

Introduction à l'Homologie d'Intersection

Alberto Arabia

(Prépublication. Année 2002)

**Institut de Mathématiques de Jussieu
Université Paris 7 - Denis Diderot**

U.F.R. DE MATHÉMATIQUES

Neuvième étage, plateau D, bureau 9D11.

175, rue du Chevaleret. 75013 Paris.

– Samedi 16 mars 2003 –

(8h:30min)

Notes de cours

Alberto Arabia

Ces notes sont complémentaires des notes “Faisceaux pervers sur les variétés algébriques complexes. Correspondance de Springer (d’après Borho-MacPherson)”

<http://www.math.jussieu.fr/~arabia/math/Pervers.pdf>

Table des matières

§1. Rappels	3
1.1. Foncteurs dérivés	3
1.1.2. Résolutions	3
1.1.4. Existence des foncteurs dérivés	4
1.1.11. Objets et résolutions acycliques	6
1.1.15. Unicité des foncteurs dérivés	8
1.2. Catégories de faisceaux	10
1.2.1. La suite exacte fondamentale	10
1.2.2. Le triangle exact $\Delta(\mathbf{U}, \mathbf{X}, \mathbf{Z}; \mathcal{F}^\bullet)$	10
1.2.3. Le triangle exact $\Delta(\mathbf{Z}, \mathbf{X}, \mathbf{U}; \mathcal{F}^\bullet)$	11
1.3. Suites exactes longues de Mayer-Vietoris	11
1.3.1. Mayer-Vietoris (à supports fermés)	11
1.3.2. Mayer-Vietoris à supports compacts	12
1.4. Faisceaux c -mous et résolutions c -molles	12
1.5. Dimension cohomologique	16
1.6. Premiers théorèmes d’homotopie	20
§2. Exemples de calculs d’homologie d’intersection	27
2.1. Cadre de travail	27
2.2. Complexe d’intersection pour la perversité p	27
2.3. Objet des calculs	28
2.4. Homologie d’intersection du cône d’une variété topologique compacte à coefficients dans le complémentaire de son sommet	28
2.4.1. Cône d’un espace topologique	28
2.5. Homologie d’intersection sur des espaces topologiques compacts	32
2.6. Homologie d’intersection du double cône d’une variété topologique compacte à coefficients dans le complémentaire des sommets	32
2.6.1. Double cône d’un espace topologique	32
2.7. Homologie d’intersection d’une variété topologique compacte à coefficients dans le complémentaire d’un ensemble fini	33
2.8. Homologie d’intersection d’un bouquet de variété topologiques à coefficients dans le complémentaire du point de base	34
2.8.1. Bouquets	34
2.9. Homologie d’intersection d’un espace singulier compact à singularités isolées à coefficients dans sa partie lisse	35
2.10. Homologie d’intersection d’une variété topologique compacte à coefficients dans le complémentaire d’une sous-variété fermée	37
2.12. Conclusions	39
§3. Dualité sur les espaces stratifiés	41
3.1. Espace topologiquement stratifié	41
3.1.3. Exemples	43
3.1.4. Espace topologiquement stratifié purement de dimension d	43

3.1.7. Condition d'équisingularité	44
3.2. Constructibilité	44
3.2.1. Faisceaux dérivés	44
3.2.2. Faisceaux dérivés à supports dans une partie localement fermé	45
3.2.3. Le triangle exact fondamental	45
3.2.4. Amplitudes d'un complexe	45
3.2.5. Troncatures intelligentes	46
3.2.7. Complexes \mathcal{X} -cohomologiquement localement constants	47
3.3. Théorème d'homotopie	49
3.3.1. Filtrations fermées	49
3.3.2. Homotopies filtrées	50
3.3.5. Théorème d'homotopie	51
3.4. Dualité de Grothendieck-Verdier	55
3.4.1. Image directe à supports propres	55
3.4.4. Plongements localement fermés	57
3.4.7. Adjonction et dualité de Grothendieck-Verdier	59
3.4.9. Image inverse exceptionnelle	60
3.4.11. Complexe dualisant	61
3.4.12. Définitions	61
3.5. Dualité de Poincaré sur les variétés topologiques	63
3.5.1. Faisceau d'orientations	63
3.5.3. Le cas des variétés différentielles	64
3.5.4. Le cas des variétés topologiques	64
3.6. Stabilité de $D_{\mathcal{F}\text{-clc}}^b(\mathbf{X})$ par dualité de Grothendieck-Verdier	66
3.6.2. Dualité de Grothendieck-Verdier sur les espaces stratifiés	68
3.7. Produits et théorème de Künneth	70
3.7.2. Produit tensoriel externe	71
3.8. Applications stratifiées	73
§ 4. Prolongement intermédiaire, perversité, homologie d'intersection	76
4.1. Équivalence de catégories de Deligne	77
4.1.1. Prolongement intermédiaire des faisceaux	77
4.1.4. Prolongement intermédiaire des systèmes locaux	78
4.2. Perversité et pseudovariétés	78
4.3. Homologie d'intersection des pseudovariétés	79
§ 5. Caractère intrinsèque de l'homologie d'intersection	80
5.1. Filtrations à strates lisses	80
5.2. Raffinements de filtrations	80
5.3. Comparaison de complexes d'intersection	81
5.4. Variétés cohomologiques	84
5.4.4. Une variété cohomologique non topologique	85
5.5. Dualité de Poincaré sur les variétés cohomologiques	86
5.5.1. Espaces cohomologiquement stratifiés	87
5.5.3. Tableau récapitulatif des caractérisations des complexes d'intersection	88
5.6. Filtration associée à une perversité et un système local	88
5.6.3. Système locaux maximaux sur les variétés cohomologiques.	90

5.7. Caractérisation intrinsèque des complexes d'intersection	92
5.7.1. Support cohomologique des complexes de faisceaux	92
5.8. Caractère local des complexes d'intersection	93
§ 6. Formule de Künneth pour l'homologie d'intersection	94
6.1. Quelques opérations sur les perversités	94
6.2. Homologie d'intersection d'un produit de pseudovariétés	96
§ 7. Functorialité de l'homologie d'intersection	98
7.1. Images inverses par des morphismes lisses	98
7.2. À propos de la functorialité de l'homologie d'intersection	99
§ 8. Quelques références bibliographiques	99

§ 1. Rappels

1.1 Foncteurs dérivés

Dans cette section nous rappelons assez rapidement des résultats classiques concernant les foncteurs dérivés. Les références [H,KS] sont recommandées.

1.1.1. Notations. Étant donnée une catégorie abélienne \mathcal{A} et une sous-catégorie pleine et additive \mathcal{B} de \mathcal{A} ⁽¹⁾, on note :

- $\mathcal{K}^+(\mathcal{B})$, resp. $\mathcal{K}^-(\mathcal{B})$: catégorie des complexes bornés à gauche, resp. à droite, d'objets de \mathcal{B} , où les morphismes sont les morphismes de complexes modulo homotopie.
- $\mathcal{N}^\pm(\mathcal{B})$: classe des complexes acycliques de $\mathcal{K}^\pm(\mathcal{B})$.
- $\mathcal{K}^\pm(\mathcal{B})/\mathcal{N}^\pm(\mathcal{B})$: catégorie quotient.
- $D^+(\mathcal{A})$, resp $D^-(\mathcal{A})$: catégorie dérivée des complexes d'objets de \mathcal{A} bornés à gauche, resp. à droite.
- $\mathcal{D}(\mathcal{A}) : \mathcal{K}^\pm(\mathcal{A}) \rightsquigarrow D^\pm(\mathcal{A})$: foncteur de localisation.

On rappelle que le foncteur de localisation $\mathcal{D}(\mathcal{A}) : \mathcal{K}^\pm(\mathcal{A}) \rightsquigarrow D^\pm(\mathcal{A})$ est la correspondance qui associe à un objet de $\mathcal{K}^\pm(\mathcal{A})$ le même objet dans $D^\pm(\mathcal{A})$ et à un morphisme $\varphi \in \text{Mor}_{\mathcal{K}^\pm(\mathcal{A})}(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$ sa classe $\bar{\varphi} \in \text{Mor}_{D^\pm(\mathcal{A})}(\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2)$ après localisation.

1.1.2. Résolutions. Une «résolution à droite d'un objet \mathcal{O} de \mathcal{A} par des objets de \mathcal{B} » est la donnée d'un complexe (M^\bullet, d_\bullet) de $C^{\geq 0}(\mathcal{B})$ et d'un morphisme $\varepsilon : \mathcal{O} \rightarrow M^0$ vérifiant $d_0 \circ \varepsilon = 0$ tels que le complexe :

$$0 \rightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{\varepsilon} M^0 \xrightarrow{d_0} M^1 \xrightarrow{d_1} M^2 \xrightarrow{d_2} \dots$$

est exact.

¹Il revient au même de demander que \mathcal{B} soit une sous-catégorie pleine de \mathcal{A} stable par sommes directes finies dans \mathcal{A} .

Dualement, une «résolution à gauche d'un objet \mathbf{O} de \mathcal{A} par des objets de \mathcal{B} » est la donnée d'un complexe $(\mathbf{M}^\bullet, d_\bullet)$ de $C^{\leq 0}(\mathcal{B})$ et d'un morphisme $\varepsilon : \mathbf{M}^0 \rightarrow \mathbf{O}$ vérifiant $\varepsilon \circ d_{-1} = 0$ tels que le complexe :

$$\dots \xrightarrow{d_{-3}} \mathbf{M}^{-2} \xrightarrow{d_{-2}} \mathbf{M}^{-1} \xrightarrow{d_{-1}} \mathbf{M}^0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{O} \rightarrow 0$$

est exact.

La preuve de la proposition suivante est laissée en exercice.

1.1.3. Proposition

- a) Si tout objet de \mathcal{A} est sous-objet d'un objet de \mathcal{B} :
- i) Tout objet de \mathcal{A} admet une résolution à droite par des objets de \mathcal{B} .
 - ii) Pour chaque complexe borné à gauche \mathbf{O}^\bullet d'objets de \mathcal{A} , il existe un complexe borné à gauche \mathbf{M}^\bullet d'objets de \mathcal{B} et un quasi-isomorphisme $\varphi_\bullet : \mathbf{O}^\bullet \rightarrow \mathbf{M}^\bullet$.
 - iii) Le foncteur $\mathcal{Q}_{\mathcal{A}}$ induit une équivalence de catégories de $\mathcal{K}^+(\mathcal{B})/\mathcal{N}^+(\mathcal{B})$ vers $D^+(\mathcal{A})$.
- b) Si tout objet de \mathcal{A} est quotient d'un objet de \mathcal{B} :
- i) Tout objet de \mathcal{A} admet une résolution à gauche par des objets de \mathcal{B} .
 - ii) Pour chaque complexe borné à droite \mathbf{O}^\bullet d'objets de \mathcal{A} , il existe un complexe borné à droite \mathbf{M}^\bullet d'objets de \mathcal{B} et un quasi-isomorphisme $\varphi_\bullet : \mathbf{M}^\bullet \rightarrow \mathbf{O}^\bullet$.
 - iii) Le foncteur $\mathcal{Q}_{\mathcal{A}}$ induit une équivalence de catégories de $\mathcal{K}^-(\mathcal{B})/\mathcal{N}^-(\mathcal{B})$ vers $D^-(\mathcal{A})$.

1.1.4. Existence des foncteurs dérivés. Lorsque un foncteur $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ entre catégories abéliennes est **additif**, il induit par son action terme à terme, des foncteurs de catégories triangulées notés $\mathcal{K}^\pm(F) : \mathcal{K}^\pm(\mathcal{A}) \rightsquigarrow \mathcal{K}^\pm(\mathcal{A}')$.

La proposition suivante est corollaire immédiat de la proposition 1.1.3.

1.1.5. Proposition et définition. Soit \mathcal{B} une sous-catégorie pleine et additive de \mathcal{A} .

- a) Si pour tout $\mathbf{M}^\bullet \in \mathcal{N}^+(\mathcal{B})$, le complexe $\mathbf{F}(\mathbf{M}^\bullet)$ est acyclique, le foncteur $\mathcal{K}^+(F) : \mathcal{K}^+(\mathcal{A}) \rightsquigarrow \mathcal{K}^+(\mathcal{A}')$ induit un foncteur $\overline{\mathcal{K}}^+(F) : \mathcal{K}^+(\mathcal{B})/\mathcal{N}^+(\mathcal{B}) \rightsquigarrow D^+(\mathcal{A}')$. Si de plus, tout objet de \mathcal{A} est sous-objet d'un objet de \mathcal{B} , le foncteur $\overline{\mathcal{K}}^+(F)$ est naturellement défini sur $D^+(\mathcal{A})$ où il est noté $\mathbb{R}_{\mathcal{B}}F$:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{K}^+(\mathcal{B}) & \xrightarrow{\subseteq} & \mathcal{K}^+(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\mathcal{K}^+(F)} & \mathcal{K}^+(\mathcal{A}') \\ \downarrow & & \downarrow \mathcal{Q}(\mathcal{A}) & & \downarrow \mathcal{Q}(\mathcal{A}') \\ \mathcal{K}^+(\mathcal{B})/\mathcal{N}^+(\mathcal{B}) \equiv D^+(\mathcal{A}) & & \xrightarrow{\mathbb{R}_{\mathcal{B}}F} & & D^+(\mathcal{A}') \\ & & \overline{\mathcal{K}}^+(F) & & \uparrow \end{array}$$

Le foncteur $\mathbb{R}_{\mathcal{B}}F : D^+(\mathcal{A}) \rightsquigarrow D^+(\mathcal{A}')$ est un foncteur exact entre catégories triangulées, c'est «le foncteur dérivé à droite de F relativement à \mathcal{B} ».

- b) Si pour tout $\mathbf{M}^\bullet \in \mathcal{N}^-(\mathcal{B})$, le complexe $\mathbf{F}(\mathbf{M}^\bullet)$ est acyclique, le foncteur $\mathcal{K}^-(F) : \mathcal{K}^-(\mathcal{A}) \rightsquigarrow \mathcal{K}^-(\mathcal{A}')$ induit un foncteur $\overline{\mathcal{K}}^-(F) : \mathcal{K}^-(\mathcal{B})/\mathcal{N}^-(\mathcal{B}) \rightsquigarrow D^-(\mathcal{A}')$. Si de plus,

tout objet de \mathcal{A} est quotient d'un objet de \mathcal{B} , le foncteur $\overline{\mathcal{K}}^-(\mathbf{F})$ est naturellement défini sur $D^-(\mathcal{A})$ où il est noté $\mathbb{L}_{\mathcal{B}}\mathbf{F}$:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{K}^-(\mathcal{B}) & \xrightarrow{\subseteq} & \mathcal{K}^-(\mathcal{A}) & \xrightarrow[\simeq]{\mathcal{K}^-(\mathbf{F})} & \mathcal{K}^-(\mathcal{A}') \\ \downarrow & & \downarrow \mathcal{Q}(\mathcal{A}) & & \downarrow \mathcal{Q}(\mathcal{A}') \\ \mathcal{K}^-(\mathcal{B})/\mathcal{N}^-(\mathcal{B}) \equiv D^-(\mathcal{A}) & \xrightarrow[\simeq]{\mathbb{L}_{\mathcal{B}}\mathbf{F}} & D^-(\mathcal{A}') & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \uparrow \\ & & \overline{\mathcal{K}}^-(\mathbf{F}) & & \end{array}$$

Le foncteur $\mathbb{L}_{\mathcal{B}}\mathbf{F} : D^-(\mathcal{A}) \rightsquigarrow D^-(\mathcal{A}')$ est un foncteur exact entre catégories triangulées, c'est «le foncteur dérivé à gauche de \mathbf{F} relativement à \mathcal{B} ».

1.1.6. Notation. Dans les cas considérés dans 1.1.5, si \mathbf{O} est un objet de \mathcal{A} et si $\mathbf{O}^{[0]}$ désigne le complexe dont les termes sont nuls sauf celui en degré 0 qui vaut \mathbf{O} , on pose pour $m \in \mathbb{Z}$ ⁽²⁾

$$\mathbb{R}_{\mathcal{B}}^m \mathbf{F}(\mathbf{O}) := h^m[\mathbb{R}_{\mathcal{B}}\mathbf{F}(\mathbf{O}^{[0]})], \quad \mathbb{L}_{\mathcal{B}}^m \mathbf{F}(\mathbf{O}) := h^m[\mathbb{L}_{\mathcal{B}}\mathbf{F}(\mathbf{O}^{[0]})].$$

1.1.7. Exercice. En supposant les conditions de la proposition 1.1.5 remplies, prouver les assertions suivantes.

a) Le foncteur $\mathbb{R}_{\mathcal{B}}^0 : \mathcal{A} \rightsquigarrow \mathcal{A}'$ est exact à gauche et

$$\mathbb{R}_{\mathcal{B}}^0 \mathbf{F}(M) \equiv \mathbf{F}(M) \quad \text{et} \quad \mathbb{R}_{\mathcal{B}}^m \mathbf{F}(M) = 0, \quad \text{pour tout } m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},$$

pour tout objet M de \mathcal{B} .

b) Le foncteur $\mathbb{L}_{\mathcal{B}}^0 : \mathcal{A} \rightsquigarrow \mathcal{A}'$ est exact à droite et

$$\mathbb{L}_{\mathcal{B}}^0 \mathbf{F}(M) \equiv \mathbf{F}(M) \quad \text{et} \quad \mathbb{L}_{\mathcal{B}}^m \mathbf{F}(M) = 0, \quad \text{pour tout } m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},$$

pour tout objet M de \mathcal{B} .

c) Pour toute suite exacte courte $\mathbf{0} \rightarrow \mathbf{O}_1 \rightarrow \mathbf{O}_2 \rightarrow \mathbf{O}_3 \rightarrow \mathbf{0}$ d'objets de \mathcal{A} , on a des suites exactes longues :

$$\begin{aligned} \dots &\rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{B}}^{m-1} \mathbf{F}(\mathbf{O}_3) \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{B}}^m \mathbf{F}(\mathbf{O}_1) \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{B}}^m \mathbf{F}(\mathbf{O}_2) \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{B}}^m \mathbf{F}(\mathbf{O}_3) \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{B}}^{m+1} \mathbf{F}(\mathbf{O}_1) \rightarrow \dots \\ \dots &\rightarrow \mathbb{L}_{\mathcal{B}}^{m-1} \mathbf{F}(\mathbf{O}_3) \rightarrow \mathbb{L}_{\mathcal{B}}^m \mathbf{F}(\mathbf{O}_1) \rightarrow \mathbb{L}_{\mathcal{B}}^m \mathbf{F}(\mathbf{O}_2) \rightarrow \mathbb{L}_{\mathcal{B}}^m \mathbf{F}(\mathbf{O}_3) \rightarrow \mathbb{L}_{\mathcal{B}}^{m+1} \mathbf{F}(\mathbf{O}_1) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

1.1.8. Remarque. Un corollaire de cet exercice qui mérite d'être souligné est que la catégorie \mathcal{B} permet également de définir le foncteur dérivé à droite $\mathbb{R}_{\mathcal{B}}(\mathbb{R}_{\mathcal{B}}^0 \mathbf{F})$. Dans ce cas, on a $\mathbb{R}_{\mathcal{B}}^m(\mathbb{R}_{\mathcal{B}}^0 \mathbf{F}) \equiv \mathbb{R}_{\mathcal{B}}^m(\mathbf{F})$, pour tout $m > 0$. Autrement dit, les foncteurs dérivés à droite d'ordre supérieur proviennent toujours de dériver un foncteur exact à gauche. Cette même remarque s'applique, dualement, aux foncteurs dérivés à gauche.

² Tout au long de ces notes, la notation $h^m[\mathbf{C}^\bullet]$ désignera le m -ième objet de cohomologie d'un complexe $(\mathbf{C}^\bullet, d_\bullet)$ d'objets d'une catégorie abélienne ; i.e. $h^m[\mathbf{C}^\bullet] := \ker(d_m)/\text{im}(d_{m-1})$.

1.1.9. Commentaire et terminologie. Notons $\mathcal{I}_{\mathcal{A}}$ (resp. $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}$) la sous-catégorie pleine de \mathcal{A} dont les objets sont les objets injectifs (resp. projectifs) de \mathcal{A} . On dit que \mathcal{A} «*possède suffisamment d'objets injectifs (resp. projectifs)*» si tout objet de \mathcal{A} est sous-objet (resp. objet quotient) d'un objet injectif (resp. projectif).

La sous-catégorie $\mathcal{I}_{\mathcal{A}}$ est une sous-catégorie additive de \mathcal{A} et un théorème de base dans la théorie des résolutions démontre qu'un complexe acyclique \mathbf{I}^{\bullet} borné à gauche d'objets injectifs est toujours homotope à zéro. Par conséquent, quel que soit le foncteur additif \mathbf{F} , le complexe $\mathbf{F}(\mathbf{I}^{\bullet})$ est homotope à zéro donc acyclique. Il s'ensuit (1.1.5) que si la catégorie \mathcal{A} possède suffisamment d'objets injectifs, le foncteur $\mathbb{R}_{\mathcal{I}_{\mathcal{A}}}\mathbf{F}$ est toujours défini. C'est le «*foncteur dérivé à droite de \mathbf{F}* », noté $\mathbb{R}\mathbf{F}$.

Ces remarques sont valables, dualement, en remplaçant 'injectif' par 'projectif' et le foncteur $\mathbb{L}_{\mathcal{P}_{\mathcal{A}}}\mathbf{F}$ est noté $\mathbb{L}\mathbf{F}$.

Par exemple, si \mathcal{A} est un anneau :

- La catégorie $\text{Mod}(\mathcal{A})$ des \mathcal{A} -modules possède suffisamment d'objets injectifs et projectifs. Tout foncteur additif défini sur $\text{Mod}(\mathcal{A})$ admet des foncteurs dérivés à droite et à gauche.
- Pour tout espace topologique \mathbf{X} , la catégorie $\text{Fais}_{\mathcal{A}}(\mathbf{X})$ des faisceaux de \mathcal{A} -modules sur \mathbf{X} , possède suffisamment d'objets injectifs, mais généralement pas suffisamment d'objets projectifs (cf. ex. 1.5.4). Tout foncteur additif sur $\text{Fais}_{\mathcal{A}}(\mathbf{X})$ admet donc des foncteurs dérivés à droite, mais pas nécessairement à gauche (cf. 1.1.19).

1.1.10. Définition. Une classe $\mathcal{I}_{\mathbf{F}}$ d'objets de \mathcal{A} , est appelée «*classe d'objets \mathbf{F} -injectifs dans \mathcal{A}* » lorsqu'elle vérifie les conditions de 1.1.5-(a), i.e. :

$\mathcal{I}_{\mathbf{F}}$ -a) Tout objet de \mathcal{A} est sous-objet d'un objet de $\mathcal{I}_{\mathbf{F}}$.

$\mathcal{I}_{\mathbf{F}}$ -b) Si \mathbf{O}_1 et \mathbf{O}_2 sont des objets de $\mathcal{I}_{\mathbf{F}}$, la somme directe $\mathbf{O}_1 \oplus \mathbf{O}_2$ est un objet de $\mathcal{I}_{\mathbf{F}}$.

$\mathcal{I}_{\mathbf{F}}$ -c) $\mathbf{F}(\mathcal{N}^+(\mathcal{I}_{\mathbf{F}})) \subseteq \mathcal{N}^+(\mathcal{A}')$.

Une classe $\mathcal{P}_{\mathbf{F}}$ d'objets de \mathcal{A} , est appelée «*classe d'objets \mathbf{F} -projectifs dans \mathcal{A}* » lorsqu'elle vérifie les conditions de 1.1.5-(b), i.e. :

$\mathcal{P}_{\mathbf{F}}$ -a) Tout objet de \mathcal{A} est quotient d'un objet de $\mathcal{P}_{\mathbf{F}}$.

$\mathcal{P}_{\mathbf{F}}$ -b) Si \mathbf{O}_1 et \mathbf{O}_2 sont des objets de $\mathcal{P}_{\mathbf{F}}$, la somme directe $\mathbf{O}_1 \oplus \mathbf{O}_2$ est un objet de $\mathcal{P}_{\mathbf{F}}$.

$\mathcal{P}_{\mathbf{F}}$ -c) $\mathbf{F}(\mathcal{N}^-(\mathcal{P}_{\mathbf{F}})) \subseteq \mathcal{N}^-(\mathcal{A}')$.

1.1.11. Objets et résolutions acycliques. On reprend les données du paragraphe précédent en supposant les conditions de la proposition 1.1.5 satisfaites de sorte que les foncteurs dérivés par rapport à \mathcal{B} sont définis. Une question importante se pose alors, à savoir : l'indépendance des foncteurs dérivés relativement à \mathcal{B} . Autrement dit, étant données \mathcal{B} et \mathcal{B}' vérifiant les conditions de 1.1.5, à quelle condition les foncteurs $\mathbb{R}_{\mathcal{B}}\mathbf{F}$ et $\mathbb{R}_{\mathcal{B}'}\mathbf{F}$ (resp. $\mathbb{L}_{\mathcal{B}}\mathbf{F}$ et $\mathbb{L}_{\mathcal{B}'}\mathbf{F}$) sont-ils canoniquement isomorphes.

Un premier pas dans cette direction passe par la notion d'«*objet acyclique*» que nous allons traiter uniquement dans le cas des foncteurs dérivés à droite d'un foncteur additif exact à gauche (cf. 1.1.8) étant entendu que le cas des foncteurs dérivés à gauche se traite de manière parfaitement symétrique.

1.1.12. Définition. Un objet \mathcal{O} de \mathcal{A} est dit « *$\mathbb{R}_{\mathcal{B}}\mathbf{F}$ -acyclique*» lorsque $\mathbb{R}_{\mathcal{B}}^m \mathbf{F}(\mathcal{O}) = 0$, pour tout $m > 0$. Une résolution à droite $\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{M}^0 \rightarrow \mathcal{M}^1 \rightarrow \dots$ où tous les \mathcal{M}^i sont $\mathbb{R}_{\mathcal{B}}\mathbf{F}$ -acycliques est «*une résolution $\mathbb{R}_{\mathcal{B}}\mathbf{F}$ -acyclique de \mathcal{O}* ».

1.1.13. Exercice. Montrer qu'un objet injectif de \mathcal{A} est $\mathbb{R}_{\mathcal{B}}\mathbf{F}$ -acyclique.

1.1.14. Théorème. Soit $\mathbf{F} : \mathcal{A} \rightsquigarrow \mathcal{A}'$ un foncteur additif entre catégories abéliennes **exact à gauche** et soit \mathcal{B} une classe d'objets \mathbf{F} -injectifs dans \mathcal{A} . Alors,

- a) Tout objet de \mathcal{B} est $\mathbb{R}_{\mathcal{B}}\mathbf{F}$ -acyclique.
- b) Étant donnée une suite exacte courte $\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{O}_1 \rightarrow \mathcal{O}_2 \rightarrow \mathcal{O}_3 \rightarrow \mathbf{0}$ d'objets de \mathcal{A} ,
 - i) Si \mathcal{O}_1 est $\mathbb{R}_{\mathcal{B}}\mathbf{F}$ -acyclique, la suite $\mathbf{0} \rightarrow \mathbf{F}(\mathcal{O}_1) \rightarrow \mathbf{F}(\mathcal{O}_2) \rightarrow \mathbf{F}(\mathcal{O}_3) \rightarrow \mathbf{0}$ est exacte.
 - ii) Si \mathcal{O}_1 et \mathcal{O}_2 sont $\mathbb{R}_{\mathcal{B}}\mathbf{F}$ -acycliques, il en est de même de \mathcal{O}_3 .
- c) Pour tout complexe acyclique borné à gauche $(\mathbf{M}^\bullet, d_\bullet)$ d'objets $\mathbb{R}_{\mathcal{B}}\mathbf{F}$ -acycliques, le complexe $(\mathbf{F}(\mathbf{M}^\bullet), \mathbf{F}(d_\bullet))$ est exact.
- d) La classe des objets $\mathbb{R}_{\mathcal{B}}\mathbf{F}$ -acycliques est une classe d'objets \mathbf{F} -injectifs dans \mathcal{A} . Le foncteur dérivé à droite de \mathbf{F} relativement aux objets $\mathbb{R}_{\mathcal{B}}\mathbf{F}$ -acycliques est canoniquement isomorphe à $\mathbb{R}_{\mathcal{B}}\mathbf{F}$.
- e) Pour tout objet $\mathcal{O} \in \mathcal{A}$ et toute résolution $\mathbb{R}_{\mathcal{B}}\mathbf{F}$ -acyclique $\mathcal{O} \hookrightarrow \mathbf{M}^\bullet$, il existe un isomorphisme canonique $\mathbf{F}(\mathbf{M}^\bullet) \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{B}}\mathbf{F}(\mathcal{O})$ dans $D^+(\mathcal{A}')$. En particulier, on a des isomorphismes canoniques

$$h^m[\mathbf{F}(\mathbf{M}^\bullet)] \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}_{\mathcal{B}}^m \mathbf{F}(\mathcal{O}).$$

- f) Pour tout complexe \mathbf{M}^\bullet borné à gauche d'objets $\mathbb{R}_{\mathcal{B}}\mathbf{F}$ -acycliques, il existe un isomorphisme canonique de $D^+(\mathcal{A}')$:

$$\mathbf{F}(\mathbf{M}^\bullet) \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}_{\mathcal{B}}\mathbf{F}(\mathbf{M}^\bullet).$$

Démonstration

- a) Par définition de $\mathbb{R}_{\mathcal{B}}\mathbf{F}$.
- b) Immédiat après inspection de la suite longue de foncteurs $\mathbb{R}_{\mathcal{B}}^*\mathbf{F}$ associée à la suite exacte courte $\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{O}_1 \rightarrow \mathcal{O}_2 \rightarrow \mathcal{O}_3 \rightarrow \mathbf{0}$.
- c) Il suffit de le vérifier pour un complexe de la forme

$$\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{M}^0 \xrightarrow{d_0} \mathcal{M}^1 \xrightarrow{d_1} \mathcal{M}^2 \xrightarrow{d_2} \dots \xrightarrow{d_{\ell-1}} \mathcal{M}^\ell \xrightarrow{d_\ell} \dots$$

Comme \mathbf{F} est supposé exact à gauche, on a $h^0(\mathbf{F}(\mathbf{M}^\bullet)) = h^1(\mathbf{F}(\mathbf{M}^\bullet)) = 0$. D'autre part,

$$\operatorname{coker}(\mathbf{F}(d_0)) \underset{1}{=} \mathbf{F}(\operatorname{coker}(d_0)) = \mathbf{F}(\ker(d_2)) \underset{2}{=} \ker(\mathbf{F}(d_2))$$

($\overline{1}$) d'après (b-i) et ($\overline{2}$) puisque \mathbf{F} est exact à gauche. Par conséquent

$$h^r(\mathbf{F}(\mathbf{M}^\bullet)) = 0, \text{ pour tout } r \leq 2. \quad (\diamond)$$

On remarque ensuite que $h^r(\mathbf{F}(\mathbf{M}^\bullet)) = h^{r-1}(\mathbf{F}(\mathbf{N}^\bullet))$, pour tout $r > 2$ (\dagger), où \mathbf{N}^\bullet est le complexe

$$\mathbf{0} \rightarrow \ker(d_2) \longrightarrow \mathbf{M}^2 \xrightarrow{d_2} \mathbf{M}^3 \xrightarrow{d_3} \dots \xrightarrow{d_{\ell-1}} \mathbf{M}^\ell \xrightarrow{d_\ell} \dots$$

Comme $\ker(d_2)$ est aussi $\mathbb{R}_{\mathcal{B}}\mathbf{F}$ -acyclique d'après (b-ii), l'égalité (\diamond) s'applique \mathbf{N}^\bullet et (\dagger) donne l'annulation de $h^3(\mathbf{F}(\mathbf{M}^\bullet))$. À partir de là, un argument récursif sur r donne l'annulation de tous les $h^r(\mathbf{F}(\mathbf{M}^\bullet))$ avec $r > 0$, CQFD.

d,e,f) Conséquence des assertions précédentes. Détails laissés en exercice. \blacksquare

1.1.15. Unicité des foncteurs dérivés. Le théorème suivant, corollaire de 1.1.14, donne le caractère intrinsèque des foncteurs dérivés.

1.1.16. Corollaire. *On reprend les données du théorème 1.1.14. Soient \mathcal{B} et \mathcal{B}' deux classes d'objets \mathbf{F} -injectifs dans \mathcal{A} . Alors,*

- a) *Un objet de \mathcal{A} est $\mathbb{R}_{\mathcal{B}'}\mathbf{F}$ -acyclique, si et seulement si, il est $\mathbb{R}_{\mathcal{B}}\mathbf{F}$ -acyclique. En particulier la classe des objets $\mathbb{R}_{\mathcal{B}}\mathbf{F}$ -acycliques est indépendante de \mathcal{B} .*
- b) *Les foncteurs $\mathbb{R}_{\mathcal{B}}\mathbf{F}$ et $\mathbb{R}_{\mathcal{B}'}\mathbf{F}$ sont canoniquement isomorphes.*

Démonstration. Compte tenu de 1.1.14-(d), il suffit de prouver (a). Soit \mathcal{O}' un objet $\mathbb{R}_{\mathcal{B}'}\mathbf{F}$ -acyclique et fixons une suite exacte courte $\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{O}' \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{Q} \rightarrow \mathbf{0}$ (\dagger) avec \mathcal{O} dans \mathcal{B} . La suite exacte longue des foncteurs $\mathbb{R}_{\mathcal{B}}^*\mathbf{F}$ associée à (\dagger) commence par :

$$\mathbf{0} \rightarrow \mathbf{F}(\mathcal{O}') \longrightarrow \mathbf{F}(\mathcal{O}) \xrightarrow{b} \mathbf{F}(\mathcal{Q}) \longrightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{B}}^1(\mathcal{O}') \longrightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{B}}^1(\mathcal{O}') = \mathbf{0} \longrightarrow \dots$$

où b est surjectif par hypothèse sur \mathcal{B}' et d'après 1.1.14-(b-i). On en déduit les égalités :

$$\begin{cases} \mathbb{R}_{\mathcal{B}}^m \mathbf{F}(\mathcal{O}') \cong \mathbb{R}_{\mathcal{B}}^{m-1} \mathbf{F}(\mathcal{Q}), \text{ pour tout } m \geq 2, \text{ et} \\ \mathbb{R}_{\mathcal{B}}^1 \mathbf{F}(\mathcal{O}') = 0, \end{cases} \quad (\diamond)$$

et ceci, quel que soit l'objet $\mathbb{R}_{\mathcal{B}'}\mathbf{F}$ -acyclique \mathcal{O}' .

Fixons une suite exacte courte $\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}'' \rightarrow \mathcal{R} \rightarrow \mathbf{0}$ où \mathcal{O}'' est $\mathbb{R}_{\mathcal{B}'}\mathbf{F}$ -acyclique. On a le diagramme (\mathcal{D}) de lignes et colonnes exactes ci-après où l'objet $\mathcal{Q}' := \mathcal{O}''/\mathcal{O}'$ est $\mathbb{R}_{\mathcal{B}'}\mathbf{F}$ -acyclique d'après 1.1.14-(b-ii).

Comme \mathcal{O} est dans \mathcal{B} , la suite

$$\mathbf{0} \rightarrow \mathbf{F}(\mathcal{O}) \rightarrow \mathbf{F}(\mathcal{O}'') \rightarrow \mathbf{F}(\mathcal{R}) \rightarrow \mathbf{0}$$

est exacte ce qui entraîne aussitôt l'exactitude de

$$\mathbf{0} \rightarrow \mathbf{F}(\mathcal{Q}) \rightarrow \mathbf{F}(\mathcal{Q}') \rightarrow \mathbf{F}(\mathcal{R}) \rightarrow \mathbf{0}. \quad (*)$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & \\ & & & \downarrow & & \downarrow & \\ \mathbf{0} & \rightarrow & \mathcal{O}' & \longrightarrow & \mathcal{O} & \longrightarrow & \mathcal{Q} \rightarrow \mathbf{0} \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{0} & \rightarrow & \mathcal{O}' & \longrightarrow & \mathcal{O}'' & \longrightarrow & \mathcal{Q}' \rightarrow \mathbf{0} \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & \mathcal{R} & = & \mathcal{R} \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & \mathbf{0} & & \mathbf{0} \end{array}$$

On en déduit une injection $\mathbb{R}_{\mathcal{B}}^1 \mathbf{F}(\mathcal{Q}) \hookrightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{B}}^1 \mathbf{F}(\mathcal{Q}') = 0$, et alors $\mathbb{R}_{\mathcal{B}}^2 \mathbf{F}(\mathcal{O}') = 0$ par (\diamond).

Nous prouvons maintenant, par récurrence sur m , l'égalité $\mathbb{R}_{\mathcal{B}}^m \mathbf{F}(\mathcal{O}') = 0$, pour tout $m \geq 3$ et quel que soit l'objet $\mathbb{R}_{\mathcal{B}} \mathbf{F}$ -acyclique \mathcal{O}' . En effet, supposons l'assertion vérifiée pour tout $n < m$. D'après (◇), on a $\mathbb{R}_{\mathcal{B}}^m \mathbf{F}(\mathcal{O}') \cong \mathbb{R}_{\mathcal{B}}^{m-1} \mathbf{F}(\mathcal{Q})$, et la suite longue de cohomologie associée à la colonne centrale de (ℚ) montre que $\mathbb{R}_{\mathcal{B}}^{m-2} \mathbf{F}(\mathcal{R}) = 0$. Par conséquent $\mathbb{R}_{\mathcal{B}}^{m-1} \mathbf{F}(\mathcal{Q})$ est un sous-objet de $\mathbb{R}_{\mathcal{B}}^{m-1} \mathbf{F}(\mathcal{Q}')$ lui-même nul par hypothèse inductive, CQFD. ■

1.1.17. Notations et terminologies. Compte tenu de 1.1.16-(b), l'indication de \mathcal{B} dans la notation $\mathbb{R}_{\mathcal{B}} \mathbf{F}'$ est superflue et peut donc être effacée. Dans la suite, la notation $\mathbb{R}\mathbf{F}$ désignera le foncteur dérivé à droite intrinsèque défini à l'aide d'une quelconque classe d'objets \mathbf{F} -injectifs.

Dans le même ordre d'idées, l'assertion 1.1.16-(a) montre que la notion d'objet $\mathbb{R}_{\mathcal{B}} \mathbf{F}$ -acyclique est aussi indépendante de \mathcal{B} . L'expression « objet $\mathbb{R}_{\mathcal{B}} \mathbf{F}$ -acyclique » sera donc abrégée en « objet $\mathbb{R}\mathbf{F}$ -acyclique ». À ce sujet, on trouve souvent dans la littérature l'expression « objet \mathbf{F} -acyclique » ; celle-ci est alors synonyme de « objet $\mathbb{R}\mathbf{F}$ -acyclique » lorsque \mathbf{F} est exact à gauche, et de « objet $\mathbb{L}\mathbf{F}$ -acyclique » lorsque \mathbf{F} est exact à droite.

Le critère suivant est souvent utilisé pour démontrer qu'une classe d'objets de \mathcal{A} est une classe d'objets \mathbf{F} -injectifs.

1.1.18. Proposition. Soient $\mathbf{F} : \mathcal{A} \rightsquigarrow \mathcal{A}'$ un foncteur additif entre catégories abéliennes exact à gauche, et $\mathcal{I}_{\mathbf{F}}$ une classe d'objets de \mathcal{A} vérifiant :

$\mathcal{I}_{\mathbf{F}}$ -i) Pour toute suite exacte $\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{P} \rightarrow \mathbf{0}$ d'objets de \mathcal{A} avec $\mathcal{O} \in \mathcal{I}_{\mathbf{F}}$, la suite $\mathbf{0} \rightarrow \mathbf{F}(\mathcal{O}) \rightarrow \mathbf{F}(\mathcal{N}) \rightarrow \mathbf{F}(\mathcal{P}) \rightarrow \mathbf{0}$ est exacte.

$\mathcal{I}_{\mathbf{F}}$ -ii) Pour toute suite exacte $\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{O}_1 \rightarrow \mathcal{O}_2 \rightarrow \mathcal{P} \rightarrow \mathbf{0}$ d'objets de \mathcal{A} avec $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \in \mathcal{I}_{\mathbf{F}}$, on a $\mathcal{P} \in \mathcal{I}_{\mathbf{F}}$.

Alors :

a) Pour toute suite exacte $\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{O}^0 \xrightarrow{d_0} \mathcal{O}^1 \xrightarrow{d_1} \dots \xrightarrow{d_{\ell-1}} \mathcal{O}^{\ell} \xrightarrow{d_{\ell}} \dots$ d'objets de $\mathcal{I}_{\mathbf{F}}$, la suite $(\mathbf{F}(\mathcal{O}^{\bullet}), \mathbf{F}(d_{\bullet}))$ est exacte.

b) On suppose que la classe $\mathcal{I}_{\mathbf{F}}$ vérifie les conditions supplémentaires suivantes :

($\mathcal{I}_{\mathbf{F}}$ -iii) Tout objet de \mathcal{A} s'injecte dans un objet de $\mathcal{I}_{\mathbf{F}}$.

($\mathcal{I}_{\mathbf{F}}$ -iv) La somme directe de deux objets de $\mathcal{I}_{\mathbf{F}}$ est un objet de $\mathcal{I}_{\mathbf{F}}$.

Alors $\mathcal{I}_{\mathbf{F}}$ est une classe d'objets \mathbf{F} -injectifs dans \mathcal{A} .

Démonstration

a) Même preuve que pour 1.1.14-(c).

b) Immédiat. ■

1.1.19. Exemple. La catégorie $\text{Fais}_{\mathcal{A}}(\mathbf{X})$ ne possédant généralement pas suffisamment d'objets projectifs (cf. ex. 1.5.4), la définition de foncteurs dérivés à gauche résultera de

prouver auparavant qu'il existe une classe d'objets projectifs pour le foncteur en question. Un exemple classique en ce sens est celui du foncteur exact à droite «*produit tensoriel*» $F := (-) \otimes \mathcal{M} : \text{Fais}_{\mathcal{A}}(\mathbf{X}) \rightsquigarrow \text{Fais}_{\mathcal{A}}(\mathbf{X})$, avec $\mathcal{M} \in \text{Fais}_{\mathcal{A}}(\mathbf{X})$. Il est facile de voir que la classe \mathcal{P}_F des faisceaux dont les germes sont des \mathcal{A} -modules **plats** est une classe d'objets F -projectifs dans $\text{Fais}_{\mathcal{A}}(\mathbf{X})$. Le foncteur $\mathbb{L}F : D^-(\text{Fais}_{\mathcal{A}}(\mathbf{X})) \rightsquigarrow D^-(\text{Fais}_{\mathcal{A}}(\mathbf{X}))$, noté classiquement $(-) \otimes_{\mathbb{L}} \mathcal{M}$, est donc toujours défini.

1.2 Catégories de faisceaux

Dans toute cette partie un espace topologique (noté $\mathbf{S}, \mathbf{T}, \mathbf{U}, \dots, \mathbf{Z}$) sera tacitement supposé métrisable et localement compact. Toute partie localement fermée d'un tel espace est automatiquement métrisable, localement compact et paracompact. On prendra garde du fait que le complémentaire d'un sous-espace localement fermé n'est pas nécessairement localement fermé.

Tous les foncteurs que nous allons considérer dans la suite ont déjà été définis dans les notes de cours [A].

1.2.1. La suite exacte fondamentale. Pour toute partie localement fermée $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{X}$ de complémentaire $\mathbf{A} := \mathbf{X} \setminus \mathbf{S}$ et tout faisceau $\mathcal{F} \in \text{Fais}_k(\mathbf{X})$, nous avons la suite exacte à gauche fondamentale dépendant fonctoriellement de \mathcal{F} :

$$0 \rightarrow i_{\mathbf{S}!} \underline{\Gamma}_{\mathbf{S}}(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{q} i_{\mathbf{A}*}(\mathcal{F}|_{\mathbf{A}}) \rightarrow 0. \quad (1)$$

Lorsque le faisceau \mathcal{F} est flasque le morphisme q est surjectif, le faisceau \mathcal{F} est $\underline{\Gamma}_{\mathbf{S}}$ -acyclique et sa restriction $\mathcal{F}|_{\mathbf{A}}$ est flasque (car \mathbf{X} métrisable ⁽³⁾) donc $i_{\mathbf{A}*}$ -acyclique. On en déduit un foncteur (exact) de la catégorie dérivée $D_k^+(\mathbf{X})$ vers la catégorie (triangulée) des triangles exacts de $D_k^+(\mathbf{X})$ associant à un complexe de faisceaux \mathcal{F}^\bullet le triangle exact :

$$\Delta(\mathbf{S}, \mathbf{X}, \mathbf{A}; \mathcal{F}^\bullet) := \left(i_{\mathbf{S}!}(\mathbb{R}\underline{\Gamma}_{\mathbf{S}} \mathcal{F}^\bullet) \longrightarrow \mathcal{F}^\bullet \longrightarrow \mathbb{R}i_{\mathbf{A}*}(\mathcal{F}^\bullet|_{\mathbf{A}}) \xrightarrow{[+1]} \right) \quad (2)$$

et à un morphisme de complexes en catégorie dérivée $\alpha_\bullet : \mathcal{F}^\bullet \rightarrow \mathcal{G}^\bullet$, le morphisme de triangles exacts :

$$\begin{array}{ccccc} i_{\mathbf{S}!}(\mathbb{R}\underline{\Gamma}_{\mathbf{S}} \mathcal{F}^\bullet) & \longrightarrow & \mathcal{F}^\bullet & \longrightarrow & \mathbb{R}i_{\mathbf{A}*}(\mathcal{F}^\bullet|_{\mathbf{A}}) \xrightarrow{[+1]} \\ \downarrow i_{\mathbf{S}!}(\mathbb{R}\underline{\Gamma}_{\mathbf{S}} \alpha_\bullet) & & \downarrow \alpha_\bullet & & \downarrow \mathbb{R}i_{\mathbf{A}*}(\alpha_\bullet|_{\mathbf{A}}) \\ i_{\mathbf{S}!}(\mathbb{R}\underline{\Gamma}_{\mathbf{S}} \mathcal{G}^\bullet) & \longrightarrow & \mathcal{G}^\bullet & \longrightarrow & \mathbb{R}i_{\mathbf{A}*}(\mathcal{G}^\bullet|_{\mathbf{A}}) \xrightarrow{[+1]} \end{array}$$

1.2.2. Le triangle exact $\Delta(\mathbf{U}, \mathbf{X}, \mathbf{Z}; \mathcal{F}^\bullet)$. Lorsque \mathbf{S} et une partie ouverte dans \mathbf{X} , on note alors $\mathbf{U} := \mathbf{S}$ et $\mathbf{Z} := \mathbf{X} \setminus \mathbf{U}$, la suite fondamentale (1) est exacte à droite quel que soit le faisceau \mathcal{F} . De plus, les foncteurs $\underline{\Gamma}_{\mathbf{U}}$ et $i_{\mathbf{U}}^{-1}$ sont naturellement isomorphes,

³ Cf. Godement "Théorie des faisceaux", page 151.

$i_{Z^*} = i_{Z!}$, et les quatre foncteurs : $i_{U!}$, i_U^{-1} , $i_{Z!}$ et i_Z^{-1} qui apparaissent maintenant dans la suite fondamentale (1), c'est-à-dire dans la suite :

$$0 \longrightarrow i_{U!}(\mathcal{F}|_U) \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow i_{Z!}(\mathcal{F}|_Z) \longrightarrow 0,$$

sont tous exacts. En particulier, le triangle (2) correspond à la suite exacte courte de complexes de faisceaux :

$$\Delta(U, X, Z; \mathcal{F}^\bullet) := \left(0 \longrightarrow i_{U!}(\mathcal{F}^\bullet|_U) \longrightarrow \mathcal{F}^\bullet \longrightarrow i_{Z!}(\mathcal{F}^\bullet|_Z) \longrightarrow 0 \right). \quad (*)$$

Les foncteurs $\mathbb{R}\Gamma(X; -)$ et $\mathbb{R}\Gamma_c(X; -)$ appliqués (*) donnent respectivement :

- La suite exacte longue d'hypercohomologies (à supports fermés) :

$$\boxed{\xrightarrow{[+1]} \mathbb{H}^m(X; i_{U!}(\mathcal{F}^\bullet|_U)) \longrightarrow \mathbb{H}^m(X; \mathcal{F}^\bullet) \longrightarrow \mathbb{H}^m(Z; \mathcal{F}^\bullet|_Z) \xrightarrow{[+1]}}$$

- La suite exacte longue d'hypercohomologies à support compact :

$$\boxed{\xrightarrow{[+1]} \mathbb{H}_c^m(U; \mathcal{F}^\bullet|_U) \longrightarrow \mathbb{H}_c^m(X; \mathcal{F}^\bullet) \longrightarrow \mathbb{H}_c^m(Z; \mathcal{F}^\bullet|_Z) \xrightarrow{[+1]}}$$

puisque (cf. 1.4.5)

$$\mathbb{R}\Gamma_c(X; i_{U!}(-)) \cong \mathbb{R}\Gamma_c(U; -) \quad \text{et} \quad \mathbb{R}\Gamma_c(X; i_{Z!}(-)) \cong \mathbb{R}\Gamma_c(Z; -).$$

1.2.3. Le triangle exact $\Delta(Z, X, U; \mathcal{F}^\bullet)$. Lorsque S est une partie fermée dans X , on note $Z := S$ et $U := X \setminus Z$; le triangle fondamental (2) s'écrit alors :

$$\Delta(Z, X, U; \mathcal{F}^\bullet) := \left(i_{Z^*}(\mathbb{R}\Gamma_Z \mathcal{F}^\bullet) \longrightarrow \mathcal{F}^\bullet \longrightarrow \mathbb{R}i_{U^*}(\mathcal{F}^\bullet|_U) \xrightarrow{[+1]} \right)$$

et donne lieu à la suite exacte longue d'hypercohomologie :

$$\boxed{\xrightarrow{[+1]} \mathbb{H}_Z^m(X; \mathcal{F}^\bullet) \longrightarrow \mathbb{H}^m(X; \mathcal{F}^\bullet) \longrightarrow \mathbb{H}^m(U; \mathcal{F}^\bullet) \xrightarrow{[+1]}}$$

1.3 Suites exactes longues de Mayer-Vietoris

1.3.1. Mayer-Vietoris (à supports fermés). Pour tous ouverts $U_1, U_2 \subseteq X$, notons $U_{12} := U_1 \cap U_2$. Les morphismes de restriction entre les foncteurs des sections

$$\rho_{U_i}^U(-) : \Gamma(U, -) \rightarrow \Gamma(U_i, -) \quad \text{et} \quad \rho_{U_{12}}^{U_i}(-) : \Gamma(U_i, -) \rightarrow \Gamma(U_{12}, -)$$

donnent lieu à une suite exacte **à gauche** :

$$0 \longrightarrow \Gamma(U, -) \xrightarrow{\rho_{U_1}^U \oplus \rho_{U_2}^U} \Gamma(U_1, -) \oplus \Gamma(U_2, -) \xrightarrow{\rho_{U_{12}}^{U_1} - \rho_{U_{12}}^{U_2}} \Gamma(U_{12}, -) \longrightarrow 0$$

qui est exacte à droite lorsque elle est appliquée à un faisceau flasque. On a donc un foncteur de la catégorie dérivée $D_k^+(\mathbf{X})$ à valeurs dans la catégorie des triangles exacts :

$$\mathcal{F}^\bullet \rightsquigarrow \left(\mathbb{R}\Gamma(U, \mathcal{F}^\bullet) \longrightarrow \mathbb{R}\Gamma(U_1, \mathcal{F}^\bullet) \oplus \mathbb{R}\Gamma(U_2, \mathcal{F}^\bullet) \longrightarrow \mathbb{R}\Gamma(U_{12}, \mathcal{F}^\bullet) \xrightarrow{[+1]} \right)$$

dont on dérive la suite exacte longue de Mayer-Vietoris d'hypercohomologies :

$$\boxed{\xrightarrow{[+1]} \mathbb{H}^m(U; \mathcal{F}^\bullet) \longrightarrow \mathbb{H}^m(U_1; \mathcal{F}^\bullet) \oplus \mathbb{H}^m(U_2; \mathcal{F}^\bullet) \longrightarrow \mathbb{H}^m(U_{12}; \mathcal{F}^\bullet) \xrightarrow{[+1]}}$$

1.3.2. Mayer-Vietoris à supports compacts. De manière tout à fait analogue au paragraphe précédent, on a une suite exacte à gauche des sections à supports compacts :

$$0 \longrightarrow \Gamma_c(U_{12}, -) \longrightarrow \Gamma_c(U_1, -) \oplus \Gamma_c(U_2, -) \longrightarrow \Gamma_c(U, -) \longrightarrow 0,$$

qui est exacte lorsque elle est appliquée à un faisceau c -mou (cf. 1.4.4), d'où le foncteur de la catégorie dérivée $D_k^+(\mathbf{X})$ à valeurs dans la catégorie des triangles exacts :

$$\mathcal{F}^\bullet \rightsquigarrow \left(\mathbb{R}\Gamma_c(U_{12}, \mathcal{F}^\bullet) \longrightarrow \mathbb{R}\Gamma_c(U_1, \mathcal{F}^\bullet) \oplus \mathbb{R}\Gamma_c(U_2, \mathcal{F}^\bullet) \longrightarrow \mathbb{R}\Gamma_c(U, \mathcal{F}^\bullet) \xrightarrow{[+1]} \right)$$

et la suite exacte longue de Mayer-Vietoris d'hypercohomologies à support compact :

$$\boxed{\xrightarrow{[+1]} \mathbb{H}_c^m(U_{12}; \mathcal{F}^\bullet) \longrightarrow \mathbb{H}_c^m(U_1; \mathcal{F}^\bullet) \oplus \mathbb{H}_c^m(U_2; \mathcal{F}^\bullet) \longrightarrow \mathbb{H}_c^m(U; \mathcal{F}^\bullet) \xrightarrow{[+1]}}$$

1.4 Faisceaux c -mous et résolutions c -molles

Étant donné un anneau \mathcal{A} , on note $\text{Fais}_{\mathcal{A}}(\mathbf{X})$ la catégorie des faisceaux de \mathcal{A} -modules.

1.4.1. Définition. Un faisceau \mathcal{F} est dit « flasque » (resp. « mou, c -mou ») lorsque le morphisme de restriction $\Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(\mathbf{S}; \mathcal{F})$ est surjectif pour toute partie $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{X}$ ouverte (resp. fermée, compacte). On a les implications :

$$\text{injectif} \implies \text{flasque} \implies \text{mou} \implies c\text{-mou}$$

1.4.2. Remarque. La classe de faisceaux injectifs (resp. flasques, mous, c -mous) est stable par somme directe finie et tout faisceau est sous-faisceau d'un faisceau injectif (cf. 1.1.18).

1.4.3. Proposition. Soient \mathbf{X} et \mathbf{Y} deux espaces et $\mathcal{M} \in \text{Fais}_{\mathcal{A}}(\mathbf{X})$.

- Le faisceau \mathcal{M} est c -mou, si et seulement si, pour tout fermé $\mathbf{F} \subseteq \mathbf{X}$, le morphisme de restriction $\Gamma_c(\mathbf{X}; \mathcal{M}) \rightarrow \Gamma_c(\mathbf{F}; \mathcal{M})$ est surjectif.
- Soit $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ une application continue. Si \mathcal{M} est c -mou, $f_! \mathcal{M}$ est c -mou.

Démonstration

- Nécessité.* Supposons \mathcal{M} c -mou sur \mathbf{X} . Pour toute $\sigma \in \Gamma_c(\mathbf{F}; \mathcal{M})$, il existe un voisinage ouvert \mathbf{U} de \mathbf{F} et une section $\tilde{\sigma} \in \Gamma(\mathbf{U}; \mathcal{M})$ telle que $\tilde{\sigma}|_{\mathbf{F}} = \sigma$. Soit \mathbf{V} un voisinage ouvert de $|\sigma|$ relativement compact dans \mathbf{X} et tel que $\overline{\mathbf{V}} \subseteq \mathbf{U}$. La partie $\mathbf{K} := \mathbf{V}^\# \cup (\mathbf{F} \cap \overline{\mathbf{V}})$ est compacte et il existe $\tau \in \Gamma(\mathbf{K}; \mathcal{M})$ vérifiant $\tau|_{\mathbf{V}^\#} = 0$ et $\tau|_{(\mathbf{F} \cap \overline{\mathbf{V}})} = \sigma|_{(\mathbf{F} \cap \overline{\mathbf{V}})}$. Comme \mathcal{M} est c -mou, τ est restriction d'une section $\tilde{\tau} \in \Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{M})$ qu'on peut supposer à support contenu dans \mathbf{V} puisque $\tau|_{\mathbf{V}^\#} = 0$. Par conséquent, $\tilde{\tau} \in \Gamma_c(\mathbf{X}; \mathcal{M})$ et $\tilde{\tau}|_{\mathbf{F}} = \sigma$.

Suffisance. Si \mathbf{F} est compact on a $\Gamma_c(\mathbf{F}; \mathcal{M}) = \Gamma(\mathbf{F}; \mathcal{M})$ et la surjectivité du morphisme $\Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{M}) \rightarrow \Gamma(\mathbf{F}; \mathcal{M})$ résulte de celle de $\Gamma_c(\mathbf{X}; \mathcal{M}) \rightarrow \Gamma_c(\mathbf{F}; \mathcal{M})$.

- b) Pour chaque compact $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{Y}$ et chaque $\sigma \in \Gamma(\mathbf{K}; f_! \mathcal{M})$ il existe un voisinage ouvert U de \mathbf{K} et $\tilde{\sigma} \in \Gamma(U; f_! \mathcal{M})$ vérifiant $\tilde{\sigma}|_{\mathbf{K}} = \sigma$. Par définition de $f_!$, on a

$$\begin{cases} \tilde{\sigma} \in \Gamma(f^{-1}U; \mathcal{M}), \text{ et} \\ f : |\tilde{\sigma}| \rightarrow U \text{ est propre.} \end{cases}$$

En particulier, $\tilde{\sigma} \in \Gamma_c(f^{-1}\mathbf{K}; \mathcal{M})$ et il existe une section $\tau \in \Gamma_c(\mathbf{X}; \mathcal{M})$ telle que $\tau|_{f^{-1}\mathbf{K}} = \tilde{\sigma}|_{f^{-1}\mathbf{K}}$ (d'après (a)). Comme $\Gamma_c(\mathbf{X}; \mathcal{M}) \subseteq \Gamma(\mathbf{Y}; f_! \mathcal{M})$, la section σ est bien l'image de τ par le morphisme de restriction $\Gamma(\mathbf{Y}; f_! \mathcal{M}) \rightarrow \Gamma(\mathbf{K}; f_! \mathcal{M})$. ■

1.4.4. Proposition. Dans les assertions suivantes $\mathbf{X} \xrightarrow{f} \mathbf{Y} \xrightarrow{g} \mathbf{Z}$ sont des applications continues, U est un ouvert quelconque de \mathbf{X} , et $\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{M} \xrightarrow{p} \mathcal{N} \xrightarrow{q} \mathcal{P} \rightarrow \mathbf{0}$ est une suite exacte courte de faisceaux de \mathcal{A} -modules sur \mathbf{X} .

- a) Si \mathcal{M} et \mathcal{N} sont c -mous, \mathcal{P} est c -mou.
b) Si \mathcal{M} est c -mou la suite $\mathbf{0} \rightarrow \Gamma_c(U; \mathcal{M}) \rightarrow \Gamma_c(U; \mathcal{N}) \rightarrow \Gamma_c(U; \mathcal{P}) \rightarrow \mathbf{0}$ est exacte.
c) Si \mathcal{M} est c -mou la suite de faisceaux $\mathbf{0} \rightarrow f_! \mathcal{M} \rightarrow f_! \mathcal{N} \rightarrow f_! \mathcal{P} \rightarrow \mathbf{0}$ est exacte.
d) Soit $\mathcal{F} \in \text{Fais}_{\mathcal{A}}(\mathbf{X})$. Pour chaque résolution de \mathcal{F} par des faisceaux c -mous :

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{M}^0 \xrightarrow{d_0} \mathcal{M}^1 \xrightarrow{d_1} \dots \xrightarrow{d_{i-1}} \mathcal{M}^i \xrightarrow{d_i} \dots$$

on a des isomorphismes canoniques pour chaque $m \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} H_c^m(U; \mathcal{M}) &\equiv h^m[\mathbf{0} \rightarrow \Gamma_c(U; \mathcal{M}^0) \rightarrow \Gamma_c(U; \mathcal{M}^1) \rightarrow \dots \rightarrow \Gamma_c(U; \mathcal{M}^i) \rightarrow \dots] \\ \mathbb{R}^m f_! \mathcal{M} &\equiv h^m[\mathbf{0} \rightarrow f_! \mathcal{M}^0 \rightarrow f_! \mathcal{M}^1 \rightarrow \dots \rightarrow f_! \mathcal{M}^i \rightarrow \dots] \end{aligned}$$

- e) On a $\mathbb{R}(g \circ f)_! = \mathbb{R}g_! \circ \mathbb{R}f_!$.
f) Si l'espace \mathbf{X} est en plus dénombrable à l'infini, les assertions (b,c,d) restent vraies après substitution de $\Gamma_c(U; -)$ par $\Gamma(U; -)$ et de $f_!$ par f_* .

Démonstration

- a) En supposant uniquement que \mathcal{M} est c -mou, l'application $q(\mathbf{K}) : \Gamma(\mathbf{K}; \mathcal{N}) \rightarrow \Gamma(\mathbf{K}; \mathcal{P})$ est surjective, quelle que soit la partie compacte $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{X}$.

En effet, soit $\sigma \in \Gamma(\mathbf{K}; \mathcal{P})$. Comme q est surjective et \mathbf{K} est compact, il existe une famille finie de parties compactes $\mathcal{K} := \{\mathbf{K}_1, \dots, \mathbf{K}_r\}$ recouvrant \mathbf{K} et, pour chaque i , une section $\tau_i \in \Gamma(\mathbf{K}_i; \mathcal{N})$ vérifiant $q(\tau_i) = \sigma|_{\mathbf{K}_i}$. On peut évidemment supposer que $\mathbf{K}_i \neq \mathbf{K}_j$ et $\mathbf{K}_i \cap \mathbf{K}_j \neq \emptyset$. Si $r > 1$, on a $\tau_1 - \tau_2 \in \Gamma(\mathbf{K}_1 \cap \mathbf{K}_2; \mathcal{M})$ et il existe $\nu \in \Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{M})$ tel que $\nu|_{\mathbf{K}_1 \cap \mathbf{K}_2} = \tau_1 - \tau_2$ puisque \mathcal{M} est c -mou. Les sections τ_1 et $\tau_2 - \nu|_{\mathbf{K}_2}$ définissent alors une section de \mathcal{N} au-dessus de $\mathbf{K}_1 \cup \mathbf{K}_2$ qui relève $\sigma|_{\mathbf{K}_1 \cup \mathbf{K}_2}$. L'itération de cette idée permet de réduire le cardinal r jusqu'à la valeur $r = 1$, CQFD.

Lorsque, en plus, \mathcal{N} est c -mou, il existe $\tilde{\tau} \in \Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{G})$ telle que $\tilde{\tau}|_{\mathbf{K}} = \tau$ et alors $q(\tilde{\tau})|_{\mathbf{K}} = q(\tilde{\tau}|_{\mathbf{K}}) = \sigma$. Le faisceau \mathcal{P} est alors bien c -mou.

- b) Comme la restriction d'un faisceau c -mou à un ouvert est un faisceau c -mou, il suffit de prouver l'assertion pour $U := \mathbf{X}$.

Étant donné $\sigma \in \Gamma_c(\mathbf{X}; \mathcal{P})$, on choisit deux compacts $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2 \subseteq \mathbf{X}$ tels que

$$|\sigma| \subseteq \mathbf{K}_1^\circ \subseteq \mathbf{K}_1 \subseteq \mathbf{K}_2^\circ \subseteq \mathbf{K}_2.$$

D'après la preuve de (a), il existe $\tau \in \Gamma(\mathbf{K}_2; \mathcal{N})$ tel que $q(\tau) = \sigma|_{\mathbf{K}_2}$. La restriction $\tau|_{\mathbf{K}_2 \setminus \mathbf{K}_1^\circ}$ appartient alors à $\Gamma(\mathbf{K}_2 \setminus \mathbf{K}_1^\circ; \mathcal{M})$ et comme \mathcal{M} est c -mou, il existe $\nu \in \Gamma(\mathbf{K}_2; \mathcal{M})$ vérifiant $\nu|_{\mathbf{K}_2 \setminus \mathbf{K}_1^\circ} = \tau|_{\mathbf{K}_2 \setminus \mathbf{K}_1^\circ}$. La différence $\tau' := \tau - \nu \in \Gamma(\mathbf{K}_2; \mathcal{N})$ est un relèvement de $\sigma|_{\mathbf{K}_2}$ dont la restriction à $\mathbf{K}_2^\circ \setminus \mathbf{K}_1$ est nulle par construction. Le prolongement par zéro de τ' appartient alors à $\Gamma_c(\mathbf{X}; \mathcal{N})$ et relève bien σ .

c) Il suffit de regarder la suite des germes en chaque point $y \in \mathbf{Y}$:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{0} & \longrightarrow & (f_! \mathcal{M})_y & \longrightarrow & (f_! \mathcal{N})_y & \longrightarrow & (f_! \mathcal{P})_y \longrightarrow \mathbf{0} \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ \mathbf{0} & \longrightarrow & \Gamma_c(f^{-1}y; \mathcal{M}) & \longrightarrow & \Gamma_c(f^{-1}y; \mathcal{N}) & \longrightarrow & \Gamma_c(f^{-1}y; \mathcal{P}) \longrightarrow \mathbf{0} \end{array}$$

Les égalités résultent de la proposition classique qui affirme que pour tout $y \in \mathbf{Y}$ et tout $\mathcal{F} \in \text{Fais}_{\mathcal{A}}(\mathbf{X})$, on a $(f_! \mathcal{F})_y = \Gamma_c(f^{-1}y; \mathcal{F}|_{f^{-1}y})$. On est ainsi ramené à (b) et l'exactitude de la suite de faisceaux en question en découle.

d) Comme tout faisceau injectif est c -mou, les assertions (a) et (c) prouvent qu'un faisceau c -mou sur \mathbf{X} est $f_!$ -acyclique.

e) Pour $\mathcal{F} \in \text{Fais}_{\mathcal{A}}(\mathbf{X})$, on a $\mathbb{R}(g \circ f)_! \mathcal{F} = (g \circ f)_! \mathcal{M}^\bullet = g_!(f_! \mathcal{M}^\bullet)$ pour toute résolution c -molle $\mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{M}^\bullet$ (d'après (d)). Or, $f_! \mathcal{M}^\bullet$ est un complexe de faisceaux c -mous sur \mathbf{Y} (1.4.3-(b)), donc $g_!$ -acycliques. Par conséquent,

$$g_!(f_! \mathcal{M}^\bullet) = \mathbb{R}g_!(f_! \mathcal{M}^\bullet) = \mathbb{R}g_!(\mathbb{R}f_! \mathcal{F}).$$

f) On réalise \mathbf{X} comme réunion d'une famille croissante et dénombrable de compacts $\mathcal{K} := \{\mathbf{K}_0 \subseteq \mathbf{K}_1 \subseteq \dots\}$ tels que $\mathbf{K}_i \subseteq \mathbf{K}_{i+1}^\circ$. Soit $\sigma \in \Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{P})$.

En appliquant les mêmes idées de la preuve de (a), les morphismes $\Gamma(\mathbf{K}_i; \mathcal{N}) \rightarrow \Gamma(\mathbf{K}_i; \mathcal{P})$ sont surjectifs, et on construit, par récurrence sur i , une suite $(\tau_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de sections vérifiant

$$\tau_i \in \Gamma(\mathbf{K}_i; \mathcal{N}), \quad \tau_{i+1}|_{\mathbf{K}_i} = \tau_i, \quad q(\tau_i) = \sigma|_{\mathbf{K}_i}.$$

La suite $(\tau_i|_{\mathbf{K}_i^\circ})_{i \in \mathbb{N}}$ vérifie alors les conditions de recollement de sections d'un faisceau et définit par conséquent une section $\tau \in \Gamma(\mathbf{X}; \mathcal{N})$ qui relève σ . Ceci prouve l'assertion (b) pour le foncteur $\Gamma(\mathbf{X}; _)$ à la place de $\Gamma_c(\mathbf{X}; _)$.

L'exactitude de la suite $\mathbf{0} \rightarrow f_* \mathcal{M} \rightarrow f_* \mathcal{N} \rightarrow f_* \mathcal{P} \rightarrow \mathbf{0}$ résulte également d'étudier la suite des germes $\mathbf{0} \rightarrow (f_* \mathcal{M})_y \rightarrow (f_* \mathcal{N})_y \rightarrow (f_* \mathcal{P})_y \rightarrow \mathbf{0}$ pour tout $y \in \mathbf{Y}$, ce qui découle de l'exactitude des suites

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{0} & \longrightarrow & \Gamma(\mathbf{U}; f_* \mathcal{M}) & \longrightarrow & \Gamma(\mathbf{U}; f_* \mathcal{N}) & \longrightarrow & \Gamma(\mathbf{U}; f_* \mathcal{P}) \longrightarrow \mathbf{0} \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ \mathbf{0} & \longrightarrow & \Gamma(f^{-1}\mathbf{U}; \mathcal{M}) & \longrightarrow & \Gamma(f^{-1}\mathbf{U}; \mathcal{N}) & \longrightarrow & \Gamma(f^{-1}\mathbf{U}; \mathcal{P}) \longrightarrow \mathbf{0} \end{array}$$

pour tout ouvert $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{Y}$, ce qui a déjà été prouvé.

A partir de là, le fait qu'un faisceau c -mou est $\Gamma(\mathbf{X}; -)$ et f_* -acyclique résulte de la même manière que dans la preuve de (c). ■

1.4.5. Exercice

a) On a $\mathbb{R}\Gamma_c(\mathbf{U}; \mathcal{G}) \equiv \mathbb{R}\Gamma_c(\mathbf{X}; i_{\mathbf{U}!} \mathcal{G})$, pour tout ouvert $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{X}$, et tout $\mathcal{G} \in \text{Fais}_{\mathcal{A}}(\mathbf{U})$.

Lorsque l'espace \mathbf{X} dénombrable à l'infini.

b) On a $H_c^*(\mathbf{U}; \mathcal{G}) \equiv H^*(\mathbf{X}; i_{\mathbf{U}!} \mathcal{G})$, pour tout ouvert \mathbf{U} relativement compact dans \mathbf{X} , et tout $\mathcal{G} \in \text{Fais}_{\mathcal{A}}(\mathbf{U})$.

c) $\mathcal{F} \in \text{Fais}_{\mathcal{A}}(\mathbf{X})$ est c -mou, si et seulement si, \mathcal{F} est mou.

1.4.6. Exercice. Justifier les affirmations du paragraphe 1.3.2.

1.4.7. Exemple. Sur une variété différentielle \mathbf{X} , le complexe des faisceaux des formes différentielles réelles $\underline{\Omega}_{\mathbf{X}/\mathbb{R}}^\bullet$ est une résolution du faisceau constant $\underline{\mathbb{R}}_{\mathbf{X}}$ d'après le lemme de Poincaré local. L'existence de partitions de l'unité sur \mathbf{X} implique alors que chaque faisceau $\underline{\Omega}_{\mathbf{X}}^i$ est c -mou, et l'on a des isomorphismes canoniques :

$$H_{\text{DR}}^*(\mathbf{X}) \equiv H^*(\mathbf{X}; \underline{\mathbb{R}}_{\mathbf{X}}) \quad \text{et} \quad H_{\text{DR},c}^*(\mathbf{X}) \equiv H_c^*(\mathbf{X}; \underline{\mathbb{R}}_{\mathbf{X}})$$

Ceci prouve que la cohomologie de de Rham est un invariant topologique de \mathbf{X} , autrement dit, indépendant de la structure différentiable dont \mathbf{X} est munie.

1.4.8. Proposition. Soit $\mathcal{M} \in \text{Fais}_{\mathcal{A}}(\mathbf{X})$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

a) \mathcal{M} est un faisceau c -mou.

b) Pour tout ouvert $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{X}$, le faisceau $\mathcal{M}|_{\mathbf{U}}$ est c -mou.

c) Il existe un recouvrement ouvert $\mathbf{X} := \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathbf{U}_\alpha$ tel que les faisceaux $\mathcal{M}|_{\mathbf{U}_\alpha}$ sont c -mous.

d) Pour tout ouvert $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{X}$, on a $H_c^1(\mathbf{U}; \mathcal{M}) = 0$.

e) Il existe un recouvrement ouvert $\mathbf{X} := \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathbf{U}_\alpha$ tel que, pour chaque $\alpha \in \mathfrak{A}$ et tout ouvert $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{U}_\alpha$, on ait $H_c^1(\mathbf{V}; \mathcal{M}) = 0$.

Démonstration. Les implications (a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) sont évidentes et (a) \Rightarrow (d) \wedge (e) résulte de la proposition précédente.

Pour tout compact \mathbf{K} d'un ouvert $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{X}$, la suite longue de cohomologie à supports compacts associée au triangle exact $\Delta(\mathbf{V} \setminus \mathbf{K}, \mathbf{V}, \mathbf{K}; \mathcal{M})$ commence par :

$$0 \rightarrow \Gamma_c(\mathbf{V} \setminus \mathbf{K}; \mathcal{M}) \longrightarrow \Gamma_c(\mathbf{V}; \mathcal{M}) \xrightarrow{\beta} \Gamma(\mathbf{K}; \mathcal{M}) \longrightarrow H_c^1(\mathbf{V} \setminus \mathbf{K}; \mathcal{M}) \longrightarrow \dots$$

En particulier, si $H_c^1(\mathbf{V} \setminus \mathbf{K}; \mathcal{M}) = 0$, le morphisme β est surjectif et comme $\Gamma_c(\mathbf{V}; \mathcal{M}) \subseteq \Gamma(\mathbf{V}; \mathcal{M})$, le morphisme de restriction $\Gamma(\mathbf{V}; \mathcal{M}) \rightarrow \Gamma(\mathbf{K}; \mathcal{M})$ est, lui aussi, surjectif. On en déduit les équivalences (d) \Leftrightarrow (a) et (e) \Leftrightarrow (c). La proposition résultera maintenant de prouver l'implication (c) \Rightarrow (d).

La famille \mathcal{U} des ouverts $\mathbf{W} \subseteq \mathbf{U}$ pour lesquels $H_c^1(\mathbf{W}; \mathcal{M}) = 0$ est non vide (on a toujours $\emptyset \in \mathcal{U}$), et munie de l'ordre d'inclusion ' \subseteq ' c'est une famille inductive. En effet, si $\{\mathbf{U}_i\}_i \subseteq \mathcal{U}$ est totalement ordonné de réunion \mathbf{W} , on a $\Gamma_c(\mathbf{W}; -) = \varinjlim_i \Gamma_c(\mathbf{U}_i; -)$ auquel cas $H_c^1(\mathbf{W}; \mathcal{M}) = \varinjlim H_c^1(\mathbf{U}_i; \mathcal{M}) = 0$. Soit $\mathbf{U}_0 \in \mathcal{U}$ maximal (Zorn) et supposons $\mathbf{U}_0 \neq \mathbf{U}$. Si (e) est vérifiée, il existe $\alpha \in \mathfrak{A}$ tel que $\mathbf{V} := \mathbf{U}_\alpha \cap \mathbf{U} \not\subseteq \mathbf{U}_0$ et $\mathbf{V} \in \mathcal{U}$. Par Mayer-Vietoris à supports compacts, on a

$$\begin{array}{ccccccc} \rightarrow H_c^1(\mathbf{V} \cap \mathbf{U}_0; \mathcal{M}) & \rightarrow & H_c^1(\mathbf{V}; \mathcal{M}) \oplus H_c^1(\mathbf{U}_0; \mathcal{M}) & \rightarrow & H_c^1(\mathbf{V} \cup \mathbf{U}_0; \mathcal{M}) & \rightarrow & H_c^2(\mathbf{V} \cap \mathbf{U}_0; \mathcal{M}) \rightarrow \\ & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

puisque $\mathcal{M}|_{\mathbf{V}}$ est c -mou. Il s'ensuit que $\mathbf{V} \cup \mathbf{U}_0 \in \mathcal{U}$, mais ceci contredit la maximalité de \mathbf{U}_0 . Par conséquent, $\mathbf{U}_0 = \mathbf{U}$ et (d) est prouvée. ■

1.4.9. Exercice. Montrer que la propriété d'être c -mou est locale, autrement dit, prouver que $\mathcal{F} \in \text{Fais}_{\mathcal{A}}(\mathbf{X})$ est c -mou, si et seulement si, $\mathcal{F}|_{\mathbf{U}_\alpha}$ est c -mou pour tout ouvert \mathbf{U}_α de tout (resp. d'un) recouvrement ouvert $\mathbf{X} = \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathbf{U}_\alpha$.

1.5 Dimension cohomologique

Un espace topologique \mathbf{X} est dit de « dimension cohomologique finie (sur un anneau \mathcal{A}) » lorsqu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$H^m(\mathbf{X}; \mathcal{F}) = 0, \text{ pour tout faisceau de } \mathcal{A}\text{-modules } \mathcal{F} \text{ et tout } m > N. \quad (*)$$

Dans ce cas, la « dimension cohomologique de \mathbf{X} (sur \mathcal{A}) », notée $\dim_{\text{ch}}(\mathbf{X}/\mathcal{A})$, est le plus petit des $N \in \mathbb{N}$ vérifiant (*).

1.5.1. Proposition. On suppose l'espace \mathbf{X} dénombrable à l'infini.

a) Les assertions suivantes sont équivalentes

i) $\dim_{\text{ch}}(\mathbf{X}/\mathcal{A}) \leq n$.

ii) Pour tout $\mathcal{F} \in \text{Fais}_{\mathcal{A}}(\mathbf{X})$ et toute résolution c -molle (en particulier : injective, flasque, molle)

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{M}^0 \xrightarrow{d_0} \mathcal{M}^1 \xrightarrow{d_1} \dots \xrightarrow{d_{n-1}} \mathcal{M}^n \xrightarrow{d_n} 0 \longrightarrow \dots$$

le faisceau $\ker(d_n)$ est c -mou. En particulier, tout faisceau admet une résolution c -molle de longueur majorée par n .

b) Pour toute partie localement fermée $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{X}$, on a $\dim_{\text{ch}}(\mathbf{S}/\mathcal{A}) \leq \dim_{\text{ch}}(\mathbf{X}/\mathcal{A})$.

c) $\mathbb{R}^m f_! \mathcal{F} = 0$, pour tous $m > \dim_{\text{ch}}(\mathbf{X}/\mathcal{A})$, $\mathcal{F} \in \text{Fais}_{\mathcal{A}}(\mathbf{X})$ et $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ continue.

d) $H_c^m(\mathbf{X}; \mathcal{F}) = 0$, pour tous $m > \dim_{\text{ch}}(\mathbf{X}/\mathcal{A})$ et $\mathcal{F} \in \text{Fais}_{\mathcal{A}}(\mathbf{X})$.

e) Soit $\mathbf{X} = \mathbf{U} \amalg \mathbf{F}$ une partition de \mathbf{X} en réunion d'un ouvert \mathbf{U} et de son fermé complémentaire \mathbf{F} . Alors, $\dim_{\text{ch}}(\mathbf{X}/\mathcal{A}) = \sup\{\dim_{\text{ch}}(\mathbf{U}/\mathcal{A}), \dim_{\text{ch}}(\mathbf{F}/\mathcal{A})\}$.

Démonstration

- a) L'implication (a-ii) \Rightarrow (a-i) résulte de 1.4.4-(f). Réciproquement, pour tout $\mathcal{F} \in \text{Fais}_{\mathcal{A}}(\mathbf{X})$ et chaque une résolution c -molle $\varepsilon : \mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{M}^\bullet$, on a la suite exacte

$$\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{M}^0 \xrightarrow{d_0} \mathcal{M}^1 \xrightarrow{d_1} \dots \xrightarrow{d_{n-1}} \underline{\ker}(d_n) \rightarrow \mathbf{0} \quad (\diamond)$$

donnant des isomorphismes canoniques

$$H_c^r(\mathbf{V}; \underline{\ker}(d_n)) \cong H_c^{n+r}(\mathbf{V}; \mathcal{F})$$

pour tout $r > 0$ et tout ouvert $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{X}$. Or, $H_c^{n+r}(\mathbf{V}; \mathcal{F}) = H^{n+r}(\mathbf{X}; i_{\mathbf{V}!} \mathcal{F})$ pour tout \mathbf{V} relativement compact dans \mathbf{X} (1.4.5); par conséquent, si $\dim_{\text{ch}}(\mathbf{X}/\mathcal{A}) \leq n$, on a

$$H_c^r(\mathbf{V}; \underline{\ker}(d_n)) = 0, \text{ pour tout } r > 0,$$

quel que soit l'ouvert \mathbf{V} relativement compact dans \mathbf{X} . Comme les ouverts relativement compacts recouvrent \mathbf{X} , le faisceau $\underline{\ker}(d_n)$ est c -mou d'après 1.4.8 et (\diamond) est une résolution c -molle de longueur majorée par n .

- b) On a $H^*(\mathbf{Z}; \mathcal{F}) = H^*(\mathbf{X}; i_{\mathbf{Z}*} \mathcal{F})$, pour tout plongement fermé $i_{\mathbf{Z}} : \mathbf{Z} \hookrightarrow \mathbf{X}$ et tout $\mathcal{F} \in \text{Fais}_{\mathcal{A}}(\mathbf{Z})$. L'assertion (b) est donc vérifiée pour \mathbf{S} fermé dans \mathbf{X} .

Pour tout plongement ouvert $i_{\mathbf{U}} : \mathbf{U} \hookrightarrow \mathbf{X}$ et tout $\mathcal{G} \in \text{Fais}_{\mathcal{A}}(\mathbf{U})$, le faisceau $i_{\mathbf{U}*} \mathcal{G}$ admet une résolution c -molle $\varepsilon : i_{\mathbf{U}*} \mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{M}^\bullet$ de longueur majorée par $\dim_{\text{ch}}(\mathbf{X}/\mathcal{A})$. La restriction $\varepsilon|_{\mathbf{U}} : \mathcal{G} \hookrightarrow \mathcal{M}^\bullet|_{\mathbf{U}}$ est clairement une résolution c -molle de \mathcal{G} de longueur majorée par $\dim_{\text{ch}}(\mathbf{X}/\mathcal{A})$. Comme \mathbf{U} est dénombrable à l'infini, on a donc (1.4.4-(f)) :

$$\dim_{\text{ch}}(\mathbf{U}/\mathcal{A}) \leq \dim_{\text{ch}}(\mathbf{X}/\mathcal{A}).$$

c,d) Conséquence immédiate de (a-ii) et 1.4.4-(d).

- e) Soit $n > \sup\{\dim_{\text{ch}}(\mathbf{U}/\mathcal{A}), \dim_{\text{ch}}(\mathbf{F}/\mathcal{A})\}$. Pour tout $\mathcal{F} \in \text{Fais}_{\mathcal{A}}(\mathbf{X})$ la suite longue de cohomologie associée à la suite exacte courte $\mathbf{0} \rightarrow i_{\mathbf{U}!}(\mathcal{F}|_{\mathbf{U}}) \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow i_{\mathbf{F}!}(\mathcal{F}|_{\mathbf{F}}) \rightarrow \mathbf{0}$ donne l'encadrement :

$$H^n(\mathbf{X}; i_{\mathbf{U}!}(\mathcal{F}|_{\mathbf{U}})) \longrightarrow H^n(\mathbf{X}; \mathcal{F}) \longrightarrow H^n(\mathbf{X}; i_{\mathbf{F}!}(\mathcal{F}|_{\mathbf{F}}))$$

où $H^n(\mathbf{X}; i_{\mathbf{F}!}(\mathcal{F}|_{\mathbf{F}})) = H^n(\mathbf{F}; \mathcal{F}|_{\mathbf{F}}) = 0$. Le faisceau $\mathcal{F}|_{\mathbf{U}}$ admet une résolution c -molle $\varepsilon : \mathcal{F}|_{\mathbf{U}} \hookrightarrow \mathcal{M}^\bullet$ de longueur majorée par $\dim_{\text{ch}}(\mathbf{U}/\mathcal{A}) < n$ et le foncteur $i_{\mathbf{U}!}$ est exact et transforme c -mou en c -mou (1.4.3-(b)), il s'ensuit que $i_{\mathbf{U}!}(\varepsilon) : i_{\mathbf{U}!} \mathcal{F}|_{\mathbf{U}} \hookrightarrow i_{\mathbf{U}!} \mathcal{M}^\bullet$ est une résolution c -molle de $i_{\mathbf{U}!} \mathcal{F}|_{\mathbf{U}}$ de longueur strictement majorée par n . Par (a), $H^n(\mathbf{X}; i_{\mathbf{U}!}(\mathcal{F}|_{\mathbf{U}})) = 0$ et alors $H^n(\mathbf{X}; \mathcal{F}) = 0$. ■

1.5.2. Exercice. On suppose l'espace \mathbf{X} dénombrable à l'infini.

- a) Montrer que $\dim_{\text{ch}}(\mathbf{X}/\mathcal{A}) = \sup\{\dim_{\text{ch}}(\mathbf{S})\}_{\mathbf{S}}$, où \mathbf{S} parcourt la famille des parties localement fermées (resp. ouvertes, fermées) de \mathbf{X} .
- b) $\dim_{\text{ch}}(\mathbf{X}/\mathcal{A}) = \sup_i \{\dim_{\text{ch}}(\mathbf{S}_i/\mathcal{A})\}$, pour tout recouvrement fini $\mathbf{X} = \bigcup_{i=1}^r \mathbf{S}_i$ par des parties localement fermées dans \mathbf{X} .

- c) $\dim_{\text{ch}}(\mathbf{X}/\mathcal{A}) = \sup_{\alpha \in \mathfrak{A}} \{\dim_{\text{ch}}(\mathbf{U}_\alpha/\mathcal{A})\}$, pour tout recouvrement ouvert $\mathbf{X} = \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathbf{U}_\alpha$.
d) Soit $\{\mathbf{S}_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ une famille de parties localement fermées de \mathbf{X} telle que $\mathbf{X} = \bigcup_{\alpha} \mathbf{S}_\alpha^\circ$, où \mathbf{S}° désigne l'intérieur de \mathbf{S} dans \mathbf{X} . Alors

$$\dim_{\text{ch}}(\mathbf{X}/\mathcal{A}) = \sup\{\dim_{\text{ch}}(\mathbf{S}_\alpha/\mathcal{A})\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}.$$

En particulier, si \mathbf{X}_1 et \mathbf{X}_2 sont des espaces dénombrables à l'infini,

$$\dim_{\text{ch}}(\mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_2/\mathcal{A}) = \sup\{\dim_{\text{ch}}(\mathbf{K}_1 \times \mathbf{K}_2/\mathcal{A})\}_{(\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2)}$$

où \mathbf{K}_i parcourt la famille des parties compactes de \mathbf{X}_i .

1.5.3. Exercice

- a) Soit \mathbf{X} un espace dénombrable à l'infini admettant un plongement localement fermé $f: \mathbf{X} \hookrightarrow \mathbf{X}$. Alors, pour tout \mathbf{S} localement fermé dans \mathbf{X} vérifiant $\text{im}(f) \subseteq \mathbf{S}$, on a $\dim_{\text{ch}}(\mathbf{S}/\mathcal{A}) = \dim_{\text{ch}}(\mathbf{X}/\mathcal{A})$.
b) $\dim_{\text{ch}}(\mathbf{S}/\mathcal{A}) = \dim_{\text{ch}}(\mathbb{R}^n/\mathcal{A})$, pour tout $\mathbf{S} \subseteq \mathbb{R}^n$ localement fermée d'intérieur non vide. En particulier, $\dim_{\text{ch}}([0, 1]^n/\mathcal{A}) = \dim_{\text{ch}}(\mathbb{R}^n/\mathcal{A})$.

1.5.4. Exercice. Soit \mathcal{P} un faisceau **projectif** de \mathcal{A} -modules sur un espace dénombrable à l'infini et localement connexe \mathbf{X} .

- a) Prouver que pour toute partie fermée $\mathbf{F} \subseteq \mathbf{X}$, la restriction de $\mathcal{P}|_{\mathbf{F}}$ est un faisceau projectif de $\text{Fais}_{\mathcal{A}}(\mathbf{F})$.
b) En remarquant qu'il existe une surjection $\bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathcal{A}_{U_\alpha} \xrightarrow{\pi} \mathcal{P}$ (cf. 3.4.6-(e)), le faisceau \mathcal{P} est facteur direct de $\bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathcal{A}_{U_\alpha}$. Montrer alors que l'ensemble $|\mathcal{P}|$ des $x \in \mathbf{X}$ tels que $\mathcal{P}_x \neq 0$ est une partie ouverte dans \mathbf{X} telle que chaque $x \in |\mathcal{P}|$ admet une base de voisinages fermés \mathbf{V} sur lesquels le faisceau constant $\mathcal{A}_{\mathbf{V}}$ est projectif dans $\text{Fais}_{\mathcal{A}}(\mathbf{V})$.
c) À l'aide de l'isomorphisme $\text{Hom}(\mathcal{A}_{\mathbf{V}}, -) \cong \Gamma(\mathbf{V}; -)$, montrer que $\dim_{\text{ch}}(\mathbf{V}/\mathcal{A}) = 0$.
d) En déduire que $|\mathcal{P}|$ est ouvert de dimension cohomologique nulle sur \mathcal{A} .
e) Conclure que $\text{Fais}_{\mathcal{A}}(\mathbf{X})$ admet un faisceau projectif non nul, si et seulement si, \mathbf{X} contient un ouvert de dimension cohomologique nulle sur \mathcal{A} .
f) Montrer à l'aide du théorème 1.6.5 que \mathbb{R}^n n'a pas de faisceau projectif non nul si $n \geq 1$.

Le théorème suivant est le point de départ de la plupart des théorèmes de dimension cohomologique et d'homotopie pour les espaces topologiques que nous allons considérer.

1.5.5. Théorème. Soient \mathbf{I} un intervalle réel et \mathcal{A} un anneau.

- a) On a :

$$\begin{cases} \dim_{\text{ch}}(\mathbf{I}/\mathcal{A}) = 0, & \text{si } \mathbf{I} \text{ est un singleton,} \\ \dim_{\text{ch}}(\mathbf{I}/\mathcal{A}) = 1, & \text{autrement.} \end{cases}$$

b) Soit $\mathcal{F} \in \text{Fais}_{\mathcal{A}}(\mathbf{I})$ tel que l'ensemble des $x \in \mathbf{I}$ pour lesquels le morphisme de restriction $\Gamma(\mathbf{I}; \mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{F}_x$ est surjectif est partout dense dans \mathbf{I} ; alors

$$H^m(\mathbf{I}; \mathcal{F}) = 0, \text{ pour tout } m \geq 1.$$

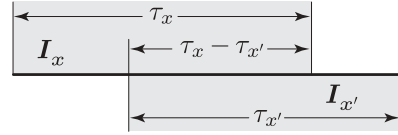
En particulier, $H^m(\mathbf{I}; \underline{\mathbf{M}}_{\mathbf{I}}) = 0$ pour tout \mathcal{A} -module M et tout $m \geq 1$.

Démonstration. Soit \mathcal{F} un faisceau de \mathcal{A} -modules et

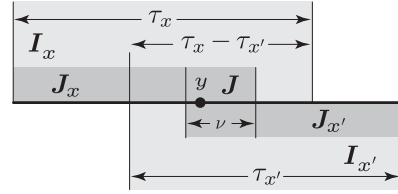
$$0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{G}^0 \xrightarrow{d_0} \mathcal{G}^1 \xrightarrow{d_1} \dots \xrightarrow{d_{\ell-3}} \mathcal{G}^{\ell-2} \xrightarrow{d_{\ell-2}} \mathcal{G}^{\ell-1} \xrightarrow{d_{\ell-1}} \mathcal{G}^{\ell} \xrightarrow{d_{\ell}} \dots$$

une résolution de \mathcal{F} par des faisceaux flasques. Supposons $\ell \geq 2$ et donnons-nous une section globale $\sigma \in \Gamma(\mathbf{I}; \mathcal{G}^{\ell})$ vérifiant $d_{\ell}(\sigma) = 0$. Chaque $x \in \mathbf{I}$ admet un voisinage \mathbf{I}_x ouvert connexe dans \mathbf{I} sur lequel il existe une section $\tau_x \in \Gamma(\mathbf{I}_x; \mathcal{G}^{\ell-1})$ telle que $d_{\ell-1}(\tau_x) = \sigma|_{\mathbf{I}_x}$. La famille d'intervalles $\{\mathbf{I}_x\}_{x \in \mathbf{I}}$ est un recouvrement ouvert de \mathbf{I} .

Lorsque $\mathbf{I}_x \cap \mathbf{I}_{x'} = \emptyset$ ou bien $\mathbf{I}_x \subseteq \mathbf{I}_{x'}$, l'existence de $\tau \in \Gamma(\mathbf{I}_x \cup \mathbf{I}_{x'}; \mathcal{G}^{\ell-1})$ vérifiant $\tau|_{\mathbf{I}_x} = \tau_x$, $\tau|_{\mathbf{I}_{x'}} = \tau_{x'}$ et $d_{\ell-1}(\tau) = \sigma|_{\mathbf{I}_x \cup \mathbf{I}_{x'}}$ est claire. Dans le cas contraire on est dans la situation de l'illustration avec $d_{\ell-1}(\tau_x - \tau_{x'}) = 0$ sur $\mathbf{I}_x \cap \mathbf{I}_{x'}$.



Un élément $y \in \mathbf{I}_x \cap \mathbf{I}_{x'}$ appartient alors à un intervalle ouvert $\mathbf{J} \subseteq \mathbf{I}_x \cap \mathbf{I}_{x'}$ sur lequel $d_{\ell-2}(\nu) = (\tau_x - \tau_{x'})|_{\mathbf{J}}$ pour un certain $\nu \in \Gamma(\mathbf{J}; \mathcal{G}^{\ell-2})$. Notons \mathbf{J}_x (resp. $\mathbf{J}_{x'}$) le sous-ensemble de $\mathbf{I}_x \cap \mathbf{I}_{x'}$ des éléments majorés (resp. minorés) par un élément de \mathbf{J} . On a clairement $\mathbf{I}_x \cup \mathbf{I}_{x'} = \mathbf{J}_x \cup \mathbf{J}_{x'}$ et $\mathbf{J} = \mathbf{J}_x \cap \mathbf{J}_{x'}$. Comme $\mathcal{G}^{\ell-2}$ est un faisceau flasque, ν est la restriction à \mathbf{J} d'une section $\tilde{\nu} \in \Gamma(\mathbf{J}_{x'}; \mathcal{G}^{\ell-2})$. Les éléments $\tau_x|_{\mathbf{J}_x}$ et $\tau_{x'}|_{\mathbf{J}_{x'}} + d_{\ell-2}(\tilde{\nu})$, respectivement dans $\Gamma(\mathbf{J}_x; \mathcal{G}^{\ell-1})$ et $\Gamma(\mathbf{J}_{x'}; \mathcal{G}^{\ell-1})$, se recollent alors en une section de $\Gamma(\mathbf{I}_x \cup \mathbf{I}_{x'}; \mathcal{G}^{\ell-1})$ qui relève $\sigma|_{(\mathbf{I}_x \cup \mathbf{I}_{x'})}$.



Lorsque \mathbf{I} est compact, l'intervalle \mathbf{I} est recouvert par une famille finie d'intervalles \mathbf{I}_x , et le procédé de recollement successif donne après un nombre fini d'étapes une section $\tau \in \Gamma(\mathbf{I}; \mathcal{G}^{\ell-1})$ vérifiant $d_{\ell-1}(\tau) = \sigma$. Par conséquent :

$$\text{si } \mathbf{I} \text{ est compact, } H^{\ell}(\mathbf{I}; \mathcal{F}) = 0 \text{ pour tout } \ell \geq 2, \quad (*)$$

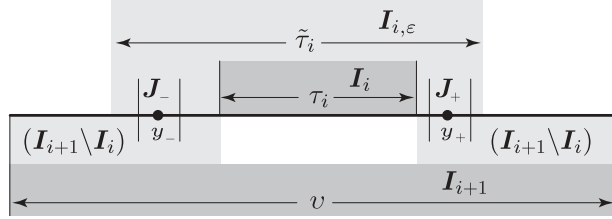
auquel cas $\dim_{\text{ch}}(\mathbf{I}/\mathcal{A}) \leq 1$.

Lorsque \mathbf{I} n'est pas compact on le réalise comme réunion croissante dénombrable de sous-intervalles compacts $\mathbf{I}_0 \subseteq \mathbf{I}_1 \subseteq \dots \subseteq \mathbf{I}_n \subseteq \dots$, tels que \mathbf{I}_i est contenu dans l'intérieur de \mathbf{I}_{i+1} . En reprenant les données du premier paragraphe et compte tenue du résultat déjà démontré (*), nous construirons une famille de sections $\{\tau_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ vérifiant

$$\tau_i \in \Gamma(\mathbf{I}_i; \mathcal{G}^{\ell-1}), \quad d_{\ell-1}(\tau_i) = \sigma|_{\mathbf{I}_i}, \quad \tau_{i+1}|_{\mathbf{I}_i} = \tau_i. \quad (\diamond)$$

Les sections τ_i se recollent alors en une section globale τ qui relève σ . Par conséquent, $\dim_{\text{ch}}(\mathbf{I}/\mathcal{A}) \leq 1$ quel que soit l'intervalle réel \mathbf{I} .

La définition de $\{\tau_i\}$ est récursive: La section τ_0 est un relèvement arbitrairement choisi de $\sigma|_{I_0}$ (garanti par (*)). Supposons avoir défini $\{\tau_0, \dots, \tau_i\}$ vérifiant (\diamond) . La section τ_i est la restriction d'une section $\tilde{\tau}_i \in \Gamma(I_{i,\varepsilon}; \mathcal{G}^{\ell-1})$ vérifiant $d_{\ell-1}(\tilde{\tau}_i) = \sigma|_{I_{i,\varepsilon}}$, où $I_{i,\varepsilon}$ est un voisinage ouvert connexe de I_i contenu dans I_{i+1} . Par (*), il existe $v \in \Gamma(I_{i+1}; \mathcal{G}^{\ell-1})$ vérifiant $d_{\ell-1}(v) = \sigma|_{I_{i+1}}$. On applique alors la procédure de recollement expliquée plus haut à la décomposition $I_{i+1} = I_{i,\varepsilon} \cup (I_{i+1} \setminus I_i)$ et aux sections $\tilde{\tau}_i$ et $v|_{(I_{i+1} \setminus I_i)}$ en choisissant des intervalles J_+ et J_- assez petits pour ne pas perturber τ_i . Un recollement ainsi construit, noté τ_{i+1} , vérifie les conditions (\diamond) , CQFD.



Les raisonnements précédents utilisent uniquement le fait que le faisceau $\mathcal{G}^{\ell-2}$ est tel que les restrictions $\Gamma(\mathbf{I}; \mathcal{G}^{\ell-2}) \rightarrow \mathcal{G}_x^{\ell-2}$ sont surjectives, quels que soit $x \in \mathbf{I}$, ils s'appliqueront par conséquent au cas $\ell = 1$ lorsque le faisceau \mathcal{F} satisfait cette condition, d'où l'assertion (b) du théorème.

Pour terminer, on a clairement $\dim_{\text{ch}}(\{\bullet\}/\mathcal{A}) = 0$ et lorsque \mathbf{I} n'est pas réduit à un point, on choisit deux points distincts $x_0, x_1 \in \mathbf{I}$, on pose $\mathbf{Z} := \{x_0, x_1\}$ et $\mathbf{U} = \mathbf{I} \setminus \mathbf{Z}$, et l'on considère la suite longue de cohomologie associée à la suite exacte courte de faisceaux $\Delta(\mathbf{U}, \mathbf{I}, \mathbf{Z}; \underline{\mathcal{A}}_{\mathbf{I}})$ dont les premiers termes sont :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow & H^0(\mathbf{I}; i_{\mathbf{U}!} \underline{\mathcal{A}}_{\mathbf{U}}) & \rightarrow & H^0(\mathbf{I}; \underline{\mathcal{A}}_{\mathbf{I}}) & \rightarrow & H^0(\mathbf{Z}; i_{\mathbf{Z}*} \underline{\mathcal{A}}_{\mathbf{Z}}) & \rightarrow & H^1(\mathbf{I}; i_{\mathbf{U}!} \underline{\mathcal{A}}_{\mathbf{U}}) & \rightarrow & H^1(\mathbf{I}; \underline{\mathcal{A}}_{\mathbf{I}}) & \rightarrow \\ & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel & \\ & \mathbf{0} & & \mathcal{A} & & \mathcal{A}^2 & & \mathbf{0} & & & \end{array}$$

donc $H^1(\mathbf{I}; i_{\mathbf{U}!} \underline{\mathcal{A}}_{\mathbf{U}}) \cong \mathcal{A}$ et alors $\dim_{\text{ch}}(\mathbf{I}/\mathcal{A}) = 1$. ■

1.5.6. Remarque et exercice. Dans cette démonstration, l'égalité $\dim_{\text{ch}}([0, 1]/\mathcal{A}) = 1$ implique immédiatement que $\dim_{\text{ch}}(\mathbf{I}/\mathcal{A}) = 1$ pour tout $\mathbf{I} \neq \{\bullet\}$ moyennant 1.5.3-(b). Les détails supplémentaires de la démonstration concernent uniquement l'acyclicité des faisceaux constants sur \mathbf{I} lorsque \mathbf{I} n'est pas compact. C'est un résultat que l'on peut obtenir facilement du théorème homotopie de la section suivante (1.6.2-(b)) dont la démonstration utilise uniquement le cas $\mathbf{I} = [0, 1]$ du théorème 1.5.5.

1.6 Premiers théorèmes d'homotopie

Soit $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ une application continue entre deux espaces topologiques. Pour tout $\mathcal{F}^\bullet \in D_k^+(\mathbf{Y})$ on dispose du morphisme d'adjonction $\mathcal{F}^\bullet \rightarrow Rf_* f^{-1} \mathcal{F}^\bullet$ et des morphismes entre objets dérivés :

$$H^m(f) : H^m(\mathbf{Y}, \mathcal{F}^\bullet) \longrightarrow H^m(\mathbf{X}, f^{-1} \mathcal{F}^\bullet)$$

pour tout $m \in \mathbb{Z}$. Les théorèmes d'homotopie étudient la manière dont $H^*(f)$ dépend de la classe d'homotopie de f . Le cas le plus simple concerne la situation où \mathcal{F}^\bullet est quasi-

isomorphe à un faisceau localement constant de k -espaces vectoriels sur \mathbf{Y} placé en degré 0, ce que nous allons noter \mathcal{L} .

Notons \mathbf{I} l'intervalle des nombres réels $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$, soit $h : \mathbf{I} \times \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ une application continue et $i_t : \mathbf{X} \hookrightarrow \mathbf{I} \times \mathbf{X}$ le plongement fermé $x \mapsto (t, x)$. Notons $f_t := h \circ i_t$. On a le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{X} & \xlongequal{\quad} & \mathbf{X} \\ i_0 \downarrow \downarrow i_1 & & f_0 \downarrow \downarrow f_1 \\ \mathbf{I} \times \mathbf{X} & \xrightarrow{h} & \mathbf{Y} \end{array} \quad (\mathfrak{H})$$

Un faisceau localement constant \mathcal{L} sur \mathbf{Y} est donné par une représentation du groupe fondamental de chaque composante connexe \mathbf{Y}'_i de \mathbf{Y} , noté $\Pi_1(\mathbf{Y}'_i)$, dans la catégorie des k -espaces vectoriels. On a donc une famille de k -espaces vectoriels V_i et une famille de représentations $\rho := \{\rho_i : \Pi_1(\mathbf{Y}'_i) \rightarrow \text{Iso}_k(V_i)\}$. Comme l'image par une application continue d'un connexe est connexe, les applications f_t induisent des homomorphismes de groupes fondamentaux $\Pi_1(f_t) : \Pi_1(\mathbf{X}'_j) \rightarrow \Pi_1(\mathbf{Y}'_i)$ avec $f_t(\mathbf{X}'_j) \subseteq \mathbf{Y}'_i$. On note $\Pi_1(f_t)$ la famille de ces homomorphismes. Le faisceau localement constant $f_t^{-1}\mathcal{L}$ correspond alors à la famille de représentations $\rho \circ \Pi_1(f_t)$. Or, on a la factorisation $\Pi_1(f_t) = \Pi_1(h) \circ \Pi_1(i_t)$ où $\Pi_1(i_t) = \Pi_1(i_0)$ puisque \mathbf{I} est contractile. Par conséquent, le faisceau localement constant $f_t^{-1}(\mathcal{L})$ est indépendant de t ; il sera noté $f^{-1}(\mathcal{L})$.

1.6.1. Exercice. On complète (\mathfrak{H}) en rajoutant la projection $p : \mathbf{I} \times \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$, $p(t, x) = x$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{X} & \xlongequal{\quad} & \mathbf{X} \\ i_0 \downarrow \downarrow i_1 & & f_0 \downarrow \downarrow f_1 \\ \mathbf{I} \times \mathbf{X} & \xrightarrow{h} & \mathbf{Y} \\ p \downarrow & & \\ \mathbf{X} & & \end{array} \quad (\mathfrak{H}')$$

Justifier l'égalité $h^{-1}\mathcal{L} = p^{-1}f^{-1}\mathcal{L}$ à l'aide des remarques du dernier paragraphe.

1.6.2. Théorème. Avec les données ci-dessus,

a) Les deux morphismes suivants coïncident :

$$H^*(\mathbf{Y}; \mathcal{L}) \xrightarrow{H^*(f_0)} H^*(\mathbf{X}; f^{-1}(\mathcal{L})).$$

b) Si \mathbf{X} est un retract par déformation de \mathbf{Y} le morphisme

$$H^*(\mathbf{Y}; \mathcal{L}) \xrightarrow{H^*(i_{\mathbf{X}}^{\mathbf{Y}})} H^*(\mathbf{X}; \mathcal{L}|_{\mathbf{X}})$$

où $i_{\mathbf{X}}^{\mathbf{Y}} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ désigne l'application d'inclusion, est un isomorphisme.

c) Lorsque \mathbf{Y} est contractile, \mathcal{L} est un faisceau constant et

$$H^m(\mathbf{Y}; \mathcal{L}) = 0, \text{ pour tout } m > 0.$$

Démonstration. On reprend les notations du diagramme (\mathcal{H}') .

a) L'idée de la démonstration est de montrer que

$$H^*(\mathbf{X}; f^{-1}\mathcal{L}) \xrightarrow{H^*(p)} H^*(\mathbf{I} \times \mathbf{X}; p^{-1}f^{-1}\mathcal{L})$$

est l'inverse de

$$H^*(\mathbf{I} \times \mathbf{X}; h^{-1}\mathcal{L}) \xrightarrow{H^*(i_t)} H^*(\mathbf{X}; f^{-1}\mathcal{L})$$

quel que soit $t \in [0, 1]$ (cf. 1.6.1), ce qui entraîne l'égalité $H^*(i_0) = H^*(i_1)$ et alors

$$H^*(f_0) = H^*(h) \circ H^*(i_0) = H^*(h) \circ H^*(i_1) = H^*(f_1).$$

Comme $p \circ i_t = \text{id}_{\mathbf{X}}$, il suffira même de montrer que

$$H^*(p) : H^*(\mathbf{X}; \mathcal{M}) \rightarrow H^*(\mathbf{I} \times \mathbf{X}; p^{-1}\mathcal{M})$$

est un isomorphisme quel que soit le faisceau localement constant \mathcal{M} . Or, $H^*(p)$ est induit par le morphisme d'adjonction $\varepsilon : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}p_*p^{-1}\mathcal{M}$. Ce morphisme est un quasi-isomorphisme. En effet, il suffit de le vérifier sur les germes de chaque $x \in \mathbf{X}$ mais comme p est propre, on sait que

$$h^m[(\mathbb{R}p_*(p^{-1}\mathcal{M}))_x] = H^m(p^{-1}(x), \underline{\mathcal{M}}_{\underline{x}p^{-1}(x)}) = \begin{cases} \mathcal{M}_x, & \text{si } m = 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

puisque, de plus, $p^{-1}(x) = [0, 1]$ (1.5.5). Ceci termine la preuve de (a).

b) On rappelle qu'un sous-espace $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{Y}$ est dit «*retract par déformation de \mathbf{Y}* » lorsqu'il existe une application continue $h : [0, 1] \times \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{Y}$ telle que

$$\begin{cases} h(t, x) = x, & \text{pour tous } x \in \mathbf{X} \text{ et } t \in [0, 1], \\ h(0, y) = y, & \text{pour tout } y \in \mathbf{Y}, \\ h(1, y) \in \mathbf{X}, & \text{pour tout } y \in \mathbf{Y}. \end{cases}$$

Il s'ensuit que la composée $\mathbf{Y} \xrightarrow{h_1} \mathbf{X} \xleftarrow{i_{\mathbf{X}}^{\mathbf{Y}}} \mathbf{Y}$ où $h_1 : \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{X}$ désigne l'application $y \mapsto h(1, y)$, est homotope à $\text{id}_{\mathbf{Y}}$ et alors $H^*(h_1) \circ H^*(i_{\mathbf{X}}^{\mathbf{Y}}) = \text{id}$ d'après (a). Par conséquent, le morphisme

$$H^*(\mathbf{Y}; \mathcal{L}) \xleftarrow{H^*(i_{\mathbf{X}}^{\mathbf{Y}})} H^*(\mathbf{X}; \mathcal{L}|_{\mathbf{X}}) \quad (\dagger)$$

est **injectif**. D'autre part, la composée

$$\mathbf{X} \xleftarrow{i_{\mathbf{X}}^{\mathbf{Y}}} \mathbf{Y} \xrightarrow{h_1} \mathbf{X}$$

est l'identité sur \mathbf{X} et alors

$$H^*(\mathbf{Y}; h^{-1}(\mathcal{L}|_{\mathbf{X}})) \xrightarrow{H^*(i_{\mathbf{X}}^{\mathbf{Y}})} H^*(\mathbf{X}; \mathcal{L}|_{\mathbf{X}}) \quad (\ddagger)$$

est **surjectif**.

Pour conclure il ne reste qu'à vérifier que les termes de gauche de (\dagger) et (\ddagger) s'identifient naturellement. C'est une conséquence de la définition de retract par déformation qui implique que $\Pi_1(i_{\mathbf{X}}^{\mathbf{Y}}) : \Pi_1(\mathbf{X}) \rightarrow \Pi_1(\mathbf{Y})$ est un isomorphisme d'inverse $\Pi_1(h_1)$.

c) Lorsque \mathbf{Y} est contractile $\Pi_1(\mathbf{Y}) = (0)$ et un faisceau localement constant est toujours constant. De plus, tout point de \mathbf{Y} est retract par déformation de \mathbf{Y} et l'assertion (b) permet alors de conclure. \blacksquare

1.6.3. Exercice. Soit \mathcal{F}^\bullet un complexe de faisceaux sur Y borné à gauche, *i.e.* $\mathcal{F}^m = 0$ pour tout $m \ll 0$, et tel que les faisceaux des cohomologie $\mathcal{H}^n \mathcal{F}^\bullet$ sont tous des faisceaux localement constants sur X . Soient $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ deux applications homotopes.

- a) Montrer que les groupes $H^m(X; f_t^{-1} \mathcal{F}^\bullet)$ sont indépendants de t .
- b) Généraliser le théorème 1.6.2 en remplaçant \mathcal{L} par \mathcal{F}^\bullet .

Indication : Faire une démonstration par récurrence à l'aide de troncatures intelligentes. Attention à l'énoncé de l'assertion (c) qui doit être modifié.

1.6.4. Remarque et exercice. Un corollaire du théorème d'homotopie (1.6.2-(c)) est le théorème de comparaison entre la cohomologie singulière d'une variété différentielle X et la cohomologie de faisceaux des faisceaux constants sur X , ce qui est un cas particulier du résultat qui établit l'existence d'un isomorphisme naturel $H_{\text{sing}}^*(X; M) \xrightarrow{\cong} H^*(X; \underline{M}_X)$ pour tout espace X localement contractile. Nous indiquons de manière succincte les étapes de la démonstration de ce phénomène. Soit M un module sur un anneau \mathcal{A} .

- a) Il existe un morphisme canonique $\Xi_*(X; M) : H_{\text{sing}}^*(X; M) \rightarrow H^*(X; \underline{M}_X)$ qui est naturel par rapport à X et à M . En effet, la correspondance $U \mapsto S^\bullet(U; M)$, où $S^i(U; M)$ désigne le \mathcal{A} -module des cochaînes singulières sur U à valeurs dans M , est un complexe de préfaisceaux sur X . Notons-le $\underline{S}^\bullet(M)$ et soit $\varepsilon_\bullet : \underline{S}^\bullet(M) \rightarrow \underline{S}^\bullet(M)$ le morphisme canonique vers le complexe de faisceaux associé à $\underline{S}^\bullet(M)$. Le complexe $\underline{S}^\bullet(M)$ est une résolution du faisceau constant \underline{M}_X puisque X est localement contractile (1.6.2-(c)). Par conséquent, pour toute résolution injective $\underline{M}_X \hookrightarrow \mathcal{I}^\bullet$ il existe un morphisme de complexes $\varphi_\bullet : \underline{S}^\bullet(M) \rightarrow \mathcal{I}^\bullet$, unique à homotopie près, rendant le diagramme suivant commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \rightarrow & \underline{M}_X & \longrightarrow & \underline{S}^0(M) & \longrightarrow & \underline{S}^1(M) & \longrightarrow & \underline{S}^2(M) & \longrightarrow & \dots \\ & & \text{id} \parallel & & \varphi_0 \downarrow & & \varphi_1 \downarrow & & \varphi_2 \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & \underline{M}_X & \longrightarrow & \mathcal{I}^0 & \longrightarrow & \mathcal{I}^1 & \longrightarrow & \mathcal{I}^2 & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

La composée $\varphi_\bullet \circ \varepsilon_\bullet : \underline{S}^\bullet(M) \rightarrow \mathcal{I}^\bullet$ donne lieu alors à un morphisme canonique et naturel (en catégorie dérivée) : $S^\bullet(X; M) \rightarrow \mathcal{R}\Gamma(X; \underline{M}_X)$ d'où le morphisme $\Xi_*(X; M) : H_{\text{sing}}^*(X; M) \rightarrow H^*(X; \underline{M}_X)$ annoncé.

- b) Le théorème de Mayer-Vietoris (1.3.1) est vérifié aussi bien par la cohomologie de faisceaux que par la cohomologie singulière. Par conséquent, si U_1 et U_2 sont deux ouverts de X tels que $\Xi_*(U_1; M)$, $\Xi_*(U_2; M)$ et $\Xi_*(U_1 \cap U_2; M)$ sont des isomorphismes, il en sera de même de $\Xi_*(U_1 \cup U_2; M)$.
- c) Une variété différentielle X de dimension n admet des recouvrements ouverts et localement finis $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ tels que les intersections finies d'ouverts U_α sont homéomorphe à \mathbb{R}^n . Par les théorèmes d'homotopie des cohomologies singulière et de faisceaux, les morphismes $\Xi_*(\bigcap_{i=1}^r U_{\alpha_i}; M)$ sont (trivialement) bijectifs. On en déduit, par un argument récursif sur r à l'aide de Mayer-Vietoris, que les morphismes $\Xi_*(\bigcup_{i=1}^r U_{\alpha_i}; M)$ sont bijectifs pour toute famille finie $\{U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_r}\}$. En particulier, si X est compacte $\Xi_*(X; M)$ est bijective quels que soient \mathcal{A} et M .

d) Lorsque \mathbf{X} n'est pas compacte, les arguments de (b,c) s'intègrent dans un complexe de Čech relatif au recouvrement \mathcal{U} dont la cohomologie est alors canoniquement isomorphe à la cohomologie de faisceaux de $\underline{\mathbf{M}}_{\mathbf{X}}$ et à la cohomologie singulière $H^*(\mathbf{X}; \mathbf{M})$.

1.6.5. Proposition Soit \mathbf{X} un espace topologique métrisable localement compact dénombrable à l'infini. Alors :

- a) $\dim_{\text{ch}}(\mathbf{X} \times \mathbf{I} / \mathcal{A}) = \dim_{\text{ch}}(\mathbf{X} / \mathcal{A}) + \dim_{\text{ch}}(\mathbf{I} / \mathcal{A})$, pour tout intervalle réel \mathbf{I} .
- b) $\dim_{\text{ch}}(\mathbb{R}^n / \mathcal{A}) = n$, quel que soit \mathcal{A} .
- c) Si \mathbf{X} est une variété topologique de dimension n , $\dim_{\text{ch}}(\mathbf{X} / \mathcal{A}) = n$, quel que soit \mathcal{A} .

Démonstration. (c) est conséquence de (b) par 1.5.2-(c), et (b) est conséquence immédiate de (a) qu'il suffit de vérifier pour $\mathbf{I} = [0, 1]$ (cf. 1.5.2-(d)). Soit $p : \mathbf{X} \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{X}$ la projection canonique. Pour tout $\mathcal{F} \in \text{Fais}_{\mathcal{A}}(\mathbf{X} \times [0, 1])$ et tout $\ell \in \mathbb{N}$, on a

$$H^\ell(\mathbf{X} \times [0, 1]; \mathcal{F}) = \mathbb{H}^\ell(\mathbf{X}; \mathbb{R}p_* \mathcal{F}).$$

D'autre part, comme p est propre, on a :

$$h^\ell[(\mathbb{R}p_* \mathcal{F})_x] = H^\ell(p^{-1}x; \mathcal{F}|_{p^{-1}x}), \text{ pour tout } x \in \mathbf{X},$$

et $h^\ell[(\mathbb{R}p_* \mathcal{F})_x] = 0$ pour $\ell \geq 2$, puisque $p^{-1}x = [0, 1]$ et que $\dim_{\text{ch}}([0, 1] / \mathcal{A}) = 1$. Il s'ensuit que le complexe $\tau_{\geq 1} \mathbb{R}p_* \mathcal{F}$ est quasi-isomorphe à $(\mathbb{R}^1 p_* \mathcal{F})[-1]$, d'où le triangle exact :

$$p_* \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}p_* \mathcal{F} \longrightarrow (\mathbb{R}^1 p_* \mathcal{F})[-1] \xrightarrow{[+1]}$$

et la suite exacte longue d'hypercohomologies :

$$\longrightarrow \mathbb{H}^\ell(\mathbf{X}, p_* \mathcal{F}) \longrightarrow \mathbb{H}^\ell(\mathbf{X}, \mathbb{R}p_* \mathcal{F}) \longrightarrow \mathbb{H}^{\ell-1}(\mathbf{X}, \mathbb{R}^1 p_* \mathcal{F}) \longrightarrow$$

donnant l'égalité

$$\mathbb{H}^\ell(\mathbf{X}, \mathbb{R}p_* \mathcal{F}) = 0, \text{ pour tout } \ell \geq m + 2.$$

Par conséquent $\dim_{\text{ch}}(\mathbf{X} \times [0, 1]) \leq \dim_{\text{ch}}(\mathbf{X}) + 1$.

Pour la majoration inverse on choisit un faisceau $\mathcal{F} \in \text{Fais}_{\mathcal{A}}(\mathbf{X})$ tel que $H^n(\mathbf{X}; \mathcal{F}) \neq 0$, avec $n := \dim_{\text{ch}}(\mathbf{X} / \mathcal{A})$. On pose $\mathcal{G} := p^{-1} \mathcal{F}$ et $\mathbf{S} := \mathbf{X} \times \{0, 1\} \subseteq \mathbf{X} \times [0, 1]$ d'ouvert complémentaire \mathbf{U} . La suite longue de cohomologie associée à $\Delta(\mathbf{U}, \mathbf{X} \times [0, 1], \mathbf{S}; \mathcal{G})$ donne la suite exacte :

$$\begin{array}{ccccccc} H^n(\mathbf{X} \times [0, 1]; i_{\mathbf{U}!} \mathcal{G}|_{\mathbf{U}}) & \longrightarrow & H^n(\mathbf{X} \times [0, 1]; \mathcal{G}) & \xrightarrow{q} & H^n(\mathbf{S}; \mathcal{G}|_{\mathbf{S}}) & \xrightarrow{c} & H^{n+1}(\mathbf{X} \times [0, 1]; i_{\mathbf{U}!} \mathcal{G}|_{\mathbf{U}}) \\ & & \parallel & & \parallel & & \\ & & H^n(\mathbf{X}; \mathbb{R}p_* p^{-1} \mathcal{F}) & \xrightarrow{q'} & H^n(\mathbf{X}; \mathcal{F})^2 & & \end{array}$$

où q' s'identifie au morphisme diagonal $\Delta : H^n(\mathbf{X}; \mathcal{F}) \hookrightarrow H^n(\mathbf{X}; \mathcal{F})^2$. Le morphisme c n'est donc pas nul et $H^{n+1}(\mathbf{X} \times [0, 1]; i_{\mathbf{U}!} \mathcal{G}|_{\mathbf{U}}) \neq 0$, CQFD. ■

La proposition précédente est un cas particulier du théorème plus général suivant.

1.6.6. Théorème. *Soient \mathbf{X} et \mathbf{Y} deux espaces topologiques métrisables localement compacts dénombrables à l'infini. Alors :*

$$\dim_{\text{ch}}(\mathbf{X} \times \mathbf{Y}/\mathcal{A}) = \dim_{\text{ch}}(\mathbf{X}/\mathcal{A}) + \dim_{\text{ch}}(\mathbf{Y}/\mathcal{A})$$

Démonstration. La minoration $\dim_{\text{ch}}(\mathbf{X} \times \mathbf{Y}/\mathcal{A}) \leq \dim_{\text{ch}}(\mathbf{X}/\mathcal{A}) + \dim_{\text{ch}}(\mathbf{Y}/\mathcal{A})$ se démontre essentiellement de la même manière que pour 1.6.5. Pour l'inégalité inverse le plus rapide est de supposer \mathbf{X} et \mathbf{Y} compacts et d'appliquer le théorème de Künneth (3.7.5) ■

§ 2. Exemples de calculs d'homologie d'intersection

L'homologie d'intersection sera introduite en toute généralité dans la section 4.3, mais auparavant, en guise de motivation et pour avoir quelques contre-exemples montant les limites de la théorie, nous en donnons une définition restreinte sur des espaces topologiques très simples où des calculs explicites peuvent être menés à bien par des techniques homologiques élémentaires. Notre but sera d'illustrer la dualité de Poincaré dans l'homologie d'intersection des espaces topologiques *singuliers*.

2.1 Cadre de travail

Pour simplifier, nous allons nous restreindre au cas le plus simple d'espace stratifié après celui des variétés topologiques, à savoir : les filtrations fermées $\mathbf{X} \supseteq \mathbf{Z} \supseteq \emptyset$ où

- \mathbf{X} est un espace topologique métrisable localement compact, localement contractile, dénombrable à l'infini, de dimension cohomologique finie $d_{\mathbf{X}}$,
- \mathbf{Z} est une sous-variété topologique fermée dans \mathbf{X} , équidimensionnelle de dimension (cohomologique) $d_{\mathbf{Z}}$ (1.6.5-(c)),
- $\mathbf{U} := \mathbf{X} \setminus \mathbf{Z}$ est une sous-variété topologique ouverte et partout dense dans \mathbf{X} , équidimensionnelle de dimension $d_{\mathbf{X}}$.

2.2 Complexe d'intersection pour la perversité p

Avec les données du paragraphe précédent, on note, pour chaque $p \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$

$$\boxed{\underline{IC}_p^\bullet := \tau_{\leq p} \mathbb{R}i_{U*}(\underline{k}_U)}$$

où \underline{k}_U désigne le faisceau constant sur U de fibres un corps k donné. Le complexe \underline{IC}_p^\bullet est le « *complexe d'intersection de \mathbf{X} pour la perversité p (à coefficients dans le système local \underline{k}_U)* » ; c'est l'objet de la catégorie dérivée $D_k^b(\mathbf{X})$ canoniquement isomorphe à chaque complexe de faisceaux :

$$0 \rightarrow i_{U*}(\mathcal{J}^0) \xrightarrow{i_{U*}(d_0)} i_{U*}(\mathcal{J}^1) \xrightarrow{i_{U*}(d_1)} \dots \xrightarrow{i_{U*}(d_{p-1})} i_{U*}(\mathcal{J}^p) \xrightarrow{i_{U*}(d_p)} \text{im}(i_{U*}(d_p)) \rightarrow 0$$

où

$$0 \rightarrow \underline{k}_U \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{J}^0 \xrightarrow{d_0} \mathcal{J}^1 \xrightarrow{d_1} \dots \xrightarrow{d_{p-1}} \mathcal{J}^p \xrightarrow{d_p} \mathcal{J}^{p+1} \xrightarrow{d_{p+1}} \dots$$

est une résolution de \underline{k}_U par des faisceaux injectifs, flasques, c -mous, ou plus généralement i_{U*} -acycliques. On note alors pour $m \in \mathbb{Z}$:

$$\boxed{I_p H^m(\mathbf{X}; \underline{k}_U) := \mathbb{R}^m \Gamma(\mathbf{X}; \underline{IC}_p^\bullet)}, \quad \text{resp.} \quad \boxed{I_p H_c^m(\mathbf{X}; \underline{k}_U) := \mathbb{R}^m \Gamma_c(\mathbf{X}; \underline{IC}_p^\bullet)},$$

le « m -ième groupe d'homologie d'intersection (resp. à support compact) de \mathbf{X} pour la perversité p (à coefficients dans le système local \underline{k}_U) ».

2.2.1. Remarque. On prendra garde du fait que cette définition est un cas particulier de la définition générale de l'homologie d'intersection que nous introduirons dans la section 4.3. Dans la notation \underline{IC}_p^\bullet , la lettre « p » désigne un nombre et non pas une suite de nombres comme c'est le cas dans la définition générale.

2.3 Objet des calculs

La question que nous allons étudier, proche de la dualité de Poincaré mais non équivalente, est la suivante :

Etudier l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbf{X}; \mathbf{U})$ des couples $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ vérifiant

$$\dim_k (I_p H^m(\mathbf{X}; \underline{k}_{\mathbf{U}})) = \dim_k (I_q H_c^{d_{\mathbf{X}} - m}(\mathbf{X}; \underline{k}_{\mathbf{U}}))$$

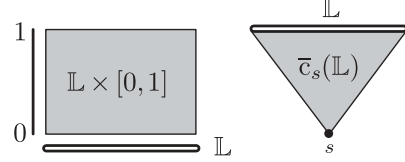
pour tout $m \in \mathbb{Z}$.

2.4 Homologie d'intersection du cône d'une variété topologique compacte à coefficients dans le complémentaire de son sommet

2.4.1. Cône d'un espace topologique. Pour tout espace topologique \mathbb{L} on note $c_s(\mathbb{L})$ et $\bar{c}_s(\mathbb{L})$ les espaces topologiques quotient :

$$c_s(\mathbb{L}) := \frac{\mathbb{L} \times [0, 1[}{\mathbb{L} \times \{0\}} \quad \text{et} \quad \bar{c}_s(\mathbb{L}) := \frac{\mathbb{L} \times [0, 1]}{\mathbb{L} \times \{0\}}$$

appelés respectivement « cône (ouvert) de \mathbb{L} » et « cône



fermé de \mathbb{L} ». Le « sommet » des cônes, noté 's' ici, est la classe $\mathbb{L} \times \{0\}$.

2.4.2. Remarques

- Lorsque \mathbb{L} est localement compact, dénombrable à l'infini et métrisable, il en est de même de ses cônes ; si de plus \mathbb{L} est de dimension cohomologique finie $d_{\mathbb{L}}$, ses cônes sont de dimension cohomologique $d_{\mathbb{L}} + 1$.
- Si \mathbb{L} est la sphère \mathbb{S}^n (⁴), $c_s(\mathbb{L})$ est homéomorphe à \mathbb{R}^{n+1} . En particulier : *tout point d'une variété topologique admet un voisinage homéomorphe au cône d'une variété compacte orientable.*

2.4.3. Soit \mathbb{L} une variété topologique **compacte** de dimension $d_{\mathbb{L}}$ non nécessairement connexe. Le complémentaire du sommet du cône ouvert $c_s(\mathbb{L})$ est homéomorphe à la variété topologique $\mathbb{L} \times]0, 1[$. On notera dans la suite $\mathbf{X} := c_s(\mathbb{L})$ et $\mathbf{U} := c_s(\mathbb{L}) \setminus \{s\}$. Le couple $(\mathbf{X}; \{s\})$ est conforme aux cadre de travail que nous avons fixé dans 2.1.

2.4.4. Proposition. *Le tableau suivant donne, pour chaque $m \in \mathbb{N}$, un espace vectoriel canoniquement isomorphe au m -ième groupe l'homologie d'intersection (resp. à support compact) de \mathbf{X} pour la perversité p et pour le système local $\underline{k}_{\mathbf{U}}$.*

m	0	...	p	$p+1$	$p+2$...	$d_{\mathbf{X}}$	$d_{\mathbf{X}}+1$...
$I_p H^m(\mathbf{X}; \underline{k}_{\mathbf{U}})$	$H^0(\mathbb{L}; k)$...	$H^p(\mathbb{L}; k)$	0	0	...	0	0	...
$I_p H_c^m(\mathbf{X}; \underline{k}_{\mathbf{U}})$	0	...	0	0	$H^{p+1}(\mathbb{L}; k)$...	$H^{d_{\mathbb{L}}}(\mathbb{L}; k)$	0	...

⁴Prendre garde du fait que \mathbb{S}^n est, par définition, l'ensemble des points de l'espace euclidien \mathbb{R}^{n+1} dont la distance à l'origine est égale à 1. En particulier, \mathbb{S}^0 possède **deux** points.

où $H^*(\mathbb{L}; k)$ désigne la cohomologie singulière de \mathbb{L} à coefficients dans k .

En particulier, $\mathcal{P}(\mathbf{X}; \mathbf{U}) \supseteq \left\{ (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid p + q = d_{\mathbf{X}} - 2 \right\}$

Démonstration. Notons $\mathcal{F}^\bullet := \tau_{\leq p} \mathbb{R}i_{U^*}(\underline{k}_U)$ et $i_s := i_{\{s\}}$.

La suite exacte longue associée au triangle exact $\Delta(\mathbf{U}, \mathbf{X}, \{s\}, \mathcal{F}^\bullet)$ (1.2) s'écrit :

$$\xrightarrow{[+1]} \mathbb{H}^m(\mathbf{X}; i_{U!}(\underline{k}_U)) \longrightarrow \mathbb{H}^m(\mathbf{X}; \mathcal{F}^\bullet) \xrightarrow{\alpha_m} \mathbb{H}^m(\{s\}; i_s^{-1}(\mathcal{F}^\bullet)) \xrightarrow{[+1]} \quad (\diamond)$$

puisque

$$\mathcal{F}^\bullet|_U = \left(\tau_{\leq p} \mathbb{R}i_{U^*}(\underline{k}_U) \right)|_U = \tau_{\leq p} \left((\mathbb{R}i_{U^*}(\underline{k}_U))|_U \right) = \underline{k}_U$$

D'autre part, les groupes d'hypercohomologie $\mathbb{H}^m(\mathbf{X}; i_{U!}(\underline{k}_U))$ ⁽⁵⁾ interviennent aussi dans la suite exacte longue associée au triangle $\Delta(\mathbf{U}, \mathbf{X}, \{s\}, \underline{k}_X)$:

$$\xrightarrow{[+1]} \mathbb{H}^m(\mathbf{X}; i_{U!}(\underline{k}_U)) \longrightarrow \mathbb{H}^m(\mathbf{X}; \underline{k}_X) \xrightarrow{\beta_m} \mathbb{H}^m(\{s\}; k) \xrightarrow{[+1]}$$

où le morphismes β_m sont tous bijectifs puisque \mathbf{X} est contractile. On en déduit l'égalité

$$\mathbb{H}^m(\mathbf{X}; i_{U!}(\underline{k}_U)) = 0$$

pour tout $m \in \mathbb{Z}$, ce qui reporté dans (\diamond) entraîne la **bijectivité** de α_m pour tout $m \in \mathbb{Z}$.

Ceci étant, $\{s\}$ est de dimension cohomologique nulle ⁽⁶⁾ et $\mathbb{H}^m(\{s\}; i_s^{-1}(\mathcal{F}^\bullet))$ est canoniquement isomorphe à l'homologie en degré m du complexe des germes \mathcal{F}_s^\bullet ce qu'on notera $h^m[\mathcal{F}_s^\bullet]$. Par conséquent :

$$I_p \mathbb{H}^m(\mathbf{X}; \underline{k}_U) = \mathbb{H}^m(\mathbf{X}; \mathcal{F}^\bullet) \xrightarrow{\alpha_m} h^m[\mathcal{F}_s^\bullet] = \begin{cases} h^m[(\mathbb{R}i_{U^*}(\underline{k}_U))_s], & \text{si } m \leq p; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (*)$$

Pour la détermination des germes en s on peut considérer la base de voisinages de s de la forme

$$V_n = \frac{\mathbb{L} \times [0, 1/n[}{\mathbb{L} \times \{0\}}, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},$$

auquel cas

$$\begin{aligned} h^m[(\mathbb{R}i_{U^*}(\underline{k}_U))_s] &= \varinjlim_{n \rightarrow \infty} H^m(V_n \setminus \{s\}; k) \\ &= \varinjlim_{n \rightarrow \infty} H^m(\mathbb{L} \times]0, 1/n[; k) = H^m(\mathbb{L}; k) \end{aligned} \quad (\ddagger)$$

puisque la cohomologie des faisceaux est canoniquement isomorphe à la cohomologie singulière et suite aux théorèmes d'homotopie bien connus (Lemme de Poincaré par exemple). La première ligne de notre tableau résulte alors de $(*)$ et (\ddagger) .

⁵ Comme $i_{U!}(\underline{k}_U)$ est un complexe de faisceaux concentré en degré 0, le groupe $\mathbb{H}^m(\mathbf{X}; i_{U!}(\underline{k}_U))$ n'est autre que la cohomologie de faisceau en degré m du faisceau $i_{U!}(\underline{k}_U)$.

⁶ Pour tout anneau \mathbf{A} , tout faisceau de $\text{Fais}_{\mathbf{A}}(\{s\})$ est flasque, mou, c -mou, De plus, lorsque \mathbf{A} est un corps k tout faisceau de $\text{Fais}_k(\{s\})$ est injectif et projectif.

Pour l'étude de la deuxième ligne du tableau on fait appel à la suite exacte longue associée au triangle exact $\Delta(\mathbf{U}, \mathbf{X}, \{s\}; \mathcal{F}^\bullet)$ (1.2) :

$$\xrightarrow{[+1]} H_c^m(\mathbf{U}; \underline{k}_U) \longrightarrow \mathbb{H}_c^m(\mathbf{X}; \mathcal{F}^\bullet) \longrightarrow h^m[\mathcal{F}_s^\bullet] \xrightarrow{c(\mathcal{F})_m / [+1]} \quad (\ddagger\ddagger)$$

et qui présente l'intérêt que les termes extrêmes sont connus. En effet, celui de droite a déjà été étudié et pour celui de gauche on peut appliquer l'isomorphisme de Künneth à supports compacts : $H_c^m(\mathbf{U}; k) = H_c^m(\mathbb{L} \times]0, 1[; k) \cong H^{m-1}(\mathbb{L}; k)$ moyennant l'isomorphisme $H_c^*(]0, 1[; k) \cong H^{1-*}(]0, 1[; k) = k[-1]$ (dualité de Poincaré). Mais ceci ne suffit pas encore à déterminer le terme du milieu de $(\ddagger\ddagger)$ dans la mesure où le morphisme de liaison $c(\mathcal{F})_*$ n'est pas explicite.

Notons $\mathcal{G}^\bullet := \mathbb{R}i_{U*} \underline{k}_U$ (pas de troncature!). Le morphisme canonique de complexes $\mathcal{F}^\bullet \hookrightarrow \mathcal{G}^\bullet$ et la functorialité de $\Delta(\mathbf{U}, \mathbf{X}, \{s\}, -)$ donnent lieu à un morphisme de complexes :

$$\begin{array}{ccccccc} \xrightarrow{[+1]} H_c^m(\mathbf{U}; \underline{k}_U) & \longrightarrow & \mathbb{H}_c^m(\mathbf{X}; \mathcal{F}^\bullet) & \longrightarrow & h^m[\mathcal{F}_s^\bullet] & \xrightarrow{c(\mathcal{F})_m / [+1]} & H_c^{m+1}(\mathbf{U}; \underline{k}_U) \longrightarrow \\ = \downarrow & & \downarrow & & \iota_m \downarrow & & = \downarrow & (\diamond\diamond) \\ \xrightarrow{[+1]} H_c^m(\mathbf{U}; \underline{k}_U) & \longrightarrow & \mathbb{H}_c^m(\mathbf{X}; \mathcal{G}^\bullet) & \longrightarrow & h^m[\mathcal{G}_s^\bullet] & \xrightarrow{c(\mathcal{G})_m / [+1]} & H_c^{m+1}(\mathbf{U}; \underline{k}_U) \longrightarrow \end{array}$$

On a $\mathbb{H}_c^m(\mathbf{X}; \mathcal{G}^\bullet) = 0$ pour tout $m \in \mathbb{Z}$. Pour voir ceci on fait appel à l'espace $\overline{\mathbf{X}} := \overline{\mathbb{C}}_s(\mathbb{L})$, compactification naturelle de \mathbf{X} dont on note $j : \mathbf{X} \hookrightarrow \overline{\mathbf{X}}$ le plongement (ouvert) donné par l'inclusion. On remarquera l'égalité $\overline{\mathbf{X}} \setminus \mathbf{X} = \mathbb{L} \times \{1\}$ qui permet d'identifier le fermé complémentaire de \mathbf{X} dans $\overline{\mathbf{X}}$ à \mathbb{L} .

Notons $\mathcal{H}^\bullet := \mathbb{R}j_* \mathcal{G}^\bullet$. La suite exacte longue associée au triangle $\Delta(\mathbf{X}, \overline{\mathbf{X}}, \mathbb{L}; \mathcal{H}^\bullet)$ s'écrit

$$\xrightarrow{[+1]} \mathbb{H}_c^m(\mathbf{X}; \mathcal{G}^\bullet) \longrightarrow \mathbb{H}^m(\overline{\mathbf{X}}; \mathcal{H}^\bullet) \xrightarrow{q_m} \mathbb{H}^m(\mathbb{L}; \mathcal{H}^\bullet|_{\mathbb{L}}) \xrightarrow{[+1]} \quad (\Delta)$$

puisque $\overline{\mathbf{X}}$ et \mathbb{L} sont compacts.

On a $\mathbb{H}^m(\overline{\mathbf{X}}; \mathcal{H}^\bullet) = H^m(\mathbf{U}; k) = H^m(\mathbb{L} \times]0, 1[, k)$ puisque

$$\mathcal{H}^\bullet = \mathbb{R}j_* \mathbb{R}i_{U*} \underline{k}_U = \mathbb{R}i_{\overline{\mathbf{X}}}^* \underline{k}_{\overline{\mathbf{X}}}.$$

En particulier, la restriction à $\mathbb{L} \times \{1\}$ du morphisme d'adjonction $\underline{k}_{\overline{\mathbf{X}}} \rightarrow \mathbb{R}i_{\overline{\mathbf{X}}}^* (\underline{k}_{\overline{\mathbf{X}}}|_{\mathbb{L}})$ donne un morphisme de complexes de faisceaux $\underline{k}_{\mathbb{L} \times \{1\}} \rightarrow \mathcal{H}^\bullet|_{\mathbb{L} \times \{1\}}$ dont le germe en chaque $(\ell, 1) \in \mathbb{L} \times \{1\}$ est un quasi-isomorphisme puisque la famille des parties

$$V(\ell)_{m,n} := B(\ell, 1/m) \times]1 - 1/n, 1]$$

avec $n, m \in \mathbb{N}$ et où $B(\ell, 1/m)$ désigne la "boule ouverte centrée en ℓ de rayon $1/m$ ", est une base de voisinages de $(\ell, 1)$ dans $\overline{\mathbf{X}}$ telle que $V(\ell)_{m,n} \cap \mathbf{U} = B(\ell, 1/m) \times]1 - 1/n, 1[$ est contractile, ce qui implique que le complexe $\mathcal{H}^\bullet|_{V(\ell)_{m,n}}$ a son hypercohomologie concentrée en degré 0 où elle est isomorphe à k puisqu'elle calcule $H^*(V(\ell)_{m,n} \cap \mathbf{U}; k)$, par définition.

Moyennant ces remarques, on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^m(\overline{\mathbf{X}} \setminus \{s\}; k) & \xlongequal{\quad} & H^m(\overline{\mathbf{X}} \setminus \{s\}; k) \\ i_U^* \downarrow & & i_{\mathbb{L}}^* \downarrow \\ H^m(\mathbf{U}; k) & \xrightarrow{q_m} & H^m(\mathbb{L}; k) \end{array}$$

où les morphismes verticaux sont ceux respectivement associés aux inclusions $\mathbf{U} \subseteq \overline{\mathbf{X}} \setminus \{s\}$ et $\mathbb{L} \times \{1\} \subseteq \overline{\mathbf{X}} \setminus \{s\}$, ce sont des isomorphismes d'après les théorèmes d'homotopie.

Les morphismes q_m sont donc bijectifs, $\mathbb{H}_c^m(\mathbf{X}; \mathcal{G}^\bullet) = 0$ pour tout $m \in \mathbb{Z}$ d'après (Δ) et les morphismes $c(\mathcal{G})_m$ sont bijectifs d'après la deuxième ligne de $(\diamond\diamond)$.

La suite $(\diamond\diamond)$ devient :

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & \mathbb{H}_c^m(\mathbf{X}; \mathcal{F}^\bullet) & \longrightarrow & h^m[\mathcal{F}_s^\bullet] & \xrightarrow{\frac{c(\mathcal{F})_m}{[+1]}} & H_c^{m+1}(\mathbf{U}; \underline{k}_U) & \longrightarrow \\ & & & \downarrow \iota_m & & \downarrow = & \\ & & & h^m[\mathcal{G}_s^\bullet] & \xrightarrow{\frac{c(\mathcal{G})_m}{\equiv}} & H_c^{m+1}(\mathbf{U}; \underline{k}_U) & \end{array}$$

On en déduit :

- Lorsque $m \leq p$, le morphisme ι_m est bijectif et donc

$$\mathbb{H}_c^m(\mathbf{X}; \mathcal{F}^\bullet) = 0, \text{ pour tout } m \leq p.$$

- Le morphisme $c(\mathcal{F})_p$ est surjectif et $h^{p+1}[\mathcal{F}_s^\bullet] = 0$ donc aussi

$$\mathbb{H}_c^{p+1}(\mathbf{X}; \mathcal{F}^\bullet) = 0$$

- Lorsque $m > p + 1$ on a $h^{m-1}[\mathcal{F}_s^\bullet] = 0$ et alors $H_c^m(\mathbf{U}; k) \equiv \mathbb{H}_c^m(\mathbf{X}; \mathcal{F}^\bullet)$ d'où

$$\mathbb{H}_c^m(\mathbf{X}; \mathcal{F}^\bullet) \equiv H^{m-1}(\mathbb{L}; k), \text{ pour tout } m \geq p + 2$$

puisque d'après la formule de Künneth à supports compacts

$$H_c^*(\mathbf{U}; k) \equiv H_c^*(\mathbb{L} \times]0, 1[; k) \equiv H_c^*(\mathbb{L}; k) \otimes H_c^*(]0, 1[; k) \equiv H^{*-1}(\mathbb{L}; k).$$

Ce qui termine la vérification du tableau de la proposition.

Enfin, la partie concernant l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbf{X}; \mathbf{U})$ résulte d'une vérification rapide à l'aide du tableau moyennant la dualité de Poincaré sur \mathbb{L} . ■

2.4.5. Remarque importante. La proposition montre qu'un espace contractile peut très bien posséder des groupes d'homologie d'intersection non nuls en degrés positifs. L'homologie d'intersection n'est donc pas un invariant homotopique.

2.4.6. Remarques

- a) On a $I_q H_c^0(\mathbf{X}; \underline{k}_U) = I_q H_c^1(\mathbf{X}; \underline{k}_U) = 0$, quel que soit $q \in \mathbb{N}$, et

$$I_p H^{d_{\mathbb{L}}}(\mathbf{X}; \underline{k}_U) = H^{d_{\mathbb{L}}}(\mathbb{L}; k) \equiv H^0(\mathbb{L}; k) \neq 0,$$

lorsque $p \geq d_{\mathbb{L}}$. On en déduit que $\mathcal{P}(\mathbf{X}; \mathbf{U})$ ne contient aucun couple (p, q) avec $p \geq d_{\mathbb{L}}$.

b) Lorsque $d_{\mathbb{L}} = 0$, \mathbf{X} est le cône d'un ensemble fini de points ⁽⁷⁾ et $\mathcal{P}(\mathbf{X}; U) = \emptyset$.

c) L'inclusion

$$\mathcal{P}(\mathbf{X}; U) \supseteq \{(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid p + q = d_{\mathbf{X}} - 2\}$$

est une égalité lorsque $H^m(\mathbb{L}; k) \neq 0$ pour tout $0 < m < d_{\mathbb{L}}$.

d) Lorsque \mathbb{L} est une réunion disjointe de sphères $\mathbb{S}^{d_{\mathbb{L}}}$, le complexe $(Ri_{U*}(\underline{k}_U))_s$ a de la cohomologie uniquement en degrés 0 et $d_{\mathbb{L}}$ et les morphismes canoniques

$$\underline{IC}_0^\bullet \longrightarrow \underline{IC}_1^\bullet \longrightarrow \underline{IC}_2^\bullet \longrightarrow \cdots \longrightarrow \underline{IC}_{d_{\mathbb{L}}-1}^\bullet$$

sont tous des quasi-isomorphismes. Par conséquent, lorsque $d_{\mathbb{L}} \geq 1$, on a

$$\mathcal{P}(\mathbf{X}; U) = [0, d_{\mathbf{X}} - 2]^2$$

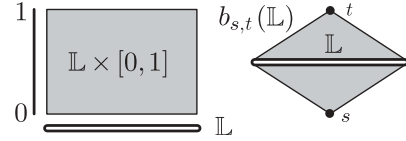
2.5 Homologie d'intersection sur des espaces topologiques compacts

A partir de maintenant \mathbf{X} est un espace topologique compact, ce qui nous évitera de distinguer entre les groupes $I_p H^m$ et $I_p H_c^m$.

2.6 Homologie d'intersection du double cône d'une variété topologique compacte à coefficients dans le complémentaire des sommets

2.6.1. Double cône d'un espace topologique Pour tout espace topologique \mathbb{L} on note $b_{s,t}(\mathbb{L})$ l'espace topologique quotient :

$$b_{s,t}(\mathbb{L}) := \frac{\mathbb{L} \times [0, 1]}{(\ell_1, 1) \sim (\ell_2, 1) \text{ et } (\ell_1, 0) \sim (\ell_2, 0)}$$



appelé le «double cône de \mathbb{L} ». Le «sommets du double cône», notés ' s, t ' ici, désignent respectivement les classes d'équivalence $\mathbb{L} \times \{0\}$ et $\mathbb{L} \times \{1\}$.

2.6.2. On considère, comme dans 2.4, une variété topologique **compacte** \mathbb{L} de dimension $d_{\mathbb{L}}$ non nécessairement connexe. Le complémentaire des sommets du double cône $b_{s,t}(\mathbb{L})$ est homéomorphe à la variété topologique $\mathbb{L} \times]0, 1[$. On notera $\mathbf{X} := b_{s,t}(\mathbb{L})$ et $U := b_{s,t}(\mathbb{L}) \setminus \{s, t\}$.

2.6.3. Proposition. *Le tableau suivant donne, pour chaque $m \in \mathbb{N}$, un espace vectoriel canoniquement isomorphe au m -ième groupe l'homologie d'intersection de \mathbf{X} pour la perversité p et pour le système local \underline{k}_U .*

m	0	...	p	$p+1$	$p+2$...	$d_{\mathbf{X}}$	$d_{\mathbf{X}}+1$...
$I_p H^m(\mathbf{X}, \underline{k}_U)$	$H^0(\mathbb{L}; k)$...	$H^p(\mathbb{L}; k)$	0	$H^{p+1}(\mathbb{L}; k)$...	$H^{d_{\mathbb{L}}}(\mathbb{L}; k)$	0	...

où $H^*(\mathbb{L}; k)$ désigne la cohomologie singulière de \mathbb{L} à coefficients dans k .

⁷ \mathbf{X} est un bouquet de segments de droite cf. 2.8.

En particulier $\mathcal{P}(\mathbf{X}; \mathbf{U}) \supseteq \left\{ (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid p + q = d_{\mathbf{X}} - 2 \right\}$

Démonstration. Considérons les parties ouvertes $U_t = \mathbf{X} \setminus \{s\}$ et $U_s := \mathbf{X} \setminus \{t\}$. La suite exacte longue de Mayer-Vietoris (à supports fermés) relative à la décomposition $\mathbf{X} = U_t \cup U_s$ est clairement :

$$\xrightarrow{[+1]} I_p H^m(\mathbf{X}; \underline{k}_{\mathbf{U}}) \longrightarrow I_p H^m(U_t; \underline{k}_{\mathbf{U}}) \oplus I_p H^m(U_s; \underline{k}_{\mathbf{U}}) \xrightarrow{q_m} H^*(U_t \cap U_s; k) \xrightarrow{[+1]}$$

où U_* est homéomorphe à $c_*(\mathbb{L})$ et $U_t \cap U_s = U = \mathbb{L} \times]0, 1[$.

Nous pouvons donc appliquer la proposition 2.4.4 qui montre aussitôt que q_m est surjective pour tout $m \leq p$ et alors

$$I_p H^m(\mathbf{X}; \underline{k}_{\mathbf{U}}) \equiv \Delta [I_p H^m(U_t; \underline{k}_{\mathbf{U}}) \oplus I_p H^m(U_s; \underline{k}_{\mathbf{U}})] \equiv H^m(\mathbb{L}; k), \text{ pour tout } m \leq p.$$

Comme q_p est surjective et que $I_p H^{p+1}(U_*; \underline{k}_{\mathbf{U}}) = 0$, on a aussi

$$I_p H^{p+1}(\mathbf{X}; \underline{k}_{\mathbf{U}}) = 0,$$

et, enfin, comme $I_p H^m(U_*; \underline{k}_{\mathbf{U}}) = 0$ pour tout $m \geq p + 1$, on a :

$$I_p H^m(\mathbf{X}; \underline{k}_{\mathbf{U}}) \equiv H^{m-1}(\mathbb{L}; k), \text{ pour tout } m \geq p + 2.$$

ce qui termine la preuve de la proposition. ■

2.7 Homologie d'intersection d'une variété topologique compacte à coefficients dans le complémentaire d'un ensemble fini

Dans cette partie le couple (\mathbf{X}, \mathbf{Z}) est constitué d'une variété topologique compacte de dimension $d_{\mathbf{X}}$ connexe orientable \mathbf{X} et d'un ensemble fini $\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{X}$.

2.7.1. Proposition. *On suppose $d_{\mathbf{X}} \geq 2$ et $\mathbf{Z} \neq \emptyset$. Alors*

$$I_p H^*(\mathbf{X}; \underline{k}_{\mathbf{U}}) \equiv H^*(\mathbf{X}; k), \text{ pour tout } p \leq d_{\mathbf{X}} - 2,$$

$$I_p H^*(\mathbf{X}; \underline{k}_{\mathbf{U}}) \equiv H^*(\mathbf{U}; k), \text{ pour tout } p \geq d_{\mathbf{X}} - 1.$$

De plus : $\mathcal{P}(\mathbf{X}; \mathbf{U}) = [0, d_{\mathbf{X}} - 2]^2$.

Démonstration. Comme chaque $x \in \mathbf{Z}$ admet une base de voisinages homéomorphe à $c_x(\mathbb{S}^{d_{\mathbf{X}}-1})$ et que $\mathbb{S}^{d_{\mathbf{X}}-1}$ est connexe (car $d_{\mathbf{X}} \geq 2$), la remarque (d) de 2.4.6 s'applique au cas présent avec comme précision supplémentaire : le fait que le morphisme d'adjonction $\underline{k}_{\mathbf{X}} \rightarrow i_{U_*}(\underline{k}_{\mathbf{U}})$ est un isomorphisme. On a donc

$$\underline{k}_{\mathbf{X}} \equiv \underline{IC}_p^{\bullet}, \text{ pour tout } p \leq d_{\mathbf{X}} - 2,$$

dans la catégorie dérivée $D_k^+(\mathbf{X})$ et la première assertion encadrée résulte.

D'autre part :

$$\underline{IC}_p^{\bullet} \equiv Ri_{U_*}(\underline{k}_{\mathbf{U}}), \text{ pour tout } p \geq d_{\mathbf{X}} - 1,$$

pour des raisons analogues, d'où la deuxième assertion encadrée.

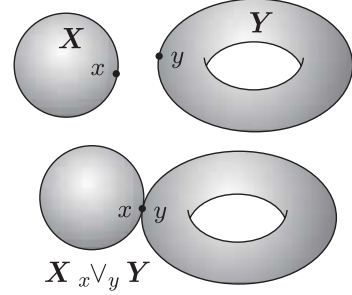
Enfin, l'inclusion $\mathcal{P}(\mathbf{X}; \mathbf{U}) \subseteq [0, d_{\mathbf{X}} - 2]^2$ est claire et sa réciproque résulte de remarquer que $H^{d_{\mathbf{X}}}(\mathbf{U}; k) = H_c^0(\mathbf{U}; k) = 0$ par dualité de Poincaré et puisque \mathbf{U} est connexe et non compact. ■

2.8 Homologie d'intersection d'un bouquet de variété topologiques à coefficients dans le complémentaire du point de base

2.8.1. Bouquets. Soient \mathbf{X} et \mathbf{Y} deux espaces topologiques et choisissons des points $x \in \mathbf{X}$ et $y \in \mathbf{Y}$. On appelle «bouquet de \mathbf{X} et \mathbf{Y} (aux points x et y)», l'espace topologique quotient

$$\mathbf{X} \mathop{x \vee_y} \mathbf{Y} := \frac{\mathbf{X} \amalg \mathbf{Y}}{x \sim y}$$

Lorsque \mathbf{X} et \mathbf{Y} sont des variétés topologiques connexes, la classe d'homéomorphie de l'espace $\mathbf{X} \mathop{x \vee_y} \mathbf{Y}$ est indépendante du choix des points $x \in \mathbf{X}$ et $y \in \mathbf{Y}$, le bouquet est alors noté $\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}$. Le point $b := x = y \in \mathbf{X} \vee \mathbf{Y}$ est «le point de base du bouquet».



2.8.2. Proposition. Soient \mathbf{X} et \mathbf{Y} deux variétés topologiques compactes connexes orientables de même dimension $d \geq 2$. Soit \mathbf{U} l'ouvert complémentaire du point de base b du bouquet $\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}$. Alors :

$$I_p H^*(\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}; \underline{k}_{\mathbf{U}}) = H^*(\mathbf{X}; k) \oplus H^*(\mathbf{Y}; k), \text{ pour tout } p \leq d - 2.$$

$$I_p H^*(\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}; \underline{k}_{\mathbf{U}}) = H^*(\mathbf{X}'; k) \oplus H^*(\mathbf{Y}'; k), \text{ pour tout } p \geq d - 1.$$

où \mathbf{X}' et \mathbf{Y}' désignent les complémentaires d'un point dans \mathbf{X} et \mathbf{Y} respectivement.

De plus

$$\mathcal{P}(\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}, \mathbf{U}) = [0, d - 2]^2$$

Démonstration. Dans le cas présent le point de base b admet une base de voisinages homéomorphes au cône de deux sphères de dimension $d - 1$. Il s'ensuit, comme dans 2.4.6-(d), que les morphismes naturels $\underline{IC}_0^* \rightarrow \underline{IC}_1^* \rightarrow \underline{IC}_2^* \rightarrow \cdots \rightarrow \underline{IC}_{d-2}^*$ sont des quasi-isomorphismes.

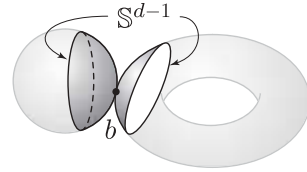
D'autre part, $\underline{IC}_0^* = i_{\mathbf{U}*}(\underline{k}_{\mathbf{U}}) = i_{\mathbf{X}'*}(\underline{k}_{\mathbf{X}'}) \oplus i_{\mathbf{Y}'*}(\underline{k}_{\mathbf{Y}'})$ et mieux encore :

$$i_{\mathbf{X}'*}(\underline{k}_{\mathbf{X}'}) \oplus i_{\mathbf{Y}'*}(\underline{k}_{\mathbf{Y}'}) = i_{\mathbf{X}*}(\underline{k}_{\mathbf{X}}) \oplus i_{\mathbf{Y}*}(\underline{k}_{\mathbf{Y}})$$

puisque $d \geq 2$. On a donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{H}^*(\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}; \underline{IC}_0^*) &\cong \mathbb{H}^*(\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}; i_{\mathbf{X}*}(\underline{k}_{\mathbf{X}})) \oplus \mathbb{H}^*(\mathbf{X} \vee \mathbf{Y}; i_{\mathbf{Y}*}(\underline{k}_{\mathbf{Y}})) \\ &\cong H^*(\mathbf{X}; \underline{k}_{\mathbf{X}}) \oplus H^*(\mathbf{Y}; \underline{k}_{\mathbf{Y}}) \end{aligned}$$

puisque $i_{\mathbf{X}*}$ est un foncteur exact qui transforme injectif en injectif (idem pour $i_{\mathbf{Y}*}$).



La première assertion encadrée est ainsi démontrée et le reste de la proposition résulte comme dans 2.7.1. ■

2.9 Homologie d'intersection d'un espace singulier compact à singularités isolées à coefficients dans sa partie lisse

Nous généralisons dans cette partie les exemples étudiés dans 2.6 et 2.8.

L'espace topologique \mathbf{X} est compact et \mathbf{Z} est une partie finie non vide de \mathbf{X} telle que $\mathbf{U} := \mathbf{X} \setminus \mathbf{Z}$ est une variété topologique équidimensionnelle de dimension $d_{\mathbf{X}} \geq 2$, et telle que, pour chaque $z \in \mathbf{Z}$ il existe une variété topologique compacte \mathbb{L}_z , de dimension $d_{\mathbf{X}} - 1$, et une base de voisinages ouverts de z dans \mathbf{X} homéomorphes à $c_z(\mathbb{L}_z)$. On dit alors que « \mathbf{X} est un espace singulier (compact) à singularités isolées. »

Comme chaque point $z \in \mathbf{Z}$ admet un voisinage ouvert de la forme $V_z = c_z(\mathbb{L}_z)$ « aussi petit que l'on veut », on peut toujours supposer que $V_{z_1} \cap V_{z_2} = \emptyset$ pour $z_1 \neq z_2$. Notons \mathbf{Z}_ε l'ouvert réunion d'un tel choix de voisinages coniques et $\mathbf{Z}_{\varepsilon/2}$ la réunion des mêmes voisinages mais de « hauteur » moitié. L'espace $\tilde{\mathbf{U}} := \mathbf{X} \setminus \mathbf{Z}_{\varepsilon/2}$, retract par déformation de \mathbf{U} , est une variété topologique à bord $\delta(\tilde{\mathbf{U}})$ homéomorphe à $\mathbb{L} := \coprod_{z \in \mathbf{Z}} \mathbb{L}_z$. On aura besoin du résultat suivant.

2.9.1. Lemme. *Soit \mathbf{Y} un espace topologique compact homéomorphe à une variété topologique à bord. Les nombres de Betti de \mathbf{Y} sur k (^s) sont finis.*

Indication. L'idée est de recoller deux copies de \mathbf{Y} en identifiant les points correspondants de leurs bords. Notons $\text{Db}(\mathbf{Y})$ l'espace ainsi obtenu (parfois appelé « le double de \mathbf{Y} »). On vérifie facilement que $\text{Db}(\mathbf{Y})$ est une variété topologique compacte et possède, par conséquent, des nombres de Betti finis. D'autre part, on a une suite longue de Mayer-Vietoris

$$\xrightarrow{[+1]} H^*(\text{Db}(\mathbf{Y}); k) \longrightarrow H^*(\mathbf{Y}; k) \oplus H^*(\mathbf{Y}; k) \longrightarrow H^*(\delta(\mathbf{Y}); k) \xrightarrow{[+1]} \quad (*)$$

où $\delta(\mathbf{Y})$ désigne le bord de \mathbf{Y} . Comme $\delta(\mathbf{Y})$ est une variété topologique compacte, ses nombres de Betti sur k sont également finis. L'exactitude de (*) permet de conclure. ■

2.9.2. Proposition. *Le tableau suivant donne, pour chaque $m \in \mathbb{N}$, un espace vectoriel ayant la même dimension que le m -ième groupe l'homologie d'intersection de \mathbf{X} pour la perversité p et pour le système local $\underline{k}_{\mathbf{U}}$.*

m	0	...	p	$p+1$	$p+2$...	$d_{\mathbf{X}}$	$d_{\mathbf{X}}+1$
$I_p H^m(\mathbf{X}, \underline{k}_{\mathbf{U}})$	$H^0(\mathbf{U})$...	$H^p(\mathbf{U})$	$\ker(q_{p+1})$	$H_c^{p+2}(\mathbf{U})$...	$H_c^{d_{\mathbf{X}}}(\mathbf{U})$	0

où $H^*(_)$ (resp. $H_c^*(_)$) désigne la cohomologie (resp. à support compact) à coefficients dans k , et $q_{p+1} : H^{p+1}(\tilde{\mathbf{U}}) \rightarrow H^{p+1}(\delta(\tilde{\mathbf{U}})) = H^{p+1}(\mathbb{L})$ est le morphisme de restriction. De

^s On rappelle qu'on appelle ainsi les nombres $B_m(\mathbf{Y}; k) := \dim_k(H^m(\mathbf{Y}; k))$.

plus,

$$\mathcal{P}(\mathbf{X}; \mathbf{U}) \supseteq \left\{ (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid p + q = d_{\mathbf{X}} - 2 \right\}$$

Démonstration. On reprend les notations de paragraphes qui précèdent la proposition. La suite exacte longue de Mayer-Vietoris pour la décomposition $\mathbf{X} = \tilde{\mathbf{U}} \cup \mathbf{Z}_\varepsilon$ et le complexe de faisceaux $\mathcal{F}^\bullet = \tau_{\leq p} Ri_{U*}(\underline{k}_U)$ vaut dans notre cas :

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 z_1 \quad \mathbb{L}_{z_1} \quad \mathbb{L}_{z_2} \quad z_2 \\
 \text{X} \\
 \\
 c_{z_1}(\mathbb{L}_{z_1}) \quad c_{z_2}(\mathbb{L}_{z_2}) \\
 \tilde{\mathbf{U}} \cap \mathbf{Z}_\varepsilon \\
 \mathbb{L}_{z_1} \times]0, 1[\quad \mathbb{L}_{z_2} \times]0, 1[
 \end{array}
 \quad \Bigg| \quad
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 [+1] \downarrow \\
 I_p H^m(\mathbf{X}; \underline{k}_U) \\
 \downarrow \\
 H^m(\tilde{\mathbf{U}}) \oplus \left(\bigoplus_{z \in \mathbf{Z}} I_p H^m(c_z(\mathbb{L}_z)) \right) \\
 \beta_m \downarrow \\
 H^m(\tilde{\mathbf{U}} \cap \mathbf{Z}_\varepsilon) = H^m(\delta(\tilde{\mathbf{U}}) \times]0, 1[) \cong H^m(\mathbb{L}) \\
 [+1] \downarrow
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

Les morphismes β_m sont surjectifs pour tout $m \leq p$ (cf. 2.4.4), donc :

$$\dim_k (I_p H^m(\mathbf{X}; \underline{k}_U)) = \dim_k (H^m(\tilde{\mathbf{U}}; k)) = \dim_k (H^m(\mathbf{U}; k)), \text{ pour tout } m \leq p.$$

puisque $\tilde{\mathbf{U}}$ est retract par déformation de \mathbf{U} (cf. 1.6.2-(b)).

Lorsque $m \geq p + 1$, on a $I_p H^m(c_z(\mathbb{L}_z)) = 0$ pour tout $z \in \mathbf{Z}$, et β_m s'identifie au morphisme de restriction $\tilde{\beta}_m : H^m(\tilde{\mathbf{U}}; k) \rightarrow H^m(\mathbb{L}; k)$ que l'on retrouve, par ailleurs, dans la suite exacte longue associée au triangle exact $\Delta(\tilde{\mathbf{U}} \setminus \mathbb{L}, \tilde{\mathbf{U}}, \mathbb{L}; \underline{k}_{\tilde{\mathbf{U}}})$:

$$\xrightarrow{[+1]} H_c^m(\tilde{\mathbf{U}} \setminus \mathbb{L}; k) \xrightarrow{\alpha_m} H^m(\tilde{\mathbf{U}}; k) \xrightarrow{\tilde{\beta}_m} H^m(\mathbb{L}; k) \xrightarrow{[+1]} \quad (\star)$$

On en déduit :

$$\dim_k (I_p H^m(\mathbf{X}; \underline{k}_U)) = \dim_k (H_c^m(\tilde{\mathbf{U}} \setminus \mathbb{L}; k)) = \dim_k (H_c^m(\mathbf{U}; k)), \text{ pour } m > p + 1.$$

puisque $\tilde{\mathbf{U}} \setminus \mathbb{L}$ est homéomorphe à \mathbf{U} . Et, pour terminer :

$$I_p H^{p+1}(\mathbf{X}; \underline{k}_U) = \ker(\tilde{\beta}_{p+1})$$

puisque β_p est surjective. Ce qui achève la justification du tableau de la proposition.

La deuxième partie de la proposition est conséquence immédiate de la dualité de Poincaré vérifiée par \mathbf{U} sauf à un endroit où l'on est conduit à vérifier l'égalité des dimensions $\dim_k(\ker(\tilde{q}_{p+1})) = \dim_k(\ker(\tilde{q}_{d_{\mathbf{X}}-(p+1)}))$, ou encore, par l'exactitude de (\star) , l'égalité :

$$\dim_k(\text{im}(\tilde{\alpha}_{p+1})) = \dim_k(\text{im}(\tilde{\alpha}_{d_{\mathbf{X}}-(p+1)})) \quad (\star\star)$$

où

$$H_c^*(U; k) \xrightarrow{\tilde{\alpha}_*} H^*(U; k)$$

est la composée de α_* avec le morphisme de restriction $H^*(\tilde{U}; k) \rightarrow H^*(U; k)$ qui est un isomorphisme pour des raisons d'homotopie. Or, comme U est supposée lisse et orientable, elle vérifie la dualité de Poincaré, *i.e.*

$$H^*(U; k) \equiv \text{Hom}(H_c^{d_U - *}(U; k); k),$$

et comme les nombres de Betti sur k de U sont finis (lemme 2.9.1), on a aussi :

$$H_c^*(U; k) \equiv \text{Hom}(H^{d_U - *}(U; k); k).$$

Le morphisme $\tilde{\alpha}_*$ coïncide alors avec son transposé au décalage près, *i.e.* $\tilde{\alpha}_m = {}^t\tilde{\alpha}_{d_X - m}$ pour tout $m \in \mathbb{Z}$. L'égalité ($\star\star$) en résulte et la proposition est démontrée. ■

2.10 Homologie d'intersection d'une variété topologique compacte à coefficients dans le complémentaire d'une sous-variété fermée

Cette partie généralise l'étude de la section 2.9 et c'est le premier exemple où le sous-espace Z n'est pas supposée de dimension nulle.

On se donne une variété topologique X compacte de dimension d_X et une sous-variété topologique $Z \subseteq X$ de dimension d_Z . L'ouvert $U := X \setminus Z$ est alors une variété topologique de dimension d_X dont on suppose qu'elle est orientable⁹. On rappelle que, par définition de sous-variété topologique, pour chaque point $z \in Z$, il existe un voisinage ouvert V_z de z dans X et un homéomorphisme $\varphi_z : V_z \rightarrow \mathbb{R}^{d_Z} \times \mathbb{R}^{d_X - d_Z}$ tel que $\varphi_z(V_z \cap Z) = \mathbb{R}^{d_Z} \times \{0\}$. En particulier, $V_z \cap U$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^{d_Z} \times (\mathbb{R}^{d_X - d_Z} \setminus \{0\})$ et on a une homotopie

$$V_z \cap U \sim \mathbb{S}^{d_X - d_Z - 1}, \text{ pour tout } z \in Z. \quad (*)$$

Il est d'autre part clair qu'à partir de la donnée d'un tel voisinage V_z on peut construire une base de voisinages ouverts de z dans X vérifiant la propriété (*). Il s'ensuit que, pour tout $z \in Z$, le complexe $(\mathbb{R}i_{U*}(\underline{k}_U))_z$ calcule la cohomologie de la sphère $\mathbb{S}^{d_X - d_Z - 1}$ (nulle en tous degrés sauf 0 et $d_X - d_Z - 1$). Par conséquent, les morphismes naturels entre troncutures successives suivants sont tous des quasi-isomorphismes.

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{IC}_0^\bullet \rightarrow \underline{IC}_1^\bullet \rightarrow \underline{IC}_2^\bullet \rightarrow \cdots \rightarrow \mathbb{R}i_{U*}(\underline{k}_U), \quad \text{lorsque } d_X - d_Z \leq 1; \\ \underline{IC}_0^\bullet \rightarrow \underline{IC}_1^\bullet \rightarrow \underline{IC}_2^\bullet \rightarrow \cdots \rightarrow \underline{IC}_{d_X - d_Z - 2}^\bullet \\ \underline{IC}_{d_X - d_Z - 1}^\bullet \rightarrow \underline{IC}_{d_X - d_Z}^\bullet \rightarrow \cdots \rightarrow \mathbb{R}i_{U*}(\underline{k}_U) \end{array} \right\} \text{ lorsque } d_X - d_Z \geq 2.$$

Ces remarques constituent l'essentiel de la démonstration de la proposition suivante dont nous laissons les détails comme exercice.

⁹ Lorsque $d_X - d_Z \geq 2$, cette condition équivaut à l'orientabilité de X puisque, dans ce cas, les morphismes d'adjonction $\underline{Qr}_X \rightarrow i_{U*}\underline{Qr}_U \equiv i_{U*}\underline{k}_U \leftarrow \underline{k}_X$ sont des isomorphismes. Par contre, lorsque $d_X - d_Z = 1$, la variété X peut ne pas être orientable comme le montre l'exemple où X est le ruban de Möbius et Z est son cercle médian.

2.10.1. Proposition. Avec les données précédentes, on a :

$$I_p H^*(\mathbf{X}; \underline{k}_U) = \begin{cases} H^*(U; k) & \text{lorsque } p \geq d_X - d_Y - 1, \\ H^*(\mathbf{X}; k) & \text{sinon.} \end{cases}$$

En particulier

$$\begin{cases} \mathcal{P}(\mathbf{X}; U) \supseteq [0, d_X - d_Y - 2]^2, & \text{en général, et} \\ \mathcal{P}(\mathbf{X}; U) = \emptyset, & \text{lorsque } d_X - d_Z = 1. \\ \mathcal{P}(\mathbf{X}; U) = \mathbb{N}^2, & \text{lorsque } d_X = d_Z. \end{cases}$$

2.10.2. Remarque. Les conséquences suivantes méritent d'être relevées.

- Lorsque Z est de codimension 1 dans X les groupes d'homologie d'intersection ne vérifient jamais la dualité de Poincaré.
- Lorsque Z est de codimension strictement plus grande que 1 dans X , des groupes d'homologie d'intersection vérifiant la dualité de Poincaré existent et s'identifient tous à la cohomologie ordinaire de X .
- Dans (b) l'homologie d'intersection de X ne voit pas la sous-variété Z .

2.11 Comparaison des études 2.9 et 2.10

La définition de espace singulier à singularités isolées de 2.9 n'exclut pas le cas où X est une variété topologique et Z est un sous ensemble fini de X (on dit dans ce cas que les singularités de Z sont « *inessentielles* »). Le cas où $d_X \geq 2$ est donc commun aux propositions 2.9.2 et 2.10.1. A ce propos 2.9.2 donne le tableau suivant :

m	0	...	p	$p+1$	$p+2$...	d_X	d_X+1	...
$I_p H^m(\mathbf{X}, \underline{k}_U)$	$H^0(U)$...	$H^p(U)$	$\ker(H^{p+1}(\tilde{U}) \rightarrow H^{p+1}(\mathbb{L}))$	$H_c^{p+2}(U)$...	$H_c^{d_X}(U)$	0	...

La suite exacte longue associée au triangle exact $\Delta(U, \mathbf{X}, Z; \underline{k}_X)$ est :

$$\xrightarrow{[+1]} H_c^*(U; k) \xrightarrow{\nu_*} H^*(\mathbf{X}; k) \longrightarrow H^*(Z; k) \xrightarrow{[+1]}$$

et comme $H^m(Z; k) = 0$, pour tout $m > 0$, on a toujours :

$$\begin{cases} H_c^m(U; k) \equiv H^m(\mathbf{X}; k), & \text{pour tout } m \geq 2, \text{ et} \\ H_c^1(U; k) \xrightarrow{\nu^!} H^1(\mathbf{X}; k), & \text{est surjective.} \end{cases} \quad (\ddagger)$$

D'autre part, la suite exacte longue associée au triangle exact $\Delta(Z, \mathbf{X}, U; \underline{k}_X)$ est :

$$\xrightarrow{[+1]} H_Z^*(\mathbf{X}; k) \longrightarrow H^*(\mathbf{X}; k) \longrightarrow H^*(U; k) \xrightarrow{[+1]}$$

où $H_Z^m(\mathbf{X}; k) = 0$, pour tout $m \neq d_X$, puisque X est une variété topologique. On en déduit :

$$H^m(\mathbf{X}; k) \equiv H^m(U; k), \text{ pour tout } m \leq d_X - 2.$$

Enfin, \mathbb{L} est maintenant une réunion de sphères de dimension $d_X - 1$, donc $H^{p+1}(\mathbb{L}; k) = 0$ pour tout $p \leq d_X - 3$, et alors :

$$\ker(H^{p+1}(\tilde{U}) \rightarrow H^{p+1}(\mathbb{L})) = H^{p+1}(\tilde{U}) = H^{p+1}(U) = H^{p+1}(X)$$

pour tout $0 \leq p \leq d_X - 3$.

Reste à comprendre $\ker(H^{d_X-1}(\tilde{U}) \rightarrow H^{d_X-1}(\mathbb{L}))$.

Le morphisme de triangles exacts $\Delta(U, \tilde{U}, \mathbb{L}; \underline{k}) \rightarrow \Delta(U \amalg Z_\varepsilon, X, \mathbb{L}; \underline{k})$ associé au plongement fermé $\tilde{U} \subseteq X$ induit un morphisme de suites exactes longues :

$$\begin{array}{ccccccccc} \longrightarrow & H^{d_X-2}(\mathbb{L}) & \longrightarrow & H_c^{d_X-1}(U) \oplus H_c^{d_X-1}(Z_\varepsilon) & \xrightarrow{\beta} & H^{d_X-1}(X) & \longrightarrow & H^{d_X-1}(\mathbb{L}) & \longrightarrow \\ & \parallel & & \alpha \downarrow & & \gamma \downarrow & & \parallel & \\ \longrightarrow & H^{d_X-2}(\mathbb{L}) & \longrightarrow & H_c^{d_X-1}(U) & \longrightarrow & H^{d_X-1}(\tilde{U}) & \xrightarrow{\delta} & H^{d_X-1}(\mathbb{L}) & \longrightarrow \end{array}$$

où $H_c^{d_X-1}(Z_\varepsilon) = 0$ puisque Z_ε est une réunion disjointe de variétés topologiques homéomorphes à \mathbb{R}^{d_X} . Le morphisme α est l'identité et γ est donc bijectif. Enfin, comme $d_X - 1 \geq 1$, le morphisme β est surjectif (\dagger) et, par conséquent, $\ker(\delta) = H^{d_X-1}(X)$.

Ces remarques montrent bien la concordance des propositions en question.

2.12 Conclusions

a) Dans tous les exemples considérés où Z est de codimension supérieure ou égale à 2 dans X , on a

$$\dim_k(I_p H^m(X; \underline{k}_U)) = \dim_k(I_q H_c^{d_X-m}(X; \underline{k}_U)), \text{ pour tout } m \in \mathbb{Z}. \quad (\diamond)$$

pour tous les couples

$$(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \text{ tels que } p + q = d_X - 2. \quad (\diamond\diamond)$$

b) Lorsque Z est de codimension 1 dans X , il existe des exemples pour lesquels (\diamond) n'est jamais vérifié.

Une large partie des sections suivantes est consacrée à l'explication et à la généralisation de ces phénomènes.

§ 3. Dualité sur les espaces stratifiés

L'homologie d'intersection sur les espaces localement compacts concerne la classe d'espaces topologiques connus sous le nom de « *pseudovariétés* ». Voici un extrait des articles de Goresky-MacPherson [GoMc₁,GoMc₂] où la notion est introduite.

Definition. A topological *pseudomanifold* of dimension n is a purely n -dimensional stratified paracompact Hausdorff topological space X which admits a stratification

$$X = X_n \supseteq \dots \supseteq X_1 \supseteq X_0$$

such that $X_{n-1} = X_{n-2}$ (i.e., $S_n = X - X_{n-2}$ is an n -dimensional manifold which is dense in X). We use the symbol Σ to denote the singularity subset X_{n-2} .

Le but de cette section est de revoir chaque ingrédient intervenant dans cette définition et aussi de rappeler le formalisme de la « *dualité de Grothendieck-Verdier* » pour les espaces stratifiés et donc pour les pseudovariétés.

3.1 Espace topologiquement stratifié

Dans la définition de « *pseudovariété* » rappelée dans le paragraphe précédent, apparaît l'expression « *purely n -dimensional stratified paracompact Hausdorff topological space* ». Les paragraphes qui suivent sont destinés à rappeler sa signification.

Commençons par la notion d'« *espace topologiquement stratifié de dimension d* » dont la définition, de nature inductive (cf. [GoMc₁,GoMc₂]), est la suivante :

- a) En dimension 0. Il s'agit des ensembles finis ou dénombrables munis de la topologie discrète ;
- b) En dimension positive d , il s'agit d'un espace topologique \mathbf{X} muni d'une filtration par des parties fermées :

$$\mathfrak{F} := \left(\mathbf{X} = \mathbf{X}_d \supseteq \mathbf{X}_{d-1} \supseteq \dots \supseteq \mathbf{X}_1 \supseteq \mathbf{X}_0 \supseteq \mathbf{X}_{-1} = \emptyset \right),$$

telle que pour chaque $c = 0, \dots, d$ et chaque $x \in \mathbf{X}_{d-c} \setminus \mathbf{X}_{d-(c+1)}$, il existe un voisinage ouvert N_x de x dans \mathbf{X} , un espace **compact** $\mathbb{L}(x)$ topologiquement stratifié de dimension $c-1$:

$$\mathbb{L}(x) = \mathbb{L}(x)_{c-1} \supseteq \mathbb{L}(x)_{c-2} \supseteq \dots \supseteq \mathbb{L}(x)_1 \supseteq \mathbb{L}(x)_0 \supseteq \mathbb{L}(x)_{-1} = \emptyset,$$

et un homéomorphisme

$$\phi : \mathbb{R}^{d-c} \times c(\mathbb{L}(x)) \xrightarrow{\sim} N_x \quad (\diamond)$$

dont la restriction au sous-espace $\mathbb{R}^{d-c} \times c(\mathbb{L}(x)_j)$ est bijective sur $N_x \cap \mathbf{X}_{d-c+j+1}$, pour tout j vérifiant $c-1 \geq j \geq -1$. En particulier, $(N_x \cap \mathbf{X}_{d-c}) \sim \mathbb{R}^{d-c}$ et le sous-espace $\mathbf{S}^c := \mathbf{X}_{d-c} \setminus \mathbf{X}_{d-(c+1)}$ est une partie localement fermée de \mathbf{X} qui est une variété topologique de dimension réelle $d-c$ lorsque elle est non vide.

Les voisinages N_x sont souvent appelés « *distingués* ».

Chaque composante connexe de \mathbf{S}^c est appelée « *strate (de codimension c)* » de l'espace stratifié \mathbf{X} .

3.1.1. Remarques complémentaires

a) Le cône d'un espace topologique \mathbb{L} est le quotient topologique de $[0, 1[\times \mathbb{L}$ par la relation d'équivalence qui identifie les points de première coordonnée nulle. Il est commode de noter $c(\mathbb{L})$ par une notation qui rappelle celle du produit d'un scalaire par un vecteur,

$$c(\mathbb{L}) = \{t \cdot \ell \mid \ell \in \mathbb{L}; t \in [0, 1]\}.$$

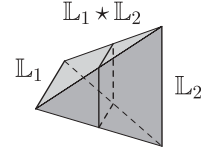
Le produit de deux cônes se décompose en trois parties

$$c(\mathbb{L}) \times c(\mathbb{M}) = \{(t \cdot \ell, v \cdot m)\} = \begin{cases} t \cdot (\ell, (v/t) \cdot m) & \text{pour } t > v \geq 0 \\ t \cdot (\ell, m) & \text{pour } t = v \geq 0 \\ v \cdot ((t/v) \cdot \ell, m) & \text{pour } v > t \geq 0 \end{cases}$$

qui font apparaître $c(\mathbb{L}) \times c(\mathbb{M})$ comme le cône d'un nouvel espace topologique: «*la jonction*» («*the join*» en anglais) de \mathbb{L} et \mathbb{M} , notée $\mathbb{L} \star \mathbb{M}$ et définie par $\{(t \cdot \ell, (1-t) \cdot m)\}$. On a :

$$c(\mathbb{L}) \times c(\mathbb{M}) = c(\mathbb{L} \star \mathbb{M})$$

(*)



Exercice. Montrer que tout point d'un espace topologiquement stratifiable admet un voisinage homéomorphe au cône d'un espace topologiquement stratifiable.

Lorsque $\mathbb{L} = \mathbb{L}_d \supseteq \mathbb{L}_{d-1} \supseteq \cdots \supseteq \mathbb{L}_0 \supseteq \emptyset$ est un espace topologiquement stratifié, le cône $c(\mathbb{L})$, muni de la filtration :

$$c(\mathbb{L}_d) \supseteq c(\mathbb{L}_{d-1}) \supseteq \cdots \supseteq c(\mathbb{L}_0) \supseteq c(\emptyset) = \text{pt} \supseteq \emptyset$$

est topologiquement stratifié de dimension $d+1$. De même, si $(\mathbb{L}, \mathcal{F})$ et $(\mathbb{M}, \mathcal{G})$ sont stratifiés de dimensions $d_{\mathbb{L}}$ et $d_{\mathbb{M}}$, l'espace $\mathbb{L} \times \mathbb{M}$ est muni de la filtration $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$ définie par :

$$(\mathbb{L} \times \mathbb{M})_m = \cup_{a+b=m} (\mathbb{L}_a \times \mathbb{M}_b),$$

est stratifié de dimension $d_{\mathbb{L}} + d_{\mathbb{M}}$.

Nous laissons au soin du lecteur d'imaginer la stratification de $\mathbb{L} \star \mathbb{M}$, de se convaincre que l'isomorphisme (*) est bien un isomorphisme d'espaces stratifiés, et de prouver le lemme suivant.

Lemme. *Étant données deux espaces topologiquement stratifiés*

$$\mathbf{X}_d \supseteq \mathbf{X}_{d-1} \supseteq \cdots \supseteq \mathbf{X}_r \supseteq \emptyset \quad \text{et} \quad \mathbf{X}_r \supseteq \mathbf{X}_{r-1} \supseteq \cdots \supseteq \mathbf{X}_0 \supseteq \emptyset,$$

la filtration

$$\mathbf{X}_d \supseteq \mathbf{X}_{d-1} \supseteq \cdots \supseteq \mathbf{X}_r \supseteq \mathbf{X}_{r-1} \supseteq \cdots \supseteq \mathbf{X}_0 \supseteq \emptyset$$

est une stratification topologique de \mathbf{X} .

Exercice. Montrer par un contreexemple que l'implication inverse est fautive en général, même lorsque \mathbf{X}_r est une variété topologique.

- b) Dans la condition 3.1-(b)-(◇), l'espace $\mathbb{L}(x)$ est localement constant sur la strate contenant x , mais on prendra garde du fait qu'il dépend de manière essentielle de la stratification, par exemple, dans une variété topologique \mathbf{X} de dimension d munie de la stratification triviale ($\mathbf{X}_{d-1} = \emptyset$), on a $\mathbb{L}(x) = \emptyset$, mais munie de la stratification $\mathbf{X} \supseteq \{x\} \supseteq \emptyset$, on a $\mathbb{L}(x) = \mathbb{S}^{d-1}$.
- c) On prouve par récurrence sur la dimension qu'un espace topologiquement stratifié est toujours séparé, localement compact, dénombrable à l'infini, métrisable, de dimension cohomologique finie.
- d) D'après la condition (◇) un espace topologiquement stratifié est toujours localement contractile donc localement connexe par arcs.

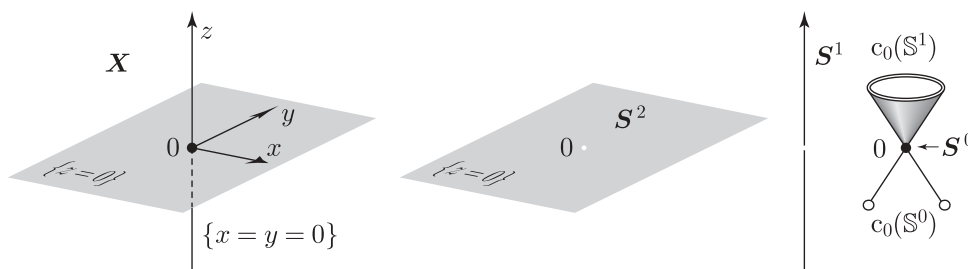
Dans la suite nous allons supposer ces conditions vérifiées par tous les espaces topologiques nous serons amenés à considérer. Ceci ne nous empêchera pourtant pas de le rappeler explicitement dans certains énoncés.

3.1.2. Commentaire. Il faut bien faire attention au fait que dans la définition 3.1 la différence \mathbf{S}^d peut être vide, ce qui implique qu'un espace topologiquement stratifié de dimension d est également de dimension d' pour tout $d' > d$.

D'autre part, les espaces $\mathbb{L}(x)$ peuvent eux-aussi être vides, ce qui, dans un autre langage, implique qu'un espace topologiquement stratifié peut être non équidimensionnel. Par exemple, $\mathbf{X} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z(x^2 + y^2) = 0\}$ muni de la filtration

$$\mathbf{X} \supseteq \Sigma := \{x = y = 0\} \supseteq \{0\}$$

est un espace topologiquement stratifié de dimension 2, où certains points ont des voisinages de dimension 1. Plus précisément, on a $\mathbb{L}(x) = \emptyset$, pour tout $x \neq 0$ et $\mathbb{L}(0) = \mathbb{S}^1 \amalg \mathbb{S}^0$:



3.1.3. Exemples. Les variétés algébriques \mathbf{X} (complexes ou réelles) irréductibles ou non, équidimensionnelles ou non, munies d'une stratification algébrique⁽¹⁰⁾ vérifiant les conditions de Whitney, sont des exemples d'espace topologiquement stratifié.

3.1.4. Espace topologiquement stratifié purement de dimension d . Il est facile de voir que si dans un espace topologiquement stratifié $(\mathbf{X}; \mathcal{F})$, l'ensemble \mathbf{S}^0 est non vide et

¹⁰ Chaque \mathbf{X}_i est un fermé algébrique de \mathbf{X} .

partout dense, il en est de même pour les espaces $\mathbb{L}(x)$, quel que soit $x \in \mathbf{X}$. Dans un tel cas, la dimension de \mathbf{X} est uniquement déterminée (elle coïncide alors avec $\dim_{\text{ch}}(\mathbf{X})$). Cette remarque est à la base de la définition suivante :

Définition. Un espace topologiquement stratifié de dimension d est dit « *purement de dimension d* » lorsque la réunion \mathbf{S}^0 des strates de codimension nulle est non vide et partout dense dans \mathbf{X} .

3.1.5. Exercices

- 1) Montrer que si $(\mathbf{X}; \mathcal{F})$ est un espace topologiquement stratifié purement de dimension d , l'espace $\mathbb{L}(x)$ est un espace topologiquement stratifié purement de dimension $d - i + 1$, quel que soit $x \in \mathbf{S}^i$.
- 2) Soit $(\mathbf{X}; \mathcal{F})$ un espace topologiquement stratifié de dimension d . Montrer que pour tout \mathbf{S}^i non vide, son adhérence $\overline{\mathbf{S}^i}$ munie de la filtration obtenue en restreignant \mathcal{F} à $\overline{\mathbf{S}^i}$ est un espace topologiquement stratifié purement de dimension $d - i$.
- 3) Montrer qu'un espace topologiquement stratifié de dimension d est réunion d'espaces topologiquement stratifiés purement de dimensions d' avec $d' \leq d$.

3.1.6. Commentaire. Il est clair que l'exemple de 3.1.2 n'est pas purement de dimension 2. Dans cet exemple, $\overline{\mathbf{S}^0}$ est le plan $\{z = 0\}$ et $\overline{\mathbf{S}^1}$ est la droite $\{x = y = 0\}$.

Dans le même ordre d'idées, les variétés algébriques \mathbf{X} (réelles ou complexes) munies de stratifications algébriques sont purement dimensionnelles, si et seulement si, elles sont algébriquement équidimensionnelles ⁽¹⁾.

3.1.7. Condition d'équisingularité. Dans la définition d'espace topologiquement stratifié, la condition (\diamond) (cf. 3.1-(b)) est une condition dite d'« *équisingularité locale* » en ce sens que pour chaque strate \mathbf{S} et pour chaque $x \in \mathbf{S}$, le type de singularité de x dans \mathbf{X} est localement constant par rapport à la strate \mathbf{S} . Il est important de comprendre que une filtration fermée d'un espace topologique \mathbf{X} où les différences $\mathbf{X}_i \setminus \mathbf{X}_{i-1}$ sont des variétés topologiques, ne vérifie pas nécessairement la condition d'équisingularité. Dans l'exemple 3.1.2, l'ensemble $\Sigma := \mathbf{X} \setminus \mathbf{S}^0$ est homéomorphe à la droite \mathbb{R} et les strates de la filtration $\mathbf{X} \supseteq \Sigma \supseteq \emptyset$ sont des variétés topologiques, pourtant la strate Σ ne vérifie pas la condition d'équisingularité locale au point 0.

La condition d'équisingularité locale joue un rôle essentiel dans la constructibilité des complexes de faisceaux, thème que nous développons dans la section suivante.

3.2 Constructibilité

3.2.1. Faisceaux dérivés. Pour tout complexe \mathbf{M}^\bullet d'objets d'une catégorie abélienne \mathcal{A} :

¹¹ Toutes ses composantes irréductibles sont de la même dimension algébrique.

$$\mathbf{M}^\bullet = (\dots \mathbf{M}^{m-1} \xrightarrow{d_{m-1}} \mathbf{M}^m \xrightarrow{d_m} \mathbf{M}^{m+1} \xrightarrow{d_{m+1}} \dots),$$

et tout $m \in \mathbb{Z}$, on appelle « m -ième objet dérivé de \mathbf{M}^\bullet » l'objet de \mathcal{A} défini par :

$$h^m \mathbf{M}^\bullet := \frac{\ker(d_m)}{\operatorname{im}(d_{m-1})}.$$

Dans le même ordre d'idées, si $\alpha_\bullet : \mathbf{M}^\bullet \rightarrow \mathbf{N}^\bullet$ est un morphisme de complexes de catégorie dérivée $D(\mathcal{A})$, on note $h^m \alpha_\bullet : h^m \mathbf{M}^\bullet \rightarrow h^m \mathbf{N}^\bullet$ le morphisme induit entre les objets dérivés correspondants.

La correspondance $\mathbf{M} \rightsquigarrow h^m \mathbf{M}^\bullet$, $\alpha_\bullet \rightsquigarrow h^m \alpha_\bullet$ définit un foncteur de la catégorie dérivée $D(\mathcal{A})$ vers la catégorie \mathcal{A} .

Lorsque $\mathcal{F}^\bullet \in C^*(\operatorname{Fais}(\mathbf{X}))$, on parle plutôt de «*faisceaux dérivés du complexe \mathcal{F}^\bullet* » et on note $\mathcal{H}^m \mathcal{F}^\bullet$ plutôt que $h^m \mathcal{F}^\bullet$.

3.2.2. Faisceaux dérivés à supports dans une partie localement fermé. Pour toute partie \mathbf{S} localement fermée dans \mathbf{X} , on note $\mathcal{H}_\mathbf{S}^m$ la composée des deux foncteurs $i_\mathbf{S}^! : D^+(\mathbf{X}) \rightsquigarrow D^+(\mathbf{S})$ et $\mathcal{H}^m : D^+(\mathbf{S}) \rightsquigarrow \operatorname{Fais}(\mathbf{S})$:

$$\boxed{\mathcal{H}_\mathbf{S}^m \mathcal{F}^\bullet := \mathcal{H}^m(i_\mathbf{S}^! \mathcal{F}^\bullet) \in \operatorname{Fais}(\mathbf{S})}$$

Cette définition généralise celle de \mathcal{H}^m puisque $\mathcal{H}_\mathbf{X}^m = \mathcal{H}^m$ de manière évidente.

3.2.3. Le triangle exact fondamental. Pour toute partie \mathbf{S} localement fermée dans \mathbf{X} , de complémentaire $\mathbf{A} := \mathbf{X} \setminus \mathbf{S}$, on a le triangle exact de $D^+(\mathbf{X})$:

$$i_\mathbf{S}^! i_\mathbf{S}^! \mathcal{F}^\bullet \longrightarrow \mathcal{F}^\bullet \longrightarrow \mathbb{R}i_{\mathbf{A}*} i_{\mathbf{A}}^{-1}(\mathcal{F}^\bullet) \xrightarrow{[+1]},$$

où $i_\mathbf{S} : \mathbf{S} \hookrightarrow \mathbf{X}$ et $i_\mathbf{A} : \mathbf{A} \hookrightarrow \mathbf{X}$ désignent les applications d'inclusion, dont on déduit la suite exacte longue :

$$\longrightarrow i_{\mathbf{S}!} \mathcal{H}_\mathbf{S}^m \mathcal{F}^\bullet \longrightarrow \mathcal{H}^m \mathcal{F}^\bullet \longrightarrow \mathcal{H}^m(\mathbb{R}i_{\mathbf{A}*}(\mathcal{F}^\bullet|_{\mathbf{A}})) \longrightarrow i_{\mathbf{S}!} \mathcal{H}_\mathbf{S}^{m+1} \mathcal{F}^\bullet \longrightarrow$$

3.2.4. Amplitudes d'un complexe. Soit \mathcal{A} une catégorie abélienne. Pour tout complexe $\mathbf{M}^\bullet \in C^*(\mathcal{A})$, on appelle

- «*amplitude de \mathbf{M}^\bullet* », notée $[[\mathbf{M}^\bullet]]_{\operatorname{cplx}}$, la réunion des intervalles $[a, b] \subseteq \mathbb{Z}$ tels que $\mathbf{M}^a \neq 0$ et $\mathbf{M}^b \neq 0$.
- «*amplitude cohomologique de \mathbf{M}^\bullet* », notée $[[\mathbf{M}^\bullet]]_{\operatorname{ch}}$, la réunion des intervalles $[a, b] \subseteq \mathbb{Z}$ tels que $h^a \mathbf{M}^\bullet \neq 0$ et $h^b \mathbf{M}^\bullet \neq 0$.

Remarques. Pour tout complexe $\mathbf{M}^\bullet \in C^*(\mathcal{A})$, on a :

- $[[\mathbf{M}^\bullet]]_{\operatorname{ch}} \subseteq [[\mathbf{M}^\bullet]]_{\operatorname{cplx}}$.
- $[[\mathbf{M}^\bullet[m]]]_{\operatorname{ch}} = [[\mathbf{M}^\bullet]]_{\operatorname{ch}} - m$ et $[[\mathbf{M}^\bullet[m]]]_{\operatorname{cplx}} = [[\mathbf{M}^\bullet]]_{\operatorname{cplx}} - m$.

3.2.5. Troncatures intelligentes. Il convient de rappeler les définitions des deux types de troncature intelligentes :

Troncatures τ et τ' . Soit $m \in \mathbb{Z}$. Pour tout complexe de $C^*(\mathcal{A})$:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{M}^\bullet & = & \left(\dots \mathbf{M}^{m-1} \xrightarrow{d_{m-1}} \mathbf{M}^m \xrightarrow{d_m} \mathbf{M}^{m+1} \xrightarrow{d_{m+1}} \mathbf{M}^{m+2} \xrightarrow{d_{m+2}} \dots \right), \\ \text{on pose} & & \parallel & & \parallel & & \subseteq \uparrow & & 0 \uparrow \\ \tau_{\leq m} \mathbf{M}^\bullet & := & \left(\dots \mathbf{M}^{m-1} \xrightarrow{d_{m-1}} \mathbf{M}^m \xrightarrow{d_m} \text{im}(d_m) \xrightarrow{0} \mathbf{0} \xrightarrow{0} \dots \right), \\ \text{et} & & \parallel & & \subseteq \uparrow & & 0 \uparrow & & 0 \uparrow \\ \tau_{\leq m}' \mathbf{M}^\bullet & := & \left(\dots \mathbf{M}^{m-1} \xrightarrow{d_{m-1}} \ker(d_m) \xrightarrow{0} \mathbf{0} \xrightarrow{0} \mathbf{0} \xrightarrow{0} \dots \right), \end{array}$$

On définit ensuite :

$$\boxed{\tau_{> m} \mathbf{M}^\bullet := \mathbf{M}^\bullet / \tau_{\leq m} \mathbf{M}^\bullet \quad \text{et} \quad \tau'_{> m} \mathbf{M}^\bullet := \mathbf{M}^\bullet / \tau'_{\leq m} \mathbf{M}^\bullet}$$

Remarque. Les notations $\tau_{< m}^*$ et $\tau_{\leq m-1}^*$ (resp. $\tau_{> m}^*$ et $\tau_{\geq m+1}^*$) seront considérées équivalentes.

Pour tout morphisme de complexes $\alpha_\bullet : \mathbf{M}^\bullet \rightarrow \mathbf{N}^\bullet$, on a les inclusions naturelles

$$\alpha_m(\ker(d_m(\mathbf{M}))) \subseteq \ker(d_m(\mathbf{N})) \quad \text{et} \quad \alpha_{m+1}(\text{im}(d_m(\mathbf{M}))) \subseteq \text{im}(d_m(\mathbf{N}))$$

et on peut définir

$$(\tau_{\leq m} \alpha_\bullet)_n = \begin{cases} \alpha_n & \text{si } n \leq m \\ \alpha_{m+1}|_{\text{im}(d_m(\mathbf{M}))}, & \text{si } n = m+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\tau'_{\leq m} \alpha_\bullet)_n = \begin{cases} \alpha_n & \text{si } n < m \\ \alpha_m|_{\ker(d_m(\mathbf{M}))}, & \text{si } n = m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On obtient ainsi des correspondances fonctorielles (additives) et des inclusions et surjections naturelles

$$\begin{aligned} \tau'_{\leq m} \subseteq \tau_{\leq m} \subseteq \text{id} : C^*(\mathcal{A}) &\rightsquigarrow C^*(\mathcal{A}) \quad \text{et} \quad \text{id} \rightarrow \tau'_{> m} \rightarrow \tau_{> m} : C^*(\mathcal{A}) \rightsquigarrow C^*(\mathcal{A}) \\ \tau_{\leq m}^* \subseteq \tau_{\leq n}^* &\quad \text{et} \quad \tau_{> m}^* \rightarrow \tau_{> n}^*, \quad \text{pour tous } m \leq n. \end{aligned}$$

le tout compatible au passage en catégorie dérivée.

3.2.6. Lemme. Pour tout complexe $\mathbf{M}^\bullet \in C^*(\mathcal{A})$ et tout $m \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\text{a) } h^i(\tau_{\leq m}^* \mathbf{M}^\bullet) = \begin{cases} h^i \mathbf{M}^\bullet & \text{si } i \leq m; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad \text{et} \quad h^i(\tau_{> m}^* \mathbf{M}^\bullet) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \leq m; \\ h^i \mathbf{M}^\bullet & \text{sinon.} \end{cases}$$

où τ^* désigne indifféremment τ et τ' ;

b) des suites exactes courtes (induisant des triangles exacts en catégorie dérivée)

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &\longrightarrow \tau_{\leq m} \mathbf{M}^\bullet \xrightarrow{\subseteq} \mathbf{M}^\bullet \longrightarrow \tau_{> m} \mathbf{M}^\bullet \longrightarrow \mathbf{0} \\ \mathbf{0} &\longrightarrow \tau'_{\leq m} \mathbf{M}^\bullet \xrightarrow{\subseteq} \mathbf{M}^\bullet \longrightarrow \tau'_{> m+1} \mathbf{M}^\bullet \longrightarrow \mathbf{0} \end{aligned}$$

c) des inclusions pour les amplitudes des complexes :

$$\llbracket \tau_{\geq m} \mathbf{M}^\bullet \rrbracket_{\text{cplx}} \subseteq [m, +\infty] \quad \text{et} \quad \llbracket \tau'_{\leq m} \mathbf{M}^\bullet \rrbracket_{\text{cplx}} \subseteq [-\infty, m]$$

d) Pour tous $a \leq b \in \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$, il existe un complexe \mathbf{N}^\bullet vérifiant $\llbracket \mathbf{N}^\bullet \rrbracket_{\text{cplx}} \subseteq [a, b]$ et un isomorphisme canonique **en catégorie dérivée** de \mathbf{N}^\bullet vers $\tau_{\geq a}^*(\tau_{\leq b}^* \mathbf{M}^\bullet)$. Un tel complexe sera noté ${}^a\llbracket \mathbf{M}^\bullet \rrbracket^b$. En particulier,

- i) \mathbf{M}^\bullet est canoniquement isomorphe à un complexe dont l'amplitude en tant que complexe coïncide avec $\llbracket \mathbf{M}^\bullet \rrbracket_{\text{ch}}$.
- ii) Pour tous $a \leq b < c \in \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$ et tout complexe \mathbf{M}^\bullet , on a un triangle exact en catégorie dérivée :

$${}^a\llbracket \mathbf{M}^\bullet \rrbracket^b \longrightarrow {}^a\llbracket \mathbf{M}^\bullet \rrbracket^c \longrightarrow {}^{b+1}\llbracket \mathbf{M}^\bullet \rrbracket^c \longrightarrow$$

Démonstration. Tout est évident dans la mesure où $\tau_{\leq m'}$ préserve la cohomologie en degrés inférieurs ou égaux à m et tue les objets en degrés strictement supérieurs à m (*mutatis mutandis* pour $\tau_{\leq m'}$). L'assertion (d), dans le cas $\tau_{\geq a}'(\tau_{\leq b} \mathbf{M}^\bullet)$, résulte de composer en catégorie dérivée les quasi-isomorphismes canoniques :

$$\tau'_{\geq a}(\tau_{\leq b} \mathbf{M}^\bullet) \longleftarrow \tau'_{\geq a}(\tau'_{\leq b} \mathbf{M}^\bullet) \longrightarrow \tau_{\geq a}(\tau'_{\leq b} \mathbf{M}^\bullet) =: {}^a\llbracket \mathbf{M}^\bullet \rrbracket^b. \quad \blacksquare$$

3.2.7. Complexes \mathcal{X} -cohomologiquement localement constants

Définitions. Un complexe $\mathcal{F}^\bullet \in C^*(\text{Fais}(\mathbf{X}))$ est dit « *cohomologiquement localement constant* », « clc » en bref, lorsque ses faisceaux dérivés $\mathcal{H}^m \mathcal{F}^\bullet$ sont localement constants.

Plus généralement, soit \mathcal{X} une partition de \mathbf{X} . Un complexe $\mathcal{F}^\bullet \in C^*(\text{Fais}(\mathbf{X}))$ est dit « *\mathcal{X} -cohomologiquement localement constant* », « \mathcal{X} -clc » en bref, lorsque la restriction $\mathcal{F}^\bullet|_{\mathcal{S}}$ est clc, quel que soit $\mathcal{S} \in \mathcal{X}$. Bien évidemment, il revient au même de demander que les restrictions $\mathcal{H}^m \mathcal{F}^\bullet|_{\mathcal{S}}$ soient des faisceaux localement constants sur \mathcal{S} , pour tous $\mathcal{S} \in \mathcal{X}$ et $m \in \mathbb{Z}$.

Un complexe \mathcal{X} -clc \mathcal{F}^\bullet est dit « *\mathcal{X} -cohomologiquement constructible* », « \mathcal{X} -cc » en bref, si chaque faisceau $\mathcal{H}^m \mathcal{F}^\bullet|_{\mathcal{S}}$ est un système local.

On dira qu'un faisceau \mathcal{F} est clc, \mathcal{X} -clc, \mathcal{X} -cc, lorsque le complexe $\mathcal{F}[0]$ l'est.

3.2.8. Notations. Les sous-catégories pleines des catégories $D^*(\mathbf{X})$ ($* = \{+, -, b\}$) des complexes clc, \mathcal{X} -clc, \mathcal{X} -cc seront notées $D_{\text{clc}}^*(\mathbf{X})$, $D_{\mathcal{X}\text{-clc}}^*(\mathbf{X})$, $D_{\mathcal{X}\text{-cc}}^*(\mathbf{X})$.

3.2.9. Théorème. Soit \mathcal{X} une partition de \mathbf{X} en parties localement contractiles. La sous-catégorie $D_{k;\mathcal{X}\text{-clc}}(\mathbf{X})$ (resp. \mathcal{X} -cc) munie des triangles exacts de $D_k(\mathbf{X})$ dont les sommets sont des complexes \mathcal{X} -clc (resp. \mathcal{X} -cc), est une catégorie triangulée.

Démonstration. Il suffit de montrer que le cône d'un morphisme de complexes \mathcal{X} -clc est \mathcal{X} -clc. Soit $\alpha_\bullet : \mathcal{F}^\bullet \rightarrow \mathcal{G}^\bullet$ un tel morphisme. Pour tout $S \in \mathcal{X}$, on considère la suite exacte longue de faisceaux

$$\xrightarrow{[+1]} \mathcal{H}^m \mathcal{F}^\bullet|_S \xrightarrow{\mathcal{H}^m \alpha_\bullet} \mathcal{H}^m \mathcal{G}^\bullet|_S \longrightarrow \mathcal{H}^m \mathcal{C}(\alpha_\bullet)|_S \xrightarrow{[+1]} \longrightarrow$$

Nous avons montré que les noyau et conoyau d'un morphisme de faisceaux entre deux faisceaux localement constants sont eux-mêmes localement constants. En particulier, le faisceau $\mathcal{H}^m \mathcal{C}(\alpha_\bullet)|_S$ est extension de deux faisceaux localement constants :

$$\mathbf{0} \longrightarrow \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{H}^m \mathcal{C}(\alpha_\bullet)|_S \xrightarrow{q} \mathcal{L}_2 \longrightarrow \mathbf{0} \quad (\ddagger)$$

Pour $x \in S$ soit W_x un voisinage contractile de x dans S . On a la suite longue de cohomologie :

$$\mathbf{0} \longrightarrow \Gamma(W_x, \mathcal{L}_1) \longrightarrow \Gamma(W_x; \mathcal{H}^m \mathcal{C}(\alpha_\bullet)|_S) \xrightarrow{q(W_x)} \Gamma(W_x, \mathcal{L}_2) \xrightarrow{[+1]} H^1(W_x, \mathcal{L}_1) \longrightarrow$$

où $H^1(W_x; \mathcal{L}_1) = 0$, d'après le théorème d'homotopie sur les espaces contractiles. Le morphisme $q(W_x)$ est alors surjectif et toute section de $q(W_x)$ donne lieu à une section, dans la catégorie des faisceaux, de la restriction de (\ddagger) à W_x . Par conséquent, $\mathcal{H}^m \mathcal{C}(\alpha_\bullet)|_{W_x}$ est isomorphe au faisceau constant $\mathcal{L}_1|_{W_x} \oplus \mathcal{L}_2|_{W_x}$. Tout ceci étant vrai au voisinage de chaque point de S , le faisceau $\mathcal{H}^m \mathcal{C}(\alpha_\bullet)|_S$ est bien localement constant. ■

3.2.10. Remarque. Dans le cas « cc », l'hypothèse de locale contractibilité des parties de \mathcal{X} n'est pas nécessaire. En effet, une surjection de faisceaux sur un système local est de la forme $q : \mathcal{F} \rightarrow \underline{k}_V^m$ pour V assez petit. Comme d'autre part, $\text{Hom}(\underline{k}_V^m, \mathcal{F}) = \text{Hom}(c^m, \Gamma(V; \mathcal{F}))$, le morphisme q admet une section, si et seulement si, on peut relever simultanément les m générateurs canoniques de \underline{k}_V^m , ce qui est toujours possible, quitte à rétrécir V , puisque $m < \infty$.

3.2.11. Remarque. Soient O_1, O_2, E trois objets d'une catégorie triangulée \mathcal{T} . On dit que « E est extension de O_2 par O_1 », lorsqu'il existe un triangle exact :

$$O_1 \xrightarrow{u} E \xrightarrow{v} O_2 \xrightarrow{[+1]} \cdot \quad (*)$$

Une sous catégorie pleine $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$, stable par le foncteur de translation de \mathcal{T} , est dite « sous-catégorie triangulée », lorsque, munie des triangles exacts de \mathcal{T} à sommets dans \mathcal{T}' , c'est une catégorie triangulée.

Une sous catégorie triangulée \mathcal{T}' d'une catégorie triangulée \mathcal{T} est toujours « stable par extensions dans \mathcal{T} ». En effet, étant donné un triangle $(*)$ exact dans \mathcal{T} , avec $O_i \in \text{Ob}(\mathcal{T}')$, le morphisme $U_2 \xrightarrow{w} U_1[1]$ se complète en un triangle exact de \mathcal{T}'

$$O_2 \xrightarrow{w} O_1[1] \xrightarrow{\bar{u}} O_3 \xrightarrow{[+1]} \bar{v}$$

et il existe un morphisme $h : E[1] \rightarrow O_3$ tel que

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{O}_2 & \xrightarrow{w} & \mathcal{O}_1[1] & \xrightarrow{-u} & \mathbf{E}[1] \xrightarrow{\frac{-v}{[+1]}} \\
\parallel & & \parallel & & \downarrow h \\
\mathcal{O}_2 & \xrightarrow{w} & \mathcal{O}_1[1] & \xrightarrow{\bar{u}} & \mathcal{O}_3 \xrightarrow{\frac{\bar{v}}{[+1]}}
\end{array}$$

est un morphisme de triangles exacts de \mathcal{T} . Le morphisme h alors est nécessairement un isomorphisme et \mathbf{E} est bien isomorphe à un objet de \mathcal{T}' .

Le théorème 3.2.9 montre donc que les catégories $D_{k,\mathcal{X}\text{-clc}}^*(\mathbf{X})$ et $D_{k,\mathcal{X}\text{-cc}}^*(\mathbf{X})$ sont stables par extension dans $D_k(\mathbf{X})$. On a donc :

3.2.12. Proposition. *Soit \mathbf{X} un espace topologique muni d'une partition en parties localement contractiles \mathcal{X} . Pour tout ouvert $U \subseteq \mathbf{X}$ réunion de parties de \mathcal{X} , de fermé complémentaire $F := \mathbf{X} \setminus U$, il suffit que deux termes des triangles exacts $\Delta(U, \mathbf{X}, F; \mathcal{F}^\bullet)$ et $\Delta(F, \mathbf{X}, U; \mathcal{F}^\bullet)$ soient $\mathcal{X}\text{-clc}$ (resp. $\mathcal{X}\text{-cc}$) pour que le troisième le soit.*

3.3 Théorème d'homotopie

3.3.1. Filtrations fermées. Pour toute filtration finie \mathcal{F} d'un espace topologique \mathbf{X} par des parties fermées \mathbf{X}_i :

$$\mathcal{F} = \left(\mathbf{X} = \mathbf{X}_d \supseteq \mathbf{X}_{d-1} \supseteq \cdots \supseteq \mathbf{X}_0 \supseteq \mathbf{X}_{-1} = \emptyset \right)$$

on note :

- $U_{\mathcal{F}}^c := \mathbf{X} \setminus \mathbf{X}_{d-(c+1)}$, et U^c pour \mathcal{F} sous-entendue ; d'où la filtration ouverte :

$$U^0 \xrightarrow{\subseteq} U^1 \xrightarrow{\subseteq} \cdots \xrightarrow{\subseteq} U^{d-1} \xrightarrow{\subseteq} U^d = \mathbf{X}$$

- $S_{\mathcal{F}}^c := \mathbf{X}_{d-c} \setminus \mathbf{X}_{d-(c+1)}$, et S^c pour \mathcal{F} sous-entendue ; d'où la partition en parties localement fermées :

$$U^c = S^0 \amalg S^1 \amalg \cdots \amalg S^c$$

où l'inclusion $j_c : S^c \hookrightarrow U^c$ est un plongement fermé.

- $U^{c+1} = U^c \amalg S^c$ réunion disjointe d'un ouvert et un fermé de U^{c+1} . En particulier, pour tout $\mathcal{F}^\bullet \in D(U^{c+1})$, on a les triangles exacts :

$$\begin{array}{lcl}
\Delta(U^c, U^{c+1}, S^{c+1}; \mathcal{F}^\bullet) & : & i_{c!}(\mathcal{F}^\bullet|_{U^c}) \longrightarrow \mathcal{F}^\bullet \longrightarrow j_{c+1!}(\mathcal{F}^\bullet|_{S^{c+1}}) \xrightarrow{[+1]} \\
\Delta(S^{c+1}, U^{c+1}, U^c; \mathcal{F}^\bullet) & : & j_{c+1*}(j_{c+1}^! \mathcal{F}^\bullet) \longrightarrow \mathcal{F}^\bullet \longrightarrow Ri_{c*}(\mathcal{F}^\bullet|_{U^c}) \xrightarrow{[+1]}
\end{array}$$

Notations et terminologie particulières

- Par analogie avec les espaces stratifiés, chaque composante connexe d'une partie S^c non vide sera appelée « *strate (de codimension c) de \mathcal{F}* ».
- La notation $\text{Strat}(\mathcal{F})$ désignera suivant le contexte :
 - l'ensemble de toutes les strates de \mathcal{F} ,
 - la partition de \mathbf{X} définie par les strates de \mathcal{F} ,
 - l'espace topologique réunion disjointe des strates de \mathcal{F} ,

- On notera aussi :

$U \in \mathcal{F}$: pour indiquer que U est l'une des parties U^\bullet .

$F \in \mathcal{F}$: pour indiquer que F est l'une des parties X_\bullet .

$D_{\mathcal{F}\text{-clc}}^*(U^c)$: clc par rapport à la partition de U^c induite par $\text{Strat}(\mathcal{F})$.

$D_{\mathcal{F}\text{-cc}}^*(U^c)$: cc par rapport à la partition de U^c induite par $\text{Strat}(\mathcal{F})$.

3.3.2. Homotopies filtrées. Étant donné un espace topologique filtré $(Y; \mathcal{F})$ et une application continue $f: X \rightarrow Y$, on induit une filtration fermée sur X , notée $f^{-1}\mathcal{F}$, en posant $X_i := f^{-1}Y_i$.

Il est clair que la restriction de f à une strate de $f^{-1}\mathcal{F}$ est à valeurs dans une unique strate de \mathcal{F} . L'application f se relève, par conséquent, en une application continue $\text{Strat}(f): \text{Strat}(f^{-1}\mathcal{F}) \rightarrow \text{Strat}(\mathcal{F})$.

Homotopie filtrée. Avec les notations précédentes, on dira que deux applications continues $f, g: X \rightarrow Y$ sont « \mathcal{F} -homotopes» lorsqu'il existe une application continue

$$h: [0, 1] \times X \longrightarrow Y$$

telle que $h_0 = f$, $h_1 = g$ et $h_t^{-1}\mathcal{S} = h_{t'}^{-1}\mathcal{S}$ pour tous $t, t' \in [0, 1]$ et $\mathcal{S} \in \text{Strat}(\mathcal{F})$. Une telle application est appelée une «*homotopie entre f et g filtrée par \mathcal{F}* ».

3.3.3. Remarque. Il est clair que si f et g sont \mathcal{F} -homotopes, $\text{Strat}(f^{-1}\mathcal{F}) = \text{Strat}(g^{-1}\mathcal{F})$ et les applications $\text{Strat}(f)$ et $\text{Strat}(g)$ sont homotopes au sens classique du terme.

3.3.4. Exercice. Soit $Y = [0, 2] \subseteq \mathbb{R}$ muni de la filtration $\mathcal{F} = (Y \supseteq \{0, 1, 2\} \supseteq \emptyset)$. Soient $f, g: Y \rightarrow Y$ les applications $f(x) = x/2$ et $g(x) = (x+1)/2$. Vérifier les assertions suivantes.

- f et g sont homotopes au sens classique du terme.
- $f^{-1}\mathcal{F} = g^{-1}\mathcal{F}$.
- f et g ne sont pas \mathcal{F} -homotopes.

Déformation de rétraction filtrée. On considère maintenant un sous-espace X de Y . On rappelle qu'une «*déformation de rétraction de Y sur X* » est une application continue $h: [0, 1] \times Y \rightarrow Y$ telle que

$$h_0 = \text{id}_Y, \quad h_1(Y) \subseteq X, \quad \text{et} \quad h_1|_X = \text{id}_X$$

Lorsque, de plus, pour chaque strate \mathcal{S} de \mathcal{F} la restriction $h|_{[0,1] \times \mathcal{S}}$ est à valeurs dans \mathcal{S} , on dit que « *h est une déformation de rétraction de Y sur X filtrée par \mathcal{F}* », ou encore, que « *X est \mathcal{F} -retract par déformation de Y* ».

Remarque. Soit $i_X: X \hookrightarrow Y$ l'inclusion, l'application $\text{Strat}(i_X): \text{Strat}(i_X^{-1}\mathcal{F}) \rightarrow \text{Strat}(\mathcal{F})$ est un homéomorphisme sur son image et $\text{Strat}(i_X^{-1}\mathcal{F})$ se voit comme sous-espace de

$\text{Strat}(\mathcal{F})$. Lorsque \mathbf{X} est un \mathcal{F} -retract par déformation de \mathbf{Y} , le sous-espace $\text{Strat}(i_{\mathbf{X}}^{-1}\mathcal{F})$ est un retract par déformation de $\text{Strat}(\mathcal{F})$ au sens classique du terme

Commentaire. Ce qu'il faut retenir des définitions précédentes, c'est le fait que les homotopies et déformations que l'on considère lorsque l'on se donne une filtration \mathcal{F} , sont *globalement* définies et "respectent" la filtration en ce sens qu'elles se restreignent naturellement aux strates.

3.3.5. Théorème d'homotopie. Le théorème suivant est une généralisation fondamentale du théorème d'homotopie pour les faisceaux localement constants 1.6.2.

Théorème. Soit $(\mathbf{Y}; \mathcal{F})$ un espace topologique muni d'une filtration fermée. Alors

a) Pour toute application continue $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$, on a

$$f^{-1}D_{\mathcal{F}\text{-clc}}^*(\mathbf{Y}) \subseteq D_{f^{-1}\mathcal{F}\text{-clc}}^*(\mathbf{X}) \quad \text{et} \quad f^{-1}D_{\mathcal{F}\text{-cc}}^*(\mathbf{Y}) \subseteq D_{f^{-1}\mathcal{F}\text{-cc}}^*(\mathbf{X})$$

On suppose maintenant $\mathcal{F}^\bullet \in D_{\mathcal{F}\text{-clc}}^+(\mathbf{Y})$.

b) Si $f_0, f_1 : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ sont \mathcal{F} -homotopes, il existe un isomorphisme canonique en catégorie dérivée entre les complexes $f_0^{-1}\mathcal{F}^\bullet$ et $f_1^{-1}\mathcal{F}^\bullet$ qui identifie les morphismes

$$\mathbb{H}^*(\mathbf{Y}; \mathcal{F}^\bullet) \xrightarrow{\mathbb{H}^*(f_0)} \mathbb{H}^*(\mathbf{X}; f_0^{-1}\mathcal{F}^\bullet) \quad \text{et} \quad \mathbb{H}^*(\mathbf{Y}; \mathcal{F}^\bullet) \xrightarrow{\mathbb{H}^*(f_1)} \mathbb{H}^*(\mathbf{X}; f_1^{-1}\mathcal{F}^\bullet)$$

c) Si \mathbf{X} est \mathcal{F} -retract par déformation de \mathbf{Y} , le morphisme de restriction

$$\mathbb{H}^*(\mathbf{Y}; \mathcal{F}^\bullet) \longrightarrow \mathbb{H}^*(\mathbf{X}; \mathcal{F}^\bullet|_{\mathbf{X}})$$

est un isomorphisme.

Démonstration

a) Affirmation évidente.

b) Soit $h : [0, 1] \times \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ une \mathcal{F} -homotopie entre f_0 et f_1 . Pour chaque $t \in [0, 1]$, notons $i_t : \mathbf{X} \rightarrow [0, 1] \times \mathbf{X}$ l'application $x \mapsto (t, x)$ et $f_t := h \circ i_t = h(t, _)$. Soit $p : [0, 1] \times \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$ la projection canonique $(t, x) \mapsto x$, on a $p \circ i_t = \text{id}_{\mathbf{X}}$. En appliquant au morphisme d'adjonction $(h^{-1}\mathcal{F}^\bullet) \rightarrow i_{t*}i_t^{-1}(h^{-1}\mathcal{F}^\bullet) \equiv i_{t*}(f_t^{-1}\mathcal{F}^\bullet)$ le foncteur p_* , on obtient un morphisme naturel de foncteurs :

$$\Xi_t(\mathcal{F}^\bullet) : p_*(h^{-1}\mathcal{F}^\bullet) \longrightarrow p_*i_{t*}(f_t^{-1}\mathcal{F}^\bullet) \equiv f_t^{-1}\mathcal{F}^\bullet.$$

Montrons que $\mathbb{R}\Xi_t(_) : \mathbb{R}p_*h^{-1}(_) \rightarrow f_t^{-1}(_)$ est un **isomorphisme naturel** de foncteurs définis sur la catégorie $D_{\mathcal{F}\text{-clc}}^+(\mathbf{Y})$ à valeurs dans $D^+(\mathbf{X})$.

Réduction au cas des faisceaux \mathcal{F} -clc. Soient $F, G : \mathcal{A}_1 \rightsquigarrow \mathcal{A}_2$ deux foncteurs additifs entre catégories abéliennes dont \mathcal{A}_1 possède assez d'injectifs. Soit $\Xi : F \rightarrow G$ une

$$\begin{array}{ccc} & \mathbf{X} & \\ & \downarrow i_t & \searrow f_t \\ [0, 1] \times \mathbf{X} & \xrightarrow{h} & \mathbf{Y} \\ \downarrow p & & \\ \mathbf{X} & & \end{array}$$

transformation naturelle entre ces foncteurs. Pour tout complexe $M^\bullet \in D(\mathcal{A}_1)$ et tout $m \in \mathbb{Z}$, on a le triangle exact (cf. 3.2.6-(d)) :

$${}^{-\infty}\lfloor M^\bullet \rfloor^m \longrightarrow M^\bullet \longrightarrow {}^{m+1}\lfloor M^\bullet \rfloor^\infty \xrightarrow{[+1]}$$

dont on déduit le morphisme de triangles exacts

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{R}F({}^{-\infty}\lfloor M^\bullet \rfloor^m) & \longrightarrow & \mathcal{R}F(M^\bullet) & \longrightarrow & \mathcal{R}F({}^{m+1}\lfloor M^\bullet \rfloor^\infty) \xrightarrow{[+1]} \\ \mathcal{R}\Xi({}^{-\infty}\lfloor M^\bullet \rfloor^m) \downarrow & & \mathcal{R}\Xi(M^\bullet) \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{R}G({}^{-\infty}\lfloor M^\bullet \rfloor^m) & \longrightarrow & \mathcal{R}G(M^\bullet) & \longrightarrow & \mathcal{R}G({}^{m+1}\lfloor M^\bullet \rfloor^\infty) \xrightarrow{[+1]} \end{array}$$

Or, $\llbracket {}^{m+1}\lfloor M^\bullet \rfloor^\infty \rrbracket_{\text{cplx}} \subseteq [m+1, +\infty]$ et alors, par la définition même de foncteur dérivé à droite, on a

$$\llbracket \mathcal{R}F({}^{m+1}\lfloor M^\bullet \rfloor^\infty) \rrbracket_{\text{cplx}} \subseteq [m+1, +\infty].$$

En particulier, $\mathcal{R}\Xi^c(M^\bullet)$ est un isomorphisme pour tout $c \leq m$, si et seulement si, il en est de même pour $\mathcal{R}\Xi({}^{-\infty}\lfloor M^\bullet \rfloor^m)$. Par conséquent, il suffit de s'assurer que $\mathcal{R}\Xi({}^{-\infty}\lfloor M^\bullet \rfloor^m)$ est un isomorphisme pour tout $m \in \mathbb{Z}$, pour que $\mathcal{R}F(M^\bullet)$ le soit également.

Or, lorsque $M^\bullet \in D^+(\mathcal{A}_1)$, on a $\llbracket M^\bullet \rrbracket_{\text{ch}} \subseteq [-N, \infty]$ pour un certain $N \in \mathbb{N}$ assez grand et le triangle exact de complexes d'amplitude finie (cf. 3.2.6-(d)) :

$${}^{-N}\lfloor M^\bullet \rfloor^{m-1} \longrightarrow {}^{-N}\lfloor M^\bullet \rfloor^m \longrightarrow {}^m\lfloor M^\bullet \rfloor^m = h^m M^\bullet \longrightarrow$$

A partir de là, il est aisé de démontrer par induction sur la taille de l'amplitude des complexes, qu'il suffit que le morphisme $\mathcal{R}\Xi(h^c M^\bullet) : \mathcal{R}F(h^c M^\bullet) \rightarrow \mathcal{R}G(h^c M^\bullet)$ soit un isomorphisme pour chaque $c \in \mathbb{Z}$, pour que $\mathcal{R}\Xi({}^{-\infty}\lfloor M^\bullet \rfloor^m)$, et alors aussi $\mathcal{R}\Xi(M^\bullet)$, le soient.

Dans le cas qui nous occupe, $\mathcal{F}^\bullet \in D_{\mathcal{F}\text{-clc}}^+(\mathbf{Y})$ et chaque $\mathcal{H}^m \mathcal{F}^\bullet$ est \mathcal{F} -clc. Nous sommes donc réduits à prouver que $\mathcal{R}\Xi_t(\mathcal{F})$ est isomorphisme pour un faisceau \mathcal{F} tel que $\mathcal{F}|_{\mathcal{S}}$ est localement constant sur toute strate \mathcal{S} de \mathcal{F}_Y .

La démonstration est une induction sur le nombre de fermés non vides de la filtration fermée \mathcal{F}_Y . Lorsqu'il n'y a qu'un fermé, le faisceau \mathcal{F} est localement constant et on a déjà démontré que $\mathcal{R}\Xi_t(\mathcal{F})$ est un isomorphisme. Dans le cas général, on a la partition $\mathbf{Y} = \mathcal{S}^0 \amalg \mathbf{Y}_1$ dont on déduit la partition $\mathbf{X} = \mathbf{U} \amalg \mathbf{F}$, avec $\mathbf{U} := f_t^{-1}(\mathcal{S}^0)$ et $\mathbf{F} := f_t^{-1}(\mathbf{Y}_1)$. On note $i_U : \mathbf{U} \hookrightarrow \mathbf{X}$ et $i_F : \mathbf{F} \hookrightarrow \mathbf{X}$ les inclusions respectivement ouverte et fermée d'où la suite exacte courte de foncteurs

$$\mathbf{0} \longrightarrow i_U! i_U^{-1}(-) \longrightarrow (-) \longrightarrow i_F! i_F^{-1}(-) \longrightarrow \mathbf{0}$$

permettant de « dévisser » le morphisme $\mathcal{R}\Xi_t(\mathcal{F})$ suivant :

$$\begin{array}{ccccc} i_U! i_U^{-1} \mathcal{R}p_* h^{-1} \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{R}p_* h^{-1} \mathcal{F} & \longrightarrow & i_F! i_F^{-1} \mathcal{R}p_* h^{-1} \mathcal{F} \xrightarrow{[+1]} \\ \alpha \downarrow & & \mathcal{R}\Xi_t(\mathcal{F}) \downarrow & & \beta \downarrow \\ i_U! i_U^{-1} f_t^{-1} \mathcal{F} & \longrightarrow & f_t^{-1} \mathcal{F} & \longrightarrow & i_F! i_F^{-1} f_t^{-1} \mathcal{F} \xrightarrow{[+1]} \end{array} \quad (\diamond)$$

L'homotopie h étant filtrée par \mathcal{F} , on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbf{S}^0 & \xrightarrow[i_{\mathcal{S}^0}]{\subseteq} & \mathbf{Y} & \xleftarrow[i_{\mathbf{Y}_1}]{\supseteq} & \mathbf{Y}_1 \\
h_U \uparrow & & \uparrow h & & \uparrow h_F \\
& \oplus & & \oplus & \\
[0, 1] \times \mathbf{U} & \xrightarrow[i_{\mathbf{U}}]{\subseteq} & [0, 1] \times \mathbf{X} & \xleftarrow[i_{\mathbf{F}}]{\supseteq} & [0, 1] \times \mathbf{F} \\
p_U \downarrow & & \downarrow p & & \downarrow p_F \\
& \square & & \square & \\
\mathbf{U} & \xrightarrow[i_{\mathbf{U}}]{\subseteq} & \mathbf{X} & \xleftarrow[i_{\mathbf{F}}]{\supseteq} & \mathbf{F}
\end{array}$$

et, par changement de base sur les sous-diagrammes cartésiennes (p , p_U et p_F , sont propres!),

$$\begin{cases}
i_U^{-1} \mathbb{R}p_* h^{-1} = \mathbb{R}p_{U*} i_U^{-1} h^{-1} = \mathbb{R}p_{U*} h_U^{-1} \\
i_F^{-1} \mathbb{R}p_* h^{-1} = \mathbb{R}p_{F*} i_F^{-1} h^{-1} = \mathbb{R}p_{U*} h_F^{-1}
\end{cases}$$

dont on déduit les identifications

$$\alpha = i_{U!}(\mathbb{R}\Xi_t(\mathcal{F}|_{\mathbf{S}^0})) \quad \text{et} \quad \beta = i_{F!}(\Xi_t(\mathcal{F}|_{\mathbf{Y}_1})),$$

qui montrent que α et β sont tous les deux des isomorphismes puisque $\mathcal{F}|_{\mathbf{S}^0}$ est localement constant, et par hypothèse inductive pour le second, puisque la filtration que \mathcal{F} induit sur \mathbf{Y}_1 possède un fermé de moins. Ceci termine la démonstration du fait que $\mathbb{R}\Xi_t(\mathcal{F}^\bullet)$ est un isomorphisme en catégorie dérivée. La deuxième affirmation de (b) en découle.

- c) On utilise (b) où h est une déformation de rétraction de \mathbf{Y} sur \mathbf{X} filtrée par \mathcal{F} . Comme h_1 est homotope à $\text{id}_{\mathbf{Y}}$, le complexe $h_1^{-1}\mathcal{F}^\bullet$ est isomorphe en catégorie dérivée à $h_0^{-1}\mathcal{F}^\bullet = \mathcal{F}^\bullet$ et le morphisme naturel

$$\mathbb{H}^*(\mathbf{Y}, \mathcal{F}^\bullet) \xrightarrow{\cong} \mathbb{H}^*(\mathbf{X}; h_1^{-1}\mathcal{F}^\bullet) \quad (*)$$

est un isomorphisme. En factorisant h_1 à travers \mathbf{X} par $h_1 = i_X^Y \circ h'_1$, on obtient la factorisation de (*) en composée d'une injection et une surjection:

$$\mathbb{H}^*(\mathbf{Y}, \mathcal{F}^\bullet) \xrightarrow{\nu_*} \mathbb{H}^*(\mathbf{X}; \mathcal{F}^\bullet|_{\mathbf{X}}) \xrightarrow{\varepsilon_*} \mathbb{H}^*(\mathbf{Y}; h_1^{-1}\mathcal{F}^\bullet)$$

Or, ε_* est injectif puisque $h_1^{-1}\mathcal{F}^\bullet = h_1'^{-1}(\mathcal{F}^\bullet|_{\mathbf{X}})$ et que $h_1'^{-1} \circ i_X^Y = \text{id}_{\mathbf{X}}$. Par conséquent, ν_* est bien bijectif et le théorème est démontré. ■

3.3.6. Corollaire. Soit $(\mathbf{X}; \mathcal{F})$ un espace topologiquement stratifié. Pour tout $c \in \mathbb{N}$, l'image du foncteur

$$\mathbb{R}i_{c*} : D_{\mathcal{F}\text{-clc}}^+(U^c) \rightsquigarrow D(U^{c+1})$$

est contenue dans $D_{\mathcal{F}\text{-clc}}^+(U^{c+1})$. En particulier,

$$\mathbb{R}i_{U^0*}^{\mathbf{X}}(D_{\text{clc}}^+(U^0)) \subseteq D_{\mathcal{F}\text{-clc}}^+(\mathbf{X}).$$

Démonstration. Soit $\mathcal{F}^\bullet \in D_{\mathcal{F}\text{-clc}}^+(U^c)$. On doit montrer que pour toute strate S de \mathcal{F} contenue dans U^{c+1} et pour chaque $m \in \mathbb{Z}$, le faisceau $\mathcal{H}^m(\mathbb{R}i_{c*}\mathcal{F}^\bullet)|_S$ est localement constant.

Lorsque $S \subseteq U^c$ on n'a rien à démontrer puisque $\mathcal{H}^m(\mathbb{R}i_{c*}\mathcal{F}^\bullet)|_S = \mathcal{H}^m\mathcal{F}^\bullet|_S$.

Lorsque $S \subseteq S^{c+1}$, et puisque la question est de nature locale, on se ramène, grâce à la structure d'espace topologiquement stratifié de U^{c+1} , au voisinage de chaque point $x \in S$ de la forme $N_x \sim \mathbb{R}^n \times c_x(\mathbb{L}(x))$, où $\mathbb{L}(x)$ est un espace topologiquement stratifié compact. La filtration de N_x induite par \mathcal{F} correspond alors à la filtration donnée par les inclusions

$$\mathbb{R}^n \times c_x(\mathbb{L}(x)_j) \supseteq \mathbb{R}^n \times c_x(\mathbb{L}(x)_{j-1}) \supseteq \cdots \supseteq \mathbb{R}^n \times c_x(\mathbb{L}(x)_{-1}) = \mathbb{R}^n,$$

et $N'_x := U^c \cap N_x$ correspond à $\mathbb{R}^n \times c_x(\mathbb{L}(x)) \setminus \mathbb{R}^n \times \{x\} = \mathbb{R}^n \times]0, 1[\times \mathbb{L}(x)$.

Notons $\mathbb{L} := \{0\} \times \{1/2\} \times \mathbb{L}(x)$. Il est parfaitement clair que chaque $y \in N_x \cap S$ admet une base de voisinages N_y "homothétique" de N_x et tels que les ouverts $N'_y := U^c \cap N(y)$ sont tous \mathcal{F} -homotopes à \mathbb{L} . Il s'ensuit, grâce au théorème d'homotopie 3.3, que pour tout $\mathcal{F}^\bullet \in D_{\mathcal{F}\text{-clc}}^+(N'_x)$ et tout $m \in \mathbb{Z}$, les morphismes canoniques de restriction

$$\begin{array}{c} \mathbb{H}^m(\mathbb{L}; \mathcal{F}^\bullet|_{\mathbb{L}}) \xleftarrow{\cong} \mathbb{H}^m(N'_x; \mathcal{F}^\bullet) \xrightarrow{\cong} \mathbb{H}^m(N'_y; \mathcal{F}^\bullet) = \mathbb{H}^m(N_y, \mathbb{R}i_{c*}\mathcal{F}^\bullet) = [\mathcal{H}^m \mathbb{R}i_{c*}\mathcal{F}^\bullet]_y \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{\alpha_{N_y}} \uparrow \\ \cong \end{array}$$

sont des isomorphismes. En particulier, on a une suite naturelle de morphismes dont la composée est bijective pour tout $y \in N_x \cap S$:

$$\begin{array}{c} \mathbb{H}^m(\mathbb{L}; \mathcal{F}^\bullet|_{\mathbb{L}}) \xrightarrow{\alpha_{N_x}} \mathbb{H}^m(N_x, \mathbb{R}i_{c*}\mathcal{F}^\bullet) \rightarrow \Gamma(N_x \cap S; \mathcal{H}^m \mathbb{R}i_{c*}\mathcal{F}^\bullet|_S) \rightarrow [\mathcal{H}^m \mathbb{R}i_{c*}\mathcal{F}^\bullet]_y \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{\beta_{N_x}} \uparrow \end{array}$$

Le morphisme β_{N_x} définit ainsi un morphisme de faisceaux clairement bijectif:

$$\underline{\underline{\mathbb{H}^m(\mathbb{L}; \mathcal{F}^\bullet|_{\mathbb{L}})_{N_x \cap S}}} \longrightarrow \mathcal{H}^m \mathbb{R}i_{c*}\mathcal{F}^\bullet|_{N_x \cap S}. \quad \blacksquare$$

Il convient de relever le résultat suivant prouvé dans cette démonstration.

3.3.7. Corollaire. On a $i_c : U^c \hookrightarrow U^{c+1} \supseteq S^{c+1} \ni x$ et $\mathcal{F}^\bullet \in D_{\mathcal{F}\text{-clc}}^+(U^c)$.

a) Il existe un isomorphisme canonique:

$$\boxed{[\mathcal{H}^m \mathbb{R}i_{c*}\mathcal{F}^\bullet]_x \cong \mathbb{H}^m(\mathbb{L}(x); \mathcal{F}^\bullet|_{\mathbb{L}(x)})}$$

Le sens intrinsèque du complexe $\mathcal{F}^\bullet|_{\mathbb{L}(x)}$ étant celui donné par le théorème d'homotopie (3.3-(b)).

b) Il existe une base de voisinages ouverts N_x de x dans U^{c+1} tels que

$$\boxed{\mathbb{H}_c^*(N_x; \mathbb{R}i_{c*}\mathcal{F}^\bullet) = 0}$$

Démonstration. L'assertion (a) est claire. Pour (b), on considère pour chaque voisinage $N_x \sim \mathbb{R}^n \times c_x(\mathbb{L})$ de la démonstration, les sous-voisinsages

$$N'_x \sim \overline{B}^n \times c'_x(\mathbb{L}) \subseteq \overline{N}'_x \sim \overline{B}^n \times \overline{c}'_x(\mathbb{L}),$$

où on a noté \overline{B}^n la boule fermée de \mathbb{R}^n de centre 0 et rayon 1, et

$$c'_s(\mathbb{L}) := \frac{\mathbb{L} \times [0, 1/2[}{\mathbb{L} \times \{0\}} \quad \text{et} \quad \overline{c}'_s(\mathbb{L}) := \frac{\mathbb{L} \times [0, 1/2]}{\mathbb{L} \times \{0\}}.$$

On observera que \overline{N}'_x est un voisinage compact de x réunion disjointe du voisinage ouvert N'_x et du compact $Z := (\overline{B}^n \times \mathbb{L} \times \{1/2\})$. La suite d'hypercohomologie à supports compacts relative à cette décomposition et au complexe $\mathbb{R}i_{c_*} \mathcal{F}^\bullet$ est :

$$\xrightarrow{[+1]} \mathbb{H}_c^m(N'_x; \mathbb{R}i_{c_*} \mathcal{F}^\bullet) \longrightarrow \mathbb{H}^m(\overline{N}'_x; \mathbb{R}i_{c_*} \mathcal{F}^\bullet) \xrightarrow{q_m} \mathbb{H}^m(Z; (\mathbb{R}i_{c_*} \mathcal{F}^\bullet)|_Z) \xrightarrow{[+1]}$$

où q_m s'identifie au morphisme de restriction de $\mathbb{H}^m(\overline{N}'_x \cap U^c; \mathcal{F}^\bullet)$ vers $\mathbb{H}^m(Z; \mathcal{F}^\bullet)$, car $Z \subseteq U^c$. Le morphisme q_m est donc un isomorphisme en vertu théorème d'homotopie (3.3) puisque $\overline{N}'_x \cap U^c$ est \mathcal{F} -homotope à Z . On en déduit l'annulation des termes $\mathbb{H}_c^m(N'_x; \mathcal{F}^\bullet)$ ce qui termine la preuve du corollaire. \blacksquare

3.4 Dualité de Grothendieck-Verdier

3.4.1. Image directe à supports propres. Soit $f : X \rightarrow Y$ une application continue entre deux espaces localement compacts. Le foncteur «*image directe à supports propres*» $f_! : \text{Fais}_k(X) \rightsquigarrow \text{Fais}_k(Y)$ associée à un faisceau \mathcal{F} le faisceau :

$$U \subseteq Y \rightsquigarrow f_! \mathcal{F}(U) := \left\{ \sigma \in \Gamma(U; \mathcal{F}) \mid f|_{|\sigma|} : |\sigma| \rightarrow U \text{ est propre} \right\};$$

c'est un foncteur additif et exact à gauche. Un faisceau c -mou est $f_!$ -acyclique et comme le produit tensoriel par un c -mou est c -mou, le foncteur dérivé $\mathbb{R}f_!$ est entièrement déterminé par la donnée d'une résolution c -molle particulière du faisceau constant \underline{k}_X . En effet, étant donnée une telle résolution \mathcal{I}^\bullet :

$$0 \rightarrow \underline{k}_X \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{I}^0 \longrightarrow \mathcal{I}^1 \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathcal{I}^d \longrightarrow \dots,$$

le complexe

$$0 \rightarrow \mathcal{F} = \mathcal{F} \otimes_{\underline{k}_X} \underline{k}_X \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{F} \otimes_{\underline{k}_X} \mathcal{I}^0 \longrightarrow \mathcal{F} \otimes_{\underline{k}_X} \mathcal{I}^1 \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathcal{F} \otimes_{\underline{k}_X} \mathcal{I}^d \longrightarrow \dots \quad (*)$$

est exact pour tout $\mathcal{F} \in \text{Fais}_k(X)$ puisque tout faisceau de k -espaces vectoriels est nécessairement plat. La suite (*) définit donc une résolution c -molle de \mathcal{F} et

$$\boxed{\mathbb{R}f_!(\mathcal{F}) \equiv f_!(\mathcal{F} \otimes \mathcal{I}^\bullet)}$$

3.4.2. Remarque importante. Lorsque \mathcal{F}^\bullet est un complexe de faisceaux (illimité), le terme de degré m de $\mathcal{F}^\bullet \otimes \mathcal{I}^\bullet$ est la somme directe $\bigoplus_{a+b=m} \mathcal{F}^a \otimes \mathcal{I}^b$ et c'est un faisceau c -mou ⁽¹²⁾. D'autre part, le foncteur $f_{\mathcal{I}^\bullet, !} : \mathcal{F}^\bullet \rightsquigarrow f_!(\mathcal{F}^\bullet \otimes \mathcal{I}^\bullet)$, étant additif de

¹² Conséquence du fait qu'une limite inductive filtrante de faisceaux c -mous est c -molle

$C_k^*(\mathbf{X})$ vers $C_k^*(\mathbf{Y})$, définit un foncteur entre les catégories de complexes à homotopie près $\mathcal{H}_k^*(\mathbf{X}) \rightsquigarrow \mathcal{H}_k^*(\mathbf{Y})$, et induira un foncteur entre catégories dérivées s'il transforme un quasi-isomorphisme en quasi-isomorphisme, ou bien s'il transforme un complexe acyclique en un complexe acyclique (argument du cône d'un morphisme), ou bien encore si $f_!$ transforme un complexe acyclique c -mou en complexe acyclique; ceci parce que $f_{\mathcal{G},!}$ est la composée du foncteur exact $- \otimes \mathcal{G}^\bullet$, qui produit de complexes c -mous, par $f_!$. Le domaine de définition du foncteur dérivé $\mathbb{R}f_!$ dans $D_k(\mathbf{X})$ dépend de la réponse à cette question.

La théorie générale des foncteurs dérivés à droite prouve l'existence de $\mathbb{R}f_!$ sur $D_k^+(\mathbf{X})$ et montre même que $f_{\mathcal{G},!}$ en est une réalisation. Lorsque $\dim_{\text{ch}}(\mathbf{X}) = d < \infty$ on peut aller beaucoup plus loin.

En effet, soit $(\mathcal{M}^\bullet; \partial_\bullet)$ un complexe (illimité) acyclique de faisceaux c -mous. Pour tout $m \in \mathbb{Z}$, le complexe $\tau_{\geq m-d} \mathcal{M}^\bullet$:

$$\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{N} := \ker(\partial_{m-(d+1)}) \xleftarrow{\subseteq} \mathcal{M}^{m-(d+1)} \xrightarrow{\partial_{m-(d+1)}} \dots \xrightarrow{\partial_{m-1}} \mathcal{M}^m \xrightarrow{\partial_m} \dots$$

est une résolution c -molle de \mathcal{N} et donc

$$h^m[f_!(\mathcal{M}^\bullet)] = \frac{\ker(f_!(\partial_m))}{\text{im}(f_!(\partial_{m-1}))} \equiv \mathbb{R}^{d+1}f_!(\mathcal{N}) = 0$$

puisque, \mathbf{X} étant de dimension cohomologique d , le faisceau constant $\underline{k}_{\mathbf{X}}$ admet une résolution c -molle de longueur d , et qu'alors le complexe $\mathbb{R}f_!(\mathcal{N}) = f_!(\mathcal{N} \otimes \mathcal{G}^\bullet)$ est nul en degrés supérieurs à d .

Par conséquent, lorsque $\dim_{\text{ch}}(\mathbf{X}) < \infty$ (ce que nous supposons désormais), le foncteur $f_{\mathcal{G},!} : \mathcal{H}_k^*(\mathbf{X}) \rightsquigarrow \mathcal{H}_k^*(\mathbf{Y})$ préserve l'acyclicité des complexes, qu'ils soient limités ou non, et induit un foncteur de $f_{\mathcal{G},!} : D_k(\mathbf{X}) \rightsquigarrow D_k(\mathbf{Y})$ sans restrictions.

Ce foncteur ne dépend pas de \mathcal{G}^\bullet . En effet, soit $\underline{k}_{\mathbf{X}} \rightarrow \mathcal{Q}^\bullet$ une autre résolution c -molle de $\underline{k}_{\mathbf{X}}$. En appliquant le foncteur $- \otimes \mathcal{Q}^\bullet$ à la résolution $\mathcal{F}^\bullet \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{F}^\bullet \otimes \mathcal{G}^\bullet$ on a un quasi-isomorphisme de complexes c -mous $\mathcal{F}^\bullet \otimes \mathcal{Q}^\bullet \rightarrow \mathcal{F}^\bullet \otimes \mathcal{G}^\bullet \otimes \mathcal{Q}^\bullet$, dont on déduit le quasi-isomorphisme canonique

$$f_{\mathcal{Q},!}(\mathcal{F}^\bullet) \longrightarrow f_{\mathcal{G} \otimes \mathcal{Q},!}(\mathcal{F}^\bullet)$$

puisque $f_!$ préserve les quasi-isomorphismes entre complexes c -mous. On a de même un quasi-isomorphisme canonique $f_{\mathcal{G},!}(\mathcal{F}^\bullet) \rightarrow f_{\mathcal{G} \otimes \mathcal{Q},!}(\mathcal{F}^\bullet)$ et donc $f_{\mathcal{G},!} \equiv f_{\mathcal{Q},!}$. On note alors

$$\boxed{\mathbb{R}f_! : D_k(\mathbf{X}) \rightsquigarrow D_k(\mathbf{Y})}$$

le foncteur ainsi défini dont on retiendra la réalisation

$$\mathbb{R}f_!(\mathcal{F}^\bullet) = f_!(\mathcal{F}^\bullet \otimes_{\underline{k}_{\mathbf{X}}} \mathcal{G}^\bullet)$$

avec $\underline{k}_{\mathbf{X}} \rightarrow \mathcal{G}^\bullet$ une résolution c -molle de longueur égale à $\dim_{\text{ch}}(\mathbf{X})$.

3.4.3. Proposition. Soient $\mathbf{X} \xrightarrow{f} \mathbf{Y} \xrightarrow{g} \mathbf{Z}$ deux application continues entre espaces localement compacts métrisables.

a) Si $\mathcal{F} \in \text{Fais}_k(\mathbf{X})$ est c -mou, $f_!\mathcal{F}$ est c -mou.

b) Le morphisme canonique $\mathbb{R}(g \circ f) \rightarrow \mathbb{R}g_! \circ \mathbb{R}f_!$ est un isomorphisme.

Démonstration

a) Soit K une partie compacte de \mathbf{Y} et σ une section de $f_! \mathcal{F}$ au-dessus de K . On sait que cette section est la restriction à K d'une section $\tau \in \Gamma(U; f_! \mathcal{F})$ pour un certain voisinage ouvert U de K . Notons $\tilde{U} := f^{-1}U$. Par définition de $f_!$, on a $\tau \in \Gamma(\tilde{U}; \mathcal{F})$ telle que $f|_{|\tau|} : |\tau| \rightarrow U$ est propre. Comme \mathcal{F} est c -mou et que $\tilde{K} := f^{-1}K$ est une partie compacte de \tilde{U} (propreté de $f|_{|\tau|}$), il existe un voisinage compact \tilde{K}_ϵ de \tilde{K} dans U , et une section $\tilde{\tau} \in \Gamma(\tilde{U}; \mathcal{F})$ telle que :

$$|\tilde{\tau}| \subseteq \tilde{K}_\epsilon \quad \text{et} \quad \tilde{\tau}|_{\tilde{K}} = \tau|_{\tilde{K}}$$

Il est clair maintenant que $\tilde{\tau} \in \Gamma(U; f_! \mathcal{F})$ est à support compact contenu dans U et qu'elle prolonge $\tau|_K$. La section $\tilde{\tau}$ se prolongeant par zéro à \mathbf{Y} tout entier, ceci prouve que $f_! \mathcal{F}$ est c -mou.

b) Soit $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^\bullet$ une résolution injective de $\mathcal{F} \in \text{Fais}_k(\mathbf{X})$. Comme tout injectif est c -mou, le complexe $f_! \mathcal{F}^\bullet$ est un complexe d'objets acycliques pour $g_!$ et le morphisme canonique $g_!(f_! \mathcal{F}^\bullet) \rightarrow \mathbb{R}g_!(f_! \mathcal{F}^\bullet)$ est un quasi-isomorphisme. Or le premier terme est précisément $\mathbb{R}(g \circ f)_!(\mathcal{F})$ et le second est $\mathbb{R}g_!(\mathbb{R}f_! \mathcal{F})$. ■

3.4.4. Plongements localement fermés. Les premiers exemples du foncteur image directe à support propre apparaissent dans le cas des plongements localement fermés $i_S : \mathbf{S} \hookrightarrow \mathbf{X}$, où le foncteur $i_{S!}$ est exact et admet un adjoint à droite : le foncteur des « sections à support dans \mathbf{S} ». On a un isomorphisme canonique naturel pour tous $\mathcal{F} \in \text{Fais}(\mathbf{S})$ et $\mathcal{G} \in \text{Fais}(\mathbf{X})$

$$\text{Hom}(i_{S!} \mathcal{F}, \mathcal{G}) \cong \text{Hom}(\mathcal{F}, \underline{\Gamma}_S \mathcal{G}).$$

d'où un isomorphisme d'adjonction en catégories dérivées :

$$\text{Hom}_{D_k(\mathbf{X})}(i_{S!} -, -) \cong \text{Hom}_{D_k(\mathbf{S})}(-, \mathbb{R}\underline{\Gamma}_S -).$$

Dans le cas particulier où \mathbf{S} est une partie ouverte U de \mathbf{X} , le foncteur de restriction i_U^{-1} est aussi adjoint à droite de $i_{U!}$ et donc $i_U^{-1} = \underline{\Gamma}_U$. Par conséquent

$$\Gamma(U, -) = \text{Hom}(\underline{k}_U, i_U^{-1} -) \cong \text{Hom}(i_{U!}(\underline{k}_U), -),$$

où le faisceau $i_{U!}(\underline{k}_U)$, appelé le « prolongement par zéro de \underline{k}_U », est traditionnellement noté ' \underline{k}_U ' malgré l'ambiguïté manifeste de cette notation.

La dernière équivalence induit une équivalence de foncteurs définis sur $C^*(\mathbf{X})$:

$$\Gamma(U, \mathcal{F}^\bullet) = \text{Hom}^\bullet(\underline{k}_U, i_U^{-1}(\mathcal{F}^\bullet)) \cong \text{Hom}^\bullet(i_{U!}(\underline{k}_U), \mathcal{F}^\bullet)$$

dont on déduit, sur $D_k^+(\mathbf{X})$:

$$\boxed{\mathbb{R}\Gamma(U, -) \cong \mathbb{R}\text{Hom}^\bullet(\underline{k}_U; -) \cong \mathbb{R}\Gamma(\mathbf{X}; \mathbb{R}\mathcal{H}\text{om}^\bullet(\underline{k}_U; -))}$$

3.4.5. Remarque. Nous nous sommes limités à formuler l'équivalence sur D^+ et non pas sur D . En fait, sous des hypothèses de finitude de $\dim_{\text{ch}}(\mathbf{X})$, les foncteur $\mathbb{R}\Gamma(\mathbf{U}, -)$ et $\mathbb{R}\text{Hom}^\bullet(\underline{k}_{\mathbf{X}}, -)$ sont bien définis sur la catégorie $D_k(\mathbf{X})$ tout entière⁽¹³⁾ et l'équivalence en question est toujours vérifiée. Comme nous n'aurons pas besoin de cette généralité, les foncteurs $\mathbb{R}\text{Hom}^\bullet(-, -)$ et $\mathbb{R}\mathcal{H}om^\bullet(-, -)$ seront considérés définis uniquement sur les sous-catégories $C^- \times C^+$ et $C^* \times C^b$ dans lesquelles il est facile de vérifier l'acyclicité de $\text{Hom}^\bullet(\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{G}^\bullet)$ lorsque \mathcal{F}^\bullet ou \mathcal{G}^\bullet (chaque \mathcal{G}^m étant injectif!) est acyclique. En effet, Hom^\bullet est alors *le complexe simple associé au bicomplexe* $\text{Hom}((-)^\bullet, (-)^\bullet)$ (anti-diagonales finies!) et il sera acyclique lorsque toutes les lignes ou toutes les colonnes du bicomplexe sont exactes.

Pour tous $\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{G}^\bullet \in C^- \times C^+$ (resp. $\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{G}^\bullet \in C^* \times C^b$), on a donc

$$\mathbb{R}\text{Hom}^\bullet(\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{G}^\bullet) \cong \text{Hom}^\bullet(\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{G}^\bullet)$$

où $\epsilon : \mathcal{G}^\bullet \rightarrow \mathcal{F}^\bullet$ est une résolution injective avec $\mathcal{F}^\bullet \in C^+$ (resp. $\mathcal{F}^\bullet \in C^b$)⁽¹⁴⁾

3.4.6. Exercices. Pour tout ouvert $U \subseteq X$ et tout faisceau \mathcal{F} , on note $\mathcal{F}_U := i_{U!}(\mathcal{F}|_U)$. L'application $f : X \rightarrow Y$ est continue.

- Montrer que \underline{k}_U est un faisceau d'anneaux (pas nécessairement avec identité multiplicative). Montrer que \mathcal{F}_U est muni d'une structure naturelle de \underline{k}_U -module.
- Montre l'égalité $f^{-1}\underline{k}_U = \underline{k}_{f^{-1}(U)}$.
- Étant données deux ouvert $V \subseteq U$ le morphisme $i_{V!}i_V^{-1} \rightarrow \text{id}$ donne une injection canonique $\mathcal{F}_V \rightarrow \mathcal{F}_U$. En particulier, pour tous ouverts U_1, U_2 on a deux injections canoniques

$$\mathcal{F}_{U_1 \cap U_2} \longrightarrow \mathcal{F}_{U_1} \otimes \underline{k}_{U_1} \longleftarrow \mathcal{F}_{U_1} \otimes \underline{k}_{U_2}.$$

Montrer que leurs images coïncident et que $\mathcal{F}_{U_1 \cap U_2} \cong \mathcal{F}_{U_1} \otimes \underline{k}_{U_2}$

- Comme dans (c), on a des injections :

$$f_!(\mathcal{F}_{f^{-1}(U)}) \longrightarrow f_!\mathcal{F} \longleftarrow (f_!\mathcal{F}) \otimes \underline{k}_U$$

Montrer que leurs images coïncident et qu'on a un isomorphisme canonique

$$f_!(\mathcal{F} \otimes f^{-1}\underline{k}_U) \cong (f_!\mathcal{F}) \otimes \underline{k}_U$$

- Prouver que tout faisceau est le quotient d'une somme directe infinie de faisceaux de la forme \underline{k}_U . En déduire que pour tout $\mathcal{Q} \in \text{Fais}_k(\mathbf{X})$ il existe une présentation (suite exacte à droite) de la forme :

$$\bigoplus_{\beta} \underline{k}_{U_{\beta}} \longrightarrow \bigoplus_{\alpha} \underline{k}_{U_{\alpha}} \longrightarrow \mathcal{Q} \rightarrow \mathbf{0}$$

¹³ Cf. [BoAl] §V 5.18 p. 112.

¹⁴ Possible sous l'hypothèse $\dim_{\text{ch}}(\mathbf{X}) < \infty$, cf. [BoAl] §V 1.18 p. 58.

f) D'après (e), pour tous \mathcal{M}, \mathcal{Q} il existe \mathcal{Q}' et une suite exacte courte :

$$\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{M} \otimes \mathcal{Q}' \longrightarrow \bigoplus_{\alpha} \mathcal{M}_{U_{\alpha}} \longrightarrow \mathcal{M} \otimes \mathcal{Q} \rightarrow \mathbf{0}$$

En supposant \mathcal{M} c -mou, montrer que le terme centrale de cette suite est c -mou, puis que $H^1(U, \mathcal{M} \otimes \mathcal{Q}) = H^2(U; \mathcal{M} \otimes \mathcal{Q}')$ pour tout ouvert $U \subseteq X$.

En déduire que si $\dim_{\text{ch}}(X) < \infty$, le produit tensoriel $\mathcal{N} \otimes \mathcal{M}$ est c -mou pour tout $\mathcal{N} \in \text{Fais}_k(X)$ pour peu que \mathcal{M} le soit.

Indication. Utiliser le critère qui affirme qu'un faisceau \mathcal{N} est c -mou, si et seulement si, $H_c^1(U, \mathcal{N}) = 0$, pour tout ouvert $U \subseteq X$.

g) Généraliser l'isomorphisme de (d) lorsque \mathcal{M} est c -mou en un isomorphisme

$$f_!(\mathcal{M} \otimes f^{-1}\mathcal{G}) \equiv (f_!\mathcal{M}) \otimes \mathcal{G} \quad \text{pour tout } \mathcal{G} \in \text{Fais}_k(X).$$

Indication. Sous l'hypothèse \mathcal{M} est c -mou, le foncteur $f_!(\mathcal{M} \otimes f^{-1}(_))$ est exact d'après (f). Appliquer alors (d) à une présentation (e) de \mathcal{G} .

h) En conclure à l'existence d'un isomorphisme naturel pour tous $\mathcal{F}^*, \mathcal{G}^* \in D_k^+(X)$:

$$\boxed{\mathbb{R}f_!(\mathcal{F}^* \otimes f^{-1}\mathcal{G}^*) \equiv (\mathbb{R}f_!\mathcal{F}^*) \otimes \mathcal{G}^*}$$

3.4.7. Adjonction et dualité de Grothendieck-Verdier. Un exemple fondamental du foncteur d'image directe à supports propres est $c_{X!}$ où $c_X : X \rightarrow \text{pt}$ est l'application constante. Dans ce cas, $c_{X!}$ est le foncteur de sections à support compact $\Gamma_c(X, _)$ et alors $\mathbb{R}^m c_{X!} \equiv H_c^m(X, _)$.

Lorsque X est une variété différentiable (réelle) de dimension d , la dualité de Poincaré exprime l'existence d'un isomorphisme canonique

$$\text{Hom}_k(H_c^*(X; k), k) \equiv H^{d-*}(X; \underline{\mathbb{Q}}_X(k))$$

que nous pouvons réécrire en termes de foncteurs dérivés comme une équivalence de la forme :

$$\mathbb{R}\text{Hom}^{\bullet}(\mathbb{R}c_{X!}(\underline{k}_X), k) \equiv \mathbb{R}\text{Hom}^{\bullet}(\underline{k}_X, \underline{\mathbb{Q}}_X[d]). \quad (\diamond)$$

À ce sujet, l'une des contributions majeures de Grothendieck a été de réaliser que l'équivalence (\diamond) était le reflet l'existence d'un adjoint à droite pour le foncteur $c_{X!}$, non pas dans la catégorie des faisceaux, ce qui est généralement impossible, mais en catégories dérivées. Intéressé à l'époque par les conjectures de Weil et travaillant dans la cohomologie étale des schémas, Grothendieck démontre l'existence de l'adjoint à droite de $\mathbb{R}f_!$ lorsque f est un plongement fermé ou un morphisme lisse (suffisant dans la pratique), et demande à J.-L. Verdier d'étudier l'analogie dans le contexte des espaces localement compacts. Dans sa thèse, Verdier définit, pour toute application continue $f : X \rightarrow Y$, le foncteur « image inverse exceptionnelle » :

$$f^! : D_k^+(Y) \rightsquigarrow D_k^+(X)$$

et démontre l'existence d'un isomorphisme canonique :

$$\boxed{\mathbb{R}f_* \mathbb{R}\mathcal{H}om^\bullet(\mathcal{F}^\bullet, f^! \mathcal{G}^\bullet) \cong \mathbb{R}\mathcal{H}om^\bullet(\mathbb{R}f_! \mathcal{F}^\bullet, \mathcal{G}^\bullet)} \quad (\diamond\diamond)$$

naturel par rapport à $\mathcal{F}^\bullet \in D_k^-(\mathbf{X})$ et $\mathcal{G}^\bullet \in D_k^+(\mathbf{X})$, auquel on réfère souvent par « *dualité de Grothendieck-Verdier* ».

En appliquant $\mathbb{R}\Gamma(\mathbf{Y}, _)$ à chaque membre de $(\diamond\diamond)$, on obtient la forme globale

$$\boxed{\mathbb{R}\mathrm{Hom}^\bullet(\mathcal{F}^\bullet, f^! \mathcal{G}^\bullet) \cong \mathbb{R}\mathrm{Hom}^\bullet(\mathbb{R}f_! \mathcal{F}^\bullet, \mathcal{G}^\bullet)} \quad (\star\star)$$

dont la cohomologie en degré 0 donne l'adjonction des foncteurs $(\mathbb{R}f_!, f^!)$

$$\mathrm{Hom}_{D(\mathbf{X})}(\mathcal{F}^\bullet, f^! \mathcal{G}^\bullet) \cong \mathrm{Hom}_{D(\mathbf{Y})}(\mathbb{R}f_! \mathcal{F}^\bullet, \mathcal{G}^\bullet)$$

3.4.8. Exercice. Démontrer à l'aide de la formule de dualité $(\diamond\diamond)$ et de l'isomorphisme 3.4.6-(h) l'existence d'un isomorphisme canonique :

$$\boxed{f^! \mathbb{R}\mathcal{H}om^\bullet(\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{G}^\bullet) \cong \mathbb{R}\mathcal{H}om^\bullet(f^{-1} \mathcal{F}^\bullet, f^! \mathcal{G}^\bullet)} \quad (\dagger\dagger)$$

3.4.9. Image inverse exceptionnelle. On remarquera que la simple égalité *formelle* $(\star\star)$ renseigne par elle-même de la définition de $f^!$. En effet, si cette égalité est vérifiée, on doit avoir pour chaque ouvert $U \subseteq \mathbf{X}$ et tout $\mathcal{G}^\bullet \in D_k^+(\mathbf{Y})$ (cf. 3.4.4) :

$$\Gamma(U; f^! \mathcal{G}^\bullet) = \mathrm{Hom}^\bullet(\underline{k}_U, f^! \mathcal{G}^\bullet) \cong \mathrm{Hom}^\bullet(\mathbb{R}f_!(\underline{k}_U), \mathcal{G}^\bullet),$$

pour peu que \mathcal{G}^\bullet et $f^! \mathcal{G}^\bullet$ soient tous les deux des complexes de faisceaux injectifs. Par conséquent, pour toute résolution c -molle $\underline{k}_X \xrightarrow{c} \mathcal{I}^\bullet$ de longueur $\dim_{\mathrm{ch}}(\mathbf{X})$, on a

$$\Gamma(U; f^! \mathcal{G}^\bullet) \cong \mathrm{Hom}^\bullet(f_!(\underline{k}_U \otimes \mathcal{I}^\bullet), \mathcal{G}^\bullet) = \mathrm{Hom}^\bullet(f_!(\mathcal{I}_U), \mathcal{G}^\bullet).$$

Réciproquement, si on prend cette dernière équivalence comme définition d'un complexe de préfaisceaux sur \mathbf{X} , *i.e.*, si on pose pour tout $\mathcal{G}^\bullet \in D_k^+(\mathbf{Y})$:

$$f_{\mathcal{G}^\bullet}^! : U \rightsquigarrow \mathrm{Hom}^\bullet(f_!(\mathcal{I}_U), \mathcal{G}^\bullet), \quad (\ddagger)$$

on obtient un complexe de *faisceaux* qui est injectif lorsque \mathcal{G}^\bullet l'est ⁽¹⁵⁾. Le foncteur additif $f_{\mathcal{G}^\bullet}^! : C^+(\mathbf{Y}) \rightsquigarrow C^+(\mathbf{X})$ ainsi défini vérifie $f_{\mathcal{G}^\bullet}^!(C^b(\mathbf{Y})) \subseteq C^b(\mathbf{X})$ et induit un foncteur de $D_k^+(\mathbf{Y})$ vers $D_k^+(\mathbf{X})$ (cf. 3.4.5) indépendant de la résolution (finie) \mathcal{I}^\bullet , autrement dit, si \mathcal{H}^\bullet est une autre résolution c -molle de \underline{k}_X les foncteurs $f_{\mathcal{G}^\bullet}^!$ et $f_{\mathcal{H}^\bullet}^!$ sont canoniquement isomorphes en catégorie dérivée (*loc.cit.*). Ce foncteur canonique, noté :

$$f^! : D_k^+(\mathbf{Y}) \rightsquigarrow D_k^+(\mathbf{X}),$$

est « *l'image inverse exceptionnelle* ». On a :

¹⁵ Cf. [BoAl] §7.14 p. 129

$$f^!(D_k^b(\mathbf{Y})) \subseteq D_k^b(\mathbf{X}).$$

Les ingrédients de la formule de dualité de Grothendieck-Verdier étant maintenant explicites, la validité de l'équivalence naturelle (\diamond) dans le cas général se réduit à une vérification (*loc.cit.*).

3.4.10. Remarque. Dans le cas d'une composition $\mathbf{X} \xrightarrow{f} \mathbf{Y} \xrightarrow{g} \mathbf{Z}$ d'applications continues, on a un isomorphisme canonique $g^! \circ f^! \equiv (g \circ f)^!$, obtenu par adjonction de l'isomorphisme $\mathbb{R}(g \circ f)_! \equiv \mathbb{R}g_! \circ \mathbb{R}f_!$ (3.4.3-(b)).

3.4.11. Complexe dualisant. En appliquant la formule de dualité de Grothendieck-Verdier (3.4-(\diamond)) à $f = c_{\mathbf{X}} : \mathbf{X} \rightarrow \text{pt}$, on a $c_{\mathbf{X}}^! k \in D^b(\mathbf{X})$ et

$$\text{Hom}_k^*(\mathbb{R}c_{\mathbf{X}!} \mathcal{F}^\bullet, k) \equiv \mathbb{R}\text{Hom}^\bullet(\mathcal{F}^\bullet, c_{\mathbf{X}}^! k) \equiv \mathbb{R}\Gamma(\mathbf{X}; \mathbb{R}\mathcal{H}om^\bullet(\mathcal{F}^\bullet, c_{\mathbf{X}}^! k)) \quad (*)$$

d'où

$$\text{Hom}_k(\mathbb{H}_c^*(\mathbf{X}; \mathcal{F}^\bullet), k) \equiv \mathbb{H}^{-*}(\mathbf{X}; \mathbb{R}\mathcal{H}om^\bullet(\mathcal{F}^\bullet, c_{\mathbf{X}}^! k))$$

qui montre que : *le dual de l'hypercohomologie à support compact d'un complexe s'identifie à l'hypercohomologie d'un autre complexe : son dual de Verdier.*

3.4.12. Définitions

a) Pour tout $\mathcal{F}^\bullet \in D_k(\mathbf{X})$ on appelle « *dual de Verdier de \mathcal{F}^\bullet* » l'objet de $D_k(\mathbf{X})$:

$$\mathcal{D}_{\mathbf{X},k}^\bullet \mathcal{F}^\bullet := \mathbb{R}\mathcal{H}om^\bullet(\mathcal{F}^\bullet, c_{\mathbf{X}}^! k), \quad (\diamond)$$

On note plutôt $\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet$ pour k sous-entendu. La première équivalence de (*) s'écrit alors : $\mathcal{D}_{\text{pt}}^\bullet \circ \mathbb{R}c_{\mathbf{X}!} = \mathbb{R}c_{\mathbf{X}*} \circ \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet$.

b) Le « *(complexe) dualisant de \mathbf{X}* » est le dual de Verdier du faisceau constant :

$$\mathbb{D}_{\mathbf{X},k}^\bullet := \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet(\underline{k}_{\mathbf{X}}) = c_{\mathbf{X}}^! k.$$

On a, par construction,

$$\boxed{[\mathbb{D}_{\mathbf{X},k}^\bullet]_{\text{ch}} \subseteq [-\dim_{\text{ch}}(\mathbf{X}), 0]}$$

On note plutôt $\mathbb{D}_{\mathbf{X}}^\bullet$ pour k sous-entendu, p. e. : $\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet \mathcal{F}^\bullet := \mathbb{R}\mathcal{H}om^\bullet(\mathcal{F}^\bullet, \mathbb{D}_{\mathbf{X}}^\bullet)$.

La proposition suivante donne une liste de conséquences *formelles* de la dualité de Grothendieck-Verdier.

3.4.13. Proposition. *On suppose $\dim_{\text{ch}}(\mathbf{X}) < \infty$ et $\dim_{\text{ch}}(\mathbf{Y}) < \infty$.*

a) *Le foncteur $\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet : D_k(\mathbf{X}) \rightarrow D_k(\mathbf{X})$ est additif, contravariant et exact. De plus, il vérifie $\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet(D_k^b(\mathbf{X})) \subseteq D_k^b(\mathbf{X})$, et est autoadjoint sur $D_k^b(\mathbf{X})$, i.e. :*

$$\mathbb{R}\text{Hom}^\bullet(\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet \mathcal{G}^\bullet) \equiv \mathbb{R}\text{Hom}^\bullet(\mathcal{G}^\bullet, \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet \mathcal{F}^\bullet)$$

pour tous $\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{G}^\bullet \in D_k^b(\mathbf{X})$. En particulier, l'adjoint de $\text{id} : \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet \rightarrow \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet$ est un morphisme canonique de foncteurs sur $D_k^b(\mathbf{X})$:

$$\text{id} \rightsquigarrow \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet \circ \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet.$$

- b) Le foncteur (contravariant) $\mathrm{Hom}_k(\mathcal{H}_c^m(\mathbf{X}; -), k) : D_k(\mathbf{X}) \rightsquigarrow \mathrm{Vect}(k)$ est représentable quel que soit $m \in \mathbb{Z}$. Plus précisément :

$$\mathrm{Hom}_k(\mathcal{H}_c^m(\mathbf{X}; -), k) \equiv \mathrm{Hom}_{D_k(\mathbf{X})}(-, \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet[-m])$$

- c) Pour toute application continue $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{i) } \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet \equiv f^! \mathcal{D}_{\mathbf{Y}}^\bullet \\ \text{ii) } \mathcal{D}_{\mathbf{Y}}^\bullet \circ \mathbb{R}f_! \equiv \mathbb{R}f_* \circ \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet : D_k^b(\mathbf{X}) \rightsquigarrow D_k^b(\mathbf{Y}) \\ \text{iii) } \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet \circ f^{-1} \equiv f^! \circ \mathcal{D}_{\mathbf{Y}}^\bullet : D_k^b(\mathbf{Y}) \rightsquigarrow D_k^b(\mathbf{X}) \end{array} \right.$$

En particulier, la dualité de Grothendieck-Verdier commute à la restriction à un ouvert et à l'image directe d'un fermé.

- d) Soit U une partie ouverte de \mathbf{X} de complémentaire $F := \mathbf{X} \setminus U$. Le foncteur $\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet$ transforme le triangle fondamental :

$$i_{U!} i_U^{-1} \mathcal{F}^\bullet \longrightarrow \mathcal{F}^\bullet \longrightarrow i_{F!} i_F^{-1} \mathcal{F}^\bullet \xrightarrow{[+1]}$$

en un triangle exact

$$\begin{array}{ccccc} i_{F!} \mathcal{D}_F^\bullet(\mathcal{F}^\bullet|_F) & \longrightarrow & \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet \mathcal{F}^\bullet & \longrightarrow & \mathbb{R}i_{U*} \mathcal{D}_U^\bullet(\mathcal{F}^\bullet|_U) \xrightarrow{[+1]} \\ \parallel & & \parallel & & \parallel \\ i_{F!} i_F^{-1} \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet \mathcal{F}^\bullet & \longrightarrow & \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet \mathcal{F}^\bullet & \longrightarrow & \mathbb{R}i_{U*} i_U^{-1} \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet \mathcal{F}^\bullet \xrightarrow{[+1]} \end{array}$$

naturellement isomorphe au deuxième triangle fondamental pour $\mathbf{X} = U \amalg F$, soit

$$\boxed{\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet(\Delta(U, \mathbf{X}, F; -)) \equiv \Delta(F, \mathbf{X}, U; \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet -)}$$

Démonstration. Les endroits où la dualité de Grothendieck-Verdier (3.4) est utilisée sont indiqués par le signe 'GV'.

- a) Découle des identifications naturelles

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om^\bullet(\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet \mathcal{G}^\bullet) = \mathbb{R}\mathcal{H}om^\bullet(\mathcal{F}^\bullet, \mathbb{R}\mathcal{H}om(\mathcal{G}^\bullet, \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet)) \equiv \mathbb{R}\mathcal{H}om(\mathcal{F}^\bullet \otimes_{\mathbb{k}_{\mathbf{X}}} \mathcal{G}^\bullet, \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet)$$

où les rôles de \mathcal{F}^\bullet et \mathcal{G}^\bullet peuvent être interchangés.

- b) $\mathrm{Hom}(H_c^m(\mathbf{X}; -), k) = h^{-m} [\mathrm{Hom}^\bullet(\mathbb{R}\Gamma_c(\mathbf{X}; -), k)]$

$$\begin{array}{c} \parallel \text{GV} \\ h^{-m} [\mathbb{R}\mathrm{Hom}^\bullet(-, \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet)] \\ \parallel \\ h^0 [\mathbb{R}\mathrm{Hom}^\bullet(-, \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet[-m])] = \mathrm{Hom}_{D(\mathbf{X})}(-, \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet[-m]) \end{array}$$

- c) (i) $f^! \mathcal{D}_{\mathbf{Y}}^\bullet = f^! c_{\mathbf{Y}}^! k = c_{\mathbf{X}}^! k$, d'après 3.4.10.

$$\begin{aligned} \text{(ii)} \quad \mathcal{D}_{\mathbf{Y}}^\bullet \circ \mathbb{R}f_!(-) &\stackrel{1}{=} \mathbb{R}\mathcal{H}om^\bullet(\mathbb{R}f_!(-), \mathcal{D}_{\mathbf{Y}}^\bullet) \stackrel{\text{GV}}{\equiv} \mathbb{R}f_* \mathbb{R}\mathcal{H}om^\bullet((-), f^! \mathcal{D}_{\mathbf{Y}}^\bullet) \\ &\stackrel{2}{=} \mathbb{R}f_* \mathbb{R}\mathcal{H}om^\bullet((-), \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet) \stackrel{3}{=} \mathbb{R}f_* \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet(-) \end{aligned}$$

$\stackrel{1}{=}, \stackrel{3}{=}$ par définition, $\stackrel{2}{=}$ d'après (i).

- (iii) Par adjonctions, d'après (ii) et (a).

- d) Exercice. ■

3.4.14. Remarque. Le morphisme de foncteurs $\text{id} \rightarrow \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^{\bullet} \circ \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^{\bullet}$ de 3.4.13-(a) peut être défini plus généralement sur tout $D_k(\mathbf{X})$, mais nous n'avons pas besoin de cette généralité (cf. [BoAl] §V 8.9 p. 138).

3.5 Dualité de Poincaré sur les variétés topologiques

On rappelle qu'une « *variété topologique de dimension d* » est un espace topologique métrisable, dénombrable à l'infini et tel que tout point admet un voisinage homéomorphe à \mathbb{R}^d . Une variété topologique de dimension d est de dimension cohomologique égale à d . Une variété topologique peut ne pas admettre de structure différentielle.

3.5.1. Faisceau d'orientations. Sur une variété topologique \mathbf{X} de dimension d , la correspondance :

$$U \rightsquigarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_c^d(U; \mathbb{Z}); \mathbb{Z})$$

définit un préfaisceau sur \mathbf{X} localement constant de fibres $H^{d-1}(\mathbb{S}^{d-1}; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$, puisque tout point admet une base de voisinages homéomorphes à \mathbb{R}^d . Le faisceau engendré par ce préfaisceau, noté $\underline{\text{Or}}_{\mathbf{X}}(\mathbb{Z})$, est « *le faisceau d'orientations de \mathbf{X}* » ; c'est un $\mathbb{Z}_{\mathbf{X}}$ -module localement libre de rang 1. Plus généralement, le faisceau $\underline{\text{Or}}_{\mathbf{X}}(\mathcal{A})$ construit par ce procédé en remplaçant \mathbb{Z} par un anneau \mathcal{A} est « *le faisceau des \mathcal{A} -orientations de \mathbf{X}* ». Il existe un isomorphisme canonique

$$\underline{\text{Or}}_{\mathbf{X}}(\mathcal{A}) \equiv \underline{\text{Or}}_{\mathbf{X}}(\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}_{\mathbf{X}}} \underline{\mathcal{A}}_{\mathbf{X}}.$$

On dit que \mathbf{X} est « *orientable sur \mathcal{A}* » lorsque $\underline{\text{Or}}_{\mathbf{X}}(\mathcal{A})$ est isomorphe au faisceau constant $\underline{\mathcal{A}}_{\mathbf{X}}$. Dans ce cas, « *choisir une orientation* » signifie fixer un isomorphisme particulier $\underline{\text{Or}}_{\mathbf{X}}(\mathcal{A}) \equiv \underline{\mathcal{A}}_{\mathbf{X}}$.

3.5.2. Exercice. Soit k un corps. Montrer que sur un espace topologique connexe, un faisceau localement constant de fibres isomorphes à k et isomorphe à $\underline{k}_{\mathbf{X}}$, si et seulement si, il admet une section globale non nulle.

D'un point de vue heuristique, orienter une variété topologique sur \mathbb{Z} revient à fixer, de manière cohérente sur \mathbf{X} , un générateur de $H^{d-1}(\mathbb{S}^{d-1}; \mathbb{Z})$ pour chaque sphère assez petite ; chaque générateur correspondant alors à l'une des deux orientations possibles de la sphère.

Exemples. Comme le faisceau $\underline{\text{Or}}_{\mathbf{X}}(\mathcal{A})$ est localement constant sur \mathbf{X} , il correspond à une famille de représentations $\{\rho_i : \pi_1(\mathbf{X}_i) \rightarrow \text{Iso}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})\}$, où $\{\mathbf{X}_i\}$ est la famille des composantes connexes de \mathbf{X} . Par conséquent :

- Si \mathbf{X} est connexe et simplement connexe, elle est toujours orientable.
- Si \mathcal{A} est le corps à deux éléments $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$, on a $\text{Iso}_{\mathbb{F}_2}(\mathbb{F}_2) = \text{id}$ et les représentations ρ_i sont triviales. Toute variété topologique est donc orientable sur \mathbb{F}_2 .

3.5.3. Le cas des variétés différentielles. Lorsque \mathbf{X} est une variété différentielle connexe de dimension d , le complexe des faisceaux des formes différentielles réelles (complexe de de Rham) $\underline{\Omega}_{\mathbf{X}}^*$ est une résolution du faisceau constant $\underline{\mathbb{R}}_{\mathbf{X}}$ (lemme de Poincaré) où chaque faisceau $\underline{\Omega}_{\mathbf{X}}^r$ est c -mou puisque \mathbf{X} admet des partitions de l'unité \mathcal{C}^∞ . Il s'ensuit que $\mathbb{R}\Gamma_c(\mathbf{U}; \underline{k}_{\mathbb{R}}) = \Gamma_c(\mathbf{U}; \underline{\Omega}_{\mathbf{X}}^*) = \Omega_c^*(\mathbf{U})$ et la correspondance

$$\mathbf{U} \rightsquigarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\Omega_c^*(\mathbf{U}); \mathbb{R})$$

est un complexe de faisceaux (!) injectifs d'amplitude $[-d, 0]$ et d'amplitude cohomologique concentrée en $[-d]$:

$$\mathbf{0} \rightarrow \mathcal{G}^{-d} \xrightarrow{\delta_{-d+1}} \mathcal{G}^{-d+1} \xrightarrow{\delta_{-d+2}} \dots \xrightarrow{\delta_{-1}} \mathcal{G}^{-1} \xrightarrow{\delta_0} \mathcal{G}^0 \rightarrow \mathbf{0}$$

Comme le préfaisceau $\ker(\delta_{-d+1})$ est toujours un faisceau et qu'il s'agit précisément de $\underline{\mathbb{Q}}_{\mathbf{X}}(\mathbb{R})$, les sections de $\underline{\mathbb{Q}}_{\mathbf{X}}(\mathbb{R})$ au-dessus de un ouvert \mathbf{U} sont données par

$$\Gamma(\mathbf{U}; \underline{\mathbb{Q}}_{\mathbf{X}}(\mathbb{R})) = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(H_{\text{DR},c}^d(\mathbf{U}), \mathbb{R}) \quad (\int_{\mathbf{U}})$$

et, en particulier :

$$\Gamma(\mathbf{X}; \underline{\mathbb{Q}}_{\mathbf{X}}(\mathbb{R})) = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(H_{\text{DR},c}^d(\mathbf{X}), \mathbb{R})$$

dont on déduit les équivalences

$$\mathbf{X} \text{ est orientable} \iff \dim_k(H_{\text{DR},c}^d(\mathbf{X})) = 1 \iff \dim_k(H_{\text{DR},c}^d(\mathbf{X})) \neq 0$$

Enfin, les égalités $(\int_{\mathbf{U}})$ montrent aussi que choisir une orientation revient à se donner une famille d'« intégrales »

$$\int_{\mathbf{U}} : H_{\text{DR},c}^d(\mathbf{U}) \rightarrow \mathbb{R}$$

“compatibles” en ce sens que si $\mu \in H_{\text{DR},c}^d(\mathbf{V})$ et que $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{U}$, on a $\int_{\mathbf{V}} \mu = \int_{\mathbf{U}} \mu$. À partir de là, il est aisé de retrouver d'autres notions d'orientabilité pour les variétés différentielles habituellement introduites à l'occasion de l'intégration.

3.5.4. Le cas des variétés topologiques. Tout ce que nous venons de dire pour les variétés différentielles est vrai pour les variétés topologiques moyennant les changements suivants :

- \mathbb{R} est remplacé par un corps k .
- $\underline{\Omega}_{\mathbf{X}}^*$ est remplacé par une résolution c -molle de $\underline{k}_{\mathbf{X}}$ d'amplitude $[0, d]$.
- $H_{\text{DR},c}(\mathbf{U})$ est remplacé par $H_c(\mathbf{U}; \underline{k}_{\mathbf{U}})$.

3.5.5. Proposition. Soit \mathbf{X} une variété topologique.

- a) $\mathcal{D}_{\mathbf{X},k}^{\bullet, \underline{k}_{\mathbf{X}}} \equiv \underline{\mathbb{Q}}_{\mathbf{X}}(k)[\dim(\mathbf{X})]$.
- b) $\mathcal{D}_{\mathbf{X},k}^{\bullet, \underline{\mathbb{Q}}_{\mathbf{X}}} \equiv \underline{k}_{\mathbf{X}}[\dim(\mathbf{X})]$.

Démonstration. L'assertion (a) se démontre de manière tout à fait analogue au cas différentiable (cf. 3.5). Pour (b), on a

$$\mathcal{D}_X^\bullet \underline{\mathcal{O}}_X = \mathbb{R}\mathcal{H}om^\bullet(\underline{\mathcal{O}}_X, \underline{\mathcal{O}}_X)[\dim(\mathbf{X})],$$

par définition de \mathcal{D}_X^\bullet et d'après (a). D'autre part

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om^\bullet(\underline{\mathcal{O}}_X, \underline{\mathcal{O}}_X)[\dim(\mathbf{X})] = \mathcal{H}om(\underline{\mathcal{O}}_X, \underline{\mathcal{O}}_X)[\dim(\mathbf{X})]$$

puisque pour tout système local \mathcal{L} on a $\mathbb{R}\mathcal{H}om^\bullet(\mathcal{L}, _) = \mathcal{H}om^\bullet(\mathcal{L}, _)$. Enfin, le faisceau $\mathcal{H}om(\underline{\mathcal{O}}_X, \underline{\mathcal{O}}_X)$ est un système local de fibre k ayant une section globale nulle part nulle, à savoir $\text{id} : \underline{\mathcal{O}}_X \rightarrow \underline{\mathcal{O}}_X$, donc $\mathcal{H}om(\underline{\mathcal{O}}_X, \underline{\mathcal{O}}_X) \cong \underline{k}_X$ (cf. ex. 3.5.2). ■

3.5.6. Théorème. Soit \mathbf{X} une variété topologique.

a) Pour tous $\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{G}^\bullet \in D_{\text{clc}}^b(\mathbf{X})$ et tout $x \in \mathbf{X}$, le morphisme canonique

$$[\mathbb{R}\mathcal{H}om^\bullet(\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{G}^\bullet)]_x \longrightarrow \text{Hom}_k^\bullet(\mathcal{F}_x^\bullet, \mathcal{G}_x^\bullet)$$

est un isomorphisme.

b) $\mathbb{R}\mathcal{H}om^\bullet(D_{\text{clc}}^b(\mathbf{X}), D_{\text{clc}}^b(\mathbf{X})) \subseteq D_{\text{clc}}^b(\mathbf{X})$ et de même pour $D_{\text{cc}}^b(\mathbf{X})$.

c) $\mathcal{D}_X^\bullet(D_{\text{clc}}^b(\mathbf{X})) \subseteq D_{\text{clc}}^b(\mathbf{X})$ et $\mathcal{D}_X^\bullet(D_{\text{cc}}^b(\mathbf{X})) \subseteq D_{\text{cc}}^b(\mathbf{X})$.

d) Pour tout $\mathcal{F}^\bullet \in D_{\text{clc}}^b(\mathbf{X})$, on a $[\mathcal{D}_X^\bullet \mathcal{F}^\bullet]_{\text{ch}} = -[\mathcal{F}^\bullet]_{\text{ch}} - \dim_{\text{ch}}(\mathbf{X})$.

e) Le morphisme de bidualité $\mathcal{F}^\bullet \rightarrow \mathcal{D}_X^\bullet \circ \mathcal{D}_X^\bullet(\mathcal{F}^\bullet)$ (3.4.13-(a)) est un isomorphisme pour tout $\mathcal{F}^\bullet \in D_{\text{cc}}^b(\mathbf{X})$.

f) Si \mathbf{X} est équidimensionnelle et orientable elle vérifie la dualité de Poincaré.

g) Si \mathbf{X} est compacte, $\dim_k(\mathbb{H}^*(\mathbf{X}; \mathcal{F}^\bullet)) < \infty$, pour tout $\mathcal{F}^\bullet \in D_{\text{cc}}^b(\mathbf{X})$. En particulier, les nombres de Betti de \mathbf{X} sont finis.

Démonstration. On notera $(_)^\vee := \text{Hom}_k(_, k)$.

a,b) Comme les catégories $D_{\text{clc}}^b(\mathbf{X})$ et $D_{\text{cc}}^b(\mathbf{X})$ sont triangulées stables par troncature et décalage, et que $\mathbb{R}\mathcal{H}om^\bullet(_, _)$, $[\mathbb{R}\mathcal{H}om^\bullet(_, _)]_x$ et $\text{Hom}_k((_)_x, (_)_x)$ sont des (bi)foncteurs exacts, on se ramène par troncatures et décalages successifs à vérifier que pour tous $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$, faisceaux localement constants, on a

$$\begin{cases} \text{a-loc} & [\mathbb{R}\mathcal{H}om^\bullet(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)]_x \rightarrow \text{Hom}_k^\bullet(\mathcal{L}_{1,x}, \mathcal{L}_{2,x}) \text{ est un isomorphisme} \\ \text{b-loc} & \mathbb{R}\mathcal{H}om(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) \text{ est clc (resp. cc si les } \mathcal{L}_i \text{ le sont)} \end{cases}$$

On commence par remarquer que pour toute résolution injective $\epsilon : \mathcal{L}_2 \rightarrow \mathcal{I}^\bullet$ le morphisme induit

$$\mathcal{H}om(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) \xrightarrow{(\epsilon)} \mathcal{H}om(\mathcal{L}_1, \mathcal{I}^\bullet)$$

est un quasi-isomorphisme. En effet, pour tout ouvert contractile $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{X}$, on a

$$\Gamma(\mathbf{V}; \mathcal{H}om(\mathcal{L}_1, \mathcal{I}^\bullet)) = \text{Hom}_k(\Gamma(\mathbf{V}; \mathcal{L}_1), \Gamma(\mathbf{V}; \mathcal{I}^\bullet))$$

puisque $\mathcal{L}_1|_{\mathbf{V}}$ est isomorphe au faisceau constant $\underline{\Gamma(\mathbf{V}; \mathcal{L}_1)}_{\mathbf{V}}$. D'autre part, le complexe $\Gamma(\mathbf{V}; \mathcal{I}^\bullet)$ calcule la cohomologie $H^*(\mathbf{V}; \mathcal{L}_2)$ dont on sait qu'elle nulle en degrés posi-

tifs puisque \mathbf{V} est contractile et que \mathcal{L}_2 est localement constant. Par exactitude de $\mathrm{Hom}_k(-, -)$ ($k\mathrm{dim}_k$ est un corps), on conclut que

$$h^m[\Gamma(\mathbf{V}; \mathcal{H}\mathrm{om}(\mathcal{L}_1, \mathcal{F}^\bullet))] = 0, \quad \text{pour tout } m > 0.$$

On a donc bien

$$\begin{cases} \mathcal{H}^m \mathcal{H}\mathrm{om}(\mathcal{L}_1, \mathcal{F}^\bullet) = 0 & \text{pour } m > 0, \text{ et} \\ \mathcal{H}\mathrm{om}(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) \xrightarrow[\epsilon]{} \mathcal{H}^0 \mathcal{H}\mathrm{om}(\mathcal{L}_1, \mathcal{F}^\bullet) & \text{est un isomorphisme} \end{cases}$$

Par conséquent, $\mathcal{R}\mathcal{H}\mathrm{om}(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) = \mathcal{H}\mathrm{om}(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)$, où ce dernier faisceau est localement constant puisque sa restriction à tout ouvert contractile \mathbf{V} vérifie :

$$\mathcal{H}\mathrm{om}(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)|_{\mathbf{V}} \equiv \underline{\underline{\mathrm{Hom}_k(\mathcal{L}_1(\mathbf{V}), \mathcal{L}_2(\mathbf{V}))}}_{\mathbf{V}},$$

et les assertions (a-loc) et (b-loc) suivent.

- c) Conséquence immédiate de (b) puisque $\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet$ est un système local sur une variété topologique (3.5.5).
- d) Le complexe $\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet \mathcal{F}^\bullet$ est clc d'après (c) et on peut appliquer (a). Pour $x \in \mathbf{X}$, on a donc $(\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet \mathcal{F}^\bullet)_x \equiv \mathrm{Hom}_k^\bullet(\mathcal{F}_x^\bullet, (\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet)_x) \equiv \mathrm{Hom}_k^\bullet(\mathcal{F}_x^\bullet, k)[\dim_{\mathrm{ch}} \mathbf{X}]$, d'où l'égalité voulue.
- e) Comme dans (a) et (b), on se ramène par troncatures et décalage à vérifier que pour tout système local \mathcal{L} le morphisme canonique $\epsilon : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet \circ \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet \mathcal{L}$ est bien bijectif. Par (c), le complexe $\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet \circ \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet \mathcal{L}$ est clc et on peut appliquer (a). Pour chaque $x \in \mathbf{X}$ le morphisme $\epsilon_x : \mathcal{L}_x \rightarrow (\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet \circ \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet \mathcal{L})_x$ s'identifie alors à l'injection canonique $\mathcal{L}_x \hookrightarrow \mathcal{L}_x^{\vee\vee}$, bijective lorsque \mathcal{L}_x est de dimension finie.
- f) Par dualité de Grothendieck-Verdier et 3.5.5, on a

$$H_c^*(\mathbf{X}; \underline{k}_{\mathbf{X}})^\vee \equiv H^{-*}(\mathbf{X}, \mathcal{D}_{\mathbf{X}, k}^\bullet) \equiv H^{\dim(\mathbf{X})-*}(\mathbf{X}; \underline{\mathrm{Or}}_{\mathbf{X}}(k)),$$

et comme \mathbf{X} est orientable, $\underline{\mathrm{Or}}_{\mathbf{X}}(k) \simeq \underline{k}_{\mathbf{X}}$.

- g) Lorsque \mathbf{X} est compacte, on peut effacer l'indice 'c' dans la cohomologie et alors

$$\mathbb{H}^*(\mathbf{X}; \mathcal{F}^\bullet)^{\vee\vee} \equiv \mathbb{H}^{-*}(\mathbf{X}; \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet \mathcal{F}^\bullet)^\vee \equiv \mathbb{H}^*(\mathbf{X}; \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet \mathcal{F}^\bullet) \equiv \mathbb{H}^*(\mathbf{X}; \mathcal{F}^\bullet),$$

d'après (d). Ceci prouve la finitude des dimensions des espaces $\mathbb{H}^m(\mathbf{X}; \mathcal{F}^\bullet)$. ■

3.6 Stabilité de $D_{\mathcal{F}\text{-clc}}^b(\mathbf{X})$ par dualité de Grothendieck-Verdier

Nous démontrons les principales propriétés de la dualité de Grothendieck-Verdier (sur un corps k) sur les catégories triangulées $D_{\mathcal{F}\text{-clc}}^b(\mathbf{X})$ et $D_{\mathcal{F}\text{-cc}}^b(\mathbf{X})$, où $(\mathbf{X}; \mathcal{F})$ est un espace topologiquement stratifié.

3.6.1. Lemme technique. *On reprend les notations de 3.3.7 pour l'espace topologiquement stratifié $(\mathbf{X}, \mathcal{F})$ de dimension d . On note*

$$U^c \xrightarrow[\underline{\subset}]{i_c} U^{c+1} \xleftarrow[\underline{\supset}]{j_{c+1}} S^{c+1}, \quad \text{et} \quad Z^c := \mathbf{X} \setminus U^c = S^{c+1} \amalg S^{c+2} \amalg \dots \amalg S^d.$$

- a) Il existe un isomorphisme naturel de foncteurs définis sur $D_{\mathcal{F}\text{-clc}}^b(U^c)$

$$i_{c!} \circ \mathcal{D}_{U^c}^\bullet \xrightarrow{\cong} \mathcal{D}_{U^{c+1}}^\bullet \circ \mathbb{R}i_{c*}$$

En particulier, $(i_{U^c}^X)_! \circ \mathcal{D}_{U^c}^\bullet \xrightarrow{\cong} \mathcal{D}_X^\bullet \circ \mathbb{R}(i_{U^c}^X)_*$.

b) Il existe un isomorphisme de foncteurs de $D_{\mathcal{F}\text{-clc}}^b(\mathbf{X})$ vers $D_{\mathcal{F}\text{-clc}}^b(\mathbf{Z}^c)$

$$i_{Z^c}^{-1} \circ \mathcal{D}_X^\bullet \xrightarrow{\cong} \mathcal{D}_{Z^c}^\bullet \circ i_{Z^c}^!$$

En particulier,

$$i_S^{-1} \circ \mathcal{D}_X^\bullet \xrightarrow{\cong} \mathcal{D}_S^\bullet \circ i_S^!, \text{ pour toute strate } S \in \mathcal{F}.$$

c) Les isomorphismes de (a) et (b) induisent un isomorphisme de triangles exacts :

$$\boxed{\mathcal{D}_X^\bullet(\Delta(\mathbf{Z}^c, \mathbf{X}, U^c; -)) \cong \Delta(U^c, \mathbf{X}, \mathbf{Z}^c; \mathcal{D}_X^\bullet(-))} \quad \text{sur } D_{\mathcal{F}\text{-clc}}^b(\mathbf{X}).$$

En particulier, on a des isomorphismes de foncteurs définis sur $D_{\mathcal{F}\text{-clc}}^b(\mathbf{X})$

$$\mathcal{D}_X^\bullet \circ \mathcal{D}_X^\bullet(\Delta(U^c, \mathbf{X}, \mathbf{Z}^c; (-))) \cong \Delta(U^c, \mathbf{X}, \mathbf{Z}^c; \mathcal{D}_X^\bullet \circ \mathcal{D}_X^\bullet(-)),$$

$$\mathcal{D}_X^\bullet \circ \mathcal{D}_X^\bullet(\Delta(\mathbf{Z}^c, \mathbf{X}, U^c; (-))) \cong \Delta(\mathbf{Z}^c, \mathbf{X}, U^c; \mathcal{D}_X^\bullet \circ \mathcal{D}_X^\bullet(-)).$$

Démonstration

a) Le morphisme en question, qu'on va noter γ , est obtenu par composition de morphismes déjà rencontrés :

$$\begin{array}{c} i_{c!} \circ \mathcal{D}_{U^c}^\bullet \xleftarrow{\cong} i_{c!} \circ \mathcal{D}_{U^c}^\bullet \circ i_c^{-1} \circ \mathbb{R}i_{c*} \xleftarrow{\cong} i_{U^c!} \circ i_c^{-1} \circ \mathcal{D}_{U^{c+1}}^\bullet \circ \mathbb{R}i_{c*} \longrightarrow \mathcal{D}_{U^{c+1}}^\bullet \circ \mathbb{R}i_{c*} \\ \boxed{\hspace{10em} \gamma \hspace{10em}} \uparrow \end{array}$$

Comme $\gamma|_U$ est l'identité, γ sera un isomorphisme, si et seulement si, le germe γ_x est un quasi-isomorphisme pour tout $x \in \mathbf{S}^{c+1}$, ou encore, comme $i_x^{-1} \circ i_{c!} = 0$ par changement de base, si et seulement si, les cohomologies suivantes sont nulles :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^*[\mathcal{D}_{U^{c+1}}^\bullet \mathbb{R}i_{c*} \mathcal{F}^\bullet]_x &= \varinjlim_{V \ni x} h^*[\mathbb{R}\Gamma(V; \mathcal{D}_{U^{c+1}}^\bullet \mathbb{R}i_{c*} \mathcal{F}^\bullet)] \\ &= \varinjlim_{V \ni x} \text{Hom}_k(\mathbb{H}_c^*(V \cap U^c; \mathcal{F}^\bullet); k) \end{aligned}$$

Or, c'est ce qui a été prouvé dans 3.3.7-(b).

La deuxième assertion découle par itération de la première sur l'égalité

$$(i_{U^c}^X)_! \circ \mathcal{D}_{U^c}^\bullet = i_{d-1!} \circ \cdots \circ i_{c+1!} \circ i_{c!} \circ \mathcal{D}_{U^c}^\bullet$$

b,c) À l'aide de l'isomorphisme de (a) nous construisons un morphisme de triangles de $\Delta(U^c, \mathbf{X}, \mathbf{Z}^c; \mathcal{D}_X^\bullet(\mathcal{F}^\bullet))$ vers $\mathcal{D}_X^\bullet(\Delta(\mathbf{Z}^c, \mathbf{X}, U^c; \mathcal{F}^\bullet))$:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{D}_X^\bullet \mathbb{R}i_{U^c}^X i_{U^c}^{X-1} \mathcal{F}^\bullet & \longrightarrow & \mathcal{D}_X^\bullet \mathcal{F}^\bullet & \longrightarrow & \mathcal{D}_X^\bullet i_{Z^c}^X i_{Z^c}^{X-1} \mathcal{F}^\bullet \xrightarrow{[+1]} \\ \alpha \uparrow & & \parallel & & \beta \uparrow \\ i_{U^c!}^X i_{U^c}^{X-1} \mathcal{D}_X^\bullet \mathcal{F}^\bullet & \longrightarrow & \mathcal{D}_X^\bullet \mathcal{F}^\bullet & \longrightarrow & i_{Z^c!}^X i_{Z^c}^{X-1} \mathcal{D}_X^\bullet \mathcal{F}^\bullet \xrightarrow{[+1]} \end{array}$$

Le morphisme α composé des isomorphismes

$$i_{U^c!}^X i_{U^c}^{X-1} \mathcal{D}_X^\bullet \mathcal{F}^\bullet \cong i_{U^c!}^X \mathcal{D}_{U^c}^\bullet(i_{U^c}^{X-1} \mathcal{F}^\bullet) \xrightarrow{\cong} \mathcal{D}_X^\bullet \mathbb{R}i_{U^c}^X(i_{U^c}^{X-1} \mathcal{F}^\bullet)$$

le premier général et le second donné dans (a). Comme, d'autre part la construction de γ est fonctorielle et ne repose sur "rien" elle se fait également sur \mathbf{X} auquel cas il est immédiat de constater son identification à id. Il s'ensuit que le sous-diagramme (I) est commutatif. Par conséquent, il existe un morphisme β en catégorie dérivée rendant (II) commutatif. Ce morphisme est nécessairement un isomorphisme et comme $\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^{\bullet} \circ i_{Z^c}^{\mathbf{X}} \equiv i_{Z^c}^{\mathbf{X}} \circ \mathcal{D}_{Z^c}^{\bullet}$, il induit, par restriction à Z^c , l'isomorphisme ⁽¹⁶⁾

$$i_{Z^c}^{\mathbf{X}-1} \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^{\bullet} \mathcal{F}^{\bullet} \xrightarrow{\beta|_{Z^c}} \mathcal{D}_{Z^c}^{\bullet} i_{Z^c}^{\mathbf{X}} \mathcal{F}^{\bullet}$$

annoncé dans (b) et (c).

Ceci étant, comme S^{c+1} est ouvert dans Z^c , on a $(i_{S^{c+1}}^Z)^! = (i_{S^{c+1}}^{Z^c})^{-1}$ et la deuxième partie de (b) suit.

la preuve de la deuxième partie de (c) utilise 3.4.13-(d). ■

3.6.2. Dualité de Grothendieck-Verdier sur les espaces stratifiés. Le théorème suivant, généralisation de 3.5.6, est l'une des conséquences majeures du théorème d'homotopie 3.3, notamment de ses corollaires 3.3.6, 3.3.7 et de 3.6.1.

3.6.3. Théorème. *Soit $(\mathbf{X}; \mathcal{F})$ un espace topologiquement stratifié.*

- a) $R\mathcal{H}om^{\bullet}(D_{\mathcal{F}\text{-clc}}^b(\mathbf{X}), D_{\mathcal{F}\text{-clc}}^b(\mathbf{X})) \subseteq D_{\mathcal{F}\text{-clc}}^b(\mathbf{X})$ et de même pour $D_{\mathcal{F}\text{-cc}}^b(\mathbf{X})$.
- b) $\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^{\bullet}(D_{\mathcal{F}\text{-clc}}^b(\mathbf{X})) \subseteq D_{\mathcal{F}\text{-clc}}^b(\mathbf{X})$ et $\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^{\bullet}(D_{\mathcal{F}\text{-cc}}^b(\mathbf{X})) \subseteq D_{\mathcal{F}\text{-cc}}^b(\mathbf{X})$.
- c) Pour tout $\mathcal{F}^{\bullet} \in D_{\mathcal{F}\text{-clc}}^b(\mathbf{X})$, on a $\llbracket \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^{\bullet} \mathcal{F}^{\bullet} \rrbracket_{\text{ch}} = \bigcup_{S \in \mathcal{F}} (-\llbracket i_S^! \mathcal{F}^{\bullet} \rrbracket_{\text{ch}} - \dim_{\text{ch}}(S))$.
- d) Le morphisme de bidualité $\mathcal{F}^{\bullet} \rightarrow \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^{\bullet} \circ \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^{\bullet}(\mathcal{F}^{\bullet})$ (3.4.13-(a)) est un isomorphisme pour tout $\mathcal{F}^{\bullet} \in D_{\mathcal{F}\text{-cc}}^b(\mathbf{X})$.
- e) Si \mathbf{X} est compact, $\dim_k(\mathbb{H}^*(\mathbf{X}; \mathcal{F}^{\bullet})) < \infty$, pour tout $\mathcal{F} \in D_{\mathcal{F}\text{-cc}}^b(\mathbf{X})$. En particulier, les nombres de Betti de \mathbf{X} sont finis.

Démonstration. Par récurrence sur le nombre de fermés non vides qui interviennent dans la filtration \mathcal{F} . Lorsqu'il n'y a qu'un seul fermé, \mathbf{X} est une variété topologique et le théorème a déjà été démontré (3.5.6).

Dans le cas général, on considère la décomposition $\mathbf{X} = U \amalg \Sigma$ dans laquelle $U := S^0$ est une variété topologique et $(\Sigma; \mathcal{F})$ est stratifié par une filtration possédant un fermé de moins que celle de \mathbf{X} . Le théorème pourra donc être considéré vérifié pour U et Σ .

- a) Pour tout $\mathcal{G}^{\bullet} \in D_{\mathcal{F}\text{-clc}}^b(\mathbf{X})$, on a $\mathcal{G}^{\bullet}|_U \in D_{\text{clc}}^b(U)$ et alors $Ri_{U*}(\mathcal{G}^{\bullet}|_U) \in D_{\mathcal{F}\text{-clc}}^b(\mathbf{X})$, d'après la corollaire 3.3.6. On a donc le triangle exact de $D^b(\mathbf{X})$:

$$i_{\Sigma*} i_{\Sigma}^! \mathcal{G}^{\bullet} \longrightarrow \mathcal{G}^{\bullet} \longrightarrow Ri_{U*}(\mathcal{G}^{\bullet}|_U) \xrightarrow{[+1]} \quad (*)$$

où deux termes appartiennent à $D_{\mathcal{F}\text{-clc}}^b(\mathbf{X})$. Comme $D_{\mathcal{F}\text{-clc}}^b(\mathbf{X})$ est stable par extension dans $D(\mathbf{X})$ (3.2.12), on a aussitôt $i_{\Sigma*} i_{\Sigma}^! \mathcal{G}^{\bullet} \in D_{\mathcal{F}\text{-clc}}^b(\mathbf{X})$ mais aussi $i_{\Sigma}^* \mathcal{G}^{\bullet} \in D_{\mathcal{F}\text{-clc}}^b(\Sigma)$ puisque $i_{\Sigma*}$ est exact et préserve les strates.

¹⁶ On peut prouver que ce morphisme est l'inverse en catégorie dérivée du morphisme obtenu en composant $\mathcal{D}_Z^{\bullet} i_Z^! = i_Z^{-1} i_Z!$ $\mathcal{D}_Z^{\bullet} i_Z^! = i_Z^{-1} \mathcal{D}_X^{\bullet} i_Z!$ $i_Z^! \rightarrow i_Z^{-1} \mathcal{D}_X^{\bullet}$.

Ceci étant, soit $\mathcal{F}^\bullet \in D_{\mathcal{F}\text{-clc}}^b(\mathbf{X})$. On a, par l'adjonction ordinaire,

$$\begin{cases} \mathbb{R}\mathcal{H}om^\bullet(\mathcal{F}^\bullet, i_{\Sigma^*} i_{\Sigma}^! \mathcal{G}^\bullet) \equiv i_{\Sigma^*} \mathbb{R}\mathcal{H}om^\bullet(\mathcal{F}^\bullet|_{\Sigma}, i_{\Sigma}^! \mathcal{G}^\bullet) \\ \mathbb{R}\mathcal{H}om^\bullet(\mathcal{F}^\bullet, \mathbb{R}i_{U^*} \mathcal{G}^\bullet|_U) \equiv \mathbb{R}i_{U^*} \mathbb{R}\mathcal{H}om^\bullet(\mathcal{F}^\bullet|_U, \mathcal{G}^\bullet|_U) \end{cases}$$

et donc, par l'hypothèse inductive sur U et Σ , grâce au fait que $i_{\Sigma}^! \mathcal{G}^\bullet \in D_{\mathcal{F}\text{-clc}}^b(\Sigma)$ et comme $\mathbb{R}i_{U^*}(D_{\mathcal{F}\text{-clc}}^b(U)) \subseteq (D_{\mathcal{F}\text{-clc}}^b(\mathbf{X}))$ (3.3.6), on conclut que les deux termes appartiennent bien à $D_{\mathcal{F}\text{-clc}}^b(\mathbf{X})$. Or, ces termes sont sommets d'un triangle exact de $D(\mathbf{X})$ de troisième sommet $\mathbb{R}\mathcal{H}om^\bullet(\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{G}^\bullet)$, de sorte que, en invoquant, une fois de plus, la stabilité de $D_{\mathcal{F}\text{-clc}}^b(\mathbf{X})$ par extensions dans $D(\mathbf{X})$, on a montré que

$$\mathbb{R}\mathcal{H}om^\bullet(\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{G}^\bullet) \in D_{\mathcal{F}\text{-clc}}^b(\mathbf{X})$$

Pour que les raisonnements précédents restent vrais en remplaçant «clc» par «cc», il suffit de prouver l'inclusion $\mathbb{R}i_{U^*}(D_{\mathcal{F}\text{-cc}}^b(U)) \subseteq (D_{\mathcal{F}\text{-cc}}^b(\mathbf{X}))$, où encore, pour chaque c , l'inclusion :

$$\mathbb{R}i_{c^*}(D_{\mathcal{F}\text{-cc}}^b(U^c)) \subseteq (D_{\mathcal{F}\text{-cc}}^b(U^{c+1})) \quad (\diamond)$$

au sujet de laquelle on sait que, pour tout $\mathcal{F}^\bullet \in D_{\mathcal{F}\text{-cc}}^b(U^c)$ et tout $x \in S^{c+1}$, on a (3.3.7) :

$$\mathcal{H}^m(\mathbb{R}i_{U^*} \mathcal{F}^\bullet)_x \equiv \mathbb{H}^m(\mathbb{L}(x); \mathcal{F}^\bullet|_{\mathbb{L}})$$

Comme les liens $\mathbb{L}(x)$ sont compacts et que la filtration induite par \mathcal{F} sur $\mathbb{L}(x)$ possède un fermé de moins que celle de \mathbf{X} , l'assertion (e) est vérifiée par le couple $(\mathbb{L}(x), \mathcal{F}^\bullet|_{\mathbb{L}(x)})$, par hypothèse inductive, et les fibres $\mathcal{H}^m(\mathbb{R}i_{U^*} \mathcal{F}^\bullet)_x$ sont bien de dimension finie, d'où (\diamond) et la fin de la preuve de (a).

- b) D'après (a), il suffit de vérifier que $\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet \in D_{\mathcal{F}\text{-cc}}^b(\mathbf{X})$. Or la suite (*) ci-dessus, pour $\mathcal{G}^\bullet := \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet$, donne (cf. 3.4.13-(c)) :

$$i_{\Sigma^*} \mathcal{D}_{\Sigma}^\bullet \longrightarrow \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet \longrightarrow \mathbb{R}i_{U^*} \mathcal{D}_U^\bullet \xrightarrow{[+1]}$$

où les termes extrêmes, et donc $\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet$, appartiennent à $D_{\mathcal{F}\text{-cc}}^b(\mathbf{X})$.

- c) Pour tout $\mathcal{F}^\bullet \in D_{\mathcal{F}\text{-clc}}^b(\mathbf{X})$, on a

$$\begin{aligned} \llbracket \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet \mathcal{F}^\bullet \rrbracket_{\text{ch}} &= \bigcup_{S \subseteq \mathcal{F}} \llbracket i_S^{-1} \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet \mathcal{F}^\bullet \rrbracket_{\text{ch}} \stackrel{(\overline{1})}{=} \bigcup_{S \subseteq \mathcal{F}} \llbracket \mathcal{D}_S^\bullet(i_S^! \mathcal{F}^\bullet) \rrbracket_{\text{ch}} \\ &\stackrel{(\overline{2})}{=} \bigcup_{S \subseteq \mathcal{F}} \left(- \llbracket i_S^! \mathcal{F}^\bullet \rrbracket_{\text{ch}} - \dim_{\text{ch}}(S) \right) \end{aligned}$$

($\overline{1}$) par 3.6.1-(b), et ($\overline{2}$) par 3.5.6-(d) puisque S est une variété topologique.

- d) On a un morphisme de triangles (3.6.1-(c))

$$\Delta(U, \mathbf{X}, \Sigma; \mathcal{F}^\bullet) \longrightarrow \Delta(U, \mathbf{X}, \Sigma; \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet \circ \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet \mathcal{F}^\bullet) \equiv \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet \circ \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet \Delta(U, \mathbf{X}, \Sigma; \mathcal{F}^\bullet)$$

associé au morphisme canonique $\mathcal{F}^\bullet \rightarrow \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet \circ \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet \mathcal{F}^\bullet$. Comme $\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet$ commute aux foncteurs $i_{U!}$ et $i_{\Sigma!}$, on est réduit à prouver que

$$\mathcal{F}^\bullet|_U \longrightarrow \mathcal{D}_U^\bullet \circ \mathcal{D}_U^\bullet(\mathcal{F}^\bullet|_U) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}^\bullet|_{\Sigma} \longrightarrow \mathcal{D}_U^\bullet \circ \mathcal{D}_U^\bullet(\mathcal{F}^\bullet|_{\Sigma})$$

sont des isomorphismes ce qui résulte de l'hypothèse inductive.

e) Se démontre exactement comme dans le cas des variétés topologiques (3.5.6-(g)). ■

3.6.4. Remarque importante. Dans le cas des variétés topologiques on a démontré que pour tous $\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{G}^\bullet \in D_{\text{clc}}^b(\mathbf{X})$ et tout $x \in \mathbf{X}$, le morphisme canonique

$$[\mathcal{R}\mathcal{H}om^\bullet(\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{G}^\bullet)]_x \longrightarrow \text{Hom}_k^\bullet(\mathcal{F}_x^\bullet, \mathcal{G}_x^\bullet)$$

est un isomorphisme. Ce résultat est **faux en général** dans le cas des espaces stratifiés. Par exemple, si x est un point d'une strate de dimension 0, le faisceau gratte-ciel $i_{x!}k$ appartient à $D_{\mathcal{F}\text{-cc}}^b(\mathbf{X})$ et par dualité de Grothendieck-Verdier :

$$\mathcal{R}\mathcal{H}om^\bullet(i_{x!}k, \mathcal{G}^\bullet)_x \equiv (i_{x*} \text{Hom}_k^\bullet(k, i_x^! \mathcal{G}^\bullet))_x = \text{Hom}_k^\bullet(k, i_x^! \mathcal{G}^\bullet) = i_x^! \mathcal{G}^\bullet$$

Or, il n'y a aucune raison pour que $i_x^! \mathcal{G}^\bullet = i_x^{-1} \mathcal{G}^\bullet$, comme le montre le cas où \mathbf{X} est une variété topologique de dimension $d > 0$ (ce qui n'empêche pas qu'elle admette une stratification avec des strates ponctuelles) et que $\mathcal{G}^\bullet = \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet$, auquel cas, $i_x^{-1} \mathcal{G}^\bullet = k[d]$ mais $i_x^! \mathcal{G}^\bullet = k$.

Les propriétés de finitude obtenues dans la preuve du théorème 3.6.3 nous permettent maintenant de renforcer le lemme technique 3.6.1.

3.6.5. Proposition. Soient $(\mathbf{X}; \mathcal{F})$ un espace topologiquement stratifié et \mathbf{Z} une partie localement fermée de \mathbf{X} réunion de strates de \mathcal{F} . Alors :

$$\begin{aligned} i_{\mathbf{Z}}^!(D_{\mathcal{F}\text{-clc}}^b(\mathbf{X})) &\subseteq D_{\mathcal{F}\text{-clc}}^b(\mathbf{Z}) & \text{et} & & i_{\mathbf{Z}}^{-1}(D_{\mathcal{F}\text{-clc}}^b(\mathbf{X})) &\subseteq D_{\mathcal{F}\text{-clc}}^b(\mathbf{Z}) \\ i_{\mathbf{Z}!}(D_{\mathcal{F}\text{-clc}}^b(\mathbf{Z})) &\subseteq D_{\mathcal{F}\text{-clc}}^b(\mathbf{X}) & \text{et} & & \mathcal{R}i_{\mathbf{Z}*}(D_{\mathcal{F}\text{-clc}}^b(\mathbf{Z})) &\subseteq D_{\mathcal{F}\text{-clc}}^b(\mathbf{X}) \end{aligned}$$

Et de même en remplaçant «clc» par «cc». On a aussi :

$$\begin{aligned} i_{\mathbf{Z}}^! \circ \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet &= \mathcal{D}_{\mathbf{Z}}^\bullet \circ i_{\mathbf{Z}}^{-1}, & i_{\mathbf{Z}}^{-1} \circ \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet &= \mathcal{D}_{\mathbf{Z}}^\bullet \circ i_{\mathbf{Z}}^!, \\ i_{\mathbf{Z}!} \circ \mathcal{D}_{\mathbf{Z}}^\bullet &= \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet \circ \mathcal{R}i_{\mathbf{Z}*}, & \mathcal{R}i_{\mathbf{Z}*} \circ \mathcal{D}_{\mathbf{Z}}^\bullet &= \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet \circ i_{\mathbf{Z}!} \end{aligned}$$

Démonstration. On factorise l'injection $i_{\mathbf{Z}}$ à travers l'adhérence $\overline{\mathbf{Z}}$ qui est, elle aussi, réunion de strates de \mathcal{F} . Il suffit alors de vérifier la proposition pour \mathbf{Z} tantôt ouverte tantôt fermée. Lorsque \mathbf{Z} est ouverte, la proposition a été démontrée dans lemme technique pour «clc», et dans la preuve de 3.6.3 pour «cc». À partir de là, le cas "fermé" s'en déduit à l'aide des triangles $\Delta(\mathbf{Z}, \mathbf{X}, \mathbf{U}; -)$ et $\Delta(\mathbf{U}, \mathbf{X}, \mathbf{Z}; -)$. ■

3.7 Produits et théorème de Künneth

3.7.1. Dans cette section on fera souvent référence au diagramme cartésien ci-après où \mathbf{X} et \mathbf{Y} sont métrisables, localement compacts et contractiles, de dimension cohomologique finie, et où p et q désignent les projections canoniques.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{X} \times \mathbf{Y} & \xrightarrow{q} & \mathbf{Y} \\ p \downarrow & \square & \downarrow c_{\mathbf{Y}} \\ \mathbf{X} & \xrightarrow{c_{\mathbf{X}}} & \text{pt} \end{array}$$

Le théorème de changement de base affirme, dans ce cas, que le morphisme naturel des foncteurs :

$$c_X^{-1} \circ \mathbb{R}c_{Y!} \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}p_! \circ q^{-1}$$

est un isomorphisme, et donc de même, par adjonction,

$$\mathbb{R}p_* \circ q^! \equiv c_X^! \circ \mathbb{R}c_{Y*} .$$

3.7.2. Produit tensoriel externe. Pour $\mathcal{F} \in \text{Fais}_k(\mathbf{X})$, $\mathcal{G} \in \text{Fais}_k(\mathbf{Y})$, on note

$$\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G} := p^{-1} \mathcal{F} \otimes_{\underline{k}_{\mathbf{X} \times \mathbf{Y}}} q^{-1} \mathcal{G} \in \text{Fais}_k(\mathbf{X} \times \mathbf{Y})$$

On vérifie que $\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G}$ est le faisceau sur $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ engendré par le préfaisceau défini, sur la base de la topologie produit donnée par les produits d'ouverts, par :

$$U \times V \rightsquigarrow \mathcal{F}(U) \otimes_k \mathcal{G}(V) .$$

De même si $\alpha : \mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2$ et $\beta : \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{G}_2$ sont des morphismes de faisceaux, on note $\alpha \boxtimes \beta : \mathcal{F}_1 \boxtimes \mathcal{G}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2 \boxtimes \mathcal{G}_2$ le morphisme de faisceaux associé au morphisme de préfaisceaux :

$$U \times V \rightsquigarrow \alpha(U) \otimes_k \beta(V) .$$

On obtient ainsi un bifoncteur $\boxtimes : \text{Fais}_k(\mathbf{X}) \times \text{Fais}_k(\mathbf{Y}) \rightsquigarrow \text{Fais}_k(\mathbf{X} \times \mathbf{Y})$ clairement covariant, additif et exact par rapport à chaque variable.

3.7.3. Exercice. Donner un sens et prouver les égalités suivantes :

- $(\mathcal{F}_1 \boxtimes \mathcal{G}_1) \otimes (\mathcal{F}_2 \boxtimes \mathcal{G}_2) = (\mathcal{F}_1 \otimes \mathcal{F}_2) \boxtimes (\mathcal{G}_1 \otimes \mathcal{G}_2)$.
- $\mathcal{H}om(\mathcal{F}_1, \mathcal{G}_1) \boxtimes \mathcal{H}om(\mathcal{F}_2, \mathcal{G}_2) = \mathcal{H}om(\mathcal{F}_1 \boxtimes \mathcal{F}_2, \mathcal{G}_1 \boxtimes \mathcal{G}_2)$.
- $\underline{k}_U \boxtimes \underline{k}_V = \underline{k}_{U \times V}$, pour tous ouverts $U \subseteq \mathbf{X}$ et $V \subseteq \mathbf{Y}$.
- $(c\text{-mou}) \boxtimes (c\text{-mou})$ est $c\text{-mou}$.
- Étant données des partitions \mathcal{X} de \mathbf{X} et \mathcal{Y} de \mathbf{Y} , on note $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ la partition produit de $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$. Alors (cf. 3.2) :

$$(\mathcal{X}\text{-clc}) \boxtimes (\mathcal{Y}\text{-clc}) \text{ est } (\mathcal{X} \times \mathcal{Y})\text{-clc} \quad \text{et} \quad (\mathcal{X}\text{-cc}) \boxtimes (\mathcal{Y}\text{-cc}) \text{ est } (\mathcal{X} \times \mathcal{Y})\text{-cc} .$$

$$\text{f) } \mathbb{R}p_!(\underline{k}_{\mathbf{X}} \boxtimes \mathcal{G}^\bullet) = \underline{\mathbb{R}\Gamma}_c(\mathbf{Y}; \mathcal{G}^\bullet)_X .$$

3.7.4. Théorème. Les notations étant celles des paragraphes précédents, on suppose \mathbf{X} et \mathbf{Y} munis de stratifications $\mathcal{F}_{\mathbf{X}}$ et $\mathcal{F}_{\mathbf{Y}}$. Alors :

- Il existe un isomorphisme canonique de foncteurs de $D_k^+(\mathbf{X})$ vers $D_k^+(\mathbf{X} \times \mathbf{Y})$:

$$\boxed{(-) \boxtimes \mathbb{D}_{\mathbf{Y}}^\bullet \rightarrow p^!(-)}$$

- $p^!(D_{\mathcal{F}_{\mathbf{X}\text{-clc}}^b}(\mathbf{X})) \subseteq D_{(\mathcal{F}_{\mathbf{X}} \times \mathcal{F}_{\mathbf{Y}})\text{-clc}}^b(\mathbf{X} \times \mathbf{Y})$ et de même pour « cc ».
- $\mathbb{D}_{\mathbf{X}}^\bullet \boxtimes \mathbb{D}_{\mathbf{Y}}^\bullet \equiv \mathbb{D}_{\mathbf{X} \times \mathbf{Y}}^\bullet$ et $(\mathbb{D}_{\mathbf{X}}^\bullet)_x \otimes (\mathbb{D}_{\mathbf{Y}}^\bullet)_y \equiv (\mathbb{D}_{\mathbf{X} \times \mathbf{Y}}^\bullet)_{(x,t)}$.

d) Pour tous $\mathcal{F}^\bullet \in D_k^b(\mathbf{X})$, $\mathcal{G}^\bullet \in D_k^b(\mathbf{Y})$, on a

$$\mathcal{D}_{\mathbf{X} \times \mathbf{Y}}^\bullet(\mathcal{F}^\bullet \boxtimes \mathcal{G}^\bullet) \equiv \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet \mathcal{F}^\bullet \boxtimes \mathcal{D}_{\mathbf{Y}}^\bullet \mathcal{G}^\bullet.$$

En particulier,

$$\mathcal{D}_{\mathbf{X} \times \mathbf{Y}}^\bullet(D_{\mathcal{F}_{\mathbf{X}\text{-clc}}}^b(\mathbf{X}) \boxtimes D_{\mathcal{F}_{\mathbf{Y}\text{-clc}}}^b(\mathbf{Y})) \subseteq D_{(\mathcal{F}_{\mathbf{X} \times \mathbf{Y}\text{-clc}}^b)}^b(\mathbf{X} \times \mathbf{Y}),$$

et de même pour «cc».

e) On a des isomorphismes canoniques de foncteurs de $D_{\mathcal{F}_{\mathbf{X}\text{-clc}}}^b(\mathbf{X})$:

$$\mathcal{D}_{\mathbf{X} \times \mathbf{Y}}^\bullet \circ p^{-1} \equiv p^! \circ \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_{\mathbf{X} \times \mathbf{Y}}^\bullet \circ p^! \equiv p^{-1} \circ \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet.$$

Démonstration

a) La construction du morphisme se fait au niveau des préfaisceaux sur les ouverts de la forme $U \times V$. Soit \mathcal{I}^\bullet un complexe borné à gauche de faisceaux injectifs sur \mathbf{X} . On a :

$$\begin{aligned} \Gamma(U \times V; p^! \mathcal{I}^\bullet) &= \text{Hom}^\bullet(\mathbb{R}p_!(\underline{k}_{U \times V}), \mathcal{I}^\bullet) \\ &= \text{Hom}^\bullet(\mathbb{R}p_!(p^{-1} \underline{k}_U \otimes q^{-1} \underline{k}_V), \mathcal{I}^\bullet) \\ &\stackrel{1}{=} \text{Hom}^\bullet(\underline{k}_U \otimes \mathbb{R}p_! q^{-1} \underline{k}_V, \mathcal{I}^\bullet) \stackrel{2}{=} \text{Hom}^\bullet(\underline{k}_U \otimes c_X^{-1} \mathbb{R}c_{Y!} \underline{k}_V, \mathcal{I}^\bullet) \\ &= \text{Hom}^\bullet(c_X^{-1} \mathbb{R}c_{Y!} \underline{k}_V, \mathcal{H}om^\bullet(\underline{k}_U, \mathcal{I}^\bullet)) \\ &\stackrel{3}{=} \text{Hom}^\bullet(\mathbb{R}c_{Y!} \underline{k}_V, c_{X*} \mathcal{H}om^\bullet(\underline{k}_U, \mathcal{I}^\bullet)) \\ &\stackrel{4}{=} \text{Hom}^\bullet(\mathbb{R}c_{Y!} \underline{k}_V, \Gamma(U; \mathcal{I}^\bullet)) \stackrel{\epsilon}{\longleftarrow} \Gamma(U; \mathcal{I}^\bullet) \otimes \text{Hom}^\bullet(\mathbb{R}c_{Y!} \underline{k}_V, k) \\ &\stackrel{5}{=} \Gamma(U; \mathcal{I}^\bullet) \otimes \Gamma(V; \mathcal{D}_{\mathbf{Y}}^\bullet) \end{aligned}$$

avec : $(\stackrel{0}{=})$ par définition de $p^!$; $(\stackrel{1}{=})$ par 3.4.6-(h); $(\stackrel{2}{=})$ par changement de base; $(\stackrel{3}{=})$ par adjonction ordinaire; $(\stackrel{4}{=})$ par 3.4 et $(\stackrel{5}{=})$ par définition, de $\mathcal{D}_{\mathbf{Y}}^\bullet$.

D'où la définition du morphisme $(_) \boxtimes \mathcal{D}_{\mathbf{Y}}^\bullet \rightarrow p^!(_)$ qui sera, en plus, un isomorphisme, lorsque ϵ l'est. Or, il est bien connu que ϵ est un quasi-isomorphisme si l'un ou l'autre des facteurs est «cc», c'est là qu'on a besoin d'une condition de finitude, et c'est là qu'il est naturel de se restreindre au cas des espaces topologiquement stratifiés car alors on peut prendre à la place de U des voisinages distingués N_y , auquel cas

$$\mathbb{H}^m(N_y; \mathcal{D}_{\mathbf{Y}}^\bullet) \equiv \mathbb{H}_c^{-m}(N_y; k)^\vee \equiv H^{1-m}(\mathbb{L}(y); k)^\vee$$

est de dimension finie d'après 3.6.3-(e).

b,c) Immédiats d'après (a) et 3.7.3-(e).

d) On a (cf. 3.7.3-(b)) :

$$\mathcal{D}_{\mathbf{X} \times \mathbf{Y}}^\bullet(\mathcal{F}^\bullet \boxtimes \mathcal{G}^\bullet) = \mathbb{R}\mathcal{H}om^\bullet(\mathcal{F}^\bullet \boxtimes \mathcal{G}^\bullet, \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet \boxtimes \mathcal{D}_{\mathbf{Y}}^\bullet) \equiv \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet \mathcal{F}^\bullet \boxtimes \mathcal{D}_{\mathbf{Y}}^\bullet \mathcal{G}^\bullet$$

e) La première équivalence est générale (3.4.13-(c)), la seconde résulte de (a) et (d). ■

3.7.5. Exercice

a) **Künneth à supports compacts.** Prouver qu'il existe un isomorphisme naturel

$$\mathbb{H}_c^*(\mathbf{X} \times \mathbf{Y}; \mathcal{F}^\bullet \boxtimes \mathcal{G}^\bullet) \cong \mathbb{H}_c^*(\mathbf{X}; \mathcal{F}^\bullet) \otimes \mathbb{H}_c^*(\mathbf{Y}; \mathcal{G}^\bullet)$$

pour tous, $\mathcal{F}^\bullet \in D^+(\mathbf{X})$ et $\mathcal{G}^\bullet \in D^+(\mathbf{Y})$.

Indication. Penser à l'isomorphisme $\mathbb{R}p_!(\mathcal{F}^\bullet \boxtimes \mathcal{G}^\bullet) \cong \mathcal{F}^\bullet \otimes c_{\mathbf{X}}^{-1} \mathbb{R}c_{\mathbf{Y}!} \mathcal{G}^\bullet$ (3.4.6-(h)).

b) Prouver qu'il existe un isomorphisme naturel

$$\mathbb{H}_{(x,y)}^*(\mathbf{X} \times \mathbf{Y}; \mathcal{F}^\bullet \boxtimes \mathcal{G}^\bullet) \cong \mathbb{H}_x^*(\mathbf{X}; \mathcal{F}^\bullet) \otimes \mathbb{H}_y^*(\mathbf{Y}; \mathcal{G}^\bullet)$$

pour tous, $\mathcal{F}^\bullet \in D^+(\mathbf{X})$ et $\mathcal{G}^\bullet \in D^+(\mathbf{Y})$.

3.7.6. Remarque. Il faut se méfier du foncteur $p_!$ qui demandera, en général, plus de conditions pour conserver la constructibilité. Par exemple, l'équivalence :

$$\mathbb{R}p!(\underline{k}_{\mathbf{X} \times \mathbf{Y}}) = \mathbb{R}p!(\underline{k}_{\mathbf{X}} \boxtimes \underline{k}_{\mathbf{Y}}) = c_{\mathbf{X}}^{-1} \circ \mathbb{R}c_{\mathbf{Y}!}(\underline{k}_{\mathbf{Y}})$$

montre qu'une condition nécessaire pour conserver cette propriété sera la finitude de la cohomologie à supports compacts de \mathbf{Y} .

3.8 Applications stratifiées

Soient $(\mathbf{X}; \mathcal{F}_{\mathbf{X}})$ $(\mathbf{Y}; \mathcal{F}_{\mathbf{Y}})$ deux espaces topologiquement stratifiés. Une application continue $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ sera dite « stratifiée », on note alors $f : (\mathbf{X}; \mathcal{F}_{\mathbf{X}}) \rightarrow (\mathbf{Y}; \mathcal{F}_{\mathbf{Y}})$, lorsque :

- Str(i) Pour toute strate $\mathbf{S} \in \mathcal{F}_{\mathbf{Y}}$, l'ensemble $f^{-1}\mathbf{S}$ est réunion de strates de $\mathcal{F}_{\mathbf{X}}$.
- Str(ii) Pour toute strate $\mathbf{S} \in \mathcal{F}_{\mathbf{Y}}$ et pour tout $y \in \mathbf{S}$, il existe un voisinage V_y de y dans \mathbf{S} , un espace stratifié $(\mathbf{Z}; \mathcal{F}_{\mathbf{Z}})$, et un homéomorphisme d'espaces stratifiés $h : (f^{-1}V_y, \mathcal{F}_{\mathbf{X}}) \rightarrow V_y \times (\mathbf{Z}; \mathcal{F}_{\mathbf{Z}})$, tels que $f|_{f^{-1}V_y} = p_1 \circ h$. Un tel voisinage sera appelé « *f-distingué* ».

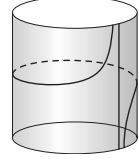
Enfin, l'application $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ sera dite « stratifiable » s'il existe des structures d'espace stratifié pour \mathbf{X} et \mathbf{Y} rendant f stratifiée.

3.8.1. Exemples et commentaires

- Une application stratifiable est surjective et ouverte.
- Dans un espace topologiquement stratifié $(\mathbf{Y}; \mathcal{F})$, toute réunion \mathbf{X} de strates de \mathcal{F} , localement fermée dans \mathbf{Y} , munie de la filtration induite par \mathcal{F} , est un espace stratifié. L'inclusion $(\mathbf{X}; \mathcal{F}) \subseteq (\mathbf{Y}; \mathcal{F})$ est alors une application stratifiée.
- Un morphisme propre et algébrique entre deux variétés algébriques complexes est (algébriquement) stratifiable.
- Si $(\mathbf{X}; \mathcal{F}_{\mathbf{X}})$ et $(\mathbf{Y}; \mathcal{F}_{\mathbf{Y}})$ sont topologiquement stratifiés, le produit des strates définit une structure d'espace topologiquement stratifié sur $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ notée $\mathcal{F}_{\mathbf{X}} \times \mathcal{F}_{\mathbf{Y}}$. La projection canonique $p : (\mathbf{X} \times \mathbf{Y}; \mathcal{F}_{\mathbf{X}} \times \mathcal{F}_{\mathbf{Y}}) \rightarrow (\mathbf{X}; \mathcal{F}_{\mathbf{X}})$ est stratifiée.

- Le sous-espace $\mathbf{X} \subseteq \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ des couples (s, t) avec $s = -1$ ou bien de la forme $(e^{i\pi t/2}, t/(t^2 - 1))$ est une sous-variété différentiable fermée de dimension 1 de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$.

Les projections canoniques $p_1 : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{S}^1$, $p_2 : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}$ sont toutes les deux stratifiables. La première par rapport à toute stratification de \mathbb{S}^1 dans laquelle $\{-1\}$ est une strate de dimension 0, la seconde sans aucune restriction puisque revêtement à deux feuillets de \mathbb{R} .



Le théorème suivant généralise 3.7.4 au cas des applications stratifiées.

3.8.2. Théorème. Soit $f : (\mathbf{X}; \mathcal{F}_{\mathbf{X}}) \rightarrow (\mathbf{Y}; \mathcal{F}_{\mathbf{Y}})$ une application continue stratifiée. Alors :

a)
$$\mathbb{R}f^!(D_{\mathcal{F}_{\mathbf{Y}\text{-clc}}^b}(\mathbf{Y})) \subseteq D_{\mathcal{F}_{\mathbf{X}\text{-clc}}^b}(\mathbf{X}) \supseteq f^{-1}(D_{\mathcal{F}_{\mathbf{Y}\text{-clc}}^b}(\mathbf{Y}))$$

b) On a des isomorphismes naturels de foncteurs de $D_{\mathcal{F}_{\mathbf{X}\text{-clc}}^b}(\mathbf{Y})$ vers $D_{\mathcal{F}_{\mathbf{X}\text{-clc}}^b}(\mathbf{X})$:

$$\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^{\bullet} \circ f^! \equiv f^{-1} \circ \mathcal{D}_{\mathbf{Y}}^{\bullet} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^{\bullet} \circ f^{-1} \equiv f^! \circ \mathcal{D}_{\mathbf{Y}}^{\bullet}$$

Et de même en remplaçant «clc» par «cc».

Démonstration. Lorsque le cardinal de l'ensemble des parties fermées non vides de $\mathcal{F}_{\mathbf{X}}$ vaut 1 on se retrouve (localement sur \mathbf{Y}) dans les hypothèses du théorème 3.7.4 et on peut conclure. Dans le cas général, on note \mathbf{Z} le plus petit des fermés non vides de $\mathcal{F}_{\mathbf{X}}$ et U l'ouvert complémentaire. Pour tout $\mathcal{F}^{\bullet} \in D_{\mathcal{F}_{\mathbf{Y}\text{-clc}}^b}(\mathbf{Y})$, on a le triangle exact :

$$i_{\mathbf{Z}*} i_{\mathbf{Z}}^! \mathcal{F}^{\bullet} \longrightarrow \mathcal{F}^{\bullet} \longrightarrow \mathbb{R}i_{U*} \mathcal{F}^{\bullet}|_U \xrightarrow{[+1]}$$

Par changement de base, $f^!$ « commute » à $\mathbb{R}i_*$ et donc

$$i_{f^{-1}\mathbf{Z}*} f_Z^!(i_{\mathbf{Z}}^! \mathcal{F}^{\bullet}) \longrightarrow f^! \mathcal{F}^{\bullet} \longrightarrow \mathbb{R}i_{f^{-1}U*} f_U^!(\mathcal{F}^{\bullet}|_U) \xrightarrow{[+1]} \quad (\diamond)$$

où f_Z et f_U désignent les restrictions de f respectivement à $f^{-1}\mathbf{Z}$ et $f^{-1}U$.

On a $i_{\mathbf{Z}}^! \mathcal{F}^{\bullet} \in D_{\mathcal{F}_{\mathbf{Y}\text{-clc}}^b}(\mathbf{Z})$ (3.6.5) et $\mathcal{F}^{\bullet}|_U \in D_{\mathcal{F}_{\mathbf{Y}\text{-clc}}^b}(U)$ et, par induction, $f_Z^!(i_{\mathbf{Z}}^! \mathcal{F}^{\bullet})$ et $f_U^!(\mathcal{F}^{\bullet}|_U)$ sont $\mathcal{F}_{\mathbf{X}\text{-clc}}$ respectivement sur $f^{-1}\mathbf{Z}$ et $f^{-1}U$. Les termes extrêmes de (\diamond) sont alors dans $D_{\mathcal{F}_{\mathbf{X}\text{-clc}}^b}(\mathbf{X})$ (3.6.5) et de même pour $f^! \mathcal{F}^{\bullet} \in D_{\mathcal{F}_{\mathbf{X}\text{-clc}}^b}(\mathbf{X})$ car extension de $\mathcal{F}_{\mathbf{X}\text{-clc}}$. Mêmes arguments pour «cc», d'où (a).

L'assertion (b) se démontre de la même manière à l'aide de 3.6.5. ■

3.8.3. Remarque à propos de la bidualité. On observera que l'isomorphisme de droite dans l'assertion (b) est vérifié sans hypothèse sur l'application f (3.4.13-(c)). Dans le cas «cc», il suffit alors de vérifier que $f^{-1}(D_{\mathcal{F}_{\mathbf{Y}\text{-cc}}^b}(\mathbf{Y})) \subseteq D_{\mathcal{F}_{\mathbf{X}\text{-cc}}^b}(\mathbf{X})$, ce qui est immédiat, pour que l'isomorphisme de gauche soit automatiquement vérifié. En effet, dans ce cas, on a par bidualité sur $D_{\mathcal{F}_{\mathbf{Y}\text{-cc}}^b}(\mathbf{Y})$ et $D_{\mathcal{F}_{\mathbf{X}\text{-cc}}^b}(\mathbf{X})$:

$$f^{-1} \circ \mathcal{D}_{\mathbf{Y}}^{\bullet} \equiv \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^{\bullet} \circ \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^{\bullet} \circ f^{-1} \circ \mathcal{D}_{\mathbf{Y}}^{\bullet} = \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^{\bullet} \circ f^! \circ \mathcal{D}_{\mathbf{Y}}^{\bullet} \circ \mathcal{D}_{\mathbf{Y}}^{\bullet} = \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^{\bullet} \circ f^!$$

D'où l'intérêt pratique de travailler dans la catégorie $\mathcal{F}\text{-cc}$ plutôt que dans $\mathcal{F}\text{-clc}$.

On aura compris que sur $D_{\mathcal{F}_Y\text{-cc}}^b(\mathbf{Y})$, on a :

- *quelle que soit l'application continue $f : X \rightarrow Y$,*

$$\begin{cases} f^! \circ \mathcal{D}_Y^\bullet = \mathcal{D}_X^\bullet \circ f^{-1} \\ f^! = \mathcal{D}_X^\bullet \circ f^{-1} \circ \mathcal{D}_Y^\bullet \end{cases}$$

- de même que *l'équivalence* des assertions suivantes :

$$\begin{cases} f^{-1}(D_{\mathcal{F}_Y\text{-cc}}^b(\mathbf{Y})) \subseteq D_{\mathcal{F}_X\text{-cc}}^b(\mathbf{X}); \\ f^!(D_{\mathcal{F}_Y\text{-cc}}^b(\mathbf{Y})) \subseteq D_{\mathcal{F}_X\text{-cc}}^b(\mathbf{X}); \\ f^{-1} = \mathcal{D}_X^\bullet \circ f^! \circ \mathcal{D}_Y^\bullet; \\ f^{-1} \circ \mathcal{D}_Y^\bullet = \mathcal{D}_X^\bullet \circ f^!. \end{cases}$$

Il suffit donc de vérifier l'une quelconque des assertions de la deuxième liste pour les avoir toutes.

Nous laissons en exercice l'étude du cas des foncteurs $\mathbb{R}f_!$ et $\mathbb{R}f_*$ pour lesquels on a le même phénomène. La proposition suivante en est un exemple.

3.8.4. Proposition. *Soit $f : (\mathbf{X}; \mathcal{F}_X) \rightarrow (\mathbf{Y}; \mathcal{F}_Y)$ une application continue stratifiée à fibres compactes. Alors :*

- $\mathbb{R}f_!(D_{\mathcal{F}_X\text{-cc}}^b(\mathbf{X})) \subseteq D_{\mathcal{F}_Y\text{-cc}}^b(\mathbf{Y}) \supseteq \mathbb{R}f_*(D_{\mathcal{F}_X\text{-cc}}^b(\mathbf{X}))$
- On a des isomorphismes naturels sur $D_{\mathcal{F}_Y\text{-cc}}^b(\mathbf{Y})$:

$$\mathcal{D}_Y^\bullet \circ \mathbb{R}f_! \equiv \mathbb{R}f_* \circ \mathcal{D}_X^\bullet \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_Y^\bullet \circ \mathbb{R}f_* \equiv \mathbb{R}f_! \circ \mathcal{D}_X^\bullet$$

Indications. D'après la remarque précédente, tout résulte de vérifier l'inclusion

$$\mathbb{R}f_!(D_{\mathcal{F}_X\text{-cc}}^b(\mathbf{X})) \subseteq D_{\mathcal{F}_Y\text{-cc}}^b(\mathbf{Y})$$

Or, pour toute strate $S \subseteq \mathcal{F}_Y$ et chaque $y \in S$, il existe un voisinage V_y de y dans S qui est contractile et f -distingué. Par changement de base, on a

$$(\mathbb{R}f_! \mathcal{F}^\bullet)|_{V_y} = \mathbb{R}f_{V_y,1}(\mathcal{F}^\bullet|_{f^{-1}V_y})$$

où $f_{V_y} := f|_{f^{-1}V_y}$. Ce qui nous conduit à considérer le cas d'un diagramme cartésien de projections canoniques

$$\begin{array}{ccc} V_y \times (\mathbf{F}; \mathcal{F}) & \xrightarrow{q} & (\mathbf{F}; \mathcal{F}) \\ p \downarrow & & \downarrow c_{\mathbf{F}} \\ V_y & \xrightarrow{c_{V_y}} & \text{pt} \end{array}$$

où $(\mathbf{F}; \mathcal{F})$ est un espace stratifié et d'un complexe $\mathcal{F}^\bullet \in D^b(V_y \times \mathbf{F})$ cohomologiquement constructible par rapport à la filtration de $V_y \times \mathcal{F}$. Comme V_y est contractile, on a $\mathcal{F}^\bullet \equiv q^{-1}(\mathcal{F}^\bullet|_{\mathbf{F}})$ et donc (3.7.3-(f))

$$\mathbb{R}p_! \mathcal{F}^\bullet = \mathbb{R}p_! (\underline{k}_{V_y} \boxtimes (\mathcal{F}^\bullet|_{\mathbf{F}})) = \underline{\mathbb{R}\Gamma}_c(\mathbf{F}; \mathcal{F}^\bullet|_{\mathbf{F}})_{V_y},$$

et $\mathbb{R}p_! \mathcal{F}^\bullet \in D_{cc}^b(V_y)$ puisque $\mathbf{F} = f^{-1}y$ est compact par hypothèse (3.6.3-(e)). \blacksquare

3.8.5. Remarque. On prendra garde du fait que dans l'énoncé de la proposition précédente, l'hypothèse qui demande aux fibres de f d'être compactes n'est pas équivalente à la propriété de f . Par exemple, l'inclusion $i_U : U \hookrightarrow X$ d'un ouvert vérifie bien cette l'hypothèse alors i_U n'est généralement pas propre.

On remarquera aussi que la compacité des fibres n'intervient que pour garantir la finitude des groupes $\mathbb{H}_c^m(\mathbf{F}; \mathcal{F}^\bullet)$. Or, lorsque \mathbf{F} est un ouvert d'un espace **compact** topologiquement stratifié $(\overline{\mathbf{F}}; \mathcal{G})$ tel que la trace sur \mathbf{F} de la filtration \mathcal{G} raffine celle de \mathcal{F}_X , on dit alors que $(\mathbf{F}; \mathcal{F}_X)$ est **compactifiable**, on a $\mathcal{G}^\bullet := i_{\mathbf{F}}^{\overline{\mathbf{F}}}(\mathcal{F}^\bullet|_{\mathbf{F}}) \in D_{\mathcal{G}\text{-cc}}^b(\overline{\mathbf{F}})$ et la suite exacte longue associée au triangle exact $\Delta(\mathbf{F}, \overline{\mathbf{F}}, \overline{\mathbf{F}} \setminus \mathbf{F}; \mathcal{G}^\bullet)$ donne un encadrement de $\mathbb{H}_c^m(\mathbf{F}; \mathcal{F}^\bullet|_{\mathbf{F}})$ par $\mathbb{H}^{m-1}(\overline{\mathbf{F}} \setminus \mathbf{F}; \mathcal{G}^\bullet)$ et $\mathbb{H}^m(\overline{\mathbf{F}}; \mathcal{G}^\bullet)$ tous les deux de dimension finie puisque $\overline{\mathbf{F}}$ et $\overline{\mathbf{F}} \setminus \mathbf{F}$ sont compacts (3.6.3-(e)). Il s'ensuit que l'hypothèse «à fibres compactes» peut être remplacée par «à fibres compactifiables»⁽¹⁷⁾. Dans le cas algébrique complexe cette hypothèse peut même être effacée puisque si f, X, Y sont algébriques complexes, les fibres de f sont des variétés algébriques stratifiées et il est bien connu qu'elles sont compactifiables.

§4. Prolongement intermédiaire, perversité, homologie d'intersection

La notion de «perversité» a été introduite par Goresky-MacPherson dans [GoMc₁] comme une “mesure” de l'impossibilité de rendre transverses deux simplexes sur un espace topologique singulier, ce qui est à la base de l'obstruction pour la dualité de Poincaré sur de tels espaces. En voici un extrait de [GoMc₂] où la notion est définie.

A *perversity* is a sequence of integers $\bar{p} = (p_2, p_3, \dots, p_n)$ with $p_2 = 0$ and $p_c \leq p_{c+1} \leq p_c + 1$. We shall often write $p(c)$ instead of p_c . There are several perversities of particular importance:

- the zero perversity $\bar{0} = (0, 0, 0, \dots, 0)$
- the lower middle perversity $\bar{m} = (0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, \dots)$
- the upper middle perversity $\bar{n} = (0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, \dots)$
- the logarithmic perversity $\bar{l} = (0, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, \dots)$
- the sublogarithmic perversity $\bar{s} = (0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, \dots)$
- the top perversity $\bar{t} = (0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots)$.

For any perversity \bar{p} , the *complementary* perversity is defined to be

$$\bar{t} - \bar{p} = (0, 1 - p_3, 2 - p_4, 3 - p_5, \dots).$$

For example, $\bar{0}$ and \bar{t} are complementary, as are \bar{m} and \bar{n} .

On aura remarqué dans les définitions de «pseudovariété» et de «perversité» un certain nombre de restrictions, notamment :

- Res-i) La contrainte $\text{codim}_X(\Sigma) \geq 2$ dans la définition de pseudovariété.
- Res-ii) Le type de croissance imposée à une perversité \bar{p} .
- Res-iii) L'égalité $p_2 = 0$.

¹⁷ Cf. [BoAl] §V 10.6 p. 167.

Dans cette section et les suivantes, nous verrons que ces restrictions s'imposent naturellement pour étendre la dualité de Poincaré sur les variétés topologiques aux pseudovariétés, mais aussi, plus profondément, pour garantir l'indépendance de l'homologie d'intersection vis-à-vis des stratifications.

Rappelons pour terminer que dans nos calculs explicites autour de la dualité de Poincaré (numérique) de l'homologie d'intersection des espaces topologiques très simples, nous avons déjà rencontré (Res-i) comme nécessaire à la dualité de Poincaré, et souligné que (Res-iii) était imposée sur tous les "bons" exemples.

Nous reprenons dans ce qui suit les paragraphes des notes [A] concernant le prolongement intermédiaire et les complexes d'intersections pour la « *perversité moyenne* » pour les replacer dans le contexte des perversités générales.

4.1 Équivalence de catégories de Deligne

On reprend les notations de 3.3 concernant la donnée d'un espace topologique \mathbf{X} muni d'une filtration fermée \mathcal{F} :

$$\mathcal{F} = \left(\mathbf{X} = \mathbf{X}_d \supseteq \mathbf{X}_{d-1} \supseteq \mathbf{X}_{d-2} \supseteq \cdots \supseteq \mathbf{X}_0 \supseteq \mathbf{X}_{-1} = \emptyset \right) \\ \left(\emptyset = \mathbf{U}^{-1} \underset{\bar{i}_{-1}}{\subseteq} \mathbf{U}^0 \underset{\bar{i}_0}{\subseteq} \mathbf{U}^1 \underset{\bar{i}_1}{\subseteq} \cdots \underset{\bar{i}_{d-2}}{\subseteq} \mathbf{U}^{d-1} \underset{\bar{i}_{d-1}}{\subseteq} \mathbf{U}^d = \mathbf{X} \right)$$

où $\mathbf{U}^c := \mathbf{X} \setminus \mathbf{X}_{d-(c+1)}$. On note aussi $\Sigma = \mathbf{X}_{d-1}$ et $\mathbf{S}^c := \mathbf{X}_{d-c} \setminus \mathbf{X}_{d-(c+1)}$.

4.1.1. Prolongement intermédiaire des faisceaux. Pour toute suite croissante d'entiers naturels $\bar{p} = (p_1, p_2, p_3 \dots)$, le « *prolongement intermédiaire relatif à (\mathcal{F}, \bar{p})* », est le foncteur :

$$i_{!*}^{\mathcal{F}, \bar{p}} : \text{Fais}_k(\mathbf{U}^0) \rightsquigarrow D^b(\mathbf{X})$$

défini par :

$$i_{!*}^{\mathcal{F}, \bar{p}} := \left(\tau_{\leq p_n} \mathbb{R}l_{n-1*} \right) \circ \cdots \circ \left(\tau_{\leq p_2} \mathbb{R}l_{1*} \right) \circ \left(\tau_{\leq p_1} \mathbb{R}l_{0*} \right)$$

4.1.2. Exercice

- a) Montrer que lorsque \mathbf{S}^{c+1} est vide, la troncature $\tau_{\leq c+1}$ est inoffensive et la composée $\left(\tau_{\leq p_{c+2}} \mathbb{R}i_{c+1*} \right) \circ \left(\tau_{\leq p_{c+1}} \mathbb{R}i_{c*} \right)$ peut être remplacée par $\left(\tau_{\leq p_{c+2}} \mathbb{R}(i_{c+1} \circ i_c)_* \right)$.
- b) Montrer, plus généralement, que si $\mathcal{F}^\bullet \in D^+(\mathbf{U}^c)$ est tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \llbracket \mathcal{F}^\bullet \rrbracket_{\text{ch}} \subseteq [0, p_c] \\ \llbracket (\mathbb{R}i_{c*} \mathcal{F}^\bullet) \rrbracket_{\mathbf{S}^{c+1}} \subseteq [0, p_c] \end{array} \right.$$

alors $\tau_{\leq p_{c+1}} \mathbb{R}i_{c*} \mathcal{F}^\bullet \equiv \mathbb{R}i_{c*} \mathcal{F}^\bullet$.

- c) Soit $(\mathbf{V}; \mathcal{F}|_{\mathbf{V}})$ la donnée d'un ouvert de \mathbf{X} muni de la filtration induite par \mathcal{F} . Alors

$$i_{\mathbf{V}}^{-1} \circ i_{!*}^{\mathcal{F}, \bar{p}} \equiv i_{!*}^{\mathcal{F}|_{\mathbf{V}}, \bar{p}} \circ i_{\mathbf{V}}^{-1}$$

4.1.3. Théorème (Deligne). *Le prolongement intermédiaire $i_{!*}^{\mathcal{F}, \bar{p}}$ établit une équivalence de catégories entre $\text{Fais}_k(\mathbf{U}^0)$ et la sous-catégorie pleine de $D_k^b(\mathbf{X})$ des complexes de faisceaux \mathcal{F}^\bullet vérifiant les trois conditions suivantes.*

(0) $\mathcal{H}^m \mathcal{F}^\bullet|_{U^0} = 0$, pour tout $m \neq 0$;

et pour chaque $c \geq 1$, les conditions de «support» (S) et de «cosupport» (S') :

(S) $\mathcal{H}^m \mathcal{F}^\bullet|_{S^c} = 0$, pour tout $m > p_c$; (S') $\mathcal{H}_{S^c}^m \mathcal{F}^\bullet = 0$, pour tout $m < p_c + 2$.

L'image essentielle de $i_{!*}^{\mathcal{F}, \bar{p}}$ est une sous-catégorie pleine abélienne de $D_k^b(\mathbf{X})$.

4.1.4. Prolongement intermédiaire des systèmes locaux. Lorsque $(\mathbf{X}; \mathcal{F})$ est un espace topologiquement stratifié, la restriction du foncteur de prolongement intermédiaire à la sous-catégorie $\text{Loc}_k(\mathbf{U}^0)$, a son image essentielle, notée dorénavant :

$$\mathcal{J}\mathcal{C}_{\mathcal{F}; \bar{p}}(\mathbf{X}) := i_{!*}^{\mathcal{F}, \bar{p}}(\text{Loc}_k(\mathbf{U}^0)),$$

contenue dans $D_{\mathcal{F}\text{-cc}}^b(\mathbf{X})$ (application itérée de 3.6.5 et troncatures) où la bidualité de Grothendieck-Verdier est satisfaite. Le théorème de Deligne se formule alors de la manière suivante.

Théorème. Lorsque $(\mathbf{X}; \mathcal{F})$ est un espace topologiquement stratifié purement de dimension $d_{\mathbf{X}}$, on a

$$\mathcal{J}\mathcal{C}_{\mathcal{F}; \bar{p}}(\mathbf{X}) := i_{!*}^{\mathcal{F}, \bar{p}}(\text{Loc}(\mathbf{U}^0)) \subseteq D_{\mathcal{F}\text{-cc}}^b(\mathbf{X})$$

et les objets de $\mathcal{J}\mathcal{C}_{\mathcal{F}; \bar{p}}(\mathbf{X})$ sont les complexes $\mathcal{F}^\bullet \in D_{\mathcal{F}\text{-cc}}^b(\mathbf{X})$ vérifiant

$$\begin{cases} \text{(a)} & \llbracket \mathcal{F}^\bullet|_{U^0} \rrbracket_{\text{ch}} \subseteq \{0\}; \\ \text{(b)} & \llbracket \mathcal{F}^\bullet|_{S^c} \rrbracket_{\text{ch}} \subseteq]-\infty, p_c]; \\ \text{(c)} & \llbracket (\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet \mathcal{F}^\bullet)[-d_{\mathbf{X}}]|_{S^c} \rrbracket_{\text{ch}} \subseteq]-\infty, p'_c]. \end{cases}$$

où, nous avons noté $p'_c := (c-2) - p_c$.

Démonstration. Immédiat d'après 3.6.3, le théorème de Deligne 4.1.3, et en appliquant l'estimation d'amplitudes 3.6.3-(c). ■

4.2 Perversité et pseudovariétés

4.2.1. Définition. Une application $\bar{p}: \{2, 3, \dots\} \rightarrow \mathbb{N}$ croissante est une «perversité» lorsque l'application $\bar{p}' : c \mapsto p'_c := (c-2) - p_c$ est croissante et à valeurs dans \mathbb{N} . Dans ce cas \bar{p}' est la «perversité complémentaire de \bar{p} ». On a

$$(\bar{p} + \bar{p}')(k) = c - 2, \quad (\diamond)$$

et \bar{p} est la perversité complémentaire de \bar{p}' .

4.2.2. Remarques et exercices

a) Les perversités sont les applications $\bar{p}: \{2, 3, \dots\} \rightarrow \mathbb{N}$ vérifiant

$$p_2 = 0 \quad \text{et} \quad p_c \leq p_{c+1} \leq p_c + 1.$$

- b) L'idée dans la définition 4.2.1 est d'assurer les conditions d'application du théorème de Deligne pour la suite \bar{p}' . La disparition de 1 dans le domaine de \bar{p} s'explique alors par le fait que l'égalité (\diamond) n'admet pas de solution dans \mathbb{N} pour $c = 1$. Il faudra alors exclure l'appel à l'indice $c = 1$ dans le prolongement intermédiaire, autrement dit, les stratifications que nous devons considérer doivent être dépourvues de strates de codimension 1, *i.e.* $\Sigma = X_{d-2}$.
- c) Étant données deux perversités \bar{p}, \bar{q} , on note $\bar{p} \leq \bar{q}$ lorsque $p_c \leq q_c$ pour tout c . L'ensemble des perversités et partiellement ordonné par cette relation et possède deux éléments extrémaux, à savoir :

$$\begin{cases} \bar{0} : c \mapsto 0, & \text{la perversité nulle} & (\text{« zero perversity » en anglais}), \\ \bar{t} : c \mapsto c - 2, & \text{la perversité maximum} & (\text{« top perversity » en anglais}). \end{cases}$$

Si \bar{p}, \bar{q} sont des perversités, les applications $c \mapsto \sup(p_c, q_c)$ et $c \mapsto \inf(p_c, q_c)$ sont des perversités. En particulier, l'ordre partiel \leq est filtrant supérieurement et inférieurement.

4.2.3. Définition. Une « pseudovariété de dimension d » est un espace topologiquement stratifié $(X; \mathcal{F})$, purement de dimension d , dans lequel $S^1 = \emptyset$. La pseudovariété est « orientable » (resp. « orientée ») lorsque la variété topologique U^0 l'est.

L'expression « X est une pseudovariété (orientable, orientée) », sans préciser la stratification, sera synonyme de « il existe une stratification de pseudovariété (orientable, orientée) pour X ».

4.2.4. Exercice. Prouver que si $(X; \mathcal{F})$ est une pseudovariété dans laquelle $U_{\mathcal{F}}^0$ est orientable, l'ouvert $U_{\mathcal{G}}^0$ de toute stratification de pseudovariété \mathcal{G} de X l'est également. Enfin, si $U_{\mathcal{F}}^0$ est orienté, il existe une unique orientation sur $U_{\mathcal{G}}^0$ compatible à celle de $U_{\mathcal{F}}^0$.

4.3 Homologie d'intersection des pseudovariétés

Soient $(X; \mathcal{F})$ une pseudovariété et $\mathcal{L} \in \text{Loc}(U^0)$. On appelle « complexe d'intersection pour la perversité \bar{p} , à coefficients dans \mathcal{L} », le complexe de faisceaux

$$\underline{IC}_{\mathcal{F}, \bar{p}}^{\bullet}(X; \mathcal{L}) := i_{!*}^{\mathcal{F}, \bar{p}}(\mathcal{L})$$

On note alors pour $m \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{cases} I_{\mathcal{F}, \bar{p}} H^m(X; \mathcal{L}) = \mathbb{R}^m \Gamma(X; \underline{IC}_{\mathcal{F}, \bar{p}}^{\bullet}(X; \mathcal{L})) \\ I_{\mathcal{F}, \bar{p}} H_c^m(X; \mathcal{L}) = \mathbb{R}^m \Gamma_c(X; \underline{IC}_{\mathcal{F}, \bar{p}}^{\bullet}(X; \mathcal{L})) \end{cases}$$

le « m -ième groupe d'homologie d'intersection (resp. à support compact) de X pour la perversité \bar{p} , à coefficients dans le système local \mathcal{L} ».

4.3.1. Théorème. Soient $(\mathbf{X}; \mathcal{F})$ une pseudovariété et \bar{p} une perversité.

a) Pour tout système local $\mathcal{L} \in \text{Loc}(\mathbf{U}^0)$, on a :

$$\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^{\bullet}(\underline{IC}_{\mathcal{F}, \bar{p}}^{\bullet}(\mathbf{X}; \mathcal{L})) \equiv \underline{IC}_{\mathcal{F}, \bar{p}'}^{\bullet}(\mathbf{X}; (\mathcal{D}_{\mathbf{U}^0}^{\bullet} \mathcal{L}[-\dim_{\text{ch}}(\mathbf{X})]))[\dim_{\text{ch}}(\mathbf{X})]$$

b) En particulier

$$I_{\mathcal{F}, \bar{p}} H_c^m(\mathbf{X}; \mathcal{L}) \equiv I_{\mathcal{F}, \bar{p}'} H^{dx-m}(\mathbf{X}; \mathcal{H}om(\mathcal{L}, \underline{O}_{\mathbf{U}^0}))$$

et

$$I_{\mathcal{F}, \bar{p}} H_c^m(\mathbf{X}; \mathcal{L}) = I_{\mathcal{F}, \bar{p}} H^m(\mathbf{X}; \mathcal{L}) = 0, \text{ pour } m \notin [0, \dim_{\text{ch}}(\mathbf{X})]$$

c) Si \mathbf{X} est en plus orientable,

$$I_{\mathcal{F}, \bar{p}} H_c^m(\mathbf{X}; \mathcal{L}) \equiv I_{\mathcal{F}, \bar{p}'} H^{dx-m}(\mathbf{X}; \mathcal{L}')$$

d) Les conditions (4.1.4-(b,c)) caractérisant $\mathcal{F}^{\bullet} \in \mathcal{J}\mathcal{C}_{\mathcal{F}, \bar{p}}(\mathbf{X})$ deviennent :

$$(b') \llbracket \mathcal{F}^{\bullet} |_{S^c} \rrbracket_{\text{ch}} \subseteq [0, p_c] \quad \text{et} \quad (c') \llbracket (\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^{\bullet} \mathcal{F}^{\bullet})[-d_{\mathbf{X}}] |_{S^c} \rrbracket_{\text{ch}} \subseteq [0, p'_c].$$

Démonstration. Corollaire immédiat de 4.1.4 et du théorème de Deligne 4.1.3. ■

§5. Caractère intrinsèque de l'homologie d'intersection

5.1 Filtrations à strates lisses

Soit \mathbf{X} un espace topologique. On rappelle que dans une filtration fermée $\mathcal{F} = (\mathbf{X} = \mathbf{X}_d \supseteq \mathbf{X}_{d-1} \supseteq \dots \supseteq \mathbf{X}_1 \supseteq \mathbf{X}_0 \supseteq \emptyset)$ on appelle (par abus) «strate de codimension c » chaque composante connexe non vide de $S^c = \mathbf{X}_{d-c} \setminus \mathbf{X}_{d-c-1}$.

5.1.1. Définition. Lorsque \mathbf{X} est de dimension cohomologique d , la filtration sera dite «à strates lisses» lorsque S^c est une variété topologique de dimension $d - c$.

5.1.2. Remarque. Une stratification purement dimensionnelle est une filtration à strates lisses vérifiant, en plus, la condition d'équisingularité locale.

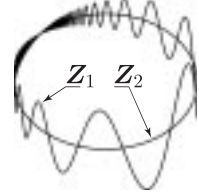
5.2 Raffinements de filtrations

5.2.1. Définition. Étant données deux filtrations fermées \mathcal{F}, \mathcal{G} de \mathbf{X} , on dira que « \mathcal{G} raffine \mathcal{F} », et on note $\mathcal{F} \preccurlyeq \mathcal{G}$, lorsque $U_{\mathcal{F}}^c \supseteq U_{\mathcal{G}}^c$ pour tout c . En particulier, chaque strate de \mathcal{F} est réunion de strates de \mathcal{G} . La relation ' \preccurlyeq ' est un ordre partiel sur l'ensemble des filtrations fermées de \mathbf{X} .

Lorsque \mathcal{F} et \mathcal{G} sont des filtrations à strates lisses, $\mathcal{F} \preccurlyeq \mathcal{G}$, si et seulement si, chaque strate de \mathcal{F} est réunion de strates de \mathcal{G} .

5.2.2. Remarques et notations

a) On notera $\text{Str}_{\text{psv}}(\mathbf{X})$ l'ensemble des stratifications de pseudovariété de \mathbf{X} . Le système $(\text{Str}_{\text{psv}}(\mathbf{X}); \preceq)$ **n'est pas toujours** filtrant supérieurement. Par exemple, si Z est une sous-variété topologique de \mathbb{R}^3 compacte de dimension 1 (un cercle), la filtration $\mathbf{X} \supseteq Z \supseteq \emptyset$ est une stratification de pseudovariété de \mathbf{X} . Dans l'exemple illustré ci-après, un raffinement \mathcal{F} des stratifications $\mathbf{X} \supseteq Z_i \supseteq \emptyset$ doit nécessairement vérifier $Z_1 \cap Z_2 \subseteq S_{\mathcal{F}}^3$. Mais $S_{\mathcal{F}}^3$, muni de la topologie induite par \mathbb{R}^3 , est une variété topologique de dimension 0, et alors $Z_1 \cap Z_2$ est discret donc fini puisque compact, ce qui n'est évidemment pas le cas.



b) Lorsque \mathbf{X} est une variété algébrique complexe, l'ensemble \mathbf{X}_{reg} des points réguliers est un ouvert de Zariski de \mathbf{X} et c'est une variété différentielle, son complémentaire $\mathbf{X}_{\mathcal{S}} := \mathbf{X} \setminus \mathbf{X}_{\text{reg}}$ est une variété algébrique de codimension positive. L'itération de cette idée donne une filtration canonique $\mathcal{F}_{\mathcal{S}}$ de \mathbf{X} par de fermés de Zariski dont les différences successives sont des variétés différentielles de dimensions paires, c'est « la filtration par lieux singuliers de \mathbf{X} ». Cette filtration est à strates lisses mais ne vérifie pas toujours la condition d'équisingularité locale (3.1-(b)) comme le montre l'exemple classique du parapluie de Whitney. En géométrie algébrique on démontre qu'il existe néanmoins un raffinement $\mathcal{F}_W \succcurlyeq \mathcal{F}_{\mathcal{S}}$ vérifiant les conditions de Whitney qui garantissent, elles, la condition d'équisingularité locale. On note $\text{Str}_{\text{alg}}^{\text{Wh}}(\mathbf{X})$ l'ensemble des stratifications algébriques de \mathbf{X} vérifiant ces conditions, on a

$$\emptyset \neq \text{Str}_{\text{alg}}^{\text{Wh}}(\mathbf{X}) \subseteq \text{Str}_{\text{psv}}(\mathbf{X}).$$

Le système $(\text{Str}_{\text{alg}}^{\text{Wh}}(\mathbf{X}); \preceq)$ est filtrant supérieurement.

5.3 Comparaison de complexes d'intersection

Un des aspects du problème de l'indépendance des complexes d'intersection relativement aux filtrations concerne leur comportement vis-à-vis des raffinements. Étant données deux filtrations fermées $\mathcal{F} \preceq \mathcal{G}$ de \mathbf{X} et une perversité \bar{p} , on a, pour chaque c , un morphisme canonique de foncteurs définis sur $D^+(U_{\mathcal{F}}^c)$:

$$\left(\tau_{\leq p_{c+1}} \mathbb{R}i_{c*}^{\mathcal{F}}(-) \right) \Big|_{U_{\mathcal{G}}^{c+1}} \longrightarrow \tau_{\leq p_{c+1}} \mathbb{R}i_{c*}^{\mathcal{G}}(-) \Big|_{U_{\mathcal{G}}^c} \quad \left| \begin{array}{ccc} U_{\mathcal{F}}^c & \xrightarrow{i_c^{\mathcal{F}}} & U_{\mathcal{F}}^{c+1} \\ \uparrow \cup & & \uparrow \cup \\ U_{\mathcal{G}}^c & \xrightarrow{i_c^{\mathcal{G}}} & U_{\mathcal{G}}^{c+1} \end{array} \right.$$

qui n'est pas nécessairement un isomorphisme dans la mesure où le diagramme de droite n'est pas toujours cartésien (cf. 4.1.2), mais qui permet de construire, de proche en proche, un morphisme canonique

$$i_{!*}^{\mathcal{F}, \bar{p}}(-) \xrightarrow{\Xi(-)} i_{!*}^{\mathcal{G}, \bar{p}}(-)$$

qui prolonge le morphisme de restriction $\text{Fais}(U_{\mathcal{F}}^0) \rightarrow \text{Fais}(U_{\mathcal{G}}^0)$.

Le théorème suivant affirme que $\Xi(\mathcal{L})$ est un isomorphisme lorsque \mathcal{F} et \mathcal{G} sont des filtrations lisses et **lorsque** $i_{!*}^{\mathcal{F}, \bar{p}}(\mathcal{L})$ est \mathcal{F} -cc. Cette dernière condition étant vérifiée dans

le cas des pseudovariétés, le théorème établit donc l'invariance du complexe d'intersection lors d'un raffinement lisse d'une stratification de pseudovariété.

Le contexte en apparence inutilement général dans lequel nous énonçons le théorème trouvera toute sa motivation lors de l'étude de l'indépendance des complexes d'intersection vis-à-vis des stratifications, qu'elles admettent ou non des raffinements communs.

5.3.1. Théorème. *Soient \mathbf{X} un espace topologique et \bar{p} une perversité.*

a) *Si $\mathcal{F} \preceq \mathcal{G}$ sont deux filtrations fermées à strates lisses de \mathbf{X} ne possédant pas de strates de codimension 1, on a*

$$\boxed{\mathcal{J}\mathcal{C}_{\mathcal{F};\bar{p}}(\mathbf{X}) \cap D_{\mathcal{F}\text{-cc}}^d(\mathbf{X}) \subseteq \mathcal{J}\mathcal{C}_{\mathcal{G};\bar{p}}(\mathbf{X})}$$

b) *Si $\mathcal{F} \preceq \mathcal{G}$ sont deux stratifications de pseudovariété de \mathbf{X} , on a*

$$\boxed{\mathcal{J}\mathcal{C}_{\mathcal{F};\bar{p}}(\mathbf{X}) \subseteq \mathcal{J}\mathcal{C}_{\mathcal{G};\bar{p}}(\mathbf{X})}$$

et le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} \text{Loc}(\mathbf{U}_{\mathcal{F}}^0) & \xrightarrow[\simeq]{i_{!*}^{\mathcal{F},\bar{p}}} & \mathcal{J}\mathcal{C}_{\mathcal{F};\bar{p}}(\mathbf{X}) \\ \text{restriction} \downarrow & \oplus & \downarrow \subseteq \\ \text{Loc}(\mathbf{U}_{\mathcal{G}}^0) & \xrightarrow[\simeq]{i_{!*}^{\mathcal{G},\bar{p}}} & \mathcal{J}\mathcal{C}_{\mathcal{G};\bar{p}}(\mathbf{X}) \end{array}$$

est commutatif.

c) *Soient $\mathcal{F}_1 \preceq \mathcal{G} \succcurlyeq \mathcal{F}_2$ trois stratifications de pseudovariété de \mathbf{X} .*

Étant donnés $\mathcal{L}_i \in \text{Loc}(\mathbf{U}_{\mathcal{F}_i}^0)$ vérifiant $\mathcal{L}_1|_{\mathbf{U}_{\mathcal{G}}^0} \equiv \mathcal{L}_2|_{\mathbf{U}_{\mathcal{G}}^0}$, il existe un isomorphisme canonique

$$\boxed{\underline{IC}_{\mathcal{F}_1;\bar{p}}^{\bullet}(\mathbf{X}; \mathcal{L}_1) \equiv \underline{IC}_{\mathcal{F}_2;\bar{p}}^{\bullet}(\mathbf{X}; \mathcal{L}_2)}$$

Démonstration

a) Les filtration \mathcal{F} et \mathcal{G} étant uniquement des filtrations lisses, il n'y a aucune raison pour que le critère de cosupport de 4.1.4 s'applique, nous utilisons donc le critère général du théorème de Deligne 4.1.3 valable pour toute filtration fermée.

Soit $\mathcal{F}^{\bullet} \in \mathcal{J}\mathcal{C}_{\mathcal{F};\bar{p}}(\mathbf{X}) \cap D_{\mathcal{F}\text{-cc}}^d(\mathbf{X})$. Comme $\mathbf{U}_{\mathcal{F}}^0 \supseteq \mathbf{U}_{\mathcal{G}}^0$ on a trivialement

$$\llbracket \mathcal{F}^{\bullet}|_{\mathbf{U}_{\mathcal{G}}^0} \rrbracket_{\text{ch}} \subseteq \llbracket \mathcal{F}^{\bullet}|_{\mathbf{U}_{\mathcal{F}}^0} \rrbracket_{\text{ch}} \subseteq \{0\} \quad (0)$$

Pour toute strate T de \mathcal{G} de codimension $\text{cd}_T > 0$ deux cas peuvent se produire :

i) $T \subseteq \mathbf{U}_{\mathcal{F}}^0$, alors

$$\begin{cases} \llbracket \mathcal{F}^{\bullet}|_T \rrbracket_{\text{ch}} \subseteq \llbracket \mathcal{F}^{\bullet}|_{\mathbf{U}_{\mathcal{F}}^0} \rrbracket_{\text{ch}} \subseteq \{0\} \\ \llbracket i_T^! \mathcal{F}^{\bullet} \rrbracket_{\text{ch}} = \llbracket i_T^!(\mathcal{F}^{\bullet}|_{\mathbf{U}_{\mathcal{F}}^0}) \rrbracket_{\text{ch}} = \llbracket \mathcal{D}_T^{\bullet} i_T^{-1} \mathcal{D}_{\mathbf{U}_{\mathcal{G}}^0}^{\bullet}(\mathcal{F}^{\bullet}|_{\mathbf{U}_{\mathcal{F}}^0}) \rrbracket_{\text{ch}} \subseteq \{\text{cd}_T\} \end{cases}$$

ii) $T \subseteq \mathbf{S}$, où \mathbf{S} est une strate de codimension $\text{cd}_{\mathbf{S}} > 0$ de \mathcal{F} , alors

$$\begin{cases} \llbracket \mathcal{F}^{\bullet}|_T \rrbracket_{\text{ch}} \subseteq \llbracket \mathcal{F}^{\bullet}|_{\mathbf{S}} \rrbracket_{\text{ch}} \subseteq]-\infty, p_{\text{cd}_{\mathbf{S}}}] \\ \llbracket i_T^! \mathcal{F}^{\bullet} \rrbracket_{\text{ch}} = \llbracket i_T^!(i_{\mathbf{S}}^! \mathcal{F}^{\bullet}) \rrbracket_{\text{ch}} = \llbracket \mathcal{D}_T^{\bullet} i_T^{-1} \mathcal{D}_{\mathbf{S}}^{\bullet}(i_{\mathbf{S}}^! \mathcal{F}^{\bullet}) \rrbracket_{\text{ch}} \\ \subseteq [p_{\text{cd}_{\mathbf{S}}} + 2 + \text{cd}_T - \text{cd}_{\mathbf{S}}, +\infty[\end{cases}$$

Tandis que les conditions pour que $\mathcal{F}^\bullet \in \mathcal{JC}_{\mathcal{G}, \bar{p}}(\mathbf{X})$ sont, dans les deux cas,

$$\llbracket \mathcal{F}^\bullet|_T \rrbracket_{\text{ch}} \subseteq] -\infty, p_{\text{cd}_T} \rrbracket \quad \text{et} \quad \llbracket i_T^! \mathcal{F}^\bullet \rrbracket_{\text{ch}} \subseteq [p_{\text{cd}_T} + 2, +\infty[,$$

et résultent de (i) et (ii) des inégalités :

$$\begin{cases} 0 \leq p_{\text{cd}_T} \leq \text{cd}_T - 2, & \text{si } T \subseteq U_{\mathcal{F}}^0, \\ p_{\text{cd}_S} \leq p_{\text{cd}_T} \leq p_{\text{cd}_S} + \text{cd}_T - \text{cd}_S, & \text{si } T \subseteq S \text{ et } \text{cd}_S > 0, \end{cases}$$

toutes caractéristiques des perversités.

b) Conséquence immédiate de (a) puisque $\mathcal{JC}_{\mathcal{F}, \bar{p}}(\mathbf{X}) \subseteq D_{\mathcal{F}\text{-cc}}^d(\mathbf{X})$.

c) Car $\underline{IC}_{\mathcal{F}, \bar{p}}^\bullet(\mathbf{X}; \mathcal{L}_i) \equiv \underline{IC}_{\mathcal{G}, \bar{p}}^\bullet(\mathbf{X}; \mathcal{L}_i|_{U_{\mathcal{G}}^0})$ d'après (a). ■

5.3.2. Remarque. Lorsque l'on se place dans le contexte général d'un espace topologiquement stratifié $(\mathbf{X}; \mathcal{F})$ purement de dimension $d_{\mathbf{X}}$ et pour une suite croissante de nombres naturels quelconque $\bar{p} = (p_1, p_2, \dots)$, on a, pour tout raffinement \mathcal{G} de \mathcal{F} , tout $\mathcal{F}^\bullet \in \mathcal{JC}_{\mathcal{F}, \bar{p}}(\mathbf{X})$ tel que $\mathcal{F}^\bullet|_{U_{\mathcal{F}}^0}$ est nulle part nul, et toute strate $T \in \mathcal{G}$ contenue dans $U_{\mathcal{F}}^0 \in \mathcal{F}$,

$$\llbracket \mathcal{F}^\bullet|_T \rrbracket_{\text{ch}} = \llbracket (\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet \mathcal{F}^\bullet)[-d_{\mathbf{X}}]|_T \rrbracket_{\text{ch}} = \{0\} ,$$

D'autre part, la condition de cosupport pour $\mathcal{F}^\bullet \in \mathcal{JC}_{\mathcal{G}, \bar{p}}(\mathbf{X})$ sur T avec $\text{cd}_T > 0$ est

$$\llbracket (\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet \mathcal{F}^\bullet)[-d_{\mathbf{X}}]|_T \rrbracket_{\text{ch}} \subseteq] -\infty, p'_{\text{cd}_T} \rrbracket .$$

Par conséquent, si $\text{cd}_T > 0$ et si $T \subseteq U_{\mathcal{F}}^0$, on doit avoir

$$0 \leq p'_{\text{cd}_T} = \text{cd}_T - 2 - p_{\text{cd}_T} .$$

En particulier $\text{cd}_T \geq 2$. Il s'ensuit que si l'on recherche des conditions générales garantissant l'invariance par raffinement, il faut exclure dans les stratifications les strates de codimension 1. Ceci donne une deuxième raison pour se limiter aux « pseudovariétés » (cf. 4.2.2-(a)).

L'exercice suivant est destiné à justifier la notion de perversité.

5.3.3. Exercice. Notons \mathbb{T}^n le tore n -dimensionnel $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1$ dont on rappelle que les nombres de Betti sont tous non nuls entre les degrés 0 et n . Soient $\mathbf{X} = \mathbb{R}^m \times c_s(\mathbb{T}^n)$ et $\Sigma := \mathbb{R}^m \times \{s\}$. La filtration fermée $\mathcal{F} = \mathbf{X} \supseteq \Sigma \supseteq \emptyset$ définit une structure de pseudovariété de dimension $m + n + 1$ sur \mathbf{X} .

a) Montrer que pour toute suite croissante d'entiers naturels \bar{p} (pas forcément une perversité!), on a l'égalité :

$$\llbracket (\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet \underline{IC}_{\mathcal{F}, \bar{p}}^\bullet(\mathbf{X}; k_U^0))[-d_{\mathbf{X}}]|_{\Sigma} \rrbracket_{\text{ch}} = [0, p'_{\text{cd}_{\Sigma}}] .$$

b) Soit \mathcal{G} une filtration fermée

$$\mathbf{X} \supseteq \Sigma = \Sigma_m \supseteq \Sigma_{m-1} \supseteq \cdots \supseteq \Sigma_0 \supseteq \emptyset$$

obtenue en rajoutant les fermés d'une filtration d'espace topologiquement stratifié pour \mathbb{R}^m (cf. lemme de 3.1.1-(a)). Montrer que si $\underline{IC}_{\mathcal{F}, \bar{p}}^\bullet(\mathbf{X}; \underline{k}U^0) \in \mathcal{JC}_{\mathcal{G}, \bar{p}}(\mathbf{X})$ quelle que soit la filtration \mathcal{G} ainsi définie, alors

$$p'_{c+1} \leq p'_c, \text{ pour tout } c+1 \leq c \leq c+1+m.$$

c) En déduire l'équivalence entre les deux assertions suivantes concernant une suite croissante de nombres naturels \bar{p} :

- Pour toute pseudovariété $(\mathbf{X}; \mathcal{F})$ et toute stratification de pseudovariété \mathcal{G} de \mathbf{X} , telle que $\mathcal{F} \preceq \mathcal{G}$, on a $\mathcal{JC}_{\mathcal{F}, \bar{p}}(\mathbf{X}) \subseteq \mathcal{JC}_{\mathcal{G}, \bar{p}}(\mathbf{X})$.
- \bar{p} est une perversité.

5.3.4. Remarque. Le théorème de comparaison 5.3.1 est très bien adapté au contexte algébrique puisque $\text{Str}_{\text{alg}}^{\text{Wh}}(\mathbf{X})$ est filtrant supérieurement, par contre il ne peut être appliqué tel quel au cas topologique (cf. 5.2.2-(a)). Pour cela, on aura besoin de pousser plus loin la notion de variété topologique, plus précisément, on aura besoin de la notion de variété cohomologique.

5.4 Variétés cohomologiques

5.4.1. Définition. Par analogie au cas des variétés topologiques, un espace topologique \mathbf{X} , métrisable, dénombrable à l'infini, localement compact, localement contractile, de dimension cohomologique finie, sera dit «*variété cohomologique (sur k) de dimension d* » lorsque

$$\begin{cases} \llbracket \mathcal{D}_{k; \mathbf{X}}^\bullet \rrbracket_{\text{ch}} = \{-d\}; \text{ et que} \\ \mathcal{H}^{-d} \mathcal{D}_{k; \mathbf{X}}^\bullet \text{ est localement libre de rang 1.} \end{cases}$$

Le faisceau $\underline{O}_{k; \mathbf{X}} := \mathcal{H}^{-d} \mathcal{D}_{k; \mathbf{X}}^\bullet$ est le «*faisceau d'orientations*» de la variété cohomologique.

Dans tout espace topologique \mathbf{Y} , une partie $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{Y}$ sera dite «*sous-variété cohomologique (de dimension d) de \mathbf{Y}* » si elle est localement fermée dans \mathbf{Y} et si, munie de la topologie induite, c'est une variété cohomologique (de dimension d).

5.4.2. Proposition. *La dimension d'une variété cohomologique sur k est la dimension cohomologique sur k de l'espace topologique sous-jacent.*

Démonstration. Soit \mathbf{X} une variété cohomologique de dimension d . Les propriétés topologiques de \mathbf{X} permettent d'affirmer que

$$\dim_{\text{ch}}(\mathbf{X}) \leq d \iff H_c^{d+m}(U; k) = 0 \begin{cases} \text{pour tout } U \text{ contractile;} \\ \text{pour tout } m \geq 1. \end{cases}$$

La raison de cette équivalence est, de manière succincte, la suivante :

- Un faisceau c -mou est $\Gamma(\mathbf{X}, -)$ -acyclique, essentiellement parce que \mathbf{X} est dénombrable à l'infini.
- L'inégalité $\dim_{\text{ch}}(\mathbf{X}) \leq d$ résulte alors de montrer que tout $\mathcal{F} \in \text{Fais}_k(\mathbf{X})$ admet une résolution c -molle de longueur d , et comme \mathcal{F} est plat (k est un corps!), il suffit même que $\underline{k}_{\mathbf{X}}$ admette une telle résolution (cf. 3.4.1, 3.4.6-(f)).
- Pour toute résolution injective

$$\mathbf{0} \rightarrow \underline{k}_{\mathbf{X}} \rightarrow \mathcal{G}^0 \rightarrow \mathcal{G}^1 \rightarrow \dots \xrightarrow{d-1} \mathcal{G}^d \xrightarrow{d} \mathbf{0},$$

on a $H_c^m(\mathbf{U}; \ker(d)) \equiv H_c^{d+m}(\mathbf{U}; \underline{k}_{\mathbf{X}})$, pour $m \geq 1$. Il s'ensuit que $\ker(d)$ est c -mou lorsque $H_c^{d+m}(\mathbf{U}; k) = 0$ pour toute ouvert dans une base de la topologie de \mathbf{X} , en particulier, pour tout ouvert contractile.

Dans notre cas, on a par dualité de Grothendieck-Verdier :

$$H_c^{d+m}(\mathbf{U}, \underline{k}_{\mathbf{X}})^\vee \equiv \mathbb{H}^{-d-m}(\mathbf{U}; \mathbb{D}_{\mathbf{U}}^\bullet) \equiv \mathbb{H}^{-d-m}(\mathbf{U}; \underline{\mathbb{Q}}_{k; \mathbf{U}}[d]) \equiv H^{-m}(\text{pt}; k)$$

puisque \mathbf{U} est contractile et que $\underline{\mathbb{Q}}_{k; \mathbf{X}}$ est localement libre de rang 1. Alors :

$$H_c^{d+m}(\mathbf{U}, k) = \begin{cases} k & \text{si } m = 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

et par conséquent $\dim_{\text{ch}}(\mathbf{X}; k) \leq d$. D'autre part, si \mathbf{U} est contractile et relativement compact dans \mathbf{X} , on a $H^*(\mathbf{X}; i_{\mathbf{U}}! \underline{k}_{\mathbf{U}}) \equiv H_c^*(\mathbf{U}; k)$, d'où $\dim_{\text{ch}}(\mathbf{X}; k) \geq d$. ■

5.4.3. Exercice

- Montrer qu'une variété cohomologique de dimension nulle est un espace topologique discret au plus dénombrable.
- Montrer qu'un espace topologiquement stratifiable qui est une variété cohomologique de dimension 1 est une réunion disjointe au plus dénombrable d'espaces homéomorphes à \mathbb{R} ou \mathbb{S}^1 .

5.4.4. Une variété cohomologique non topologique. Soit $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ l'espace projectif réel de dimension n . On rappelle que sa cohomologie sur un corps k de caractéristique différente de 2 vérifie :

$$H^m(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}); k) = \begin{cases} k & \text{si } m=0 \\ 0 & \text{si } 0 < m < n \end{cases} \quad \text{et} \quad H^n(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}); k) = \begin{cases} k & \text{si } n \text{ est impair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est pair } > 0 \end{cases}$$

de sorte que $\mathbb{P}^{2n+1}(\mathbb{R})$ à les mêmes nombres de Betti que la sphère \mathbb{S}^{2n+1} ⁽¹⁸⁾. On rappelle aussi que ce qui distingue les projectifs réels de dimension impaires des autres c'est le fait qu'ils sont orientables, leurs faisceaux d'orientations sont donc constants.

¹⁸ Le morphisme $H^*(\mathbb{P}^{2n+1}(\mathbb{R}); k) \rightarrow H^*(\mathbb{S}^{2n+1}; k)$ induit par la projection canonique $\mathbb{S}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{P}^{2n+1}(\mathbb{R})$ est déjà un isomorphisme ($\text{char}(k) \neq 2$).

Notons $\mathbb{L} := \mathbb{P}^{2n+1}(\mathbb{R})$ et $\mathbf{X} := c_0(\mathbb{L})$. D'après 3.7.4-(c) les germes du dualisant vérifient, pour tous $t \in \mathbf{I} := [0, 1[$ et $\ell \in \mathbb{L}$,

$$(\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet)_{t,\ell} = \begin{cases} (\mathcal{D}_{\mathbf{I}}^\bullet)_t \otimes (\mathcal{D}_{\mathbb{L}}^\bullet)_\ell \equiv k[1] \otimes k[d_{\mathbb{L}}] & \text{si } t \neq 0, \\ \text{Hom}_k(\mathbb{R}\Gamma_c(c(\mathbb{L}); k), k) \equiv \text{Hom}_k(\overline{H}(\mathbb{L}, k)[-1], k) & \text{autrement.} \end{cases}$$

et donc $[[\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet]]_{\text{ch}} = \{-d_{\mathbb{L}} - 1\}$.

Par conséquent, \mathbf{X} est une variété cohomologique de dimension $d_{\mathbb{L}} + 1$, si et seulement si, $\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet$ est localement constant, et même constant car \mathbf{X} est contractile.

Notons $\mathbf{U} := \mathbf{X} \setminus \{0\}$ et considérons le triangle exact $\Delta(\{0\}, \mathbf{X}, \mathbf{U}; \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet)$:

$$i_{0*} i_0^! \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet \longrightarrow \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet \longrightarrow \mathbb{R}i_{\mathbf{U}*} \mathcal{D}_{\mathbf{U}}^\bullet \xrightarrow{[+1]}$$

Comme $i_0^! \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet = k$, le terme de gauche n'intervient pas en degrés < 1 dans la suite longue des faisceaux dérivés et alors

$$\mathcal{H}^{-1-d_{\mathbb{L}}} \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet \equiv \mathcal{H}^{-1-d_{\mathbb{L}}} \mathbb{R}i_{\mathbf{U}*} \mathcal{D}_{\mathbf{U}}^\bullet \equiv i_{\mathbf{U}*} \mathcal{H}^{-1-d_{\mathbb{L}}} \mathcal{D}_{\mathbf{U}}^\bullet \equiv i_{\mathbf{U}*} \underline{k}_{\mathbf{U}} \equiv \underline{k}_{\mathbf{X}}$$

où (\equiv_1) s'explique par l'exactitude à gauche de $i_{\mathbf{U}*}$ et le fait que $\mathcal{D}_{\mathbf{U}}^\bullet$ est cohomologiquement nul en degrés $< -1 - d_{\mathbb{L}}$, (\equiv_2) résulte de l'équivalence $\mathcal{D}_{\mathbf{U}}^\bullet \equiv \mathcal{D}_{]0,1[}^\bullet \boxtimes \mathcal{D}_{\mathbb{L}}^\bullet \equiv \underline{k}_{\mathbf{U}}[1 + d_{\mathbb{L}}]$ puisque \mathbb{L} est orientable, et (\equiv_3) car 0 de codimension ≥ 2 dans \mathbf{X} .

Ces remarques prouvent que $\mathbf{X} = c_0(\mathbb{P}^{2n+1}(\mathbb{R}))$ est une variété cohomologique orientable de dimension $2(n+1)$ sur tout corps de caractéristique $\neq 2$. L'espace topologique topologique \mathbf{X} n'est pourtant pas une variété topologique. En effet, si tel en était le cas, on devrait avoir pour $k = \mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$$H_0^*(\mathbf{X}; \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2[-2(n+1)]$$

alors que

$$H_0^*(\mathbf{X}; \mathbb{F}_2) = \overline{H}^{*-1}(\mathbb{P}^{2n+1}(\mathbb{R}); \mathbb{F}_2) = \mathbf{0}^{[0]} \oplus \mathbf{0}^{[1]} \oplus \mathbb{F}_2^{[2]} \oplus \dots \oplus \mathbb{F}_2^{[2n+2]}$$

d'après des résultats classiques en topologie algébrique sur le projectif réel ⁽¹⁹⁾.

5.4.5. Exercice. Remarquer que ce qui fait marcher l'exemple précédent c'est essentiellement le fait que \mathbb{L} est une variété cohomologique dont la cohomologie globale est celle de la sphère de dimension $\dim_{\text{ch}}(\mathbb{L})$, c'est ce que l'on appelle une « sphère cohomologique »

En déduire que les espaces $c_0(\mathbb{P}^{2n})$ et $c_0(\mathbb{P}^{2n} \amalg \mathbb{P}^{2m})$ ($m, n > 0$) ne sont pas des variétés cohomologiques sur un corps, quelle que soit la caractéristique de celui-ci.

5.5 Dualité de Poincaré sur les variétés cohomologiques

Les conditions de 5.4.1 qui définissent une variété cohomologique sur un corps k sont tout ce dont on a besoin pour suivre les raisonnements de la section “Dualité de Poincaré sur les variétés topologiques” (3.5). Le théorème 3.5.6 est donc vérifié par les variétés cohomologiques sur un corps k .

¹⁹ Cf. Greenberg-Harper. *Algebraic topology*, th. 19.27, p. 121.

5.5.1. Espaces cohomologiquement stratifiés. Maintenant que nous disposons de la classe des variétés cohomologiques sur k , nous pouvons étendre la classe d'espaces topologiquement stratifiables par la notion d'« *espace cohomologiquement stratifié (sur k)* » dont la définition est la suivante (cf. 3.1) :

- a) En dimension 0. Il s'agit des ensembles finis ou dénombrables munis de la topologie discrète ;
- b) En dimension positive d , il s'agit d'un espace topologique \mathbf{X} muni d'une filtration par des parties fermées : $\mathcal{F} := (\mathbf{X} = \mathbf{X}_d \supseteq \mathbf{X}_{d-1} \supseteq \cdots \supseteq \mathbf{X}_0 \supseteq \emptyset)$, telle que pour chaque $c = 0, \dots, d$, l'espace $\mathbf{S}^c = \mathbf{X}_{d-c} \setminus \mathbf{X}_{d-(c+1)}$, lorsqu'il n'est pas vide, est une variété *cohomologique* de dimension $d - c$ telle que, pour chaque $x \in \mathbf{S}^c$, il existe un voisinage ouvert N_x de x dans \mathbf{X} , un espace compact $\mathbb{L}(x)$ *cohomologiquement stratifié* de dimension $c - 1$, et un homéomorphisme

$$\phi : (\mathbf{S}^c \cap N_x) \times c(\mathbb{L}(x)) \xrightarrow{\sim} N_x \quad (\diamond)$$

qui respecte les filtrations. Lorsque N_x est tel que $\mathbf{S}^c \cap N_x$ est contractile (toujours possible car \mathbf{S}^c est localement contractile), il est dit « *distingué* ».

On notera $(\text{Str}_{\text{psv-ch}}(\mathbf{X}); \preceq)$ l'ensemble des stratifications de pseudovariété cohomologique de \mathbf{X} muni de l'ordre partiel de raffinement.

Un espace cohomologiquement stratifié sera dit « *purement dimensionnel de dimension d* », resp. « *pseudovariété cohomologique* », lorsqu'il vérifie les conditions analogues du cas topologique 3.1.4, resp. 4.2.3.

Lorsque la condition d'équisingularité (\diamond) n'est pas garantie, on parlera de « *filtration à strates cohomologiquement lisses* » ce qui généralise la notion topologique correspondante 5.1.1.

5.5.2. Commentaire. On peut imaginer des définitions beaucoup plus générales que celles des sections précédentes pour passer des objets « *topologiques* » aux objets « *cohomologiques* », mais celles que nous avons données nous suffiront pour l'application que nous avons en vue, à savoir : l'étude de l'indépendance des stratifications dans l'homologie d'intersection.

Les théorèmes : d'homotopie 3.3.6, de cohomologie des liens 3.3.7, de stabilité des catégories \mathcal{F} -cc et de bidualité 3.6.3, continuent d'être vrais pour les espaces cohomologiquement stratifiés. Le prolongement intermédiaire et le théorème de Deligne 4.1.3 qui ne parlent que des filtrations fermées restent évidemment valables, de même, pour terminer, que la dualité de Poincaré pour l'homologie d'intersection 4.3.1 et le théorème de comparaison 5.3.1.

Dans ces généralisations le gain n'est pas négligeable. Par exemple, dans 5.4.4 nous avons montré que l'espace $\mathbf{X} := c_0(\mathbb{P}^{2n+1}(\mathbb{R}))$ est une variété cohomologique qui n'est pas une variété topologique. Il admet clairement une structure de pseudovariété \mathcal{F} d'où les

complexes d'intersection pour les différentes perversités $\underline{IC}_{\mathcal{F};\bar{p}}(\mathbf{X};\underline{k}_{U^0})$. Or, comme \mathbf{X} est une variété cohomologique, on a $\underline{k}_{\mathbf{X}} \in \mathcal{JC}_{\bar{p}}(\mathbf{X})$ quelle que soit \bar{p} , et comme toute stratification topologique est cohomologique et raffine la stratification triviale, le théorème de comparaison 5.3.1, donne aussitôt : $\underline{k}_{\mathbf{X}} \equiv \underline{IC}_{\mathcal{F};\bar{p}}(\mathbf{X};\underline{k}_{U^0})$, quelle que soit \bar{p} .

5.5.3. Tableau récapitulatif des caractérisations des complexes d'intersection. Le tableau suivant indique pour chaque type de filtration fermée d'un espace topologique \mathbf{X} les résultats déjà établis dans le cadre «*topologique*» et qui restent valables dans le cadre «*cohomologique*».

Filtrations $\mathcal{F} \preceq \mathcal{G}$	Propriétés
Fermées	Le prolongement intermédiaire est défini pour toute suite croissante d'entiers naturels $\bar{p} = (p_1, p_2, p_3, \dots)$ $i_{!*}^{\mathcal{F};\bar{p}} : \text{Loc}(U_{\mathcal{F}}^0) \xrightarrow{\cong} \mathcal{JC}_{\mathcal{F};\bar{p}}(\mathbf{X}) \subseteq D^+(\mathbf{X})$ Condition de (co)supports pour $\mathcal{F}^\bullet \in \mathcal{JC}_{\mathcal{F};\bar{p}}(\mathbf{X})$: $\llbracket i_{\mathcal{S}}^{-1} \mathcal{F}^\bullet \rrbracket_{\text{ch}} \subseteq] - \infty, p_{\text{cd}_{\mathcal{S}}}] ; \llbracket i_{\mathcal{S}}^1 \mathcal{F}^\bullet \rrbracket_{\text{ch}} \subseteq [p_{\text{cd}_{\mathcal{S}}} + 2, +\infty [$
À strates lisses. Sans strate de co-dimension 1.	Pour toute perversité $\bar{p} = (p_2, p_3, \dots)$: $\mathcal{JC}_{\mathcal{F};\bar{p}}(\mathbf{X}) \cap D_{\mathcal{F}\text{-cc}}^b(\mathbf{X}) \subseteq \mathcal{JC}_{\mathcal{G};\bar{p}}(\mathbf{X})$
Stratifications	Pour toute suite croissante $\bar{p} = (p_1, p_2, p_3, \dots)$ $\mathcal{JC}_{\mathcal{F};\bar{p}}(\mathbf{X}) \subseteq D_{\mathcal{F}\text{-cc}}^b(\mathbf{X})$ Condition de (co)supports pour $\mathcal{F}^\bullet \in \mathcal{JC}_{\mathcal{F};\bar{p}}(\mathbf{X})$: $\llbracket i_{\mathcal{S}}^{-1} \mathcal{F}^\bullet \rrbracket_{\text{ch}} \subseteq] - \infty, p_{\text{cd}_{\mathcal{S}}}] ; \llbracket i_{\mathcal{S}}^{-1} (\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet \mathcal{F}^\bullet) [-d_{\mathbf{X}}] \rrbracket_{\text{ch}} \subseteq] - \infty, p'_{\text{cd}_{\mathcal{S}}}]$
Pseudovariétés	Pour toute perversité $\bar{p} = (p_2, p_3, \dots)$ $\mathcal{JC}_{\mathcal{F};\bar{p}}(\mathbf{X}) \subseteq \mathcal{JC}_{\mathcal{G};\bar{p}}(\mathbf{X})$ Condition de (co)supports pour $\mathcal{F}^\bullet \in \mathcal{JC}_{\mathcal{F};\bar{p}}(\mathbf{X})$: $\llbracket i_{\mathcal{S}}^{-1} \mathcal{F}^\bullet \rrbracket_{\text{ch}} \subseteq [0, p_{\text{cd}_{\mathcal{S}}}] ; \llbracket i_{\mathcal{S}}^{-1} (\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet \mathcal{F}^\bullet) [-d_{\mathbf{X}}] \rrbracket_{\text{ch}} \subseteq [0, p'_{\text{cd}_{\mathcal{S}}}]$ Pour tout système local \mathcal{L} au-dessus de $U_{\mathcal{F}}^0$: $\underline{IC}_{\mathcal{F};\bar{p}}(\mathbf{X}; \mathcal{L}) \equiv \underline{IC}_{\mathcal{G};\bar{p}}(\mathbf{X}; \mathcal{L})$ Dualité de Poincaré : $I_{\bar{p}} H_c^m(\mathbf{X}; \mathcal{L})^\vee \equiv I_{\bar{p}'} H^{d_{\mathbf{X}}-m}(\mathbf{X}; \mathcal{L}^\vee)$ Si \mathbf{X} compacte, $\dim(I_{\bar{p}} H^*(\mathbf{X}; \mathcal{L})) < \infty$.

5.6 Filtration associée à une perversité et un système local

Étant donné un faisceau \mathcal{F} sur un espace topologique \mathbf{X} , il existe toujours un plus grand ouvert $\lambda(\mathcal{F})$ tel que $\mathcal{F}|_{\lambda(\mathcal{F})}$ est un système local. Il en est évidemment de même pour la famille (finie) des faisceaux dérivés d'un complexe à cohomologie bornée $\mathcal{F}^\bullet \in D^b(\mathbf{X})$, au-

quel cas on note $\lambda(\mathcal{F}^\bullet) = \cap_m \lambda(\mathcal{H}^m \mathcal{F}^\bullet)$; c'est le plus grand ouvert de \mathbf{X} tel que $\mathcal{F}^\bullet|_{\lambda(\mathcal{F}^\bullet)}$ est cohomologiquement constructible.

Dans le même ordre d'idées lorsque \mathbf{X} est localement contractile et de dimension cohomologique finie $d_{\mathbf{X}}$, il existe un plus grand ouvert $\mathbf{X}_{\text{reg}} \subseteq \mathbf{X}$ qui soit une variété cohomologique de dimension $d_{\mathbf{X}}$; c'est l'ouvert contenu dans $\lambda(\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet)$ sur lequel $\mathcal{H}^{-d_{\mathbf{X}}} \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet$ est de rang 1 et $\mathcal{H}^m \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet = 0$ pour $m \neq -d_{\mathbf{X}}$.

Ainsi, pour tout $\mathcal{F}^\bullet \in D^b(\mathbf{X})$, l'ensemble $\lambda(\mathcal{F}^\bullet)_{\text{reg}}$ est la plus grande sous-variété cohomologique de dimension $d_{\mathbf{X}}$ sur laquelle \mathcal{F}^\bullet est cohomologiquement constructible. Bien évidemment, sans hypothèses supplémentaires cet ensemble est généralement vide.

5.6.1. Proposition. *Soit \mathbf{X} une variété cohomologique de dimension $d_{\mathbf{X}} \geq 2$. Pour tout système local \mathcal{L} défini sur \mathbf{X} tout entier et tout fermé $\mathbf{F} \subseteq \mathbf{X}$ de dimension cohomologique $d_{\mathbf{F}} \leq d_{\mathbf{X}} - 2$ d'ouvert complémentaire $\mathbf{U} := \mathbf{X} \setminus \mathbf{F}$, le morphisme d'adjonction $\mathcal{L} \rightarrow i_{\mathbf{U}*}(\mathcal{L}|_{\mathbf{U}})$ est un isomorphisme de faisceaux.*

En particulier, tout point de \mathbf{F} admet une base de voisinages ouverts dans \mathbf{X} dont l'intersection avec \mathbf{U} est connexe.

Démonstration. La suite exacte longue de faisceaux dérivés associée à $\Delta(\mathbf{F}, \mathbf{X}, \mathbf{U}; \mathcal{L})$ place le morphisme $\mathcal{L} \rightarrow i_{\mathbf{U}*} \mathcal{L}|_{\mathbf{U}}$ entre les faisceaux $\mathcal{H}_{\mathbf{F}}^m \mathcal{L}$ pour $m = 0, 1$. Ces faisceaux sont engendrés par les préfaisceaux sur \mathbf{X}

$$\mathbf{V} \rightsquigarrow H_{\mathbf{F}}^m(\mathbf{V}; \mathcal{L}) = \mathbb{H}^m(\mathbf{V}; i_{\mathbf{F}}^! \mathcal{L}) = \mathbb{H}^m(\mathbf{V}; i_{\mathbf{F}}^! \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet \circ \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet \mathcal{L}) = \mathbb{H}^m(\mathbf{V}; \mathcal{D}_{\mathbf{F}}^\bullet i_{\mathbf{F}}^{-1} \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet \mathcal{L})$$

Or, comme \mathcal{L} est un système local sur une variété cohomologique, $\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet \mathcal{L}$ est cc et est concentré en degré $-d_{\mathbf{X}}$. D'autre part, on a :

$$\mathcal{D}_{\mathbf{F}}^\bullet(i_{\mathbf{F}}^{-1} \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet \mathcal{L}) = \mathcal{H}om(i_{\mathbf{F}}^{-1} \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet \mathcal{L}, \mathcal{D}_{\mathbf{F}}^\bullet)$$

avec $[[\mathcal{D}_{\mathbf{F}}^\bullet]]_{\text{ch}} \subseteq [-d_{\mathbf{F}}, 0]$ (3.4-(b)), et par conséquent :

$$[[\mathcal{D}_{\mathbf{F}}^\bullet i_{\mathbf{F}}^{-1} \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet \mathcal{L}]]_{\text{ch}} \subseteq [d_{\mathbf{X}} - d_{\mathbf{F}}, d_{\mathbf{X}}].$$

On en déduit l'annulation de $\mathcal{H}_{\mathbf{F}}^m \mathcal{L}$ pour $m = 0, 1$. Le morphisme $\mathcal{L} \rightarrow i_{\mathbf{U}*} \mathcal{L}|_{\mathbf{U}}$ est donc bien un isomorphisme.

Lorsque $\mathcal{L} = \underline{k}_{\mathbf{X}}$, on a $\underline{k}_{\mathbf{X}} \equiv i_{\mathbf{U}*} \underline{k}_{\mathbf{U}}$ et pour tout $x \in \mathbf{F}$ et tout ouvert contractile $\mathbf{V} \ni x$, on a $k = \Gamma(\mathbf{V}; \underline{k}_{\mathbf{X}}) = \Gamma(\mathbf{V}; i_{\mathbf{U}*} \underline{k}_{\mathbf{U}}) = \Gamma(\mathbf{V} \cap \mathbf{U}; \underline{k}_{\mathbf{U}})$, d'où la deuxième partie du lemme. ■

5.6.2. Remarques et exercices

- La proposition précédente est généralement fautive si \mathbf{X} n'est pas une variété cohomologique. Montrer que le bouquet de deux sphères de dimension 2 où \mathbf{U} est le complémentaire du point de base, en est un contreexemple.
- Donner un contreexemple avec \mathbf{F} de codimension 1.

5.6.3. Système locaux maximaux sur les variétés cohomologiques. Contrairement au paragraphe précédent où nous avons des données globalement définies sur \mathbf{X} , nous nous intéressons maintenant à des données partielles.

Étant donnés, un espace topologique \mathbf{X} de dimension cohomologique $d_{\mathbf{X}}$ et un système local \mathcal{L} défini sur une sous-variété cohomologique ouverte $U \subseteq \mathbf{X}$ telle que $\dim_{\text{ch}}(\mathbf{X} \setminus U) \leq d_{\mathbf{X}} - 2$, la famille $\mathcal{R}(\mathcal{L})$, des couples $(\mathbf{V}; \mathcal{M})$ vérifiant

$$\begin{cases} U \subseteq \mathbf{V} \text{ et } \mathbf{V} \text{ est une sous-variété cohomologique ouverte de } \mathbf{X}, \\ \mathcal{M} \text{ est un système local sur } \mathbf{V} \text{ tel que } \mathcal{M}|_U \simeq \mathcal{L}, \end{cases}$$

ordonnée par la relation : $(\mathbf{V}; \mathcal{M}) \preceq (\mathbf{V}'; \mathcal{M}')$ lorsque $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{V}'$ et $\mathcal{M} \simeq \mathcal{M}'|_{\mathbf{V}}$, possède un unique élément maximal à isomorphisme canonique près, c'est le « *prolongement maximal de \mathcal{L}* », noté $(\mathbf{W}_{\mathcal{L}}, \tilde{\mathcal{L}})$.

En effet, supposons l'assertion vérifiée, comme $\dim_{\text{ch}}(\mathbf{X} \setminus U) \leq d_{\mathbf{X}} - 2$, il en sera de même $\dim_{\text{ch}}(U_{\mathcal{L}} \setminus U)$ et le morphisme d'adjonction

$$\tilde{\mathcal{L}} \longrightarrow i_{U_*}^{U_{\mathcal{L}}}(\tilde{\mathcal{L}}|_U)$$

est un isomorphisme (5.6.1). Comme $\tilde{\mathcal{L}}|_U \sim \mathcal{L}$, on voit que $\mathbf{W}_{\mathcal{L}} = \lambda(i_{U_*}^{U_{\mathcal{L}}}(\tilde{\mathcal{L}}|_U))_{\text{reg}}$ et $\tilde{\mathcal{L}} := (i_{U_*}^{\mathbf{X}} \mathcal{L})|_{\mathbf{W}_{\mathcal{L}}}$ est l'élément maximum de la famille $\mathcal{R}(\mathcal{L})$.

Un système local $(\mathbf{W}; \mathcal{L})$ est dit « *maximal dans \mathbf{X}* » lorsque \mathbf{W} est une sous-variété ouverte de \mathbf{X} et que $\mathbf{W} = \mathbf{W}_{\mathcal{L}}$.

5.6.4. Proposition. Soient $(\mathbf{V}_1; \mathcal{L}_1)$ et $(\mathbf{V}_2; \mathcal{L}_2)$ des systèmes locaux définis sur des sous-variétés cohomologiques ouvertes dans \mathbf{X} et dont les complémentaires sont de codimension ≥ 2 . Notons $(\mathbf{W}_1; \tilde{\mathcal{L}}_1)$, $(\mathbf{W}_2; \tilde{\mathcal{L}}_2)$ leurs prolongements maximaux. Alors, pour tout morphisme $\varphi : \mathcal{L}_1|_{\mathbf{V}_1 \cap \mathbf{V}_2} \rightarrow \mathcal{L}_2|_{\mathbf{V}_1 \cap \mathbf{V}_2}$, il existe un et seul morphisme $\tilde{\varphi} : \tilde{\mathcal{L}}_1|_{\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2} \rightarrow \tilde{\mathcal{L}}_2|_{\mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2}$ qui prolonge φ .

Démonstration. Le complémentaire de $\mathbf{V}_{12} := \mathbf{V}_1 \cap \mathbf{V}_2$ dans $\mathbf{W}_{12} := \mathbf{W}_1 \cap \mathbf{W}_2$ étant de codimension ≥ 2 , on a nécessairement $\tilde{\varphi} = i_{\mathbf{V}_{12}^*}^{\mathbf{W}_{12}}(\varphi)$. ■

5.6.5. Exercice. Soit \mathbf{X} une pseudovariété. Soit $(\mathbf{V}; \mathcal{L})$ un système local. Montrer que pour toute filtration \mathcal{F} de pseudovariété cohomologique de \mathbf{X} telle que $U_{\mathcal{F}}^0 \subseteq \mathbf{V}$, l'ouvert de définition du prolongement maximal de \mathcal{L} et réunion de strates de \mathcal{F} .

5.6.6. Théorème. Étant donné : une pseudovariété $(\mathbf{X}; \mathcal{F})$, un système local maximal $(\mathbf{W}; \mathcal{M})$ tel que $\mathbf{W} \supseteq U_{\mathcal{F}}^0$, et une perversité \bar{p} , il existe une filtration fermée canonique à strates cohomologiquement lisses $\mathcal{F}(\mathcal{M}, \bar{p})$ de \mathbf{X} , dépendant uniquement de \mathcal{M} et de \bar{p} , telle que

- a) \mathcal{F} est un raffinement de $\mathcal{F}(\mathcal{M}; \bar{p})$.
- b) $\underline{IC}_{\mathcal{F}(\mathcal{M}, \bar{p}); \bar{p}}(\mathbf{X}; \mathcal{M}) \equiv \underline{IC}_{\mathcal{G}; \bar{p}}(\mathbf{X}; \mathcal{M})$ de manière canonique.

Démonstration. L'idée est de construire la filtration $\mathcal{F}(\mathcal{M}, \bar{p})$ en même temps que le prolongement intermédiaire. Notons $d := \dim_{\text{ch}}(\mathbf{X})$.

D'après 5.6.5, l'ouvert \mathbf{W} est une réunion de strates de \mathcal{F} . Notons $\mathbf{X}_d := \mathbf{X}$, $\mathbf{W}^0 := \mathbf{W}$, $\mathbf{S}^0 := \mathbf{W}$, et $\mathbf{X}_{d-c_1} := \mathbf{X} \setminus \mathbf{W}$, où

$$c_1 := d - \dim_{\text{ch}}(\mathbf{X}_d \setminus \mathbf{S}^0) \geq 2.$$

Soit $i_0^{\mathbf{X}} : \mathbf{W}^0 \subseteq \mathbf{X}$ l'inclusion. Comme le complexe

$$\mathcal{P}_{c_1} := \tau_{\leq p_{c_1}}(\mathbb{R}i_{0*}^{\mathbf{X}} \mathcal{M})|_{\mathbf{X}_{d-c_1}}$$

est \mathcal{F} -cc sur \mathbf{X}_{d-c_1} (\mathbf{X}_{d-c_1} est stratifié par \mathcal{F}), il existe une plus grande sous-variété ouverte $\mathbf{S}^{c_1} \subseteq \mathbf{X}_{d-c_1}$, non vide de dimension $d - c_1$ et sur laquelle \mathcal{P}_{c_1} est cc. Cette sous-variété contient clairement toutes les strates de \mathcal{F} de dimension $d - c_1$ qui sont contenues dans \mathbf{X}_{d-c_1} de sorte que

$$c_2 := d - \dim_{\text{ch}}(\mathbf{X}_{d-c_1} \setminus \mathbf{S}^{c_1}) > c_1$$

On note alors $\mathbf{W}^{c_1} := \mathbf{S}^0 \amalg \mathbf{S}^{c_1}$ et $\mathbf{X}_{d-c_2} := \mathbf{X}_{d-c_1} \setminus \mathbf{S}^{c_1}$

Soit $i_{c_1}^{\mathbf{X}} : \mathbf{W}^{c_1} \subseteq \mathbf{X}$ l'inclusion. Comme le complexe

$$\mathcal{P}_{c_2} := \tau_{\leq p_{c_2}}(\mathbb{R}i_{c_1*}^{\mathbf{X}} \mathcal{P}_{c_1})|_{\mathbf{X}_{d-c_2}}$$

est \mathcal{F} -cc sur \mathbf{X}_{d-c_2} (\mathbf{X}_{d-c_2} est stratifié par \mathcal{F}), il existe une plus grande sous-variété ouverte $\mathbf{S}^{c_2} \subseteq \mathbf{X}_{d-c_2}$, non vide de dimension $d - c_2$ et sur laquelle \mathcal{P}_{c_2} est cc. Cette sous-variété contient clairement toutes les strates de \mathcal{F} de dimension $d - c_2$ qui sont contenues dans \mathbf{X}_{d-c_2} de sorte que

$$c_3 := d - \dim_{\text{ch}}(\mathbf{X}_{d-c_2} \setminus \mathbf{S}^{c_2}) > c_2$$

On note alors $\mathbf{W}^{c_2} := \mathbf{S}^0 \amalg \mathbf{S}^{c_1} \amalg \mathbf{S}^{c_2}$ et $\mathbf{X}_{d-c_3} := \mathbf{X}_{d-c_2} \setminus \mathbf{S}^{c_2}$

L'itération de ce processus aboutit clairement à la construction de la filtration à strates cohomologiquement lisses $\mathcal{F}(\mathcal{M}; \bar{p})$ et au complexe $\underline{IC}_{\mathcal{F}(\mathcal{M}; \bar{p}); \bar{p}}^{\bullet}(\mathbf{X}; \mathcal{M})$ annoncés. L'assertion (a) est claire par construction, et (b) résulte de la version cohomologique du théorème de comparaison 5.3.1-(a). ■

5.6.7. Notations. Comme la filtration $\mathcal{F}(\mathcal{M}; \bar{p})$ ne dépend que de \mathcal{M} et de \bar{p} , la notation $\underline{IC}_{\mathcal{F}(\mathcal{M}; \bar{p}); \bar{p}}^{\bullet}(\mathbf{X}; \mathcal{M})$ est redondante et sera simplifiée à $\underline{IC}_{\bar{p}}^{\bullet}(\mathbf{X}; \mathcal{M})$.

Le théorème précédent montre que pour tout système local \mathcal{L} dont le domaine de définition contient l'ouvert $\mathbf{U}_{\mathcal{F}}^0$ pour une certaine stratification de pseudovariété de \mathbf{X} , le complexe $\underline{IC}_{\mathcal{F}; \bar{p}}^{\bullet}(\mathbf{X}; \mathcal{L})$ est canoniquement isomorphe à $\underline{IC}_{\bar{p}}^{\bullet}(\mathbf{X}; \mathcal{L})$ et la notation $\underline{IC}_{\bar{p}}^{\bullet}(\mathbf{X}; \mathcal{L})$ a un sens intrinsèque pour de tels systèmes locaux.

5.6.8. Mise en garde. Il n'est pas vrai en général qu'un système local maximal $(\mathbf{W}, \mathcal{M})$ soit défini sur les strates de codimension 0 d'une stratification de pseudovariété de \mathbf{X} , même si le complémentaire de \mathbf{W} est de codimension ≥ 2 . L'exemple classique consiste à considérer sur $\{0, 1\} \times \mathbb{R}^2$ la relation d'équivalence qui identifie $(0, 0, 1/n) \sim (1, 0, 1/n)$ et $(0, 0, 0) \sim (1, 0, 0)$. On note \mathbf{Z} le quotient topologique de $\{0, 1\} \times \mathbb{R}^2$ par « \sim ». La projection canonique $p_2 : \{0, 1\} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ induit alors l'application $\bar{p}_2 : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}^2$ (propre de fibres

finies) et le faisceau $\bar{p}_{2,*}\underline{k}_{\mathbf{X}}$ est un système local maximal de rang 2 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{\{(0, 1/n)\}}$. Comme le sous-espace $\overline{\{(0, 1/n)\}}$ n'est pas discret, il ne peut être contenu dans aucune sous-variété de dimension 0 de \mathbb{R}^2 .

5.6.9. Théorème. Soient \mathcal{F} et \mathcal{G} deux filtrations de pseudovariété (cohomologique) pour \mathbf{X} . Soient $(\mathbf{U}_{\mathcal{F}}^0; \mathcal{L})$ et $(\mathbf{U}_{\mathcal{G}}^0; \mathcal{M})$ deux systèmes locaux et $\varphi : \mathcal{L}|_{\mathbf{U}_{\mathcal{F}}^0 \cap \mathbf{U}_{\mathcal{G}}^0} \rightarrow \mathcal{M}|_{\mathbf{U}_{\mathcal{F}}^0 \cap \mathbf{U}_{\mathcal{G}}^0}$ un morphisme. Il existe alors un unique morphisme

$$\underline{IC}_{\bar{p}}^{\bullet}(\varphi) : \underline{IC}_{\bar{p}}^{\bullet}(\mathbf{X}; \mathcal{L}) \longrightarrow \underline{IC}_{\bar{p}}^{\bullet}(\mathbf{X}; \mathcal{M})$$

qui prolonge φ .

En particulier, si φ est un isomorphisme, $\underline{IC}_{\bar{p}}^{\bullet}(\varphi)$ l'est aussi.

Démonstration. Le prolongement maximal $\tilde{\mathcal{L}}$ de \mathcal{L} est également un prolongement maximal de \mathcal{M} , les complexes d'intersection sont donc tous les deux canoniquement isomorphes au complexe $\underline{IC}_{\mathcal{F}(\bar{p})}^{\bullet}(\mathbf{X}; \tilde{\mathcal{L}})$ et l'équivalence de catégories de Deligne termine la démonstration. ■

5.7 Caractérisation intrinsèque des complexes d'intersection

5.7.1. Support cohomologique des complexes de faisceaux. Pour tout $\mathcal{F} \in \text{Fais}(\mathbf{X})$, on appelle « support de \mathcal{F} » l'ensemble $|\mathcal{F}| := \{x \in \mathbf{X} \mid \mathcal{F}_x \neq 0\}$. On prendra garde du fait que dans notre définition $|\mathcal{F}|$ n'est généralement pas une partie localement fermée de \mathbf{X} , contrairement à la définition que l'on rencontre dans la littérature où le support est l'adhérence de notre ensemble $|\mathcal{F}|$.

Plus généralement, si $\mathcal{F}^{\bullet} \in D(\mathbf{X})$, on appelle « support cohomologique de \mathcal{F}^{\bullet} » l'ensemble $|\mathcal{F}^{\bullet}|_{\text{ch}} := \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} |\mathcal{H}^m \mathcal{F}^{\bullet}|$

Lorsque $\mathcal{F}^{\bullet} \in D_{\mathcal{F}\text{-clc}}^b(\mathbf{X})$, $|\mathcal{F}^{\bullet}|_{\text{ch}}$ est une réunion finie de strates de \mathcal{F} .

5.7.2. Notation. Pour toute perversité \bar{p} et tout $\ell \in \mathbb{N}$, on note

$$p^{-1}(\ell) := \begin{cases} +\infty & \text{si } \ell > p_c \text{ pour tout } c \in \mathbb{N}; \\ \inf\{c \mid p_c \geq \ell\} & \text{autrement.} \end{cases}$$

Le théorème suivant donne une caractérisation des complexes d'intersection pour une pseudovariété \mathbf{X} , indépendante du choix d'une stratification pour \mathbf{X} .

5.7.3. Théorème. Soit \mathbf{X} une pseudovariété de dimension $d_{\mathbf{X}} := \dim_{\text{ch}}(\mathbf{X})$. Un complexe de faisceaux $\mathcal{F}^{\bullet} \in D(\mathbf{X})$ est un complexe d'intersection pour la perversité \bar{p} , si et seulement si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

- $\mathcal{F}^{\bullet} \in D_{\mathcal{F}\text{-cc}}^b(\mathbf{X})$ pour une certaine stratification \mathcal{F} de pseudovariété cohomologique.
- $\mathcal{H}^i \mathcal{F}^{\bullet} = \mathbf{0}$ pour tout $i < 0$ et il existe une sous-variété cohomologique ouverte $U \subseteq \mathbf{X}$, de complémentaire de codimension minorée par 2, telle que $\mathcal{F}^{\bullet}|_U$ est un système local.

c) Pour tout $\ell > 0$, on a :

$$\begin{cases} \dim_{\text{ch}} \overline{\mathcal{H}^\ell \mathcal{F}^\bullet} \leq d_X - p^{-1}(\ell), \\ \dim_{\text{ch}} \overline{\mathcal{H}^{\ell-d_X} \mathcal{D}_X^\bullet \mathcal{F}^\bullet} \leq d_X - p'^{-1}(\ell). \end{cases}$$

La condition (c) peut être remplacée par :

$$(c') \quad \begin{cases} \dim_{\text{ch}} \overline{\{x \mid h^\ell[i_x^{-1} \mathcal{F}^\bullet] \neq 0\}} \leq d_X - p^{-1}(\ell), \text{ pour tout } \ell > 0, \\ \dim_{\text{ch}} \overline{\{x \mid h^\ell[i_x^! \mathcal{F}^\bullet] \neq 0\}} \leq d_X - p'^{-1}(d_X - \ell), \text{ pour tout } \ell < d_X. \end{cases}$$

Démonstration. Il est clair que tout complexe d'intersection pour la perversité \bar{p} vérifie les conditions. Réciproquement, la filtration \mathcal{F} étant fixée, le complexe $\mathcal{F}^\bullet|_{U_{\mathcal{F}}^0}$ est cohomologiquement localement constant. Notons $i : U_{\mathcal{F}}^0 \cap U \hookrightarrow U_{\mathcal{F}}^0$ l'inclusion. Pour chaque $\ell \in \mathbb{Z}$, le morphisme d'adjonction $\mathcal{H}^\ell \mathcal{F}|_{U_{\mathcal{F}}^0} \rightarrow i_* \mathcal{H}^\ell \mathcal{F}|_{U_{\mathcal{F}}^0 \cap U}$ est un isomorphisme de systèmes locaux d'après 5.6.1 et donc $\mathcal{F}^\bullet|_{U_{\mathcal{F}}^0}$ est quasi-isomorphe à un système local d'après (b). Les conditions (c) (resp. (c')) jointes au fait que \mathcal{F}^\bullet est \mathcal{F} -clc donnent alors les conditions de support et cosupport pour que $\mathcal{F}^\bullet \in \mathcal{IC}_{\mathcal{F}; \bar{p}}(\mathbf{X})$. Les détails sont laissés en exercice. ■

5.8 Caractère local des complexes d'intersection

Proposition. Soit \mathbf{X} une pseudovariété. Pour tout complexe de faisceaux $\mathcal{F}^\bullet \in D(\mathbf{X})$ les conditions suivantes sont équivalentes :

- \mathcal{F}^\bullet est un complexe d'intersection pour la perversité \bar{p} .
- $\mathcal{F}^\bullet|_U$ est un complexe d'intersection pour la perversité \bar{p} quel que soit l'ouvert $U \subseteq \mathbf{X}$.
- $\mathcal{F}^\bullet|_{U_\alpha}$ est un complexe d'intersection pour la perversité \bar{p} , pour chaque ouvert U_α d'un certain recouvrement ouvert $\mathbf{X} := \bigcup_{\alpha \in \mathfrak{A}} U_\alpha$.

Démonstration. Les implications (a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) sont immédiates. Lorsque (c) est vérifiée, il existe sur chaque ouvert U_α un système local maximal $(\mathbf{W}_\alpha; \mathcal{L}_\alpha)$, une filtration fermée canonique à strates cohomologiquement lisses $\mathcal{F}(\mathcal{L}_\alpha, \bar{p})$ et un isomorphisme canonique $\underline{IC}_{\mathcal{F}(\mathcal{L}_\alpha, \bar{p}); \bar{p}}(\mathbf{X}; \mathcal{L}_\alpha) \cong \mathcal{F}^\bullet|_{U_\alpha}$ (5.6.6). Le caractère intrinsèque des constructions garantit l'égalité des filtrations induites sur $U_\alpha \cap U_\beta$, *i.e.* :

$$\mathcal{F}(\mathcal{L}_\alpha, \bar{p}) \cap (U_\alpha \cap U_\beta) = \mathcal{F}(\mathcal{L}_\beta, \bar{p}) \cap (U_\alpha \cap U_\beta)$$

de sorte que la famille de filtrations fermées $\{\mathcal{F}(\mathcal{L}_\alpha, \bar{p})\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$ définit (par recollement) une filtration fermée $\mathcal{F}(\mathcal{L}; \bar{p})$ à strates cohomologiquement lisses où \mathcal{L} est le système local maximal associé au recollement des systèmes locaux \mathcal{L}_α . Le complémentaire de l'ouvert de définition de \mathcal{L} est de codimension > 1 .

Ceci étant, les condition de 5.7.3 sont satisfaites par $\underline{IC}_{\mathcal{F}(\mathcal{L}; \bar{p}); \bar{p}}(\mathbf{X}; \mathcal{L})$ puisqu'il en est ainsi de ses restrictions sur les U_α où la condition 5.7.3-(a) fait référence à la restriction d'une stratification de pseudovariété de \mathbf{X} fixe, *i.e.* indépendante de $\alpha \in \mathfrak{A}$; la validité de cette condition est assurée par le théorème 5.6.6-(a). Par conséquent, $\underline{IC}_{\mathcal{F}(\mathcal{L}; \bar{p}); \bar{p}}(\mathbf{X}; \mathcal{L})$ est un complexe d'intersection sur \mathbf{X} pour la perversité \bar{p} .

Enfin, les conditions 5.7.3 sont vérifiées par \mathcal{F}^\bullet puisque localement canoniquement isomorphes (en catégories dérivées) à $\underline{IC}_{\mathcal{F}(\mathcal{L}, \bar{p}); \bar{p}}^\bullet(\mathbf{X}; \mathcal{L})$. Le complexe \mathcal{F}^\bullet est donc *globalement* isomorphe au complexe d'intersection $\underline{IC}_{\mathcal{F}(\mathcal{L}, \bar{p}); \bar{p}}^\bullet(\mathbf{X}; \mathcal{L})$, CQFD. ■

§ 6. Formule de Künneth pour l'homologie d'intersection

6.1 Quelques opérations sur les perversités

Notons \mathcal{P} l'ensemble des « perversités » $p : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, *i.e.* des applications vérifiant

$$0 = p(0) = p(1) = p(2) \quad \text{et} \quad p(c) \leq p(c+1) \leq p(c) + 1, \quad \text{pour tout } c \in \mathbb{N}.$$

Les propriétés suivantes sont élémentaires :

\mathcal{P} -a) La relation ' \preceq ' définie dans \mathcal{P} par

$$p \preceq q \iff p(c) \leq q(c), \quad \text{pour tout } c \in \mathbb{N}.$$

est un ordre partiel qui est filtrant supérieurement et inférieurement.

\mathcal{P} -b) Étant données deux perversités p, q , on note $p \wedge q$ et $p \vee q$ les perversités :

$$c \mapsto (p \wedge q)(c) := \inf(p(c), q(c)) \quad \text{et} \quad c \mapsto (p \vee q)(c) := \sup(p(c), q(c))$$

On a $p \vee q = \inf\{r \in \mathcal{P} \mid p \preceq r \ \& \ q \preceq r\}$ et $p \wedge q = \sup\{r \in \mathcal{P} \mid r \preceq p \ \& \ r \preceq q\}$.

\mathcal{P} -c) Les applications $\mathbf{0} : c \mapsto 0$ et $\mathbf{t} : c \mapsto \sup(c-2, 0)$ sont les éléments respectivement plus petit et plus grand de (\mathcal{P}, \preceq) .

\mathcal{P} -d) Le système $(\mathcal{P}, \vee, \wedge, \mathbf{0}, \mathbf{t})$ est une algèbre de Boole.

\mathcal{P} -e) Pour tout $p \in \mathcal{P}$, l'application $p' := \mathbf{t} - p$ appartient à \mathcal{P} . L'application $(_)': \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ est une involution sans point fixe qui échange $\vee \leftrightarrow \wedge$, et $\preceq \leftrightarrow \succ$.

\mathcal{P} -f) Pour chaque $\theta \in [0, 1]$, les applications « affines » :

$$0 \leq c \mapsto \begin{matrix} \lambda_\theta \\ \Lambda_\theta \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} \lambda_\theta(c) := \lfloor \theta(c-2) \rfloor, \\ \Lambda_\theta(c) := \lceil \theta(c-2) \rceil, \end{cases}$$

où, $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x et $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor + 1$, sont des perversités. On a

$$\mathbf{t} := \Lambda_1 = \lambda_1, \quad \mathbf{0} = \Lambda_0 = \lambda_0, \quad \lambda'_\theta = \Lambda_{1-\theta}, \quad \Lambda'_\theta = \lambda_{1-\theta}$$

6.1.1. Définition. On dira qu'une perversité p est « *de Künneth* » lorsque

$$\boxed{p(a) + p(b) \leq p(a+b) \leq p(a) + p(b) + 2} \quad (\diamond)$$

pour tous $a, b \in \mathbb{N}$.

6.1.2. Remarque. Les inégalités (\diamond) sont vérifiées par toute perversité p lorsque $a \leq 2$ ou $b \leq 2$. Par conséquent, p est de Künneth, si et seulement si, (\diamond) est vérifiée pour tous $a, b > 2$.

6.1.3. Proposition

- a) p est de Künneth, si et seulement si, p' l'est.
 b) La perversité λ_θ est de Künneth si et seulement si :

$$\begin{cases} \text{(b-1)} & \theta \in [0, 1/2], \quad \text{ou bien} \\ \text{(b-2)} & \theta = \frac{x}{2x-1}, \quad \text{pour un certain } x \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

En particulier, λ_θ n'est pas de Künneth pour $\theta \in]2/3, 1[$.

Démonstration. L'assertion (a) résulte d'une vérification immédiate (cf. 6.1.2).

Les inégalités (\diamond) à tester sont

$$[\theta(a-2)] + [\theta(b-2)] \underset{1}{\leq} [\theta(a+b)-2] \underset{2}{\leq} [\theta(a-2)] + [\theta(b-2)] + 2,$$

pour tous $a > 2$ et $b > 2$.

($\underset{1}{\leq}$). Immédiate car $\theta(a-2) + \theta(b-2) = \theta(a+b-2) - 2\theta \leq \theta(a+b-2)$. L'inégalité est satisfaite quelle que soit la valeur de $\theta \in [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$.

($\underset{2}{\leq}$). Pour $m \in \mathbb{N}$, notons $\varepsilon_m := \theta m - [\theta m] \in [0, 1[\subseteq \mathbb{R}$. On a :

$$[\theta m + \theta n + 2\theta] = [\theta m] + [\theta n] + [\varepsilon_m + \varepsilon_n + 2\theta], \quad (*)$$

où $\varepsilon_m + \varepsilon_n < 2$, et l'inégalité ($\underset{2}{\leq}$) est équivalente à :

$$\varepsilon_m + \varepsilon_n + 2\theta < 3, \quad \text{pour tous } m, n \in \mathbb{N}. \quad (\dagger)$$

On a (b-1) puisque $\varepsilon_m + \varepsilon_n + 2\theta \leq \varepsilon_m + \varepsilon_n + 1 < 3$.

Si $\theta > 1/2$ est irrationnel, la somme $\varepsilon_m + \varepsilon_n$ prendra des valeurs aussi proche que l'on veut de 2, auxquels cas $\varepsilon_m + \varepsilon_n + 2\theta > 3$ et λ_θ n'est pas de Künneth.

Si $\theta > 1/2$ est rationnel, on pose $\theta = x/y$ avec $\text{pgcd}(x, y) = 1$. La plus grande valeur atteinte de ε_m vaut $1 - 1/y$ et le terme de gauche dans (\dagger) atteint la valeur $2(1 - 1/y) + 2x/y$. Nous cherchons à vérifier l'inégalité $2(1 - 1/y) + 2x/y < 3$, ou, ce qui revient au même,

$$2x \leq y + 1 \quad (\ddagger)$$

Or, comme $\theta > 1/2$, on a aussi $2x \geq y + 1$ et donc $\theta = x/(2x-1)$, CQFD. \blacksquare

6.1.4. Remarque. Dans ce qui précède on a justifié les assertions suivantes :

- a) Pour toute perversité p il y a équivalence entre
 i) $p(a) + p(b) \leq p(a+b)$, pour tous $a, b \in \mathbb{N}$;
 ii) $p'(a+b) \leq p'(a) + p'(b) + 2$, pour tous $a, b \in \mathbb{N}$;
 b) $\lambda_\theta(a) + \lambda_\theta(b) \leq \lambda_\theta(a+b)$, pour tous $a, b \in \mathbb{N}$ et $\theta \in [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$.

6.1.5. Proposition. Étant données deux perversités p, q , l'application

$$\mathbb{N} \ni c \longmapsto (p \star q)(c) := \sup \{ p(a) + q(b) \mid a + b = c \}$$

est une perversité.

L'opération $\star : \mathcal{P} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ vérifie pour tous $p, q \in \mathcal{P}$ et $\theta \in [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad (p \star q) \star r &= p \star (q \star r), & \text{(b)} \quad p \star \mathbf{0} &= p, & \text{(c)} \quad p \star \mathbf{t} &= \mathbf{t}, \\ \text{(d)} \quad (\lambda_\theta \star \lambda_\theta) &= \lambda_\theta, & \text{(e)} \quad p \vee q &\preceq p \star q, & \text{(f)} \quad (p \star q)' &\preceq p' \star q', \end{aligned}$$

g) Les assertions suivantes sont équivalentes :

- i) $(p \star q)' = p' \star q'$,
- ii) $p = q$, $p \star p = p$ et $p' \star p' = p'$,
- iii) $p = q$ et p est de Künneth.

Démonstration. Les assertions (a,b,c,e) sont presque immédiates. L'assertion (d) est équivalente à 6.1.4. L'assertion (f) résulte de (e) qui implique $(p \star q)' \preceq p' \wedge q'$ et donc :

$$(p \star q)' \preceq p' \wedge q' \preceq p' \vee q' \preceq p' \star q' \quad (*)$$

Lorsque (g-i) est vérifié, les inégalités (*) montrent que $p' \wedge q' = p' \vee q'$ et alors

$$p = q \quad \text{et} \quad p' = p' \star p' \quad \text{et} \quad p \star p = p;$$

des conditions qui impliquent immédiatement (g-i). Comme d'autre part les conditions $p = p \star p$ et $p' = p' \star p'$ sont équivalentes à $p(a) + p(b) \leq p(a + b) \leq p(a) + p(b) + 2$, on a aussitôt (g-ii) \Leftrightarrow (g-iii). ■

6.1.6. Remarque exercice. Si $\lambda_\theta = \lambda_\theta \star \lambda_\theta$ est valable quel que soit $\theta \in [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$, il n'en est pas de même pour Λ_θ .

a) Montrer l'équivalence

$$\Lambda_\theta = \Lambda_\theta \star \Lambda_\theta \quad \Leftrightarrow \quad \theta \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right] \cup \left\{ \frac{m}{m + (m + 1)} \mid m \in \mathbb{N} \right\}$$

b) Les deux perversités moyennes sont de Künneth.

6.2 Homologie d'intersection d'un produit de pseudovariétés

Théorème. Soient \mathbf{X}, \mathbf{Y} deux pseudovariétés et \mathcal{L}, \mathcal{M} deux systèmes locaux définis sur les ouverts lisses de certaines stratifications de pseudovariété de \mathbf{X} et \mathbf{Y} . Pour toute perversité de Künneth \bar{p} , p.e. l'une des perversités moyennes, il existe un isomorphisme canonique

$$\underline{IC}_{\bar{p}}^\bullet(\mathbf{X}; \mathcal{L}) \boxtimes \underline{IC}_{\bar{p}}^\bullet(\mathbf{Y}; \mathcal{M}) \equiv \underline{IC}_{\bar{p}}^\bullet(\mathbf{X} \times \mathbf{Y}; \mathcal{L} \boxtimes \mathcal{M})$$

et donc

$$\boxed{I_{\bar{p}}H_c^*(\mathbf{X}; \mathcal{L}) \otimes I_{\bar{p}}H_c^*(\mathbf{Y}; \mathcal{M}) \equiv I_{\bar{p}}H_c^*(\mathbf{X} \times \mathbf{Y}; \mathcal{L} \boxtimes \mathcal{M})}$$

Si, de plus, $I_{\bar{p}}H_c^m(\mathbf{X}, \mathcal{L})$ est de dimension finie pour tout m (p.e. si \mathbf{X} est compacte)

$$\boxed{I_{\bar{p}}H^*(\mathbf{X}; \mathcal{L}) \otimes I_{\bar{p}}H^*(\mathbf{Y}; \mathcal{M}) \equiv I_{\bar{p}}H^*(\mathbf{X} \times \mathbf{Y}; \mathcal{L} \boxtimes \mathcal{M})}$$

Démonstration. On fixe des stratifications \mathcal{F} de \mathbf{X} et \mathcal{G} de \mathbf{Y} adaptées aux systèmes locaux \mathcal{L} et \mathcal{M} respectivement. On munit $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ de la stratification produit $\mathcal{F} \times \mathcal{G}$.

Étant données des strates $\mathbf{S} \in \mathcal{F}$ et $\mathbf{T} \in \mathcal{G}$, on a la condition de support :

$$\begin{aligned} \llbracket \underline{IC}_{\bar{p}}^*(\mathbf{X}; \mathcal{L}) \boxtimes \underline{IC}_{\bar{p}}^*(\mathbf{Y}; \mathcal{M}) \rrbracket_{\mathbf{S} \times \mathbf{T}}^{\text{ch}} &= \llbracket \underline{IC}_{\bar{p}}^*(\mathbf{X}; \mathcal{L}) \rrbracket_{\mathbf{S}}^{\text{ch}} + \llbracket \underline{IC}_{\bar{p}}^*(\mathbf{Y}; \mathcal{M}) \rrbracket_{\mathbf{T}}^{\text{ch}} \\ &\subseteq [0, p_{\text{cd}_{\mathbf{S}}} + p_{\text{cd}_{\mathbf{T}}}] \subseteq [0, (\bar{p} \star \bar{p})(\text{cd}_{\mathbf{S} \times \mathbf{T}})] \end{aligned}$$

et la condition de cosupport, par 3.7.4-(d),

$$\begin{aligned} \llbracket \underline{IC}_{\bar{p}'}^*(\mathbf{X}; \mathcal{L}) \boxtimes \underline{IC}_{\bar{p}'}^*(\mathbf{Y}; \mathcal{M}) \rrbracket_{\mathbf{S} \times \mathbf{T}}^{\text{ch}} &= \llbracket \underline{IC}_{\bar{p}'}^*(\mathbf{X}; \mathcal{L}) \rrbracket_{\mathbf{S}}^{\text{ch}} + \llbracket \underline{IC}_{\bar{p}'}^*(\mathbf{Y}; \mathcal{M}) \rrbracket_{\mathbf{T}}^{\text{ch}} \\ &\subseteq [0, p'_{\text{cd}_{\mathbf{S}}} + p'_{\text{cd}_{\mathbf{T}}}] \subseteq [0, (\bar{p}' \star \bar{p}')(\text{cd}_{\mathbf{S} \times \mathbf{T}})] \end{aligned}$$

Par conséquent, lorsque \bar{p} est de Künneth, on a $\bar{p} = \bar{p} \star \bar{p}$ et $\bar{p}' = \bar{p}' \star \bar{p}'$ et le complexe $\underline{IC}_{\bar{p}}^*(\mathbf{X}; \mathcal{L}) \boxtimes \underline{IC}_{\bar{p}}^*(\mathbf{Y}; \mathcal{M})$ est bien d'intersection pour la perversité \bar{p} , donc canoniquement isomorphe à $\underline{IC}_{\bar{p}}^*(\mathbf{X} \times \mathbf{Y}; \mathcal{L} \boxtimes \mathcal{M})$.

La deuxième partie est conséquence du théorème de Künneth à supports compacts pour les complexes de faisceaux 3.7.5. La formule de Künneth à supports fermés pour la perversité \bar{p} résulte de dualiser la formule de Künneth à supports compacts pour la perversité \bar{p}' dont on sait qu'elle est aussi de Künneth (6.1.3-(a)). L'hypothèse à propos de la finitude des nombres de Betti intervient uniquement pour assurer que le dual du produit tensoriel est bien le produit tensoriel des duaux. ■

6.2.1. Remarque. Le théorème précédent est en quelque sorte générique par rapport à la perversité et aux pseudovariétés. En effet, l'opération \star entre perversités est une borne grossière des sommes $p_{\text{cd}_{\mathbf{S}}} + q_{\text{cd}_{\mathbf{T}}}$ qui interviennent dans l'étude des conditions de support d'un complexe donné $\underline{IC}_{\bar{p}}^*(\mathbf{X}; \mathcal{L}) \boxtimes \underline{IC}_{\bar{q}}^*(\mathbf{Y}; \mathcal{M})$ ce pourquoi une meilleure borne serait :

$$\mathbb{N} \ni c \longmapsto \sup \{ p_a + q_b \mid a + b = c \ \& \ a \leq d_{\mathbf{X}}, \ b \leq d_{\mathbf{Y}} \}$$

De même, lorsque les pseudovariétés \mathbf{X} et \mathbf{Y} admettent des stratifications où il n'existe pas de strates dans certaines codimensions, la borne en question peut à nouveau être améliorée et les restrictions concernant la perversité dans la formule de Künneth peuvent être allégées. En ce sens, un cas qui mérite d'être relevé est celui où \mathbf{X} est une variété cohomologique munie d'un système local \mathcal{L} globalement défini ; dans ce cas, on vérifie aisément l'existence d'un isomorphisme

$$\mathcal{L} \boxtimes \underline{IC}_{\bar{p}}^*(\mathbf{Y}; \mathcal{M}) \equiv \underline{IC}_{\bar{p}}^*(\mathbf{X} \times \mathbf{Y}; \mathcal{L} \boxtimes \mathcal{M})$$

quelle que soit la perversité \bar{p} .

Nous rassemblons ces remarques sous la forme de théorème.

6.2.2. Théorème. *Étant donné une variété cohomologique \mathbf{X} , une pseudovariété \mathbf{Y} , un système local globalement défini $\mathcal{L} \in \text{Loc}(\mathbf{X})$ et un système local \mathcal{M} défini sur l'ouvert lisse d'une stratification de pseudovariété de \mathbf{Y} , il existe un isomorphisme canonique*

$$\boxed{H_c^*(\mathbf{X}; \mathcal{L}) \otimes I_{\bar{p}} H_c^*(\mathbf{Y}; \mathcal{M}) \equiv I_{\bar{p}} H_c^*(\mathbf{X} \times \mathbf{Y}; \mathcal{L} \boxtimes \mathcal{M})}$$

quelle que soit la perversité \bar{p} . Si, de plus, $H_c^m(\mathbf{X}; \mathcal{L})$ (resp. $I_{\bar{p}}H_c^m(\mathbf{Y}, \mathcal{L})$) est de dimension finie pour tout m (p.e. si \mathbf{X} (resp. \mathbf{Y}) est compacte), on a un isomorphisme canonique

$$\boxed{H^*(\mathbf{X}; \mathcal{L}) \otimes I_{\bar{p}}H^*(\mathbf{Y}; \mathcal{M}) \equiv I_{\bar{p}}H^*(\mathbf{X} \times \mathbf{Y}; \mathcal{L} \boxtimes \mathcal{M})}$$

§ 7. Functorialité de l'homologie d'intersection

7.1 Images inverses par des morphismes lisses

7.1.1. Proposition. Soit $\pi : \mathbf{Y} \times \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{Y}$ la projection canonique où \mathbf{Y} est une pseudo-variété et où \mathbf{M} est une variété cohomologique. Alors :

- a) $\pi^{-1}\mathcal{J}\mathcal{C}_{\bar{p}}(\mathbf{Y}) \subseteq \mathcal{J}\mathcal{C}_{\bar{p}}(\mathbf{Y} \times \mathbf{M})$ et $\pi^!\mathcal{J}\mathcal{C}_{\bar{p}}(\mathbf{Y})[-d_M] \subseteq \mathcal{J}\mathcal{C}_{\bar{p}}(\mathbf{Y} \times \mathbf{M})$.
b) Il existe un morphisme naturel $I_{\bar{p}}H^*(\pi) : I_{\bar{p}}H^*(\mathbf{Y}, \mathcal{L}) \rightarrow I_{\bar{p}}H^*(\mathbf{Y} \times \mathbf{M}; \pi^{-1}\mathcal{L})$.

Démonstration. On munit $\mathbf{X} := \mathbf{Y} \times \mathbf{M}$ de la stratification dont les strates sont le produit d'une strate de \mathbf{Y} par \mathbf{M} . Soit $\mathcal{F}^\bullet \in \mathcal{J}\mathcal{C}_{\bar{p}}(\mathbf{Y})$. Il est clair que $\pi^{-1}\mathcal{F}^\bullet$ est un système local sur un ouvert partout dense de \mathbf{X} de complémentaire de codimension > 1 . Soit $\mathbf{T} = \mathbf{S} \times \mathbf{M}$ une strate de codimension positive $\text{cd}_{\mathbf{T}}$ dans \mathbf{X} , on a $\text{cd}_{\mathbf{T}} = \text{cd}_{\mathbf{S}}$, où $\text{cd}_{\mathbf{S}}$ dénote la codimension de \mathbf{S} dans \mathbf{Y} . Les conditions de support sont immédiates, on a par exactitude de π^{-1} :

$$\llbracket (\pi^{-1}\mathcal{F}^\bullet)|_{\mathbf{T}} \rrbracket_{\text{ch}} = \llbracket (\pi^{-1}\mathcal{F}^\bullet)|_{\mathbf{S}} \rrbracket_{\text{ch}} \subseteq [0, p_{\text{cd}_{\mathbf{S}}}] = [0, p_{\text{cd}_{\mathbf{T}}}]$$

Les conditions de cosupport résultent d'appliquer les résultats de la section 3.7 notamment le théorème 3.7.4. On a :

$$\begin{aligned} \llbracket \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet(\pi^{-1}\mathcal{F}^\bullet)[-d_{\mathbf{X}}]|_{\mathbf{T}} \rrbracket_{\text{ch}} &= \llbracket (\mathcal{D}_{\mathbf{Y}}^\bullet(\mathcal{F}^\bullet)[-d_{\mathbf{Y}}] \boxtimes \mathcal{D}_{\mathbf{M}}^\bullet[-d_{\mathbf{M}}])|_{\mathbf{T}} \rrbracket_{\text{ch}} \\ &= \llbracket \mathcal{D}_{\mathbf{Y}}^\bullet(\mathcal{F}^\bullet)[-d_{\mathbf{Y}}]|_{\mathbf{S}} \rrbracket_{\text{ch}} \subseteq [0, p'_{\text{cd}_{\mathbf{S}}}] = [0, p'_{\text{cd}_{\mathbf{T}}}] \end{aligned}$$

Ce qui prouve la première partie de (a). On en déduit par dualité de Grothendieck-Verdier :

$$\pi^!\mathcal{J}\mathcal{C}_{\bar{p}'}(\mathbf{Y})[-d_M] = \mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet(\pi^{-1}\mathcal{J}\mathcal{C}_{\bar{p}}(\mathbf{Y}))[-d_{\mathbf{X}}] \subseteq (\mathcal{D}_{\mathbf{X}}^\bullet\mathcal{J}\mathcal{C}_{\bar{p}}(\mathbf{X}))[-d_{\mathbf{X}}] = \mathcal{J}\mathcal{C}_{\bar{p}'}(\mathbf{X})$$

Enfin, l'assertion (b) résulte alors du morphisme d'adjonction $\mathcal{F}^\bullet \rightarrow \mathbb{R}\pi_*\pi^{-1}\mathcal{F}^\bullet$. ■

7.1.2. Définition. Une application continue $f : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ est un « *morphisme lisse* » si pour tout $x \in \mathbf{X}$, il existe un voisinage ouvert U_x de x dans \mathbf{X} , un voisinage ouvert $V_{f(x)}$ de $f(x)$ dans \mathbf{Y} , une variété cohomologique F_x et un homéomorphisme $h : U_x \rightarrow V_{f(x)} \times F_x$ tels que $f|_{U_x} = \pi \circ h$.

7.1.3. Exemples. Une fibration localement triviale de fibre une variété cohomologique. Une composée de telles applications (qui n'est pas toujours une fibration localement triviale!).

7.1.4. Corollaire. Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme lisse entre pseudovariétés. Alors :

- a) $\pi^{-1}\mathcal{J}\mathcal{C}_{\bar{p}}(Y) \subseteq \mathcal{J}\mathcal{C}_{\bar{p}}(X)$.
- b) Il existe un morphisme naturel $I_{\bar{p}}H^*(\pi) : I_{\bar{p}}H^*(Y, \mathcal{L}) \rightarrow I_{\bar{p}}H^*(X; \pi^{-1}\mathcal{L})$.
- c) Si les fibres de f sont de dimension n , on a $\pi^!\mathcal{J}\mathcal{C}_{\bar{p}}(Y)[-n] \subseteq \mathcal{J}\mathcal{C}_{\bar{p}}(X)$.

Démonstration. Exercice (utiliser 5.8 pour “recoller” 7.1.1). ■

7.2 À propos de la functorialité de l’homologie d’intersection

Étant donnée une application stratifiée $f : X \rightarrow Y$ entre deux pseudovariétés, il n’est généralement pas vrai que le foncteur f_* transforme un système local défini sur les strates de codimension nulle d’une stratification de pseudovariété de X en un système local sur Y vérifiant cette dernière propriété (*mutatis mutandis* pour f^{-1}). C’est là une obstruction sérieuse à la functorialité de la correspondance $X \rightsquigarrow \mathcal{J}\mathcal{C}_{\bar{p}}(X)$ sur la catégorie des pseudovariétés.

Des énoncés du même style que 7.1.4 concernant des classes d’applications plus larges que les morphismes lisses apparaissent dès que l’on se restreint aux seuls complexes d’intersection associés aux faisceaux constants. C’est le cas des applications propres «(semi)petites» (cf. [A], p. 50) et des applications «normalement non singulières» (cf. [GoMc₂], §5.4.3), les première vis-à-vis des images directes et les secondes vis-à-vis des images inverses.

La proposition suivante est prouvée dans la section §5.4.3 de l’article [GoMc₂] auquel nous renvoyons pour plus de détails.

7.2.1. Proposition. Pour chaque perversité \bar{p} l’homologie d’intersection $I_{\bar{p}}H^*(_, k)$ est un foncteur covariant (via f_*) et contravariant (via f^{-1}) sur la catégorie des pseudovariétés et des applications normalement non singulières.

§ 8. Quelques références bibliographiques

- [A] ARABIA. “Faisceaux pervers sur les variétés algébriques complexes. Correspondance de Springer (d’après Borho-MacPherson)” ; Notes de cours (63 pages), prépublication (mai 2001) <http://www.math.jussieu.fr/~arabia/math/Pervers.pdf>.
- [Bo₂] BOREL. Introduction to middle intersection cohomology and perverse sheaves ; Algebraic groups and their generalizations : classical methods (University Park, PA, 1991), Proc. Sympos. Pure Math., 56, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 25–52 (1994).
- [BoAl] BOREL ET AL. “Intersection Cohomology” ; Progress in mathematics 50. Birkhäuser (1984).
- [CGJ] COHEN, GORESKY, JI. On the Künneth formula for intersection cohomology ; Trans. Amer. Math. Soc. 333, no. 1, 63–69 (1992).
- [Go] GODEMENT. “Topologie algébrique et théorie des faisceaux” ; Troisième édition revue et corrigée. Publications de l’Institut de Mathématique de l’Université de Strasbourg, XIII. Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1252. Hermann, Paris, (1973).

- [GoMc₁] GORESKEY, MACPHERSON. Intersection homology theory; *Topology* 19, no. 2, 135–162 (1980).
- [GoMc₂] GORESKEY, MACPHERSON. Intersection homology II; *Inventiones Mathematicae* 71, 77–129 (1983).
- [H] HARTSHORNE. “*Residues and duality*”; Lect. notes of a seminar on the work of A. Grothendieck, given at Harvard 1963/64. With an appendix by P. Deligne. *Lecture Notes in Mathematics*, No. 20 Springer-Verlag, Berlin-New York (1966).
- [KS] KASHIWARA, SCHAPIRA. “*Sheaves on manifolds*”; *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*, 292. Springer-Verlag, Berlin, (1990).

—————×—————

Alberto Arabia
CNRS
Institut de Mathématiques de Jussieu
Théorie des Groupes
Samedi 16 mars 2003