathbf{X}_1} \boxtimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{X}_2}) \xleftarrow{\cong} (\varphi_1^{-1}\mathcal{O}_{\mathbf{X}_1} \otimes_{\mathbb{Z}} \varphi_2^{-1}\mathcal{O}_{\mathbf{X}_2}) \xleftarrow{\cong} \Delta_{\mathbf{Y}}^{-1}(\varphi_1^{-1}\mathcal{O}_{\mathbf{X}_1} \boxtimes_{\mathbb{Z}} \varphi_2^{-1}\mathcal{O}_{\mathbf{X}_2}). \quad (\boxtimes)$$

Lorsque $\mathbf{Y} = \mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2$ et que $\varphi_i = \pi_i$, ces remarques montrent que $\mathcal{O}_{\mathbf{X}_1} \boxtimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{X}_2} \cong \pi_1^{-1}\mathcal{O}_{\mathbf{X}_1} \otimes_{\mathbb{Z}} \pi_2^{-1}\mathcal{O}_{\mathbf{X}_2}$.

Lorsque $(\mathbf{X}_1; \mathcal{O}_{\mathbf{X}_1})$ et $(\mathbf{X}_2; \mathcal{O}_{\mathbf{X}_2})$ sont deux espaces annelés, le faisceau $\mathcal{O}_{\mathbf{X}_1} \boxtimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{X}_2}$ possède une structure évidente de faisceaux d'anneaux ⁽⁶⁶⁾, et le couple $(\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2; \mathcal{O}_{\mathbf{X}_1} \boxtimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{X}_2})$ est un espace annelé.

Soit maintenant $\pi_1 : \mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2 \rightarrow \mathbf{X}_1$ la projection canonique $(x_1, x_2) \mapsto x_1$. On définit :

$$\pi_1^{\#} : \mathcal{O}_{\mathbf{X}_1} \rightarrow \pi_{1,*}(\mathcal{O}_{\mathbf{X}_1} \boxtimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{X}_2}),$$

comme le morphisme qui associe à une section locale $\sigma \in \mathcal{O}_{\mathbf{X}_1}(U)$ la section de $\mathcal{O}_{\mathbf{X}_1} \boxtimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{X}_2}$ définie au-dessus de l'ouvert $U \times \mathbf{X}_2$ par le produit tensoriel $\sigma \otimes 1$. Le couple $(\pi_1, \pi_1^{\#})$ est alors un morphisme d'espaces annelés de $(\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2; \mathcal{O}_{\mathbf{X}_1} \boxtimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{X}_2})$, "à valeurs" dans $(\mathbf{X}_1; \mathcal{O}_{\mathbf{X}_1})$.

Pour terminer, soit $(\mathbf{Y}; \mathcal{O}_{\mathbf{Y}})$ un espace annelé et $(\varphi_i, \varphi_i^{\flat}) : (\mathbf{Y}; \mathcal{O}_{\mathbf{Y}}) \rightarrow (\mathbf{X}_i; \mathcal{O}_{\mathbf{X}_i})$ des morphismes d'espaces annelés. On définit alors $(\varphi_1, \varphi_2)^{\flat} : (\varphi_1, \varphi_2)^{-1}(\mathcal{O}_{\mathbf{X}_1} \boxtimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{X}_2}) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{Y}}$, à l'aide des isomorphismes (\boxtimes) , par le morphisme $\varphi_1^{-1}\mathcal{O}_{\mathbf{X}_1} \otimes_{\mathbb{Z}} \varphi_2^{-1}\mathcal{O}_{\mathbf{X}_2} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{Y}}$ induit par φ_1^{\flat} et φ_2^{\flat} . Le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} & & & & (\mathbf{X}_1; \mathcal{O}_{\mathbf{X}_1}) \\ & & & & \uparrow \\ & & & & (\pi_1, \pi_1^{\#}) \\ & & & & \uparrow \\ & & & & (\pi_2, \pi_2^{\flat}) \\ & & & & \uparrow \\ & & & & (\mathbf{X}_2; \mathcal{O}_{\mathbf{X}_2}) \\ & & & & \downarrow \\ & & & & (\varphi_1, \varphi_1^{\flat}) \\ & & & & \downarrow \\ & & & & (\mathbf{Y}; \mathcal{O}_{\mathbf{Y}}) \\ & & & & \downarrow \\ & & & & ((\varphi_1, \varphi_2), (\varphi_1, \varphi_2)^{\flat}) \\ & & & & \downarrow \\ & & & & (\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2; \mathcal{O}_{\mathbf{X}_1} \boxtimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{X}_2}) \\ & & & & \downarrow \\ & & & & (\varphi_2, \varphi_2^{\flat}) \\ & & & & \downarrow \\ & & & & (\mathbf{X}_2; \mathcal{O}_{\mathbf{X}_2}) \end{array}$$

est alors commutatif, et une étude de germes montre que $((\varphi_1, \varphi_2), (\varphi_1, \varphi_2)^{\flat})$ est *unique*. Le lemme suivant est donc prouvé.

Lemme 17.1.3-1 : *L'espace annelé $(\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2; \mathcal{O}_{\mathbf{X}_1} \boxtimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_{\mathbf{X}_2})$, joint aux morphismes $(\pi_i, \pi_i^{\#})$ est un produit de $(\mathbf{X}_1; \mathcal{O}_{\mathbf{X}_1})$ et de $(\mathbf{X}_2; \mathcal{O}_{\mathbf{X}_2})$ dans la catégorie d'espaces annelés.*

⁶⁶ Pour \mathbf{A} et \mathbf{B} , deux anneaux, on pose $(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) := (a_1 a_2 \otimes b_1 b_2)$.

17.1.4 Recollement d'espaces annelés

Soient $(\mathbf{X}_1; \mathcal{O}_{\mathbf{X}_1})$ et $(\mathbf{X}_2; \mathcal{O}_{\mathbf{X}_2})$ deux espaces annelés. Soient $U_i \subseteq \mathbf{X}_i$ des ouverts munis de la structure de sous-espace annelé induite et soit $(\Phi, \Phi^\#) : (U_1; \mathcal{O}_{U_1}) \rightarrow (U_2; \mathcal{O}_{U_2})$ un isomorphisme d'espaces annelés. On note $\mathbf{X}_1 \amalg_\Phi \mathbf{X}_2$ l'espace topologique obtenu en quotientant la réunion disjointe $\mathbf{X}_1 \amalg \mathbf{X}_2$ par la relation (d'équivalence) :

$$x \mathcal{R}_\Phi y, \quad \text{si et seulement si,} \quad \begin{cases} x = y; \\ x \in U_1, y \in U_2 \quad \text{et} \quad \Phi(x) = y; \\ y \in U_1, x \in U_2 \quad \text{et} \quad \Phi^{-1}(x) = y; \end{cases}$$

pour tous $x, y \in \mathbf{X}_1 \amalg \mathbf{X}_2$. De manière analogue, on recolle les espaces étales $\mathcal{E}_i \rightarrow \mathbf{X}_i$. Rappelons que d'un point de vue strictement ensembliste, on a $\mathcal{E}_i = \prod_{x \in \mathbf{X}_i} \mathcal{O}_{\mathbf{X}_i(x)}$. Le recollement $\mathcal{E}_1 \amalg_\Phi \mathcal{E}_2$ de \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 se fait alors par l'intermédiaire de la relation $\tilde{\mathcal{R}}_\Phi$ définie sur la réunion disjointe $\mathcal{E}_1 \amalg \mathcal{E}_2$ par :

$$(x, \xi) \tilde{\mathcal{R}}_\Phi (y, \zeta), \quad \text{si et seulement si,} \quad \begin{cases} x = y \quad \text{et} \quad \xi = \zeta; \\ x \in U_1, y \in U_2, \Phi(x) = y \quad \text{et} \quad \xi = \Phi_{(y)}^\#(\zeta); \\ \text{et viceversa;} \end{cases}$$

pour tous $(x, \xi), (y, \zeta)$ dans $\mathcal{E}_1 \amalg \mathcal{E}_2$. La projection $\mathcal{E}_1 \amalg_\Phi \mathcal{E}_2 \rightarrow \mathbf{X}_1 \amalg_\Phi \mathbf{X}_2$ est induite par l'application $(x, \xi) \mapsto x$, de $\mathcal{E}_1 \amalg \mathcal{E}_2 \rightarrow \mathbf{X}_1 \amalg \mathbf{X}_2$ (clairement compatible aux relations $\tilde{\mathcal{R}}_\Phi$ et \mathcal{R}_Φ), et le faisceau $\mathcal{O}_{\mathbf{X}_1 \amalg_\Phi \mathbf{X}_2}$ est celui des sections continues de cette projection. Le couple $(\mathbf{X}_1 \amalg_\Phi \mathbf{X}_2, \mathcal{O}_{\mathbf{X}_1 \amalg_\Phi \mathbf{X}_2})$ est alors un espace annelé appelé « *recollement de $(\mathbf{X}_1, \mathcal{O}_{\mathbf{X}_1})$ et $(\mathbf{X}_2, \mathcal{O}_{\mathbf{X}_2})$ par Φ* ».

Exercice 17.1.4-1 : Vérifier que l'espace $(\mathbf{X}_1 \amalg_\Phi \mathbf{X}_2, \mathcal{O}_{\mathbf{X}_1 \amalg_\Phi \mathbf{X}_2})$ est *localement annelé*, si et seulement si, chacun des $(\mathbf{X}_i; \mathcal{O}_{\mathbf{X}_i})$ l'est.

17.2 Catégories des schémas et des variétés

17.2.1 Schémas

La catégorie des schémas est définie comme la sous-catégorie pleine de la catégorie d'espaces localement annelés dont les objets sont obtenus par recollement des schémas affines. Les notions de sous-schéma et de schéma produit existent mais diffèrent des constructions considérées dans la catégorie d'espaces topologiques annelés.

Sous-schémas

Soit \mathbf{S} un schéma; un « *sous-schéma* » de \mathbf{S} est la donnée d'un schéma \mathbf{S}' est d'un morphisme de schémas $\eta : \mathbf{S}' \rightarrow \mathbf{S}$ tel que pour tout morphisme de schémas $\alpha : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{S}$ tel que $\alpha(|\mathbf{R}|) \subseteq |\mathbf{S}'|$, il existe une factorisation *unique* $\alpha = \eta \circ \beta$ par des morphismes de schémas, où $\beta : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{S}'$.

Lemme 17.2.1-1 : *L'ensemble topologique sous-jacent à un sous-schéma est toujours une partie localement fermée de l'espace topologique sous-jacent au schéma ambiant.*

Démonstration : Soit \mathcal{S}' un sous-schéma de \mathcal{S} . Comme $|\mathcal{S}|$ est réunion de variétés affines U_i (chacune étant alors une partie ouverte de \mathcal{S}), la restriction de \mathcal{S}' à chaque partie U_i sera un sous-schéma. Cette remarque montre que pour montrer que $|\mathcal{S}'|$ est localement fermée, nous pouvons supposer que \mathcal{S} est un schéma affine. Soit $x \in |\mathcal{S}'|$ et considérons un voisinage principal $V_x := D(f)$ de x dans $|\mathcal{S}| = \text{Spec}(\mathbf{A})$, tel que $V_x \cap |\mathcal{S}'|$ est affine. Le morphisme d’"inclusion" $V_x \cap \mathcal{S}' \hookrightarrow V_x$ correspond alors à un morphisme d’anneaux $\rho : A_f \rightarrow B$ et par conséquent $|V_x \cap \mathcal{S}'| = \mathbf{Z}(\mathcal{I}(\ker(\rho)))$; ce qui prouve bien notre assertion. ■

Exemple 17.2.1-1 : Soit \mathcal{S} le schéma (affine) défini par l’anneau des entiers relatifs \mathbb{Z} .

- ▶ Le sous-ensemble de $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ constitué par l’idéal $\mathbf{0}$ n’admet pas de structure de sous-schéma.

En effet, si tel était le cas, le point $\mathbf{0} \in \text{Spec}(\mathbb{Z})$ serait localement fermé. Or, l’idéal $\mathbf{0}$ est un point générique de \mathcal{S} et $\text{Spec}(\mathbb{Z}) \setminus \{\mathbf{0}\} = \text{Spm}(\mathbb{Z})$ serait fermé; mais l’adhérence des points fermés de \mathcal{S} est l’ensemble des idéaux premiers de \mathbb{Z} contenant l’intersection de ses idéaux maximaux, *i.e.* l’idéal nul.

- ▶ Pour tout point fermé $\langle p \rangle \in \text{Spec}(\mathbb{Z})$ il existe une structure de sous-schéma de \mathcal{S} dont le support est $\langle p \rangle$. En effet, notons $\mathbb{F}_p := \mathbb{Z}/\langle p \rangle$, l’homomorphisme canonique (surjectif) d’anneaux $\eta : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{F}_p$ induit un morphisme de schémas affines qui identifie l’idéal nul (maximal) du corps \mathbb{F}_p à l’idéal premier $\langle p \rangle$.

17.2.2 Variété algébrique

17.3 Définitions et propriétés élémentaires des schémas

17.3.1 Affinité

17.3.2 Schémas et variétés séparés

17.4 Cohomologie de faisceaux des modules quasi-cohérents

§ 18. Bibliographie

(non exhaustive)

- [A-M-R] **R. Abraham & J.E. Marsden & T. Ratiu**, “*Manifolds, tensor analysis, and applications*”; Second edition. Springer Verlag; Applied Mathematical Sciences **75** (1988).
- [Ber] **M. Berger**, “*Géométrie différentielle*”; Collection U. Armand Collin (1972).
- [B-T] **R. Bott & L. Tu**, “*Differential forms in algebraic topology*”; Springer-Verlag (1982).
- [Bou_A] **N. Bourbaki**, “*Algèbre. Chapitre 10. Algèbre homologique*”; Masson (1980).
- [Bou_T] **N. Bourbaki**, “*Eléments de mathématique. Topologie générale, Chapitres 1–4*”; Hermann (1971).
- [C-E] **H. Cartan & S. Eilenberg**, “*Homological algebra*”; Princeton University Press (1956).
- [Car] **H. Cartan**, “*Cours de calcul différentiel*”; Collection méthodes. Hermann (1977).
- [Die] **J. A. Dieudonné**, “*Cours de géométrie algébrique 1 & 2*”; Presses universitaires de France. Collection SUP : Le Mathématicien **10, 11** (1974).
- [Die] **J. A. Dieudonné**, “*Eléments d’analyse 3*”; Gauthier-Villars. Cahiers scientifiques, fascicule 33, deuxième édition (1974).
- [Ful] **W. Fulton**, “*Algebraic curves*”; Benjamin. Mathematics lecture notes series (1969).
- [God₁] **R. Godement**, “*Introduction à la théorie des groupes de Lie. Tome 1*”; Publications mathématiques de l’université Paris VII, **11** (1982).
- [God₂] **R. Godement**, “*Théorie des faisceaux*”; Hermann (1973).
- [Gr-Rm] **H. Grauert & R. Remmert**, “*Theory of Stein spaces*”; Springer-Verlag. Grundlehren der Mathematischen **236** (1979).
- [Gro-1] **A. Grothendieck**, Sur quelques points d’algèbre homologique; Tôhoku Math. Journal **9**, 119–221 (1957).
- [Gro-2] **A. Grothendieck**, On the de Rham cohomology of algebraic varieties; IHES. Publications Mathématiques, **29** (extrait), 351–359 (1966).
- [EGA] **A. Grothendieck & J.A. Dieudonné**, “*Eléments de géométrie algébrique I*”; Grundlehren der Mathematischen; band **166**. Springer-Verlag (1970)
- [Har] **R. Hartshorne**, “*Algebraic Geometry*”; Springer. Graduate texts in mathematics, **52** (1983).
- [Mat] **H. Matsumura**, “*Commutative Algebra*”; Benjamin (1970).
- [McL] **S. Mac Lane**, “*Homology*”; Springer-Verlag (1975).
- [Mil] **J. Milnor**, “*Topology from the differential viewpoint*”; University of Virginia Press, Charlottesville, Va. (1965).
- [Pha] **Pham Mau Quan**, “*Introduction à la géométrie des variétés différentiables*”; Monographies universitaires de mathématiques. Dunod (1969).
- [S-1] **J.-P. Serre**, Faisceaux algébriques cohérents; Ann. of Math. **61**, 197–278 (1955).
- [S-2] **J.-P. Serre**, Sur la cohomologie des variétés algébriques; J. de Maths. Pures et Appl. **36**, 1–16 (1957).
- [Spa] **E.H. Spanier**, “*Algebraic topology*”; Springer-Verlag (1966).

×