Conditions de Hirai et Chaînes Sous-Analytiques, I

(d'après Masaki Kashiwara)

par A. Arabia[1]

Le but de cet exposé est de fournir des détails complémentaires aux définitions et arguments de l'article [K-2] de Masaki Kashiwara : « *Character, Character Cycle, Fixed Point Theorem and Group Representations* », essentiellement pour ceux des sections qui motivent sa remarque fondamentale concernant ce qu'il appelle la *Correspondance de Hirai* (*loc. cit.* Proposition 2.3.1) ; correspondance *bijective* permettant de relier, d'une part, l'espace des distributions sur une forme réelle $G_\mathbb{R}$ d'un groupe semi-simple complexe et connexe G, invariantes et propres pour le caractère infinitésimal trivial χ, et d'autre part, le groupe de cohomologie de degré $-\dim(G_\mathbb{R})$ du complexe

$$R\Gamma(\rho^{-1}(G_\mathbb{R}); \omega_{\rho^{-1}(G_\mathbb{R})} \otimes \rho^{-1}\underline{\underline{or}}_{G_\mathbb{R}}), \tag{1}$$

noté $\mathrm{H}^{\mathrm{inf}}_{\dim(G_\mathbb{R})}(\rho^{-1}(G_\mathbb{R}); \underline{\underline{or}}_{G_\mathbb{R}})$ et où $\rho : \widetilde{G} \to G$ dénote la projection canonique de la variété d'incidence $\widetilde{G}$ associée à G. Soit :

$$\left\{\begin{matrix}\text{Distributions invariantes}\\ \chi\text{-propres sur } G_\mathbb{R}.\end{matrix}\right\} \xleftrightarrow[\equiv]{\textit{Correspondance de Hirai}} \mathrm{H}^{\mathrm{inf}}_{\dim(G_\mathbb{R})}(\rho^{-1}(G_\mathbb{R}); \underline{\underline{or}}_{G_\mathbb{R}}).$$

Kashiwara introduit alors le *Complexe des Chaînes Sous-Analytiques* de $\rho^{-1}(G_\mathbb{R})$ et montre que, de manière analogue au complexe des chaînes simpliciales localement finies, ce « sous-complexe » réalise un représentant du dualisant $\omega_{\rho^{-1}(G_\mathbb{R})}$, constitué par des faisceaux *fins*[2] (*confer* Propositions 1.5.1 et 1.5.3). Cette remarque lui permet de « relever » toute classe de cohomologie de degré $-p$ du complexe (1) en un p-cycle sous-analytique à coefficients dans $\rho^{-1}\underline{\underline{or}}_{G_\mathbb{R}}$; en particulier, comme en degré $-\dim(G_\mathbb{R})$ ce relèvement est trivialement unique puisque il n'existe pas d'ensemble sous-analytique de dimension supérieure, la correspondance de Hirai associe à une distribution invariante χ-propre, un cycle sous-analytique de $\rho^{-1}(G_\mathbb{R})$ bien déterminé, et ceci bijectivement.

Cette correspondance, qui sera détaillée dans le §2 du présent exposé et que l'on obtient aisément à l'aide de manipulations formelles en catégorie dérivée à partir de résultats fondamentaux établis dans [H-K], a l'avantage d'être *a priori* naturelle, de sorte que l'on obtient un diagramme commutatif associé à l'opération de restriction de $G_\mathbb{R}$ à sa partie régulière $G_{\mathbb{R},\mathrm{reg}}$:

$$\begin{tikzcd}
\left\{\begin{matrix}\text{Distributions invariantes}\\ \chi\text{-propres sur } G_\mathbb{R}.\end{matrix}\right\} \arrow[r, "\textit{restriction}"] \arrow[d, leftrightarrow, "\textit{Hirai}"', "\equiv"] & \left\{\begin{matrix}\text{Distributions invariantes}\\ \chi\text{-propres sur } G_{\mathbb{R},\mathrm{reg}}.\end{matrix}\right\} \arrow[d, leftrightarrow, "\equiv"', "\textit{Hirai}"] \\
\mathrm{H}^{\mathrm{inf}}_{\dim(G_\mathbb{R})}(\rho^{-1}(G_\mathbb{R}); \underline{\underline{or}}_{G_\mathbb{R}}) \arrow[r, "\textit{restriction}"] & \mathrm{H}^{\mathrm{inf}}_{\dim(G_\mathbb{R})}(\rho^{-1}(G_{\mathbb{R},\mathrm{reg}}); \underline{\underline{or}}_{G_{\mathbb{R},\mathrm{reg}}})
\end{tikzcd}$$

permettant de « poser », en termes d'opérations sur les chaînes sous-analytiques, les conditions nécessaires pour qu'une distribution invariante propre sur la partie régulière puisse

[1] Université de Paris VII. URA 748, tour 45–55, 5^e étage. 2, place Jussieu, 75 251 Paris Cedex 05.

[2] En fait Φ-fins pour toute famille paracompactifiante Φ. En particulier acycliques pour les foncteurs de sections à supports dans Φ (*cf.* [God]).

être prolongée en une distribution de même type sur $G_{\mathbb{R}}$ tout entier ; conditions auxquelles on réfère classiquement par le nom de *Conditions de Hirai* —ce qui explique par ailleurs la terminologie choisie par Kashiwara. Mais, très rapidement introduite par une rédaction souvent succinte, cette correspondance apparaît dépourvue du degré suffisant d'explicitation permettant de reconnaître l'ensemble des conditions énoncé par Hirai (*cf.* [Hir]). C'est pourquoi j'ai entrepris, à la demande de Michèle Vergne, le travail d'élucidation dont cette rédaction fait l'objet.

Dans le présent exposé, le lecteur trouvera, par rapport aux articles précités, un traitement plus détaillé, mais suivant toujours les directions esquissées par Kashiwara, des fondements du Complexe des Chaînes Sous-Analytiques pour un espace qui est lui même sous-analytique et localement fermé dans une variété analytique réelle ; suffisamment détaillé en tout cas pour faire aboutir le §1, dans les sections 1.4 et 1.5, à l'explicitation du morphisme bord au niveau des section globales, aussi bien dans le cas régulier que dans le cas singulier localement fermé. On trouvera aussi, en §2, les détails de l'explicitation de la correspondance de Hirai sur la partie régulière de $G_{\mathbb{R}}$. Ces deux sujets constituent l'introduction indispensable pour l'exposé suivant, par A. Bouaziz, qui traitera plus proprement du problème du prolongement des distributions considérées.

Je me dois aussi de signaler que, malgré le fait que les résultats de l'article de R. Hotta et M. Kashiwara ([H-K]) jouent un rôle incontestablement capital dans la chaîne de raisonnements permettant d'établir la correspondance de Hirai, ces résultats ne seront que sommairement rappelés et à peine discutés. En particulier, les liens d'interdépendance entre les travaux de Harish-Chandra ([HC]) et les résultats de [H-K] utilisés dans [K-2] n'ont pas été suffisament explorés, bien qu'ils eussent mérité, à eux seuls, une section à part entière.

Lors de la composition de ce texte j'ai bénéficié de la lecture de diverses sources d'information dont le livre de M. Kashiwara et P. Schapira [K-S], actuellement en cours d'édition chez Springer et intitulé : « *Sheaves on Manifolds* », constitue sans doute la principale référence. En ce sens je remercie P. Schapira de m'avoir permis d'accéder aux chapitres intimement liés aux problèmes que nous avions à traiter et tiens à préciser que les sections 1.2 et 1.3 suivent pour l'essentiel leur exposé.

Je termine cette brève introduction en exprimant ma gratitude à Michèle Vergne pour m'avoir suggéré ce travail.

Contents

1 Complexe de chaînes sous-analytiques

1.1 Catégories de travail.

Au niveau le plus élémentaire la catégorie d'espaces à considérer sera celle dont les objets sont les espaces topologiquement stratifiables et les morphismes les applications continues.

Je rappelle (*cf.* [Bor] I) qu'un espace topologiquement stratifié de dimension n est la donnée d'un espace séparé, paracompact, dénombrable à l'infini et muni d'une filtration par de fermés

$$X = X_0 \supseteq X_1 \supseteq \cdots \supseteq X_n \supseteq \emptyset,$$

de sorte que pour chaque point $p \in X_{i,\text{reg}} := X_i \backslash X_{i+1}$, il existe un voisinage N de p dans X, un espace compact L toplogiquement stratifié de dimension $i-1$

$$L = L_0 \supseteq L_1 \supseteq \cdots \supseteq L_{i-1} \supseteq \emptyset,$$

et un homéomorphisme $\phi : \mathbb{R}^{n-i} \times \mathring{c}(L) \to N$ transformant $\mathbb{R}^{n-i} \times \mathring{c}(L_j)$ sur $N \cap X_j$.[3]

Il s'ensuit que l'ensemble $X_{i,\text{reg}}$ est une sous-variété topologique, localement fermée de X et de codimension i, nous l'appellerons suivant la terminologie habituelle *la strate* $(n-i)$*-dimensionnelle* de la stratification considérée et la noterons parfois X^{n-i}. On dira aussi que X_{i+1} est la *singularité* de X_i et que $X_{i,\text{reg}}$ est sa *partie régulière*. Lorsque $i = 1$, la situation locale est celle de l'espace $N = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathring{c}(L^0)$, où L^0 dénote un ensemble fini de points ; ainsi l'ouvert N apparaît comme un bouquet de sous-variétés à bord, de dimension n, localement fermées dans X et collées par leur bord.

Les exemples les plus familiers de tels espaces sont fournis par les variétés algébriques, les ensembles semi-algébriques, semi-analytiques et plus généralement sous-analytiques d'une variété analytique réelle (*cf.* [H-1]) ; enfin, tout espace admettant une stratification de Whitney est aussi topologiquement stratifiable (*cf.* [Bor] IV).

Considérons maintenant pour chaque espace X la catégorie dérivée des complexes à cohomologie bornée et constructible relativement à des stratifications topologiques, elle sera notée $\mathcal{D}^b_c(X)$. La nature stratifiée des espaces sous-jacents permet alors de démontrer les théorèmes de finitude indispensables pour assurer la stabilité de ces catégories vis-à-vis des opérations de Grothendieck (*cf.* [Bor] V §8). Ces remarques sont en particulier vraies pour la sous-catégorie d'espaces constituée des ensembles sous-analytiques des variétés analytiques réelles et dont les morphismes sont les restrictions des applications analytiques ; dans ce cas la constructibilité sera relative à des stratifications par des parties sous-analytiques.

1.2 Faisceaux de chaînes sous-analytiques.

Soit X une variété analytique réelle et fixons un entier positif p. Pour chaque ouvert $U \subseteq X$ considérons, suivant M. Kashiwara, le $\mathbb{Z}$-module libre $\mathcal{CS}'_p(U)$ engendré par les

[3] Dans cette définition $\mathring{c}(L)$ dénote le cône ouvert associé à l'espace L. Dans la situation extrême où $i = 0$, on aura $L = \emptyset$ et $\mathring{c}(\emptyset) = \text{pt}$.

couples (S, Σ), où S dénote une sous-variété analytique réelle de dimension p, plongée dans U (donc localement fermée) et sous-analytique[4] en tant que sous-ensemble de U, et où Σ dénote une section globale du faisceau d'orientation de S.

Soit $\mathcal{R}_p(U)$ le sous-module de $\mathcal{CS}'_p(U)$ engendré par les éléments des trois *types* suivants :

a) $(S_1, \Sigma_1) - (S_2, \Sigma_2)$; s'il existe $(S_3, \Sigma_3) \in \mathcal{CS}'_p(U)$, avec $S_3 \subseteq S_1 \cap S_2$, tel que $\Sigma_i|_{S_3} = \Sigma_3$ et $\overline{\mathrm{supp}}(\Sigma_i) = \overline{\mathrm{supp}}(\Sigma_3)$[5] pour $i = 1, 2$,

b) $m(S, \Sigma) - (S, m\Sigma)$; pour tout $m \in \mathbb{Z}$,

c) $(S_1 \amalg S_2, \Sigma_1 \amalg \Sigma_2) - (S_1, \Sigma_1) - (S_2, \Sigma_2)$,

et considérons le module quotient $\mathcal{CS}_p(U) := \mathcal{CS}'_p(U)/\mathcal{R}_p(U)$. Ses éléments seront appelés *les p-chaînes sous-analytiques de* U. On notera $[S, \Sigma]$ la classe d'équivalence du couple (S, Σ) modulo $\mathcal{R}_p(U)$.

Lemme 1.2.1

i) Tout élément de $\mathcal{CS}_p(U)$ est de la forme $[S, \Sigma]$.

ii) L'élément $[S, \Sigma] \in \mathcal{CS}_p(U)$ est nul si et seulement si $\Sigma \equiv 0$. En particulier $\mathcal{CS}_p(U)$ est un $\mathbb{Z}$-module plat.

Démonstration : Pour *i*), on remarque que dans $\mathcal{CS}_p(U)$ l'annulation des éléments a) b) et c) fait que, à partir de l'égalité

$$S_1 \cup S_2 = (S_1 \backslash S_2) \amalg (S_1 \cap S_2) \amalg (S_2 \backslash S_1) \tag{2}$$

et après restriction aux parties régulières des ensembles sous-analytiques du membre de droite de (2), on peut décrire une somme $[S_1, \Sigma_1] + [S_2, \Sigma_2]$ (et donc toute somme finie) à l'aide d'un seul symbole $[S, \Sigma]$.

La suffisance dans *ii*) étant claire étudions la nécessité. Tout élément $(S_0, \Sigma_0) \in \mathcal{R}_p(U)$ est une somme finie de termes de types a) b) et c), ce qui donnera une expression $(S_0, \Sigma_0) = \Sigma_{i=1}^r m_i(S_i, \Sigma_i)$. Le bord topologique $\delta S_i = \overline{S_i} \backslash S_i$ de S_i est un fermé dans U et l'ensemble $\Delta = \cup_{i=1}^r \delta S_i$ y est sous-analytique de dimension $< p$, par conséquent $S_0 \backslash \Delta$ est un ouvert dense de S_0 dont les éléments x vérifient : $x \notin \delta S_i$, pour tout $i \geq 0$.

Ceci étant, la donnée en $y \in U$ d'un germe $T(y)$ de variété orientée de dimension p permet de définir une forme linéaire $\delta_{T(y)}$ sur $\mathcal{CS}'_p(U)$ en posant : $\delta_{T(y)}(S, \Sigma) = m$, si $y \in S$ et le germe de variété $S(y)$, défini par S en y, coïncide avec $T(y)$, auquel cas m sera le facteur de proportionnalité entre $\Sigma(y)$ et l'orientation de $T(y)$; et en posant dans

[4] Rappelons pour mémoire (*confer* [H-1]) qu'une partie S d'une variété analytique réelle X est dite sous-analytique si pour tout point $x \in X$, il existe un voisinage U_x tel que $U_x \cap S$ est une réunion finie de parties de la forme $\pi_1(Y_1) \backslash \pi_2(Y_2)$, où Y_i dénote une variété analytique réelle et $\pi_i : Y_i \to U_x$ est un morphisme analytique *propre*. Les ensembles sous-analytiques admettent toujours des stratifications satisfaisant aux conditions de Whitney, ce sont donc des espaces topologiques stratifiables.

[5] La notation $\overline{\mathrm{supp}}(\Sigma)$ sera utilisée pour dénoter l'adhérence, dans la variété ambiante, du support de la section Σ.

toute autre circonstance $\delta_{T(y)}(S,\Sigma)=0$. Le noyau de $\delta_{T(y)}$ ne contient certainement pas $\mathcal{R}_p(U)$ tout entier, cependant notons $\mathcal{T}(y)$ le sous-module de $\mathcal{CS}'_p(U)$ engendré par les couples (S,Σ) tels que $\delta S \not\ni y$; alors $\ker(\delta_{T(y)}) \supseteq \mathcal{R}_p(U)\cap\mathcal{T}(y)$. Ceci est clair pour les éléments de la forme b) ou c), et pour un élément de la forme a) le seul cas méritant quelque détail est celui où $y\notin\overline{S_1}$ et $y\in S_2$, mais alors $\delta_{T(y)}(S_1,\Sigma_1)=0$ et comme $\mathrm{supp}(\Sigma_2)\subseteq\overline{\mathrm{supp}}(\Sigma_1)\subseteq\overline{S_1}$, on a $\Sigma_2(y)=0$ donc aussi $\delta_{T(y)}(S_2,\Sigma_2)=0$.

Ces considérations appliquées aux données de départ impliquent que $\delta_{T(y)}(S_0,\Sigma_0)=0$ pour tout germe de variété orientée $T(y)$ en $y\in S_0\backslash\Delta$. En particulier, on peut prendre $T(y)=S_0(y)$ en tant que germe de variété que l'on oriente arbitrairement ; on en déduit que $\Sigma_0|_{S_0\backslash\Delta}\equiv 0$ et par densité que $\Sigma_0\equiv 0$.

Nous avons ainsi démontré que le $\mathbb{Z}$-module $\mathcal{CS}_p(U)$ est sans torsion, il est donc $\mathbb{Z}$-plat. ∎

Soient maintenant $V\subseteq U$ deux ouverts de X. L'application ρ^U_V définie au niveau des couples $(S,\Sigma)\in\mathcal{CS}'_p(U)$ par $\rho^U_V(S,\Sigma)=(S\cap V,\Sigma|_{S\cap V})$, vérifie trivialement $\rho^U_V(\mathcal{CS}'_p(U))\subseteq\mathcal{CS}'_p(V)$ et $\rho^U_V(\mathcal{R}_p(U))\subseteq\mathcal{R}_p(V)$, nous allons donc la considérer définie sur $\mathcal{CS}_p(U)$ et à valeurs dans $\mathcal{CS}_p(V)$. La famille $\{\mathcal{CS}_p(U);\rho^U_V\}$ constitue clairement un préfaisceau sur X que l'on notera $\underline{\underline{\mathcal{CS}}}^X_p$.

Lemme 1.2.2

i) Le préfaisceau $\underline{\underline{\mathcal{CS}}}^X_p$ est un faisceau de $\mathbb{Z}$-modules plat.

ii) Pour chaque ouvert U de X, on a $\underline{\underline{\mathcal{CS}}}^X_p|_U\equiv\underline{\underline{\mathcal{CS}}}^U_p$.

Démonstration : Soit $\mathcal{U}=\{U_\alpha\}_\alpha$ un recouvrement ouvert de $U\subseteq X$. Pour toute section non nulle $[S,\Sigma]$ de $\underline{\underline{\mathcal{CS}}}^X_p$ au-dessus de U, le lemme précédent garantit l'existence d'un $x\in S$ tel que $\Sigma(x)\neq 0$; il s'ensuit, pour la même raison, que la restriction $\rho^U_{U_\alpha}[S,\Sigma]$ sera non nulle dès que $U_\alpha\ni x$. La propriété d'unicité locale pour les préfaisceaux se trouve ainsi vérifiée. Soit maintenant $\{[S_\alpha,\Sigma_\alpha]\in\mathcal{CS}_p(U_\alpha)\}_\alpha$ une famille de sections vérifiant la propriété de compatibilité locale : $\rho^{U_\alpha}_{U_\alpha\cap U_\beta}[S_\alpha,\Sigma_\alpha]=\rho^{U_\beta}_{U_\alpha\cap U_\beta}[S_\beta,\Sigma_\beta]$ pour tous α et β, et supposons, dans un premier temps, le recouvrement $\mathcal{U}$ localement fini. Notons par S'_α le support de Σ_α (c'est une réunion peut être vide de composantes connexes de S_α), l'ensemble $S=\cup_\alpha S'_\alpha$ est alors une sous-variété localement fermée de dimension p et sous-analytique dans U puisque, par construction, on aura $S\cap U_\alpha=S'_\alpha$, pour tout $x\in U$ et tout α tel que $U_\alpha\ni x$. Une section Σ du faisceau d'orientation de S peut maintenant être définie à partir d'orientations respectives des S_α grâce à la propriété de compatibilité locale. L'élément $[S,\Sigma]\in\mathcal{CS}_p(U)$ est le recollement des $[S_\alpha,\Sigma_\alpha]$ donnés. Le cas où le recouvrement n'est pas localement fini résulte de ce que sur une variété paracompacte la possibilité de recollements localement finis implique toujours le cas général.

On termine la preuve de *i*) en remarquant que la $\underline{\underline{\mathbb{Z}}}$-platitude du faisceau $\underline{\underline{\mathcal{CS}}}^X_p$ est conséquence de la propriété analogue des modules $\Gamma(U;\underline{\underline{\mathcal{CS}}}^X_p)$ que nous avons établie dans le lemme précédent.

Enfin, l'affirmation *ii*) est claire de par la définition même des modules $\Gamma(U;\underline{\underline{\mathcal{CS}}}^X_p)=\mathcal{CS}_p(U)$. ∎

Remarque 1.2.3 Les variétés S des symboles $[S,\Sigma] \in \mathcal{CS}_p(U)$ peuvent comporter une infinité de composantes connexes, toutefois ce cardinal sera toujours localement fini par rapport aux points de U puisque S y est sous-analytique.

Posons maintenant $\underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^X = 0$, pour tout entier p strictement négatif. Le reste de cette section sera consacré à donner une caractérisation des faisceaux $\underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^X$ qui nous sera utile pour introduire un morphisme *bord* $\delta_p^X : \underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^X \to \underline{\underline{\mathcal{CS}}}_{p-1}^X$ pour lequel $(\underline{\underline{\mathcal{CS}}}_\bullet^X, \delta_\bullet^X)$ sera un complexe. Pour cela il nous faut établir au préalable le résultat technique suivant.

Pour toute partie sous-analytique Y de X, notons par ω_Y le complexe dualisant de $\mathcal{D}_c^b(Y)$ et, lorsqu'il s'agira d'une variété topologique, par $\underline{\underline{or}}_Y$ le faisceau d'orientation associé.

Proposition 1.2.4 ([K-S]) *Soit S une partie sous-analytique localement fermée de X de dimension $\leq p$ et de partie régulière S_{reg}. Soit S' une partie sous-analytique localement fermée contenue dans S et notons j_S et $j_{S'}$ les injections canoniques de ces ensembles dans X, alors*

i) si S' est fermée dans S, on a une injection canonique

$$j_{S'*}\mathcal{H}^{-p}(\omega_{S'}) \hookrightarrow j_{S*}\mathcal{H}^{-p}(\omega_S)$$

qui est un isomorphisme lorsque $S\backslash S'$ est de dimension $< p$,

ii) lorsque S' est un ouvert dense dans S_{reg}, il existe une suite exacte canonique

$$0 \longrightarrow j_{S*}\mathcal{H}^{-p}(\omega_S) \longrightarrow j_{S'*}\underline{\underline{or}}_{S'} \longrightarrow j_{(S\backslash S')*}\mathcal{H}^{-p+1}(\omega_{(S\backslash S')}).$$

Démonstration : Commençons par une remarque générale concernant les espaces topologiquement stratifiés Y de dimension p : leur complexe dualisant ω_Y est concentré en degrés supérieurs ou égaux à $-p$.

On voit ceci tout d'abord lorsque Y est une variété topologique, en remarquant que comme le faisceau de cohomologie $\mathcal{H}^m(\omega_Y)$ est engendré par le préfaisceau $U \mapsto \mathrm{H}^m(U;\omega_Y)$, il suffit de montrer que $\mathrm{H}^m(U;\omega_Y)$ est nul pour des ouverts suffisamment petits lorsque $m < -p$. Or les égalités bien connues

$$\begin{aligned} R\Gamma(U;\omega_Y) &\equiv \mathrm{RHom}^\bullet(\underline{\underline{\mathbb{Z}}}_U, \omega_Y) \\ &\equiv \mathrm{RHom}^\bullet(R\Gamma_c(U;\mathbb{Z}), \mathbb{Z}), \end{aligned}$$

nous ramènent à la cohomologie à support compact d'un ouvert contractile que l'on sait bornée supérieurement par la dimension[6]. Dans le cas ou Y n'est pas nécessairement

[6]Il convient de rappeler la remarque classique suivante (*cf.* [Sem], [Ive], [Bor]) : Fixons une résolution injective $I^\bullet$ de l'anneau de base $\mathbb{Z}$ et une résolution c-molle $K^\bullet$du faisceau constant $\underline{\underline{\mathbb{Z}}}_Y$. La correspondance $U \mapsto \mathrm{Hom}(\Gamma_c(K_U^\bullet), I^\bullet)$ constitue un bi-complexe $(*)$ de *faisceaux* injectifs sur Y qui réalise le complexe dualisant ω_Y. Le faisceau $\mathcal{H}^q(\omega_Y)$ est engendré par le préfaisceau $U \mapsto \mathrm{H}^q(U;\omega_Y)$ où le module $\mathrm{H}^q(U;\omega_Y)$ est l'aboutissement de la suite spectrale associée au bi-complexe $(*)$ et dont le terme $E_2^{a,b}$ vaut $\mathrm{Ext}^a(\mathrm{H}_c^{-b}(U;\mathbb{Z}),\mathbb{Z})$. Or si l'ouvert U est suffisament petit, le module $\mathrm{H}_c^b(U;\mathbb{Z})$ est nul si $b \neq p$ et est isomorphe à $\mathbb{Z}$ autrement, de sorte que le seul terme non-trivial de E_2 est $E_2^{0,-p} = \mathrm{Hom}(\mathrm{H}_c^p(U;\mathbb{Z}),\mathbb{Z}) \equiv \mathrm{H}_p(Y, Y\backslash U)$. Enfin comme la restriction à un sous-ouvert V correspond au morphisme naturel de restriction $\mathrm{H}_p(Y,Y\backslash U) \to \mathrm{H}_p(Y,Y\backslash V)$, on conclut que : « *Si Y est une variété topologique de dimension p, le complexe dualisant ω_Y est quasi-isomorphe au faisceau d'orientation décalé* : $\underline{\underline{or}}_Y[\dim(Y)]$. »

régulier notons par $i : Y_1 \to Y$ et $j : Y_{\mathrm{reg}} \to Y$ les injections canoniques. On a le triangle exact

$$Ri_*\omega_{Y_1} \longrightarrow \omega_Y \longrightarrow Rj_*\omega_{Y_{\mathrm{reg}}} \longrightarrow \tag{3}$$

sur lequel nous pouvons affirmer que $Rj_*\omega_{Y_{\mathrm{reg}}}$ sera acyclique en dimension $< -p$ puisque nous venons de voir qu'il en est ainsi de $\omega_{Y_{\mathrm{reg}}}$ et que le foncteur j_* est exact à gauche. Comme d'autre part le complexe $i_*\omega_{Y_1}$ est acyclique en dimensions $< -p+1$, par hypothèse de récurrence, notre affirmation sur le complexe ω_Y résultera de considérer la suite exacte longue de cohomologie de faisceaux associée à (3).

Nous sommes maintenant en mesure de prouver la proposition.

L'injection de i) résulte de considérer un triangle analogue à (3), avec $Y_1 = S'$. L'isomorphisme s'explique par le fait que $\omega_{S\backslash S'}$ est concentré en degrés $> -p$.

Enfin, pour ii) on remarque que, comme $\widetilde{S} = S\backslash S'$ est un fermé sous-analytique de dimension $< p$, le triangle exact

$$Rj_{\widetilde{S}*}\omega_{\widetilde{S}} \longrightarrow Rj_{S*}\omega_S \longrightarrow Rj_{S'*}\omega_{S'} \longrightarrow$$

donne la suite exacte

$$0 \longrightarrow j_{S*}\mathcal{H}^{-p}(\omega_S) \longrightarrow j_{S'*}\mathcal{H}^{-p}(\omega_{S'}) \longrightarrow j_{\widetilde{S}*}\mathcal{H}^{-p+1}(\omega_{\widetilde{S}})$$

où $\mathcal{H}^{-p}(\omega_{S'}) \equiv \underline{\underline{or}}_{S'}$ puisque S' est une variété topologique de dimension p. ∎

Ceci étant notons par $\mathrm{lcls}_p(X)$ l'ensemble des parties sous-analytiques de dimension $\leq p$ et localement fermées dans X. Munissons $\mathrm{lcls}_p(X)$ de la relation $\prec$ définie par : $R \prec S$ si et seulement si, il existe une partie $T \in \mathrm{lcls}_p(X)$, dite de *transition*, telle que

I) T est ouverte dans R et $R\backslash T$ est de dimension $< p$,

II) T est fermée dans S.

Notons $(\mathrm{var}_p(X), \prec)$ le sous-système de $(\mathrm{lcls}_p(X), \prec)$ des parties *lisses* de dimension p dans X.

Proposition 1.2.5 ([K-S])

i) La relation $\prec$ définit un ordre partiel sur $\mathrm{lcls}_p(X)$ filtrant supérieurement. Le sous-système $(\mathrm{var}_p(X); \prec)$ est cofinal dans $(\mathrm{lcls}_p(X); \prec)$.

ii) Etant donnés $R \prec S$ dans $\mathrm{lcls}_p(X)$, il existe un morphisme canonique injectif

$$j_{R*}\mathcal{H}^{-p}(\omega_R) \hookrightarrow j_{S*}\mathcal{H}^{-p}(\omega_S)$$

de sorte que la famille $\{j_{S*}\mathcal{H}^{-p}(\omega_S)\}_{S\in\mathrm{lcls}_p(X)}$ est inductive.

iii) On a des isomorphismes canoniques

$$\underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^X \equiv \lim_{\substack{\mathrm{ind} \\ S\in\mathrm{var}_p(X)}} j_{S*}\underline{\underline{or}}_S \equiv \lim_{\substack{\mathrm{ind} \\ S\in\mathrm{lcls}_p(X)}} j_{S*}\mathcal{H}^{-p}(\omega_S).$$

Démonstration : En ce qui concerne l'affirmation i), la transitivité de la relation découle de ce que si $R \prec S$ et $S \prec T$ et si U et V sont respectivement des parties de transition, alors l'ensemble $U \cap V$ est une partie de transition pour $R \prec T$, car son complémentaire dans R est contenu dans $(R \backslash U) \cup (S \backslash V)$ donc est de dimension $< p$; d'autre part elle est clairement fermée dans T puisque U est fermé dans S est que V est un fermé de T *contenu dans* S. Le fait que la relation soit supérieurement filtrante vient de remarquer que pour S et T donnés, on a $S \prec (S \backslash (\overline{T} \backslash T)) \cup (T \backslash (\overline{S} \backslash S))$. Enfin, la relation $S \prec S^p$, où l'on note S^p la strate (peut être vide) de dimension p de S, est toujours vérifiée et prouve le caractère cofinal de $\mathrm{var}_p(X)$ dans $(\mathrm{lcls}_p(X), \prec)$.

Le morphisme de l'affirmation ii) provient de ce que si T est une partie de transition pour $R \prec S$, la proposition précédente garantit l'existence de morphismes injectifs canoniques

$$j_{R*}\mathcal{H}^{-p}(\omega_R) \hookrightarrow j_{T*}\mathcal{H}^{-p}(\omega_T) \hookrightarrow j_{S*}\mathcal{H}^{-p}(\omega_S) \tag{4}$$

de sorte que si T' est une autre partie de transition (que l'on peut toujours supposer contenue dans T, puisque si T_1 et T_2 sont de transition il en sera de même de $T_1 \cap T_2$), T' est ouverte et fermée dans T de complémentaire dans T de dimension $< p$. Ainsi les deux flèches naturelles reliant $j_{T*}\mathcal{H}^{-p}(\omega_T)$ et $j_{T'*}\mathcal{H}^{-p}(\omega_{T'})$ s'inversent respectivement impliquant l'indépendance du morphisme composé (4).

La seconde équivalence de iii) est conséquence immédiate du caractère cofinal du système $\mathrm{var}_p(X)$ dans $\mathrm{lcls}_p(X)$.

Construisons maintenant un morphisme de faisceaux de $\underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^X$ dans $\lim_{\mathrm{ind}} j_{T*}\underline{\underline{or}}_T$, où T varie dans $\mathrm{lcls}_p(X)$. Soit U un ouvert de X et (S, Σ) un élément de $\mathcal{CS}'_p(U)$. La section Σ du faisceau d'orientation de S détermine un élément du module $\Gamma(W; j_{S*}\underline{\underline{or}}_S)$ pour tout ouvert W de X, mais l'ensemble $S \cap W$ peut ne pas être sous-analytique dans X alors que ceux de $\mathrm{lcls}_p(X)$ doivent l'être. Pour contourner cette difficulté nous allons considérer la famille $\mathcal{U}$ de sous-ouverts V de U, sous-analytiques dans X et tels que $\overline{V} \subseteq U$ —cette condition garantira que les parties $S \cap V$ appartiennent à $\mathrm{lcls}_p(X)$. Ceci étant, on a pour chaque $V \in \mathcal{U}$ et $(S, \Sigma) \in \mathcal{CS}'_p(U)$, un homomorphisme canonique de $\Gamma(V; j_{S*}\underline{\underline{or}}_S)$ à valeurs dans $\lim_{\mathrm{ind}} \Gamma(V; j_{T*}\underline{\underline{or}}_T)$, puis de ce dernier dans $\Gamma(V; \lim_{\mathrm{ind}} j_{T*}\underline{\underline{or}}_T)$; l'assertion ii) ci-dessus implique qu'il s'agit d'*injections*.[7] Leur composée fournit une application $\varphi(U, V) : \mathcal{CS}'_p(U) \to \Gamma(V; \mathcal{L})$ pour chaque $V \in \mathcal{U}$, où par commodité on a noté $\mathcal{L} := \lim_{\mathrm{ind}} j_T \underline{\underline{or}}_T$.

Le sous-module $\mathcal{R}_p(U)$ de $\mathcal{CS}'_p(U)$ est contenu dans le noyau de $\varphi(U, V)$. Pour le voir commençons par prouver que les éléments de $\mathcal{R}_p(U)$ de type c) (*cf.* page 4) sont bien annulés par $\varphi(U, V)$. En effet, les parties S_i de la variété $S = S_1 \coprod S_2$ sont ouvertes et fermées dans S de sorte que $S_i \prec S$ et les inclusions $j_{S_i}^S : S_i \hookrightarrow S$ induiront, dans ce cas, des morphismes canoniques $j_{S_i*}^S \underline{\underline{or}}_{S_i}$ dans $\underline{\underline{or}}_S$ donnant la décomposition $\underline{\underline{or}}_S = j_{S_1*}^S \underline{\underline{or}}_{S_1} \oplus j_{S_2*}^S \underline{\underline{or}}_{S_2}$ qui, grâce aux factorisations $j_{S_i*} = j_{S*} \circ j_{S_i*}^S$, entraîne l'égalité

[7] En effet, soit $\{\mu_\beta^\alpha : \mathcal{F}_\alpha \to \mathcal{F}_\beta\}$ une famille filtrante supérieurement de faisceaux de modules où les μ_β^α sont *injectifs*. Les morphismes $\mu_{\beta,x}^\alpha$ des germes en $x \in X$ sont alors injectifs et par conséquent les applications canoniques $\mathcal{F}_{\alpha,x} \to \lim_{\mathrm{ind}}(\mathcal{F}_{\beta,x}) = (\lim_{\mathrm{ind}} \mathcal{F}_\beta)_x$ le sont aussi. On en déduit l'injectivité des flèches $\mathcal{F}_\alpha \to \lim_{\mathrm{ind}} \mathcal{F}_\beta$ et donc nécessairement celle des $\Gamma(U; \mathcal{F}_\alpha) \to \Gamma(U; \lim_{\mathrm{ind}} \mathcal{F}_\beta)$, pour tout ouvert U de X. Partant, le morphisme canonique $\lim_{\mathrm{ind}} \Gamma(U; \mathcal{F}_\beta) \to \Gamma(U; \lim_{\mathrm{ind}} \mathcal{F}_\beta)$ est injectif. Enfin, l'injectivité des $\mu_\beta^\alpha(U)$ entraîne celle des $\Gamma(U; \mathcal{F}_\alpha) \to \lim_{\mathrm{ind}} \Gamma(U; \mathcal{F}_\beta)$.

souhaitée : $\varphi(U,V)(S,\Sigma) = \varphi(U,V)(S_1,\Sigma|_{S_1}) + \varphi(U,V)(S_2,\Sigma|_{S_2})$. Une conséquence utile est que pour (S,Σ) donné, on aura $\varphi(U,V)(S,\Sigma) = \varphi(U,V)(S',\Sigma|_{S'})$, où $S' = \mathrm{supp}(\Sigma)$.

Considérons maintenant un terme $(S_1,\Sigma_1) - (S_2,\Sigma_2)$ de $\mathcal{R}_p(U)$ de type a) dans lequel nous pouvons supposer, d'après la remarque précédente, que $S_i = \mathrm{supp}(\Sigma_i)$. Il existe alors un *ouvert* S_3 de complémentaire de dimension $< p$ dans S_i, *id est* $S_i \prec S_3$, tel que par les morphismes canoniques de $j_{S_i *}\underline{\underline{or}}_{S_i} \to j_{S_3 *}\underline{\underline{or}}_{S_3}$, les sections Σ_1 et Σ_2 atteignent la même section du faisceau $\underline{\underline{or}}_{S_3}$puisque l'on a $\overline{\mathrm{supp}}(\Sigma_i) = \overline{\mathrm{supp}}(\Sigma_3)$. On conclut que les éléments de type a) sont bien dans le noyau de $\varphi(U,V)$.

Enfin, on vérifie sans difficulté particulière que les éléments de type b) sont aussi annulés.

A présent nous pouvons considérer $\varphi(U,V)$ définie sur $\mathcal{CS}_p(U) = \Gamma(U;\underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^X)$. La construction que nous en avons donnée en fait un homomorphisme à valeurs dans le système *projectif* $\{\Gamma(V;\mathcal{L})\}_{V\in\mathcal{U}}$. Or, comme $\mathcal{L}$ est un faisceau de modules, la limite projective de ce système sera précisément $\Gamma(U;\mathcal{L})$. Nous obtenons ainsi un homomorphisme $\varphi(U) := \lim_{\,\mathrm{proj}} \varphi(U,V) : \Gamma(U;\underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^X) \to \Gamma(U;\mathcal{L})$ compatible aux structures de préfaisceau, d'où le morphisme de faisceaux $\varphi : \underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^X \to \lim_{\,\mathrm{ind}} j_{T*}\underline{\underline{or}}_T$ promis.

Le morphisme φ est injectif. En effet, le lemme 1.2.1 affirme que chaque élément non nul de $\mathcal{CS}_p(U)$ est décrit par un symbole $[S,\Sigma]$ où Σ n'est pas identiquement nulle. L'élément de $\Gamma(V;j_{S*}\underline{\underline{or}}_S)$ déterminé par Σ sera non nul dès que $V \cap \mathrm{supp}(\Sigma) \neq \emptyset$, auquel cas l'injectivité des flèches nous conduisant vers $\Gamma(V;\lim_{\,\mathrm{ind}} j_{T*}\underline{\underline{or}}_T)$ garantit la non annulation de cet élément dont l'image sera nécessairement restriction d'une section non nulle de $\Gamma(U;\mathcal{L})$.

Le morphisme φ est surjectif. Soit $x \in X$ et $\sigma \in \mathcal{L}_x$ un germe de section de $\mathcal{L}$ en x. Comme on a $\mathcal{L}_x = \lim_{\,\mathrm{ind}} (j_{T*}\underline{\underline{or}}_T)_x$, le germe σ provient d'un germe $\tilde{\sigma} \in (j_{T*}\underline{\underline{or}}_T)_x$ pour un certain $T \in \mathrm{lcls}_p(X)$. Il existe alors un voisinage U_x de x et une section $\Sigma \in \Gamma(U_x; j_{T*}\underline{\underline{or}}_T) = \Gamma(T\cap U_x; \underline{\underline{or}}_{T\cap U_x})$, déterminant l'élément $[T\cap U_x,\Sigma] \in \mathcal{CS}_p(U_x)$, qui atteint le germe $\tilde{\sigma}$. La surjectivité annoncée résulte d'observer que l'on a $[\varphi(U_x)([T\cap U_x,\Sigma])]_x = \sigma$, par construction. ∎

1.3 Complexe des faisceaux de chaînes sous-analytiques.

Dans cette section on définit le morphisme de faisceaux $\delta_p^X : \underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^X \to \underline{\underline{\mathcal{CS}}}_{p-1}^X$, qu'on notera aussi δ_p, annoncé dans la section précédente, nous permettant de munir $\underline{\underline{\mathcal{CS}}}_{\bullet}^X$ d'une structure de complexe dont on verra dans la section 1.5 qu'il est quasi-isomorphe à ω_X. L'affirmation *iii*) de la proposition 1.2.5 a emmené M. Kashiwara et P. Schapira à introduire la définition au niveau des faisceaux $j_{S*}\mathcal{H}^{-p}(\omega_S)$ pour passer ensuite à la limite inductive. Soit donc $S \in \mathrm{lcls}_p(X)$ et notons $\overline{S}$ sa fermeture topologique dans X et $\delta S = \overline{S}\backslash S$ son *bord topologique*, on remarquera que ce dernier est sous-analytique de dimension $< p$ et *fermé* dans X. Le triangle exact

$$Rj_{\delta S*}\omega_{\delta S} \longrightarrow Rj_{\overline{S}*}\omega_{\overline{S}} \longrightarrow Rj_{S*}\omega_S \longrightarrow$$

et les considérations déjà habituelles sur les dimensions donnent la suite exacte

$$0 \longrightarrow j_{\overline{S}*}\mathcal{H}^{-p}(\omega_{\overline{S}}) \longrightarrow j_{S*}\mathcal{H}^{-p}(\omega_S) \longrightarrow j_{\delta S*}\mathcal{H}^{-p+1}(\omega_{\delta S}) \qquad (5)$$

où le besoin de passer à la limite inductive nous conduit à considérer le sous-système $(\mathrm{cls}_p(X);\prec)$ de $(\mathrm{lcls}_p(X);\prec)$ constitué des parties sous-analytiques *fermées* dans X.

Définissons donc le faisceau $\underline{\underline{\mathcal{ZS}}}_p^X$ des *p-cycles*[8] *sous-analytiques de* X par

$$\underline{\underline{\mathcal{ZS}}}_p^X := \lim_{S \in \mathrm{cls}_p(X)}{}_{\mathrm{ind}}\, j_{S*}\mathcal{H}^{-p}(\omega_S),$$

et remarquons que le morphisme canonique de $\underline{\underline{\mathcal{ZS}}}_p^X$ dans $\underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^X$ résultant de l'inclusion $\mathrm{cls}_p(X) \subseteq \mathrm{lcls}_p(X)$, est *injectif* d'après 1.2.5 *ii*).

Reprenons maintenant la construction de δ_p. Il importe de remarquer que les suites (5) vont dépendre *fonctoriellement* de la donnée de $S \in (\mathrm{cls}_p(X); \prec)$ puisque

Lemme 1.3.1 *Soient R et S des éléments de* $\mathrm{lcls}_p(X)$*, alors*

i) *Si* $\dim(R) < p$*, on a $R \prec S$ pour tout S.*

ii) *Si R et S sont fermés dans X et si* $\dim(R) = p$*, on a $R \prec S$ si et seulement si $R \subseteq S$.*

iii) *Si $R \prec S$, on a $\overline{R} \prec \overline{S}$ et $\delta R \prec \delta S$.*

dont la démonstration[9] résulte d'arguments de topologie élémentaire.

Ainsi la limite inductive des suites (5) par rapport aux $S \in \mathrm{lcls}_p(X)$, fournit une suite exacte

$$0 \longrightarrow \underline{\underline{\mathcal{ZS}}}_p^X \hookrightarrow \underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^X \longrightarrow \underline{\underline{\mathcal{ZS}}}_{p-1}^X \tag{6}$$

où l'injection coïncide avec l'inclusion canonique et l'application de droite nous donne, après composition avec l'inclusion respective de $\underline{\underline{\mathcal{ZS}}}_{p-1}^X \subseteq \underline{\underline{\mathcal{CS}}}_{p-1}^X$, le morphisme $\delta_p : \underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^X \to \underline{\underline{\mathcal{CS}}}_{p-1}^X$ vérifiant, par construction, $\delta_{p-1} \circ \delta_p = 0$.

Dans la suite nous allons noter par $(\underline{\underline{\mathcal{CS}}}_\bullet^X; \delta_\bullet^X)$, le complexe de chaînes ainsi obtenu et par $(\underline{\underline{\mathcal{CS}}}_X^\bullet; d_X^\bullet)$ celui des *co-chaînes* où, suivant la convention classique, on pose $\underline{\underline{\mathcal{CS}}}_X^{-m} := \underline{\underline{\mathcal{CS}}}_m^X$ et $d_X^{-m} := \delta_m^X$. La notation $\underline{\underline{\mathcal{ZS}}}_X^m := \underline{\underline{\mathcal{ZS}}}_{-m}^X$ en est alors une conséquence naturelle.

Proposition 1.3.2 ([K-S]) *Soit Φ une famille paracompactifiante*[10] *de la variété X.*

i) $(\underline{\underline{\mathcal{CS}}}_X^\bullet; d_X^\bullet)$ *est un complexe de faisceaux Φ-fins, en particulier acycliques pour les foncteurs de sections à support dans Φ.*

ii) $\ker(d_X^m) = \underline{\underline{\mathcal{ZS}}}_X^m$.

iii) *Pour chaque ouvert U de X, on a $\underline{\underline{\mathcal{CS}}}_X^\bullet|_U \equiv \underline{\underline{\mathcal{CS}}}_U^\bullet$ et $\underline{\underline{\mathcal{ZS}}}_X^m|_U \equiv \underline{\underline{\mathcal{ZS}}}_U^m$.*

---

[8] Cette terminologie sera justifiée par la proposition 1.3.2 *ii*).

[9] Démontrons *iii*) à titre d'exemple. D'après *i*) il suffit d'analyser le cas où $\dim(R) = p$. La conclusion $\overline{R} \subseteq \overline{S}$ est alors immédiate. Supposons maintenant $\dim(\delta R) = p - 1$ et prouvons que $\delta R \subseteq \delta S$. Notons T la partie de transition et soit $x \in \overline{R} \backslash R$, alors $x \in \overline{T} \subseteq \overline{S}$ et si on avait $x \in S$ il s'ensuivrait que $x \in T$ puisque T est fermé dans S, ce qui est contradictoire ; par conséquent $x \in \overline{S} \backslash S$.

[10] On appelle ainsi toute famille Φ de fermés de X vérifiant :

a) Φ est stable par réunion finie,

b) si $S \in \Phi$ et si S' est un fermé de X contenu dans S, alors $S' \in \Phi$,

c) pour chaque S dans Φ, il existe un élément S' de Φ, voisinage de S dans X,

confer [God] 3.2 page 150.

Démonstration : Pour prouver i) commençons par démontrer que $\underline{\underline{\mathcal{CS}}}^p_X$ est fin. Soient donc φ_1 et φ_2 deux fermés disjoints de X et considérons un voisinage ouvert W de φ_1 sous-analytique dans X et tel que $\overline{W} \cap \varphi_2 = \emptyset$. Ceci est possible puisque tout point admet une base de voisinages sous-analytiques dans X et que de tout recouvrement ouvert de φ_1 par des ouverts sous-analytiques de X et d'adhérence disjointe de φ_2, on peut extraire un sous-recouvrement localement fini *dans* X, donc de réunion sous-analytique dans X et d'adhérence disjointe de φ_2. Le morphisme canonique

$$j_{S*}\mathcal{H}^{-p}(\omega_S) \to j_{(S\cap W)*}\mathcal{H}^{-p}(\omega_{(S\cap W)})$$

induit alors un endomorphisme ρ_W de $\underline{\underline{\mathcal{CS}}}^p_X$ vérifiant, par construction, $\rho_W|_{\varphi_1} = \mathrm{id}$ et $\rho_W|_{\varphi_2} = 0$ ce qui équivaut au fait que $\underline{\underline{\mathcal{CS}}}^p_X$ est fin (*cf.* [God] II 3.7). Le passage de « fin » à « Φ-fin » se fait sans difficulté puisque cela revient à démontrer que les restrictions $\underline{\underline{\mathcal{CS}}}^p_X|_\varphi$ sur chaque $\varphi \in \Phi$ sont fines, cas auxquels la même démonstration peut être appliquée.

L'affirmation ii) découle immédiatement de la suite exacte (6) et iii) est triviale (*cf.* lemme 1.2.2). ■

1.4 Explicitation du morphisme bord.

L'introduction du morphisme δ_p par l'intermédiaire de l'isomorphisme $\underline{\underline{\mathcal{CS}}}^X_p \equiv \lim_{\text{ind}} j_{S*}\underline{\underline{or}}_S$ présente un certain nombre d'avantages formels dont l'intérêt est manifeste, cependant elle ne fournit pas de description suffisamment transparente des morphismes $\delta_p(U)$: $\mathcal{CS}_p(U) \to \mathcal{CS}_{p-1}(U)$; le but de la présente section est de combler cette absence.

Soit U un ouvert de X et définissons le morphisme $\Delta'_p(U) : \mathcal{CS}'_p(U) \to \mathcal{CS}'_{p-1}(U)$ par le procédé suivant, inspiré bien évidemment de la définition de δ_p. Pour $(S, \Sigma) \in \mathcal{CS}'_p(U)$, fixons une stratification topologique du bord $\delta S = \overline{S}\backslash S$ de S dans U, et notons $S^\natural$ sa partie régulière. L'ensemble $\widehat{S} := S^\natural \coprod S$ est sous-analytique dans U et la filtration $\widehat{S} \supseteq S^\natural \supseteq \emptyset$ donne une stratification dont la partie régulière est réalisée par S. Notons $i_{S^\natural} : S^\natural \hookrightarrow \widehat{S}$ et $i_S : S \hookrightarrow \widehat{S}$ les inclusions canoniques, une suite exacte de même nature que (5) fournit un morphisme naturel, auquel on référera éventuellement par la notation imprécise ∂, reliant les faisceaux $i_{S*}\underline{\underline{or}}_S$ et $i_{S^\natural *}\underline{\underline{or}}_{S^\natural}$; il associe à la section Σ une certaine section $\Sigma^\natural$ de $\underline{\underline{or}}_{S^\natural}$ —que l'on explicitera ultérieurement. Posons alors $\Delta'_p(U)(S, \Sigma) := (S^\natural, \Sigma^\natural)$ et prolongeons à $\mathcal{CS}'_p(U)$ par linéarité.

On observera que cette définition dépend intimement des choix (arbitraires) des stratifications des ensembles δS ; le morphisme $\Delta'_p(U)$ à toutefois un sens bien canonique sur le module quotient $\mathcal{CS}_p(U)$, comme le montre la proposition suivante.

Proposition 1.4.1

i) $\Delta'_p(U)(\mathcal{R}_p(U)) \subseteq \mathcal{R}_{p-1}(U)$.

ii) *Le morphisme* $\Delta_p(U) : \mathcal{CS}_p(U) \to \mathcal{CS}_{p-1}(U)$, *induit par* $\Delta'_p(U)$, *est canonique et compatible aux restrictions aux sous-ouverts de* U.

iii) *Le morphisme de faisceaux* $\Delta_p : \underline{\underline{\mathcal{CS}}}^X_p \to \underline{\underline{\mathcal{CS}}}^X_{p-1}$, *défini par les* $\Delta_p(U)$, *coïncide avec le morphisme* δ_p.

Démonstration : Considérons le composé $\Delta_p^\natural(U)$ de $\Delta'_p(U)$ et de la projection canonique de $\mathcal{CS}'_{p-1}(U)$ sur $\mathcal{CS}_{p-1}(U)$, et prouvons dans un premier temps qu'il est indépendant des choix des stratifications des différents δS. En effet, soit $(S,\Sigma) \in \mathcal{CS}'_p(U)$ et soient $S_a^\natural$ et $S_b^\natural$ deux parties régulières de δS de complémentaires de dimension $< p-1$, de δS, que nous pouvons toujours supposer vérifier $S_a^\natural \supseteq S_b^\natural$. Il s'ensuit une inclusion ouverte $\widehat{S}_a \supseteq \widehat{S}_b$ qui respecte les stratifications de ces ensembles considérées dans la définition de $\Delta'_p(U)$. Les morphismes de restriction définissent alors un morphisme de triangles exacts dans $\mathcal{D}_c^b(\widehat{S}_a)$

$$\begin{array}{ccccccc} i_{S_a^\natural *}\omega_{S_a^\natural} & \longrightarrow & \omega_{\widehat{S}_a} & \longrightarrow & i_{S*}\omega_S & \longrightarrow \\ \downarrow{\scriptstyle \text{rest}} & & \downarrow{\scriptstyle \text{rest}} & & \downarrow{\scriptstyle \text{id}} & \\ i_{S_b^\natural *}\omega_{S_b^\natural} & \longrightarrow & i_{\widehat{S}_b *}\omega_{\widehat{S}_b} & \longrightarrow & i_{S*}\omega_S & \longrightarrow \end{array}$$

où nous avons généralisé la notation de manière évidente et qui donne en cohomologie le diagramme commutatif de faisceaux de modules sur $\widehat{S}_a$

$$\begin{array}{ccc} i_{S*}\underline{\underline{or}}_S & \xrightarrow{\partial} & i_{S_a^\natural *}\underline{\underline{or}}_{S_a^\natural} \\ \downarrow{\scriptstyle \text{id}} & & \downarrow{\scriptstyle \rho_b^a} \\ i_{S*}\underline{\underline{or}}_S & \xrightarrow{\partial} & i_{S_b^\natural *}\underline{\underline{or}}_{S_b^\natural} \end{array}$$

où la restriction ρ_b^a est injective puisque $\dim(S_a^\natural \backslash S_b^\natural) < p-1$. Par conséquent, on aura $\overline{\mathrm{supp}}(\Sigma_b^\natural) = \overline{\mathrm{supp}}(\Sigma_b^\natural)$ et donc $[S_a^\natural, \Sigma_a^\natural] = [S_b^\natural, \Sigma_b^\natural]$, ce qui prouve le caractère canonique de $\Delta_p^\natural(U)$ annoncé.

Ceci étant montrons l'inclusion $\mathcal{R}_p(U) \subseteq \ker(\Delta_p^\natural(U))$. Commençons par les éléments de $\mathcal{R}_p(U)$ de type c) (*cf.* page 4). Soit donc $S = S_1 \coprod S_2$, de sorte que $\delta S = \delta S_1 \cup \delta S_2$, et fixons des parties régulières $S_i^\natural$ de complémentaires dans δS_i respectivement de dimensions $< p-1$. Posons alors $S^\natural := S_1^\natural \cup S_2^\natural$ et remarquons que l'on peut toujours supposer $S_i^\natural$ ouvert et *fermé* dans $S^\natural$ quitte à enlever des parties de dimension $< p-1$. Les observations du paragraphe précédent permettent d'utiliser ces éléments pour le calcul des images de $\Delta_p^\natural(U)$; notons donc $\Delta_p^\natural(U)(S_1 \coprod S_2, \Sigma_1 \coprod \Sigma_2) = [S^\natural, \Sigma^\natural]$ et $\Delta_p^\natural(U)(S_i, \Sigma_i) = [S_i^\natural, \Sigma_i^\natural]$. Les partitions en ouverts fermés : $S^\natural = (S_1^\natural \backslash S_2^\natural) \coprod (S_1^\natural \cap S_2^\natural) \coprod (S_2^\natural \backslash S_1^\natural)$, et *mutatis mutandis* pour $S_i^\natural$, réduisent la vérification de l'égalité $[S^\natural, \Sigma^\natural] = [S_1^\natural, \Sigma_1^\natural] + [S_2^\natural, \Sigma_2^\natural]$ à simplement

$$[S_{12}^\natural, \Sigma^\natural|_{S_{12}^\natural}] = [S_{12}^\natural, \Sigma_1^\natural|_{S_{12}^\natural}] + [S_{12}^\natural, \Sigma_2^\natural|_{S_{12}^\natural}],$$

où $S_{12}^\natural := S_1^\natural \cap S_2^\natural$. Egalité que l'on démontre en considérant la stratification de l'ensemble $L := S \coprod S_{12}^\natural$ donnée par la filtration $L \supseteq S_{12}^\natural \supseteq \emptyset$, pour laquelle on a le diagramme de faisceaux de modules sur L

$$\begin{array}{ccc} i_{S*}\underline{\underline{or}}_S & \xrightarrow{\quad\partial\quad} & i_{S_{12}^\natural *}\underline{\underline{or}}_{S_{12}^\natural} \\ \uparrow{\scriptstyle \equiv} & & \uparrow{\scriptstyle \text{id}} \\ i_{S_1*}\underline{\underline{or}}_{S_1} \oplus i_{S_2*}\underline{\underline{or}}_{S_2} & \xrightarrow{\partial_1+\partial_2} & i_{S_{12}^\natural *}\underline{\underline{or}}_{S_{12}^\natural} \end{array}$$

dont découle aisément la conclusion. Tout élément de type c) de $\mathcal{R}_p(U)$ est ainsi annulé par $\Delta_p^\natural(U)$, en particulier $\Delta_p^\natural(U)(S,\Sigma) = \Delta_p^\natural(U)(S', \Sigma|_{S'})$, où $S' = \mathrm{supp}(\Sigma)$.

Considérons à présent des éléments (S_1, Σ_1) et (S_3, Σ_3) de $\mathcal{CS}'_p(U)$ vérifiant les conditions stipulées par la définition des termes de $\mathcal{R}_p(U)$ de type a). On peut supposer comme d'habitude S_3 ouvert dans S_1 et même, d'après la remarque du paragraphe précédent, que $\overline{\mathrm{supp}}(\Sigma_3) = \overline{\mathrm{supp}}(\Sigma_1) = \overline{S_1}$. Nous avons alors une inclusion $\delta S_1 \subseteq \delta S_3$; munissons ces ensembles de stratifications et notons Z la réunion de leur singularité, c'est une partie sous-analytique fermée de codimension ≥ 2 dans $\overline{S_1}$. Posons $Y := \overline{S_1} \backslash Z$, alors pour toute partie sous-analytique $A \subseteq \overline{S_1}$, la dimension de Z fait que les morphismes de faisceaux de restriction de $R^q i^Y_{A*}\omega_A$ vers $R^q i^Y_{(A\backslash Z)*}\omega_{(A\backslash Z)}$ seront des isomorphismes pour $q = -p$ et des monomorphismes pour $q = -p+1$, en particulier ils préservent les adhérences des supports des sections. Or, comme la définition de $\Delta'_p(U)$ ne fait intervenir que des faisceaux de cohomologie en degrés $\leq -p+1$, on comprend que l'on peut supposer, sans perte de validité de nos conclusions concernant les supports, que notre espace ambiant est Y. Dans ce cas l'inclusion $\delta S_3 \supseteq \delta S_1$ concerne des parties lisses et on peut poser $S_i^\natural := \delta S_i$ où le point important à signaler est que $S_1^\natural$ sera ainsi ouverte et *fermée* dans $S_3^\natural$. On aura alors un morphisme de suites exactes longues de faisceaux sur Y

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{H}^{-p}(\omega_Y) & \longrightarrow & i_{S_1*}\underline{\underline{or}}_{S_1} & \xrightarrow{\partial} & i_{S_1^\natural *}\underline{\underline{or}}_{S_1^\natural} & ; & \Sigma_1 & \overset{\partial}{\longmapsto} & \Sigma_1^\natural \\
 & & \Big\downarrow \mathrm{id} & & \Big\downarrow \mathrm{rest} & & \Big\downarrow \mathrm{inc} & & \bar{\Big\downarrow} & & \bar{\Big\downarrow} \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{H}^{-p}(\omega_Y) & \longrightarrow & i_{S_3*}\underline{\underline{or}}_{S_3} & \xrightarrow{\partial} & i_{S_3^\natural *}\underline{\underline{or}}_{S_3^\natural} & ; & \Sigma_3 & \overset{\partial}{\longmapsto} & \Sigma_3^\natural
\end{array}$$

impliquant aussitôt l'inclusion $\overline{\mathrm{supp}}(\Sigma_3^\natural) \subseteq \overline{\mathrm{supp}}(\Sigma_1^\natural)$. La naturalité des diagrammes considérés et une « chasse aux diagrammes » élémentaire montrent la relation de contenance réciproque qui prouve l'égalité $[S_1^\natural, \Sigma_1^\natural] = [S_3^\natural, \Sigma_3^\natural]$ souhaitée.

Comme les éléments de $\mathcal{R}_p(U)$ de type b) sont évidemment annulés par $\Delta_p^\natural(U)$, ces considérations terminent la démonstration des assertions *i*) et *ii*) de la proposition.

L'affirmation *iii*) résulte trivialement, par une étude au niveau des germes de sections, des définitions des morphismes de faisceaux Δ_p et δ_p. ∎

Donnons-nous maintenant un élément $[S, \Sigma]$ de $\mathcal{CS}_p(U)$ et soit $\delta_p(U)[S, \Sigma] = [S^\natural, \Sigma^\natural]$ pour une certaine stratification de δS ; nous allons aborder à présent le problème de l'explicitation de $\Sigma^\natural(x)$ en chaque point $x \in S^\natural$. L'idée est de remarquer que comme nos constructions sont fonctorielles par rapport aux restrictions, la détermination de $\Sigma^\natural(x)$ ne dépendra que du germe de (S, Σ) en x. Or, nous avons déjà remarqué (*cf.* section 1.1) que la situation locale de $S^\natural$ dans $\overline{S}$ est celle de $S^\natural \times \{s\}$ dans $S^\natural \times \mathring{c}(L^0)$, où L^0 est un ensemble fini de points $\{\lambda_0, \ldots, \lambda_r\}$ et s est le sommet du cône ouvert $\mathring{c}(L^0)$. Dans cette perspective nous aurons, localement, $\widehat{S} = \overline{S}$ et S pourra s'identifier à la réunion disjointe $S = \coprod_{i=1}^r S^\natural \times \{\lambda_i\} \times]0,1[$. Notons $S_i := S^\natural \times \{\lambda_i\} \times]0,1[$, c'est une partie ouverte et fermée de S ; les inclusions canoniques $i^S_{S_i} : S_i \hookrightarrow S$ donnent lieu, dans ce cas, à une décomposition $\underline{\underline{or}}_S = \oplus_{i=1}^r i^S_{S_i *}\underline{\underline{or}}_{S_i}$ qui permet d'exprimer le morphisme ∂ comme une somme finie $\partial = \Sigma_{i=1}^r \partial_i$. L'inclusion fermée $\overline{S_i} \subseteq \overline{S}$ et la naturalité du morphisme de foncteurs $\underline{\underline{\Gamma}}_{\overline{S_i}} \to \mathrm{id}$ donnent lieu à un morphisme de triangles exacts dans $\mathcal{D}^b_c(\overline{S})$

$$\begin{tikzcd}
i_{S^\natural *}\omega_{S^\natural} \arrow[r] & \omega_{\overline{S}} \arrow[r] & i_{S*}\omega_S \arrow[r] & {} \\
i_{S^\natural *}\omega_{S^\natural} \arrow[r] \arrow[u, "\equiv"'] & i_{\overline{S_i}*}\omega_{\overline{S_i}} \arrow[r] \arrow[u, "\mathrm{inc}"'] & i_{S_i*}\omega_{S_i} \arrow[r] \arrow[u, "\mathrm{inc}"'] & {}
\end{tikzcd}$$

dont on déduit, en cohomologie, le diagramme commutatif de faisceaux sur $\overline{S}$

$$\begin{tikzcd}
i_{S*}\underline{\underline{or}}_S \arrow[r, "\partial"] & i_{S^\natural *}\underline{\underline{or}}_{S^\natural} \\
i_{S_i*}\underline{\underline{or}}_{S_i} \arrow[r, "\partial_i"] \arrow[u, "\mathrm{inc}"'] & i_{S^\natural *}\underline{\underline{or}}_{S^\natural} \arrow[u, "\mathrm{id}"']
\end{tikzcd}$$

Mais $\overline{S_i}$ est une variété à bord $S^\natural$ et, dans ce cas, ∂_i n'est autre que le prolongement linéaire et faisceautique de l'application qui associe à une orientation de S_i l'orientation induite sur $S^\natural$. Dans la suite on appellera *section induite* de (S_i, Σ_i) sur $S^\natural$, la section de $\underline{\underline{or}}_{S^\natural}$ ainsi obtenue à partir de Σ_i.

Ces considérations constituent la démonstration du lemme

Lemme 1.4.2 *Soit $[S, \Sigma] \in \mathcal{CS}_p(U)$. Dans la correspondance $\delta_p(U)[S, \Sigma] = [S^\natural, \Sigma^\natural]$, la valeur de $\Sigma^\natural(x)$ pour $x \in S^\natural$, est obtenue en additionnant les contributions des sections induites par les différentes composantes du germe de (S, Σ) en x.*

1.5 Généralités sur le complexe de chaînes sous-analytiques.

Proposition 1.5.1 ([K-S]) *Soit X une variété analytique réelle. Le complexe $(\underline{\underline{\mathcal{CS}}}^\cdot_X, d^\cdot)$ de chaînes sous-analytiques de X, est acyclique en tout degré différent de $-\dim(X)$ et le faisceau $\mathcal{H}^{-\dim(X)}(\underline{\underline{\mathcal{CS}}}^\cdot_X)$ s'identifie canoniquement à $\underline{\underline{or}}_X$.*

Démonstration: Je décris dans ces lignes la démonstration présentée dans [K-S]. Notons n la dimension réelle de X. Le lemme 1.3.2 affirme que $\mathcal{H}^{-n}(\underline{\underline{\mathcal{CS}}}^\cdot_X) = \underline{\underline{\mathcal{ZS}}}^X_n := \lim_{\mathrm{ind}} j_{S*}\mathcal{H}^{-n}(\omega_S)$, où S parcourt le système $(\mathrm{cls}_n(X), \prec)$, mais la variété X réalise l'élément maximal de ce système, on a donc bien $\mathcal{H}^{-n}(\underline{\underline{\mathcal{CS}}}^\cdot_X) = \mathcal{H}^{-n}(\omega_X) \equiv \underline{\underline{or}}_X$.

Prouvons maintenant l'acyclicité de $(\underline{\underline{\mathcal{CS}}}^\cdot_X, d^\cdot)$ en degré $p > -n$. Soit σ un germe de p-cycle en $x \in X$ et prenons-en un représentant local $[S, \Sigma]$. Supposons provisoirement l'existence d'un morphisme *propre* $f : [0, \infty[\times \overline{S} \to X$ tel que $f(0, \cdot) \equiv \mathrm{id}_{\overline{S}}$ et notons $T =]0, \infty[\times S$, de sorte que $\delta T = \{0\} \times \overline{S} \cup [0, \infty[\times \delta S$ et $\overline{T} = [0, \infty[\times \overline{S}$; soient $i : \delta T \to \overline{T}$ et $j : T \to \overline{T}$ les injections canoniques. Le triangle exact des complexes dualisants associé à la donnée (i, j) fournit, après restriction à la partie régulière de δT concernée par la notation suivante, un morphisme $\partial : j_*(\underline{\underline{or}}_{]0,\infty[} \boxtimes \underline{\underline{or}}_S) \to i_*(\underline{\underline{or}}_{\{0\}\times S} \oplus \underline{\underline{or}}_{]0,\infty[\times \tilde{S}})$ qui associe à la section $\mu \otimes \Sigma$, où μ désigne l'orientation décroissante de $]0, \infty[$, la section $(\partial\mu \otimes \Sigma, -\mu \otimes \partial\Sigma) \equiv (\Sigma, 0)$. D'autre part l'application du foncteur image directe f_*

donne lieu à un morphisme de triangles exacts

$$\begin{array}{ccccccc}
f_*i_*\omega_{\delta T} & \longrightarrow & f_*\omega_{\overline{T}} & \longrightarrow & f_*j_*\omega_T & \longrightarrow \\
\downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} & \\
j_{f(\delta T)*}\omega_{f(\delta T)} & \longrightarrow & j_{\overline{T}*}\omega_{\overline{T}} & \longrightarrow & j_{Z*}\omega_Z & \longrightarrow
\end{array}$$

où $Z = f(\overline{T})\backslash f(\delta T)$ et où α et β sont les flèches naturelles et γ provient de composer la restriction ouverte de T à $T' := T \cap f^{-1}(Z)$ avec le morphisme canonique de $f_*\omega_{T'}$ vers ω_Z découlant de la propreté de $f : T' \to Z$. On observera aussi que les ensembles $f(\delta T)$, $f(\overline{T})$ et Z appartiennent respectivement à $\mathrm{cls}_p(X)$, $\mathrm{cls}_{p+1}(X)$ et $\mathrm{lcls}_{p+1}(X)$ puisque f est propre. Nous en concluons que l'image de $(\Sigma, 0)$ dans le faisceau $j_*\mathcal{H}^{-p}(j_{f(\delta T)*}\omega_{f(\delta T)})$, et par passage à la limite inductive, dans $\underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^X$, est un bord dont le germe coïncide avec σ.

Partant la démonstration sera terminée si l'on prouve l'existence locale du morphisme f. Pour ceci les auteurs de [K-S] remarquent l'existence d'une décomposition de X au voisinage de x en produit de variétés $\mathbb{R} \times Y$ de sorte que la projection $p_2 : X \to Y$ est propre sur $\overline{S}$. L'application $f : [0, \infty[\times \overline{S} \to X$ définie par $f(t,(s,y)) = (t+s, y)$ satisfait alors aux conditions exigées. ∎

Corollaire 1.5.2 *Il existe un isomorphisme canonique dans $\mathcal{D}_c^b(X)$ entre les complexes ω_X et $\underline{\underline{\mathcal{CS}}}^{\boldsymbol{\cdot}}_X$.*

A présent nous allons généraliser les objets introduits dans les sections précédentes dans deux directions : en définissant le complexe $\underline{\underline{\mathcal{CS}}}^{\boldsymbol{\cdot}}_S$ pour toute partie S sous-analytique et localement fermée de X et en considérant des coefficients autres que $\underline{\underline{\mathbb{Z}}}_X$.

Abordons d'abord la construction des complexes $\underline{\underline{\mathcal{CS}}}^{\boldsymbol{\cdot}}_S$. Soit S une partie sous-analytique localement fermée de X et soit $j : S \hookrightarrow X$ l'injection canonique. Notons $j_S^!$ le foncteur qui associe à un faisceau de modules $\mathcal{F}$ sur X, le faisceau $j_S^!(\mathcal{F})$ sur S, engendré par les sections de $\mathcal{F}$ à support contenu dans S, c'est un foncteur exact à gauche. Posons pour chaque entier p

$$\underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^S := j_S^!(\underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^X) \text{ et } \underline{\underline{\mathcal{ZS}}}_p^S := j_S^!(\underline{\underline{\mathcal{ZS}}}_p^X)$$

et conservons la convention $\underline{\underline{\mathcal{CS}}}_S^{-p} := \underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^S$ et $\underline{\underline{\mathcal{ZS}}}_S^{-p} := \underline{\underline{\mathcal{ZS}}}_p^S$.

Lorsque l'ensemble S est une partie ouverte de la variété X nous avons ainsi deux définitions possibles du faisceau $\underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^U$, leur cohérence découle de l'égalité classique entre les foncteurs $j_U^!$ et j_U^{-1}. D'autre part, dans la situation général, l'objet $\underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^S$ paraît dépendre du plongement $S \hookrightarrow X$; nous verrons dans la proposition suivante que cela n'est pas le cas, tout au moins en tant qu'objet de $\mathcal{D}_c^b(S)$.

Proposition 1.5.3 *Soient S une partie sous-analytique localement fermée et Φ une famille paracompactifiante de la variété X. Soit p un entier quelconque.*

i) Le faisceau $\underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^S$ est un $\underline{\underline{\mathbb{Z}}}_S$-module plat et $\Phi|_S$-fin.

ii) $\underline{\underline{\mathcal{ZS}}}_p^S = \ker(\delta_p^S : \underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^S \to \underline{\underline{\mathcal{CS}}}_{p-1}^S)$.

iii) Le faisceau $\underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^X$ *est* $j_S^!$*-acyclique,* i.e. *le morphisme canonique entre le module* $j_S^!(\underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^X)$ *concentré en degré zéro et le complexe* $Rj_S^!(\underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^X)$, *est un isomorphisme dans* $\mathcal{D}_c^b(S)$.

iv) Il existe un isomorphisme canonique dans $\mathcal{D}_c^b(S)$ *entre* ω_S *et* $\underline{\underline{\mathcal{CS}}}_S^{\bullet}$.

Démonstration : La partie non-triviale de l'affirmation i) est classique.[11] Pour prouver ii) remarquons que, d'après la proposition 1.5.1, nous avons des suites exactes courtes

$$0 \longrightarrow \underline{\underline{\mathcal{ZS}}}_p^X \longrightarrow \underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^X \longrightarrow \underline{\underline{\mathcal{ZS}}}_{p-1}^X \longrightarrow 0$$

pour tout $p \geq -\dim(X)$, de sorte qu'en leur appliquant le foncteur exact à gauche $j_S^!$, on obtient aisément l'identification entre $\underline{\underline{\mathcal{ZS}}}_p^S$ et le noyau de $\delta_p^S : \underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^S \to \underline{\underline{\mathcal{CS}}}_{p-1}^S$, pour tout entier p.

Pour ce qui est des autres affirmations, il suffira de nous limiter à developper le cas où S est fermée. Commençons donc par remarquer qu'alors les suites

$$0 \longrightarrow j_{S*}\underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^S \longrightarrow \underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^X \longrightarrow j_{U*}\underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^U \longrightarrow 0,$$

où $U = X \backslash S$, sont exactes. En effet, la surjectivité sur le terme de droite provient de ce que si $[S, \Sigma]$ est une section de $\underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^U$, il existe en chaque point $x \in U$ un voisinage V tel que $\overline{V} \subseteq U$ et $\overline{V}$ est sous-analytique dans X ; la section $[S \cap V, \Sigma|_{S\cap V}]$ est alors trivialement une section de $\underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^X$. On observera que l'exactitude de ces suites est aussi assurée si l'on remplace les faisceaux $\underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^X$ par des faisceaux injectifs (car flasques) ; ceci signifie que si l'on fixe une résolution injective $\rho : \underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^X \to \mathcal{I}^{\bullet}$, l'application de la suite de foncteurs $j_{S*}j_S^! \to \mathrm{id} \to j_{U*}j_U^{-1}$ au morphisme de complexes ρ se traduira en un morphisme de triangles exacts

$$\begin{array}{ccccccc}
j_{S*}j_S^!\underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^X & \longrightarrow & \underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^X & \longrightarrow & j_{U*}j_U^{-1}\underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^X & \longrightarrow \\
\downarrow & & \downarrow \mathrm{id} & & \downarrow & \\
j_{S*}Rj_S^!\underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^X & \longrightarrow & \underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^X & \longrightarrow & Rj_{U*}j_U^{-1}\underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^X & \longrightarrow
\end{array}$$

et l'isomorphisme annoncé dans iii) sera conséquence de ce que $j_{U*}\underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^U \to Rj_{U*}\underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^U$ est un quasi-isomorphisme puisque $\underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^U$ est j_{U*}-acyclique. Pour voir ce dernier point on peut utiliser le fait que $\underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^U$ est fin ; les modules de cohomologie $\mathrm{H}^i(V; \underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^U)$ s'annulent alors pour $V \subseteq U$ et $i > 0$ et comme ils engendrent les faisceaux $R^i j_{U*}\underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^U$, ces derniers sont nuls pour $i > 0$.

L'affirmation iv) résulte immédiatement de iii) et du corollaire 1.5.2. ■

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de $\mathbb{Z}$-modules sur une partie sous-analytique localement fermée S de la variété X. Dans la suite on appellera *faisceau de p-chaînes sous-analytiques de S à coefficients dans* $\mathcal{F}$, le faisceau

$$\underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^S(\mathcal{F}) := \underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^S \otimes_{\mathbb{Z}_S} \mathcal{F},$$

[11] Elle découle de Théorème 3.5.5 et section 3.7 dans [God].

et *faisceau de p-cycles sous-analytiques de S à coefficients dans $\mathcal{F}$*, le faisceau $\underline{\underline{\mathcal{ZS}}}_p^S(\mathcal{F}) := \underline{\underline{\mathcal{ZS}}}_p^S \otimes_{\mathbb{Z}_S} \mathcal{F}$.

Lemme 1.5.4 *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de modules sur une partie sous-analytique localement fermée S d'une variété analytique réelle X.*

i) Il existe un isomorphisme canonique dans $\mathcal{D}_c^b(S)$ entre $\omega_S \otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{F}$ et $\underline{\underline{\mathcal{CS}}}^{\bullet}_S(\mathcal{F})$.[12]

ii) $\underline{\underline{\mathcal{ZS}}}_p^S(\mathcal{F})$ est un sous-module de $\underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^S(\mathcal{F})$ et le noyau du morphisme bord $\delta_p^S(\mathcal{F}) : \underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^S(\mathcal{F}) \to \underline{\underline{\mathcal{CS}}}_{p-1}^S(\mathcal{F})$ contient $\underline{\underline{\mathcal{ZS}}}_p^S(\mathcal{F})$ et vérifie

$$\ker(\delta_p^S(\mathcal{F}))/\underline{\underline{\mathcal{ZS}}}_p^S(\mathcal{F}) \equiv \mathcal{T}or_1^{\mathbb{Z}_S}(\mathcal{H}^{-p+1}(\omega_S), \mathcal{F}).$$

Démonstration : Nous avons déjà remarqué dans le lemme 1.2.2 que les faisceaux $\underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^X$ sont des $\underline{\underline{\mathbb{Z}}}_X$-modules plats, il s'ensuit que les sous-modules $\underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^S$ le sont aussi et l'assertion *i*) est alors conséquence directe de *iv*) dans la proposition 1.5.3.

Pour l'assertion *ii*) rappelons que d'après cette même proposition 1.5.3, le noyau de $\delta_p^S : \underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^S \to \underline{\underline{\mathcal{CS}}}_{p-1}^S$ s'identifie à $\underline{\underline{\mathcal{ZS}}}_p^S$ et notons $\underline{\underline{\mathcal{BS}}}_{p-1}^S$ le module image du morphisme δ_p^S, c'est un $\underline{\underline{\mathbb{Z}}}_S$-module plat intervenant dans les suites exactes courtes

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \underline{\underline{\mathcal{ZS}}}_p^S & \longrightarrow & \underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^S & \longrightarrow & \underline{\underline{\mathcal{BS}}}_{p-1}^S & \longrightarrow & 0 \\
0 & \longrightarrow & \underline{\underline{\mathcal{BS}}}_{p-1}^S & \longrightarrow & \underline{\underline{\mathcal{ZS}}}_{p-1}^S & \longrightarrow & \mathcal{H}^{-p+1}(\underline{\underline{\mathcal{CS}}}^{\bullet}_S) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

dont on tire, après tensorisation par $\mathcal{F}$, le diagramme de suites exactes verticales et horizontales :

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
 & & & \mathcal{T}or_1^{\mathbb{Z}_S}(\mathcal{H}^{-p+1}(\underline{\underline{\mathcal{CS}}}^{\bullet}_S), \mathcal{F}) \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \underline{\underline{\mathcal{ZS}}}_p^S(\mathcal{F}) \arrow[r] & \underline{\underline{\mathcal{CS}}}_p^S(\mathcal{F}) \arrow[r, "\alpha"] & \underline{\underline{\mathcal{BS}}}_{p-1}^S \otimes \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & 0 \\
 & & 0 \arrow[r] & \underline{\underline{\mathcal{ZS}}}_{p-1}^S(\mathcal{F}) \arrow[r, "\gamma"] & \underline{\underline{\mathcal{CS}}}_{p-1}^S(\mathcal{F})
\end{tikzcd}$$

où $\gamma \circ \beta \circ \alpha = \delta_p^S(\mathcal{F})$, qui prouve l'équivalence annoncée :

$$\ker(\delta_p^S(\mathcal{F}))/\underline{\underline{\mathcal{ZS}}}_p^S(\mathcal{F}) \equiv \mathcal{T}or_1^{\mathbb{Z}_S}(\mathcal{H}^{-p+1}(\underline{\underline{\mathcal{CS}}}^{\bullet}_S), \mathcal{F})$$

et permet de compléter la démonstration du lemme. ∎

Remarque 1.5.5 Ce lemme, dans l'affirmation *ii*), met en évidence l'inadéquation de la terminologie attachée aux modules $\underline{\underline{\mathcal{ZS}}}_p^S(\mathcal{F})$ puisque l'inclusion $\underline{\underline{\mathcal{ZS}}}_p^S(\mathcal{F}) \subseteq \ker(\delta_p^S(\mathcal{F}))$

[12] La dérivation du produit tensoriel est inévitable pour $\mathcal{F}$ quelconque. Par exemple, si S est réduite à un point, on a $\omega_{\bullet} = (0 \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0)$ et la cohomologie en degré zéro du complexe $\omega_{\bullet} \otimes F$ est le module $\mathrm{coker}(\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, F) \hookrightarrow F)$ où $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, F)$ est généralement non nul.

sera généralement stricte[13]. Toutefois, si $\mathcal{F}$ est plat ou bien si S est une variété, cas auxquels nous allons appliquer ces considérations, l'égalité entre ces modules est assurée.

On termine maintenant ces préliminaires en rappelant la notation introduite par M. Kashiwara dans [K-1] et [K-2] ; il pose por chaque entier p et tout faisceau $\mathcal{F}$ de modules sur S :

$$\mathrm{H}_p^{\inf}(S;\mathcal{F}) := \mathrm{H}^{-p}\Big(S;\underline{\underline{\mathcal{CS}}}^{\boldsymbol{\cdot}}_S(\mathcal{F})\Big) = \mathrm{H}^{-p}(S;\omega_S \otimes^{\mathbb{L}} \mathcal{F})$$

et appelle ce groupe *le p-ième groupe d'homologie de chaînes localement finies de S à valeurs dans* $\mathcal{F}$ (*cf.* Remarque 1.2.3 en page 6).

Voici maintenant un résultat auquel on référera dans le §2 de cet exposé.

Lemme 1.5.6 *Soient* $\mathcal{P}$ *un module plat et* $\mathcal{L}$ *un système local sur la variété analytique réelle* X*. Soit* Y *une partie sous-analytique fermée de* X *et notons* j_Y *l'injection canonique de* Y *dans* X*, on a alors*

$$\begin{aligned} R\Gamma\Big(X;R\underline{\underline{\Gamma}}_Y(\mathcal{L})\otimes\mathcal{P}\Big) &\equiv \Gamma\Big(X;j_{Y*}(\underline{\underline{\mathcal{CS}}}^{\boldsymbol{\cdot}}_Y)\otimes\underline{\underline{or}}_X\otimes\mathcal{L}\otimes\mathcal{P}\Big)[-\dim(X)] \\ &\equiv \Gamma\Big(Y;\underline{\underline{\mathcal{CS}}}^{\boldsymbol{\cdot}}_Y\otimes j_Y^{-1}(\underline{\underline{or}}_X\otimes\mathcal{L}\otimes\mathcal{P})\Big)[-\dim(X)]. \end{aligned}$$

Démonstration : Comme $\mathcal{L}$ est un système local et que l'on a $\underline{\underline{\mathbb{Z}}}_X \equiv \underline{\underline{or}}_X \otimes \underline{\underline{or}}_X$, l'équivalence $R\underline{\underline{\Gamma}}_Y(\mathcal{L}) \equiv R\underline{\underline{\Gamma}}_Y(\underline{\underline{or}}_X)\otimes\underline{\underline{or}}_X\otimes\mathcal{L}$ découle aussitôt, d'autre part

$$R\underline{\underline{\Gamma}}_Y(\underline{\underline{or}}_X) \equiv j_{Y*}Rj_Y^!(\underline{\underline{\mathcal{CS}}}^{\boldsymbol{\cdot}}_X)[-\dim(X)]$$

et d'après la proposition précédente, on obtient dans $\mathcal{D}_c^b(X)$

$$R\underline{\underline{\Gamma}}_Y(\mathcal{L})\otimes\mathcal{P} \equiv j_{Y*}(\underline{\underline{\mathcal{CS}}}^{\boldsymbol{\cdot}}_Y)\otimes\underline{\underline{or}}_X\otimes\mathcal{L}\otimes\mathcal{P}[-\dim(X)].$$

dont découle le lemme en utilisant le fait que les faisceaux du complexe $\underline{\underline{\mathcal{CS}}}^{\boldsymbol{\cdot}}_Y$ sont fins. ■

2 Correspondance de Hirai

Dans le but d'introduire, sous la forme la plus générale possible, les éléments de ce que nous pourrions appeler la Théorie des Chaînes Sous-Analytiques, nous avons considéré dans le §1 de cet exposé l'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs comme anneau de base ; dans la

[13] En effet, le module $\mathcal{H}^*(\omega_S)$ peut avoir de la torsion. Par exemple, soit $\mathbb{V}$ une variété topologique compacte, posons $S := \mathring{c}(\mathbb{V})$ et notons s le sommet de S. La note 6, en bas de la page 6, entraîne que l'équivalence $\mathcal{H}^p(\omega_S)_s \equiv \bigoplus_{a-b=p}\mathrm{Ext}^a(\hat{\mathrm{H}}_c^b(S);\mathbb{Z})$ sera satisfaite, et comme $\hat{\mathrm{H}}_c^b(S) \simeq \varphi(\hat{\mathrm{H}}_{b-1}(\mathbb{V}))\oplus\tau(\hat{\mathrm{H}}_{b-2}(\mathbb{V}))$, où φ et τ dénotent respectivement les parties libres et de torsion des modules concernés et où $\hat{\mathrm{H}}$ dénote l'homologie réduite, on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^p(\omega_S)_s &\simeq \mathrm{Hom}(\varphi(\hat{\mathrm{H}}_{-p-1}(\mathbb{V})),\mathbb{Z})\oplus\mathrm{Ext}^1(\tau(\hat{\mathrm{H}}_{-p-1}(\mathbb{V})),\mathbb{Z}) \\ &\simeq \varphi(\hat{\mathrm{H}}_{-p-1}(\mathbb{V}))\oplus\tau(\hat{\mathrm{H}}_{-p-1}(\mathbb{V}))\simeq\hat{\mathrm{H}}_{-p-1}(\mathbb{V}). \end{aligned}$$

Par conséquent, si $\mathbb{V}$ possède de la torsion en cohomologie il en sera de même du germe $\mathcal{H}^*(\omega_S)_s$, et l'inclusion $\underline{\underline{\mathcal{ZS}}}^S_*(\underline{\underline{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}}}) \subseteq \ker(\delta^S_*(\underline{\underline{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}}}))$ sera nécessairement stricte.

suite nous n'aurons plus besoin de cette généralité et les coefficients de référence seront désormais les éléments du corps des nombres complexes $\mathbb{C}$.

La section suivante est destinée à rappeler, en transcrivant presque littéralement le texte de M. Kashiwara [K-2], sa remarque fondamentale concernat la correspondance de Hirai ; nous verrons comment les chaînes sous-analytiques interviennent alors très naturellement et permettent de transposer en des termes de combinatoire simpliciale, heuristiquement très éclairants, des questionnements propres à l'analyse fonctionnelle.

2.1 Equivalence de Hirai d'après M. Kashiwara.

Soit G un groupe de Lie complexe semi-simple et connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et notons $G_{\mathbb{R}} \hookrightarrow G$ une forme réelle pour G. Soit X la variété des sous-groupes de Borel de G et notons $\widetilde{G}$ la *variété d'incidence* de G ; c'est le sous-ensemble de l'espace $G{\times}X$ constitué des couples (g, B) vérifiant la relation d'incidence $g \in B$. La variété $\widetilde{G}$ possède une structure de variété complexe, lisse et de même dimension que G.[14] Notons $\rho : \widetilde{G} \to G$ l'application (propre) obtenue en restreignant la projection canonique de $G{\times}X$ sur la première composante, et adoptons la convention de noter, pour toute partie $A \subseteq G$, par $\widetilde{A}$ le sous-ensemble $\rho^{-1}(A)$ de $\widetilde{G}$. Un des objets essentiels des prochains développements sera l'espace $\widetilde{G}_{\mathbb{R}}$; ensemble sous-analytique fermé de $\widetilde{G}$ de même dimension que $G_{\mathbb{R}}$. Posons G_{reg} l'ouvert de G des éléments semi-simples réguliers, c'est une partie partout dense de G qui possède la particularité que la restriction de ρ à $\widetilde{G}_{\mathrm{reg}}$ est un revêtement dont le nombre de feuillets coïncide avec le cardinal du groupe de Weyl W de G. Notons $G_{\mathbb{R},\mathrm{reg}} := G_{\mathrm{reg}} \cap G_{\mathbb{R}}$; cet ensemble, de même que $\widetilde{G}_{\mathbb{R},\mathrm{reg}}$, est une variété analytique réelle de dimension $\dim(G_{\mathbb{R}})$.

Soit $\mathcal{O}_G$ le faisceau des fonctions analytiques complexes sur G et notons $\mathcal{D}_G$ le faisceau d'opérateurs différentiels linéaires sur G à coefficients dans $\mathcal{O}_G$. Rappelons que l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$ s'identifie à l'algèbre d'opérateurs différentiels invariants à gauche sur G, son centre $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ correspond alors à la sous-algèbre des opérateurs bi-invariants sur ce groupe. L'action de G sur lui-même par automorphismes intérieurs induit une action de $\mathfrak{g}$ sur les sections de $\mathcal{O}_G$, notée Ad. Soit $\mathcal{I}_\chi$ l'idéal à gauche de $\mathcal{D}_G$ engendré par les opérateurs $\mathrm{Ad}(A)$ pour $A \in \mathfrak{g}$, et par les sections de la forme $P - \chi(P)$, où $P \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$ et où χ dénote le caractère infinitésimal trivial de $\mathcal{Z}(\mathfrak{g})$. Notons $\mathcal{M}_\chi := \mathcal{D}_G/\mathcal{I}_\chi$ le module quotient, il peut être caractérisé aussi comme le $\mathcal{D}$-module engendré par une section globale u vérifiant

a) $\mathrm{Ad}(A)\cdot u = 0$, pour tout $A \in \mathfrak{g}$,

b) $Pu = \chi(P)u$, pour tout $P \in \mathcal{Z}(\mathfrak{g})$.

L'intérêt du module $\mathcal{M}_\chi$ repose en ceci que, en notant $\mathcal{B}_{G_{\mathbb{R}}}$ le faisceau des hyperfonctions sur $G_{\mathbb{R}}$ que l'on définit dans la catégorie des faisceaux de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur G

[14] La manière la plus simple de vérifier cette affirmation consiste à fixer un sous-groupe de Borel B_0 de G et à considérer l'application de $G{\times}B_0$ à valeurs dans $\widetilde{G}$ qui associe au couple (g, b) la paire $(gbg^{-1}, g(B_0)g^{-1})$. Cette application est surjective et induit sur $G{\times}B_0$ la relation d'équivalence définie par l'action (libre) de B_0 à droite de $G{\times}B_0$ donnée par $(g, b)\cdot b_1 := (gb_1, b_1^{-1}bb_1)$; on en déduit une identification entre $\widetilde{G}$ et la variété quotient $G{\times}^B B$.

par (*cf.* [Sat], [SKK])

$$\mathcal{B}_{G_\mathbb{R}} := \mathcal{H}^{\dim(G_\mathbb{R})}_{G_\mathbb{R}}(\mathcal{O}_G) \otimes \underline{\underline{or}}_G \otimes j_{G_\mathbb{R}*}\underline{\underline{or}}_{G_\mathbb{R}},$$ [15]

on obtient l'espace $\mathcal{D}ist_\chi(G_\mathbb{R})$ des distributions invariantes χ-propres sur $G_\mathbb{R}$ par l'équivalence

$$\mathcal{D}ist_\chi(G_\mathbb{R}) \equiv \mathrm{H}^0\left(G; \mathcal{RH}om^{\bullet}_{\mathcal{D}_G}(\mathcal{M}_\chi, \mathcal{B}_{G_\mathbb{R}})\right);$$

et comme le complexe $R\underline{\underline{\Gamma}}_{G_\mathbb{R}}(\mathcal{O}_G)$ est cohomologiquement concentré en degré $\dim(G_\mathbb{R})$ (*loc. cit.*), on a aussi

$$\mathcal{D}ist_\chi(G_\mathbb{R}) \equiv \mathrm{h}^{\dim(G_\mathbb{R})}\left\{R\Gamma\left(G; \mathcal{RH}om^{\bullet}_{\mathcal{D}_G}\left(\mathcal{M}_\chi, R\underline{\underline{\Gamma}}_{G_\mathbb{R}}(\mathcal{O}_G) \otimes \underline{\underline{or}}_G \otimes j_{G_\mathbb{R}*}\underline{\underline{or}}_{G_\mathbb{R}}\right)\right)\right\}, \quad (7)$$

où $\mathrm{h}^{\dim(G_\mathbb{R})}\{\mathcal{C}\}$ dénote le groupe de cohomologie de degré $\dim(G_\mathbb{R})$ du complexe $\mathcal{C}$.

M. Kashiwara met alors en évidence la suite de complexes équivalents à (7) en catégories dérivées, suivante :

$$\begin{array}{lll}
\equiv^{16} & R\Gamma\left(G; \mathcal{RH}om^{\bullet}_{\mathcal{D}_G}\left(\mathcal{M}_\chi, R\underline{\underline{\Gamma}}_{G_\mathbb{R}}(\mathcal{O}_G)\right) \otimes \underline{\underline{or}}_G \otimes j_{G_\mathbb{R}*}\underline{\underline{or}}_{G_\mathbb{R}}\right) & : \mathcal{C}_1 \\
\equiv^{17} & R\Gamma\left(G; R\underline{\underline{\Gamma}}_{G_\mathbb{R}}\left(\mathcal{RH}om^{\bullet}_{\mathcal{D}_G}(\mathcal{M}_\chi, \mathcal{O}_G)\right) \otimes \underline{\underline{or}}_G \otimes j_{G_\mathbb{R}*}\underline{\underline{or}}_{G_\mathbb{R}}\right) & : \mathcal{C}_2 \\
\equiv^{18} & R\Gamma\left(G; R\underline{\underline{\Gamma}}_{G_\mathbb{R}}\left(R\rho_*(\underline{\underline{\mathbb{C}}}_{\widetilde{G}})\right) \otimes \underline{\underline{or}}_G \otimes j_{G_\mathbb{R}*}\underline{\underline{or}}_{G_\mathbb{R}}\right) & : \mathcal{C}_3 \\
\equiv^{19} & R\Gamma\left(\widetilde{G}; R\underline{\underline{\Gamma}}_{\widetilde{G}_\mathbb{R}}(\underline{\underline{\mathbb{C}}}_{\widetilde{G}}) \otimes \underline{\underline{or}}_{\widetilde{G}} \otimes j_{\widetilde{G}_\mathbb{R}*}\rho^{-1}\underline{\underline{or}}_{G_\mathbb{R}}\right) & : \mathcal{C}_4 \\
\equiv^{20} & R\Gamma\left(\widetilde{G}_\mathbb{R}; \underline{\underline{\mathcal{CS}}}^{\bullet}_{\widetilde{G}_\mathbb{R}} \otimes \rho^{-1}\underline{\underline{or}}_{G_\mathbb{R}}\right)[-\dim(G)], & : \mathcal{C}_5
\end{array} \quad (8)$$

(où les expressions de la colonne de droite sont destinées à faciliter de futures références). On en déduit la démonstration de la proposition

Proposition 2.1.1 ([K-2]) *L'espace $\mathcal{D}ist_\chi(G_\mathbb{R})$ des distributions invariantes χ-propres sur $G_\mathbb{R}$ est isomorphe au groupe d'homologie $\mathrm{H}^{\inf}_{\dim(G_\mathbb{R})}(\widetilde{G}_\mathbb{R}; \rho^{-1}\underline{\underline{or}}_{G_\mathbb{R}})$.*

---

[15] Les produits tensoriels dans cette section seront toujours relatifs au faisceau constant de fibres $\mathbb{C}$. D'autre part, sur un groupe de Lie H, le faisceau d'orientation $\underline{\underline{or}}_H$ est toujours isomorphe (mais non canoniquement) au faisceau constant $\underline{\underline{\mathbb{C}}}_H$; l'ingérence des faisceaux d'orientation dans ce qui suit, ne se justifie donc que par la nécessité de considérer des objets intrinsèquement associés aux espaces étudiés.

[16] Puisque l'action de $\mathcal{D}_G$ sur les faisceaux $\underline{\underline{or}}_G$ et $j_{G_\mathbb{R}*}\underline{\underline{or}}_{G_\mathbb{R}}$ est triviale.

[17] Dans les complexes considérés, le foncteur $R\underline{\underline{\Gamma}}_{G_\mathbb{R}}(\cdot)$ se calcule dans la catégorie dérivée des complexes de faisceaux de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels sur G, tandis que $\mathcal{RH}om^{\bullet}_{\mathcal{D}_G}(\mathcal{M}_\chi, \cdot)$ opère sur celle de $\mathcal{D}$-modules. Cela étant, l'équivalence en question découle d'un fait général affirmant que le morphisme naturel de $\mathcal{RH}om^{\bullet}_{\mathcal{D}_G}(\mathcal{M}, R\underline{\underline{\Gamma}}(\mathcal{N}))$ vers $R\underline{\underline{\Gamma}}_{G_\mathbb{R}}(\mathcal{RH}om^{\bullet}_{\mathcal{D}_G}(\mathcal{M}, \mathcal{N}))$ est un isomorphisme en catégories dérivées pour tous $\mathcal{D}$-modules $\mathcal{M}$ et $\mathcal{N}$. On voit ceci en considérant une résolution de Godement $\mathcal{I}^{\bullet}$ pour le $\mathcal{D}$-module $\mathcal{N}$; chaque faisceau $\mathcal{I}^j$ est alors flasque, donc nécessairement acyclique pour le foncteur $\underline{\underline{\Gamma}}_{G_\mathbb{R}}$ et, en plus, le faisceau $\underline{\underline{\Gamma}}_{G_\mathbb{R}}(\mathcal{I}^j)$ est un $\mathcal{D}$-module *injectif* (*cf.* R. Hartshorne, Algebraic Geometry §III 2, par exemple). On ramène ainsi notre questionnement à celui, élémentaire, de vérifier que l'injection canonique de faisceaux de $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_G}(\mathcal{M}, \underline{\underline{\Gamma}}_{G_\mathbb{R}}(\mathcal{I}^j))$ dans $\underline{\underline{\Gamma}}_{G_\mathbb{R}}(\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_G}(\mathcal{M}, \mathcal{I}^j))$ est bien surjective.

[18] Résulte d'adapter, sur le groupe G, les arguments qui dans [H-K] étaient valables sur l'agèbre $\mathfrak{g}$ et qui prouvent l'existence d'un quasi-isomorphisme entre $\mathcal{RH}om^{\bullet}_{\mathcal{D}_G}(\mathcal{M}_\chi, \mathcal{O}_G)$ et $R\rho_*(\underline{\underline{\mathbb{C}}}_{\widetilde{G}})$. Nous reviendrons sur cette question dans la section 2.2.

[19] Manipulation classique exploitant la propreté de ρ.

[20] D'après les raisonnements de la preuve du lemme 1.5.6.

Le lien ainsi établi entre les cycles sous-analytiques de $\widetilde{G}_{\mathbb{R}}$ et les distributions invariantes χ-propres sur $G_{\mathbb{R}}$ est nommé *Correspondance de Hirai*. Il importe d'observer que comme $\dim(G_{\mathbb{R}}) = \dim(\widetilde{G}_{\mathbb{R}})$, cette correspondance associe à une distribution sur $G_{\mathbb{R}}$, un cycle sous-analytique de $\widetilde{G}_{\mathbb{R}}$ bien déterminé puisque la notion de cycles homologues est vide en cette dimension. On remarquera aussi que la nature des objets et des raisonnements qui précèdent fait que nous sommes en présence d'une correspondance *naturelle* par rapport aux ouverts de $G_{\mathbb{R}}$; on aura, par conséquent, un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{D}ist_{\chi}(G_{\mathbb{R}}) & \xrightarrow{\quad restriction \quad} & \mathcal{D}ist_{\chi}(G_{\mathbb{R},\mathrm{reg}}) \\
{\scriptstyle \mathrm{Hirai}}\updownarrow{\scriptstyle \equiv} & & {\scriptstyle \mathrm{Hirai}}\updownarrow{\scriptstyle \equiv} \\
\mathrm{H}^{\inf}_{\dim(G_{\mathbb{R}})}(\widetilde{G}_{\mathbb{R}}; \rho^{-1}(\underline{\underline{or}}_{G_{\mathbb{R}}})) & \xrightarrow{restriction} & \mathrm{H}^{\inf}_{\dim(G_{\mathbb{R}})}(\widetilde{G}_{\mathbb{R},\mathrm{reg}}; \underline{\underline{or}}_{\widetilde{G}_{\mathbb{R},\mathrm{reg}}})
\end{array}$$

où les flèches verticales sont des isomorphismes.

Ce diagramme permet de transposer aussitôt, dans un contexte de combinatoire simpliciale, deux problèmes classiques en analyse fonctionnelle sur $G_{\mathbb{R}}$, à savoir ceux de préciser le noyau el l'image de l'opération de restriction de $\mathcal{D}ist_{\chi}(G_{\mathbb{R}})$ vers $\mathcal{D}ist_{\chi}(G_{\mathbb{R},\mathrm{reg}})$.

En ce qui concerne le premier questionnement, il convient de préciser la remarque suivante.

Remarque 2.1.2 Dans le dernier diagramme la restriction établit une injection entre les groupes d'homologie de chaînes sous-analytiques concernés. En effet, comme $\dim(G_{\mathbb{R}}) = \dim(\widetilde{G}_{\mathbb{R}}) = \dim(\widetilde{G}_{\mathbb{R},\mathrm{reg}}) =: n$, nous avons (*cf.* lemme 1.5.4)

$$\mathrm{H}^{\inf}_{n}(\widetilde{G}_{\mathbb{R}}; \rho^{-1}\underline{\underline{or}}_{G_{\mathbb{R}}}) = \Gamma\Big(\widetilde{G}_{\mathbb{R}}; \underline{\underline{\mathcal{ZS}}}^{-n}_{\widetilde{G}_{\mathbb{R}}}(\rho^{-1}\underline{\underline{or}}_{G_{\mathbb{R}}})\Big)$$

et *mutatis mutandis* pour $G_{\mathbb{R},\mathrm{reg}}$. L'affirmation découle alors de remarquer que le morphisme de restriction de $\underline{\underline{\mathcal{CS}}}^{-n}_{\widetilde{G}_{\mathbb{R}}}$ vers $j_{\widetilde{G}_{\mathbb{R},\mathrm{reg}}*}\underline{\underline{\mathcal{CS}}}^{-n}_{\widetilde{G}_{\mathbb{R},\mathrm{reg}}}$ est un monomorphisme de faisceaux[21] puisque son noyau égale l'image directe du faisceau $i^{!}\underline{\underline{\mathcal{CS}}}^{-n}_{\widetilde{G}_{\mathbb{R}}}$, où i dénote l'inclusion du complémentaire de $\widetilde{G}_{\mathbb{R},\mathrm{reg}}$ dans $\widetilde{G}_{\mathbb{R}}$, et que la dimension de cet ensemble sous-analytique étant strictement majorée par n force l'annulation du faisceau $i^{!}\underline{\underline{\mathcal{CS}}}^{-n}_{\widetilde{G}_{\mathbb{R}}}$.

Cela étant, il est important d'observer qu'il serait fallacieux de conclure que ce raisonnement élémentaire pourrait fournir une nouvelle preuve, moyennant la commutativité du diagramme en question, du célèbre théorème de Harish-Chandra affirmant l'injectivité de l'opération de restriction au niveau des distributions étudiées (*cf.* [HC] mais aussi [Var]). La raison de ceci est que ce théorème intervient déjà de maniére décisive (*cf.* [H-K]) dans l'établissement de l'équivalence entre $R\rho_{*}(\underline{\underline{\mathbb{C}}}_{\widetilde{G}})$ et $\mathcal{RH}om^{\bullet}_{\mathcal{D}_G}(\mathcal{M}_{\chi}, \mathcal{O}_G)$; élément clef de la correspondance de Hirai.

Abordons maintenant le problème de l'image de l'opération de restiction des distributions. Dans la remarque précédente nous avons signalé que le morphisme de restriction de $\underline{\underline{\mathcal{CS}}}^{-n}_{\widetilde{G}_{\mathbb{R}}}$ vers $j_{\widetilde{G}_{\mathbb{R},\mathrm{reg}}*}\underline{\underline{\mathcal{CS}}}^{-n}_{\widetilde{G}_{\mathbb{R},\mathrm{reg}}}$, où $n = \dim(G_{\mathbb{R}})$, est en fait un *isomorphisme* de faisceaux ; ceci nous permet d'affirmer à présent qu'une distribution invariante χ-propre sur $G_{\mathbb{R},\mathrm{reg}}$ admettra un prolongement en une distribution du même type sur $G_{\mathbb{R}}$, si et seulement si,

[21] En fait un isomorphisme dont la surjectivité se démontre comme dans la proposition 1.5.3.

le cycle sous-analytique de $\widetilde{G}_{\mathbb{R},\mathrm{reg}}$ que la correspondance de Hirai lui associe, cycle qui est aussi une chaîne sous-analytique de $\widetilde{G}_{\mathbb{R}}$, possède un bord nul *en tant que chaîne sous-analytique de* $\widetilde{G}_{\mathbb{R}}$. Ainsi, les conditions de prolongement pour les distributions invariantes χ-propres de $G_{\mathbb{R},\mathrm{reg}}$ (*cf.* [Hir]), connues sous le nom de *Conditions de Hirai*, vont résulter, d'une part, de l'explicitation de la correspondance de Hirai sur $G_{\mathbb{R},\mathrm{reg}}$, ce à quoi sera consacré la fin de cet exposé, et d'autre part, de l'étude de la géométrie de $\widetilde{G}_{\mathbb{R}}$ jointe à l'explicitation du morphisme bord donnée dans la section 1.4 (*cf.* lemme 1.4.2) ce qui fera l'objet de l'exposé suivant.

2.2 Restriction aux ouverts réguliers.

Soit U un ouvert de G_{reg} et notons $U_{\mathbb{R}} := U \cap G_{\mathbb{R}}$. Le fait que la restriction de l'application ρ à $\widetilde{U}$ soit un revêtement de fibres isomorphes à W jouera tout au long de cette section un rôle simplificateur fondamental. On peut d'ores et déjà déduire l'exactitude du foncteur ρ_* et une identification des foncteurs « image directe » et « image inverse » des catégories dérivées de $\mathcal{D}$-modules aux foncteurs analogues de la catégorie de faisceaux de $\mathbb{C}$-espaces vectoriels.

Notons $\mathcal{S}ol_U(\mathcal{M}_\chi)$ la restriction du complexe $\mathcal{RH}om^{\bullet}_{\mathcal{D}_G}(\mathcal{M}_\chi, \mathcal{O}_G)$ à l'ouvert U. La suite de quasi-isomorphismes (8), qui se restreint naturellement à U, fait intervenir de manière essentielle un quasi-isomorphisme entre $R\rho_*(\underline{\underline{\mathbb{C}}}_{\widetilde{U}})$ et $\mathcal{S}ol_U(\mathcal{M}_\chi)$ sur lequel nous n'avons pas encore été très explicites mais que l'on admettra provisoirement dans le but d'indiquer la suite des raisonnements. L'exactitude du foncteur ρ_* explique que ces derniers complexes sont en fait des systèmes locaux ; d'autre part on a, pour un système local $\mathcal{L}$, un isomorphisme fonctoriel

$$\mathrm{h}^{\dim(G_{\mathbb{R}})}\left\{R\mathit{\Gamma}\left(U; R\underline{\underline{\mathit{\Gamma}}}_{U_{\mathbb{R}}}(\mathcal{L}) \otimes \underline{\underline{or}}_U \otimes j_{U_{\mathbb{R}}*}\underline{\underline{or}}_{U_{\mathbb{R}}}\right)\right\} \equiv \mathit{\Gamma}(U_{\mathbb{R}}; j^{-1}_{U_{\mathbb{R}}}(\mathcal{L}))$$

qui découle de manipulations élémentaires à partir des équivalences classiques :

$$R\underline{\underline{\mathit{\Gamma}}}_{U_{\mathbb{R}}}(\mathcal{L}) \equiv R\underline{\underline{\mathit{\Gamma}}}_{U_{\mathbb{R}}}(\underline{\underline{or}}_U) \otimes \underline{\underline{or}}_U \otimes \mathcal{L} \equiv j_{U_{\mathbb{R}}*}\underline{\underline{or}}_{U_{\mathbb{R}}} \otimes \underline{\underline{or}}_U \otimes \mathcal{L}[-\dim(G_{\mathbb{R}})].$$

En appliquant cette remarque[22] à la suite (8) on obtient le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{h}^{\dim(G_{\mathbb{R}})}\{\mathcal{C}_2\} & \equiv & \mathit{\Gamma}\Big(U_{\mathbb{R}}; j^{-1}_{U_{\mathbb{R}}}(\mathcal{S}ol_U(\mathcal{M}_\chi))\Big) \\
||| & & |||\ * \\
\mathrm{h}^{\dim(G_{\mathbb{R}})}\{\mathcal{C}_3\} & \equiv & \mathit{\Gamma}\Big(U_{\mathbb{R}}; j^{-1}_{U_{\mathbb{R}}}(\rho_*(\underline{\underline{\mathbb{C}}}_{\widetilde{U}}))\Big) \\
||| & & ||| \\
\mathrm{h}^{\dim(G_{\mathbb{R}})}\{\mathcal{C}_4\} & \equiv & \mathit{\Gamma}\Big(\widetilde{U}_{\mathbb{R}}; j^{-1}_{\widetilde{U}_{\mathbb{R}}}(\underline{\underline{\mathbb{C}}}_{\widetilde{U}})\Big) \\
||| & & ||| \\
\mathrm{H}^{\mathrm{inf}}_{\dim(G_{\mathbb{R}})}(\widetilde{U}_{\mathbb{R}}; \underline{\underline{or}}_{\widetilde{U}_{\mathbb{R}}}) & \equiv & \mathit{\Gamma}\Big(\widetilde{U}_{\mathbb{R}}; \underline{\underline{\mathbb{C}}}_{\widetilde{U}_{\mathbb{R}}}\Big)
\end{array} \tag{9}$$

où tous les nouveaux morphismes sont évidents à l'exception près de $*$.

[22] Il aurait aussi été possible d'utiliser systématiquement le lemme 1.5.6 et obtenir ainsi des explicitations en termes de sections globales des faisceaux de chaînes sous-analytiques. C'est ainsi que j'ai procédé lors de mon exposition orale ; la démarche présente paraît cependant plus adaptée et directe.

La correspondance de Hirai apparaît ainsi naturellement scindée en deux équivalences :

$$\mathcal{D}ist_\chi(U_\mathbb{R}) \equiv \left\{\begin{matrix}\text{Solutions analytiques complexes de}\\ \mathcal{M}_\chi \text{ définies au voisinage de } U_\mathbb{R}.\end{matrix}\right\} \overset{(9)}{\equiv} \mathrm{H}^{\inf}_{\dim(G_\mathbb{R})}(\widetilde{U}_\mathbb{R}; \underline{\underline{or}}_{\widetilde{U}_\mathbb{R}}) \tag{10}$$

où la première est suffisamment classique (*cf.* [Var] I §4) pour que nous puissions la considérer comme acquise et pour que nous concentrions nos efforts d'explicitation uniquement sur (9). Cette dernière résultera clairement de la donnée d'une présentation de $\mathcal{M}_\chi|_U$ et d'avoir précisé le quasi-isomorphisme reliant $\rho_*(\underline{\underline{\mathbb{C}}}_{\widetilde{U}})$ et $\mathcal{S}ol_U(\mathcal{M}_\chi)$ utilisé dans (8). Pour ceci nous établirons, dans un premier temps, un isomorphisme de faisceaux entre $\mathcal{M}_\chi|_{G_{\mathrm{reg}}}$ et $\rho_*(\mathcal{O}_{\widetilde{G}_{\mathrm{reg}}})$.

Commençons par introduire la fonction holomorphe Ψ sur G_{reg}. Elle est définie de la manière suivante : pour $p = (g, x) \in \widetilde{G}_{\mathrm{reg}}$, l'élément x est un point fixe *isolé* pour l'action de g sur X, et l'action que g induit sur l'espace vectoriel tangent $T_x(X)$ est, en conséquence, telle que l'endomorphisme $1 - g$ est régulier. On pose alors $\Psi(p) := \det^{-1}(1-g : T_x(X))$. Cette fonction, en s'associant à l'opérateur différentiel constant $\mathbb{1}_{\widetilde{G}_{\mathrm{reg}}}$, détermine un morphisme μ de $\mathcal{D}$-modules de $\mathcal{D}_{\widetilde{G}_{\mathrm{reg}}}$ dans $\mathcal{O}_{\widetilde{G}_{\mathrm{reg}}}$ et donne par image directe $\rho_*(\mu) : \rho_*\mathcal{D}_{\widetilde{G}_{\mathrm{reg}}} \to \rho_*\mathcal{O}_{\widetilde{G}_{\mathrm{reg}}}$. Comme d'autre part le fait que ρ soit un revêtement garantit que $\mathcal{D}_{\widetilde{G}_{\mathrm{reg}}} \equiv \rho^{-1}\mathcal{D}_{G_{\mathrm{reg}}}$, on peut définir un morphisme de $\mathcal{D}$-modules $\zeta : \mathcal{D}_{G_{\mathrm{reg}}} \to \rho_*\mathcal{O}_{\widetilde{G}_{\mathrm{reg}}}$ en composant $\rho_*(\mu)$ au morphisme canonique $\theta : \mathcal{D}_{G_{\mathrm{reg}}} \to \rho_*\rho^{-1}\mathcal{D}_{G_{\mathrm{reg}}}$, *i.e.* en composant les flèches :

$$\mathcal{D}_{G_{\mathrm{reg}}} \xrightarrow{\theta} \rho_*\rho^{-1}\mathcal{D}_{G_{\mathrm{reg}}} \equiv \rho_*\mathcal{D}_{\widetilde{G}_{\mathrm{reg}}} \xrightarrow{\rho_*(\mu)} \rho_*\mathcal{O}_{\widetilde{G}_{\mathrm{reg}}}.$$

Nous avons alors le résultat suivant.

Proposition 2.2.1 *Le morphisme $\zeta : \mathcal{D}_{G_{\mathrm{reg}}} \to \rho_*\mathcal{O}_{\widetilde{G}_{\mathrm{reg}}}$ est surjectif et de noyau $\mathcal{I}_\chi|_{G_{\mathrm{reg}}}$. Il induit, par conséquent, un isomorphisme de faisceaux entre $\mathcal{M}_\chi|_{G_{\mathrm{reg}}}$ et $\rho_*\mathcal{O}_{\widetilde{G}_{\mathrm{reg}}}$.*

Démonstration : Commençons par expliciter $\zeta(U)$ pour un ouvert U suffisament petit pour que $\rho|_{\widetilde{U}}$ soit une fibration triviale. Fixons un élément $g_0 \in U$, un tore maximal T_0 de G contenant g_0 et un sous-groupe de Borel $B_0 \supseteq T_0$ et notons Δ le système des racines de (B_0, T_0) de demi-somme[23] ρ. Soit W le groupe de Weyl de (G, T_0), on identifie alors $\widetilde{U}$ à $U \times W$ de sorte que (g_0, wB_0) corresponde à (g_0, w) pour tout $w \in W$, et l'on introduit la famille $\{\Psi_w\}_{w \in W}$ de fonctions holomorphes sur U en posant $\Psi_w(g) := \Psi(g, w)$. Dans cette situation, le module $(\rho_*\mathcal{D}_{\widetilde{U}})(U)$ va s'identifier à $\bigoplus_W \mathcal{D}_U(U)$ et l'homomorphisme $\theta(U)$ associe à l'opérateur $\mathbb{1}_U$ le W-uplet $(\mathbb{1}_U)_{w \in W}$ dont l'image par $\rho_*(\mu)$ dans le module $(\rho_*\mathcal{O}_{\widetilde{U}})(U) \equiv \bigoplus_W \mathcal{O}_U(U)$ est le W-uplet $(\Psi_w)_{w \in W}$; soit, en condensé :

$$\begin{array}{rcl} \zeta(U) : \mathcal{D}_U(U) & \longrightarrow & (\rho_*\mathcal{O}_{\widetilde{U}})(U) \equiv \bigoplus_W \mathcal{O}_U(U) \\ \mathbb{1}_U & \longmapsto & (\Psi_w)_{w \in W}. \end{array}$$

Nous prouverons ultérieurement que, quitte à restreindre l'ouvert U si nécessaire, il existe une fonction analytique $\sigma : U \to G$ telle que si $g \in U$ l'élément $\sigma(g)^{-1} \cdot g \cdot \sigma(g)$ appartient à T_0 et telle que $\sigma(g_0)$ est l'élément neutre e de G. Cette remarque permet

[23] Ces notations étant très classiques nous sommes obligés de les conserver malgré l'ambiguïté flagrante en ce qui concerne le signifié de ρ ; le contexte sera toutefois suffisamment clair pour éviter toute erreur d'interprétation.

d'exprimer les fonctions Ψ_w en termes de données attachées au sous-groupe de Cartan T_0. En effet, des raisonnements élémentaires prouvent alors l'égalité :

$$\Psi_w(g) = \frac{e^{\rho - w\rho}}{\prod_{\alpha\in\Delta}(1-e^{-\alpha})}(a), \tag{11}$$

pour tous $g \in U$ et $a \in \mathrm{Lie}(T_0)$ tels que $\sigma(g)\cdot\exp(a)\cdot\sigma(g)^{-1} = g$.

L'affirmation concernant le noyau de $\zeta(U)$ est maintenant immédiate puisque l'on reconnaît dans la description (11) des fonctions Ψ_w, la description d'une famille de fonctions constituant une base pour les solutions du système d'équations différentielles définissant $\mathcal{I}_\chi$. C'est un point qui résulte des developpements présentés dans [Var] I §4 par exemple, auquel nous référons pour plus de détails.

Analysons l'image du morphisme de faisceaux ζ sur un voisinage de g_0. Observons que Ψ_w est une fonction inversible sur U et admettons provisoirement l'existence, pour chaque $A \in \mathrm{Lie}(T_0)$, d'un champ de vecteurs V_A sur U tel que l'opérateur différentiel qu'il définit, noté ∂_A, vérifie

$$\partial_A(\Psi_w^{-1}\Psi_{w'}) = (w\rho - w'\rho)(A)\Psi_w^{-1}\Psi_{w'}. \tag{12}$$

Numérotons arbitrairement les éléments du groupe de Weyl : $w_1, \ldots, w_s$. Comme l'image de $\zeta(U)$ contient $\Psi_{w_1}^{-1}\cdot\zeta(U)(\mathbb{1}_U) = (1, \Psi_{w_1}^{-1}\Psi_{w_2}, \ldots, \Psi_{w_1}^{-1}\Psi_{w_s})$, on comprend, d'après (12), que si A est choisi dans le complémentaire de la réunion des noyaux des formes linéaires concernées, on pourra réaliser un certain W-uplet $(0, m_2\Psi_{w_2}, \ldots, m_s\Psi_{w_s})$, où $m_i \in \mathbb{C}^*$, comme élément image de $\zeta(U)$. Ces raisonnements peuvent bien évidemment être itérés et prouvent ainsi que $(0, \ldots, 0, \Psi_{w_s})$, et donc $(0, \ldots, 0, 1)$, est atteint par $\zeta(U)$. Enfin, comme l'indexation choisie des éléments de W n'a joué aucun rôle dans cette argumentation, la surjectivité annoncée de $\zeta(U)$ se trouve démontrée.

Prouvons pour terminer, l'existence de l'application σ et des champs V_A, vérifiant (12), sur un certain voisinage de l'élément $g_0 \in U$. Nous allons utiliser le fait que l'application

$$\begin{array}{rcl} \nu : T_0 \times (G/T_0) & \longrightarrow & G \\ (g, [p]) & \longmapsto & p\cdot g\cdot p^{-1} \end{array}$$

établit un difféomorphisme local au voisinage de $(g_0, [e])$. Il suffit pour ceci d'inspecter le noyau de la différentielle de ν en ce point ; on a $d\nu_{(g_0,[e])}(A, B) = (\mathrm{ad}(g_0^{-1})\cdot B - B)_{g_0} + A$, d'où l'injectivité résulte d'avoir supposé g_0 régulier. L'application σ provient alors de considérer la seconde coordonnée d'un inverse local de ν, composée à une section convenable de la projection canonique $G \to G/T_0$ au voisinage de $[e]$.

Notons maintenant $\nu' : \mathrm{Lie}(T_0)\times(G/T_0) \to G$ l'application définie par $\nu'(a, [p]) := \nu(\exp(a), [p])$; elle établit un difféomorphisme entre un voisinage U'' d'un certain $(a_0, [e])$, où $\exp(a_0) = g_0$, et un ouvert U' contenant g_0. Pour chaque $A \in \mathrm{Lie}(T_0)$ soit $\mathcal{A}$ le champ de vecteurs sur U'' dont la première coordonnée est constante et égale à A et la seconde est nulle et définissons V_A comme le champ image directe $\nu'_*\mathcal{A}$. On aura alors l'identité standard $\partial_{\nu'_*\mathcal{A}}(f) = (\partial_{\mathcal{A}}(f\circ\nu'))\circ(\nu')^{-1}$ pour toute fonction f sur U' ; en particulier comme $((\Psi_w^{-1}\Psi_{w'})\circ\nu')(a, [p]) = e^{w\rho - w'\rho}(a)$, la formule (12) sera satisfaite. ∎

Ceci étant, reprenons notre discussion au sujet de la suite d'isomorphismes (9). Nous allons avoir pour tout ouvert $U \subseteq G_{\rm reg}$ et puisque ρ est un revêtement fini, les équivalences

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{S}ol_U(\mathcal{M}_\chi) & := & \mathcal{RH}om^{\bullet}_{\mathcal{D}_U}(\mathcal{M}_\chi, \mathcal{O}_U) \overset{\zeta}{\equiv} \mathcal{RH}om^{\bullet}_{\mathcal{D}_U}(\rho_* \mathcal{O}_{\widetilde{U}}, \mathcal{O}_U) \\ & \equiv & \rho_* \mathcal{RH}om^{\bullet}_{\mathcal{D}_{\widetilde{U}}}(\mathcal{O}_{\widetilde{U}}, \mathcal{O}_{\widetilde{U}}) \equiv \rho_*(\underline{\underline{\mathbb{C}}}_{\widetilde{U}}), \end{array} \tag{13}$$

où la dernière est classique dans ces théories. Or, comme les complexes $\mathcal{S}ol_G(\mathcal{M}_\chi)$ et $R\rho_*(\underline{\underline{\mathbb{C}}}_{\widetilde{G}})$ sont les extensions minimales (*cf.* [H-K]) de leur restriction à $G_{\rm reg}$, cette équivalence (13) entre $\mathcal{S}ol_{G_{\rm reg}}(\mathcal{M}_\chi)$ et $\rho_*(\underline{\underline{\mathbb{C}}}_{\widetilde{G}_{\rm reg}})$ va se prolonger *de manière unique* à G tout entier fournissant le quasi-isomorphisme utilisé par M. Kashiwara pour relier $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ dans (8), c'est donc bien cette dernière équivalence que nous devons employer dans notre projet d'explicitation de la correspondance de Hirai.

Observons maintenant que comme tous les complexes de (13) sont concentrés en degré zéro, on a

$$\ker\Big(\mathcal{O}_U \xrightarrow{\kappa} \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_U}(\mathcal{I}_\chi|_U, \mathcal{O}_U)\Big) \equiv \mathcal{S}ol_U(\mathcal{M}_\chi) \equiv \rho_*(\underline{\underline{\mathbb{C}}}_{\widetilde{U}}),$$

où le morphisme κ découle d'appliquer le foncteur $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_U}(\cdot, \mathcal{O}_U)$ au noyau de $\zeta : \mathcal{D}_U \to \rho_* \mathcal{O}_{\widetilde{U}}$. Ainsi, la présentation du module des équations différentielles pour les distributions invariantes χ-propres, donnée par le morphisme ζ, nous permet de préciser à présent la fonction analytique correspondant à une section du faisceau $\rho_*(\underline{\underline{\mathbb{C}}}_{\widetilde{U}})$. En effet, supposons pour simplifier l'ouvert U connexe et suffisamment petit pour que la restriction de ρ à $\widetilde{U}$ soit une fibration triviale. L'ouvert $\widetilde{U}$ s'identifie dans ce cas au produit $U \times W$ ce qui permet de définir, comme dans la proposition 2.2.1, une fonction Ψ_w analytique sur U, en posant $\Psi_w(g) := \Psi(g, w)$. Une section s de $\rho_*(\underline{\underline{\mathbb{C}}}_{\widetilde{U}})$ se voit alors comme une somme formelle $s = \sum_{w \in W} m_w(U \times \{w\})$ de nappes de $\rho|_{\widetilde{U}}$. Il résulte ainsi assez clairement de ce qui précède que la fonction associée à s est simplement $\sum_{w \in W} m_w \Psi_w$; il en découle, par restriction à $G_{\mathbb{R}}$, la proposition suivante qui termine cet exposé.

Proposition 2.2.2 ([K-2]) *Soit U un ouvert de $G_{\rm reg}$ et $U_{\mathbb{R}} := U \cap G_{\mathbb{R}}$. L'équivalence établie par le correspondance de Hirai*

$$\mathrm{H}^{\rm inf}_{\dim(G_{\mathbb{R}})}(\widetilde{U}_{\mathbb{R}}; \underline{\underline{or}}_{\widetilde{U}_{\mathbb{R}}}) \equiv \left\{ \begin{array}{l} \text{Solutions analytiques complexes de} \\ \mathcal{M}_\chi \text{ définies au voisinage de } U_{\mathbb{R}}. \end{array} \right\},$$

associe à un cycle sous-analytique σ de dimension $\dim(G_{\mathbb{R}})$ *la fonction f_σ définie sur $U_{\mathbb{R}}$ par*

$$f_\sigma(g) = \sum_{p \in \rho^{-1}(g)} \sigma(p) \Psi(p),$$

où $\sigma(p)$ dénote le nombre d'intersection de σ et $\rho^{-1}(g)$ au point p.

Démonstration : D'après le lemme 1.5.4 (page 17) les cycles sous-analytiques de dimension $\dim(G_{\mathbb{R}})$ à coefficients dans $\underline{\underline{or}}_{\widetilde{U}_{\mathbb{R}}}$ de la variété $\widetilde{U}_{\mathbb{R}}$ sont les sections globales du faisceau constant $\underline{\underline{\mathbb{C}}}_{\widetilde{U}_{\mathbb{R}}}$, *i.e.* les sommes formelles de composantes connexes de $\widetilde{U}_{\mathbb{R}}$. Comme d'autre part il existe un voisinage V de $\widetilde{U}_{\mathbb{R}}$ dans $\widetilde{U}$ tel que l'inclusion $\widetilde{U}_{\mathbb{R}} \hookrightarrow V$ établisse une bijection des composantes connexes de $\widetilde{U}_{\mathbb{R}}$ sur celles de V,[24] on comprend que tout cycle

[24] C'est un fait qui découle de raisonnements généraux de topologie élémentaire. En effet, nous avons donné dans les premières lignes de la démonstration du lemme 1.3.2 (page 10) des arguments qui prouvent que sur un espace paracompact et localement fermé, deux fermés disjoint admettent toujours des voisinages disjoints. En rajoutant l'hypothèse, pour l'espace ambiant, d'être localement connexe, le même raisonnement fournit pour chaque sous-espace fermé, des voisinages ouverts disjoints et connexes de ses composantes connexes.

sous-analytique σ de $\mathrm{H}^{\inf}_{\dim(G_{\mathbb{R}})}(\widetilde{U}_{\mathbb{R}}; \underline{\underline{or}}_{\widetilde{U}_{\mathbb{R}}})$ s'obtient, par la suite d'équivalences (9), en restreignant une section globale Σ du faisceau constant de V. Mais alors la fonction associée à σ est bien la restriction à $U_{\mathbb{R}}$ de celle associée à Σ par la correspondance (13), ce que nous avons déjà etudié dans le paragraphe précédent et fournit la fin de la démonstration de cette proposition. ∎

3 Références Bibliographiques

[Bor] *Intersection Cohomology*. Armand BOREL et al. Progress in Mathematics. Vol. 50. Birkhaüser (1984).

[God] *Topologie Algébrique et Théorie de Faisceaux*. Roger GODEMENT. Act. Sci. Ind. 1252. Hermann Paris (1958).

[HC] *Invariant Eigendistributions on a Semisimple Lie Group*. HARISH-CHANDRA. Trans. Amer. Math. Soc. 119 (1965), pp. 457–508.

[Hir] *Invariant Eigendistributions of Laplace Operators on Real Simple Groups* II. T. Hirai. Japan Journal of Math. 2 (1976), pp. 28–89.

[H-1] *Introduction aux Ensembles Sous-Analytiques*. Heisuke HIRONAKA. Colloque sur les Singularités en Géométrie Analytique (Cargèse 1972). Astérisque 7–8 (1973).

[H-2] *Subanalytic Sets in Number Theory, Algebraic Geometry and Commutative Algebra*. Heisuke HIRONAKA. Volume in Honor of Y. Akizuki, Kinokuniya (1973).

[H-K] *The Invariant Holonomic System in a Semisimple Lie Algebra*. R. HOTTA et M. KASHIWARA. Inventiones Mathematicæ 75 (1984), pp. 327–358.

[Ive] *Cohomology of Sheaves*. Birger IVERSEN. Universitext, Springer Verlag (1985).

[K-1] *Index Theorem for Constructible Sheaves*. Masaki KASHIWARA. Astérisque 130 (1985), pp. 193–209.

[K-2] *Character, Character Cycle, Fixed Point Theorem and Group Representations*. Masaki KASHIWARA. Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University. RIMS-569 (1987).

[K-S] *Sheaves on Manifolds*. Masaki KASHIWARA and Pierre SCHAPIRA. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag. En cours d'édition.

[Sat] *Theory of Hyperfunctions,* II. Mikio SATO. Journal Fac. Sci. Univ. Tokio 8 (1960), pp. 387–437.

[SKK] *Microfunctions and Pseudo-Differential Equations*. Mikio SATO, Takahiro KAWAI, Masaki KASHIWARA. In Lecture Notes in Mathematics 287. Springer-Verlag (1973).

[Sem] *Dualité de Poincaré*. Séminaire Heidelberg Strasbourg 1966/67. Publication I.R.M.A. Strasbourg n° 3 (1969).

[Var] *Harmonic Analysis on Real Reductive Groups*. V. S. VARADARAJAN. Lecture Notes in Mathematics 576. Springer-Verlag (1977).

4 Terminologie et notations

Tout le long de cet exposé nous avons noté, pour une inclusion d'ensembles $A \subseteq B$, par i_A^B et j_A^B les injections canoniques. Les lettres i et j ne font pas nécessairement allusion au caractère respectivement fermé et ouvert de ces applications comme c'est parfois le cas dans la littérature classique. Enfin, lorsque B est l'espace ambiant ou bien lorsque le contexte élimine toute ambiguïté, l'indication de cet élément a été omise.

Dans le but de faciliter la lecture des différentes sections de ce papier, j'indique pour terminer, la liste complète des notations, souvent non-standard, employées dans le texte extérieur aux démonstrations.