Restriction des faisceaux injectifs

Alberto Arabia (*)

12 juillet 2015

Résumé. Sur un espace métrisable $\boldsymbol{X}$ muni d'un faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$, la restriction d'un $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$-module flasque à tout sous-espace $\boldsymbol{S} \subseteq \boldsymbol{X}$ est flasque. Dans la catégorie $\mathrm{Mod}(\underline{\underline{k}}_{\boldsymbol{X}})$ des faisceaux de k-espaces vectoriels, faisceaux injectifs et faisceaux flasques coïncident et, par conséquent, toute restriction d'injectif est injective. Nous montrons dans ces notes qu'il en est de même plus généralement lorsque $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$ est un faisceau cohérent d'anneaux. Cela arrive par exemple lorsque $\boldsymbol{X}$ est en plus localement connexe et que $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$ est un faisceau constant $\underline{\underline{\mathcal{A}}}_{\boldsymbol{X}}$ de fibre un anneau noethérien $\mathcal{A}$.

Table des matières

1. Un critère d'injectivité

1.1. Critère de Baer sur un espace annelé. Étant donné un anneau commutatif unitaire $\mathcal{A}$, le « critère de Baer » affirme qu'un $\mathcal{A}$-module $\mathcal{M}$ est injectif si et seulement si l'application naturelle $\mathcal{M} = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}, \mathcal{M}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{J}, \mathcal{M})$ est surjective pour tout idéal $\mathcal{J}$ de $\mathcal{A}$. Dans son cours d'Alger de 1966, Grothendieck a donné une généralisation de ce critère aux catégories abéliennes avec générateurs (Théorème 5.2.2, *Introduction au langage fonctoriel*). La proposition suivante est la version de ce critère dans la catégorie des faisceaux de modules sur un espace annelé. ([1]).

1.1.1. Proposition. *Soit* $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$ *un faisceau d'anneaux sur* $\boldsymbol{X}$ *et soit* $\mathrm{Mod}(\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ *la catégorie des* $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$*-modules.*

a) *(Critère de Baer.) Un* $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$*-module* $\mathcal{M}$ *est un injectif de* $\mathrm{Mod}(\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})$ *si et seulement si, pour tout sous-*$\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$*-module* $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$ *(un idéal de* $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$*), le morphisme naturel*

$$\Gamma(\boldsymbol{X}, \mathcal{M}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}}(\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}, \mathcal{M}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}}(\mathcal{I}, \mathcal{M})$$

est surjectif.

(*) Université Paris Diderot-Paris 7, IMJ-PRG, CNRS, Bâtiment Sophie Germain, bureau 608, Case 7012, 75205. Paris Cedex 13, France. Contact : `alberto.arabia@imj-prg.fr`

[1] L'énoncé apparaît comme l'exercice II.10 (p. 133) du livre de Kashiwara-Schapira [KS$_1$], au delà du critère d'injectivité, on y donne l'équivalence entre injectifs et flasques dans la catégorie de faisceaux d'espaces vectoriels.

b) *Soit k un corps et soit $\underline{\underline{k}}_{\mathbf{X}}$ le faisceau constant sur $\mathbf{X}$ de fibre k. Tout idéal $\mathcal{I} \subseteq \underline{\underline{k}}_{\mathbf{X}}$ est isomorphe au faisceau $\underline{\underline{k}}_U$ pour un certain ouvert $U \subseteq \mathbf{X}$. Un $\underline{\underline{k}}_{\mathbf{X}}$-module $\mathcal{M}$ est injectif si et seulement si, $\mathcal{M}$ est flasque.*

Démonstration. (a) La nécessité de la condition étant évidente, montrons sa suffisance. Soit $\mathcal{G}$ un $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$-module. Pour tout sous-$\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$-module $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ et toute section locale $\sigma \in \mathcal{G}$, notons $\langle \mathcal{H}, \sigma \rangle$ le plus petit sous-$\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$-module de $\mathcal{G}$ contenant $\mathcal{H}$ et σ. On a le diagramme de lignes et colonnes exactes

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{H} \arrow[r, equal] \arrow[d, hook] & \mathcal{H} \arrow[d, hook, "\epsilon"] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{I} \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, equal] & \mathcal{H} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{X}} \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, two heads] & \langle \mathcal{H}, \sigma \rangle \arrow[r] \arrow[d, two heads] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{I} \arrow[r, "\subset"] & \mathcal{O}_{\mathbf{X}} \arrow[r, "\mu"] & \mathcal{E} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où $\mathcal{E} := \langle \mathcal{H}, \sigma \rangle / \mathcal{H}$, puis $\nu(h, r) = h + r \cdot \sigma$ et $\mu(r) = r \cdot \sigma (\operatorname{mod} \mathcal{H})$, de sorte que $\mathcal{I} = \ker(\nu) = \ker(\mu)$. On remarquera aussi que la colonne centrale est scindée.

Par fonctorialité, on obtient le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbf{X}}}(\mathcal{H}, \mathcal{M}) \arrow[r, equal] & \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbf{X}}}(\mathcal{H}, \mathcal{M}) & & \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbf{X}}}(\langle \mathcal{H}, \sigma \rangle, \mathcal{M}) \arrow[r, "\nu^*"] \arrow[u, "\epsilon^*"] & \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbf{X}}}(\mathcal{H} \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{X}}, \mathcal{M}) \arrow[r, "i^*"] \arrow[u, two heads] & \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbf{X}}}(\mathcal{I}, \mathcal{M}) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbf{X}}}(\langle \sigma \rangle, \mathcal{M}) \arrow[r, "\mu^*"] \arrow[u, tail] & \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbf{X}}}(\mathcal{O}_{\mathbf{X}}, \mathcal{M}) \arrow[r, two heads] \arrow[u, tail] & \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbf{X}}}(\mathcal{I}, \mathcal{M}) \arrow[r] \arrow[u, equal] & 0
\end{tikzcd}$$

Où la colonne centrale est scindée et la dernière ligne est exacte par hypothèse. Une chasse au diagramme élémentaire montre la surjectivité de ϵ^*.

Ces raisonnements prouvent la surjectivité des morphismes

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbf{X}}}(\langle \mathcal{H}, \sigma \rangle, \mathcal{M}) \twoheadrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbf{X}}}(\mathcal{H}, \mathcal{M}), \qquad (*)$$

pour tout sous-$\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$-module $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$, toute section locale σ de $\mathcal{G}$.

Pour $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{G}$ et pour un morphisme $\lambda : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ fixés, notons $\mathcal{P}$ l'ensemble des couples $(\mathcal{H}, \eta)$ où $\mathcal{H}$ est un sous-$\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$-module vérifiant $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$ et où $\eta : \mathcal{H} \to \mathcal{M}$ est un prolongement de λ. Munissons $\mathcal{P}$ de l'ordre partiel

$$\Big((\mathcal{H}_1, \eta_1) \preceq (\mathcal{H}_2, \eta_2)\Big) \Leftrightarrow_{\text{def}} \Big(\mathcal{H}_1 \subseteq \mathcal{H}_2 \text{ et } \eta_2|_{\mathcal{H}_1} = \eta_1\Big).$$

Le système $(\mathcal{P}, \preceq)$ est non vide et inductif. Par le lemme de Zorn, il admet des éléments maximaux. Soit $(\mathcal{H}, \eta)$ un tel élément. Si $\mathcal{H} \neq \mathcal{G}$, il existe des sections locales σ de $\mathcal{G}$ avec $\sigma \notin \mathcal{H}$, mais alors la surjection $(*)$ met en défaut la maximalité de $\mathcal{H}$. Donc $\mathcal{H} = \mathcal{G}$ et ceci termine la preuve de (a).

(b) Pour $\mathcal{I} \subseteq \underline{\underline{k}}_{\mathbf{X}}$, notons $\nu = \underline{\underline{k}}_{\mathbf{X}} \twoheadrightarrow \underline{\underline{k}}_{\mathbf{X}}/\mathcal{I}$ la surjection canonique. Pour tout $x \in \mathbf{X}$, on a $\mathcal{I}_x \subseteq \underline{\underline{k}}_{\mathbf{X},x} = k$, de sorte que $\mathcal{I}_x = 0$ si, et seulement si, $x \in |\nu(1_k)|$, où 1_k désigne l'identité multiplicative de l'anneau $\Gamma(\mathbf{X}, \underline{\underline{k}}_{\mathbf{X}})$. L'ensemble $|\mathcal{I}| := \{x \in \mathbf{X} \mid \mathcal{I}_x \neq 0\}$ est donc ouvert $U \subseteq \mathbf{X}$ et l'on a $\mathcal{I} = \underline{\underline{k}}_U$ puisque

$$\{x \in \mathbf{X} \mid \mathcal{I}_x \neq 0\} = \{x \in \mathbf{X} \mid \mathcal{I}_x = k\}\,.$$

Il s'ensuit, d'après (a), qu'un $\underline{\underline{k}}_{\mathbf{X}}$-module $\mathcal{M}$ est injectif si, et seulement si, pour tout ouvert $U \subseteq \mathbf{X}$ le morphisme naturel

$$\Gamma(\mathbf{X}, \mathcal{M}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbf{X}}}(\mathcal{O}_{\mathbf{X}}, \mathcal{M}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathbf{X}}}(\underline{\underline{k}}_U, \mathcal{M}) = \Gamma(U, \mathcal{M})$$

est surjectif, donc si et seulement si $\mathcal{M}$ est flasque. □

1.1.2. À propos de l'injectivité d'un faisceau constant. Quand peut on dire que le foncteur $\mathrm{Mod}(\mathcal{A}) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}(\underline{\underline{\mathcal{A}}}_{\mathbf{X}})$ qui fait correspondre à un $\mathcal{A}$-module $\mathcal{M}$ le faisceau constant $\underline{\underline{\mathcal{M}}}_{\mathbf{X}}$, transforme $\mathcal{A}$-module injectif en $\underline{\underline{\mathcal{A}}}_{\mathbf{X}}$-module injectif ? Deux cas assez opposés conviennent d'être soulignés.

- Un $\mathcal{O}_{\mathbf{X}}$-module injectif est un faisceau flasque ([Gr]). Maintenant, si $\boldsymbol{X}$ est connexe et contient deux ouverts connexes disjoints, un faisceau constant $\underline{\underline{M}}$ non nul, n'est pas flasque, donc n'est injectif.

  En effet, on a $\Gamma(U, \underline{\underline{M}}) = M^{\Pi_0 U}$ pour tout ouvert U localement connexe. Dans l'exemple, on a donc $\Gamma(\mathbf{X}, \underline{\underline{M}}) = M$ et $\Gamma(V \sqcup W, \underline{\underline{M}}) = M^2$, si V et W sont des ouverts connexes disjoints. Le morphisme naturel $\Gamma(\mathbf{X}, \underline{\underline{M}}) \to \underline{\Gamma}(V \sqcup W, \underline{\underline{M}})$ n'est donc pas surjectif.

- L'assertion 1.1.1-(b) permet une seconde réponse, positive cette fois. En effet, par cet énoncé, un faisceau de k-espaces vectoriels est injectif si et seulement si, il est flasque. Lorsque $\boldsymbol{X}$ est un espace topologique noethérien irréductible, ses ouverts sont connexes (car partout denses) et tout faisceau constant est flasque, donc injectif. ([2])

2. Restriction des faisceaux injectifs

2.1. Le cas des faisceaux d'espaces vectoriels. Soit k un corps. La proposition 1.1.1 montre l'équivalence dans la catégorie $\mathrm{Mod}(\underline{\underline{k}}_{\mathbf{X}})$ de faisceaux de k-espaces vectoriels, entre faisceaux injectifs et faisceaux flasques. D'autre part, le corollaire 2 du §3.3 de [Go] (p. 151) montre que si $\boldsymbol{X}$ est métrisable, la restriction d'un flasque à tout sous-espace $\boldsymbol{S} \subseteq \boldsymbol{X}$ est flasque. On conclut évidemment, dans ce contexte, à la conservation de l'injectivité par l'opération de restriction. Qu'en est-il en général ?

[2] Lorsque $\boldsymbol{X}$ n'est pas irréductible, ces arguments montrent que les faisceaux constants sont injectifs sur chaque composante connexe de $\boldsymbol{X}$, ils sont donc injectifs sur $\boldsymbol{X}$ tout entier.

2.2. Le cas des faisceaux de modules sur un anneau noethérien

2.2.1. Proposition. *Soit $\boldsymbol{X}$ un espace métrisable localement connexe et soit $\underline{\underline{\mathcal{A}}}_{\boldsymbol{X}}$ le faisceau constant sur $\boldsymbol{X}$ de fibre l'anneau noethérien $\mathcal{A}$. Alors, pour toute partie $\boldsymbol{S} \subseteq \boldsymbol{X}$, le foncteur de restriction $i_{\boldsymbol{S}}^{-1} : \mathrm{Mod}(\underline{\underline{\mathcal{A}}}_{\boldsymbol{X}}) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}(\underline{\underline{\mathcal{A}}}_{\boldsymbol{S}})$ respecte injectifs et flasques.*

Démonstration. Soit $\mathcal{I}$ un $\underline{\underline{\mathcal{A}}}_{\boldsymbol{X}}$-module injectif. Commençons par observer que si $i_{\boldsymbol{S}*} i_{\boldsymbol{S}}^{-1}\mathcal{I}$ est un $\underline{\underline{\mathcal{A}}}_{\boldsymbol{X}}$-module injectif, alors $i_{\boldsymbol{S}}^{-1}\mathcal{I}$ est un $\underline{\underline{\mathcal{A}}}_{\boldsymbol{S}}$-module injectif.

En effet, la donnée d'un diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M} \arrow[r, tail] \arrow[d] & \mathcal{N} \\ i_{\boldsymbol{S}}^{-1}\mathcal{I} & \end{tikzcd}$$

dans $\mathrm{Mod}(\underline{\underline{\mathcal{A}}}_{\boldsymbol{S}})$, donne, par fonctorialité, le diagramme, dans $\mathrm{Mod}(\underline{\underline{\mathcal{A}}}_{\boldsymbol{X}})$

$$\begin{tikzcd} i_{\boldsymbol{S}*}\mathcal{M} \arrow[r, tail] \arrow[d] & i_{\boldsymbol{S}*}\mathcal{N} \arrow[dl, dashed, "\exists"] \\ i_{\boldsymbol{S}*} i_{\boldsymbol{S}}^{-1}\mathcal{I} & \end{tikzcd}$$

qui peut être complété commutativement grâce à l'injectivité de $i_{\boldsymbol{S}*} i_{\boldsymbol{S}}^{-1}\mathcal{I}$. Ensuite, par restriction à $\boldsymbol{S}$, on obtient le diagramme commutatif $\mathrm{Mod}(\underline{\underline{\mathcal{A}}}_{\boldsymbol{S}})$

$$\begin{tikzcd} i_{\boldsymbol{S}}^{-1} i_{\boldsymbol{S}*}\mathcal{M} \arrow[r, tail] \arrow[d] & i_{\boldsymbol{S}}^{-1} i_{\boldsymbol{S}*}\mathcal{N} \arrow[dl] \\ i_{\boldsymbol{S}}^{-1} i_{\boldsymbol{S}*} i_{\boldsymbol{S}}^{-1}\mathcal{I} & \end{tikzcd}$$

où $i_{\boldsymbol{S}}^{-1} i_{\boldsymbol{S}*} = \mathrm{id}_{\boldsymbol{S}}$, ce qui prouve que $i_{\boldsymbol{S}}^{-1}\mathcal{I}$ est injectif.

Lorsque $\boldsymbol{X}$ est métrisable, on a l'égalité

$$\varinjlim_{U \supseteq \boldsymbol{S}} \mathit{\Gamma}(\boldsymbol{X}, i_{U*} i_U^{-1}\mathcal{M}) = \mathit{\Gamma}(\boldsymbol{X}, i_{\boldsymbol{S}*} i_{\boldsymbol{S}}^{-1}\mathcal{M}) \,,$$

pour tout sous-ensemble $\boldsymbol{S} \subseteq \boldsymbol{X}$ ([3]). Il s'ensuit que pour tout $V \subseteq \boldsymbol{X}$, on a

$$\begin{aligned} \mathit{\Gamma}(V, i_{\boldsymbol{S}*} i_{\boldsymbol{S}}^{-1}\mathcal{M}) &= \mathit{\Gamma}(V \cap \boldsymbol{S}, i_{\boldsymbol{S}}^{-1}\mathcal{M}) \\ &= \varinjlim_{W \supseteq V \cap \boldsymbol{S}} \mathit{\Gamma}(W, \mathcal{M}) = \varinjlim_{U \supseteq \boldsymbol{S}} \mathit{\Gamma}(V, i_{U*} i_U^{-1}\mathcal{M}) \,, \end{aligned}$$

d'où un isomorphisme naturel de $\mathcal{A}$-modules

$$\varinjlim_{U \supseteq \boldsymbol{S}} \mathit{\Gamma}(V, i_{U*} i_U^{-1}\mathcal{M}) \to \mathit{\Gamma}(V, i_{\boldsymbol{S}*} i_{\boldsymbol{S}}^{-1}\mathcal{M}) \,. \tag{$*$}$$

[3] [Go] corollaire 1 du §3.3, p. 151.

En passant à la limite inductive suivant la base de voisinages ouverts $\{V \ni x\}$ de $x \in \boldsymbol{X}$, on a alors un isomorphisme $\varinjlim_{U \supseteq \boldsymbol{S}} (i_{U*} i_U^{-1} \mathcal{M})_x \to (i_{\boldsymbol{S}*} i_{\boldsymbol{S}}^{-1} \mathcal{M})_x$, ce qui signifie que le morphisme canonique de $\underline{\underline{\mathcal{A}}}_{\boldsymbol{X}}$-modules

$$\varinjlim_{U \supseteq S} i_{U*} i_U^{-1} \mathcal{M} \to i_{\boldsymbol{S}*} i_{\boldsymbol{S}}^{-1} \mathcal{M} \tag{$**$}$$

est aussi un isomorphisme.

Une conséquence importante de $(*)$ et $(**)$ que nous sera utile plus loin, est la commutation des opérateurs $\varinjlim_{U \supseteq \boldsymbol{S}}$ et $\varGamma(V, \_)$. En effet, pour tout $\underline{\underline{\mathcal{A}}}_{\boldsymbol{X}}$-module $\mathcal{M}$ et tout ouvert $V \subseteq \boldsymbol{X}$, le morphisme canonique

$$\varinjlim_{U \supseteq \boldsymbol{S}} \varGamma(V, i_{U*} i_U^{-1} \mathcal{M}) \to \varGamma(V, \varinjlim_{U \supseteq \boldsymbol{S}} i_{U*} i_U^{-1} \mathcal{M}) \tag{$\diamond$}$$

est un isomorphisme ([4]).

Considérons maintenant le morphisme naturel de foncteurs

$$\varinjlim_{U \supseteq \boldsymbol{S}} \mathcal{H}om_{\underline{\underline{\mathcal{A}}}_{\boldsymbol{X}}}(\_, i_{U*} i_U^{-1} \mathcal{M}) \to \mathcal{H}om_{\underline{\underline{\mathcal{A}}}_{\boldsymbol{X}}}(\_, i_{\boldsymbol{S}*} i_{\boldsymbol{S}}^{-1} \mathcal{M})\,. \tag{$\ddagger$}$$

On a, par adjonction et restriction,

$$\mathcal{H}om_{\underline{\underline{\mathcal{A}}}_{\boldsymbol{X}}}(\_, i_{U*} i_U^{-1} \_) = i_{U*}\, \mathcal{H}om_{\underline{\underline{\mathcal{A}}}_U}(i_U^{-1} \_, i_U^{-1} \_) = i_{U*} i_U^{-1}\, \mathcal{H}om_{\underline{\underline{\mathcal{A}}}_{\boldsymbol{X}}}(\_, \_)$$

et le morphisme $(\ddagger)$ s'identifie grâce à $(**)$ au morphisme naturel

$$i_{\boldsymbol{S}*} i_{\boldsymbol{S}}^{-1}\, \mathcal{H}om_{\underline{\underline{\mathcal{A}}}_{\boldsymbol{X}}}(\_, \mathcal{M}) \to i_{\boldsymbol{S}*}\, \mathcal{H}om_{\underline{\underline{\mathcal{A}}}_{\boldsymbol{X}}}(i_{\boldsymbol{S}}^{-1} \_, i_{\boldsymbol{S}}^{-1} \mathcal{M}) \tag{$\ddagger\ddagger$}$$

Maintenant, si on applique $(\ddagger\ddagger)$ à $\mathcal{P} := \bigoplus_i \underline{\underline{\mathcal{A}}}_{V_i}$, on a

$$i_{\boldsymbol{S}*} i_{\boldsymbol{S}}^{-1} \prod_i \mathcal{M}_{V_i} \to i_{\boldsymbol{S}*} \prod_i (i_{\boldsymbol{S}}^{-1} \mathcal{M})_{\boldsymbol{S} \cap V_i} \tag{$\dagger$}$$

puisque $\mathcal{H}om_{\underline{\underline{\mathcal{A}}}_{\boldsymbol{X}}}(\underline{\underline{\mathcal{A}}}_V, \mathcal{M}) = \mathcal{M}_V$.

Si maintenant $\mathcal{P} := \bigoplus_i \mathcal{A}_{V_i}$ est une somme *localement finie*, les produits dans $(\dagger)$ sont localement finis et $i_{\boldsymbol{S}}^{-1} \prod_i = \prod_i i_{\boldsymbol{S}}^{-1}$. Le morphisme $(\dagger)$ devient alors

$$i_{\boldsymbol{S}*} \prod_i i_{\boldsymbol{S}}^{-1}(\mathcal{M}_{V_i}) \to i_{\boldsymbol{S}*} \prod_i (i_{\boldsymbol{S}}^{-1} \mathcal{M})_{\boldsymbol{S} \cap V_i}\,, \tag{$\dagger\dagger$}$$

ce qui est clairement un isomorphisme. Le morphisme $(\ddagger)$ appliqué à une somme localement finie $\mathcal{P} := \bigoplus_i \mathcal{A}_{V_i}$ est donc un isomorphisme.

Nous allons maintenant améliorer ce résultat.

Lemme technique. Soit $\boldsymbol{X}$ *un espace topologique métrisable. Si* $\mathcal{F}$ *est un* $\underline{\underline{\mathcal{A}}}_{\boldsymbol{X}}$*-module* localement de présentation finie, *les morphismes naturels*

$$\varinjlim_{U \supseteq \boldsymbol{S}} \mathcal{H}om_{\underline{\underline{\mathcal{A}}}_{\boldsymbol{X}}}(\mathcal{F}, i_{U*} i_U^{-1} \mathcal{M}) \to \mathcal{H}om_{\underline{\underline{\mathcal{A}}}_{\boldsymbol{X}}}(\mathcal{F}, i_{\boldsymbol{S}*} i_{\boldsymbol{S}}^{-1} \mathcal{M})$$

$$\varinjlim_{U \supseteq \boldsymbol{S}} \mathrm{Hom}_{\underline{\underline{\mathcal{A}}}_{\boldsymbol{X}}}(\mathcal{F}, i_{U*} i_U^{-1} \mathcal{M}) \to \mathrm{Hom}_{\underline{\underline{\mathcal{A}}}_{\boldsymbol{X}}}(\mathcal{F}, i_{\boldsymbol{S}*} i_{\boldsymbol{S}}^{-1} \mathcal{M})$$

sont des isomorphismes.

[4] Cet isomorphisme à ceci de remarquable qu'en règle générale les sections d'une limite inductive de faisceaux ne constituent pas la limite inductive de sections des faisceaux. Le cas présent concerne

Preuve du lemme. Fixons une présentation localement finie de $\mathcal{F}$

$$\mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_0 \to \mathcal{F} \to 0\,,$$

où $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1$ sont des sommes localement finies de la forme $\bigoplus_i \underline{\underline{\mathcal{A}}}_{V\,i}$, et appliquons-lui les foncteurs

$$\begin{cases} \mathbb{L}_{\mathcal{M}}(\_) := \varinjlim_{U \supseteq \boldsymbol{S}} \mathcal{H}om_{\underline{\underline{\mathcal{A}}}_{\boldsymbol{X}}}(\_, i_{U*} i_U^{-1} \mathcal{M}) \\ \mathbb{S}_{\mathcal{M}}(\_) := \mathcal{H}om_{\underline{\underline{\mathcal{A}}}_{\boldsymbol{X}}}(\_, i_{\boldsymbol{S}*} i_{\boldsymbol{S}}^{-1} \mathcal{M}) \end{cases}$$

qui sont clairement additifs et exacts à gauche. Nous obtenons alors le diagramme de lignes exactes :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathbb{L}_{\mathcal{M}}\,\mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{L}_{\mathcal{M}}\,\mathcal{P}_0 \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & \mathbb{L}_{\mathcal{M}}\,\mathcal{P}_1 \arrow[d, "\simeq"] \\ 0 \arrow[r] & \mathbb{S}_{\mathcal{M}}\,\mathcal{F} \arrow[r] & \mathbb{S}_{\mathcal{M}}\,\mathcal{P}_0 \arrow[r] & \mathbb{S}_{\mathcal{M}}\,\mathcal{P}_1 \end{tikzcd}$$

où les deux morphismes verticaux de droite sont des isomorphismes d'après nos remarques préliminaires. Le fait que $\mathbb{L}_{\mathcal{M}}\,\mathcal{F} \to \mathbb{S}_{\mathcal{M}}\,\mathcal{F}$ est un isomorphisme en découle aussitôt. On a donc prouvé que le morphisme naturel

$$\varinjlim_{U \supseteq \boldsymbol{S}} \mathcal{H}om_{\underline{\underline{\mathcal{A}}}_{\boldsymbol{X}}}(\mathcal{F}, i_{U*} i_U^{-1} \mathcal{M}) \to \mathcal{H}om_{\underline{\underline{\mathcal{A}}}_{\boldsymbol{X}}}(\mathcal{F}, i_{\boldsymbol{S}*} i_{\boldsymbol{S}}^{-1} \mathcal{M})$$

est un isomorphisme. La fin de la preuve du lemme résulte alors à l'aide de l'égalité ($\diamond$) pour le foncteur des sections globales $\Gamma(\boldsymbol{X}, \_)$.

Nous sommes maintenant en mesure de prouver la proposition en appliquant le critère d'injectivité de 1.1.1 au $\underline{\underline{\mathcal{A}}}_{\boldsymbol{X}}$-module $i_{\boldsymbol{S}*} i_{\boldsymbol{S}}^{-1} \mathcal{I}$.

La transformation naturelle $\Gamma(\boldsymbol{X}; \mathbb{L}_{\mathcal{I}}(\_)) \to \Gamma(\boldsymbol{X}; \mathbb{S}_{\mathcal{I}}(\_))$ sur l'inclusion d'un idéal $\mathcal{J} \subseteq \underline{\underline{\mathcal{A}}}_{\boldsymbol{X}}$ donne le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \Gamma(\boldsymbol{X}; \mathbb{L}_{\mathcal{I}}\,\underline{\underline{\mathcal{A}}}_{\boldsymbol{X}}) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & \Gamma(\boldsymbol{X}; \mathbb{L}_{\mathcal{I}}\,\mathcal{J}) \arrow[d, "\simeq"] \\ \Gamma(\boldsymbol{X}; \mathbb{S}_{\mathcal{I}}\,\underline{\underline{\mathcal{A}}}_{\boldsymbol{X}}) \arrow[r] & \Gamma(\boldsymbol{X}; \mathbb{S}_{\mathcal{I}}\,\mathcal{J}) \end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont des isomorphismes suite au lemme technique, qui s'applique puisque $\mathcal{J}$ est localement de présentation finie, ce qui découle du fait que $\boldsymbol{X}$ est localement connexe et que $\mathcal{A}$ est noethérien ([5]).

D'autre part, $\Gamma(\boldsymbol{X}; \mathbb{L}_{\mathcal{I}}\,\underline{\underline{\mathcal{A}}}_{\boldsymbol{X}}) \to \Gamma(\boldsymbol{X}; \mathbb{L}_{\mathcal{I}}\,\mathcal{J})$ est surjectif puisque limite inductive filtrante des morphismes

$$\mathrm{Hom}_{\underline{\underline{\mathcal{A}}}_{\boldsymbol{X}}}(\underline{\underline{\mathcal{A}}}_{\boldsymbol{X}}, i_{U*} i_U^{-1} \mathcal{I}) \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}_{\underline{\underline{\mathcal{A}}}_{\boldsymbol{X}}}(\mathcal{J}, i_{U*} i_U^{-1} \mathcal{I})\,,$$

qui sont surjectifs puisque $i_{U*} i_U^{-1} \mathcal{I}$ est injectif.

[5] C'est le seul endroit où l'on utilise le fait que $\boldsymbol{X}$ est localement connexe et que $\mathcal{A}$ est noethérien. L'hypothèse minimale aurait donc été de demander que tout idéal de $\underline{\underline{\mathcal{A}}}_{\boldsymbol{X}}$ soit localement de présentation finie.

La surjectivité de $\mathit{\Gamma}(\boldsymbol{X};\mathbb{S}_{\mathcal{I}}\,\underline{\underline{\mathcal{A}}}_{\boldsymbol{X}})\twoheadrightarrow\mathit{\Gamma}(\boldsymbol{X};\mathbb{S}_{\mathcal{I}}\,\mathcal{J})$ correspond à la surjectivité de l'application naturelle

$$\mathrm{Hom}_{\underline{\underline{\mathcal{A}}}_{\boldsymbol{X}}}(\underline{\underline{\mathcal{A}}}_{\boldsymbol{X}}, i_{\boldsymbol{S}*}i_{\boldsymbol{S}}^{-1}\mathcal{I})\twoheadrightarrow\mathrm{Hom}_{\underline{\underline{\mathcal{A}}}_{\boldsymbol{X}}}(\mathcal{J}, i_{\boldsymbol{S}*}i_{\boldsymbol{S}}^{-1}\mathcal{I})$$

ce qui montre que $i_{\boldsymbol{S}*}i_{\boldsymbol{S}}^{-1}\mathcal{I}$ vérifie le critère d'injectivité 1.1.1 et ceci termine la preuve de la proposition. □

2.3. Le cas où $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$ est un faisceau cohérent d'anneaux

L'inspection de la preuve de 2.2.1 révèle que les seules propriétés utiles du faisceau $\underline{\underline{\mathcal{A}}}_{\boldsymbol{X}}$ sont, l'égalité $\mathrm{Hom}_{\underline{\underline{\mathcal{A}}}_{\boldsymbol{X}}}(\underline{\underline{\mathcal{A}}}_{U}, \_) = \mathit{\Gamma}(U;\_)$ et le fait que tout idéal $\mathcal{J}\subseteq\underline{\underline{\mathcal{A}}}_{\boldsymbol{X}}$ est localement de présentation finie (*cf.* la note (5), en bas de p. 6).

Pour tout faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$, l'égalité $\mathit{\Gamma}(U,\_) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}}((\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})_U;\_)$ est vérifiée et le fait que les idéaux $\mathcal{J}\subseteq\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$ sont localement de présentation finie correspond très précisément à la définition de faisceau *cohérent* d'anneaux (*cf.* [S] §15 p.210). Aussi, la même preuve de 2.2.1 démontre le résultat plus général suivant.

2.3.1. Proposition. *Soit $\boldsymbol{X}$ un espace topologique métrisable. Soit $\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}$ un faisceau cohérent d'anneaux. Alors, pour toute partie $\boldsymbol{S}\subseteq\boldsymbol{X}$, le foncteur de restriction $i_{\boldsymbol{S}}^{-1}:\mathrm{Mod}(\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}})\rightsquigarrow\mathrm{Mod}(\mathcal{O}_{\boldsymbol{X}}|_{\boldsymbol{S}})$ respecte injectifs et flasques.*

Références

[Go] R. Godement. *"Topologie algébrique et théorie des faisceaux"* Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1252. Hermann, Paris, (1973).

[Gr] A. Grothendieck, Sur quelques points d'algèbre homologique. Tôhoku Math. J. (2) 9 , 119–221 (1957).

[KS$_1$] M. Kashiwara, P. Schapira, *"Sheaves on manifolds"*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 292. Springer-Verlag, Berlin, (1994).

[L] T.Y. Lam, *"Lectures on Modules and Rings"*. Graduate Texts in Mathematics, 189. Springer-Verlag (1999).

[S] J.-P. Serre, Faisceaux algébriques cohérents. Ann. of Math. (2) 61, 197–278, (1955).

ALBERTO ARABIA
CNRS–IMJ
Théorie des groupes
2 juin 2016