UFR de Mathématiques, Université de Paris 7
DEA 1996/97 premier semestre
“Introduction à la cohomologie de de Rham des variétés algébriques”
A. Arabia & Z. Mebkhout

Vendredi 6 décembre 1996

Examen Partiel

Un soin particulier dans la rédaction est demandé.
Les astérisques indiquent l'importance des questions et non pas leur difficulté.

———————×———————

<u>Problème I</u>. Cohomologie de de Rham à supports compacts du complémentaire d'une sous-variété

> **Rappel.** Le lemme de Poincaré énonce le fait que pour toute variété différentiable $\boldsymbol{M}$ la projection canonique $\pi : \mathbb{R}\times\boldsymbol{M} \to \boldsymbol{M}$ induit un **isomorphisme** en cohomologie de de Rham : $\pi^* : H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{M}) \to H^*_{\mathrm{DR}}(\mathbb{R}\times\boldsymbol{M})$.
>
> Un corollaire de ce résultat est le suivant :
>
> “*Soit $\pi : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{M}$ un fibré vectoriel (pas nécessairement trivial) de rang arbitraire. La projection π induit un isomorphisme en cohomologie $\pi^* : H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{M}) \to H^*_{\mathrm{DR}}(\boldsymbol{E})$.*”

Soient $\boldsymbol{M}$ une variété différentiable connexe, et $\boldsymbol{N}$ une sous-variété **compacte** de $\boldsymbol{M}$. Pour chaque $r \in \mathbb{N}$, on dira que deux r-formes différentielles ω_1 et ω_2, définies respectivement sur des voisinages ouverts U_1 et U_2 de $\boldsymbol{N}$, définissent « *le même germe de forme différentielle sur* $\boldsymbol{N}$ », s'il existe un voisinage ouvert $W \supseteq \boldsymbol{N}$, vérifiant $W \subseteq U_1 \cap U_2$ et tel que les restrictions $\rho^{U_1}_W(\omega_1)$ et $\rho^{U_2}_W(\omega_2)$ coïncident.

I-1) Montrer que la relation « *définir le même germe sur* $\boldsymbol{N}$ » est une équivalence sur l'ensemble des r-formes différentielles définies sur les voisinages de $\boldsymbol{N}$. Notons $\Omega^r(\!(\boldsymbol{N})\!)_{\boldsymbol{M}}$ l'ensemble des classes d'équivalence définies par cette relation.

• Montrer que pour toute famille finie de germes $\varpi_1, \ldots, \varpi_s \in \Omega^r(\!(\boldsymbol{N})\!)_{\boldsymbol{M}}$, il existe un même voisinage ouvert $W \supseteq \boldsymbol{N}$ dans lequel il existe des r-formes différentielles $\omega_1, \ldots, \omega_s \in \Omega^r(W)$ telles que ϖ_i est le germe défini par ω_i, pour chaque $i = 1, \ldots, s$.

I-2) Étant donnés $\varpi_1, \varpi_2 \in \Omega^r(\!(\boldsymbol{N})\!)_{\boldsymbol{M}}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit le germe $\varpi_1 + \lambda\,\varpi_2$ comme le germe de $\omega_1 + \lambda\,\omega_2$, où ω_1 et ω_2 sont des représentants de ϖ_1 et ϖ_2 dans un même voisinage W de $\boldsymbol{N}$. Montrer que l'on définit par ce procédé une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel sur $\Omega^r(\!(\boldsymbol{N})\!)_{\boldsymbol{M}}$.

• De manière analogue, si $\omega \in \Omega^r(W)$ est un représentant d'un germe $\varpi \in \Omega^r(\!(\boldsymbol{N})\!)_{\boldsymbol{M}}$, on définit $d\,\varpi \in \Omega^{r+1}(\!(\boldsymbol{N})\!)_{\boldsymbol{M}}$ comme le germe de la $(r+1)$-forme différentielle $d\,\omega$. Montrer que $\big(\Omega^*(\!(\boldsymbol{N})\!)_{\boldsymbol{M}}, d\big)$ se voit ainsi muni d'une structure de complexe différentiel gradué.

I-3) [*] Notons $\rho^{\boldsymbol{M}}_{(\boldsymbol{N})} : \Omega^*_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{M}) \to \Omega^*(\!(\boldsymbol{N})\!)_{\boldsymbol{M}}$ l'application qui associe à une forme différentielle à support compact sur $\boldsymbol{M}$, le germe qu'elle définit sur $\boldsymbol{N}$. Montrer que $\rho^{\boldsymbol{M}}_{(\boldsymbol{N})}$ est un morphisme de complexes différentiels gradués **surjectif**, de noyau le complexe des formes différentielles à support compact contenu dans l'ouvert $\boldsymbol{M}\backslash\boldsymbol{N}$. Autrement dit, la suite de complexes :

$$\boldsymbol{0} \to \Omega^*_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{M}\backslash\boldsymbol{N}) \xrightarrow{\imath^{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{M}\backslash\boldsymbol{N}}} \Omega^*_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{M}) \xrightarrow{\rho^{\boldsymbol{M}}_{(\boldsymbol{N})}} \Omega^*(\!(\boldsymbol{N})\!)_{\boldsymbol{M}} \to \boldsymbol{0}\,,$$

est **exacte**.

Indication : Vous utiliserez le fait que si $\boldsymbol{K}$ est une partie compacte de $\boldsymbol{M}$ contenue dans un ouvert U, il existe une fonction de partition ρ de $\boldsymbol{M}$, à support compact contenu dans U, et telle que l'ensemble des $m \in \boldsymbol{M}$ vérifiant $\rho(m) = 1$ est un voisinage de $\boldsymbol{K}$.

I-4) [**] Montrer que l'application $\rho_{\boldsymbol{N}}^{(\boldsymbol{N})} : \Omega^*(\!(\boldsymbol{N})\!)_{\boldsymbol{M}} \to \Omega^*(\boldsymbol{N})$ qui associe à chaque germe ϖ la restriction à $\boldsymbol{N}$ d'un représentant local ω de ϖ, est bien définie et c'est un morphisme de complexes différentiels gradués qui établit un **isomorphisme** en cohomologie.

> *Indication : On utilisera le fait qu'il existe un voisinage ouvert $W(\boldsymbol{N}) \supseteq \boldsymbol{N}$ et un difféomorphisme $\varphi : W(\boldsymbol{N}) \to \boldsymbol{E}$, où $\boldsymbol{E}$ est un fibré vectoriel au-dessus de $\boldsymbol{N}$ de rang $(\dim(\boldsymbol{M}) - \dim(\boldsymbol{N}))$ et où $\varphi(\boldsymbol{N})$ s'identifie à la section nulle de $\boldsymbol{E}$; ce type de voisinage est connu sou le nom de « voisinage tubulaire de $\boldsymbol{N}$ ». Montrer que le morphisme de restriction $\Omega^*(\!(\boldsymbol{N})\!)_{\boldsymbol{M}} \to \Omega^*(\!(\boldsymbol{N})\!)_{W(\boldsymbol{N})}$ est un isomorphisme de complexes ; puis appliquer le corollaire du lemme de Poincaré, énoncé dans le rappel précédant ce problème, pour prouver que le morphisme $\Omega^*(\!(\boldsymbol{N})\!)_{W(\boldsymbol{N})} \to \Omega^*(\boldsymbol{N})$ induit un* isomorphisme en cohomologie.

• En déduire l'existence d'une suite exacte longue de cohomologies de de Rham à supports compacts :

$$\boxed{\longrightarrow H^r_{\mathrm{DR,c}}(\boldsymbol{M}\backslash\boldsymbol{N}) \longrightarrow H^r_{\mathrm{DR,c}}(\boldsymbol{M}) \longrightarrow H^r_{\mathrm{DR,c}}(\boldsymbol{N}) \xrightarrow{[+1]}} \qquad (\ddagger)$$

I-5) En utilisant la suite (‡), montrer que si $\boldsymbol{M}$ et $\boldsymbol{N}$ sont toutes deux orientables et compactes, les nombres de Betti de $\boldsymbol{M}\backslash\boldsymbol{N}$ sont tous *finis*.

I-6) En utilisant la suite (‡), montrer que si $\boldsymbol{M} = \mathbb{R}^d$ ($d \geqslant 1$) et si $\boldsymbol{N}$ est une sous-variété compacte de dimension $(d-1)$, connexe et orientable, alors l'ouvert $\mathbb{R}^d\backslash\boldsymbol{N}$ possède exactement deux composantes connexes.

Remarque. La suite exacte (‡) existe toujours pour $\boldsymbol{N}$ fermée, même si cette sous-variété n'est pas compacte.

——————×——————

Problème II. Cohomologie de de Rham des espaces projectifs complexes

Rappelons que l'on note $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des droites $\mathbb{C}$-vectorielles de $\mathbb{C}^{n+1}$. Notons $(z_0, \ldots, z_n)$ les vecteurs de $\mathbb{C}^{n+1}$ pour sa structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel. L'ensemble $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ est alors décomposé en $(n+1)$ parties $U_0, \ldots, U_n$, où, pour chaque $i = 0, \ldots, n$, la partie U_i est l'ensemble des droites vectorielles du complémentaire de l'hyperplan complexe défini par l'équation : $z_i = 0$. En particulier, on a des bijections canoniques $\varphi_i : U_i \to \mathbb{C}^n$:

$$U_i \ni \langle(z_0, \ldots, z_i, \ldots, z_n)\rangle \xmapsto[\equiv]{\varphi_i} \left(\frac{z_0}{z_i}, \ldots, \frac{\widehat{z_i}}{z_i}, \ldots, \frac{z_n}{z_i}\right) \in \mathbb{C}^n$$

où $\langle(z_0, \ldots, z_n)\rangle$ désigne la droite $\mathbb{C}$-vectorielle engendrée par $(z_0, \ldots, z_n)$, et le terme sous un chapeau est à omettre.

• Montrer que la famille $\mathrm{A} := \{(U_i, \varphi_i)\}_{i=0,\ldots,n}$ est un atlas $2n$-dimensionnel orienté pour $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$. Puis, que l'ensemble $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$, muni de la structure de variété différentiable définie par A, est une variété ***compacte connexe et orientée***.

Considérons $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ muni de la structure de variété différentiable donnée par l'atlas A. Le but du problème est de montrer que $H^*_{\mathrm{DR}}(\mathbb{P}_n(\mathbb{C}))$ est isomorphe (en tant que $\mathbb{R}$-algèbre graduée) à l'algèbre de « *polynômes tronqués* » $\mathbb{R}[X^2]/(X^{2n+2})$; ce qui est évident pour $n = 0$, puisqu'alors $\mathbb{P}_0(\mathbb{C})$ est un point.

II-1) Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, nous allons considérer l'injection $\mathbb{C}$-linéaire canonique $\mathbb{C}^n \hookrightarrow \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}$ qui fait correspondre au vecteur $(z_0, \ldots, z_{n-1})$, le vecteur $(z_0, \ldots, z_{n-1}, 0)$. Montrer que cette injection induit un plongement *fermé* de variétés $\imath_{n-1} : \mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C}) \hookrightarrow \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$. On réalise ainsi $\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C})$ comme sous-variété *fermée* de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$.

• Montrer que le complémentaire de $\imath_{n-1}(\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C}))$ dans $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ est difféomorphe à $\mathbb{C}^n$. On a donc (suite (‡) du problème I) la suite exacte longue de cohomologies :

$$\boxed{\longrightarrow H^r_{\text{DR,c}}(\mathbb{C}^n) \longrightarrow H^r_{\text{DR}}(\mathbb{P}_n(\mathbb{C})) \xrightarrow{\imath^*_{n-1}} H^r_{\text{DR}}(\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C})) \xrightarrow{[+1]}} \qquad (\dagger)$$

II-2) Soit $n > 0$ et supposons à partir de cette question, par hypothèse inductive, qu'il existe un isomorphisme de $\mathbb{R}$-algèbres graduées $\Phi_{n-1} : H^*_{\text{DR}}(\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C})) \equiv \mathbb{R}[X^2]/(X^{2n-2})$. Montrer les deux assertions suivantes à l'aide de la suite exacte (†) :

II-2-a) Les morphismes de restriction $H^r_{\text{DR}}(\mathbb{P}_n(\mathbb{C})) \to H^r_{\text{DR}}(\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C}))$ sont bijectifs, pour tout $0 \leqslant r < 2n$.

II-2-b) Le morphisme de restriction $\imath^*_{n-1} : H^*_{\text{DR}}(\mathbb{P}_n(\mathbb{C})) \to H^*_{\text{DR}}(\mathbb{P}_{n-1}(\mathbb{C}))$ est un homomorphisme de $\mathbb{R}$-algèbres graduées *surjectif*.

II-3) Montrer que si $n > 0$, on a $\dim_{\mathbb{R}}\big(H^2_{\text{DR}}(\mathbb{P}_n(\mathbb{C}))\big) = 1$. Notons ν un élément non nul de $H^2_{\text{DR}}(\mathbb{P}_n(\mathbb{C}))$.

II-3-a) Montrer que ν^{n-1} est un générateur de $H^{2n-2}_{\text{DR}}(\mathbb{P}_n(\mathbb{C}))$.

II-3-b) Déduire, à l'aide de la dualité de Poincaré sur $H^*_{\text{DR}}(\mathbb{P}_n(\mathbb{C}))$, que ν^n est un générateur de $H^{2n}_{\text{DR}}(\mathbb{P}_n(\mathbb{C}))$.

II-4) Montrer qu'il existe un homomorphisme de $\mathbb{R}$-algèbres graduées $\Phi_n : \mathbb{R}[X^2] \to H^*_{\text{DR}}(\mathbb{P}_n(\mathbb{C}))$, vérifiant $\Phi_n(X^2) = \nu$. Montrer que Φ_n est alors une surjection d'algèbres dont le noyau est l'idéal $\big((X^2)^{n+1}\big)$.

II-5) Expliciter les nombres de Betti de $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$.

———×———

Problème III. Cohomologies de de Rham de degré maximal des variétés différentiables

Dans ce problème, on désigne par $\boldsymbol{M}$ une variété différentiable ***connexe*** sauf mention explicite du contraire. On se propose d'interpréter en termes d'orientabilité la dimension du groupe de cohomologie $H^{\dim(\boldsymbol{M})}_{\text{DR,c}}(\boldsymbol{M})$.

Rappelons qu'une variété différentiable $\boldsymbol{M}$ est dite « *orientable* » lorsque la classe d'atlas définissant sa structure de variété contient des atlas « *orientés* », *i.e.* tels que leurs applications de transition sont toutes de jacobiens positifs. Lorsque la variété $\boldsymbol{M}$ est orientable, on appelle « *orientation pour* $\boldsymbol{M}$ » la donnée d'un atlas orienté A. On appelle enfin, « *atlas complet de l'orientation de* $\boldsymbol{M}$ » l'ensemble de toutes les cartes (U, φ) de $\boldsymbol{M}$ telles que les applications de transition entre (U, φ) et les cartes de A sont de jacobiens positifs.

L'équivalence entre les assertions :

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{La variété } \boldsymbol{M} \\ \text{est orientable} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Il existe une forme différentielle de} \\ \text{degré } \dim(\boldsymbol{M}) \text{, nulle part nulle} \end{array} \right\}$$

sera utilisée dans la résolution du problème.

On considérera également connue la conséquence de dualité de la Poincaré qui affirme que pour une variété orientable, la dimension du groupe de cohomologie de de Rham à “supports compacts” de degré maximal coïncide avec le nombre des composantes connexes de la variété. L'un des but de ce problème de l'établir le fait réciproque qui affirme que lorsque les dimensions en question sont *finies*, leur égalité ne peut se produire que si la variété est orientable ; en particulier, la présence de l'égalité :

$$\dim_{\mathbb{R}}(H^r_{\text{DR}}(\boldsymbol{M})) = \dim_{\mathbb{R}}\left(H^{\dim(\boldsymbol{M})-r}_{\text{DR,c}}(\boldsymbol{M})\right),$$

pour $r = 0$ et entre deux nombres finis, entraîne l'égalité pour tout $0 \leqslant r \leqslant \dim(\boldsymbol{M})$.

Partie III-A Soit $\boldsymbol{M}$ une variété différentiable.

III-A-1) Soit $(\mathfrak{A}, \leqslant)$ un ensemble totalement ordonné et $\mathrm{F} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ une famille d'ouverts *connexes et orientables* de $\boldsymbol{M}$, telle que $U_{\alpha_1} \subseteq U_{\alpha_2}$ à chaque fois que $\alpha_1 \leqslant \alpha_2$. Montrer que l'ouvert réunion $U := \bigcup_{\alpha\in\mathfrak{A}} U_\alpha$ est connexe et orientable.

> Indication : *En supposant qu'il existe un $\alpha_0 \in \mathfrak{A}$ tel que U_{α_0} est non vide (faute de quoi rien ne serait à démontrer), on a $U = \bigcup_{\alpha\geqslant\alpha_0} U_\alpha$. Fixons une orientation pour U_{α_0} et notons A_{α_0} l'atlas complet associé. Montrez alors que pour chaque $\alpha \geqslant \alpha_0$, il existe une unique orientation sur U_α, d'atlas complet noté A_α, telle que $\mathrm{A}_\alpha \supseteq \mathrm{A}_{\alpha_0}$. Déduisez-en que la réunion $\mathrm{A} := \bigcup_{\alpha\geqslant\alpha_0} \mathrm{A}_\alpha$ est un atlas orienté pour U en montrant que le morphisme de transition de deux cartes de A est de jacobiens positifs.*

• En déduire que sur toute variété différentiable $\boldsymbol{M}$, et pour tout ouvert domaine de carte $V \subseteq \boldsymbol{M}$, il existe des ouverts connexes et orientables maximaux contenant V.

> Indication : *Appliquer le lemme de Zorn à l'ensemble partiellement ordonné $(\mathsf{O}, \subseteq)$ de toutes les parties ouvertes connexes orientées de $\boldsymbol{M}$ qui contiennent V. Vous devrez montrer que $\mathsf{O} \neq \varnothing$ et que $(\mathsf{O}, \subseteq)$ est* inductif, i.e. *que pour tout sous-ensemble $\mathsf{O}' \subseteq \mathsf{O}$* totalement ordonné par la relation d'inclusion, *il existe un élément $U \in \mathsf{O}$ vérifiant $U' \subseteq U$, quel que soit $U' \in \mathsf{O}'$.*

III-A-2) [*] Soit U un ouvert connexe orientable maximal de $\boldsymbol{M}$ et soit ω est une forme différentielle de degré maximal sur U nulle part nulle. Munissons U d'une orientation telle que pour toute fonction de partition ρ non nulle à support compact dans U, on ait $\int_U \rho\,\omega > 0$. Montrer que pour tout m appartenant à la frontière de U et pour tout domaine de carte V contenant m, que l'on munira d'une orientation, l'ouvert $U \cap V$ possède au moins deux composantes connexes, U_1 et U_2, dans lesquelles il existe des fonctions de partition ρ_1 et ρ_2 à supports compacts non vides contenus dans U_1 et U_2 respectivement, vérifiant :

$$\int_U \rho_1\,\omega = \int_U \rho_2\,\omega \quad \text{et} \quad \int_V \rho_1\,\omega = -\int_V \rho_2\,\omega\,.$$

> Indication : *Notons $\{W_\alpha\}_{\alpha\in\mathfrak{A}}$ l'ensemble des composantes connexes de $U\cap V$ et fixons, pour chaque $\alpha \in \mathfrak{A}$, une fonction de partition non nulle ρ_α à support compact contenu dans W_α.*

Montrer alors que si les signes des intégrales $\int_V \rho_\alpha\,\omega$ étaient tous égaux (on pourra supposer qu'ils sont positifs, quitte à changer l'orientation de V), alors les morphismes de transition entre la carte orientée de domaine V et les cartes de l'atlas orienté de U (pour les orientations en cours) seraient de jacobiens positifs, et donc $U \cup V$ serait connexe et orientable, ce qui est impossible...

Partie III-B Soit U un ouvert connexe orientable maximal de $\boldsymbol{M}$, supposée ***connexe et non orientable***.

III-B-1) Montrer que deux formes différentielles de $\boldsymbol{M}$ de degré maximum à support compact contenu dans U, définissent des éléments colinéaires dans $H^{\dim(\boldsymbol{M})}_{\mathrm{DR,c}}(\boldsymbol{M})$.

III-B-2) En reprenant les données de la question (III-A-2), montrer que la classe de cohomologie définie par $\rho_1\,\omega$ dans $H^{\dim(\boldsymbol{M})}_{\mathrm{DR,c}}(\boldsymbol{M})$ est nulle.

• En déduire que sur une variété connexe non orientable les classes de cohomologie à supports compacts, définies par les formes différentielles à supports compacts contenus dans les domaines de cartes, sont nulles.

III-B-3) [*] A l'aide de partitions de l'unité à supports compacts, déduire de la question précédente l'annulation de $H^{\dim(\boldsymbol{M})}_{\mathrm{DR,c}}(\boldsymbol{M})$. En conclure que pour toute variété différentiable ***connexe*** $\boldsymbol{M}$, les assertions suivantes sont équivalentes :

$$\begin{cases} \text{a) } \boldsymbol{M} \text{ n'est pas orientable.} \\ \text{b) } H^{\dim(\boldsymbol{M})}_{\mathrm{DR,c}}(\boldsymbol{M}) = 0. \end{cases}$$

Nous voyons donc que pour une variété différentiable $\boldsymbol{M}$ **connexe**, *la dimension de $H^{\dim(\boldsymbol{M})}_{\mathrm{DR,c}}(\boldsymbol{M})$ ne peut prendre que l'une des valeurs 1 ou 0 ; ces valeurs correspondent précisément à l'orientabilité ou la non-orientabilité de $\boldsymbol{M}$.*

———×———

(fin de l'examen)