

Examen FINAL

Un soin particulier à la rédaction est demandé.

I– Cohomologie de de Rham d’une droite affine privée d’un nombre fini de points

Soit \mathbf{R} un anneau commutatif intègre de caractéristique arbitraire et notons \mathbf{Q} son corps de fractions. Pour tout sous-ensemble fini $\mathbf{F} = \{x_1, \dots, x_r\}$ de \mathbf{R} , on désigne par $S_{\mathbf{F}}$ le système multiplicatif de $\mathbf{R}[X]$ des éléments de la forme $(X - x_1)^{m_1} \cdots (X - x_r)^{m_r}$ avec $m_i \in \mathbb{N}$. On note $\mathbf{A} := S_{\mathbf{F}}^{-1} \mathbf{R}[X]$.

- 1) Montrer que l’homomorphisme de $\mathbf{R}[X]$ vers \mathbf{A} donné par $P(X) \mapsto \frac{P(X)}{1}$, réalise un plongement ouvert de $\text{Spec}(\mathbf{A})$ dans $\mathbb{A}_{\mathbf{R}}^1$. Décrire l’image de ce plongement lorsque \mathbf{R} est un corps algébriquement clos.
- 2) Montrer que \mathbf{A} est une \mathbf{R} -algèbre lisse de dimension relative 1 et c’est une intersection transverse.
- 3) Prouver que $\Omega_{\mathbf{A}/\mathbf{R}}$ est un \mathbf{A} -module libre de rang 1.
- 4) Expliciter chaque ingrédient du complexe de de Rham $(\Omega_{\mathbf{A}/\mathbf{R}}^*, d_{\mathbf{A}/\mathbf{R},*})$.
- 5) Soit $f \in \mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{A}$. Montrer qu’il existe *une et une seule* famille $\{P_0^f(X), c(f)_{i,m}\}$ vérifiant :

$$f = P_0^f(X) + \sum_{i=1}^r \sum_{m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \frac{c(f)_{i,m}}{(X - x_i)^m},$$

avec $P_0^f(X) \in \mathbf{Q}[X]$ et $c(f)_{i,m} \in \mathbf{Q}$.

► En déduire la \mathbf{Q} -linéarité et la surjectivité de l’application :

$$\begin{aligned} \mathbf{I} : \mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{A} &\longrightarrow \mathbf{Q}^r \\ f &\longmapsto (c(f)_{1,1}, \dots, c(f)_{r,1}) \end{aligned}$$

- 6) Montrer que l’application \mathbf{I} induit une surjection de $\mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{R}} H_{\text{DR}}^1(\mathbf{A}/\mathbf{R})$ sur \mathbf{Q}^r qui est bijective lorsque \mathbf{R} est de caractéristique nulle, mais possède un noyau de dimension infinie autrement.
- 7) Expliciter les autres groupes de cohomologie du complexe $\mathbf{Q} \otimes_{\mathbf{R}} (\Omega_{\mathbf{A}/\mathbf{R}}^*, d_{\mathbf{A}/\mathbf{R},*})$.
- 8) Dans cette question $\mathbf{R} := \mathbb{F}_p$.

On note $\nu : \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Z}_p/\langle p \rangle =: \mathbb{F}_p$ la projection canonique de l’anneau des entiers p -adiques sur son corps résiduel.

Pour toute partie finie \mathbf{G} de \mathbb{Z}_p qui relève \mathbf{F} , *i.e.* telle que $\nu(\mathbf{G}) = \mathbf{F}$, on note $\mathbf{B}_{\mathbf{G}} := S_{\mathbf{G}}^{-1} \mathbb{Z}_p[X]$.

- a) Montrer que la réduction modulo p de l’anneau $\mathbf{B}_{\mathbf{G}}$ s’identifie canoniquement à \mathbf{A} .
- b) A l’aide de (7) donner un invariant des algèbres $\mathbf{B}_{\mathbf{G}}$ permettant de dire que deux algèbres $\mathbf{B}_{\mathbf{G}_1}$ et $\mathbf{B}_{\mathbf{G}_2}$ ne sont pas isomorphes.
- c) Pour chaque algèbre $\mathbf{B}_{\mathbf{G}}$, on note $\widehat{\mathbf{B}}_{\mathbf{G}}$ sa complétion pour la topologie p -adique.

Pour toute inclusion d’ensembles $\mathbf{G}_1 \subseteq \mathbf{G}_2$, l’inclusion $S_{\mathbf{G}_1} \subseteq S_{\mathbf{G}_2}$ donne l’homomorphisme d’algèbres canonique habituel $h(\mathbf{G}_2, \mathbf{G}_1) : \mathbf{B}_{\mathbf{G}_1} = S_{\mathbf{G}_1}^{-1} \mathbb{Z}_p[X] \rightarrow S_{\mathbf{G}_2}^{-1} \mathbb{Z}_p[X] = \mathbf{B}_{\mathbf{G}_2}$.

c-i) Exhiber un isomorphisme :

$$\xi(\mathbf{G}) : \mathbf{B}_{\mathbf{G}} \xrightarrow{\cong} \frac{\mathbb{Z}_p[X, Z]}{\langle Z \prod_{y \in \mathbf{G}} (X - y) - 1 \rangle}.$$

- c-ii) Suite à la question précédente, expliciter les éléments $X' := \xi(\mathbf{G}_2) \circ h(\mathbf{G}_2, \mathbf{G}_1) \circ \xi(\mathbf{G}_1)^{-1}(X)$ et $Z' := \xi(\mathbf{G}_2) \circ h(\mathbf{G}_2, \mathbf{G}_1) \circ \xi(\mathbf{G}_1)^{-1}(Z)$.
- c-iii) Prouver que la composée $\xi(\mathbf{G}_2) \circ h(\mathbf{G}_2, \mathbf{G}_1) \circ \xi(\mathbf{G}_1)^{-1}$ induit une **bijection** entre les complétions p -adiques :

$$\frac{\widehat{\mathbb{Z}_p[X, Z]}}{\langle Z \prod_{y \in \mathbf{G}_1} (X - y) - 1 \rangle} \xrightarrow[\equiv]{\xi(\mathbf{G}_2) \circ h(\mathbf{G}_2, \mathbf{G}_1) \circ \xi(\mathbf{G}_1)^{-1}} \frac{\widehat{\mathbb{Z}_p[X, Z]}}{\langle Z \prod_{y \in \mathbf{G}_2} (X - y) - 1 \rangle}.$$

c-iv) En déduire que les algèbres $\widehat{\mathbf{B}}_{\mathbf{G}}$ sont deux-à-deux isomorphes.

- 9) Dans cette dernière question on choisit $\mathbf{R} := \mathbb{C}$ et $\mathbf{U} \subseteq \mathbb{C}$ l'ouvert complémentaire d'un ensemble fini de nombres complexes $\mathbf{F} \subseteq \mathbb{C}$. On considère $\mathbf{U}(\mathbb{C})$ muni de la topologie transcendantale induite par celle de \mathbb{C} . Expliciter les nombres de Betti de la cohomologie de de Rham des formes différentielles réelles de classe \mathcal{C}^∞ sur $\mathbf{U}(\mathbb{C})$ et à coefficients dans \mathbb{C} .

Indication. — Utiliser la suite exacte longue de cohomologie à support compact associée au triplet $\mathbf{U}(\mathbb{C}) \subseteq \mathbb{C} \supseteq \mathbf{F}(\mathbb{C})$, puis la dualité de Poincaré.

—————×—————

II– Cohomologie de de Rham du complémentaire d'une hypersurface lisse de $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$

Soit $\mathbf{X} \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ une hypersurface **irréductible et lisse** définie par un polynôme $f \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n]$ homogène de degré d . On note $\mathbf{U} \subseteq \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ l'ouvert complémentaire de \mathbf{X} .

Rappel. Comme f est homogène l'anneau $\mathbb{C}[X_0, \dots, X_n][1/f]$ est gradué sur \mathbb{Z} , ses éléments homogènes de degré zéro constituent alors un sous-anneau que nous notons $R[\mathbf{U}] := \mathbb{C}[X_0, \dots, X_n][1/f]^0$.

Dans ce problème on admettra que \mathbf{U} est isomorphe en tant que schéma à $\text{Spec}(R[\mathbf{U}])$.

- 1) Montrer que $R[\mathbf{U}]$ est une \mathbb{C} -algèbre de type fini, lisse sur \mathbb{C} et de dimension relative n .
- 2) Justifier la finitude des nombres de Betti $\dim_{\mathbb{C}}(H_{\text{DR}}^i(\mathbf{U}/\mathbb{C}))$.
- 3) On considère $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n(\mathbb{C})$, $\mathbf{U}(\mathbb{C})$ et $\mathbf{X}(\mathbb{C})$ munis de la topologie transcendantale. Justifier la finitude des dimensions des espaces $H_{\text{DR},c}^i(\mathbf{U}(\mathbb{C}))$, $H_{\text{DR}}^i(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n(\mathbb{C}))$ et $H_{\text{DR}}^i(\mathbf{X}(\mathbb{C}))$.
- 4) **Le but de cette question est de montrer que $H_{\text{DR}}^r(\mathbf{U}/\mathbb{C}) = \mathbf{0}$ pour tout $r \notin \{0, n\}$.**
 - a) Donner une justification *a priori* de l'annulation des $H_{\text{DR}}^{n+i}(\mathbf{U}(\mathbb{C}))$ lorsque $i > 0$. En déduire :

$$\begin{cases} H_{\text{DR}}^{n-i}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n(\mathbb{C})) \equiv H_{\text{DR}}^{n-i}(\mathbf{X}(\mathbb{C})), & \text{pour tout } i \geq 2; \\ H_{\text{DR}}^{n-1}(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n(\mathbb{C})) \subseteq H_{\text{DR}}^{n-1}(\mathbf{X}(\mathbb{C})). \end{cases}$$

Indication. Penser à la suite exacte longue de cohomologie de de Rham à support compact.

- b) *Rappel.* L'anneau $H_{\text{DR}}^*(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n(\mathbb{C}))$ est isomorphe en tant qu'algèbre graduée à $\mathbb{C}[T]/\langle T^n \rangle$ où T est considéré de degré 2.

Soit $\omega \in H_{\text{DR}}^2(\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n)$ **non nul** et notons ϖ sa restriction à \mathbf{X} . Le théorème de Lefschetz « *difficile* » affirme dans notre cas ($\mathbf{X}(\mathbb{C})$ est lisse) que l'application $L(\varpi^{\wedge i}) : H_{\text{DR}}^{(n-1)-i}(\mathbf{X}(\mathbb{C})) \rightarrow H_{\text{DR}}^{(n-1)+i}(\mathbf{X}(\mathbb{C}))$ qui fait correspondre $\mu \mapsto \varpi^{\wedge i} \wedge \mu$, est un **isomorphisme** pour tout $i > 0$.

► A l'aide de ce théorème et des résultats précédents prouver :

$$H_{\text{DR}}^r(\mathbf{U}/\mathbb{C}) = \mathbf{0}, \quad \text{pour tout } 0 < r < n.$$

—————×—————

(fin de l'examen)