

Un théorème de Lefschetz p -adique

Alberto Arabia*

Théorème 1. *Soit X un schéma lisse séparé de type fini sur un corps fini k . Soit $\theta : X \rightarrow X$ un automorphisme, d'ordre fini L relativement premier à $q := |k|$, et agissant sans point fixe, i.e. tel que $\theta(x) \neq x$, pour tout point fermé $x \in \bar{X} := \bar{k} \otimes X$. Alors*

$$0 = \chi(\theta : H_{\text{DR}}^*(X/K)) := \sum_k (-1)^k \text{tr}_K(\theta : H_{\text{DR}}^k(X/K) \rightarrow H_{\text{DR}}^k(X/K)).$$

Quelques notations générales

- $k := \mathbb{F}_q$ où q est une puissance d'un nombre premier p .
- V : anneau de valuation discrète séparé complet d'inégales caractéristiques, d'idéal maximal (π) , de corps résiduel k , et de corps de fractions K avec $\text{car}(K) = 0$.
- \bar{k} et \bar{K} : les clôtures algébriques de k et K respectivement.
- X variété algébrique non singulière sur k , i.e. un schéma lisse, séparé et de type fini sur k . La notation " $x \in X$ " signifiera que x est un point *fermé* de X .
- $X((r)) :=$ points fermés de $\bar{X} := \bar{k} \otimes X$ rationnels sur \mathbb{F}_{q^r} . Le cardinal de $X((r))$ est noté $N(r)$, et même $N(X, r)$ si l'indication de X s'avère nécessaire.
- $G := \langle \theta \rangle$: groupe des automorphismes de X engendré par θ , donc de cardinal L .

Indications pour la preuve du Théorème 1

§ 1) Soit G un groupe fini de cardinal L . Pour tout corps L algébriquement clos de caractéristique, ou bien nulle, ou bien positive et première à L , la catégorie des $L[G]$ -modules de type fini est **semi-simple**. Si le groupe G est de plus cyclique de générateur θ , les $L[G]$ -modules irréductibles sont de dimension 1 et sont donnés par les caractères $\theta^i \mapsto u^i \in L$, où u est une racine L -ième de l'unité.

Ces affirmations sont également vraies sur un anneau intègre L où l'entier L est inversible et où le polynôme $X^L - 1$ est complètement réductible. Plus précisément :

Proposition. *Soit L un entier positif. Soit L un anneau intègre contenant les L racines L -ièmes de l'unité et tel que l'entier L y est inversible. Fixons une racine L -ième primitive de l'unité $u \in L$. Soit $G = \langle \theta \rangle$ un groupe cyclique d'ordre L . Pour tout $L[G]$ -module M (de type fini ou non) et tout $m \in [0, L-1]$, on définit le sous-module des éléments de « poids m » par $M_m := \{v \in M \mid \theta(v) = u^m v\}$. On a alors la décomposition en somme directe*

$$M = M_0 \oplus \cdots \oplus M_{L-1}.$$

Un élément $v \in M$ se exprime donc manière unique sous la forme $v = v_0 + \cdots + v_{L-1}$, avec $v_m \in M_m$. L'élément v_m est la « composante de poids m de v », elle est donnée

*CNRS – Institut de Mathématiques de Jussieu – Université de Paris 7 - Denis Diderot.
 Laboratoire de Théorie des Groupes, Représentations et Applications.
 UFR de Mathématiques de l'Université Paris 7 – Denis Diderot.
 Bâtiment Sophie Germain, bureau 608, Case 7012, 75205. Paris Cedex 13, France.
 Adresse électronique : alberto.arabia@imj-prg.fr

par la formule

$$v_m = \frac{1}{L} \left(1 + \left(\frac{\theta}{\mathbf{u}^m} \right) + \left(\frac{\theta}{\mathbf{u}^m} \right)^2 + \cdots + \left(\frac{\theta}{\mathbf{u}^m} \right)^{L-1} \right) (v).$$

Dans la suite, quitte à faire une extension finie de \mathbf{k} (ce qui ne change pas la validité du Théorème 1, nous supposons que \mathbf{k} et \mathbf{V} contiennent les racines L -ièmes de l'unité. La proposition précédente s'appliquera alors à $\mathbf{L} = \mathbf{k}$ et $\mathbf{L} = \mathbf{V}$ et $\mathbf{L} = \mathbf{K}$.

§2) Représentation régulière gauche de \mathbf{G}

Soit \mathbf{L} un anneau vérifiant les conditions de la Proposition du paragraphe précédent. Pour tout groupe fini \mathbf{G} , soit $\mathbf{L}[\mathbf{G}]$ l'anneau du groupe \mathbf{G} à coefficients dans \mathbf{L} et notons $\{\delta_h \mid h \in \mathbf{G}\}$ sa base canonique. On fait agir \mathbf{G} sur $\mathbf{L}[\mathbf{G}]$ par translations à gauche, *i.e.*, pour $g \in \mathbf{G}$ on pose $g \cdot \delta_h := \delta_{gh}$ pour tout $g \in \mathbf{G}$; c'est la «représentation régulière (gauche) de \mathbf{G} ».

Lemme A

a) Pour tout groupe fini \mathbf{H} et tout $h \in \mathbf{H}$ tel que $h \neq \mathbf{id}$, on a

$$\mathrm{tr}_{\mathbf{K}}(h : \mathbf{L}[\mathbf{H}] \rightarrow \mathbf{L}[\mathbf{H}]) = 0.$$

En particulier, le Théorème 1 est vérifié lorsque $\dim_{\mathbf{k}}(\mathbf{X}) = 0$.

b) Soit \mathbf{G} cyclique d'ordre L et soit \mathbf{M} un $\mathbf{L}[\mathbf{G}]$ -module de type fini. Alors, \mathbf{M} est une somme de représentations régulières si, et seulement si,

$$\dim_{\mathbf{L}}(\mathbf{M}_0) = \dim_{\mathbf{L}}(\mathbf{M}_1) = \cdots = \dim_{\mathbf{L}}(\mathbf{M}_{L-1}),$$

où \mathbf{M}_m est le sous- \mathbf{G} -module de \mathbf{M} des éléments de poids m .

Conclusion :

«Compte tenu de l'assertion (a), nous supposons dans la suite que \mathbf{X} est équidimensionnel de dimension $n \geq 1$.»

§3) Réduction au cas affine

Soit $\mathscr{W} := \{W_1, \dots, W_\alpha\}$ un recouvrement fini de \mathbf{X} par des ouverts affines. Saturons la famille \mathscr{W} par l'action de θ , *i.e.*, posons $W_{i,j} := \theta^j(W_i)$ et soit $\mathscr{U} := \{U_1, \dots, U_\beta\}$ la famille des ouverts $W_{i,j}$ réindexée suivant un ordre linéaire. L'action de θ sur les membres de \mathscr{U} correspond alors à une action sur l'ensemble des indices $\{1, \dots, \beta\}$. Pour tout multi-indice $i_1 i_2 \dots i_k$, avec $i_j \in [1, \dots, \beta]$, notons $\theta_{i_1 i_2 \dots i_k}$ la restriction de θ à l'ouvert $U_{i_1 i_2 \dots i_k} := U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_k}$. On a un isomorphisme

$$\theta_{i_1 i_2 \dots i_k} : U_{i_1 i_2 \dots i_k} \xrightarrow{\simeq} U_{\theta(i_1)\theta(i_2)\dots\theta(i_k)}. \quad (*)$$

Notons $\Omega_{i_1 i_2 \dots i_k}^*$ le complexe de formes différentielles \dagger -adiques de $(U_{i_1 i_2 \dots i_k}/\mathbf{K})$. Le morphisme (*) induit un isomorphisme de complexes

$$\theta_{i_1 i_2 \dots i_k}^* : \Omega_{\theta(i_1)\theta(i_2)\dots\theta(i_k)}^* \longrightarrow \Omega_{i_1 i_2 \dots i_k}^* \quad (**)$$

Soit maintenant

$$\mathbf{0} \rightarrow \Omega^*(\mathbf{X}/\mathbf{K}) \rightarrow \prod_i \Omega_i^* \rightarrow \prod_{i_1 i_2} \Omega_{i_1 i_2}^* \rightarrow \prod_{i_1 i_2 i_3} \Omega_{i_1 i_2 i_3}^* \rightarrow \cdots \quad (\diamond)$$

le bicomplexe de Čech-de Rham associé au recouvrement \mathcal{U} . Les morphismes (***) donnent lieu à un morphisme

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{0} & \longrightarrow & \Omega^*(\mathbf{X}/\mathbf{K}) & \longrightarrow & \prod_i \Omega_i^* & \longrightarrow & \prod_{i_1 i_2} \Omega_{i_1 i_2}^* & \longrightarrow & \prod_{i_1 i_2 i_3} \Omega_{i_1 i_2 i_3}^* & \longrightarrow & \cdots \\ & & \theta^* \downarrow & & \prod_i \theta_i^* \downarrow & & \prod_{i_1 i_2} \theta_{i_1 i_2}^* \downarrow & & \prod_{i_1 i_2 i_3} \theta_{i_1 i_2 i_3}^* \downarrow & & \\ \mathbf{0} & \longrightarrow & \Omega^*(\mathbf{X}/\mathbf{K}) & \longrightarrow & \prod_i \Omega_i^* & \longrightarrow & \prod_{i_1 i_2} \Omega_{i_1 i_2}^* & \longrightarrow & \prod_{i_1 i_2 i_3} \Omega_{i_1 i_2 i_3}^* & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

qui est clairement un morphisme de bicomplexes de Čech-de Rham, et qui définit une action de θ sur les termes successifs (\mathbb{E}_r, d_r) de la suite spectrale de Čech-de Rham associé au bicomplexe (\diamond) ([A-M] § 6.5). Or, le complexe (\mathbb{E}_r, d_r) est de dimension finie sur \mathbf{K} pour tout $r \geq 2$, de sorte que la caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(\theta)$ y est bien définie. Les propriétés usuelles de conservation de cette caractéristique font qu'il suffit que $\chi(\theta)$ soit nulle sur le terme \mathbb{E}_2 pour qu'elle soit nulle sur \mathbb{E}_∞ et donc sur $H_{\text{DR}}^*(\mathbf{X}/\mathbf{K})$. Or, les termes de \mathbb{E}_2 sont les produits finis $\prod_{i_1 i_2 \dots i_k} H_{\text{DR}}^*(U_{i_1 i_2 \dots i_k}/\mathbf{K})$, et nous devons évaluer la caractéristique d'Euler-Poincaré des morphismes :

$$\Theta_k : \prod_{i_1 i_2 \dots i_k} H_{\text{DR}}^*(U_{i_1 i_2 \dots i_k}/\mathbf{K}) \rightarrow \prod_{i_1 i_2 \dots i_k} H_{\text{DR}}^*(U_{i_1 i_2 \dots i_k}/\mathbf{K}),$$

où nous avons noté $\Theta_k := \prod_{i_1 i_2 \dots i_k} \theta_{i_1 i_2 \dots i_k}^*$. En considérant les orbites de l'action de θ sur l'ensemble \mathbb{I}_k de multi-indices non ordonnés $\{i_1 \dots i_k\}$ avec $i_j \in [1, \dots, \beta]$, on décompose les termes de \mathbb{E}_2 suivant l'égalité

$$\prod_{i_1 i_2 \dots i_k} H_{\text{DR}}^*(U_{i_1 i_2 \dots i_k}/\mathbf{K}) = \prod_{I \in \mathbb{I}_k/\mathbf{G}} \left(\prod_{\{i_1 \dots i_k\} \in I} H_{\text{DR}}^*(U_{i_1 \dots i_k}/\mathbf{K}) \right),$$

qui induit la décomposition des morphismes Θ_k :

$$\Theta_k = \prod_{I \in \mathbb{I}_k/\mathbf{G}} \Theta_I, \quad \text{avec} \quad \Theta_I := \prod_{\{i_1 \dots i_k\} \in I} \theta_{i_1 \dots i_k}.$$

Nous sommes ainsi emmenés à considérer pour chaque $I \in \mathbb{I}_k/\mathbf{G}$, le morphisme

$$\Theta_I : \prod_{\{i_1 i_2 \dots i_k\} \in I} H_{\text{DR}}^*(U_{i_1 i_2 \dots i_k}/\mathbf{K}) \rightarrow \prod_{\{i_1 i_2 \dots i_k\} \in I} H_{\text{DR}}^*(U_{i_1 i_2 \dots i_k}/\mathbf{K}).$$

Lorsque $I \in \mathbb{I}_k/\mathbf{G}$ n'est pas une orbite ponctuelle, *i.e.* lorsque $\theta\{i_1 \dots i_k\} \neq \{i_1 \dots i_k\}$, la trace de Θ_I agissant en chaque degré cohomologique i :

$$\Theta_I : \sum_{\{i_1 \dots i_k\} \in I} H_{\text{DR}}^i(U_{i_1 \dots i_k}/\mathbf{K}) \rightarrow \sum_{\{i_1 \dots i_k\} \in I} H_{\text{DR}}^i(U_{i_1 \dots i_k}/\mathbf{K})$$

est déjà nulle, et la caractéristique d'Euler-Poincaré est donc, *a fortiori*, nulle.

Conclusion :

“La nullité de $\chi(\theta : H_{\text{DR}}^*(\mathbf{X}/\mathbf{K}))$ résulte de la nullité de $\chi(\theta : H_{\text{DR}}^*(U_{i_1 \dots i_k}/\mathbf{K}))$ lorsque $\theta\{i_1 \dots i_k\} = \{i_1 \dots i_k\}$, cas où l'ouvert $U_{i_1 \dots i_k}$ est affine et θ -stable.”

On comprend ainsi qu'il suffit de prouver le Théorème 1 pour les variétés affines pour l'avoir en toute généralité.

§ 4) Réduction au cas des actions libres

Dans le Théorème 1, le morphisme θ agit sans point fixe sur \mathbf{X} , mais il est possible que certains des itérés $\theta^s \neq \text{id}$ ne vérifient pas cette condition, autrement dit, il se peut que le groupe $\mathbf{G} := \langle \theta \rangle$ n'agisse pas librement sur \mathbf{X} .

Monsky montre dans la preuve du théorème 6.3 de [Mo], l'existence d'une stratification algébrique de $\overline{\mathbf{X}}$ telle que θ agit librement sur chaque strate. On a donc une partition finie de $\overline{\mathbf{X}}$ en parties localement fermées $\mathbf{Y}_0, \mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_N$ de codimensions dans $\overline{\mathbf{X}}$ respectivement $0 = c_0 < c_1 < \dots < c_N$, telles que \mathbf{Y}_i est une variété non singulière, définie sur une extension finie \mathbf{k}_i de \mathbf{k} , et stable sous θ dont l'action est *libre*.

Quitte à remplacer \mathbf{k} par une extension finie convenable nous pouvons supposer dans ce qui précède que $\mathbf{k}_i = \mathbf{k}$, cela n'affecte pas la validité du Théorème.

Si nous supposons maintenant le Théorème 1 démontré pour toute les variétés affines non singulières sur \mathbf{k} munies d'une action libre, il sera automatiquement vérifié par chaque \mathbf{Y}_i grâce à la conclusion du §(3). Le Théorème est donc vérifié par $U_0 := \mathbf{Y}_0$, et s'il est vérifié par l'un des ouverts $U_i := \mathbf{Y}_0 \cup \dots \cup \mathbf{Y}_i$, on pose $U_{i+1} = U_i \cup \mathbf{Y}_{i+1}$ et à l'aide de la suite exacte longue de Gysin ([A-M] §14.2) pour la paire $(\mathbf{Y}_{i+1} \subseteq U_{i+1})$:

$$\rightarrow H_{\text{DR}}^{\bullet-2\text{codim}_{\mathbf{X}} \mathbf{Y}_{i+1}}(\mathbf{Y}_{i+1}/\mathbf{K}) \rightarrow H_{\text{DR}}^{\bullet}(\mathbf{U}_{i+1}/\mathbf{K}) \rightarrow H_{\text{DR}}^{\bullet}(\mathbf{U}_i/\mathbf{K}) \rightarrow,$$

on conclut que le théorème est aussi vérifié par U_{i+1} , et, par récurrence, par $U_N = \mathbf{X}$.

§5) Comme conséquence de §(3) et §(4), le cas critique à considérer est celui où \mathbf{X} est un schéma affine lisse sur \mathbf{k} , muni d'un automorphisme d'ordre fini L , dont l'action est libre. Nous sommes donc emmenés à prouver théorème suivant.

Théorème 1'. *Soit \mathbf{X} un schéma affine lisse défini sur un corps fini \mathbf{k} de cardinal q . Soit $\theta : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$ un automorphisme d'ordre fini $L \neq 1$, relativement premier à q , tel que le groupe $\mathbf{G} := \langle \theta \rangle$ agit librement sur \mathbf{X} . Alors*

$$0 = \chi(\theta : H_{\text{DR}}^*(\mathbf{X}/\mathbf{K})) := \sum_{\mathbf{k}} (-1)^k \text{tr}_{\mathbf{K}}(\theta : H_{\text{DR}}^k(\mathbf{X}/\mathbf{K}) \rightarrow H_{\text{DR}}^k(\mathbf{X}/\mathbf{K})).$$

§6) Une première équivalence

Notons

- \mathbf{A} l'algèbre des fonctions régulières de \mathbf{X} ;
- $\theta : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}$ l'automorphisme d'ordre $L \neq 1$ de l'énoncé du théorème ;
- $\mathbf{G} := \langle \theta \rangle$ le groupe d'automorphismes de \mathbf{A} engendré par θ .
- $\mathbf{u} \in \mathbf{k}$ (resp. $\mathbf{u} \in \mathbf{V} \subseteq \mathbf{K}$) racine L -ième primitive de 1, fixée une fois pour toutes ;
- \mathbf{A}_m le sous- $\mathbf{k}[\mathbf{G}]$ -module des fonctions de poids m ;
- $\mathcal{F} : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}$, $x \mapsto x^q$, le morphisme de Frobenius relatif à \mathbf{k} .

Comme le groupe \mathbf{G} opère naturellement sur la cohomologie de de Rham \dagger -adique de \mathbf{A} , celle-ci se décompose en sous-espaces de poids :

$$H_{\text{DR}}^*(\mathbf{A}/\mathbf{K}) = H_{\text{DR}}^*(\mathbf{A}/\mathbf{K})_0 \oplus \dots \oplus H_{\text{DR}}^*(\mathbf{A}/\mathbf{K})_{L-1}, \quad (\text{Eq.1})$$

où $H_{\text{DR}}^*(\mathbf{A}/\mathbf{K})_m = h^*(\Omega^*(\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger/\mathbf{K})_{m,d})$ est de dimension finie car \mathbf{K} -sous-espace vectoriel de $H_{\text{DR}}^*(\mathbf{A}/\mathbf{K})$, lui-même de dimension finie.

Notons pour $m = 0, 1, \dots, L-1$:

$$\chi_m(\mathbf{A}) := \sum_k (-1)^k \dim_{\mathbf{K}} (H_{\text{DR}}^k(\mathbf{A}/\mathbf{K})_m),$$

et pour tout morphisme de \mathbf{k} -algèbre $\phi : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}$:

$$\chi(\phi) := \sum_k (-1)^k \text{tr}_{\mathbf{K}} (\phi_* : H_{\text{DR}}^k(\mathbf{A}/\mathbf{K}) \rightarrow H_{\text{DR}}^k(\mathbf{A}/\mathbf{K})).$$

On a alors

$$\begin{pmatrix} \chi(\theta^0) \\ \chi(\theta^1) \\ \chi(\theta^2) \\ \vdots \\ \chi(\theta^{L-1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & (\mathbf{u}) & (\mathbf{u})^2 & \dots & (\mathbf{u})^{L-1} \\ 1 & (\mathbf{u}^2) & (\mathbf{u}^2)^2 & \dots & (\mathbf{u}^2)^{L-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & (\mathbf{u}^{L-1}) & (\mathbf{u}^{L-1})^2 & \dots & (\mathbf{u}^{L-1})^{L-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_0(\mathbf{A}) \\ \chi_1(\mathbf{A}) \\ \chi_2(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \chi_{L-1}(\mathbf{A}) \end{pmatrix} \quad (\text{Eq.2})$$

Où la matrice de Vandermonde, qui à la forme particulière

$$W(\mathbf{u}) := (\mathbf{u}^{(i-1)(j-1)})_{1 \leq i \leq L, 1 \leq j \leq L}, \quad (\text{Eq.3})$$

est inversible d'inverse la matrice $\frac{1}{L}W(\mathbf{v})$ avec $\mathbf{v} := \mathbf{u}^{-1}$. Par conséquent,

$$\begin{pmatrix} \chi_0(\mathbf{A}) \\ \chi_1(\mathbf{A}) \\ \chi_2(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \chi_{L-1}(\mathbf{A}) \end{pmatrix} = \frac{1}{L} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & (\mathbf{v}) & (\mathbf{v})^2 & \dots & (\mathbf{v})^{L-1} \\ 1 & (\mathbf{v}^2) & (\mathbf{v}^2)^2 & \dots & (\mathbf{v}^2)^{L-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & (\mathbf{v}^{L-1}) & (\mathbf{v}^{L-1})^2 & \dots & (\mathbf{v}^{L-1})^{L-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi(\theta^0) \\ \chi(\theta^1) \\ \chi(\theta^2) \\ \vdots \\ \chi(\theta^{L-1}) \end{pmatrix}.$$

On en déduit aussitôt le lemme suivant.

Lemme B. *Sous les hypothèses en cours, les assertions suivantes sont équivalentes.*

- a) $0 = \chi(\theta^1) = \chi(\theta^2) = \dots = \chi(\theta^{L-1});$
- b) $\chi_0(\mathbf{A}) = \chi_1(\mathbf{A}) = \chi_2(\mathbf{A}) = \dots = \chi_{L-1}(\mathbf{A}).$

auquel cas $\chi_m(\mathbf{A}) = \chi(\theta^0)/L$.

Indication. Les sommes $1 + (\mathbf{u}^j) + \dots + (\mathbf{u}^j)^{L-1}$ sont nulles lorsque $j \not\equiv 0 \pmod{L}$, car $(1 + (\mathbf{u}^j) + \dots + (\mathbf{u}^j)^{L-1})(1 - \mathbf{u}^j) = 1 - \mathbf{u}^{jL} = 0$, alors que $(1 - \mathbf{u}^j) \neq 0$. ■

Le dernier lemme affirme que le **Théorème 1'** équivaut au théorème suivant.

Théorème 2. *Sous les hypothèses du Théorème 1', soit*

$$H_{\text{DR}}^*(\mathbf{X}/\mathbf{K}) = H_{\text{DR}}^*(\mathbf{X}/\mathbf{K})_0 \oplus \dots \oplus H_{\text{DR}}^*(\mathbf{X}/\mathbf{K})_{L-1}, \quad (\text{Eq.4})$$

la décomposition de la cohomologie de \mathbf{X} en sous-espaces de poids, et notons pour $m = 0, \dots, L-1$,

$$\chi(H_{\text{DR}}(\mathbf{X}/\mathbf{K})_m) := \sum_k (-1)^k \dim_{\mathbf{K}} (H_{\text{DR}}^k(\mathbf{X}/\mathbf{K})_m).$$

Alors,

$$\begin{cases} \chi(H_{\text{DR}}(\mathbf{X}/\mathbf{K})_0) = \chi(H_{\text{DR}}(\mathbf{X}/\mathbf{K})_1) = \cdots = \chi(H_{\text{DR}}(\mathbf{X}/\mathbf{K})_{L-1}) \\ \chi(H_{\text{DR}}(\mathbf{X}/\mathbf{K})) = L \cdot \chi(H_{\text{DR}}((\mathbf{X}/\mathbf{G})/\mathbf{K})). \end{cases}$$

§7) Commentaire sur le cas $\dim(\mathbf{X}) = 0$

Lorsque $\dim(\mathbf{X}) = 0$, la cohomologie de de Rham \dagger -adique est concentrée en degré 0 et c'est une somme directe de copies de $\mathbf{K}[\mathbf{G}]$, la représentation régulière gauche de \mathbf{G} . Le théorème 2 est alors une simple reformulation de l'assertion (b) du lemme A du paragraphe §(2).

§8) Une deuxième équivalence

Notons suivant [Mo]-§6, pour tous $j = 0, 1, \dots, L-1$ et $r \in \mathbb{N}$ donnés

$$\begin{cases} J(j, r) := \text{idéal de } \mathbf{A} \text{ engendré par les différences } \theta^j(a) - \mathcal{F}^r(a), \text{ où } a \in \mathbf{A}, \\ N(j, r) := \dim_{\mathbf{k}}(\mathbf{A}/J(j, r)), \\ L(j, r) := \sum_{\mathbf{k}} (-1)^{\mathbf{k}} \text{tr}_{\mathbf{K}}(\theta_*^j(q^n \mathcal{F}_*^{-r}) : H_{\text{DR}}^{\mathbf{k}}(\mathbf{A}/\mathbf{K}) \rightarrow H_{\text{DR}}^{\mathbf{k}}(\mathbf{A}/\mathbf{K})), \end{cases}$$

où $n := \dim \mathbf{X}$.

Monsky démontre (*loc. cit.*, §6.1) l'égalité

$$\boxed{N(j, r) = L(j, r)} \quad (\text{Eq.5})$$

avec comme seules hypothèses le fait que \mathbf{A} est lisse équidimensionnelle de dimension n et que \mathbf{G} est fini (de cardinal L quelconque!) opérant librement sur \mathbf{X} .

Dans le paragraphe §(6) nous avons noté, pour chaque poids $m = 0, 1, \dots, L-1$ et pour tout $r \in \mathbb{N}$:

$$\chi_m(\mathcal{F}_*^{-r}) := \sum_{\mathbf{k}} (-1)^{\mathbf{k}} \text{tr}_{\mathbf{K}}(q^n \mathcal{F}_*^{-r} : H_{\text{DR}}^{\mathbf{k}}(\mathbf{A}/\mathbf{K})_m \rightarrow H_{\text{DR}}^{\mathbf{k}}(\mathbf{A}/\mathbf{K})_m).$$

L'égalité de Monsky (Eq.5), s'écrit alors :

$$N(j, r) = L(j, r) := \chi_0(\mathcal{F}_*^{-r}) + (\mathbf{u}^j) \chi_1(\mathcal{F}_*^{-r}) + (\mathbf{u}^j)^2 \chi_2(\mathcal{F}_*^{-r}) + \cdots + (\mathbf{u}^j)^{(L-1)} \chi_{L-1}(\mathcal{F}_*^{-r}),$$

soit

$$\begin{pmatrix} N(0, r) \\ N(1, r) \\ N(2, r) \\ \vdots \\ N(L-1, r) \end{pmatrix} = W(\mathbf{u}) \begin{pmatrix} \chi_0(\mathcal{F}_*^{-r}) \\ \chi_1(\mathcal{F}_*^{-r}) \\ \chi_2(\mathcal{F}_*^{-r}) \\ \vdots \\ \chi_{L-1}(\mathcal{F}_*^{-r}) \end{pmatrix} \quad (\text{Eq.6})$$

où $W(\mathbf{u})$ est a matrice de Vandermonde introduite dans (6)-(Eq.3).

On en déduit l'égalité de séries formelles

$$\begin{pmatrix} \sum_{r \geq 1} N(0, r) \frac{t^r}{r} \\ \sum_{r \geq 1} N(1, r) \frac{t^r}{r} \\ \sum_{r \geq 1} N(2, r) \frac{t^r}{r} \\ \vdots \\ \sum_{r \geq 1} N(L-1, r) \frac{t^r}{r} \end{pmatrix} = W(\mathbf{u}) \begin{pmatrix} \sum_{r \geq 1} \chi_0(\mathcal{F}_*^{-r}) \frac{t^r}{r} \\ \sum_{r \geq 1} \chi_1(\mathcal{F}_*^{-r}) \frac{t^r}{r} \\ \sum_{r \geq 1} \chi_2(\mathcal{F}_*^{-r}) \frac{t^r}{r} \\ \vdots \\ \sum_{r \geq 1} \chi_{L-1}(\mathcal{F}_*^{-r}) \frac{t^r}{r} \end{pmatrix} = W(\mathbf{u}) \begin{pmatrix} \text{Log}(\zeta_0(\mathbf{X}, t)) \\ \text{Log}(\zeta_1(\mathbf{X}, t)) \\ \text{Log}(\zeta_2(\mathbf{X}, t)) \\ \vdots \\ \text{Log}(\zeta_{L-1}(\mathbf{X}, t)) \end{pmatrix}$$

où $\zeta_m(\mathbf{X}, t)$ est la fraction rationnelle de $\mathbf{K}(t)$:

$$\zeta_m(\mathbf{X}, t) := \exp\left(\sum_{r \geq 1} \chi_m(\mathcal{F}_*^{-r}) \frac{t^r}{r}\right) = \frac{\prod_{k \text{ impair}} \det(1 - q^n \mathcal{F}_*^{-1} t : H_{\text{DR}}^k(\mathbf{X}/\mathbf{K})_m)}{\prod_{k \text{ pair}} \det(1 - q^n \mathcal{F}_*^{-1} t : H_{\text{DR}}^k(\mathbf{X}/\mathbf{K})_m)}, \quad (\text{Eq.7})$$

qui participe à la factorisation de la fonction Zêta de \mathbf{X} suivante :

$$\begin{aligned} \zeta(\mathbf{X}, t) &= \exp\left(\sum_{r \geq 1} \chi(q^n \mathcal{F}_*^{-r}) \frac{t^r}{r}\right) \\ &= \exp\left(\sum_{r \geq 1} \chi_0(q^n \mathcal{F}_*^{-r}) \frac{t^r}{r}\right) \times \cdots \times \exp\left(\sum_{r \geq 1} \chi_{L-1}(q^n \mathcal{F}_*^{-r}) \frac{t^r}{r}\right) \\ &= \zeta_0(\mathbf{X}, t) \times \cdots \times \zeta_{L-1}(\mathbf{X}, t). \end{aligned} \quad (\text{Eq.8})$$

Si nous notons maintenant

$$\eta_j(\mathbf{X}, t) := \exp\left(\sum_{r \geq 1} N(j, r) \frac{t^r}{r}\right), \quad (\text{Eq.9})$$

nous avons pour $m, j = 0, \dots, L-1$:

$$\begin{cases} \eta_j(\mathbf{X}, t) = \zeta_0(\mathbf{X}, t) \zeta_1(\mathbf{X}, t)^{u^j} \zeta_2(\mathbf{X}, t)^{u^{2j}} \cdots \zeta_{L-1}(\mathbf{X}, t)^{u^{(L-1)j}} \\ \zeta_m(\mathbf{X}, t)^L = \eta_0(\mathbf{X}, t) \eta_1(\mathbf{X}, t)^{v^m} \eta_2(\mathbf{X}, t)^{v^{2m}} \cdots \eta_{L-1}(\mathbf{X}, t)^{v^{(L-1)m}} \end{cases} \quad (\text{Eq.10})$$

où $\mathbf{v} := \mathbf{u}^{-1}$.

Les séries formelles qui définissent $\zeta_m(\mathbf{X}, t)$ et $\eta_j(\mathbf{X}, t)$ valent 1 pour $t = 0$ et convergent uniformément sur un disque $\mathbb{D}(0, \epsilon) \subseteq \mathbb{C}$ de rayon $\epsilon > 0$, assez petit. Les fonctions $\zeta_m(\mathbf{X}, t)$ et $\eta_j(\mathbf{X}, t)$ sont donc holomorphes sur ce disque, de même que leurs puissances aux exposants complexes \mathbf{u}^* et \mathbf{v}^* , quitte à réduire le rayon ϵ si nécessaire. On sait que les fonctions ζ_m se prolongent en des fonctions rationnelles sur \mathbb{C} de sorte que l'on peut écrire d'une manière unique $\zeta_m(\mathbf{X}, 1/z) = \phi_m(z)/z^d$, où $d \in \mathbb{Z}$ et où $\phi_m(z)$ est holomorphe sur un voisinage de 0 et vérifie $\phi_m(0) \neq 0$. En particulier, pour tout nombre complexe \mathbf{w} , on peut écrire $\zeta_m(\mathbf{X}, z)^{\mathbf{w}} = \phi_m(z)^{\mathbf{w}}/z^{d\mathbf{w}}$, où, si la fonction $\phi_m(z)^{\mathbf{w}}$ n'est pas unique (car elle dépend d'une détermination du Log), le dénominateur $z^{d\mathbf{w}}$ l'est.

Notation. Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, l'exposant « $d\alpha$ » dans l'écriture $\zeta_m(\mathbf{X}, z)^\alpha = \phi_m(z)^\alpha/z^{d\alpha}$, sera appelé l'« ordre à l'infini » de $\zeta_m(\mathbf{X}, t)^\alpha$, on le notera $\text{ord}_\infty(\zeta_m(\mathbf{X}, t)^\alpha)$. Lorsque $\alpha \in \mathbb{Z}$, on a clairement $\text{ord}_\infty(\zeta_m(\mathbf{X}, t)^\alpha) = -\text{deg}(\zeta_m(\mathbf{X}, t)^\alpha)$

Quant aux fonctions $\eta_i(\mathbf{X}, t)$, elles admettent aussi des prolongements analytiques au voisinage de l'infini (pas nécessairement méromorphes) et l'on peut donner un sens

aux nombres $\text{ord}_\infty(\eta_j(\mathbf{X}, t))$ tout comme pour les fonctions $\zeta_m(\mathbf{X}, t)$. En procédant ainsi, les formules (Eq.10) donnent

$$\begin{cases} \text{ord}_\infty(\eta_j(\mathbf{X}, t)) = \sum_{m=0, \dots, L-1} \mathbf{u}^{mj} \text{ord}_\infty(\zeta_m(\mathbf{X}, t)) \\ L \cdot \text{ord}_\infty(\zeta_m(\mathbf{X}, t)) = \sum_{j=0, \dots, L-1} \mathbf{v}^{mj} \text{ord}_\infty(\eta_j(\mathbf{X}, t)) \end{cases}$$

et comme d'autre part $\text{ord}_\infty(\zeta_m(\mathbf{X}, t)) = \chi_m(\mathbf{X})$, on obtient le système

$$\begin{cases} \text{ord}_\infty(\eta_j(\mathbf{X}, t)) = \sum_{m=0, \dots, L-1} \mathbf{u}^{mj} \chi_m(\mathbf{X}) \\ L \cdot \chi_m(\mathbf{X}) = \sum_{j=0, \dots, L-1} \mathbf{v}^{mj} \text{ord}_\infty(\eta_j(\mathbf{X}, t)) \end{cases} \quad (\text{Eq.11})$$

dont on déduit aussitôt le lemme suivant.

Lemme C. *Il y a équivalence entre*

- a) $\chi_0(\mathbf{X}) = \chi_1(\mathbf{X}) = \dots = \chi_{L-1}(\mathbf{X})$;
- b) $\deg(\zeta_0(\mathbf{X}, t)) = \deg(\zeta_1(\mathbf{X}, t)) = \deg(\zeta_2(\mathbf{X}, t)) = \dots = \deg(\zeta_{L-1}(\mathbf{X}, t))$;
- c) $0 = \text{ord}_\infty(\eta_1(\mathbf{X}, t)) = \text{ord}_\infty(\eta_2(\mathbf{X}, t)) = \dots = \text{ord}_\infty(\eta_{L-1}(\mathbf{X}, t))$.

Ce lemme affirme donc que le **Théorème 2** équivaut au théorème suivant.

Théorème 3. *Sous les hypothèses du Théorème 1', posons pour $j = 1, \dots, L-1$*

$$\eta_j(\mathbf{X}, t) := \exp\left(\sum_{r \geq 1} N(j, r) \frac{t^r}{r}\right),$$

Alors,

$$0 = \text{ord}_\infty(\eta_1(\mathbf{X}, t)) = \text{ord}_\infty(\eta_2(\mathbf{X}, t)) = \dots = \text{ord}_\infty(\eta_{L-1}(\mathbf{X}, t))$$

§9) **À propos des fonctions $\zeta_m(\mathbf{X}, t)$.** Leur définition dans le paragraphe précédent (Eq.7), à savoir,

$$\zeta_m(\mathbf{X}, t) := \exp\left(\sum_{r \geq 1} \chi_m(\mathcal{F}_*^{-r}) \frac{t^r}{r}\right) = \frac{\prod_{k \text{ impair}} \det(1 - q^n \mathcal{F}_*^{-1} t : H_{\text{DR}}^k(\mathbf{X}/\mathbf{K})_m)}{\prod_{k \text{ pair}} \det(1 - q^n \mathcal{F}_*^{-1} t : H_{\text{DR}}^k(\mathbf{X}/\mathbf{K})_m)}, \quad (\text{Eq.12})$$

les fait apparaître d'emblée comme fraction rationnelle de $\mathbf{K}(t)$, mais, d'autre part, en inversant l'égalité (Eq.6), on a

$$\begin{pmatrix} \chi_0(\mathcal{F}_*^{-r}) \\ \chi_1(\mathcal{F}_*^{-r}) \\ \chi_2(\mathcal{F}_*^{-r}) \\ \vdots \\ \chi_{L-1}(\mathcal{F}_*^{-r}) \end{pmatrix} = \frac{1}{L} W(\mathbf{v}) \begin{pmatrix} N(0, r) \\ N(1, r) \\ N(2, r) \\ \vdots \\ N(L-1, r) \end{pmatrix} \quad (\text{Eq.13})$$

où $\mathbf{v} = \mathbf{u}^{-1}$ et $N(j, r) \in \mathbb{N}$ ⁽¹⁾, et alors

$$\zeta_m(\mathbf{X}, t) = \exp\left(\sum_{j=0, \dots, L-1} \mathbf{v}^j \left(\sum_{r \geq 1} \frac{N(j, r)}{L} \frac{t^r}{r}\right)\right), \quad (\text{Eq.14})$$

¹ En fait, $N(j, r) \in L \cdot \mathbb{N}$ puisque \mathbf{G} opère librement sur \mathbf{X}

de sorte que $\zeta_m(\mathbf{X}, t) \in \mathbb{Q}[\mathbf{u}][[t]]$, où $\mathbb{Q}[\mathbf{u}]$ désigne le sous-corps de \mathbb{C} de décomposition de $X^L - 1$.

Lemme D. *On a $\zeta_m(\mathbf{X}, t) \in \mathbb{Z}[\mathbf{u}](t)$.*

Preuve. On applique le critère de rationalité des déterminants de Hankel à la série formelle (Eq.14) dont les coefficients appartiennent clairement à $\mathbb{Q}[\mathbf{u}]$. ■

§ 10) La stratégie à suivre

Nous allons montrer que l'ordre à l'infini des fractions rationnelles $\zeta_m(\mathbf{X}, t)/\zeta_0(\mathbf{X}, t)$ est toujours nul, ce qui équivaut à prouver le Théorème 2 (donc 1' et 3).

Pour ce faire, on va s'aider de l'égalité (Eq.13), qui nous donne

$$\begin{pmatrix} \text{Log}(\zeta_0(\mathbf{X}, t)) \\ \text{Log}(\zeta_1(\mathbf{X}, t)) \\ \text{Log}(\zeta_2(\mathbf{X}, t)) \\ \vdots \\ \text{Log}(\zeta_{L-1}(\mathbf{X}, t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{r \geq 1} \chi_0(\mathcal{F}_*^{-r}) \frac{t^r}{r} \\ \sum_{r \geq 1} \chi_1(\mathcal{F}_*^{-r}) \frac{t^r}{r} \\ \sum_{r \geq 1} \chi_2(\mathcal{F}_*^{-r}) \frac{t^r}{r} \\ \vdots \\ \sum_{r \geq 1} \chi_{L-1}(\mathcal{F}_*^{-r}) \frac{t^r}{r} \end{pmatrix} = \frac{1}{L} W(\mathbf{v}) \begin{pmatrix} \sum_{r \geq 1} N(0, r) \frac{t^r}{r} \\ \sum_{r \geq 1} N(1, r) \frac{t^r}{r} \\ \sum_{r \geq 1} N(2, r) \frac{t^r}{r} \\ \vdots \\ \sum_{r \geq 1} N(L-1, r) \frac{t^r}{r} \end{pmatrix}, \quad (\text{Eq.15})$$

où $\mathbf{v} = \mathbf{u}^{-1}$ et où $N(j, r)$ est le cardinal de l'ensemble

$$\mathbf{X}(j, r) := \{x \in \overline{\mathbf{X}} \mid \theta^j(x) = \mathcal{F}^r(x)\}.$$

Dans le paragraphe § 12, nous allons faire un décompte différent des nombres $N(j, r)$ donnant lieu dans le paragraphe (13), à une décomposition canonique des séries $\sum_{r \geq 1} \chi_m(\mathcal{F}_*^{-r}) \frac{t^r}{r}$ comme somme infinie de séries $-\text{Log}(1 - \mathbf{u}^* t^d)$ avec $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, mais où seulement un nombre fini de telles séries intervient pour un d donné (cf. paragraphe § 14, lemme G). Ce même lemme donnera des décompositions eulériennes explicites des fonctions rationnelles $\zeta_m(\mathbf{X}, t)$, qui permettront ensuite, dans le paragraphe § 17, l'étude des quotients $\zeta_m(\mathbf{X}, t)/\zeta_0(\mathbf{X}, t)$.

§ 11) Les $\mathbf{G} \times \mathcal{F}$ -orbites

Le morphisme de Frobenius \mathcal{F} est bijectif sur l'ensemble des points fermés de $\overline{\mathbf{X}}$, ses orbites seront appelées les « \mathcal{F} -orbites». On note $\mathbf{X}((r))$ l'ensemble des points fermés de $\overline{\mathbf{X}}$ fixés par \mathcal{F}^r , on a $\overline{\mathbf{X}} = \bigcup_{r \geq 1} \mathbf{X}((r))$. Les cardinaux des \mathcal{F} -orbites dans $\mathbf{X}((r))$ sont donc des diviseurs de r . La \mathcal{F} -orbite contenant $x \in \overline{\mathbf{X}}$ sera notée $\langle \mathcal{F} \rangle \cdot x$.

Le groupe \mathbf{G} agit *librement* sur l'ensemble des points fermés de $\overline{\mathbf{X}}$. Ses orbites, les « \mathbf{G} -orbites», sont de cardinal $L := |\mathbf{G}|$.

Une « $\mathbf{G} \times \mathcal{F}$ -orbite» est un ensemble de points fermés de $\overline{\mathbf{X}}$ non vide, stable sous l'action de \mathbf{G} et de \mathcal{F} et minimal pour ces propriétés. La $\mathbf{G} \times \mathcal{F}$ -orbite contenant $x \in \overline{\mathbf{X}}$ sera notée $\langle \mathbf{G} \times \mathcal{F} \rangle \cdot x$. Comme l'action de \mathbf{G} commute à celle de \mathcal{F} , le groupe \mathbf{G} opère sur l'ensemble des \mathcal{F} -orbites et vice-versa. Il est alors clair que la donnée d'une $\mathbf{G} \times \mathcal{F}$ -orbite est équivalente à la donnée d'une \mathcal{F} -orbite saturée par l'action de \mathbf{G} , c'est donc l'ensemble des points sous-jacents à la \mathbf{G} -orbite d'une \mathcal{F} -orbite.

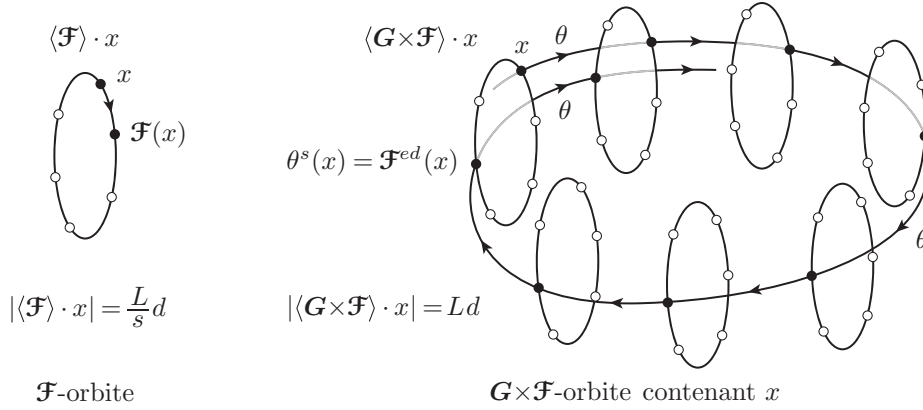
Soit \mathcal{O} une \mathcal{F} -orbite. On a $\text{Stab}_{\mathbf{G}}(\mathcal{O}) = \langle \theta^s \rangle$ pour un unique diviseur s de L , et comme $\langle \theta^s \rangle$ opère librement sur \mathcal{O} , on a $|\mathcal{O}| = \frac{L}{s} d$ pour un unique $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Supposons $s \neq L$. Pour chaque $x \in \mathcal{O}$, il existe un unique $\epsilon_x = 0, \dots, \frac{L}{s}d - 1$, tel que $\theta^s(x) = \mathcal{F}^{\epsilon_x}(x)$. On a $\epsilon_x \neq 0$ puisque $\theta^s(x) \neq x$, et l'on a aussi $\epsilon_x = \epsilon_{\mathcal{F}(x)}$, de sorte que le nombre ϵ_x est indépendant de $x \in \mathcal{O}$, notons-le ϵ . Alors, $\mathcal{F}^\epsilon = \theta^s$ sur \mathcal{O} et \mathcal{F}^ϵ est d'ordre $\frac{L}{s}$, donc $\epsilon = ed$ pour un unique $e \in \{1, \dots, \frac{L}{s} - 1\}$ relativement premier à $\frac{L}{s}$. On a ainsi associé à la \mathcal{F} -orbite \mathcal{O} le triplet (s, e, d) . Enfin, on a

$$\mathbf{G} \cdot \mathcal{O} = \mathcal{O} \amalg \theta(\mathcal{O}) \amalg \dots \amalg \theta^{s-1}(\mathcal{O}),$$

où les \mathcal{F} -orbites $\theta^i(\mathcal{O})$ ont toutes le même triplet (s, e, d) associé. L'ensemble $\mathbf{G} \cdot \mathcal{O}$, dont le cardinal est Ld , est une $\mathbf{G} \times \mathcal{F}$ -orbite, elle sera dite « de type (s, e, d) ».

Lorsque $s = L$, les \mathcal{F} -orbites $\mathcal{O}, \theta(\mathcal{O}), \dots, \theta^{L-1}(\mathcal{O})$ sont deux à deux disjointes et l'équation $\theta^L(x) = \mathcal{F}^f(x)$ admet comme solution $f = 0$, on a donc $(s, e, d) = (L, 0, d)$. L'ensemble $\mathbf{G} \cdot \mathcal{O}$, de cardinal Ld , est une $\mathbf{G} \times \mathcal{F}$ -orbite « de type $(L, 0, d)$ ».



Définitions. Un triplet d'entiers naturels (s, e, d) où

$$\begin{cases} s \in \{1, \dots, L\} \text{ est un diviseur de } L; \\ e \in \{0, 1, \dots, \frac{L}{s}\} \text{ est } \begin{cases} 0, & \text{si } s = L \\ \neq 0 \text{ et relativement premier à } \frac{L}{s}, & \text{si } s \neq L \end{cases} \\ d \text{ est un entier positif;} \end{cases}$$

est un « type de $\mathbf{G} \times \mathcal{F}$ -orbite ». On notera $\mathbf{X}(s, e, d)$ l'ensemble des points de $\overline{\mathbf{X}}$ qui appartiennent à des $\mathbf{G} \times \mathcal{F}$ -orbites de type (s, e, d) , et $N(s, e, d) := |\mathbf{X}(s, e, d)|$.

Lemme E

- Deux $\mathbf{G} \times \mathcal{F}$ -orbites dans $\overline{\mathbf{X}}$ sont isomorphes en tant que $\mathbf{G} \times \mathcal{F}$ -ensembles si, et seulement si, elles ont le même type. En particulier, $\mathbf{X}(s, e, d) \cap \mathbf{X}(s', e', d') = \emptyset$ si $(s, e, d) \neq (s', e', d')$.
- L'ensemble $\mathbf{X}(s, e, d)$ est une réunion finie de $\mathbf{G} \times \mathcal{F}$ -orbites. Ces orbites sont de cardinal égal à Ld . On a $\mathbf{X}(s, e, d) \subseteq \mathbf{X}(\frac{L}{s}d)$ et $N(s, e, d) \leq N(\frac{L}{s}d) < \infty$.
- Pour tous $j = 1, \dots, L-1$, et $r \geq 1$, l'ensemble $\mathbf{X}(j, r)$ est une réunion disjointe d'ensembles $\mathbf{X}(s, e, d)$ avec $s \neq L$. Les conditions suivantes sont équivalentes

$$(i) \mathbf{X}(s, e, d) \subseteq \mathbf{X}(j, r), \quad \text{et} \quad (ii) s \div j \text{ et } r \in d(e\frac{j}{s} + \frac{L}{s}\mathbb{Z}).$$

d) On a aussi

- i) $\mathbf{X}(s, e, d) \subseteq \overline{\mathbf{X}}(as, (ea + \frac{L}{s})d)$, pour tout (s, e, d) et tout $a \in \mathbb{N}$;
- ii) $\coprod_{\text{finie}} \left\{ \mathbf{X}(s, e, d) \mid \frac{L}{s}d \div r \right\} = \mathbf{X}(0, r) = \overline{\mathbf{X}}(r)$;
- iii) $\coprod_{\text{finie}} \left\{ \mathbf{X}(s, e, d) \mid s \div j, r = de \frac{j}{s} \pmod{d \frac{L}{s}} \right\} = \mathbf{X}(j, r)$, pour $j = 1, \dots, L-1$;
- iv) $\coprod \left\{ \mathbf{X}(s, e, d) \mid s \neq L \right\} = \cup \left\{ \mathbf{X}(j, r) \mid j \neq 0 \right\}$ et $\coprod \left\{ \mathbf{X}(s, e, d) \right\} = \overline{\mathbf{X}}$.

où “ \coprod_{finie} ” indique que la famille d'ensembles concernée est une partition finie.

Indications

a,b) Clairs.

c) Un point $x \in \mathbf{X}(j, r)$ vérifie $\theta^j(x) = \mathcal{F}^r(r)$, de sorte que la \mathcal{F} -orbite $\langle \mathcal{F} \rangle \cdot x$ est stabilisée par θ^j qui est $\neq \text{id}$ par hypothèse. Il s'ensuit que $\langle \mathbf{G} \times \mathcal{F} \rangle \cdot x$ est d'un certain type (s, e, d) avec $s \neq L$ mais aussi avec $s \div j$ puisque $\theta^j \in \text{Stab}_{\mathbf{G}}(\langle \mathcal{F} \rangle \cdot x) = \langle \theta^s \rangle$. Or, de l'égalité $\theta^s(x) = \mathcal{F}^{(e+\lambda \frac{L}{s})d}$, on déduit

$$\theta^j(x) = \mathcal{F}^{(e \frac{j}{s} + \lambda \frac{L}{s})d},$$

ce qui justifie l'équivalence $(\mathbf{X}(s, e, d) \subseteq \mathbf{X}(j, r)) \Leftrightarrow (s \div j \text{ et } r \in d(e \frac{j}{s} + \frac{L}{s} \mathbb{Z}))$.

d) Résultent d'appliquer (c). ■

§12) **Recomposition des séries** $\sum_{r \geq 1} \mathbf{N}(j, r) t^r / r$. Le lemme **E**, notamment par l'assertion (c) et par les partitions (d)-(ii)(iii), donne une nouvelle approche pour des nombres $N(j, r)$. Il permet aussitôt la réécriture suivante

$$\begin{cases} \sum_{r \geq 1} N(0, r) \frac{t^r}{r} = \sum_{(s, e, d)} \left(N(s, e, d) \sum_{\lambda \geq 1} \frac{t^{\frac{L}{s} \lambda}}{d \frac{L}{s} \lambda} \right), \\ \sum_{r \geq 1} N(j, r) \frac{t^r}{r} = \sum_{\substack{(s, e, d) \\ s \div j}} \left(N(s, e, d) \sum_{\lambda \geq 0} \frac{t^{d(e \frac{j}{s} + \frac{L}{s} \lambda)}}{d(e \frac{j}{s} + \frac{L}{s} \lambda)} \right), \forall j \in \{s, 2s, \dots, (\frac{L}{s} - 1)s\}. \end{cases} \quad (\text{Eq.16})$$

Il est important de souligner que dans les membres de droite de cette égalité, chacun des monômes $t^{d \frac{L}{s} \lambda}$ et $t^{d(e \frac{j}{s} + \frac{L}{s} \lambda)}$ apparaît uniquement dans un nombre **fini** de termes (s, e, d) d'après la finitude des partitions (d)-(ii)(iii), ceci justifie que l'égalité en question a bien un sens dans $\mathbb{Q}[[t]]$.

Lemme F. Pour tout type de $\mathbf{G} \times \mathcal{F}$ -orbite (s, e, d) , notons

$$\begin{cases} S(s, e, d)_0 := \sum_{\lambda \geq 1} \frac{t^{d \frac{L}{s} \lambda}}{d \frac{L}{s} \lambda}, \\ S(s, e, d)_j := \sum_{\lambda \geq 0} \frac{t^{d(e \frac{j}{s} + \frac{L}{s} \lambda)}}{d(e \frac{j}{s} + \frac{L}{s} \lambda)}, \text{ si } j \in \{s, 2s, \dots, (\frac{L}{s} - 1)s\} \\ S(s, e, d)_j := 0, \text{ si } j \neq 0 \pmod{s} \end{cases}$$

Alors, suite à la définition (Eq.9), on a

$$\begin{pmatrix} \eta_0(\mathbf{X}, t) \\ \eta_1(\mathbf{X}, t) \\ \eta_2(\mathbf{X}, t) \\ \vdots \\ \eta_{L-1}(\mathbf{X}, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{r \geq 1} N(0, r) \frac{t^r}{r} \\ \sum_{r \geq 1} N(1, r) \frac{t^r}{r} \\ \sum_{r \geq 1} N(2, r) \frac{t^r}{r} \\ \vdots \\ \sum_{r \geq 1} N(L-1, r) \frac{t^r}{r} \end{pmatrix} = \sum_{(s, e, d)} N(s, e, d) \begin{pmatrix} S(s, e, d)_0 \\ S(s, e, d)_1 \\ S(s, e, d)_2 \\ \vdots \\ S(s, e, d)_{L-1} \end{pmatrix}. \quad (\text{Eq.17})$$

§ 13) Étude des termes des séries $S(s, e, d)_j$

Pour toute racine Ld -ième primitive de 1, notée \mathbf{w} , l'élément \mathbf{w}^{-sed} est une racine $\frac{L}{s}$ -ième primitive de 1. On choisit alors \mathbf{w} telle que

$$\boxed{\mathbf{w}^{-sed} = \mathbf{u}^s} \quad (\text{Eq.18})$$

On a

$$1 + (\mathbf{w}^{1 \cdot s})^{(r - de \frac{j}{s})} + (\mathbf{w}^{2 \cdot s})^{(r - de \frac{j}{s})} + \dots + (\mathbf{w}^{(d \frac{L}{s} - 1) \cdot s})^{(r - de \frac{j}{s})} = \begin{cases} d \frac{L}{s}, & \text{si } r = de \frac{j}{s} \pmod{d \frac{L}{s}}, \\ 0, & \text{si non,} \end{cases}$$

de sorte que, quel que soit j , nul ou non, nous avons :

$$\begin{aligned} d \frac{L}{s} S(s, e, d)_j &= \sum_{r \geq 1} \sum_{a=0}^{d \frac{L}{s} - 1} (\mathbf{w}^{as})^{(r - de \frac{j}{s})} \frac{t^r}{r} = \sum_{r \geq 1} \sum_{a=0}^{d \frac{L}{s} - 1} \mathbf{w}^{a(-sde) \frac{j}{s}} \frac{(\mathbf{w}^{ast})^r}{r} \\ &= \sum_{a=0}^{d \frac{L}{s} - 1} \left(\mathbf{u}^{aj} \sum_{r \geq 1} \frac{(\mathbf{w}^{ast})^r}{r} \right), \end{aligned}$$

grâce au choix de \mathbf{w} . On a donc

$$d \frac{L}{s} \begin{pmatrix} S(s, e, d)_{0 \cdot s} \\ S(s, e, d)_{1 \cdot s} \\ \vdots \\ S(s, e, d)_{(\frac{L}{s} - 1) \cdot s} \end{pmatrix} = \underbrace{\left(W(\mathbf{u}^s) \mid \dots \mid W(\mathbf{u}^s) \right)}_{d \text{ colonnes de blocs } \frac{L}{s} \times \frac{L}{s}} \begin{pmatrix} \sum_{r \geq 1} \frac{(\mathbf{w}^{0 \cdot s t})^r}{r} \\ \sum_{r \geq 1} \frac{(\mathbf{w}^{1 \cdot s t})^r}{r} \\ \vdots \\ \sum_{r \geq 1} \frac{(\mathbf{w}^{(d \frac{L}{s} - 1) \cdot s t})^r}{r} \end{pmatrix} \quad (\text{Eq.19})$$

où $W(\mathbf{u}^s)$ désigne la matrice de Vandermonde (Eq.3) de $\frac{L}{s} \times \frac{L}{s}$ lignes et colonnes :

$$W(\mathbf{u}^s) := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & (\mathbf{u}^s) & (\mathbf{u}^s)^2 & \dots & (\mathbf{u}^s)^{\frac{L}{s} - 1} \\ 1 & (\mathbf{u}^{2s}) & (\mathbf{u}^{2s})^2 & \dots & (\mathbf{u}^{2s})^{\frac{L}{s} - 1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & (\mathbf{u}^{(\frac{L}{s} - 1)s}) & (\mathbf{u}^{(\frac{L}{s} - 1)s})^2 & \dots & (\mathbf{u}^{(\frac{L}{s} - 1)s})^{\frac{L}{s} - 1} \end{pmatrix} \quad (\text{Eq.20})$$

§ 14) Décomposition eulérienne des fonctions $\zeta_m(\mathbf{X}, t)$

Il s'agit maintenant d'expliciter l'égalité (Eq.15) au vu de la recomposition (Eq.17) (lemme **F**), ce qui nous emmène à considérer l'égalité

$$\begin{pmatrix} \sum_{r \geq 1} \chi_0(\mathcal{F}_*^{-r}) \frac{t^r}{r} \\ \sum_{r \geq 1} \chi_1(\mathcal{F}_*^{-r}) \frac{t^r}{r} \\ \sum_{r \geq 1} \chi_2(\mathcal{F}_*^{-r}) \frac{t^r}{r} \\ \vdots \\ \sum_{r \geq 1} \chi_{L-1}(\mathcal{F}_*^{-r}) \frac{t^r}{r} \end{pmatrix} = \sum_{s \div L} \sum_{(s,e,d)} N(s,e,d) \frac{1}{L} W(\mathbf{v}) \begin{pmatrix} S(s,e,d)_0 \\ S(s,e,d)_1 \\ S(s,e,d)_2 \\ \vdots \\ S(s,e,d)_{L-1} \end{pmatrix} \quad (\text{Eq.21})$$

où l'on voit apparaître les séries $S(s,e,d)$ avec tous les indices $i \in \{0, \dots, L-1\}$, alors que par la définition dans lemme **F**, on a

$$S(s,e,d)_i = 0, \text{ si } i \neq 0 \pmod{s}.$$

En enlevant ces termes parasites, l'égalité (Eq.21) se réécrit sous la forme

$$\begin{pmatrix} \sum_{r \geq 1} \chi_0(\mathcal{F}_*^{-r}) \frac{t^r}{r} \\ \sum_{r \geq 1} \chi_1(\mathcal{F}_*^{-r}) \frac{t^r}{r} \\ \sum_{r \geq 1} \chi_2(\mathcal{F}_*^{-r}) \frac{t^r}{r} \\ \vdots \\ \sum_{r \geq 1} \chi_{L-1}(\mathcal{F}_*^{-r}) \frac{t^r}{r} \end{pmatrix} = \sum_{s \div L} \sum_{(s,e,d)} N(s,e,d) \frac{1}{L} \underbrace{\begin{pmatrix} W(\mathbf{v}^s) \\ \vdots \\ W(\mathbf{v}^s) \end{pmatrix}}_{s \text{ lignes de blocs } \frac{L}{s} \times \frac{L}{s}} \begin{pmatrix} S(s,e,d)_{0..s} \\ S(s,e,d)_{1..s} \\ \vdots \\ S(s,e,d)_{(\frac{L}{s}-1)..s} \end{pmatrix} \quad (\text{Eq.22})$$

où $\mathbf{v} = \mathbf{u}^{-1}$ et $W(\mathbf{v}^s)$ est l'analogie de $W(\mathbf{u}^s)$ (Eq.20) et vérifie

$$W(\mathbf{v}^s)W(\mathbf{u}^s) = \frac{L}{s} \mathbf{id}_{\frac{L}{s}},$$

de sorte que si nous reportons l'égalité (Eq.19) dans (Eq.22), on obtient

$$\begin{pmatrix} \sum_{r \geq 1} \chi_0(\mathcal{F}_*^{-r}) \frac{t^r}{r} \\ \sum_{r \geq 1} \chi_1(\mathcal{F}_*^{-r}) \frac{t^r}{r} \\ \sum_{r \geq 1} \chi_2(\mathcal{F}_*^{-r}) \frac{t^r}{r} \\ \vdots \\ \sum_{r \geq 1} \chi_{L-1}(\mathcal{F}_*^{-r}) \frac{t^r}{r} \end{pmatrix} = \sum_{s \div L} \sum_{(s,e,d)} \frac{N(s,e,d)}{Ld} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{id}_{\frac{L}{s}} & & & & \mathbf{id}_{\frac{L}{s}} \\ \vdots & \dots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{id}_{\frac{L}{s}} & & & & \mathbf{id}_{\frac{L}{s}} \end{pmatrix}}_{s \text{ lignes et } d \text{ colonnes de blocs } \frac{L}{s} \times \frac{L}{s}} \begin{pmatrix} \sum_{r \geq 1} \frac{(w^{0..s}t)^r}{r} \\ \sum_{r \geq 1} \frac{(w^{1..s}t)^r}{r} \\ \vdots \\ \sum_{r \geq 1} \frac{(w^{(d\frac{L}{s}-1)..s}t)^r}{r} \end{pmatrix} \quad (\text{Eq.23})$$

où les nombres $N(s,e,d)/Ld$ sont entiers d'après lemme **E**-(b).

Ces calculs donnent le développement eulérien des fonctions $\zeta_m(\mathbf{X}, t)$, à savoir :

Lemme G. Pour $m = 0, \dots, L-1$, on a

$$\sum_{r \geq 1} \chi_m(\mathcal{F}_*^{-r}) \frac{t^r}{r} = \sum_{(s,e,d)} \text{Log} \left(\left(\frac{1}{1 - \mathbf{u}^{s f m} t d} \right)^{\frac{N(s,e,d)}{Ld}} \right);$$

et le développement eulérien au voisinage de $t = 0$:

$$\zeta_m(\mathbf{X}, t) = \prod_{(s,e,d)} \left(\frac{1}{1 - \mathbf{u}^{s f m} t d} \right)^{\frac{N(s,e,d)}{Ld}} \quad (\text{Eq.24})$$

où nous avons posé $f = -e^{-1} \pmod{\frac{L}{s}}$, et où les indices (s, e, d) parcourent l'ensemble de tous les types de $\mathbf{G} \times \mathcal{F}$ -orbites de $\bar{\mathbf{X}}$.

Preuve. En appliquant la formule (Eq.23), on a pour chaque m donné

$$\begin{aligned} \sum_{r \geq 1} \chi_m(\mathcal{F}_*^{-r}) \frac{t^r}{r} &= \sum_{s \div L} \sum_{(s, e, d)} \frac{N(s, e, d)}{Ld} \sum_{a=0}^{d-1} \sum_{r \geq 1} \mathbf{w}^{rLa} \frac{(\mathbf{w}^{(m \pmod{\frac{L}{s}})s} t)^r}{r} \\ &= \sum_{s \div L} \sum_{(s, e, d)} \frac{N(s, e, d)}{Ld} \left(\sum_{a=0}^{d-1} \mathbf{w}^{rLa} \right) \sum_{r \geq 1} \frac{(\mathbf{w}^{(m \pmod{\frac{L}{s}})s} t)^r}{r} \\ &= \sum_{(s, e, d)} \frac{N(s, e, d)}{Ld} \frac{(\mathbf{w}^{ms} t)^{dr}}{r} = \sum_{(s, e, d)} \text{Log} \left(\left(\frac{1}{1 - \mathbf{w}^{msd} t^d} \right)^{\frac{N(s, e, d)}{Ld}} \right) \end{aligned}$$

où $\mathbf{w}^{msd} = \mathbf{w}^{(-sed)(-e^{-1}m)} = \mathbf{u}^{sf}$, d'après nos conventions (cf. (Eq.18)). \blacksquare

§ 15) Rapport eulérien entre $\zeta(\mathbf{X}, t)$ et $\zeta_0(\mathbf{X}, t)$

Ce paragraphe n'est pas indispensable pour la preuve des théorèmes, mais il trouve sa place naturelle à cet endroit. Il s'agit de comprendre le rapport entre les fonctions Zêta de \mathbf{X} et de \mathbf{X}/\mathbf{G} , dont le lemme **B** nous indiquait déjà que le degré de la première devrait être L -fois celui de la seconde. Notons $\pi : \bar{\mathbf{X}} \rightarrow \bar{\mathbf{X}}/\mathbf{G}$ la projection canonique. Il est clair que l'on a $\mathbf{X}((r)) \subseteq \pi^{-1}(\mathbf{X}/\mathbf{G}((r)))$, mais la réciproque n'a aucune raison, à priori, d'être vérifiée.

Lemme H. Avec les notations en cours.

a) On a
$$\pi^{-1}((\mathbf{X}/\mathbf{G})((r))) = \mathbf{X}((r)) \coprod \left(\coprod_{d \div r, \frac{L}{s} \neq \frac{r}{d}} \mathbf{X}(s, e, d) \right),$$

et donc
$$L \cdot N(\mathbf{X}/\mathbf{G}, r) = N(\mathbf{X}, r) + \sum_{\substack{(s, e, d) \\ d \div r, \frac{L}{s} d \neq r}} N(s, e, d).$$

b) On a le développement eulérien au voisinage de $t = 0$:

$$\boxed{\frac{\zeta(\mathbf{X}, t)}{\zeta(\mathbf{X}/\mathbf{G}, t)^L} = \prod_{(s, e, d)} \left(\frac{(1 - t^{\frac{L}{s}d})^s}{(1 - t^d)^L} \right)^{\frac{N(s, e, d)}{Ld}}} \quad (\text{Eq.25})$$

où le produit peut évidemment se limiter aux types (s, e, d) tels que $s \neq L$.

Preuve

a) Soit $y \in \mathbf{X}/\mathbf{G}$, vérifiant $\mathcal{F}^r(y) = y$. L'ensemble $\pi^{-1}(y)$ est alors stable sous l'action de \mathbf{G} est de \mathcal{F} , c'est donc une réunion de $\mathbf{G} \times \mathcal{F}$ -orbites. Si maintenant $\langle \mathbf{G} \times \mathcal{F} \rangle \cdot x \subseteq \pi^{-1}(y)$, l'égalité $\mathcal{F}^{aed + \lambda \frac{L}{s}d}(x) = \theta^{as}(x)$, pour tout $a \in \mathbb{Z}$, donne l'ensemble de toutes les solutions à l'équation $\mathcal{F}^\alpha(x) = \theta^\beta(x)$. Ainsi, la condition nécessaire et suffisante pour avoir $\mathcal{F}^r(y) = y$ est que r soit de la forme $aed + \lambda \frac{L}{s}d$, donc

$$d \div r, \quad \text{et} \quad \frac{r}{d} = ae \pmod{\frac{L}{s}} \text{ pour un certain } a \in \mathbb{Z},$$

où la deuxième condition est toujours vérifiée. Par conséquent,

$$\pi^{-1}(\mathbf{X}/\mathbf{G})((r)) = \coprod_{d \div r} \mathbf{X}(s, e, d)$$

Or, $\mathbf{X}(s, e, d) \subseteq \overline{\mathbf{X}}(r)$ si, et seulement si, $\frac{L}{s}d \div r$, d'où l'assertion (a).

b) On procède comme dans (12). En appliquant (a), on a

$$\begin{aligned} \operatorname{Log} \left(\frac{\zeta(\mathbf{X}, t)}{\zeta(\mathbf{X}/\mathbf{G}, t)^L} \right) &= \sum_{r \geq 1} \left(N(\mathbf{X}, r) - L \cdot N(\mathbf{X}/\mathbf{G}, r) \right) \frac{t^r}{r} \\ &= \sum_{(s, e, d)} N(s, e, d) \left(\sum_{\lambda \geq 1} \frac{t^{d\lambda}}{d\lambda} - \sum_{\lambda \geq 1} \frac{t^{\frac{L}{s}d\lambda}}{\frac{L}{s}d\lambda} \right) \\ &= \operatorname{Log} \left(\prod_{(s, e, d)} \left(\frac{(1 - t^{\frac{L}{s}d})^s}{(1 - t^d)^L} \right)^{\frac{N(s, e, d)}{Ld}} \right), \end{aligned}$$

CQFD. ■

§16) **A propos de la convergence des séries et produits.** Toutes les séries formelles en la variable t que nous avons considérées sont nulles en $t = 0$ et convergent uniformément sur un disque $\mathbb{D}(0, \epsilon) \subseteq \mathbb{C}$ de rayon $\epsilon > 0$ assez petit. Voici, en vrac, quelques justifications.

- Les séries $\sum_{r \geq 1} N(\mathbf{X}, r) \frac{t^r}{r}$ et $\sum_{r \geq 1} N(\mathbf{X}/\mathbf{G}, r) \frac{t^r}{r}$ donnant les fonctions $\zeta(\mathbf{X}, t)$ et $\zeta(\mathbf{X}/\mathbf{G}, t)$, car dominées par des les séries des fonctions $\zeta(\mathbb{A}_k^N, t)$ des espaces affines dont le rayon de convergence se calcule sans difficulté.
- Les séries $\sum_{r \geq 1} N(\mathbf{X}, j, r) \frac{t^r}{r}$, car respectivement dominées par $\sum_{r \geq 1} N(\mathbf{X}, Lr) \frac{t^r}{r}$.
- Les séries $\sum_{r \geq 1} \chi_m(\mathcal{F}_{-r})$, puisqu'elles sont liées aux séries $\sum_{r \geq 1} N(\mathbf{X}, j, r) \frac{t^r}{r}$ par le système d'équations (Eq.15).
- Les séries $S(s, e, d)_m$ du lemme **F**, pour des raisons évidentes (cf. (Eq.19)), on peut même préciser que leur rayon de convergence vaut 1.
- Les séries $\sum_{(s, e, d)} N(s, e, d) S(s; e; d)_j$, car respectivement dominées par les séries $\sum_{r \geq 1} N(\mathbf{X}, j, r) \frac{t^r}{r}$ (cf. (Eq.17)).
- Les produits eulériens des lemmes **G** et **H**, car exponentiels de séries convergentes, nulles en $t = 0$.

§17) **Comparaison des degrés de $\zeta_m(\mathbf{X}, t)$ et $\zeta_0(\mathbf{X}, t)$ et $\zeta(\mathbf{X}, t)$.**

Lemme I. On a $\deg(\zeta_0(\mathbf{X}, t)) = \dots = \deg(\zeta_m(\mathbf{X}, t)) = \deg(\zeta(\mathbf{X}, t))/L$. En particulier, les théorèmes **1'**, **2**, **3**, et donc aussi **1**, sont vérifiés.

Preuve. Les décompositions eulériennes (Eq.24), donnent au voisinage de $t = 0$:

$$\frac{\zeta_m(\mathbf{X}, t)}{\zeta_0(\mathbf{X}, t)} = \prod_{(s, e, d)} \left(\frac{1 - t^d}{1 - \mathbf{u}^{sfm} t^d} \right)^{\frac{N(s, e, d)}{Ld}}, \quad (*)$$

où la fraction de gauche appartient à $\mathbb{Z}[\mathbf{u}](t)$ (lemme **D**).

Comme $\zeta_m(\mathbf{X}, 0) = \zeta_0(\mathbf{X}, 0) = 1$, les deux membres de (*) peuvent se développer en série formelle à coefficients dans $\mathbb{Z}[\mathbf{u}][t]$, obtenant la même série formelle. On en déduit que pour montrer que la fraction $\zeta_m(\mathbf{X}, t)/\zeta_0(\mathbf{X}, t)$ est de degré nul, nous pouvons aussi bien la considérer comme fraction rationnelle à coefficients dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ (quitte à fixer

un plongement $\mathbb{Z}[\mathbf{u}] \subseteq \overline{\mathbb{Q}}_\ell$, et ceci pour n'importe quel nombre premier ℓ . L'égalité (*) continue alors d'avoir un sens dans l'anneau des séries formelles $\overline{\mathbb{Q}}_\ell[[t]]$.

Posons maintenant

$$\frac{\zeta_m(\mathbf{X}, t)}{\zeta_0(\mathbf{X}, t)} = \frac{A_m(t)}{B_m(t)}, \quad (*)'$$

avec $A_m(t), B_m(t) \in \overline{\mathbb{Q}}_\ell[[t]]$ sans facteur commun et termes constants égaux à 1. On considère alors l'égalité

$$\begin{aligned} A_m(t) &= B_m(t) \prod_{(s,e,d)} \left(\frac{1-t^d}{1-\mathbf{u}^{sfm}t^d} \right)^{\frac{N(s,e,d)}{Ld}} \\ A_m(t) &= B_m(t) \prod_{(s,e,d)} \left((1-t^d) \sum_{k \geq 0} (\mathbf{u}^{sfm}t^d)^k \right)^{\frac{N(s,e,d)}{Ld}} \end{aligned} \quad (\diamond_m)$$

dans l'anneau des séries formelles $\overline{\mathbb{Q}}_\ell[[t]]$.

Il convient de remarquer à ce stade que le produit eulérien dans ces égalités converge bien dans le disque unité ouvert vers une fonction non nulle, et que ceci implique que les zéros de $A_m(t)$ et $B_m(t)$ sont à priori de valuation ℓ -adique négative ou nulle. Or, les zéros de $A_m(t)$ et $B_m(t)$ sont aussi des valeurs propres de l'action du Frobenius sur la cohomologie étale ℓ -adique ($\ell \neq p$) de \mathbf{X} , et l'on sait d'après Deligne que ces valeurs propres sont de valuation ℓ -adique nulle dans $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$, *i.e.* ce sont des unités ℓ -adiques ⁽²⁾. L'égalité (\diamond_m) est donc une égalité dans le sous-anneau de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell[[t]]$ des séries formelles dont les coefficients sont des *entiers* de $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$. En comparant l'expression (\diamond_m) avec celle correspondant à ' ℓm ' à la place de ' m ', on obtient l'égalité :

$$(A_m(t))^\ell \cdot B_{\ell m}(t^\ell) = (B_m(t))^\ell \cdot A_{\ell m}(t^\ell) \pmod{\ell},$$

et donc

$$\ell \cdot \deg \left(\frac{A_m(t)}{B_m(t)} \right) = \deg \left(\frac{A_{\ell m}(t^\ell)}{B_{\ell m}(t^\ell)} \right),$$

puisque les coefficients principaux de $A_m(t)$ et $B_m(t)$ sont de valuation ℓ -adique nulle. Par conséquent, par $(*)'$, on a

$$\ell \cdot \deg \left(\frac{\zeta_m(\mathbf{X}, t)}{\zeta_0(\mathbf{X}, t)} \right) = \deg \left(\frac{\zeta_{\ell m}(\mathbf{X}, t)}{\zeta_0(\mathbf{X}, t)} \right). \quad (**)$$

Cette égalité est indépendante de tout contexte adique et est valable pour tout nombre premier $\ell \neq p$, elle s'itère donc de manière évidente pour donner :

$$L \cdot \deg \left(\frac{\zeta_m(\mathbf{X}, t)}{\zeta_0(\mathbf{X}, t)} \right) = \deg \left(\frac{\zeta_{Lm}(\mathbf{X}, t^L)}{\zeta_0(\mathbf{X}, t^L)} \right) = \deg(1) = 0,$$

pour tout $m = 1, \dots, L-1$, CQFD.

² Voir le corollaire 5.5.3, p. 31, de l'appendice §5 Théorèmes d'intégralité par P. Deligne, de l'article de N. Katz [K].

Enfin, l'égalité $L \cdot \deg(\zeta_0(\mathbf{X}, t)) = \deg(\zeta(\mathbf{X}, t))$ est maintenant immédiate grâce à la factorisation de la fonction Zêta (Eq.8) qui va donner

$$\deg(\zeta(\mathbf{X}, t)) = \sum_{m=0, \dots, L-1} \deg(\zeta_m(\mathbf{X}, t)) = L \cdot \deg(\zeta_0(\mathbf{X}, t)),$$

d'après ce qui précède. ■

§ 18) À propos du rapport $\zeta(\mathbf{X}, t)/\zeta(\mathbf{X}/\mathbf{G}, t)^L$

Dans la preuve du lemme **I**, le rapport entre les degrés de $\zeta(\mathbf{X}, t)$ et $\zeta(\mathbf{X}/\mathbf{G}, t)$ est conséquence de l'égalité des degrés des fonctions rationnelles $\zeta_m(\mathbf{X}, t)$, mais une démarche directe est aussi possible grâce au produit eulérien (Eq.25) (lemme **H**) :

$$\frac{\zeta(\mathbf{X}, t)}{\zeta(\mathbf{X}/\mathbf{G}, t)^L} = \prod_{(s,e,d)} \left(\frac{(1-t^{\frac{L}{s}d})^s}{(1-t^d)^L} \right)^{\frac{N(s,e,d)}{Ld}} = \prod_{(s,e,d)} \left(\prod_{\alpha=0, \dots, \frac{L}{s}-1} \frac{u^{s\alpha} - t^d}{1-t^d} \right)^s \frac{N(s,e,d)}{Ld}$$

à partir duquel, la preuve de l'égalité $\deg(\zeta_m(\mathbf{X}, t)) = \deg(\zeta_0(\mathbf{X}, t))$, s'applique presque inchangée pour montrer que $\deg(\zeta(\mathbf{X}, t)) = \deg(\zeta(\mathbf{X}/\mathbf{G}, t)^L)$.

Remarque. Dans cette démarche, on utilise de nouveau le fait que les valeurs propres du Frobenius agissant en cohomologie étale ℓ -adique, sont des unités ℓ -adiques

§ 19) Une approche p -adique pour la preuve du lemme **I**

Dans cette approche, nous allons démontrer un résultat bien plus fort que celui du lemme **I**, nous allons montrer que l'on a en fait des *égalités* de fractions rationnelles

$$\zeta_0(\mathbf{X}, t) = \zeta_m(\mathbf{X}, t),$$

pour tout $m = 1, \dots, L-1$, et pas seulement des égalités de leurs degrés.

L'idée pour parvenir à ce résultat consiste à décomposer \mathbf{X} comme réunion disjointe

Quelques commentaires

- L'hypothèse sur l'ordre de θ est importante. Par exemple, sur la droite affine, l'automorphisme $\theta : \mathbb{A}^1(\mathbf{k}) \rightarrow \mathbb{A}^1(\mathbf{k})$, $x \mapsto x+1$, est d'ordre p , n'a pas de point fixe, et sa trace en cohomologie vaut 1.
- Il est intéressant de remarquer que les égalités du Théorème **2**

$$\chi(H_{\text{DR}}^*(\mathbf{X}/\mathbf{K})_0) = \chi(H_{\text{DR}}^*(\mathbf{X}/\mathbf{K})_1) = \dots = \chi(H_{\text{DR}}^*(\mathbf{X}/\mathbf{K})_L),$$

ne résultent pas de l'existence d'isomorphismes entre $H_{\text{DR}}^*(\mathbf{X}/\mathbf{K})_0$ et $H_{\text{DR}}^*(\mathbf{X}/\mathbf{K})_i$. En effet, l'exemple

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{k}[X, X^{-1}], \quad \mathbf{A} := \frac{\mathbf{k}[X, X^{-1}][T]}{(T^L - X)}, \quad \theta(T) = uT,$$

montre par un calcul simple que l'on a

$$\begin{cases} H_{\text{DR}}^0(\mathbf{A}/\mathbf{K})_0 = \mathbf{K} \\ H_{\text{DR}}^1(\mathbf{A}/\mathbf{K})_0 = \mathbf{K} \end{cases} \quad \text{mais} \quad \begin{cases} H_{\text{DR}}^0(\mathbf{A}/\mathbf{K})_1 = \mathbf{0} \\ H_{\text{DR}}^1(\mathbf{A}/\mathbf{K})_1 = \mathbf{0} \end{cases}$$

§ 1. Références bibliographiques

- [A-M] A. ARABIA, Z. MEBKHOUT. Sur le Topos infinitésimal p -adique dun schéma lisse I; Ann. Inst. Fourier (Grenoble) Vol. 60 no. 6, p. 1905–2094, (2010).
- [K] N. KATZ. Le niveau de la cohomologie des intersections completes; avec un appendice par P. Deligne, exposé XXI, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1967–69, “Groupes de Monodromie en Géométrie Algébrique” (SGA 7 II). Lecture Notes in Mathematics **340** (1973).
- [Mo] P. MONSKY. Formal cohomology: III. Fixed point theorems; Ann. of Math. (2) **93**, p. 315–343 (1971).

—————×—————

Alberto Arabia
CNRS
Institut de Mathématiques de Jussieu
Théorie des Groupes
2012