Scindage des complexes en catégorie dérivée

Alberto Arabia

14 août 2012

Résumé

• Soient R un anneau commutatif gradué, $\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ la catégorie des R-modules différentiels gradués (R-*mdg* en bref), $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ la catégorie obtenue de $\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ en identifiant les morphismes R-homotopes, et $\mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ obtenue de $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ en inversant ses quasi-isomorphismes. On définit la structure triangulée de $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ et de $\mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$, et l'on étudie le problème du scindage des R-modules différentiels gradués, plus précisément, l'existence d'un isomorphisme dans $\mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$, entre un R-*mdg* (M, d_M) et sa cohomologie : le R-*mdg* $(\mathrm{H}(M, d_M), 0)$.

• Comme la catégorie $\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ est abélienne, on dispose aussi des catégories triangulées $K^-(\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R))$ et $D^-(\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R))$ de complexes de R-*mdg*'s bornés supérieurement. Si $\boldsymbol{F} : \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)$ est un foncteur covariant additif compatible au décalage, il induit un foncteur $\mathrm{Diff}\,\boldsymbol{F} : \mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ et son dérivé à gauche $\mathbb{L}\,\mathrm{Diff}\,\boldsymbol{F} : D^-(\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)) \rightsquigarrow D^-(\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R))$. Nous montrons qu'il existe de même un prolongement

$$\mathbb{D}\,\boldsymbol{F} : \mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)\,.$$

La cohomologie de $\mathbb{D}\,\boldsymbol{F}(\_)$ est alors l'aboutissement de la suite spectrale associéé à la filtration par degrés de R-*mdg*'s du bicomplexe $\mathbb{L}\,\mathrm{Diff}\,\boldsymbol{F}(\_)$. Lorsque (M, d_M) est scindé, les R-modules gradués $\boldsymbol{h}(\mathbb{D}\,\boldsymbol{F}(M, d_M))$ et $\mathbf{tot}\,\mathbb{L}^*\boldsymbol{F}(\boldsymbol{h}(M, d_M))$ sont isomorphes, où $\mathbb{L}^k\boldsymbol{F} : D^-(\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R))$ est le k-ième foncteur dérivé à gauche standard.

• Pour un groupe de Lie $\boldsymbol{G}$ compact et connexe, les complexes des formes différentielles équivariantes pour une $\boldsymbol{G}$-variété différentielle $\boldsymbol{X}$, sont des objets de $\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(H_{\boldsymbol{G}})$ où $H_{\boldsymbol{G}}$ désigne la cohomologie $\boldsymbol{G}$-équivariante d'un point. Lorsque $\boldsymbol{X}$ vérifie la dualité de Poincaré rationnelle, le morphisme de dualité de Poincaré équivariante

$$\mathbb{D}_{\boldsymbol{G},\boldsymbol{X}} : (\Omega_{\boldsymbol{G}}[d_{\boldsymbol{X}}], d_{\boldsymbol{G}}) \to \mathrm{Homgr}^*_{H_G}((\Omega_{\boldsymbol{G},\mathrm{c}}, d_{\boldsymbol{G}}), H_{\boldsymbol{G}})\,, \tag{$\mathbb{D}$}$$

est un quasi-isomorphisme.

On verra que lorsque $\boldsymbol{G}$ est le tore $\mathbb{S}^1$, tout $H_{\boldsymbol{G}}$-mdg est scindé, de sorte que l'on a alors des isomorphismes dans $\mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(H_{\boldsymbol{G}})$

$$(\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X}), d_{\boldsymbol{G}}) \cong (H_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X}), 0) \text{ et } (\Omega_{\boldsymbol{G},\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}), d_{\boldsymbol{G}}) \cong (H_{\boldsymbol{G},c}(\boldsymbol{X}), 0)\,. \tag{$\diamond$}$$

Le quasi-isomorphisme ($\mathbb{D}$) induit alors un isomorphisme de $H_{\boldsymbol{G}}$-*mg*

$$\mathcal{D}_{\boldsymbol{G},\boldsymbol{X}} : H_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X})[d_{\boldsymbol{X}}] \underset{\cong}{\to} \mathbf{tot}\,\mathrm{Extgr}^{*,\bullet}_{H_G}(H_{\boldsymbol{G},c}(\boldsymbol{X}), H_{\boldsymbol{G}})\,.$$

Il en résulte le critère de dualité de Poincaré équivariante suivant.

Critère. Lorsque $\boldsymbol{X}$ vérifie la dualité de Poincaré rationnelle, le morphisme de dualité

$$H_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X})[d_{\boldsymbol{X}}] \to \mathrm{Homgr}^*_{H_G}(H_{\boldsymbol{G},c}(\boldsymbol{X}), H_{\boldsymbol{G}})$$

induit par $\mathbb{D}_{\boldsymbol{G},\boldsymbol{X}}$ est bijectif si, et seulement si, $H_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X})$ est un $H_{\boldsymbol{G}}$-module libre.

Table des matières

1. Catégories de $\boldsymbol{R}$-modules différentiels gradués

1.1. Rappels sur les catégories triangulées

Une catégorie « *triangulée* » est une catégorie additive $\mathcal{A}$ munie de :

a) Un automorphisme de catégories $T : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, appelé « *le foncteur translation* ». On note aussi $X[m] := T^m(X)$, pour tout $m \in \mathbb{Z}$.

On appelle alors « *triangle* », tout sextuplet (X, Y, Z, u, v, w) où X, Y, Z sont des objets de $\mathcal{A}$ et où $u : X \to Y$, $v : Y \to Z$ et $w : Z \to T(X)$ sont des morphismes de $\mathcal{A}$. Un triangle se note classiquement des deux manières suivantes

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1] \qquad \text{et} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[rr, "u"] & & Y \arrow[dl, "v"] \\ & Z \arrow[ul, "w", "{[1]}"'] & \end{tikzcd}$$

Un « *morphisme de triangles* » $(X, Y, Z, u, v, w) \to (X', Y', Z', u', v', w')$, est la donnée de morphismes $f : X \to X'$, $g : Y \to Y'$, $h : Z \to Z'$ de $\mathcal{A}$, tels que le diagramme :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h"'] & X[1] \arrow[d, "{f[1]}"'] \\ X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & X'[1] \end{tikzcd}$$

est commutatif.

b) Une classe de triangles (X, Y, Z, u, v, w) appelés « *triangles distingués* » vérifiant les conditions suivantes

(TR1) Tout triangle (X, Y, Z, u, v, w) isomorphe à un triangle distingué est distingué. Pour tout morphisme $u : X \to Y$ de $\mathcal{A}$, il existe un triangle distingué de la forme (X, Y, Z, u, v, w). Pour tout objet X de $\mathcal{A}$, le triangle $(X, X, 0, \mathrm{id}_X, 0, 0)$ est distingué.

(TR2) Le triangle (X, Y, Z, u, v, w) est distingué si, et seulement si, le triangle $(Y, Z, X[1], v, w, -u[1])$ l'est.

(TR3) Soient (X, Y, Z, u, v, w) et (X', Y', Z', u', v', w') deux triangles distingués, et $f : X \to X'$ et $g : Y \to Y'$ tels que $u' \circ f = g \circ u$, il existe alors $h : Z \to Z'$ (pas forcément unique) tel que (f, g, h) est un morphisme de triangles.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\oplus"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, dotted, "h"'] & X[1] \arrow[d, "{f[1]}"'] \\ X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & X'[1] \end{tikzcd}$$

(TR4) (Axiome de l'octaèdre.) Étant donné le diagramme de triangles distingués

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\oplus"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r, "w"] & X[1] \arrow[d, equal] \\ X \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] \arrow[d, "g'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & X[1] \\ & Y'' \arrow[d, "g''"] & & \\ & Y[1] & & \end{tikzcd} \tag{$\diamond$}$$

il existe un triangle distingué (Z, Z', Z'', h, h', h'') et un isomorphisme $v'' : Y'' \to Z''$, tels que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, dotted, "h"] & X[1] \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] \arrow[d, "g'"] & Z' \arrow[r, "w'"] \arrow[d, dotted, "h'"] & X[1] \\
& Y'' \arrow[r, dotted, "v''", "\cong"'] \arrow[d, "g''"] & Z'' \arrow[d, dotted, "h''"] & \\
& Y[1] \arrow[r, "v[1]"] & Z[1] &
\end{tikzcd} \qquad (\diamond\diamond)$$

est commutatif.

1.1.1. Commentaires sur les axiomes TR

- Les axiomes TR1 et TR3 appliqués au diagramme $(\diamond)$ fournissent aussitôt un diagramme commutatif $(\diamond\diamond)$ mais ne garantissent pas à priori la bijectivité de v''.
- Les axiomes TR1, TR2 et TR3 permettent de montrer que, pour tout triangle distingué $\Delta = (X, Y, Z, u, v, w)$ et tout $M \in \mathcal{A}$, l'application des foncteurs $(\_) \rightsquigarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(M, \_)$ et $(\_) \rightsquigarrow \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(\_, M)$ à Δ, donne lieu aux suites

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(M, X) \xrightarrow{u_*} \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(M, Y) \xrightarrow{v_*} \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(M, Z) \xrightarrow{w_*} \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(M, X[1]) \longrightarrow$$

$$\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(X, M) \xleftarrow{u^*} \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(Y, M) \xleftarrow{v^*} \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(Z, M) \xleftarrow{w^*} \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(X[1], M) \longleftarrow$$

qui sont des *suites exactes longues* de groupes abéliens.

1.2. *R*-modules différentiels gradués

1.2.1. La catégorie des *R*-modules différentiels gradués. Dans cet article, on désigne par R un anneau commutatif, unitaire, positivement gradué $R := (R^0 \oplus R^1 \oplus \cdots)$ et de composantes de degrés impaires nulles (1).

Un « *R-module différentiel gradué* » (un *R-mdg* en bref), est un couple $\mathcal{M} = (M, d_M)$, où $M := (\cdots \oplus M^{-1} \oplus M^0 \oplus M^1 \oplus \cdots)$ est un R-module $\mathbb{Z}$-gradué (un *R-mg* en bref), et où $d_M : M \to M$ est un endomorphisme de R-module gradué, de degré 1 et de carré nul, appelé sa « *différentielle* ».

Un « *morphisme de R-mdg* » $\alpha : (M, d_M) \to (N, d_N)$, est la donnée d'un morphisme R-modules gradués $\alpha : M \to N$, de degré 0, qui commute aux différentielles, *i.e.* tel que $\alpha \circ d_M = d_N \circ \alpha$.

1. La nécessité de cette condition apparaît notamment lors de l'introduction des R-modules différentiels gradués $\mathrm{Homgr}^\bullet_R(\_, \_)$ et $(\_ \otimes_R \_)^\bullet$ (*cf.* 1.2.4 et 1.2.8).

Les R-*mdg*'s et leurs morphismes constituent la catégorie des R-modules différentiels gradués, notée $\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$. C'est une catégorie abélienne.

1.2.2. Convention sur les notations On note par des caractères cursifs : $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{M}, \mathcal{N}, \ldots$ des R-*mdg*'s, et par des caractères romains $A, B, M, N, \ldots$ les R-*mg*'s sous-jacents, ce qui est cohérent avec l'écriture '$\mathcal{M} = (M, d_M)$'.

1.2.3. Le foncteur de translation. On note $T : \mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ le foncteur qui associe à $\mathcal{M} = (M, d_M)$, le R-*mdg* $T\mathcal{M} := (T(M), d_{T(M)})$, où

$$T(M)^m = M^{m+1} \quad \text{et} \quad d_{T(M)} = -d_M \,,$$

et qui associe à $\alpha : M \to N$, le morphisme

$$T(\alpha) : T(M) \to T(N) \quad \text{avec} \quad T(\alpha)_m := \alpha_{m+1} \,.$$

Pour $i \in \mathbb{Z}$, on notera également $T^i\mathcal{M} := \mathcal{M}[i]$ et $T^i(\alpha) := \alpha[i]$.

1.2.4. Le module différentiel gradué $\mathbf{Homgr}_R^\bullet(\_, \_)$. Étant donnés deux R-*mg*'s M et N et un entier $m \in \mathbb{Z}$, on note $\mathrm{Homgr}_R^m(M, N)$ le sous-R-module de $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ des homomorphismes gradués de degré m. On remarquera que $\mathrm{Homgr}_R^m(M, N)$ n'a pas de structure naturelle de R-module, en ce sens que si $x \in R^d$ et $\lambda \in \mathrm{Homgr}_R^m(M, N)$ alors $x\lambda \in \mathrm{Homgr}_R^{m+d}(M, N)$. On considère alors l'ensemble

$$\mathrm{Homgr}_R^\bullet(M, N) := \big(\textstyle\bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} \mathrm{Homgr}_R^m(M, N)\big) \subseteq \mathrm{Hom}_R(M, N) \,,$$

dont la structure de R-*mg* est claire. Maintenant si $\mathcal{M} = (M, d_M)$ et $\mathcal{N} = (N, d_N)$ sont des R-*mdg*'s, on pose

$$\mathrm{Homgr}_R^\bullet(\mathcal{M}, \mathcal{N}) := \big(\mathrm{Homgr}_R^\bullet(M, N), D_\bullet\big) \,, \tag{Eq.1}$$

où $D_\bullet$ est définie par

$$\begin{cases} \mathrm{Homgr}_R^m(M, N) \xrightarrow{D_m} \mathrm{Homgr}_R^{m+1}(M, N) \\ \qquad\quad \lambda \qquad\quad \longmapsto d_N \circ \lambda - (-1)^m \lambda \circ d_M \,, \end{cases}$$

ce qui fait du couple (Eq.1) un R-*mdg* puisque R est gradué par degrés paires.

1.2.5. Le bifoncteur $\mathbf{Homgr}_R^\bullet(\_, \_)$. La donnée des morphismes de R-*mdg*'s $\alpha : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ et $\beta : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ détermine des applications

$$\begin{cases} \mathrm{Homgr}_R^\bullet(\mathcal{M}_2, \mathcal{N}) \longrightarrow \mathrm{Homgr}_R^\bullet(\mathcal{M}_1, \mathcal{N}) \,, \quad \lambda \longmapsto \lambda \circ \alpha \\ \mathrm{Homgr}_R^\bullet(\mathcal{M}, \mathcal{N}_1) \longrightarrow \mathrm{Homgr}_R^\bullet(\mathcal{M}, \mathcal{N}_2) \,, \quad \lambda \longmapsto \beta \circ \lambda \end{cases}$$

dont on vérifie qu'il s'agit de morphismes de R-*mdg*'s. Ces correspondances définissent un bifoncteur biadditif, contravariant sur la première variable et covariant sur la seconde variable,

$$\big(\,\mathrm{Homgr}^\bullet_R(\_,\_), D_\bullet\big) : \mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) \times \mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) \qquad \text{(Eq.2)}$$

1.2.6. Le groupe $\mathbf{Hotgr}_{\boldsymbol{R}}(\_,\_)$. Dans le R-*mdg* $\mathrm{Homgr}^\bullet_R(\mathcal{M},\mathcal{N})$, on a $\ker(D_m) = \mathrm{Mor}_{\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)}\big(\mathcal{M},\mathcal{N}[m]\big)$ et $\mathrm{im}(D_{m-1})$ est le groupe des homotopies de R-*mdg*'s de $\mathcal{M}$ à valeurs dans $\mathcal{N}[m]$. Le quotient $\ker(D_m)/\,\mathrm{im}(D_{m-1})$ s'identifie donc au groupe abélien des morphismes de *mdg*'s de $\mathcal{M}$ vers $\mathcal{N}[m]$ *à homotopie près*, on le note

$$\mathrm{Hotgr}_R\big(\mathcal{M},\mathcal{N}[m]\big) := \mathrm{H}^m\big(\,\mathrm{Homgr}^\bullet_R(\mathcal{M},\mathcal{N})\big)\,.$$

La loi de composition de morphismes

$$\circ : \mathrm{Mor}_{\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)}(\mathcal{M},\mathcal{N}) \times \mathrm{Mor}_{\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)}(\mathcal{L},\mathcal{M}) \to \mathrm{Mor}_{\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)}(\mathcal{L},\mathcal{N})$$

induit alors une loi de composition

$$\circ : \mathrm{Hotgr}_R(\mathcal{M},\mathcal{N}) \times \mathrm{Hotgr}_R(\mathcal{L},\mathcal{M}) \to \mathrm{Hotgr}_R(\mathcal{L},\mathcal{N})$$

vérifiant les propriétés habituelles d'associativité, distributivité et existence d'élément neutre.

1.2.7. Les *R-mg* $\mathbf{Hotgr}^*_{\boldsymbol{R}}(\_,\_)$. Nous noterons également

$$\mathrm{Hotgr}^m_R(\mathcal{M},\mathcal{N}\big) := \mathrm{Hotgr}_R(\mathcal{M},\mathcal{N}[m]\big) = \mathrm{H}^m\big(\,\mathrm{Homgr}^\bullet_R(\mathcal{M},\mathcal{N})\big)\,.$$

de sorte que

$$\mathrm{Hotgr}^*_R(\mathcal{M},\mathcal{N}\big) := \textstyle\bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hotgr}^m_R(\mathcal{M},\mathcal{N}\big) = \mathrm{H}^*\big(\,\mathrm{Homgr}^\bullet_R(\mathcal{M},\mathcal{N})\big)$$

est naturellement muni d'une structure de R-*mg*.

1.2.8. Le module différentiel gradué $(\_\otimes_{\boldsymbol{R}}\_)^\bullet$. Étant donnés deux R-*mg*'s M et N et un entier $m \in \mathbb{Z}$, on note $(M\otimes_R N)^m$ le sous-R-module de $M\otimes_R N$ des tenseurs homogènes de degré total m, *i.e.* on pose

$$(M\otimes_R N)^m := \big\{m\otimes n \in M\otimes_R N \;\big|\; m\in M^a\,,\; n\in N^b\,,\; a+b=m\big\}$$

On a clairement $R^d(M\otimes_R N)^m \subseteq (M\otimes_R N)^{m+d}$ d'où la structure naturelle de R-*mg* sur $M\otimes_R N$. Maintenant, si $\mathcal{M}=(M,d_M)$ et $\mathcal{N}=(N,d_N)$ sont des R-*mdg*'s, on pose

$$(\mathcal{M} \otimes_R \mathcal{N})^\bullet := \big((M \otimes_R N)^\bullet, \Delta_\bullet\big)\,, \tag{Eq.3}$$

où $\Delta_\bullet$ est définie par

$$\begin{cases} M^a \otimes_R N^b \xrightarrow{\Delta_m} (M \otimes_R N)^{a+b+1} \\ \quad m \otimes n \quad \longmapsto d_M(m) \otimes n + (-1)^a m \otimes d_N(n)\,, \end{cases}$$

ce qui fait du couple (Eq.3) un R-*mdg* puisque R est gradué par degrés paires.

1.2.9. Le bifoncteur $(\_ \otimes_{\boldsymbol{R}} \_)^\bullet$. La donnée des morphismes de R-*mdg*'s $\alpha : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ et $\beta : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ détermine des applications

$$\begin{cases} (\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{N})^\bullet \longrightarrow (\mathcal{M}_2 \otimes \mathcal{N})^\bullet\,, \quad \mu \otimes \nu \longmapsto \alpha(\mu) \otimes \nu \\ (\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}_1)^\bullet \longrightarrow (\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}_2)^\bullet\,, \quad \mu \otimes \nu \longmapsto \mu \otimes \beta(\nu) \end{cases}$$

dont on vérifie qu'il s'agit de morphismes de R-*mdg*'s. Ces correspondances définissent un bifoncteur biadditif, covariant sur les deux variables,

$$\big((\_ \otimes_R \_)^\bullet, \Delta_\bullet\big) : \mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) \times \mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)\,. \tag{Eq.4}$$

1.2.10. Propriétés de $\mathrm{Homgr}^\bullet_{\boldsymbol{R}}(\_,\_)$ et $(\_ \otimes_{\boldsymbol{R}} \_)^\bullet$. La proposition suivante rappelle sans démonstration des propriétés basiques de ces deux bifoncteurs.

1.2.11. Proposition

a) *Pour $m \in \mathbb{Z}$, on a des identifications canoniques*

$$\begin{cases} \big(\mathrm{Homgr}^\bullet_R(\_,\_[m]), D_\bullet\big) = \big(\mathrm{Homgr}^\bullet_R(\_,\_), D_\bullet\big)[m] \\ \big(\mathrm{Homgr}^\bullet_R(\_[m],\_), D_\bullet\big) = \big(\mathrm{Homgr}^\bullet_R(\_,\_)[-m], D_\bullet\big) \\ \quad \big((\_[m] \otimes_R \_)^\bullet, \Delta_\bullet\big) = \big((\_ \otimes_R \_)^\bullet, \Delta_\bullet\big)[m] \\ \quad\quad \big((\mathcal{M} \otimes_R \mathcal{N})^\bullet, \Delta_\bullet\big) \underset{\cong}{\to} \big((\mathcal{N} \otimes_R \mathcal{M})^\bullet, \Delta_\bullet\big)\,,\ m \otimes n \mapsto (-1)^{|m||n|} n \otimes m \end{cases}$$

b) *Les bifoncteurs* $\mathrm{Homgr}^\bullet_R(\_,\_)$ *et* $(\_ \otimes_R \_)^\bullet$ *sont compatibles aux homotopies, variable par variable.*

Indication. À titre d'exemple, montrons (b) pour le foncteur $\mathrm{Homgr}^\bullet_R(\_,\mathcal{N})$. Soit $\alpha : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ un morphisme de R-*mdg*'s et soit $h : M_1 \to M_2[-1]$ un morphisme de R-*mg*'s tel que $\alpha = hd + dh$. Notons $H : \mathrm{Homgr}^\bullet_R(\mathcal{M}_2, \mathcal{N}) \to \mathrm{Homgr}^\bullet_R(\mathcal{M}_1, \mathcal{N})[-1]$ le morphisme de R-*mg*'s $H : \lambda \mapsto (-1)^{|\lambda|}\lambda h$. On a alors

$$\begin{aligned} DH(\lambda) + HD(\lambda) &= \big((-1)^{|\lambda|} d\lambda h + \lambda h d\big) + (-1)^{|\lambda|+1}\big(d\lambda - (-1)^{|\lambda|}\lambda d\big) h \\ &= \lambda(hd + dh) = \lambda\alpha\,. \end{aligned}$$

□

1.2.12. La catégorie triangulée $I\!\!K\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$. Les objets de cette catégorie sont ceux de $\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$, et ses morphismes sont donnés par

$$\mathrm{Mor}_{I\!\!K\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) := \mathrm{Hotgr}_R(\mathcal{M}, \mathcal{N})\,.$$

La catégorie $I\!\!K\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ est additive. Rappelons sa structure triangulée.

- *La translation.* Il s'agit du foncteur $T : I\!\!K\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow I\!\!K\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ déjà introduit dans 1.2.3.
- *Le cône d'un morphisme de mdg's.* Étant donné un morphisme de R-*mdg* $\alpha : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, son « *cône* » $\hat{\boldsymbol{c}}(\alpha) = (\hat{c}(\alpha), \Delta)$, est le R-*mdg* défini par

  $$\hat{c}(\alpha) := B \oplus A[1] \quad \text{et} \quad \Delta(b, a) = (d_B b + \alpha(a), -d_A a)\,.$$

  On note alors $j : \mathcal{B} \to \hat{\boldsymbol{c}}(\alpha)$ l'injection $j(b) := (b, 0)$, et $p : \hat{\boldsymbol{c}}(u) \to \mathcal{A}[1]$ la projection $p(b, a) := a$. On a ainsi le triangle de R-*mdg*'s

  $$\mathcal{A} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{B} \xrightarrow{j} \hat{\boldsymbol{c}}(\alpha) \xrightarrow{p} \mathcal{A}[1]\,. \qquad \text{(Eq.5)}$$

- *Triangle distingué.* On appelle ainsi tout triangle de $I\!\!K\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$,

  $$\mathcal{X} \xrightarrow{u} \mathcal{Y} \xrightarrow{v} \mathcal{Z} \xrightarrow{w} \mathcal{X}[1]\,,$$

  isomorphe à un triangle de la forme (Eq.5), *i.e.* tel qu'il existe un triplet (f, g, h) d'isomorphismes de $I\!\!K\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ rendant commutatif le diagramme

  $$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{X} & \xrightarrow{u} & \mathcal{Y} & \xrightarrow{v} & \mathcal{Z} & \xrightarrow{w} & \mathcal{X}[1] \\ {\scriptstyle f}\big\downarrow\wr & & {\scriptstyle g}\big\downarrow\wr & & {\scriptstyle h}\big\downarrow\wr & & {\scriptstyle f[1]}\big\downarrow\wr \\ \mathcal{A} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{B} & \xrightarrow{j} & \hat{\boldsymbol{c}}(\alpha) & \xrightarrow{p} & \mathcal{A}[1] \end{array}$$

  pour un certain α.

1.2.13. Proposition. *La catégorie $I\!\!K\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$, munie de cette classe de triangles distingués, est une catégorie triangulée.*

Démonstration. **(TR1)** résulte de vérifier que $\hat{\boldsymbol{c}}(\mathrm{id}_{\mathcal{X}}) = 0$ dans $I\!K\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$. Ceci équivaut à montrer que $\mathrm{id}_{\hat{\boldsymbol{c}}(\mathrm{id}_{\mathcal{X}})} = 0$ dans $\mathrm{Hotgr}_R(\hat{\boldsymbol{c}}(\mathrm{id}_{\mathcal{X}}))$. Or, si nous notons

$$h : \big(\mathcal{X} \oplus \mathcal{X}[1]\big) \to \big(\mathcal{X}[-1] \oplus \mathcal{X}\big)\,, \quad h(x,x') = (0,x)\,,$$

on a bien

$$\big(h\Delta + \Delta h\big)(x,x') = h(dx + x', -dx') + (x, -dx) = (x,x')$$

(TR2) Soit $\alpha : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un morphisme de R-*mdg*'s et soit

$$\mathcal{A} \xrightarrow{\ \alpha\ } \mathcal{B} \xrightarrow{\ j\ } \hat{\boldsymbol{c}}(\alpha) \xrightarrow{\ p\ } \mathcal{A}[1]$$

le triangle (exact) associé au cône de α. Nous devons montrer que le triangle

$$\mathcal{B} \xrightarrow{\ j\ } \hat{\boldsymbol{c}}(\alpha) \xrightarrow{\ p\ } \mathcal{A}[1] \xrightarrow{-\alpha[1]} \mathcal{B}[1]$$

est aussi exact. Pour cela, nous montrons qu'il est isomorphe au triangle associé au cône de j.

Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B} \arrow[r, "j"] \arrow[d, equal] & \hat{\boldsymbol{c}}(\alpha) \arrow[r, "p"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\mathbf{I}"] & \mathcal{A}[1] \arrow[r, "-\alpha{[1]}"] \arrow[d, shift right, "\varphi"'] \arrow[dr, phantom, "\mathbf{II}"] & \mathcal{B}[1] \arrow[d, equal] \\
\mathcal{B} \arrow[r, "j"] & \hat{\boldsymbol{c}}(\alpha) \arrow[r, "j'"] & \hat{\boldsymbol{c}}(j) \arrow[r, "p'"] \arrow[u, shift right, "\phi"'] & \mathcal{B}[1]
\end{tikzcd} \tag{Eq.6}$$

où la différentielle de $\hat{\boldsymbol{c}}(j) = \big((B \oplus A[1]) \oplus B[1], \Delta\big)$ est par définition

$$\Delta(b,a',b') = (db + \alpha(a') + b', -da', -db')\,. \tag{Eq.7}$$

et où le morphisme

$$\varphi : A[1] \to \hat{c}(j) = (B \oplus A[1]) \oplus B[1]\,, \quad \varphi = (0 \oplus \mathbf{1}_{A[1]}) \oplus -\alpha[1]$$

est bien un morphisme de R-*mdg*'s de $\mathcal{A}[1]$ vers $\hat{\boldsymbol{c}}(j)$, puisque

$$\Delta(\varphi(a')) = \Delta(0,a',-\alpha(a')) = (\alpha(a') - \alpha(a'), -da', d\alpha(a')) = \varphi(da')$$

d'après (Eq.7).

Avec ces définitions, le diagramme (Eq.6) est commutatif. Cela est évident pour le sous-diagramme **II**. Pour le sous-diagramme **I**, cela résulte de ce que

$j' - \varphi \circ p : \hat{\boldsymbol{c}}(\alpha) \to \hat{\boldsymbol{c}}(j)$ est homotope à zéro. En effet, $h : \hat{c}(\alpha) \to \hat{c}(j)[-1]$, définie par $(b, a') \mapsto (0, 0, b)$, donne l'homotopie voulue :

$$\begin{aligned}(\Delta \circ h + h \circ \Delta)(b, a') &= (b, 0, -db) + (0, 0, db + \alpha(a')) = (b, 0, \alpha(a')) \\ &= (j' - \varphi \circ p)(b, a')\,.\end{aligned}$$

L'application

$$\phi : \hat{c}(j) = B \oplus A[1] \oplus B[1] \to A[1]\,, \quad (b, a', b') \mapsto a'\,,$$

est un morphisme de R-*mdg*'s de $\hat{\boldsymbol{c}}(j)$ vers $\mathcal{A}[1]$ d'après (Eq.7), et c'est un inverse homotopique de φ. En effet, l'égalité $\phi \circ \varphi = \mathrm{id}_{A[1]}$ est immédiate, et la composée $\varphi \circ \phi$ vérifie

$$(1 - \varphi \circ \phi)(b, a', b') = (b, a', b') - (0, a', -\alpha(a')) = (b, 0, b' + \alpha(a'))\,.$$

Or, si nous posons

$$h : B \oplus A[1] \oplus B[1] \to B[-1] \oplus A \oplus B\,, \quad (b, a', b') \mapsto (0, 0, b)\,,$$

on a l'homotopie

$$\begin{aligned}(\Delta \circ h + h \circ \Delta)(b, a', b') &= (b, 0, -db) + (0, 0, db + \alpha(a') + b') \\ &= (1 - \varphi \circ \phi)(b, a', b')\end{aligned}$$

qui montre que ϕ est bien inverse homotopique de φ.

On a prouvé que si (u, v, w) est un triangle distingué, $(v, w, -u[1])$ l'est aussi. En itérant, $(w, -u[1], -v[1])$ est exact. Par ailleurs, on montre aisément que si (u, v, w) est exact, $(u, -v, -w)$ et $(-u[-1], v[-1], w[-1])$ le sont aussi. Par conséquent, si $(w, -u[1], -v[1])$ est exact $(-w[-1], u, v)$ l'est aussi.

(TR3) Étant donné un diagramme de morphismes de R-*mdg*'s

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{B} \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ \mathcal{A}' & \xrightarrow{\alpha'} & \mathcal{B}' \end{array} \tag{$*$}$$

commutatif à homotopie près, *i.e.* tel qu'il existe un morphisme de R-modules gradués $h : A \to B'[-1]$ vérifiant

$$g\,\alpha - \alpha'\,f = h\,d_A + d_{B'}\,h\,,$$

on le complète par les cônes de α et α', ce qui donne le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} A & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{j} & B \oplus A[1] & \xrightarrow{p} & A[1] \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & {\scriptstyle g}\downarrow & \mathbf{I} & {\scriptstyle \varphi}\downarrow & \mathbf{II} & \downarrow{\scriptstyle f[1]} \\ A' & \xrightarrow{\alpha'} & B' & \xrightarrow{j'} & B' \oplus A'[1] & \xrightarrow{p'} & A'[1] \end{array} \tag{$*$}$$

où l'on a posé $\varphi(b,\dot a) = (g(b)+h(\dot a), f(\dot a))$, de sorte que

$$\begin{aligned}\varphi D(b,\dot a) &= \varphi\big(d(b)+\alpha(\dot a), -d(\dot a)\big)\\ &= \big(gd(b)+g\alpha(\dot a)-hd(\dot a), -fd(\dot a)\big)\\ &= \big(dg(b)+\alpha' f(\dot a)+dh(\dot a), -df(\dot a)\big) = D\varphi(b,\dot a)\,,\end{aligned}$$

et φ est un morphisme de *R-mdg*'s de $\hat{\boldsymbol{c}}(\alpha)$ vers $\hat{\boldsymbol{c}}(\alpha)'$.

Comme les sous-diagrammes **I** et **II** de $(*)$ sont trivialement commutatifs dans la catégorie des *R-mdg*'s, cette construction fournit bien le morphisme de triangles demandé par (TR3).

(TR4) On suit la démarche décrite dans 1.1.1. La construction du paragraphe précédent, appliquée au diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X} \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] & \mathcal{Y} \arrow[d, "g"] \\ \mathcal{X} \arrow[r, "u'"] & \mathcal{Y}' \end{tikzcd} \qquad gu - u' = d_{Y'}\circ h + h\circ d_X$$

supposé commutatif modulo l'homotopie $h : X[1]\to Y'$, nous conduit au diagramme commutatif de *R-mg*'s

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "j"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "\oplus"] & Y\oplus X[1] \arrow[d, "\varphi"] \\ Y' \arrow[r, "j'"] & Y'\oplus X[1]\,, \end{tikzcd} \qquad \varphi(y,\dot x) = (g(y)+h(\dot x), \dot x)$$

où φ est un morphisme de *R-mdg*'s de $\hat{\boldsymbol{c}}(u)$ vers $\hat{\boldsymbol{c}}(u')$. Ce diagramme induit alors le morphisme de *R-mdg*'s

$$j'' : \hat{\boldsymbol{c}}(g)\to\hat{\boldsymbol{c}}(\varphi)\,, \quad \psi(y',\dot y) = (y',0,\dot y,0)\,.$$

Soit $\psi : \hat{\boldsymbol{c}}(\varphi)\to\hat{\boldsymbol{c}}(g)$ l'application

$$\begin{array}{ccc}\hat{\boldsymbol{c}}(\varphi) = Y'\oplus X[1]\oplus Y[1]\oplus X[2] & \xrightarrow{\ \psi\ } & Y'\oplus Y[1] = \hat{\boldsymbol{c}}(g)\\ (y'\ ,\quad \dot x\quad ,\quad \dot y\quad ,\quad \ddot x) & \longmapsto & \big(y'-h(\dot x), \dot y+u(\dot x)\big)\end{array}$$

Elle vérifie, d'une part

$$\begin{aligned}&\psi D\big((y',\dot x),(\dot y,\ddot x)\big)\\ &\quad= \psi\big(D(y',\dot x)+\varphi(\dot y,\ddot x), -D(\dot y,\ddot x)\big)\\ &\quad= \psi\big(dy'+u'\dot x+g\dot y+h\ddot x, -d\dot x+\ddot x, -d\dot y-u\ddot x, d\ddot x\big)\\ &\quad= \big((dy'+u'\dot x+g\dot y+h\ddot x)-h(-d\dot x+\ddot x), (-d\dot y-u\ddot x)+u(-d\dot x+\ddot x)\big)\\ &\quad= \big(dy'+u'\dot x+g\dot y+hd\dot x, -d\dot y-ud\dot x\big)\end{aligned}$$

et d'autre part

$$
\begin{aligned}
&D\psi\big((y',\dot{x}),(\dot{y},\ddot{x})\big)\\
&\qquad = D\big((y'-h\dot{x},\dot{y}+u\dot{x}\big) = \big(dy'-dh\dot{x}+g\dot{y}+gu\dot{x},-d(\dot{y}+u\dot{x})\big)
\end{aligned}
$$

de sorte que $\psi\circ D = D\circ\psi$, et ψ est bien un morphisme de R-*mdg*'s.

Le morphisme ψ est l'inverse homotopique de j''. En effet, l'égalité $\psi\circ j'' =$ id est immédiate, et $j''\circ\psi$ vérifie

$$(1-j''\circ\psi)(y',\dot{x},\dot{y},\ddot{x}) = (h\dot{x},\dot{x},-u\dot{x},\ddot{x})\,,$$

mais, si l'on définit

$$H : Y'\oplus X[1]\oplus Y[1]\oplus X[2] \to Y'[-1]\oplus X\oplus Y\oplus X[1]$$

par $H(y',\dot{x},\dot{y},\ddot{x}) := (0,0,0,\dot{x})$, on a

$$(HD+DH)(y',\dot{x},\dot{y},\ddot{x}) = (h\dot{x},\dot{x},-u\dot{x},\ddot{x})$$

de sorte de $j''\circ\psi = 1$ dans $\mathrm{Hotgr}_R(\hat{\boldsymbol{c}}(\varphi),\hat{\boldsymbol{c}}(\varphi))$, ce qui termine la vérification de (TR4). $\square$

1.2.14. Remarque et proposition. La vérification de l'axiome (TR2) dans la démonstration précédente a montré

a) *Pour tout morphisme de R-mdg's $\alpha : \mathcal{A}\to\mathcal{B}$, le diagramme*

$$
\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{B} & \xrightarrow{\ j\ } & \hat{\boldsymbol{c}}(\alpha) & \xrightarrow{\ p\ } & \mathcal{A}[1] & \xrightarrow{-\alpha[1]} & \mathcal{B}[1]\\
\| & & \| & & {\scriptstyle\varphi}\downarrow\uparrow{\scriptstyle\phi} & & \|\\
\mathcal{B} & \xrightarrow{\ j\ } & \hat{\boldsymbol{c}}(\alpha) & \xrightarrow{\ j'\ } & \hat{\boldsymbol{c}}(j) & \xrightarrow{\ p'\ } & \mathcal{B}[1]
\end{array}
$$

où $\varphi(a') = (0,a',-\alpha(a'))$ et $\phi(b,a',b') = a'$, est une équivalence de triangles exacts de $I\!\!K\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$

b) *La donnée d'un triangle distingué $\mathcal{A}\xrightarrow{u}\mathcal{B}\xrightarrow{v}\mathcal{C}\xrightarrow{w}\mathcal{A}[1]$ détermine des isomorphismes canoniques dans $I\!\!K\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$:*

$$\mathcal{A}[1]\cong\hat{\boldsymbol{c}}(v)\,,\quad \mathcal{B}[1]\cong\hat{\boldsymbol{c}}(w)\,,\quad \mathcal{C}\cong\hat{\boldsymbol{c}}(u)\,.$$

1.2.15. Foncteurs cohomologiques. On rappelle qu'on appelle ainsi, tout foncteur $\mathcal{F} : Tr\to Ab$ d'une catégorie triangulée vers une catégorie abélienne, tel que pour tout triangle distingué $\mathcal{X}\xrightarrow{u}\mathcal{Y}\xrightarrow{v}\mathcal{Z}\xrightarrow{w}\mathcal{X}[1]$, la suite

$$\cdots\longrightarrow\mathcal{F}(\mathcal{Z}[-1])\xrightarrow{\mathcal{F}(w[-1])}\mathcal{F}\mathcal{X}\xrightarrow{\mathcal{F}u}\mathcal{F}\mathcal{Y}\xrightarrow{\mathcal{F}v}\mathcal{F}\,\mathcal{Z}\xrightarrow{\mathcal{F}w}\mathcal{F}(\mathcal{X}[1])\longrightarrow\cdots$$

est un complexe exact.

1.2.16. Proposition. *Le foncteur* $\mathrm{H} : I\!\!K\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) \to \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)$ *qui fait correspondre à* $\mathcal{M} = (M, d_M)$ *sa cohomologie* $\mathrm{H}(\mathcal{M}) := \ker(d_M)/\operatorname{im}(d_M)$, *commute au foncteur de translation et c'est un foncteur cohomologique. En particulier, si* $\mathcal{X} \xrightarrow{u} \mathcal{Y} \xrightarrow{v} \mathcal{Z} \xrightarrow{w} \mathcal{X}[1]$ *est un triangle distingué, la suite de R-mg's*

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{H}\,\mathcal{Z}[-1] \xrightarrow{\mathrm{H}\,w[-1]} \mathrm{H}\,\mathcal{X} \xrightarrow{\mathrm{H}\,u} \mathrm{H}\,\mathcal{Y} \xrightarrow{\mathrm{H}\,v} \mathrm{H}\,\mathcal{Z} \xrightarrow{\mathrm{H}\,w} \mathrm{H}\,\mathcal{X}[1] \longrightarrow \cdots$$

est un complexe exact.

Démonstration. Résulte du fait que les triangles exacts dans $I\!\!K\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ correspondent aux cônes de morphismes de R-*mdg*'s. □

1.2.17. Example. Les foncteurs suivants, introduits dans 1.2.7,

$$\mathrm{Hotgr}^*_R(\mathcal{M}, \_), \mathrm{Hotgr}^*_R(\_, \mathcal{M}) : I\!\!K\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) \to \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)$$

sont des foncteurs cohomologiques.

1.2.18. La catégorie $I\!\!D\,\mathbf{Diff}^{\mathbf{gr}}(\boldsymbol{R})$. Notons $\mathcal{S}$ la classe des morphismes de $I\!\!K\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ qui induisent un isomorphisme en cohomologie, *i.e.* la classe de ses quasi-isomorphismes. On a

(FR1) Si $f, g \in \mathcal{S}$, et si fg est défini, alors $fg \in \mathcal{S}$. Évident.

(FR2) Étant donné $f : \mathcal{W} \to \mathcal{Y}$ et $s : \mathcal{W} \to \mathcal{X}$, avec $s \in \mathcal{S}$,

le diagramme
$$\begin{tikzcd} \mathcal{W} \arrow[r, "s"] \arrow[d, "f"'] & \mathcal{X} \\ \mathcal{Y} & \end{tikzcd}$$
se complète en un diagramme commutatif
$$\begin{tikzcd} \mathcal{W} \arrow[r, "s"] \arrow[d, "f"'] & \mathcal{X} \arrow[d, "g"] \\ \mathcal{Y} \arrow[r, "t"'] & \mathcal{Z} \end{tikzcd}$$

avec $t \in \mathcal{S}$. Et de même avec les flèches inversées.

En effet, dans le premier cas, il suffit d'appliquer les axiomes (TR-1,2,3) pour justifier le diagramme de triangles exacts

$$\begin{tikzcd} \hat{\boldsymbol{c}}(s)[-1] \arrow[r, "w"] \arrow[d, equal] & \mathcal{W} \arrow[r, "s"] \arrow[d, "f"] & \mathcal{X} \arrow[r] \arrow[d, dotted, "g"] & \hat{\boldsymbol{c}}(s) \arrow[d, equal] \\ \hat{\boldsymbol{c}}(s)[-1] \arrow[r, "f\circ w"] & \mathcal{Y} \arrow[r, "t"] & \mathcal{Z} = \hat{\boldsymbol{c}}(f \circ u) \arrow[r] & \hat{\boldsymbol{c}}(s) \end{tikzcd}$$

où $t \in \mathcal{S}$ puisque $\hat{\boldsymbol{c}}(s)$ est acyclique ([2]). Le cas des flèches inversées se traite de manière entièrement analogue.

2. On prendra garde du fait que la somme amalgamée de R-*mdg*'s

$$\mathcal{Z} = \mathcal{Y} \oplus_{\mathcal{W}} \mathcal{X} := (\mathcal{X} \oplus \mathcal{Y})/\{(f(w), s(w)) \mid w \in \mathcal{W}\}$$

ne donne pas toujours la bonne réponse pour (FR2). En effet, on peut montrer que dans le diagramme de gauche ci-dessous, le morphisme i_1 est un quasi-isomorphisme lorsque s ou f est injectif, mais des contrexemples existent autrement, par exemple, dans le diagramme de droite ci-dessous où A et B sont des R-modules gradués non nuls, on a $(B/A) \oplus_{\mathcal{W}} A = 0$ et i_1 n'est pas un quasi-isomorphisme.

(FR3) Pour $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ donné, il y a équivalence entre les assertions suivantes.

i) Il existe $s \in \mathcal{S}$ tel que $fs = 0$, ii) Il existe $t \in \mathcal{S}$ tel que $tf = 0$.

En effet, dans (i), complétons le diagramme de R-*mdg*'s

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{X} \arrow[r, "s"] & \mathcal{Y} \arrow[d, "f"] \\
 & \mathcal{Y}'
\end{tikzcd}$$

en un diagramme de triangles exacts

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{X} \arrow[r, "s"] \arrow[d] & \mathcal{Y} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "f"] & \hat{\boldsymbol{c}}(s) \arrow[r] \arrow[d, dotted, "u"] & \mathcal{X}[1] \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \mathcal{Y}' \arrow[r, equal] & \mathcal{Y}' \arrow[r] \arrow[d, dotted, "t"] & 0[1] \\
 & & \hat{\boldsymbol{c}}(u) \arrow[d, dotted] & \\
 & & \hat{\boldsymbol{c}}(s)[1] &
\end{tikzcd}$$

maintenant, comme s est un quasi-isomorphisme et que le foncteur cohomologie $H : \mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) \to \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)$ est cohomologique (1.2.16), le R-*mdg* $\hat{\boldsymbol{c}}(s)$ est acyclique ce qui implique, pour la même raison, que t est un quasi-isomorphisme. Or, $tf = tuj = 0$. L'implication (ii)⇒(i) se démontre de manière analogue.

1.2.19. Proposition. *Les propriétés* (FR-1,2,3) *ci-dessus font de $\mathcal{S}$ un système multiplicatif de $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$. Notons $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)_{\mathcal{S}}$ la catégorie obtenue de $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ en inversant ses quasi-isomorphismes. Notons*

$$\boldsymbol{Q} : \mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) \to \mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)_{\mathcal{S}}$$

le foncteur canonique de « localisation ». Alors

a) *Il existe une et une seule structure triangulée sur $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)_{\mathcal{S}}$ qui fait de $\boldsymbol{Q}$ un δ-foncteur,* i.e. *transforme triangle distingué en triangle distingué.*

b) *$\boldsymbol{Q}(s)$ est un isomorphisme pour tout $s \in \mathcal{S}$.*

c) *Tout foncteur G de $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ vers une catégorie D, tel que $G(s)$ est inversible pour tout $s \in \mathcal{S}$, se factorise à travers $\boldsymbol{Q}$.*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{W} \arrow[r, "s"] \arrow[d, "f"] & \mathcal{X} \arrow[d, "i_2"'] \\
\mathcal{Y} \arrow[r, "i_1"] & \mathcal{Y} \oplus_{\mathcal{W}} \mathcal{X}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{W} := (A \hookrightarrow B) \arrow[r, "s", "p_{B/A}"'] \arrow[d, "p_A"', "f"] & (B/A) \arrow[d, "i_2"'] \\
A \arrow[r, "i_1"] & A \oplus_{\mathcal{W}} (B/A) = 0
\end{tikzcd}$$

Démonstration. C'est la proposition 3.2 de [H] (page 32), elle résulte de montrer que $\mathcal{S}$ est compatible à la triangulation de $I\!\!K\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$, *i.e.* les deux axiomes suivants sont vérifiés

- (FR4) $\mathcal{S}$ est stable par le foncteur de translation.
- (FR5) Si dans un morphisme de triangles exacts, deux morphismes sont dans $\mathcal{S}$, le troisième l'est aussi.

Propriétés clairement satisfaites dans notre cas. □

1.2.20. Définition. La catégorie $I\!\!D\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) := I\!\!K\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)_{\mathcal{S}}$ est appelée la « *catégorie dérivé* » de $I\!\!K\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$.

2. *R*-mdg's projectifs

2.1. *R-mdg* simple associé à un complexe de *R-mdg*'s

2.1.1. Foncteur « *R-mdg simple associé* ». Soit

$$(\mathcal{M}_\bullet, \epsilon_\bullet) := \Big(\cdots \longrightarrow \mathcal{M}_2 \xrightarrow{\epsilon_2} \mathcal{M}_1 \xrightarrow{\epsilon_1} \mathcal{M}_0 \xrightarrow{\epsilon_0} \mathcal{M}_{-1} \xrightarrow{\epsilon_{-1}} \cdots \Big)$$

un complexe de *R-mdg*'s. On pose dans $\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)$

$$\left\{ \begin{aligned} \Sigma\,\mathcal{M}_\bullet &:= \textstyle\bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} M_m[m] \\ d_\Sigma|_{M_m} &:= (-1)^m d_m + \epsilon_m \end{aligned} \right. \qquad \left| \qquad \begin{array}{ccc} M_m[m][1] & \dashrightarrow & \bullet \\ {\scriptstyle d_m[m]}\uparrow & & \uparrow \\ M_m[m] & \xrightarrow{\epsilon_m} & (M_{m-1}[m-1])[1] \end{array} \right.$$

De même, si $\alpha_\bullet : (\mathcal{M}_\bullet, \epsilon_\bullet) \to (\mathcal{M}'_\bullet, \epsilon'_\bullet)$ est un morphisme de complexes de *R-mdg*'s, on pose

$$\Sigma\,\alpha_\bullet : \Sigma\,\mathcal{M}_\bullet \to \Sigma\,\mathcal{M}'_\bullet\,,$$

le morphisme de *R-mg*'s $\Sigma\,\alpha_\bullet = \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} \alpha_m$.

Le lemme suivant relève de vérifications élémentaires que nous n'explicitons pas.

2.1.2. Lemme et définitions

a) *Le couple* $\big(\Sigma\,\mathcal{M}_\bullet, d_\Sigma\big)$ *est un R-mdg, c'est «* le *R-mdg* simple associé au complexe $(\mathcal{M}_\bullet, \epsilon_\bullet)$ *».*

b) *Si* $\alpha_\bullet : (\mathcal{M}_\bullet, \epsilon_\bullet) \to (\mathcal{M}'_\bullet, \epsilon'_\bullet)$ *est un morphisme de complexes de R-mdg's,*

$$\Sigma\,\alpha_\bullet : \Sigma(\mathcal{M}_\bullet, \epsilon_\bullet) \to \Sigma(\mathcal{M}'_\bullet, \epsilon'_\bullet)$$

est un morphisme de R-mdg's.

c) *Dans* (b), *soit* $\{h_m : \mathcal{M}_m \to \mathcal{M}_{m+1} \mid m \in \mathbb{Z}\}$ *une famille de morphismes de R-mdg's réalisant une homotopie entre deux morphismes de complexes de R-mdg's* $\alpha_\bullet, \beta_\bullet : (\mathcal{M}_\bullet, \epsilon_\bullet) \to (\mathcal{M}'_\bullet, \epsilon'_\bullet)$, i.e. *on a*

$$\alpha_m - \beta_m = \epsilon_{m+1} \circ h_m + h_{m-1} \circ \epsilon_m\,, \quad \forall m \in \mathbb{Z}\,,$$

alors, le morphisme de R-mg's

$$\textstyle\sum h_\bullet : \sum \mathcal{M}_\bullet \to \sum \mathcal{M}_\bullet[-1]\,, \quad \sum h_\bullet := \bigoplus_{m\in\mathbb{Z}} h_m\,,$$

est une homotopie entre $\sum \alpha_\bullet$ *et* $\sum \beta_\bullet$

d) *Le foncteur « R-mdg* simple associé *» est la correspondance*

$$\textstyle\sum : \mathcal{C}^* \,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)\,,$$

de la catégorie $\mathcal{C}^* \,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ *des* complexes *de R-mdg's, vers la catégorie de R-mdg's. C'est un foncteur covariant, additif, exact et compatible aux homotopies.*

2.1.3. Qestions d'acyclicité du *R-mdg* simple associé. Nous rappelons dans ce paragraphe et les suivants des constructions et résultats bien connus pour les complexes d'objets d'une catégorie abélienne, en les transposant dans le contexte des R-*mdg*'s.

2.1.4. Proposition

a) *Pour tout complexe* ***exact*** $(\mathcal{M}_\bullet, \epsilon_\bullet)$ *de R-mdg's de différentielles nulles,* i.e. *tels que* $d_{\mathcal{M}_k} = 0$, *le R-mdg* $\sum(\mathcal{M}_\bullet, \epsilon_\bullet)$ *est acyclique.*

b) *Pour tout complexe de R-mdg's borné supérieurement*

$$(\mathcal{M}_\bullet, \epsilon_\bullet) = \big(\cdots \longrightarrow \mathcal{M}_{\ell+2} \xrightarrow{\epsilon_{\ell+2}} \mathcal{M}_{\ell+1} \xrightarrow{\epsilon_{\ell+1}} \mathcal{M}_\ell \longrightarrow \mathbf{0} \longrightarrow \cdots\big)\,,$$

où les $\mathcal{M}_k$ *sont* ***acycliques****, le R-mdg* $\sum(\mathcal{M}_\bullet, \epsilon_\bullet)$ *est acyclique.*

c) *Pour tout complexe* ***exact*** *de R-mdg's borné inférieurement*

$$(\mathcal{M}_\bullet, \epsilon_\bullet) = \big(\cdots \longrightarrow \mathbf{0} \longrightarrow \mathcal{M}_\ell \xrightarrow{\epsilon_\ell} \mathcal{M}_{\ell-1} \xrightarrow{\epsilon_{\ell-1}} \mathcal{M}_{\ell-2} \xrightarrow{\epsilon_{\ell-2}} \cdots\big)\,,$$

le R-mdg $\sum(\mathcal{M}_\bullet, \epsilon_\bullet)$ *est acyclique.*

d) *Pour tout complexe de R-mdg's borné supérieurement et inférieurement*

$$(\mathcal{M}_\bullet, \epsilon_\bullet) = \big(\cdots \longrightarrow \mathbf{0} \longrightarrow \mathcal{M}_m \xrightarrow{\epsilon_m} \cdots \xrightarrow{\epsilon_{\ell+1}} \mathcal{M}_\ell \longrightarrow \mathbf{0} \longrightarrow \cdots\big)\,,$$

qui est ou bien exact, ou bien tel que les $\mathcal{M}_i$ *sont acycliques, le R-mdg* $\sum(\mathcal{M}_\bullet, \epsilon_\bullet)$ *est acyclique.*

Démonstration. Montrons (b). Un élément $\overline{x} \in \Sigma(\mathcal{M}_\bullet, \epsilon_\bullet)$ de degré $m \in \mathbb{Z}$ se décompose de manière unique sous la forme

$$\overline{x} = x_a \oplus x_{a-1} \oplus \cdots \oplus x_\ell\,, \quad \text{avec} \quad x_i \in M_i^{i+m}\,,$$

et, de même,

$$d_\Sigma(\overline{x}) = d'_a x_a \oplus \big(\epsilon_a x_a + d'_{a-1} x_{a-1}\big) \oplus \cdots \oplus \big(\epsilon_1 x_1 + d'_\ell x_\ell\big)\,,$$

où nous avons noté $d'_a = (-1)^a d_{\mathcal{M}_a}$ et où $\big(\epsilon_i x_i + d'_{i-1} x_{i-1}\big) \in M_{i-1}^{i+m}$. Par conséquent, si $\overline{x}$ est un cocycle, l'égalité $d_\Sigma(\overline{x}) = 0$ implique que $d'_a x_a = 0$, et comme $\mathcal{M}_a$ est supposé acyclique, il existe $y_a \in M_a^{a+m-1}$ tel que $d'_a(y_a) = x_a$. On voit donc que le cocycle $\overline{x}$ est cohomologue à $\overline{x} - d_\Sigma(y_a)$ qui s'écrit sous la forme

$$\overline{x} - d_\Sigma(y_a) = w_{a-1} \oplus x_{a-2} \oplus \cdots \oplus x_\ell\,, \quad \text{avec} \quad w_i \in M_i^{i+m}\,.$$

Ainsi, de proche en proche, on montre que tout cocycle de $\Sigma(\mathcal{M}_\bullet, \epsilon_\bullet)$ est cohomologue à un cocycle de $\mathcal{M}_{\ell-1} = \mathbf{0}$. □

2.1.5. Troncatures bêtes. Étant donnés des entiers $m \geq \ell$ et un complexe de R-*mdg*'s $(\mathcal{M}_\bullet, \epsilon_\bullet)$, on notera $\mathcal{M}_{m,\ell}$ le complexe

$$\mathcal{M}_{m,\ell} := \big(0 \to \mathcal{M}_m \xrightarrow{\epsilon_m} \mathcal{M}_{m-1} \xrightarrow{\epsilon_{m-1}} \cdots \xrightarrow{\epsilon_{\ell-1}} \mathcal{M}_\ell \to 0\big)$$

De même, si $\alpha_\bullet : (\mathcal{M}_\bullet, \epsilon_\bullet) \to (\mathcal{M}'_\bullet, \epsilon'_\bullet)$ est un morphisme de complexes, on note $\alpha_{m,\ell} = \mathcal{M}_{m,\ell} \to \mathcal{M}_{m,\ell}$ le morphisme de complexes qui vaut α_i sur M_i est s'annule ailleurs, soit

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathcal{M}_{m,\ell} := \big(0 \to & \mathcal{M}_m & \xrightarrow{\epsilon_m} & \mathcal{M}_{m-1} & \xrightarrow{\epsilon_{m-1}} \cdots \xrightarrow{\epsilon_{\ell-1}} & \mathcal{M}_\ell & \to 0\big) \\
{\scriptstyle\alpha_{m,\ell}}\downarrow & {\scriptstyle\alpha_m}\downarrow & & {\scriptstyle\alpha_{m-1}}\downarrow & & {\scriptstyle\alpha_\ell}\downarrow & \\
\mathcal{M}'_{m,\ell} := \big(0 \to & \mathcal{M}'_m & \xrightarrow{\epsilon'_m} & \mathcal{M}'_{m-1} & \xrightarrow{\epsilon'_{m-1}} \cdots \xrightarrow{\epsilon'_{\ell-1}} & \mathcal{M}'_\ell & \to 0\big)
\end{array}$$

on obtient ainsi le foncteur de « *troncature bête* »

$$(\_)_{m,\ell} : \mathcal{C}^*\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathcal{C}^*\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$$

clairement exact.

On défini de manière analogue les foncteurs $(\_)_{+\infty,m}$ et $(\_)_{\ell,-\infty}$.

Notation. Pour tout complexe de R-*mdg*'s $(\mathcal{M}_\bullet, \epsilon_\bullet)$ et tout $m \in \mathbb{Z}$, on note

$$\mathcal{M}_{\geq m} := \Sigma\,\mathcal{M}_{+\infty,m}\,, \quad \mathcal{M}_{\leq m} := \Sigma\,\mathcal{M}_{m,-\infty}\,,$$

et de même pour les troncatures des morphismes.

2.1.6. Morphisme de connexion et quasi-isomorphismes Pour tout complexe de *R-mdg*'s $(\mathcal{M}_\bullet, \epsilon_\bullet)$ et $m \in \mathbb{Z}$ donnés, on a les morphismes suivants entre les troncatures bêtes :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_{m-1,-\infty} \arrow[d, hook, "\iota_{m-1,-\infty}"] & & & & \mathbf{0} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{M}_{m-1} \arrow[r, "\epsilon_{m-1}"] \arrow[d, equal] & \mathcal{M}_{m-2} \arrow[r, "\epsilon_{m-2}"] \arrow[d, equal] & \cdots \\
\mathcal{M}_\bullet \arrow[d, two heads, "\pi_{\infty,m}"] & \cdots \arrow[r] & \mathcal{M}_{m+2} \arrow[r, "\epsilon_{m+2}"] \arrow[d, equal] & \mathcal{M}_{m+1} \arrow[r, "\epsilon_{m+1}"] \arrow[d, equal] & \mathcal{M}_m \arrow[r, "\epsilon_m"] \arrow[d, equal] & \mathcal{M}_{m-1} \arrow[r, "\epsilon_{m-1}"] \arrow[d] & \mathcal{M}_{m-2} \arrow[r, "\epsilon_{m-2}"] & \cdots \\
\mathcal{M}_{\infty,m} & \cdots \arrow[r] & \mathcal{M}_{m+2} \arrow[r, "\epsilon_{m+2}"] & \mathcal{M}_{m+1} \arrow[r, "\epsilon_{m+1}"] & \mathcal{M}_m \arrow[r] & \mathbf{0}
\end{tikzcd}$$

donnant la suite exacte courte de complexes de *R-mdg*'s

$$\mathbf{0} \to \mathcal{M}_{m-1,-\infty} \xhookrightarrow{\iota_{m-1,-\infty}} \mathcal{M}_\bullet \xrightarrow{\pi_{\infty,m}} \mathcal{M}_{\infty,m} \to \mathbf{0}$$

clairement scindée dans $\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)$, de même que la suite de *R-mdg*'s

$$\mathbf{0} \to \Sigma\,\mathcal{M}_{m-1,-\infty} \xhookrightarrow{\iota_{m-1,-\infty}} \Sigma\,\mathcal{M}_\bullet \xrightarrow{\pi_{\infty,m}} \Sigma\,\mathcal{M}_{\infty,m} \to \mathbf{0}\,.$$

On en déduit le triangle distingué de *R-mdg*'s (*cf.* 4.1.1)

$$\Sigma\,\mathcal{M}_{m-1,-\infty} \xrightarrow{\iota_{m-1,-\infty}} \Sigma\,\mathcal{M}_\bullet \xrightarrow{\pi_{\infty,m}} \Sigma\,\mathcal{M}_{\infty,m} \xrightarrow{\widetilde{\epsilon}_m} \Sigma\,\mathcal{M}_{m-1,-\infty}[1]$$

où $\widetilde{\epsilon}_m$ est le morphisme de « *connexion* » associé au morphisme de complexes

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathcal{M}_{m+2} \arrow[r, "\epsilon_{m+2}"] \arrow[d] & \mathcal{M}_{m+1} \arrow[r, "\epsilon_{m+1}"] \arrow[d] & \mathcal{M}_m \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon_m"] & \mathbf{0} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{0} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \mathbf{0} \arrow[r] & \mathbf{0} \arrow[r] & \mathcal{M}_{m-1} \arrow[r, "\epsilon_{m-1}"] & \mathcal{M}_{m-2} \arrow[r, "\epsilon_{m-2}"] & \mathcal{M}_{m-3} \arrow[r, "\epsilon_{m-3}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

La proposition suivante sera souvent utilisée sans référence.

2.1.7. Proposition. *Avec les données en cours, le morphisme de R-mdg's*

$$\mathcal{M}_{\geq m} \xrightarrow{\widetilde{\epsilon}_m} \mathcal{M}_{\leq m-1}[1]$$

est un quasi-isomorphisme si, et seulement si, $\Sigma(\mathcal{M}_\bullet, \epsilon_\bullet)$ *est acyclique.*

2.2. La paire adjointe $(\mathcal{F}, \mathrm{Z})$

2.2.1. Le foncteur $\mathcal{F} : \mathbf{Mod}^{\mathbf{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathbf{Diff}^{\mathbf{gr}}(R)$. Si M est un R-module gradué, on note $\mathcal{F}(M) := (M, D_{\mathcal{F}})$ le R-module gradué M muni de la différentielle nulle, *i.e.* $D_{\mathcal{F}} = 0$. Si $\beta : M \to N$ est un morphisme *mg*'s, on note $\mathcal{F}(\beta) : \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(N)$, le morphisme $x \mapsto \beta x$. La correspondance ainsi définie

$$\mathcal{F}(\_) = (\_, 0) : \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$$

est clairement fonctorielle et exacte.

2.2.2. Le foncteur Z : $\mathbf{Diff^{gr}}(\boldsymbol{R}) \rightsquigarrow \mathbf{Mod^{gr}}(\boldsymbol{R})$. Si $\mathcal{M} = (M, d_M)$ est un *R-mdg*; on note $\mathrm{Z}(\mathcal{M})$ le sous-*R-mg* des cocycles, *i.e.* $\mathrm{Z}(\mathcal{M}) := \ker(d_M)$, et si $\alpha : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ est un morphisme de *R-mdg*'s, on note $\mathrm{Z}(\alpha) := \alpha|_{\mathrm{Z}(\mathcal{M})}$. Il est immédiat de constater, que la donnée d'un morphisme de *R-mdg*'s $\alpha : \mathcal{F}(M) \to \mathcal{N}$ équivaut à la donnée d'un morphisme de *R-mg*'s $\alpha : M \to \mathrm{Z}(\mathcal{N})$, de sorte que :

Lemme. *La paire de foncteurs* $(\mathcal{F}, \mathrm{Z})$ *est adjointe.*

Remarque. On voit ainsi que $\mathcal{F}(M)$ à peu de chances d'être un *R-mdg* projectif, même si M est projectif, car $\mathrm{Z}(\_)$ n'est pas exact.

2.3. La paire adjointe $(\mathcal{E}, \mathrm{o})$

2.3.1. Foncteur « *oubli* » o : $\mathbf{Diff^{gr}}(\boldsymbol{R}) \rightsquigarrow \mathbf{Mod^{gr}}(\boldsymbol{R})$. C'est le foncteur

$$\mathrm{o} : \mathrm{Diff^{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathrm{Mod^{gr}}(R)\,, \quad \mathcal{N} = (N, d_N) \rightsquigarrow N\,,$$

qui oublie la différentielle. Il s'agit clairement d'un foncteur exact.

2.3.2. Le foncteur $\mathcal{E}$: $\mathbf{Mod^{gr}}(\boldsymbol{R}) \rightsquigarrow \mathbf{Diff^{gr}}(\boldsymbol{R})$. Si M est un R-module gradué, on note $\mathcal{E}(M)$ le R-module gradué $\varepsilon(M) := M[-1] \oplus M$ muni de la différentielle $D_{\mathcal{E}} : \varepsilon(M) \to \varepsilon(M)$, $D_\varepsilon(x, y) = (y, 0)$. Si $\beta : M \to N$ est un morphisme *mg*'s, on note $\varepsilon(\beta) : \varepsilon(M) \to \varepsilon(N)$ (resp. $\mathcal{E}(\beta) : \mathcal{E}(M) \to \mathcal{E}(N)$), le morphisme $(x, y) \mapsto (\beta x, \beta y)$. Les correspondances ainsi définies

$$\varepsilon(\_) : \mathrm{Mod^{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathrm{Mod^{gr}}(R)\,, \quad \mathcal{E}(\_) = (\varepsilon(\_), D_\varepsilon) : \mathrm{Mod^{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathrm{Diff^{gr}}(R)$$

sont clairement fonctorielles et exactes. On notera

$$[\_] : \mathrm{id}_{\mathrm{Mod^{gr}}(R)}(\_) \to \varepsilon(\_)$$

l'inclusion naturelle définie par $[M] := \{0\} \oplus M \subseteq M[-1] \oplus M = \varepsilon(M)$.

2.3.3. Lemme. *Les R-mdg's* $\mathcal{E}(M)$ *sont homotopiquement nuls.*

Démonstration. Soit $h : \varepsilon(M) \to \varepsilon(M)[-1]$, $(x, y) \mapsto (y, 0)$. On a

$$(D_\varepsilon\, h + h\, D_\varepsilon)(x, y) = (0, y) + (x, 0)\,,$$

ce qui montre que $\mathrm{id}_{\mathcal{E}(M)}$ est homotope à 0. □

2.3.4. Morphismes d'adjonction. Un morphisme $\alpha : (\varepsilon(M), D_\varepsilon) \to (N, d_N)$ de R-*mdg*'s est entièrement déterminé par sa restriction à $[M]$, puisque l'on a $\varepsilon(M) = D_\varepsilon([M]) \oplus [M]$ et qu'alors

$$\alpha(x, y) = \alpha(D_\varepsilon(0, x) + (0, y)) = d_N(\alpha(0, x)) + \alpha(0, y).$$

Cette correspondance $\alpha \mapsto \alpha|_{[M]}$, donne ainsi lieu à un isomorphisme naturel

$$\Phi_{M,(N,d_N)} : \mathrm{Mor}_{\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)}\big((\varepsilon(M), D_\varepsilon), (N, d_N)\big) \cong \mathrm{Homgr}_R(M, N)$$

et aux morphismes d'adjonction

$$\begin{cases} \mathrm{ad}_{(N,d_N)} : (\varepsilon(N), D_\varepsilon) \twoheadrightarrow (N, d_N)\,,\ \mathrm{ad}_{(N,d_N)} := \Phi^{-1}_{N,(N,d_N)}(\mathrm{id}_N) \\ \mathrm{ad}_M : M \hookrightarrow \varepsilon(M)\,,\ \mathrm{ad}_M := \Phi_{M,(\varepsilon(M),D_\varepsilon)}(\mathrm{id}_{(\varepsilon(M),D_\varepsilon)}) \end{cases}$$

2.4. Existence de *R-mdg*'s projectifs

2.4.1. Théorème

a) *Le couple* $(\mathcal{E}, \mathrm{o})$ *est une paire de foncteurs adjoints. En particulier,* $\mathcal{E}$ *respecte la projectivité et* 'o' *respecte l'injectivité. Le morphisme d'adjonction* $\mathrm{ad}_{\mathcal{N}} : \mathcal{E}(\mathrm{o}(\mathcal{N})) \twoheadrightarrow \mathcal{N}$ *est surjectif.*

b) *Désignons par* 'Q' *un* R-mg *projectif. Tout* R-mdg *est quotient d'un* $\mathcal{E}(Q)$. *Tout* R-mdg *projectif est de la forme* $\mathcal{E}(Q)$, *et est homotopiquement nul. Le foncteur* 'o' *respecte la projectivité.*

c) *La catégorie* $\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ *possède suffisamment de projectifs. Plus précisément, tout* R-mdg $\mathcal{N}$ *admet une résolution projective, et toutes ses résolutions projectives sont de la forme*

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{E}(Q_m) \xrightarrow{\epsilon_m} \cdots \longrightarrow \mathcal{E}(Q_0) \xrightarrow{\epsilon_0}\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathcal{N} \to 0$$

avec Q_i *projectif dans* $\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)$, *et chaque* $\mathcal{E}(Q_i)$ *homotopiquement nul.*

d) *Si* R *est de dimension globale finie* ([3]), *pour tout* R-mdg $\mathcal{M}$ *il existe un quasi-isomorphisme surjectif* $\mathcal{Q} \twoheadrightarrow \mathcal{M}$, *avec* $\mathrm{o}(\mathcal{Q})$ *projectif.*

Démonstration

a) Ces propriétés sont claires d'après les préliminaires 2.3.4 et puisque les foncteurs $\mathcal{E}$ et 'o' sont exacts.

3. On rappelle que pour tout anneau commutatif $\boldsymbol{A}$ (gradué) et tout $\boldsymbol{A}$-module (gradué) M, on appelle « *dimension projective de* M », notée $\dim_{\mathrm{proj}}(M)$, la longueur minimale des résolutions projectives de M. La « *dimension globale de* $\boldsymbol{A}$ », notée $\dim_{\mathrm{gb}}(\boldsymbol{A})$, est alors le sup des dimensions projectives des $\boldsymbol{A}$-modules (gradués).

b) Si $\mathcal{N} = (N, d_N)$ est un *R-mdg*, et si $\pi : Q \twoheadrightarrow N$ une surjection de *R-mg*'s avec Q projectif dans $\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)$, la composée des surjections

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}(Q) \arrow[r, two heads, "\mathcal{E}(\pi)"] \arrow[rr, bend right, two heads, "\mathrm{ad}(\mathcal{N})\circ\mathcal{E}(\pi)"'] & \mathcal{E}(N) \arrow[r, two heads, "\mathrm{ad}(\mathcal{N})"] & \mathcal{N} \end{tikzcd}$$

réalise $\mathcal{N}$ comme quotient de $\mathcal{E}(Q)$, qui est projectif d'après (a). Supposons maintenant que $\mathcal{N}$ est un *R-mdg* projectif. La surjection $\mathrm{ad}(\mathcal{N}) \circ \mathcal{E}(\pi)$ est alors scindée, et $\mathcal{N}$ est facteur direct de $\mathcal{E}(Q)$ dans $\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$.On en déduit aussitôt que

- Le *R-mdg* $\mathcal{N}$ est acyclique.
- Le *R-mg* $\mathrm{im}(d_N)$ est facteur direct de $\mathrm{im}(D_\varepsilon) = Q[-1] \oplus \{0\}$ et est donc projectif. Le *R-mg* N se décompose alors en $N = B \oplus Z$, telle que $\delta : B \to \mathrm{im}(d_N)[1]$, $x \mapsto d_N(x)$, est un isomorphisme (B est donc projectif), et telle que $Z = \ker(d_N)$.
- L'inclusion $B \subseteq N$ induit, via $\Phi_{B,\mathcal{N}}$ (2.3.4), un morphisme canonique $\mathcal{E}(B) \to \mathcal{N}$ qui est un isomorphisme, car $\ker(d_N) = \mathrm{im}(d_N)$.
- $\mathcal{E}(B)$ est homotopiquement trivial d'après 2.3.3.
- $\mathrm{o}(\mathcal{N}) = B[-1] \oplus B$ est bien un *R-mg* projectif.

c) Évident d'après la question précédente.

d) Par (c), un *R-mdg* $\mathcal{N}$ admet résolutions projectives dans $\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{P}_n \xrightarrow{\epsilon_n} \cdots \longrightarrow \mathcal{P}_1 \xrightarrow{\epsilon_1} \mathcal{P}_0 \overset{\epsilon_0}{\twoheadrightarrow} \mathcal{N} \longrightarrow \mathbf{0}\,,$$

et nous savons déjà que $\mathrm{o}(\mathcal{P}_n) \twoheadrightarrow \mathrm{o}(\mathcal{N})$ est une résolution projective dans $\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)$. Par conséquent, $\mathrm{o}(\ker(\epsilon_n))$ est projectif si $n \geq \dim_{\mathrm{gb}}(R)$, et alors la suite

$$0 \longrightarrow \ker(\epsilon_n) \longrightarrow \mathcal{P}_n \xrightarrow{\epsilon_n} \cdots \longrightarrow \mathcal{P}_1 \xrightarrow{\epsilon_1} \mathcal{P}_0 \overset{\epsilon_0}{\twoheadrightarrow} \mathcal{N} \longrightarrow \mathbf{0}$$

est une résolution de longueur finie de $\mathcal{N}$ par des *R-mdg*'s qui sont des *R-mg*'s projectifs. Le morphisme canonique

$$\sum \big(\mathbf{0} \to \ker(\epsilon_n) \to \mathcal{P}_n \to \cdots \to \mathcal{P}_0 \to \mathbf{0}\big) \xrightarrow{\sum \epsilon} \mathcal{N}\,,$$

où $\sum(B^*_\bullet)$ désigne le *R-mdg* simple associé au bicomplexe $B^*_\bullet$ (2.1), et où $\sum \epsilon|_{\mathcal{P}_0} := \epsilon_0$ et est nul sur les autres termes, satisfait les conditions demandées. $\square$

3. Présentations projectives de *R-mdg*'s

3.1. Résolutions projectives et présentations projectives

Le théorème 2.4.1 montre dans son assertion (c) que tout *R-mdg* $\mathcal{M}$ admet des résolutions $\cdots \mathcal{P}_1 \xrightarrow{\epsilon_1} \mathcal{P}_0 \overset{\epsilon_0}{\twoheadrightarrow} \mathcal{M}$, où chaque $\mathcal{P}_m$ est un *R-mdg* projectif. Ces résolutions sont des objets de la catégorie $\mathcal{C}^*(\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R))$ des *complexes* de *R-mdg*'s, et nous pouvons envisager de revenir à la catégorie $\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ en appliquant le foncteur « *R-mg's simple associé* » introduit dans 2.1

$$\sum : \mathcal{C}^* \,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)\,,$$

ce qui donne le morphisme induit

$$\sum \epsilon : \sum \mathcal{P}_\bullet \twoheadrightarrow \mathcal{M}$$

défini par $\sum \epsilon|_{\mathcal{P}_0} := \epsilon_0$ et 0 ailleurs. Cette procédure simple et naturelle n'est pourtant d'aucun intérêt dans la mesure où $\sum \mathcal{P}_\bullet$ est un *R-mdg* acyclique d'après 2.4.1-(b) et 2.1.4-(b) (et homotopiquement nul par 3.2.1-(a)). Nous avons cependant remarqué dans la preuve de 2.4.1-(d) que les complexes simples associés aux troncatures intelligentes du complexe $\mathcal{P}_\bullet$ sont bien quasi-isomorphes à $\mathcal{M}$. Lorsque $\mathrm{o}(\mathcal{M})$ est de dimension projective finie d et que la troncature intelligente se fait au delà de d, cette procédure fournit un représentant de la classe de quasi-isomorphie de $\mathcal{M}$ dont le *R-mg* sous-jacent est projectif. Cette observation justifie la définition suivante.

3.1.1. Définition. On appellera « *présentation projective* » d'un *R-mdg* $\mathcal{N}$, tout quasi-isomorphisme *surjectif* de *R-mdg*'s $\mathcal{Q} \twoheadrightarrow \mathcal{N}$, tel que $\mathrm{o}(\mathcal{Q})$ est un *R-mg* projectif.

3.1.2. Remarque. La terminologie peut être trompeuse dans la mesure où dans une présentation projective $\mathcal{Q} \twoheadrightarrow \mathcal{N}$, le *R-mdg* $\mathcal{Q}$ n'est généralement pas projectif dans $\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$. En fait, c'est le cas si, et seulement si, $\mathcal{N}$ est acyclique d'après 2.4.1-(b).

3.1.3. Remarques sur l'existence de présentations projectives. L'assertion (d) du théorème 2.4.1 précédent, montre que des présentations projectives existent lorsque R est de dimension globale finie. Lorsque ce n'est pas le cas, des présentations projectives existent néanmoins toujours pour des *R-mdg*'s $\mathcal{N} = (N, d_N)$ acycliques, puisque dans ce cas, la surjection

$\epsilon_0 : \mathcal{E}(Q_0) \twoheadrightarrow \mathcal{N}$ de 2.4.1-(c) est déjà un quasi-isomorphisme. Un autre cas important est celui où dans le *R-mdg* (N, d_N), on a $d_N = 0$. Dans ce cas, si

$$\cdots \longrightarrow L_n \xrightarrow{\epsilon_n} \cdots \longrightarrow L_2 \xrightarrow{\epsilon_2} L_1 \xrightarrow{\epsilon_1} L_0 \xrightarrow{\epsilon_0} N \to \mathbf{0}$$

est une résolution projective dans $\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)$, on note $Q := \bigoplus_{m\geq 0} L_m[m]$, et l'on définit $d_Q : Q \to Q[1]$ de la manière suivante

$$\begin{cases} d_Q(L_0) = 0\,, \\ d_Q|_{L_m[m]} := \big(\epsilon_m : L_m[m] \to (L_{m-1}[m-1])[1]\big)\,, \ \text{si } m > 0. \end{cases}$$

Le couple $\mathcal{Q} = (Q, d_Q)$ n'est autre que le *R-mdg* simple associé au complexe $(\mathcal{L}_\bullet, \epsilon_\bullet)$ où $\mathcal{L}_m = (L_m, 0)$ (*cf.* 2.1), et le morphisme $\widetilde{\epsilon}_0 : \mathcal{Q} \twoheadrightarrow \mathcal{N}$, nul sur L_m pour $m > 0$ et qui vaut ϵ_0 sur L_0 est alors clairement un quasi-isomorphisme de *R-mdg*'s (*cf.* 2.1.4-(csa-acyclique-a)) et c'est donc une présentation projective de $\mathcal{N}$.

3.2. Théorème fondamental des présentations projectives

L'intérêt principal des présentations projectives réside pour l'essentiel dans l'assertion (d) du théorème suivant.

3.2.1. Théorème. *On suppose R de dimension globale finie.*

a) *Les R-mdg $\mathcal{Q}$ acycliques avec $\mathrm{o}(\mathcal{Q})$ projectif, sont les projectifs de la catégorie $\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$, ils sont nuls dans $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$.*

b) *Un quasi-isomorphisme de R-mdg $\alpha : \mathcal{Q}_1 \to \mathcal{Q}_2$, avec $\mathrm{o}(\mathcal{Q}_i)$ projectif, est un isomorphisme dans $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$.*

c) *Soient $\pi_i : \mathcal{Q}_i \twoheadrightarrow \mathcal{N}_i$, $i = 1, 2$, deux présentations projectives. Pour tout morphisme $\alpha : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$, il existe un morphisme $\tilde{\alpha} : \mathcal{Q}_1 \to \mathcal{Q}_2$ rendant le diagramme suivant commutatif dans $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$. Un tel morphisme $\tilde{\alpha}$ est unique dans $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$, il sera appelé « le relèvement de α ».*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{Q}_1 \arrow[r, two heads, "\pi_1"] \arrow[d, dotted, "\widetilde{\alpha}"'] & \mathcal{N}_1 \arrow[d, "\alpha"] \\ \mathcal{Q}_2 \arrow[r, two heads, "\pi_2"] & \mathcal{N}_2 \end{tikzcd}$$

Étant donné des présentations projectives $\pi_i : \mathcal{Q}_i \twoheadrightarrow \mathcal{N}_i$, $i = 1, 2, 3$, et des morphismes $\mathcal{N}_1 \xrightarrow{\alpha_1} \mathcal{N}_2 \xrightarrow{\alpha_2} \mathcal{N}_3$, on a $\widetilde{\alpha_2 \circ \alpha_1} = \widetilde{\alpha_2} \circ \widetilde{\alpha_1}$ dans $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$.

En particulier, une présentation projective est unique à isomorphisme canonique près dans $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$.

d) *Notons* $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{proj}}(R)$ *la sous-catégorie pleine de* $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ *dont les objets sont les* R-mdg $\mathcal{Q}$ *avec* $\mathrm{o}(\mathcal{Q})$ *projectif. La restriction*

$$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{proj}} : \mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{proj}}(R) \rightsquigarrow \mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$$

du foncteur $\boldsymbol{Q} : \mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) \to \mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ (1.2.19)*, est une équivalence de catégories. Pour toute réalisation fonctorielle des présentations projectives* $(\tilde{\_}) : \mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{proj}}(R)$*, on a* $\boldsymbol{Q} \cong \boldsymbol{Q}_{\mathrm{proj}} \circ (\tilde{\_})$.

Démonstration

a) Si $\mathcal{Q} = (Q, d_Q)$ est acyclique, on a la suite exacte courte de R-*mg*'s :

$$\mathbf{0} \to \ker(d_Q) \longrightarrow Q \xrightarrow{d_Q} \ker(d_Q)[1] \to 0 \qquad (*)$$

et si Q est projectif, on en déduit l'équivalence

$$\mathrm{Extgr}^i_R\big(\ker(d_Q), \_\big) \cong \mathrm{Extgr}^{i+1}_R\big(\ker(d_Q)[1], \_\big), \quad \forall i > 0.$$

Par itération, $\mathrm{Extgr}^i_R\big(\ker(d_Q), \_\big) \cong \mathrm{Extgr}^{i+m}_R\big(\ker(d_Q)[m], \_\big)$, et comme R est supposé de dimension globale finie, on a

$$\mathrm{Extgr}^i_R\big(\ker(d_Q), \_\big) = 0\,, \quad \forall i > 0\,,$$

et $\ker(d_Q)$ est un R-*mg* projectif. La suite $(*)$ est donc scindée dans $\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)$. Soit $\sigma : \ker(d_Q)[1] \to Q$ une section de d_Q et notons $K = \mathrm{im}(\sigma)$. Le R-*mg* K est projectif et l'on a $Q = \ker(d_Q) \oplus K = K[-1] \oplus K$, par conséquent (Q, d_Q) s'identifie canoniquement à $(\varepsilon(K), D_\varepsilon)$ (2.3.2) qui est un projectif de $\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ et est homotopiquement nul (2.4.1-(b)).

b) Le diagramme de triangles exacts de $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$:

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{P}_1 & = & \mathcal{P}_1 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathcal{P}_1[1] \\
\| & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow & & \| \\
\mathcal{P}_1 & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{P}_2 & \longrightarrow & \hat{\boldsymbol{c}}(\alpha) & \longrightarrow & \mathcal{P}_1[1]
\end{array}$$

est commutatif puisque $\hat{\boldsymbol{c}}(\alpha) = 0$ d'après (a). Le morphisme α (vertical) est donc un isomorphisme de $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ puisqu'il est encadré par des isomorphismes dans un morphisme de triangles exacts.

c) On part du diagramme

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\mathcal{K}_{\mathcal{P}} & \hookrightarrow & \mathcal{P}_r & \xrightarrow{\epsilon_r} & \cdots & \longrightarrow & \mathcal{P}_1 & \xrightarrow{\epsilon_1} & \mathcal{P}_0 & \xrightarrow{\epsilon_0} & \mathcal{N}_1 \\
& & & & & & & & & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} \\
\mathcal{K}_{\mathcal{R}} & \hookrightarrow & \mathcal{R}_r & \xrightarrow{\rho_r} & \cdots & \longrightarrow & \mathcal{R}_1 & \xrightarrow{\rho_1} & \mathcal{Q}_2 & \xrightarrow[\text{q.i.}]{\pi_2} & \mathcal{N}_2
\end{array}$$

où $(\mathcal{P}_\bullet, \epsilon_\bullet)$ et $(\mathcal{R}_\bullet, \rho_\bullet)$ sont des résolutions projectives respectivement de $\mathcal{N}_1$ et de $\ker(\pi_2)$ dans la catégorie $\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ (*cf.* 2.4.1-(c)), tronquées en

$r = \dim_{\mathrm{gb}}(R)$ pour garantir que $\mathrm{o}(\mathcal{K}_{\mathcal{P}})$ et $\mathrm{o}(\mathcal{K}_{\mathcal{R}})$ sont des R-*mg*'s projectifs. La propriété universelle des résolutions projectives assure que α se relève en un morphisme de complexes de R-*mdg*'s $\alpha_\bullet$, unique à homotopie près. On a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{K}_{\mathcal{P}} \arrow[r, hook] \arrow[d, "\alpha_{\mathcal{K}}"'] & \mathcal{P}_r \arrow[r, "\epsilon_r"] \arrow[d, "\alpha_r"'] & \cdots \arrow[r] & \mathcal{P}_1 \arrow[r, "\epsilon_1"] \arrow[d, "\alpha_1"'] & \mathcal{P}_0 \arrow[r, two heads, "\epsilon_0"] \arrow[d, "\alpha_0"'] & \mathcal{N}_1 \arrow[d, "\alpha"] \\
\mathcal{K}_{\mathcal{R}} \arrow[r, hook] & \mathcal{R}_r \arrow[r, "\rho_r"] & \cdots \arrow[r] & \mathcal{R}_1 \arrow[r, "\rho_1"] & \mathcal{Q}_2 \arrow[r, two heads, "\pi_2", "\text{q.i.}"'] & \mathcal{N}_2 \arrow[d, equal, "\mathrm{id}"] \\
\mathbf{0} \arrow[r] \arrow[u, "j_{\mathcal{K}}"] & \mathbf{0} \arrow[r] \arrow[u, "j_r"] & \cdots \arrow[r] & \mathbf{0} \arrow[r] \arrow[u, "j_1"] & \mathcal{Q}_2 \arrow[r, two heads, "\pi_2", "\text{q.i.}"'] \arrow[u, "j_0 = \mathrm{id}"] & \mathcal{N}_2
\end{tikzcd}$$

Notons

$\sum(\mathcal{P}_\bullet)$: le complexe simple associé à $(0 \to \mathcal{K}_{\mathcal{P}} \to \cdots \to P_0 \to 0)$,

$\sum(\mathcal{R}_\bullet)$: celui associé à $(0 \to \mathcal{K}_{\mathcal{R}} \to \cdots \to \mathcal{R}_1 \to \mathcal{Q}_2 \to 0)$.

Nous obtenons le diagramme commutatif induit

$$\begin{tikzcd}
\sum(\mathcal{P}_\bullet) \arrow[r, "\epsilon_0", "\text{q.i.}"'] \arrow[d, "\sum(\alpha_\bullet)"'] \arrow[dd, dashed, bend right=80, "(\alpha,\pi_2)_{\mathcal{P}}"'] & \mathcal{N}_1 \arrow[d, "\alpha"] \\
\sum(\mathcal{R}_\bullet) \arrow[r, "\pi_2", "\text{q.i.}"'] & \mathcal{N}_2 \arrow[d, equal] \\
\mathcal{Q}_2 \arrow[r, "\pi_2", "\text{q.i.}"'] \arrow[u, "\sum(j_\bullet)", "\text{q.i.}"'] & \mathcal{N}_2
\end{tikzcd}$$

où $\sum(j_\bullet)$ est inversible dans $I\!\!K\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ d'après (b). Le morphisme

$$(\alpha, \pi_2)_{\mathcal{P}} := \big(\textstyle\sum(j_\bullet)^{-1} \circ \sum(\alpha_\bullet)\big) : \sum(\mathcal{P}_\bullet) \longrightarrow \mathcal{Q}_2 \qquad (\diamond)$$

est une relèvement de α dans $I\!\!K\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$.

Ces constructions, en remplaçant $\alpha : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ par $\mathrm{id}_{\mathcal{N}_1} : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_1$, fournissent de même un relèvement de $\mathrm{id}_{\mathcal{N}_1}$

$$(\mathrm{id}_{\mathcal{N}_1}, \pi_1)_{\mathcal{P}} : \textstyle\sum(\mathcal{P}_\bullet) \longrightarrow \mathcal{Q}_1\,, \qquad (\diamond\diamond)$$

qui est un quasi-isomorphisme, donc inversible dans $I\!\!K\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ par (b).

Le relèvement de $\alpha : \mathcal{N}_1 \to \mathcal{N}_2$ cherché est alors donné par la composée

$$\tilde{\alpha} := (\alpha, \pi_2)_{\mathcal{P}} \circ (\mathrm{id}_{\mathcal{N}_1}, \pi_1)_{\mathcal{P}}^{-1} : \mathcal{Q}_1 \to \mathcal{Q}_2\,.$$

Pour montrer l'unicité du relèvement, on est amené à montrer que, étant donné un diagramme commutatif dans $I\!\!K\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{Q}_1 \arrow[r, two heads, "\pi_1", "\text{q.i.}"'] \arrow[d, "\tilde{\alpha}"'] & \mathcal{N}_1 \arrow[d, "0"] \\
\mathcal{Q}_2 \arrow[r, two heads, "\pi_2", "\text{q.i.}"'] & \mathcal{N}_2
\end{tikzcd}$$

où les lignes sont des présentations projectives, on a $\tilde{\alpha} = 0$ dans $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$.

Comme le morphisme $\tilde{\alpha}$ se factorise à travers $\hat{\boldsymbol{c}}(\pi_2)[-1]$ qui est acyclique, il suffit de monter que tout morphisme $\beta : \mathcal{Q}_1 \to \mathcal{N}$, où $\mathcal{N}$ est acyclique, est nul dans $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$. Soit $\pi : \mathcal{K} \twoheadrightarrow \mathcal{N}$ une présentation projective, nous avons le relèvement $\tilde{\beta}$ de β

$$\begin{tikzcd} \mathcal{Q}_1 \arrow[r, equal] \arrow[d, "\tilde{\beta}"'] & \mathcal{Q}_1 \arrow[d, "\beta"] \\ \mathcal{K} \arrow[r, two heads, "\pi", "\text{q.i.}"'] & \mathcal{N} \end{tikzcd}$$

et $\beta = \pi \circ \tilde{\beta} = 0$ puisque $\mathcal{K} = 0$ dans $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ d'après (a).

L'existence et l'unicité des relèvements implique aussitôt leur compatibilité avec la composition de morphismes.

d) L'assertion 2.4.1-(d) montre déjà que $\boldsymbol{Q}_{\mathrm{proj}}$ est essentiellement surjectif. Soient maintenant $\mathcal{Q}_1$ et $\mathcal{Q}_2$ deux objets de $\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{proj}}(R)$. Un morphisme de $\mathcal{Q}_1$ vers $\mathcal{Q}_2$ dans $\mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ se représente sous la forme

$$\mathcal{Q}_1 \xleftarrow[\text{q.i.}]{s} \mathcal{N} \xrightarrow{f} \mathcal{Q}_2 \,,$$

pour un certain $\mathcal{N}$. Si $\pi : \mathcal{R} \twoheadrightarrow \mathcal{N}$ est une présentation projective, on a

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{R} \arrow[dl, Rightarrow, "s\circ\pi"'] \arrow[d, Rightarrow, "\pi"'] \arrow[dr, "f\circ\pi"] & \\ \mathcal{Q}_1 & \mathcal{N} \arrow[l, Rightarrow, "s"'] \arrow[r, "f"] & \mathcal{Q}_2 \end{tikzcd}$$

où les flèches doublées sont des quasi-isomorphismes. Mais alors, comme le quasi-morphisme $s \circ \pi$ est inversible dans $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{proj}}(R)$ d'après (b). On a l'égalité $f \circ s^{-1} = (f \circ \pi) \circ (s \circ \pi)^{-1}$ dans $\mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{proj}}(R)$, où $(f \circ \pi)$ et $(s \circ \pi)^{-1}$, et donc aussi $(f \circ s^{-1})$, appartiennent à $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{proj}}(R)$.

Ces remarques montrent que la localisation de $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ par ses quasi-isomorphismes, n'a pas d'effet sur la sous-catégorie $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{proj}}(R)$, car elle y induit la localisation par ses propres isomorphismes. Le foncteur $\boldsymbol{Q}_{\mathrm{proj}} : \mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{proj}}(R) \rightsquigarrow \mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ est donc pleinement fidèle. □

3.2.2. Remarques

a) On prendra garde du fait que dans la définition de la notion de présentation projective 3.1.1, on demande au morphisme $\mathcal{Q} \twoheadrightarrow \mathcal{N}$ d'être surjectif, ce qui en fait une notion à l'intérieur de la catégorie $\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$. Dans l'assertion (c) du dernier théorème, les données de départ sont toutes dans $\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$, mais la conclusion, notamment la commutativité des diagrammes, est restreinte à la catégorie $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$.

b) Pour tout R-*mdg* $\mathcal{Q}$ on a les applications naturelles

$$\mathrm{Mor}_{\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)}(\mathcal{Q},\mathcal{N}) \twoheadrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)}(\mathcal{Q},\mathcal{N}) \to \mathrm{Mor}_{\mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)}(\mathcal{Q},\mathcal{N})\,.$$

La première est surjective par construction. La deuxième l'est aussi lorsque $\mathrm{o}(\mathcal{Q})$ est projectif (*cf.* preuve de 3.2.1-(d)), mais même dans ce cas, celle-ci n'est généralement pas injective si $\mathrm{o}(\mathcal{N})$ n'est pas projectif. Par exemple si $\mathcal{N}$ est acyclique non homotope à zéro (*cf.* 3.3.1) et que $\mathcal{Q} \twoheadrightarrow \mathcal{N}$ est une présentation projective.

3.3. Le foncteur $\mathbb{D}\,\mathrm{Hotgr}^*_R(\_,\mathcal{N})$

On suppose R de dimension globale finie. Soit $\mathcal{N}$ un R-*mdg* quelconque. Le foncteur $\mathrm{Homgr}^\bullet_R(\_,\mathcal{N}) : \mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$, introduit dans 1.2.4, est additif, contravariant, respecte les homotopies et les cônes des morphismes, il induit donc un foncteur de catégories triangulées

$$\mathrm{Homgr}^\bullet_R(\_,\mathcal{N}) : \mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)\,.$$

Un morphisme de R-*mdg* $\alpha : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$, donne lieu à un triangle distingué

$$\mathrm{Homgr}^\bullet_R(\hat{\boldsymbol{c}}\alpha,\mathcal{N}) \to \mathrm{Homgr}^\bullet_R(\mathcal{M},\mathcal{N}) \to \mathrm{Homgr}^\bullet_R(\mathcal{L},\mathcal{N}) \to \mathrm{Homgr}^\bullet_R(\hat{\boldsymbol{c}}\alpha,\mathcal{N})[1] \to$$

et, en passant en cohomologie (1.2.6,1.2.7), à une suite exacte longue

$$\longrightarrow \mathrm{Hotgr}^*_R(\hat{\boldsymbol{c}}(\alpha),\mathcal{N}) \longrightarrow \mathrm{Hotgr}^*_R(\mathcal{M},\mathcal{N}) \longrightarrow \mathrm{Hotgr}^*_R(\mathcal{L},\mathcal{N}) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \mathrm{Hotgr}^*_R(\hat{\boldsymbol{c}}(\alpha),\mathcal{N})[1] \longrightarrow$$

Par conséquent, pour que le foncteur

$$\mathrm{Hotgr}^*_R(\_,\mathcal{N}) : \mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)$$

transforme quasi-isomorphisme en isomorphisme, il faut et il suffit, que pour tout R-*mdg* $\mathcal{A}$ acyclique, on ait $\mathrm{Hotgr}^*_R(\mathcal{A},\mathcal{N}) = \mathbf{0}$. Ceci est vrai lorsque $\mathcal{A}$ est homotope à zéro, par exemple si $\mathrm{o}(\mathcal{A})$ est projectif (*cf.* 3.2.1-(a)), mais ce n'est pas toujours le cas.

3.3.1. Un contrexemple classique. Soient $R = \mathbb{Z}$ et $\mathcal{N}, \mathcal{A} \in \mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(\mathbb{Z})$:

$$\mathcal{N} := \Sigma(\mathbf{0} \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \to \mathbf{0}) \quad \text{et} \quad \mathcal{A} := \Sigma(\mathbf{0} \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/(2) \to \mathbf{0})\,,$$

puis

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\mathcal{A} & = \Sigma\big(\mathbf{0} \to & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\times 2} & \mathbb{Z} & \twoheadrightarrow & \mathbb{Z}/(2) & \to & \mathbf{0}\big) \\
\downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle\mathrm{id}} & & \downarrow & & \\
\mathcal{N} & = \Sigma\big(\mathbf{0} \to & \mathbb{Z} & \xrightarrow{\times 2} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathbf{0}\big)
\end{array}$$

Alors

- Le $\mathbb{Z}$-*mdg* $\mathcal{N}$ est tel que $\mathrm{o}(\mathcal{N})$ est un $\mathbb{Z}$-*mg* libre.
- $\mathcal{A}$ est acyclique, mais n'est pas homotope à zéro, donc $\mathcal{A} \neq \mathbf{0}$ dans $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(\mathbb{Z})$ et $\mathcal{A} = \mathbf{0}$ dans $\mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(\mathbb{Z})$.
- Le morphisme de complexes α n'est pas homotope à zéro.

3.3.2. Définition. Le contrexemple montre que le foncteur $\mathrm{Hotgr}_R^*(\_,\mathcal{N})$, qui est bien défini sur $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$, ne se factorise pas à travers la localisation $\boldsymbol{Q} : \mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$. On définit alors, pour tout R-*mdg* $\mathcal{N}$, le foncteur

$$\mathbb{D}\,\mathrm{Hotgr}_R^*(\_,\mathcal{N}) : \mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R) \tag{Eq.8}$$

par

$$\mathbb{D}\,\mathrm{Hotgr}_R^*(\mathcal{M},\mathcal{N}) := \mathrm{Hotgr}_R^*(\mathcal{P},\mathcal{N})\,,$$

où $\mathcal{P} \to \mathcal{M}$ est une présentation projective de $\mathcal{M}$.

3.3.3. Lemme

a) *Le foncteur* $\mathbb{D}\,\mathrm{Hotgr}_R^*(\_,\mathcal{N})$ *est un foncteur cohomologique (*cf. *1.2.15).*

b) *Si* $\mathrm{o}(\mathcal{N})$ *est projectif, on a* $\mathbb{D}\,\mathrm{Hotgr}_R^k(\_,\mathcal{N}) = \mathrm{Mor}_{\mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)}(\_,\mathcal{N}[k])\,.$

Indication. Pour (a), si nous notons

$$\boldsymbol{G}_{\mathcal{N}}(\_) : \mathrm{Homgr}_R^{\bullet}(\_,\mathcal{N}) : \mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)\,,$$

on a $\mathbb{D}\,\mathrm{Hotgr}_R^*(\_,\mathcal{N}) = \mathrm{H}^*\,\mathbb{D}\,\boldsymbol{G}_{\mathcal{N}}(\_)$ par construction. □

3.3.4. Le foncteur $\mathbb{D}\,\mathrm{Hotgr}_R^*(\mathcal{F}(\_), N)$. Pour tout R-*mg* N, on note

$$\mathbb{D}\,\mathrm{Hotgr}_R^*(\_, N) : \mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R) \tag{Eq.9}$$

le foncteur $\mathbb{D}\,\mathrm{Hotgr}_R^*(\mathcal{M}, N) := \mathbb{D}\,\mathrm{Hotgr}_R^*(\mathcal{M}, \mathcal{F}N)\,.$

Soit M un R-*mg*, et soit $P_\star \xrightarrow{\epsilon} M$ une résolution projective de R-*mg*. Le morphisme $\sum \mathcal{F}P_\star \xrightarrow{\mathcal{F}\epsilon_0} \mathcal{F}M$, est une présentation projective de $\mathcal{F}M$ (3.1.3), on a donc pour tout $k \in \mathbb{Z}$

$$\mathbb{D}\,\mathrm{Hotgr}_R^k(\mathcal{F}M, N) = \mathrm{H}^k\,\mathrm{Homgr}_R^{\bullet}(\textstyle\sum P_\star, N)\,.$$

Or, $\mathrm{Homgr}_R^k\big(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} P_n[n], N\big) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Homgr}_R^0(P_n, N[k-n])$, de sorte que le passage en cohomologie fait apparaître les différents $\mathrm{Extgr}_R^n(M, N[k-n])$. La proposition suivante en découle.

3.3.5. Proposition. *Avec les données en cours, notons*

$$\boldsymbol{G}^*_N(\_) := \mathbb{D}\,\mathrm{Hotgr}^*_R(\mathcal{F}(\_), N) : \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)\,.$$

a) *On a* $\qquad \boldsymbol{G}^k_N(\_) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Extgr}^n_R(\_, N[k-n])$.

b) *Si $\alpha : M_1 \to M_2$ est un morphisme de R-mg's, le morphisme $\boldsymbol{G}^k_N\,\alpha$ est*

$$\boldsymbol{G}^k_N\,\alpha = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \big(\mathrm{Extgr}^n_R(M_2, N[k-n]) \xrightarrow{\alpha^n_k} \mathrm{Extgr}^n_R(M_1, N[k-n])\big)\,,$$

où α^n_k désigne le morphisme naturel entre Extgr.

c) *Si $\mathbf{0} \to M_1 \xrightarrow{\alpha} M_2 \xrightarrow{\beta} M_3 \to \mathbf{0}$ est une suite exacte courte de R-mg's, on a une suite exacte longue de R-mg's :*

$$\longrightarrow \boldsymbol{G}^k_N\,M_3 \xrightarrow{\boldsymbol{G}^k_N\,\beta} \boldsymbol{G}^k_N\,M_2 \xrightarrow{\boldsymbol{G}^k_N\,\alpha} \boldsymbol{G}^k_N\,M_1 \xrightarrow{c_k} \boldsymbol{G}^{k+1}_N\,M_3 \longrightarrow$$

où le morphisme de connexion $c_k : \boldsymbol{G}^k_N\,M_1 \to \boldsymbol{G}^{k+1}_N\,M_3$ est

$$c_k := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \big(\mathrm{Extgr}^n_R(M_1, N[k-n]) \xrightarrow{c^n_k} \mathrm{Extgr}^{n+1}_R(M_3, N[k-n])\big)\,,$$

où c^n_k désigne le morphisme de connexion naturel entre Extgr.

3.3.6. Remarque. La démarche de cette section 3.3 s'applique aussi au foncteur covariant

$$\boldsymbol{F}_{\mathcal{M}}(\_) := \mathrm{Hotgr}^*_R(\mathcal{M}, \_) : \mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) \to \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)\,,$$

à ceci près que lorsque $\mathrm{o}(\mathcal{M})$ est projectif, $\boldsymbol{F}$ transforme quasi-isomorphismes en isomorphismes (*cf.* 5.2.7) contrairement à 3.3.1, on n'a donc pas besoin, dans ce cas, de dériver $\boldsymbol{F}$ pour lui donner un sens sur $\mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$. Dans le cas général, si $\mathcal{P} \to \mathcal{M}$ et $\mathcal{Q} \to \mathcal{N}$ sont des présentations projectives, on a le morphisme canonique

$$\begin{aligned}\mathbb{D}\,\boldsymbol{F}_{\mathcal{M}}(\mathcal{N}) = \mathrm{H}^*\,\mathrm{Homgr}^\bullet_R(\mathcal{M}, \mathcal{Q}) \to \mathrm{H}^*\,\mathrm{Homgr}^\bullet_R(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) &= \mathrm{H}^*\,\mathrm{Homgr}^\bullet_R(\mathcal{P}, \mathcal{N})\\ &= \mathbb{D}\,\mathrm{Hotgr}^*_R(\mathcal{M}, \mathcal{N})\end{aligned}$$

qui est bijectif si $\mathrm{o}(\mathcal{M})$ est projectif, mais pas en général.

4. Suites exactes courtes et triangles distingués

4.1. Le cas des suites scindées dans $\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)$

On se donne une suite exacte courte de $\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$

$$\mathbf{0} \to (A, d_A) \xrightarrow{\iota} (B, d_B) \xrightarrow{\pi} (C, d_C) \to \mathbf{0}\,,$$

supposée scindée dans la catégorie $\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)$.

Pour toute section $\sigma : C \to B$ de π dans $\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)$, le morphisme $\sigma\,\pi$ est un projecteur dans B et $1 - \sigma\,\pi$ est un projecteur d'image $\ker(\pi) = \mathrm{im}(\iota) \cong A$. On en déduit la *rétraction* $\rho := \iota^{-1}\,(1 - \sigma\,\pi) : B \twoheadrightarrow A$. On a ainsi deux suites exactes courtes dans $\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)$

$$\mathbf{0} \to A \underset{\rho}{\overset{\iota}{\rightleftarrows}} B \underset{\sigma}{\overset{\pi}{\rightleftarrows}} C \to \mathbf{0}$$

et les égalités

$$\rho\,\iota = \mathbf{1}_A\,, \quad \sigma\,\pi = \mathbf{1}_C\,, \quad \mathbf{1}_B = \iota\,\rho + \sigma\,\pi$$

4.1.1. Lemme. *Fixons une section $\sigma : C \hookrightarrow B$ de $\pi : B \twoheadrightarrow C$ dans* $\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)$.

a) *Le morphisme de R-mg's $\gamma : C \to A$ défini par :*

$$\gamma := -\rho[1] \circ d_B \circ \sigma \qquad \left(\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "d_B"] & C \arrow[l, "\sigma"'] \\ A[1] & B[1] \arrow[l, "\rho[1]"'] & \end{tikzcd}\right)$$

est un morphisme de R-mdg's $\gamma : (C, d_C) \to (A, d_A)[1]$. La classe d'homotopie de γ ne dépend pas du choix de la section σ de π.

b) *La suite $(A, d_A) \xrightarrow{\iota} (B, d_B) \xrightarrow{\pi} (C, d_C) \xrightarrow{\gamma} (A, d_A)[1]$ est un triangle distingué de $I\!\!K\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$. Plus précisément, soient*

$$\begin{cases} C \xrightarrow{\varphi} \hat{c}(\iota) = B \oplus A[1]\,, & \varphi(c) := (\sigma(c), \gamma(c)) \\ C \xleftarrow{\phi} \hat{c}(\iota) = B \oplus A[1]\,, & \phi(b, a') := \pi(b) \end{cases}$$

Alors, φ et ϕ sont des morphismes de R-mdg's, inverses l'un de l'autre dans $I\!\!K\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$. Le diagramme

$$\begin{tikzcd} (A, d_A) \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, equal] & (B, d_B) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, equal] & (C, d_C) \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, shift right, "\varphi"'] & (A, d_A)[1] \arrow[d, equal] \\ (A, d_A) \arrow[r, "\iota"] & (B, d_B) \arrow[r, "j"] & \hat{\mathbf{c}}(\iota) \arrow[r, "p"] \arrow[u, shift right, "\phi"'] & (A, d_A)[1] \end{tikzcd} \tag{Eq.10}$$

est un isomorphisme (canonique) de triangles de $I\!\!K\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$.

Démonstration

a) L'égalité que nous devons prouver, soit $d_{A[1]} \circ \gamma = \gamma \circ d_C$, est équivalente à l'égalité $\iota \circ (-d_A) \circ \gamma = \iota \circ \gamma \circ d_C$, puisque ι est injective. Or, on a

$$\begin{aligned} -\,\iota\,d_A\,(\rho\,d_B\,\sigma) &= -\,d_B\,(\iota\,\rho)\,d_B\,\sigma \;= -\,d_B\,(\mathbf{1} - \sigma\,\pi)\,d_B\,\sigma \\ &= \quad d_B\,\sigma\,(\pi\,d_B)\,\sigma = \quad d_B\,\sigma\,(d_C\,\pi)\,\sigma = d_B\,\sigma\,d_C\,, \end{aligned}$$

et

$$\iota\,(\rho\,d_B\,\sigma)\,d_C = (\mathbf{1} - \sigma\,\pi)\,d_B\,\sigma\,d_C = d_B\,\sigma\,d_C\,.$$

On laisse aux soins du lecteur de vérifier que la classe d'homotopie de γ est bien indépendante du choix de la section σ de π.

b) Le morphismes φ et ϕ sont des morphismes de *R-mdg*'s car

$$\begin{cases} \Delta\circ\varphi = \Delta(\sigma,\gamma) = (d\sigma - \iota\rho d\sigma, -d\gamma) = (\sigma\, d, \gamma\, d) = \varphi\circ d\,, \\ \phi\circ\Delta(b,a') = \phi(db+\iota(a'), da') = \pi db = d\pi b = d\phi(b,a')\,. \end{cases}$$

On a $\phi\circ\varphi = \mathbf{1}_C$ trivialement. Pour étudier $1-\varphi\circ\phi : \hat{\boldsymbol{c}}(\iota)\to\hat{\boldsymbol{c}}(\iota)$, soit :

$$\begin{aligned}(1-\varphi\circ\phi)(b,a') &= (b-\sigma\pi(b), a' + \rho d\sigma\pi(b)) \\ &= (\iota\rho(b), a' + \rho d(b) - d\rho(b))\,,\end{aligned}$$

on introduit le morphisme de *R-mg*'s

$$h : B\oplus A[1]\to B[-1]\oplus A\,,\quad h(b,a') := (0,\rho(b))\,,$$

qui donne l'homotopie :

$$\begin{aligned}(\Delta\circ h + h\circ\Delta)(b,a') &= (\iota\rho(b), -d\rho(b)) + (0,\rho(db+\iota(a'))) \\ &= (\iota\rho(b), -d\rho(b) + \rho db + a') \\ &= (1-\varphi\circ\phi)(b,a')\end{aligned}$$

et permet de conclure que $\phi = \varphi^{-1}$ dans $I\!\!K\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$.

La dernière égalité réduit la vérification de la commutativité de (Eq.10) à celle φ. L'égalité $p\,\varphi = \gamma$ est immédiate, même dans $\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)$, tandis que $\varphi\,\pi = j$ demande de contrôler que $j-\varphi\,\pi : B\to\hat{\boldsymbol{c}}(\iota)$ est homotope à zéro. Or, si $h : B\to\hat{\boldsymbol{c}}(\iota)[-1] := B[-1]\oplus A$ est défini par $h = 0\oplus\rho$, on a

$$\begin{aligned}j-\varphi\,\pi &= (1-\sigma\,\pi, \rho\, d\,\sigma\,\pi) = (\iota\,\rho, \rho\, d\,(1-\iota\,\rho)) \\ &= (\iota\,\rho, \rho\, d - d\,\rho) = h\,d + \Delta\, h\,.\end{aligned}$$

Ce qui termine la démonstration du lemme. □

4.2. Le cas général

Reprenons la suite exacte des *R-mdg*'s de la section précédente

$$\mathbf{0}\to(A,d_A)\xrightarrow{\ \iota\ }(B,d_B)\xrightarrow{\ \pi\ }(C,d_C)\to\mathbf{0}\,,$$

et ne supposons pas que π admette des sections dans $\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)$, mais seulement que (C,d_C) admet un relèvement projectif $p_C : (\widetilde{C}, d_{\widetilde{C}})\twoheadrightarrow(C,d_C)$. Notons $(B,d_B)\oplus_{(C,d_C)}(\widetilde{C},d_{\widetilde{C}})$ le produit fibré des *R-mdg*'s, *i.e.* le noyau dans la catégorie $\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ du morphisme $\pi \oplus p_C$:

$$\mathbf{0} \to (B \oplus_C \widetilde{C}, d) \dashrightarrow (B, d_B) \oplus (\widetilde{C}, d_{\widetilde{C}}) \xrightarrow{\pi \oplus p_C} (C, d_C) \to \mathbf{0}$$

Nous avons alors le morphisme des suites exactes courtes de R-mdg's

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{0} \to (A, d_A) & \xrightarrow{\iota_1} & (B, d_B) \underset{(C,d_C)}{\oplus} (\widetilde{C}, d_{\widetilde{C}}) & \xrightarrow{p_2} & (\widetilde{C}, d_{\widetilde{C}}) \to \mathbf{0} \\ \| & & \downarrow{\scriptstyle p_1} & \boxtimes & \downarrow{\scriptstyle p_C} \\ \mathbf{0} \to (A, d_A) & \xrightarrow{\iota} & (B, d_B) & \xrightarrow{\pi} & (C, d_C) \to \mathbf{0} \end{array} \qquad \text{(Eq.11)}$$

avec $\iota_1(a) = (\iota(a), 0)$, et où p_1 est un quasi-isomorphisme puisque p_C l'est, et où p_2 admet des sections dans $\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)$, puisque $\widetilde{C}$ y est projectif.

L'assertion (b) du lemme 4.1.1 admet donc la généralisation suivante.

4.2.1. Proposition. *Étant donnée une suite exacte courte de R-mdg's*

$$\mathbf{0} \to (A, d_A) \xrightarrow{\iota} (B, d_B) \xrightarrow{\pi} (C, d_C) \to \mathbf{0}\,,$$

l'application $\phi : \hat{\boldsymbol{c}}(\iota) \to (C, d_C)$, $\phi(b, a') = \pi(b)$, est un morphisme de R-mdg's, et c'est aussi un quasi-isomorphisme.

Démonstration. L'application ϕ est bien un morphisme de R-mdg's, car

$$\phi(D(b, \dot{a})) = \phi(db + \iota\dot{a}, -d\dot{a}) = \pi(db + \iota\dot{a}) = \pi(db) = d\phi(b, \dot{a})\,.$$

Ensuite, $\ker D = \{(b, \dot{a}) \mid db = -\iota\dot{a}\,,\ d\dot{a} = 0\}$, et le morphisme induit par ϕ

$$\mathrm{H}(\phi) : \frac{\ker(D)}{\mathrm{im}(D)} \longrightarrow \frac{\mathcal{Z}_{\mathcal{C}}}{\mathcal{B}_{\mathcal{C}}}$$

est clairement surjectif. D'autre part, le noyau de $\mathrm{H}(\phi)$ est constitué des classes modulo $\mathrm{im}(D)$ des couples $(b, \dot{a})$, tels que $\pi(b) \in \mathcal{B}_{\mathcal{C}}$, c'est-à-dire, tels que $b \in dB + \iota(A[1])$. Or, $\mathrm{im}(D) = \{(db + \iota\dot{a}, -d\dot{a}) \mid b \in B\,,\ \dot{a} \in A[1]\}$, et le morphisme $\mathrm{H}(\phi)$ est donc bien bijectif. □

4.2.2. Remarque. Contrairement à la situation où π admet une section dans $\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)$ (4.1.1-(b)), le quasi-isomorphisme $\pi : \hat{\boldsymbol{c}}(\iota) \to (C, d_C)$ n'est généralement pas inversible dans $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$, et il faudra passer à la catégorie dérivée $\mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ pour en faire un isomorphisme.

5. Relèvements projectifs simultanés de *R*-mdgr's

5.1. Le cas des complexes d'une catégorie abélienne

On désigne par $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne possédant suffisamment d'objets projectifs. On note $\mathcal{C}^*(\mathcal{A})$ la catégorie des complexes $\mathcal{M} := (M^*, d_*)$ de $\mathcal{A}$.

5.1.1. Les foncteurs $\mathbf{B}^m$, $\mathbf{Z}^m$, $\mathbf{H}^m$. Pour chaque $m \in \mathbb{Z}$, on on dispose des foncteurs bien connus

$$\begin{cases} \mathrm{B}^m(\_) : \mathcal{C}^*(\mathcal{A}) \rightsquigarrow \mathcal{A}\,, & \mathrm{B}^m\,\mathcal{M} := \mathrm{im}(d_{m-1}) \\ \mathrm{Z}^m(\_) : \mathcal{C}^*(\mathcal{A}) \rightsquigarrow \mathcal{A}\,, & \mathrm{Z}^m\,\mathcal{M} := \ker(d_m) \\ \mathrm{H}^m(\_) : \mathcal{C}^*(\mathcal{A}) \rightsquigarrow \mathcal{A}\,, & \mathrm{H}^m\,\mathcal{M} := \mathrm{Z}^m\,\mathcal{M}\big/\,\mathrm{B}^m\,\mathcal{M} \end{cases}$$

dont on rappelle que lorsque ils sont appliqués à une suite exacte courte de complexes $\mathbf{0} \to \mathcal{L} \to \mathcal{M} \to \mathcal{N} \to \mathbf{0}$, on a

- $\mathbf{0} \to \mathrm{Z}^m\,\mathcal{L} \to \mathrm{Z}^m\,\mathcal{M} \to \mathrm{Z}^m\,\mathcal{N} \to \mathbf{0}$ est exacte à gauche.
- $\mathbf{0} \to \mathrm{B}^m\,\mathcal{L} \to \mathrm{B}^m\,\mathcal{M} \to \mathrm{B}^m\,\mathcal{N} \to \mathbf{0}$ est exacte aux extrêmes.
- $\mathbf{0} \to \mathrm{H}^m\,\mathcal{L} \to \mathrm{H}^m\,\mathcal{M} \to \mathrm{H}^m\,\mathcal{N} \to \mathbf{0}$ est exacte aux centre.

5.1.2. Définition. On appellera « *relèvement projectif simultané* » d'un complexe de $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{M} := (M^*, d_*) = \big(\cdots \to M^{m-1} \xrightarrow{d_{m-1}} M^m \xrightarrow{d_m} M^{m+1} \xrightarrow{d_{m+1}} \cdots\big)\,,$$

la donnée d'un morphisme de complexes de $\mathcal{P} := (P^*, d_*)$ vers $\mathcal{M} := (M^*, d_*)$,

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathcal{P} & = \big(\cdots \to & P^{m-1} & \xrightarrow{d_{m-1}} & P^m & \xrightarrow{d_m} & P^{m+1} & \xrightarrow{d_{m+1}} & \cdots\big) \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & {\scriptstyle\pi_{m-1}}\downarrow & & {\scriptstyle\pi_m}\downarrow & & {\scriptstyle\pi_{m+1}}\downarrow & & \\ \mathcal{M} & = \big(\cdots \to & M^{m-1} & \xrightarrow{d_{m-1}} & M^m & \xrightarrow{d_m} & M^{m+1} & \xrightarrow{d_{m+1}} & \cdots\big) \end{array}$$

tel que, pour tout $m \in \mathbb{Z}$, les morphismes induits par π

$$\begin{cases} \pi_m : \ P^m \twoheadrightarrow M^m\,, & \mathrm{B}^m\,\pi : \mathrm{B}^m\,\mathcal{P} \twoheadrightarrow \mathrm{B}^m\,\mathcal{M}\,, \\ \mathrm{Z}^m\,\pi : \mathrm{Z}^m\,\mathcal{P} \twoheadrightarrow \mathrm{Z}^m\,\mathcal{M}\,, & \mathrm{H}^m\,\pi : \mathrm{H}^m\,\mathcal{P} \twoheadrightarrow \mathrm{H}^m\,\mathcal{M}\,, \end{cases}$$

sont surjectifs de source projective, *i.e.* P^m, $\mathrm{B}^m\,\mathcal{P}$, $\mathrm{Z}^m\,\mathcal{P}$ et $\mathrm{H}^m\,\mathcal{P}$ sont tous projectifs dans $\mathcal{A}$.

5.1.3. Relèvements projectifs simultanés des suites exactes courtes. Étant donnée une suite exacte courte $\mathbf{0} \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to \mathbf{0}$ dans $\mathcal{A}$, et des surjections $p : \widetilde{A} \twoheadrightarrow A$ et $q : \widetilde{C} \twoheadrightarrow C$ avec $\widetilde{A}$ et $\widetilde{C}$ projectifs, on construit le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathbf{0} \to & \widetilde{A} & \xrightarrow{\iota_1} & \widetilde{A} \oplus \widetilde{C} & \xrightarrow{p_2} & \widetilde{C} & \to \mathbf{0} \\ & \downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle r} & \swarrow{\scriptstyle q'} & \downarrow{\scriptstyle q} & \\ \mathbf{0} \to & A & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\beta} & C & \to \mathbf{0} \end{array} \tag{Eq.12}$$

avec

$$\iota_1 a := (a, 0), \quad p_2(a, c) := c, \quad r(a, c) = \alpha\, p(a) + q'(c)\,,$$

où $q' : \widetilde{C} \to B$ vérifie $q = \beta \circ q'$, ce qui est possible puisque $\widetilde{C}$ est projectif. Le morphisme $r : \widetilde{A} \oplus \widetilde{C} \to B$ est clairement surjectif, et le morphisme de complexes (Eq.12) est un relèvement projectif simultané de la deuxième ligne.

5.1.4. Relèvement projectif simultané d'un complexe quelconque. Soit un complexe d'objets de $\mathcal{A}$

$$\mathcal{M} = \left(\cdots \to M^{m-1} \xrightarrow{d_{m-1}} M^m \xrightarrow{d_m} M^{m+1} \xrightarrow{d_{m+1}} \cdots \right),$$

notons $Z^m := \mathrm{Z}^m \mathcal{M}$, $B^{m+1} := \mathrm{B}^m \mathcal{M}$ et $H^m := \mathrm{H}^m \mathcal{M}$, et fixons des surjections à source projective

$$p_m : \widetilde{B}^m \twoheadrightarrow B^m \quad \text{et} \quad q_m : \widetilde{H}^m \twoheadrightarrow H^m .$$

Le diagramme (Eq.12) s'écrit maintenant :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{0} \arrow[r] & \widetilde{B}^m \arrow[r, "\iota_1"] \arrow[d, two heads, "p_m"] & \widetilde{B}^m \oplus \widetilde{H}^m \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, two heads, "r_m"] & \widetilde{H}^m \arrow[r] \arrow[d, two heads, "q_m"] \arrow[dl, dotted, "q'_m"'] & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} \arrow[r] & B^m \arrow[r, hook, "\iota"] & Z^m \arrow[r, two heads] & H^m \arrow[r] & \mathbf{0}
\end{tikzcd} \tag{Eq.13}$$

d'où la surjection à source projective $r_m : \widetilde{B}^m \oplus \widetilde{H}^m \twoheadrightarrow Z^m$ qui intervient, à son tour, dans le diagramme analogue :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{0} \arrow[r] & \widetilde{B}^m \oplus \widetilde{H}^m \arrow[r, "\iota_{12}"] \arrow[d, two heads, "r_m"] & \widetilde{B}^m \oplus \widetilde{H}^m \oplus \widetilde{B}^{m+1} \arrow[r, "p_3"] \arrow[d, two heads, "t_m"] & \widetilde{B}^{m+1} \arrow[r] \arrow[d, two heads, "p_{m+1}"] \arrow[dl, dotted, "p'_{m+1}"'] & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} \arrow[r] & Z^m \arrow[r, hook] & M^m \arrow[r, two heads] & B^{m+1} \arrow[r] & \mathbf{0}
\end{tikzcd} \tag{$\mathcal{D}_m$}$$

On recolle ensuite les diagrammes $(\mathcal{D}_{m-1})$ à $(\mathcal{D}_m)$ à l'aide du sous-diagramme commutatif de (Eq.13)

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{B}^m \arrow[r, "\iota_1"] \arrow[d, two heads, "p_m"'] \arrow[dr, phantom, "\oplus"] & \widetilde{B}^m \oplus \widetilde{H}^m \arrow[d, two heads, "r_m"] \\
B^m \arrow[r, "\iota"] & Z^m
\end{tikzcd}$$

pour construire le morphisme surjectif de complexes

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & \widetilde{B}^{m-1} \oplus \widetilde{H}^{m-1} \oplus \widetilde{B}^m \arrow[r, "D_{m-1}"'] \arrow[d, two heads, "t_{m-1}"'] & \widetilde{B}^m \oplus \widetilde{H}^m \oplus \widetilde{B}^{m+1} \arrow[r, "D_m"'] \arrow[d, two heads, "t_m"'] & \widetilde{B}^{m+1} \oplus \widetilde{H}^{m+1} \oplus \widetilde{B}^{m+2} \arrow[r] \arrow[d, two heads, "t_{m+1}"'] & {} \\
{} \arrow[r] & M^{m-1} \arrow[r, "d_{m-1}"] & M^m \arrow[r, "d_m"] & M^{m+1} \arrow[r] & {}
\end{tikzcd} \tag{Eq.14}$$

où l'on a noté $D(x, y, z) := (z, 0, 0)$.

On remarquera que le passage en cohomologie des suites longues de (Eq.14) redonne la famille de surjections $\{q_m : \widetilde{H}^m \twoheadrightarrow H^m\}_{m\in\mathbb{Z}}$ de départ.

Simplifions maintenant les notations dans le diagramme (Eq.14), en posant

$$\begin{cases} \widetilde{M}^m := \widetilde{B}^m \oplus \widetilde{H}^m \oplus \widetilde{B}^{m+1}\,, \quad & \widetilde{\mathcal{M}} := (\widetilde{M}^*, D_*) \\ \epsilon_* : \widetilde{M}^* \twoheadrightarrow M^*\,, & \epsilon_m := t_m \end{cases}$$

On a ainsi construit la suite exacte de complexes

$$\mathbf{0} \to \mathcal{K} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{M}} \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{M} \to \mathbf{0} \tag{Eq.15}$$

où $\mathcal{K} := \ker(\epsilon)$.

5.1.5. Lemme. *Avec les données en cours,*

a) *Le morphisme de complexes* $\epsilon : \widetilde{\mathcal{M}} \to \mathcal{M}$ *est un relèvement projectif simultané de* $\mathcal{M}$. *De plus*
   - $\mathrm{B}^m\,\epsilon : \mathrm{B}^m\,\widetilde{\mathcal{M}} \to \mathrm{B}^m\,\mathcal{M}$, *coïncide avec* $p_m : \widetilde{B}^m \to B^m$,
   - $\mathrm{H}^m\,\epsilon : \mathrm{H}^m\,\widetilde{\mathcal{M}} \to \mathrm{H}^m\,\mathcal{M}$, *coïncide avec* $q_m : \widetilde{H}^m \to H^m$,

b) *La suite courte* $\mathbf{0} \to \mathcal{F}(\mathcal{K}) \to \mathcal{F}(\widetilde{\mathcal{M}}) \xrightarrow{\mathcal{F}(\epsilon)} \mathcal{F}(\mathcal{M}) \to \mathbf{0}$ *d'objets de* $\mathcal{A}$, *où* $\mathcal{F}(\_)$ *désigne l'un quelconque des foncteurs* $\mathrm{B}^m(\_)$, $\mathrm{Z}^m(\_)$, $\mathrm{H}^m(\_)$, *est exacte.*

Démonstration

a) Par construction.

b) Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, le foncteur $\mathrm{Z}^i(\_)$ est exact à gauche sur une suite exacte courte de complexes. Dans le cas de la suite (Eq.15), il est aussi exact à droite car ϵ_0 est un relèvement simultané. Cette exactitude, reportée dans le bicomplexe de colonnes exactes

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{0} \arrow[r] & \mathrm{B}^m\,\mathcal{K} \arrow[r] & \mathrm{B}^m\,\widetilde{\mathcal{M}} \arrow[r] & \mathrm{B}^m\,\mathcal{M} \arrow[r] & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} \arrow[r] & \mathcal{K}^{m-1} \arrow[u, two heads] \arrow[r, hook] & \widetilde{\mathcal{M}}^{m-1} \arrow[u, two heads] \arrow[r, two heads, "\epsilon_{m-1}"] & \mathcal{M}^{m-1} \arrow[u, two heads] \arrow[r] & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} \arrow[r] & \mathrm{Z}^{m-1}\,\mathcal{K} \arrow[u, hook] \arrow[r, hook] & \mathrm{Z}^{m-1}\,\widetilde{\mathcal{M}} \arrow[u, hook] \arrow[r, two heads] & \mathrm{Z}^{m-1}\,\mathcal{M} \arrow[u, hook] \arrow[r] & \mathbf{0}
\end{tikzcd}$$

implique l'exactitude de sa première ligne.

On considère ensuite le bicomplexe de colonnes exactes

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{0} \arrow[r] & \mathrm{H}^m\,\mathcal{K} \arrow[r] & \mathrm{H}^m\,\widetilde{\mathcal{M}} \arrow[r] & \mathrm{H}^m\,\mathcal{M} \arrow[r] & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} \arrow[r] & \mathrm{Z}^m\,\mathcal{K} \arrow[u, two heads] \arrow[r, hook] & \mathrm{Z}^m\,\widetilde{\mathcal{M}} \arrow[u, two heads] \arrow[r, two heads] & \mathrm{Z}^m\,\mathcal{M} \arrow[u, two heads] \arrow[r] & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} \arrow[r] & \mathrm{B}^m\,\mathcal{K} \arrow[u, hook] \arrow[r, hook] & \mathrm{B}^m\,\widetilde{\mathcal{M}} \arrow[u, hook] \arrow[r, two heads] & \mathrm{B}^m\,\mathcal{M} \arrow[u, hook] \arrow[r] & \mathbf{0}
\end{tikzcd}$$

où de nouveau, l'exactitude de la première ligne résulte de celle des deux autres, déjà établie. □

5.1.6. Décomposition des relèvements projectifs simultanés. Soit $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ la catégorie des familles d'objets de $\mathcal{A}$, notées $\boldsymbol{M} := \{M^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$, et dont les morphismes $\boldsymbol{\alpha} : \boldsymbol{M} \to \boldsymbol{N}$ sont les familles $\{\alpha_i : M^i \to N^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ de morphismes de $\mathcal{A}$ composés coordonnée par coordonnée. La catégorie $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ est abélienne.

Nous nous intéressons aux foncteurs suivants :

– « ***oubli*** » **o** : $\boldsymbol{\mathcal{C}^*\mathcal{A}} \rightsquigarrow \boldsymbol{\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}}$
  Il fait correspondre à (M^*, d_*), la famille $\boldsymbol{M} := \{M^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ des objets sous-jacents, et de même pour les morphismes de complexes. Foncteur exact.

– **Z** : $\boldsymbol{\mathcal{C}^*\mathcal{A}} \rightsquigarrow \boldsymbol{\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}}$
  Il fait correspondre à (M^*, d_*), la famille $\mathrm{Z}(M*, d_*) := \{\ker(d_i)\}_{i\in\mathbb{Z}}$, et à un morphisme $\alpha_* : (M^*, d_*) \to (N^*, d_*)$ la famille des restrictions $\{\alpha_i|_{\ker(d_i)}\}$. Foncteur exact à gauche.

– $\boldsymbol{\mathcal{F}} : \boldsymbol{\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}} \rightsquigarrow \boldsymbol{\mathcal{C}^*\mathcal{A}}$
  Il fait correspondre à $\boldsymbol{M} = \{M^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$, le complexe $\mathcal{F}(\boldsymbol{M}) := (M^*, D_{\mathcal{F}})$, avec $D_{\mathcal{F}} = 0$, et à une famille de morphismes $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_i : M^i \to N^i\}$, le morphisme de complexes $\mathcal{F}(\boldsymbol{\alpha}) : \mathcal{F}(\boldsymbol{M}) \to \mathcal{F}(\boldsymbol{N})$, avec $\mathcal{F}(\boldsymbol{\alpha})_i = \alpha_i$. Foncteur exact.

– $\boldsymbol{\mathcal{E}} : \boldsymbol{\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}} \rightsquigarrow \boldsymbol{\mathcal{C}^*\mathcal{A}}$
  Il fait correspondre à $\boldsymbol{M} = \{M^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$, le complexe

$$\mathcal{E}(\boldsymbol{M}) = (\mathcal{E}(\boldsymbol{M})^*, D_{\mathcal{E},*}) := \begin{cases} \quad \mathcal{E}\boldsymbol{M}^i := M^{i-1} \oplus M^i \\ \Delta_{\mathcal{E},i}(x,y) \;=\; (y,0)\,. \end{cases}$$

  et à une famille de morphismes $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_i : M^i \to N^i\}$, le morphisme de complexes $\mathcal{E}(\boldsymbol{\alpha}) : \mathcal{E}(\boldsymbol{M}) \to \mathcal{E}(\boldsymbol{N})$, avec $\mathcal{E}(\boldsymbol{\alpha})_i = \alpha_{i-1} \oplus \alpha_i$. Foncteur exact.

5.1.7. Remarque. Ces foncteurs sont les analogues des foncteurs $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ des paragraphes 2.2.1 et 2.3.2, et partagent les même propriétés d'adjonction. La proposition suivante est l'analogue de 2.3.4, 2.2.2 et 2.3.3, et se démontre de la même manière.

5.1.8. Proposition

a) *Les couples* $(\mathcal{E}, \mathrm{o})$ *et* $(\mathcal{F}, \mathrm{Z})$ *sont des paires de foncteurs adjoints.*

b) *Pour tout* $\boldsymbol{M} \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, *le complexe* $\mathcal{E}(\boldsymbol{M})$ *est homotopiquement nul.*

c) *Si* $\boldsymbol{P} = \{P_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ *est une famille d'objets projectifs de* $\mathcal{A}$, *le complexe* $\mathcal{E}(\boldsymbol{P})$ *est un objet projectif de la catégorie* $\mathcal{C}^*\mathcal{A}$.

5.1.9. Proposition

a) *Pour tout relèvement projectif simultané* $\epsilon : \mathcal{R} \twoheadrightarrow \mathcal{M}$, *il existe un isomorphisme de complexes*

$$\mathcal{R} \sim \mathcal{E}(\mathrm{B}\,\mathcal{R})[1] \oplus \mathcal{F}(\mathrm{H}\,\mathcal{R})$$

avec $\mathrm{B}\,\mathcal{R} := \{\mathrm{B}^i\,\mathcal{R}\}_{i\in\mathbb{Z}}$ *et* $\mathrm{H}\,\mathcal{R} := \{\mathrm{H}^i\,\mathcal{R}\}_{i\in\mathbb{Z}}$, *et* $\epsilon : \mathcal{R} \twoheadrightarrow \mathcal{M}$ *coïncide avec un relèvement projectif simultané construit par le procédé 5.1.4.*

b) *Un complexe* (M^*, d_*) *borné à droite par* $N \in \mathbb{Z}$, i.e. *tel que* $M^i = 0$ *pour* $i > N$, *admet des relèvement projectifs simultanés* $\epsilon : (R^*, D_*) \twoheadrightarrow (M^*, d_*)$ *tels que* $R^i = 0$ *pour* $i > N$.

c) *Un complexe* (M^*, d_*) *avec* $d = 0$, *admet des relèvement projectifs simultanés* $\epsilon : (R^*, D_*) \twoheadrightarrow (M^*, d_*)$ *avec* $D = 0$.

d) *Un complexe* $\mathcal{M}$ *dont les* $\mathrm{H}^m\,\mathcal{M}$ *sont projectifs pour tout* $m \in \mathbb{Z}$, *admet des relèvement projectifs simultanés* $\epsilon : \mathcal{R} \to \mathcal{M}$ *qui sont des quasi-isomorphismes.*

Démonstration. Pour chaque $m \in \mathbb{Z}$, la suite exacte courte de $\mathcal{A}$

$$\mathbf{0} \to \mathrm{B}^m\,\mathcal{R} \longrightarrow \mathrm{Z}^m\,\mathcal{R} \twoheadrightarrow \mathrm{H}^m\,\mathcal{R} \to \mathbf{0}$$

est scindée puisque $\mathrm{H}^m\,\mathcal{R}$ est projectif. On en déduit l'existence d'un isomorphisme (non canonique) $\mathrm{Z}^m\,\mathcal{R} \sim \mathrm{B}^m\,\mathcal{R} \oplus \mathrm{H}^m\,\mathcal{R}$ compatible à l'inclusion $\mathrm{B}\,\mathcal{R} \subseteq \mathrm{Z}\,\mathcal{R}$, *i.e.* tel que

$$\big(\mathrm{B}\,\mathcal{R} \subseteq \mathrm{Z}\,\mathcal{R}\big) \sim \big((\mathrm{B}\,\mathcal{R} \oplus \mathbf{0}) \subseteq (\mathrm{B}\,\mathcal{R} \oplus \mathrm{H}\,\mathcal{R})\big)\,,$$

d'où la suite courte

$$\mathbf{0} \to \mathrm{B}\,\mathcal{R} \oplus \mathrm{H}\,\mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{R} \xrightarrow{d} \mathrm{B}\,\mathcal{R}[1] \to \mathbf{0}$$

également scindée (non canoniquement), et qui donne l'isomorphisme

$$\mathcal{R} \sim \mathrm{B}\,\mathcal{R} \oplus \mathrm{H}\,\mathcal{R} \oplus \mathrm{B}\,\mathcal{R}[1]$$

identifiant le cobord $d_* : R^* \to R^*$ au cobord

$$D_{\mathcal{E}} \oplus D_{\mathcal{F}} : \mathcal{E}(\mathrm{B}\,\mathcal{R})[1] \oplus \mathcal{F}(\mathrm{H}\,\mathcal{R}) \longrightarrow \mathcal{E}(\mathrm{B}\,\mathcal{R})[1] \oplus \mathcal{F}(\mathrm{H}\,\mathcal{R})\,.$$

Ce qui termine la preuve de (a).

Les autres assertions sont évidentes comte tenu de la construction explicite des résolutions projectives simultanées (*cf.* 5.1.4). □

5.1.10. Résolutions projectives simultanées. On appelle « *résolution projective simultanée de* $\mathcal{M} \in \mathcal{C}^*\mathcal{A}$ » toute suite exacte de $\mathcal{C}^*\mathcal{A}$

$$\cdots \xrightarrow{\epsilon_{n+1}} \mathcal{R}_n \xrightarrow{\epsilon_n} \cdots \xrightarrow{\epsilon_2} \mathcal{R}_1 \xrightarrow{\epsilon_1} \mathcal{R}_0 \xrightarrow{\epsilon_0} \mathcal{M} \to 0 \qquad \text{(Eq.16)}$$

telle que, pour tout $i \in \mathbb{N}$, le morphisme $\epsilon_i : \mathcal{R}_i \to \mathrm{im}(\epsilon_i)$ est un relèvement projectif simultané. En particulier, si $\mathcal{F}(\_)$ désigne l'un quelconque des foncteurs $\mathrm{B}^m(\_)$, $\mathrm{Z}^m(\_)$, $\mathrm{H}^m(\_)$, la suite longue de $\mathcal{A}$

$$\cdots \xrightarrow{\mathcal{F}(\epsilon_{n+1})} \mathcal{F}\mathcal{R}_n \xrightarrow{\mathcal{F}(\epsilon_n)} \cdots \xrightarrow{\mathcal{F}(\epsilon_2)} \mathcal{F}\mathcal{R}_1 \xrightarrow{\mathcal{F}(\epsilon_1)} \mathcal{F}\mathcal{R}_0 \xrightarrow{\mathcal{F}(\epsilon_0)} \mathcal{F}\mathcal{M} \to 0$$

est une résolution projective de $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ dans $\mathcal{A}$.

5.1.11. Proposition

a) *Pour tout $\mathcal{M} \in \mathcal{C}^*\mathcal{A}$, et toutes résolutions projectives $P^m_\bullet \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} \mathrm{H}^m\,\mathcal{M}$ et $Q^m_\bullet \overset{\nu}{\twoheadrightarrow} \mathrm{B}^m\,\mathcal{M}$ dans $\mathcal{A}$, il existe des résolutions projectives simultanées*

$$\big(\mathcal{R}_\bullet \overset{\epsilon}{\twoheadrightarrow} \mathcal{M}\big) := \big(\cdots \xrightarrow{\epsilon_2} \mathcal{R}_1 \xrightarrow{\epsilon_1} \mathcal{R}_0 \xrightarrow{\epsilon_0} \mathcal{M} \to 0\big)$$

avec

$$\begin{cases} \big(\mathrm{H}^m\,\mathcal{R}_\bullet \overset{\mathrm{H}^m\,\epsilon}{\twoheadrightarrow} \mathrm{H}^m\,\mathcal{M}\big) = \big(P^m_\bullet \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} \mathrm{H}^m\,\mathcal{M}\big) \\ \big(\mathrm{B}^m\,\mathcal{R}_\bullet \overset{\mathrm{B}^m\,\epsilon}{\twoheadrightarrow} \mathrm{B}^m\,\mathcal{M}\big) = \big(Q^m_\bullet \overset{\nu_0}{\twoheadrightarrow} \mathrm{B}^m\,\mathcal{M}\big). \end{cases}$$

b) *Pour tout morphisme de complexes $\alpha : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$, et toutes résolutions projectives simultanées $(\mathcal{R}_\bullet \overset{\epsilon}{\twoheadrightarrow} \mathcal{M})$ et $(\mathcal{R}'_\bullet \overset{\epsilon'}{\twoheadrightarrow} \mathcal{M}')$, il existe une famille de morphismes $\alpha_\bullet : \mathcal{R}_\bullet \to \mathcal{R}'_\bullet$, unique à homotopie près, rendant commutatif le diagramme*

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots \xrightarrow{\epsilon_2} & \mathcal{R}_1 & \xrightarrow{\epsilon_1} & \mathcal{R}_0 & \xrightarrow{\epsilon_0} & \mathcal{M} & \to 0 \\ & {\scriptstyle\alpha_1}\downarrow & & {\scriptstyle\alpha_0}\downarrow & & {\scriptstyle\alpha}\downarrow & \\ \cdots \xrightarrow{\epsilon'_2} & \mathcal{R}'_1 & \xrightarrow{\epsilon'_1} & \mathcal{R}'_0 & \xrightarrow{\epsilon'_0} & \mathcal{M}' & \to 0 \end{array}$$

Indications. L'assertion (a) se démontre inductivement à l'aide du lemme 5.1.5-(b) et du procédé de construction des relèvements projectifs simultanés décrit dans 5.1.4. L'assertion (b) résulte du fait que chaque $\mathcal{R}_i$ est de la forme $\mathcal{E}(\mathrm{B}\,\mathcal{R}_i)[1] \oplus \mathcal{F}(\mathrm{H}\,\mathcal{R}_i)$ (5.1.9-(a)), et de la proposition 5.1.8 qui affirme que $\mathcal{E}(\mathrm{B}\,\mathcal{R}_i)$ est projectif dans $\mathcal{C}^*\mathcal{A}$, et que le foncteur $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}^*\mathcal{A}}\big(\mathcal{F}(\mathrm{H}\,\mathcal{R}_i), \_\big)$ transforme la résolution simultanée $\mathcal{R}'_\bullet \overset{\epsilon'}{\to} \mathcal{M}' \to \mathbf{0}$ en suite exacte longue de groupes abéliens. □

5.2. Résolutions projectives simultanés des *R-mdg*'s

Toutes les définitions constructions et propositions de la section a s'adaptent sans difficulté au contexte des R-*mdg*'s.

5.2.1. Les foncteurs B, Z, H. On considère les foncteurs

$$\begin{cases} \mathrm{B}(\_) : \mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)\,, & \mathrm{B}\,\mathcal{M} := \mathrm{im}(d_M) \\ \mathrm{Z}(\_) : \mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)\,, & \mathrm{Z}\,\mathcal{M} := \ker(d_M) \\ \mathrm{H}(\_) : \mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)\,, & \mathrm{H}\,\mathcal{M} := \mathrm{Z}(\mathcal{M})/\,\mathrm{B}(\mathcal{M}) \end{cases}$$

dont on rappelle que lorsque ils sont appliqués à une suite exacte courte de *R-mdg*'s $\mathbf{0} \to \mathcal{L} \to \mathcal{M} \to \mathcal{N} \to \mathbf{0}$, on a

- $\mathbf{0} \to \mathrm{Z}\,\mathcal{L} \to \mathrm{Z}\,\mathcal{M} \to \mathrm{Z}\,\mathcal{N} \to \mathbf{0}$ est exacte à gauche.
- $\mathbf{0} \to \mathrm{B}\,\mathcal{L} \to \mathrm{B}\,\mathcal{M} \to \mathrm{B}\,\mathcal{N} \to \mathbf{0}$ est exacte aux extrêmes.
- $\mathbf{0} \to \mathrm{H}\,\mathcal{L} \to \mathrm{H}\,\mathcal{M} \to \mathrm{H}\,\mathcal{N} \to \mathbf{0}$ est exacte aux centre.

5.2.2. Relèvements projectifs simultanés des *R-mdg*'s. On appellera « *relèvement projectif simultané* » d'un *R-mdg* $\mathcal{M}$, la donnée d'un morphisme de *R-mdg*'s $\pi : \mathcal{P} \to \mathcal{M}$, tel que les morphismes de *R-mg*'s

$$\begin{cases} \mathrm{o}\,\pi : \mathrm{o}\,\mathcal{P} \twoheadrightarrow \mathrm{o}\,\mathcal{M}\,, & \mathrm{B}\,\pi : \mathrm{B}\,\mathcal{P} \twoheadrightarrow \mathrm{B}\,\mathcal{M}\,, \\ \mathrm{Z}\,\pi : \mathrm{Z}\,\mathcal{P} \twoheadrightarrow \mathrm{Z}\,\mathcal{M}\,, & \mathrm{H}\,\pi : \mathrm{H}\,\mathcal{P} \twoheadrightarrow \mathrm{H}\,\mathcal{M}\,, \end{cases}$$

sont surjectifs de source projective, *i.e.* $\mathrm{o}\,\mathcal{P}$, $\mathrm{B}\,\mathcal{P}$, $\mathrm{Z}\,\mathcal{P}$ et $\mathrm{H}\,\mathcal{P}$ sont tous projectifs dans $\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)$.

5.2.3. Proposition. *Pour tout relèvement projectif simultané de R-mdg's $\epsilon : \mathcal{R} \twoheadrightarrow \mathcal{M}$, il existe un isomorphisme de R-mdg's*

$$\mathcal{R} \sim \mathcal{E}(\mathrm{B}\,\mathcal{R})[1] \oplus \mathcal{F}(\mathrm{H}\,\mathcal{R})\,,$$

où $\mathcal{E}, \mathcal{F} : \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ sont les foncteurs de 2.3.2 et 2.2.1.

5.2.4. Résolutions projectives simultanées des *R-mdg*'s. On appellera « *résolution projective simultanée d'un R-mdg $\mathcal{M}$* » toute suite exacte de $\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$

$$\cdots \xrightarrow{\epsilon_{n+1}} \mathcal{R}_n \xrightarrow{\epsilon_n} \cdots \xrightarrow{\epsilon_2} \mathcal{R}_1 \xrightarrow{\epsilon_1} \mathcal{R}_0 \xrightarrow{\epsilon_0} \mathcal{M} \to 0 \qquad \text{(Eq.17)}$$

telle que, pour tout $i \in \mathbb{N}$, le morphisme $\epsilon_i : \mathcal{R}_i \to \mathrm{im}(\epsilon_i)$ est un relèvement projectif simultané. En particulier, si $\mathcal{F}(\_)$ désigne l'un quelconque des foncteurs $\mathrm{B}(\_)$, $\mathrm{Z}(\_)$, $\mathrm{H}(\_)$, la suite longue de $\mathcal{A}$

$$\cdots \xrightarrow{\mathcal{F}(\epsilon_{n+1})} \mathcal{F}\,\mathcal{R}_n \xrightarrow{\mathcal{F}(\epsilon_n)} \cdots \xrightarrow{\mathcal{F}(\epsilon_2)} \mathcal{F}\,\mathcal{R}_1 \xrightarrow{\mathcal{F}(\epsilon_1)} \mathcal{F}\,\mathcal{R}_0 \xrightarrow{\mathcal{F}(\epsilon_0)} \mathcal{F}\,\mathcal{M} \to 0$$

est une résolution projective de $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ dans $\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)$.

5.2.5. Proposition

a) *Pour tout R-mdg $\mathcal{M}$, et toutes résolutions projectives $P_\bullet \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} \mathrm{H}(\mathcal{M})$ et $Q_\bullet \overset{\nu}{\twoheadrightarrow} \mathrm{B}(\mathcal{M})$ dans* $\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)$*, il existe des résolutions projectives simultanées*

$$\big(\mathcal{R}_\bullet \overset{\epsilon}{\twoheadrightarrow} \mathcal{M}\big) := \big(\cdots \xrightarrow{\epsilon_2} \mathcal{R}_1 \xrightarrow{\epsilon_1} \mathcal{R}_0 \xrightarrow{\epsilon_0} \mathcal{M} \to 0\big)$$

avec

$$\begin{cases} \big(\mathrm{H}\,\mathcal{R}_\bullet \overset{\mathrm{H}\,\epsilon}{\twoheadrightarrow} \mathrm{H}\,\mathcal{M}\big) = \big(P^m_\bullet \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} \mathrm{H}\,\mathcal{M}\big) \\ \big(\mathrm{B}\,\mathcal{R}_\bullet \overset{\mathrm{B}\,\epsilon}{\twoheadrightarrow} \mathrm{B}\,\mathcal{M}\big) = \big(Q^m_\bullet \overset{\nu_0}{\twoheadrightarrow} \mathrm{B}\,\mathcal{M}\big)\,. \end{cases}$$

On dira alors que la résolution $\big(\mathcal{R}_\bullet \overset{\epsilon}{\twoheadrightarrow} \mathcal{M}\big)$ est « compatible » *aux résolutions $P_\bullet \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} \mathrm{H}(\mathcal{M})$ et $Q_\bullet \overset{\nu}{\twoheadrightarrow} \mathrm{B}(\mathcal{M})$ dans* $\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)$.

b) *Pour tout morphisme de R-mdg's $\alpha : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$, et toutes résolutions projectives simultanées $(\mathcal{R}_\bullet \overset{\epsilon}{\twoheadrightarrow} \mathcal{M})$ et $(\mathcal{R}'_\bullet \overset{\epsilon'}{\twoheadrightarrow} \mathcal{M}')$,*

   i) *Il existe une famille $\alpha_\bullet = \{\alpha_m : \mathcal{R}_m \to \mathcal{R}'_m\}$ de morphismes de R-mdg's, rendant commutatif le diagramme*

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \xrightarrow{\epsilon_2} & \mathcal{R}_1 & \xrightarrow{\epsilon_1} & \mathcal{R}_0 & \xrightarrow{\epsilon_0} & \mathcal{M} & \to & \mathbf{0} \\ & & \big\downarrow{\scriptstyle\alpha_1} & & \big\downarrow{\scriptstyle\alpha_0} & & \big\downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \\ \cdots & \xrightarrow{\epsilon'_2} & \mathcal{R}'_1 & \xrightarrow{\epsilon'_1} & \mathcal{R}'_0 & \xrightarrow{\epsilon'_0} & \mathcal{M}' & \to & \mathbf{0} \end{array}$$

   ii) *Si $\alpha_\bullet$ et $\alpha'_\bullet$ sont deux familles vérifiant l'assertion* (i)*, il existe une famille $\{h_m : \mathcal{R}_m \to \mathcal{R}'_{m+1}\}$ de morphismes de R-mdg's, telle que*

$$\alpha_m - \alpha'_m = h_{m-1} \circ \epsilon_m + \epsilon'_{m+1} \circ h_m\,.$$

   iii) *Les morphismes induits de complexes de R-mg's*

$$\mathrm{B}\,\mathcal{R}_\bullet \xrightarrow{\mathrm{B}\,\alpha_\bullet} \mathrm{B}\,\mathcal{R}'_\bullet\,, \qquad \mathrm{Z}\,\mathcal{R}_\bullet \xrightarrow{\mathrm{Z}\,\alpha_\bullet} \mathrm{Z}\,\mathcal{R}'_\bullet\,, \qquad \mathrm{H}\,\mathcal{R}_\bullet \xrightarrow{\mathrm{H}\,\alpha_\bullet} \mathrm{H}\,\mathcal{R}'_\bullet$$

   sont uniques à homotopie près.

Démonstration. Même preuve que celle de la proposition 5.1.11. ☐

5.2.6. Remarque. Dans l'assertion 5.2.5-(b), si $\alpha : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ est, non pas un morphisme dans $\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$, mais plutôt dans $I\!\!D\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$, on fixe présentation projective $\mathcal{Q} \overset{s}{\twoheadrightarrow} \mathcal{M}_1$ et une résolution projective simultanée $\mathcal{Q}_\bullet \overset{q}{\twoheadrightarrow} \mathcal{Q}$.

Le morphisme $\beta = \alpha \circ s$ est alors un morphisme de R-*mg*'s et l'on on a un diagramme commutatif dans $\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$

$$\begin{tikzcd}
 & \cdots \arrow[rr, "\epsilon_2"] & & \mathcal{R}_1 \arrow[rr, "\epsilon_1"] \arrow[dd, dotted, "\alpha_1" near start] & & \mathcal{R}_0 \arrow[rr, "\epsilon_0"] \arrow[dd, dotted, "\alpha_0" near start] & & \mathcal{M} \to \mathbf{0} \arrow[dd, dotted, "\alpha"] \\
\cdots \arrow[rr, "q_2"] & & \mathcal{Q}_1 \arrow[ur, "s_1"] \arrow[rr, "q_1"] \arrow[dr] & & \mathcal{Q}_0 \arrow[ur, "s_0"] \arrow[rr, "q_0"] \arrow[dr] & & \mathcal{Q} \to \mathbf{0} \arrow[ur, "s"] \arrow[dr, "\beta"] & \\
 & \cdots \arrow[rr, "\epsilon'_2"] & & \mathcal{R}'_1 \arrow[rr, "\epsilon'_1"] & & \mathcal{R}'_0 \arrow[rr, "\epsilon'_0"] & & \mathcal{M}' \to \mathbf{0}
\end{tikzcd}$$

vérifiant des propriétés d'unicité homotopique analogues à celles ennoncés dans la proposition. Un tel diagramme pourra être appelé un « *relèvement projectif simultané de* $\alpha \in \mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ ».

5.2.7. À propos de $\mathrm{Hotgr}^*_R(\mathcal{P}, \_)$. La proposition précédente nous permet d'apporter une précision laissée en suspens en 3.3.6 qui affirme que si le R-*mdg* $\mathcal{P}$ est tel que $\mathrm{o}(\mathcal{P})$ est projectif, alors $\mathrm{Hotgr}^*_R(\mathcal{P}, \mathcal{A}) = 0$, pour tout R-*mdg* $\mathcal{A}$ acyclique.

En effet, soit $\mathcal{R}_\bullet \overset{\epsilon}{\twoheadrightarrow} \mathcal{P}$ une résolution projective simultanée de longueur finie comme dans 5.2.5-(a). Pour $m \in \mathbb{Z}$, on a $\mathcal{R}_m = \mathcal{E}(Q_m) \oplus \mathcal{F}(P_m)$, et

$$\mathrm{Hotgr}^*_R(\mathcal{R}_m, \mathcal{A}) = \mathrm{Hotgr}^*_R(\mathcal{E}(Q_m), \mathcal{A}) \oplus \mathrm{Hotgr}^*_R(\mathcal{F}(P_m), \mathcal{A}) = \mathbf{0}\,,$$

puisque $\mathcal{E}(Q_m)$ est homotope à zéro (5.1.8) et puisque un morphisme de complexes $\phi : \mathcal{F}P_m \to \mathcal{A}$ est un morphisme de R-*mg*'s de P_m à valeurs dans $\mathrm{Z}\,\mathcal{A}$ (*cf.* 2.2.2). Comme $\mathrm{Z}\,\mathcal{A} = \mathrm{B}\,\mathcal{A}$, le morphisme ϕ se factorise à travers de la surjection $d : \mathcal{A} \twoheadrightarrow \mathrm{Z}\,\mathcal{A}$ puisque P_m est un R-*mg* projectif, et ceci qui prouve que ϕ est homotope à zéro.

Si nous appliquons maintenant le foncteur cohomologique $\mathrm{Hotgr}^*_R(\_, \mathcal{A})$ (1.2.17) à la suite exacte (scindée) de troncatures bêtes (2.1.6)

$$\mathbf{0} \to \mathcal{R}_0 \longrightarrow \mathcal{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathcal{R}_{\geq 1} \to \mathbf{0}\,,$$

on obtient $\mathrm{Hotgr}^*_R(\mathcal{R}_{\geq 0}, \mathcal{A}) = \mathrm{Hotgr}^*_R(\mathcal{R}_{\geq 1}, \mathcal{A})$, et donc $\mathrm{Hotgr}^*_R(\mathcal{R}_{\geq 0}, \mathcal{A}) = \mathbf{0}$, de proche en proche par une itération évidente. Maintenant, si $\mathrm{o}(\mathcal{P})$ est projectif, $\widetilde{\epsilon}_0 : \mathcal{R}_{\geq 0} \to \mathcal{P}$ est un isomorphisme à homotopie près et alors $\mathrm{Hotgr}^*_R(\mathcal{P}, \mathcal{A}) = 0$. Nous avons ainsi démontré la proposition suivante.

5.2.8. Proposition. *Soit $\mathcal{P}$ un R-mdg tel que* $\mathrm{o}(\mathcal{P})$ *est projectif. Le foncteur*

$$\mathrm{Hotgr}^*_R(\mathcal{P}, \_) : \mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)$$

transforme quasi-isomorphisme en isomorphisme.

6. Foncteurs dérivés

6.1. Foncteurs Diff $\boldsymbol{F}$, $\mathbb{K}\boldsymbol{F}$, $\mathbb{D}\,\boldsymbol{F}$.

Soient R et R' deux anneaux commutatifs positivement gradués, et soient

$$\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G} : \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R) \to \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R')$$

des foncteurs *additifs*, $\boldsymbol{F}$ covariant commutant aux foncteurs de translation, et $\boldsymbol{G}$ contravariant anticommutant aux foncteurs de translation. Si $\mathcal{N} = (N, d_N)$ est un R-*mdg*, les couples $\boldsymbol{F}\mathcal{N} := (\boldsymbol{F}\,N, \boldsymbol{F}\,d_N)$ $\boldsymbol{G}\mathcal{N} := (\boldsymbol{G}\,N, \boldsymbol{G}\,d_N)$ sont clairement des R'-*mdg*'s. Ces correspondances définissent les foncteurs additifs

$$\mathrm{Diff}\,\boldsymbol{F}, \mathrm{Diff}\,\boldsymbol{G} : \mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R')\,, \tag{Eq.18}$$

possédant le même type de variance et d'exactitude que $\boldsymbol{F}$ et $\boldsymbol{G}$ respectivement. Il nous arrivera souvent de simplifier la notation Diff $\boldsymbol{F}$ en $\boldsymbol{F}$, et de même pour $\boldsymbol{G}$.

Dans la suite, pour éviter des repétitions inutiles, nous parlerons essentiellement du foncteur covariant $\boldsymbol{F}$, et sauf mention explicite des différences, les propos s'appiqueront *mutatis mutandis* au foncteur $\boldsymbol{G}$.

6.1.1. Le foncteur (Eq.18) est compatible aux homotopies et induit donc un foncteur

$$\mathbb{K}\boldsymbol{F} : \mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R')\,.$$

Mais, ce foncteur ne transforme pas forcément quasi-isomorphisme en quasi-isomorphisme. Lorsque $\dim_{\mathrm{gb}} R < \infty$, les quasi-isomorphismes de la sous-catégorie $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{proj}}(R)$ sont des isomorphismes d'après (3.2.1-(b)), et $\mathbb{K}\boldsymbol{F}$ les transforme bien en des isomorphismes. Mieux encore, dans un tel cas nous disposons de l'équivalence de catégories 3.2.1-(d), d'où l'existence d'un et d'un unique foncteur (à isomorphisme près)

$$\boxed{\mathbb{D}\,\boldsymbol{F} : \mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R')}$$

dont la restriction à $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{proj}}(R)$ coïncide avec $\mathbb{K}\boldsymbol{F}$. On pose alors

$$\mathbb{D}\,\boldsymbol{F}(\mathcal{N}) := \boldsymbol{F}(\widetilde{\mathcal{N}})\,, \text{ et } \mathbb{D}\,\boldsymbol{F}(\alpha) := \boldsymbol{F}(\widetilde{\alpha})\,,$$

où $\widetilde{\mathcal{N}} \twoheadrightarrow \mathcal{N}$ est une présentation projective, et où $\widetilde{\alpha}$ est un relèvement de α.

!! *À partir de maintenant, l'anneau R sera toujours supposé de dimension globale finie, sauf mention explicite du contraire.*

6.1.2. Exemples. Soit N un *R-mg*. Les foncteurs « *produit tensoriel gradué* » et « *homomorphismes gradués* »

$$\begin{cases} \boldsymbol{F}_1 := (\_)\otimes_R N : \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)\,, \\ \boldsymbol{F}_2 := \mathrm{Homgr}_R^{\bullet}(N,\_) : \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)\,, \\ \boldsymbol{G} := \mathrm{Homgr}_R^{\bullet}(\_,N) : \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)\,. \end{cases}$$

sont des exemples de foncteurs vérifiant les conditions de 6.1. On a

$$\begin{cases} \mathrm{Diff}\,\boldsymbol{F}_1 = \big((\_\otimes_R N)^{\bullet}, \Delta_{\bullet}\big) : \mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)\,, \\ \mathrm{Diff}\,\boldsymbol{F}_2 = \big(\mathrm{Homgr}_R^{\bullet}(N,\_), D_{\bullet}\big) : \mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)\,, \\ \mathrm{Diff}\,\boldsymbol{G} = \big(\mathrm{Homgr}_R^{\bullet}(\_,N), D_{\bullet}\big) : \mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)\,, \end{cases}$$

d'après définitions des sections 1.2.4 et 1.2.8

6.2. Filtrations et suites spectrales canoniques

Soit $\boldsymbol{F} : \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R) \to \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R')$ un foncteur vérifiant les conditions de 6.1.

Pout tout *R-mdg* $\mathcal{N}$, le *R′-mdg* $\mathrm{H}\,\mathbb{D}\,\boldsymbol{F}(\mathcal{N})$ peut se calculer à l'aide d'une résolution projective simultanée de longueur **finie**

$$(\mathcal{R}_{\bullet} \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{N}) := \big(\mathbf{0} \to \mathcal{R}_d \xrightarrow{\epsilon_d} \mathcal{R}_{d-1} \xrightarrow{\epsilon_{d-1}} \cdots \xrightarrow{\epsilon_1} \mathcal{R}_0 \xrightarrow{\epsilon_0} \mathcal{N} \to \mathbf{0}\big) \qquad \text{(Eq.19)}$$

associée à des résolutions projectives de *R-mg*'s $P_{\bullet} \xrightarrow{\pi} \mathrm{H}(\mathcal{N})$ et $Q_{\bullet} \xrightarrow{\nu} \mathrm{B}(\mathcal{N})$ que nous pouvons supposer de longueurs majorées par $d := \dim_{\mathrm{gb}}(R)$ (5.2.5). On a

$$\mathrm{H}(\mathbb{D}\,\boldsymbol{F}(\mathcal{N})) = \mathrm{H}(\boldsymbol{F}(\Sigma\,\mathcal{R}_{\bullet})) = \mathrm{H}(\Sigma(\boldsymbol{F}\,\mathcal{R}_{\bullet})) \qquad \text{(Eq.20)}$$

où la deuxième égalité est justifiée par la finitude de la résolution $(\mathcal{R}_{\bullet} \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{N})$ (4).

6.2.1. Filtration canonique de $\mathbf{H}(\mathbb{D}\,\boldsymbol{F}(\mathcal{N}))$. Reprenons la résolution (Eq.19) et considérons pour $m \leq d := \dim_{\mathrm{gb}}(R)$ les morphismes suivants entre les troncatures bêtes (*cf.* 2.1.6) :

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
\mathcal{R}_{m-1,0} & & & & & & & \mathbf{0} & \to & \mathcal{R}_{m-1} & \xrightarrow{\epsilon_{m-1}} \cdots \xrightarrow{\epsilon_1} & \mathcal{R}_0 & \to & \mathbf{0} \\
\big\downarrow{\scriptstyle \iota_{m-1,0}} & & & & & & & \downarrow & & \| & & \| & & \\
\mathcal{R}_{d,0} & \mathbf{0} \to & \mathcal{R}_d & \to \cdots \to & \mathcal{R}_{m+1} & \xrightarrow{\epsilon_{m+1}} & \mathcal{R}_m & & \xrightarrow{\epsilon_m} & \mathcal{R}_{m-1} & \xrightarrow{\epsilon_{m-1}} \cdots \xrightarrow{\epsilon_1} & \mathcal{R}_0 & \to & \mathbf{0} \\
\big\downarrow{\scriptstyle \pi_{d,m}} & & \| & & \| & & \| & & & \downarrow & & & & \\
\mathcal{R}_{d,m} & \mathbf{0} \to & \mathcal{R}_d & \to \cdots \to & \mathcal{R}_{m+1} & \xrightarrow{\epsilon_{m+1}} & \mathcal{R}_m & & \longrightarrow & \mathbf{0} & & & &
\end{array}$$

4. En effet, le foncteur $\boldsymbol{F}$ étant additif, est toujours compatible aux sommes directes finies, mais pas forcément aux sommes directes quelconques, l'contre-exemple le plus immédiat est donné par le foncteur $(\_) \rightsquigarrow \mathrm{Homgr}_R^{\bullet}(\_,R)$.

donnant la suite exacte courte de complexes de R-*mdg*'s

$$\mathbf{0} \to \mathcal{R}_{m-1,0} \xhookrightarrow{\iota_{m-1,0}} \mathcal{R}_{d,0} \xrightarrow{\pi_{d,m}} \mathcal{R}_{d,m} \to \mathbf{0} \tag{Eq.21}$$

clairement scindée (terme à terme) dans $\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)$. Les morphismes dans cette suite donnent lieu à la filtration et à la cofiltration (de bicomplexes)

$$\begin{cases} \mathcal{R}_{d,0} \xleftarrow{\iota} \mathcal{R}_{d-1,0} \xleftarrow{\iota} \cdots \xleftarrow{\iota} \mathcal{R}_{0,0} \longleftarrow \mathbf{0} \\ \mathcal{R}_{d,0} \xrightarrow{\pi} \mathcal{R}_{d,1} \xrightarrow{\pi} \cdots \xrightarrow{\pi} \mathcal{R}_{d,d} \longrightarrow \mathbf{0} \end{cases} \tag{Eq.22}$$

En appliquant le foncteur « *R-mdg simple associé* » (2.1), on obtient la suite exacte courte de R-*mdg*'s

$$\mathbf{0} \to \sum \mathcal{R}_{m-1,0} \xhookrightarrow{\sum \iota_{m-1,0}} \sum \mathcal{R}_{d,0} \xrightarrow{\sum \pi_{d,m}} \sum \mathcal{R}_{d,m} \to \mathbf{0} \tag{Eq.23}$$

toujours scindée dans $\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)$, d'où la filtration et cofiltration de R-*mdg*'s

$$\begin{cases} \sum \mathcal{R}_{d,0} \xleftarrow{\sum \iota} \sum \mathcal{R}_{d-1,0} \xleftarrow{\sum \iota} \cdots \xleftarrow{\sum \iota} \sum \mathcal{R}_{0,0} \longleftarrow \mathbf{0} \\ \sum \mathcal{R}_{d,0} \xrightarrow{\sum \pi} \sum \mathcal{R}_{d,1} \xrightarrow{\sum \pi} \cdots \xrightarrow{\sum \pi} \sum \mathcal{R}_{d,d} \longrightarrow \mathbf{0} \end{cases} \tag{Eq.24}$$

6.2.2. Le foncteur $\boldsymbol{F} : \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R')$ (covariant) appliqué à (Eq.21) donne la suite

$$\mathbf{0} \to \boldsymbol{F}\,\mathcal{R}_{m-1,0} \xhookrightarrow{\boldsymbol{F}\,\iota_{m-1,0}} \boldsymbol{F}\,\mathcal{R}_{d,0} \xrightarrow{\boldsymbol{F}\,\pi_{d,m}} \boldsymbol{F}\,\mathcal{R}_{d,m} \to \mathbf{0}\,, \tag{Eq.25}$$

qui est exacte, car scindée. On pose alors pour $i \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{H}(\boldsymbol{F} \sum \mathcal{R}_\bullet)_{-i} := \mathrm{im}\big(\mathrm{H}\,\boldsymbol{F}\,\iota_{i,0} : \mathrm{H}\,\boldsymbol{F} \sum \mathcal{R}_{i,0} \longrightarrow \mathrm{H}\,\boldsymbol{F} \sum \mathcal{R}_{d,0}\big)$$

d'où la filtration décroissante finie de R'-*mg*'s (Eq.26)

$$\boxed{\mathrm{H}(\mathbb{D}\,\boldsymbol{F}\,\mathcal{N}) = \mathrm{H}(\boldsymbol{F} \sum \mathcal{R}_\bullet)_{-d} \supseteq \cdots \supseteq \mathrm{H}(\boldsymbol{F} \sum \mathcal{R}_\bullet)_{-1} \supseteq \mathrm{H}(\boldsymbol{F} \sum \mathcal{R}_\bullet)_{0} \supseteq \mathbf{0}}$$

et les R'-*mg*'s

$$\mathrm{Gr}^i\,\mathrm{H}(\mathbb{D}\,\boldsymbol{F}(\mathcal{N})) := \frac{\mathrm{H}(\boldsymbol{F} \sum \mathcal{R}_\bullet)_i}{\mathrm{H}(\boldsymbol{F} \sum \mathcal{R}_\bullet)_{i+1}}\,, \quad \text{pour } -d \leq i \leq 0.$$

donnnant lieu au R'-module bigradué

$$\mathrm{Gr}\,\mathrm{H}(\mathbb{D}\,\boldsymbol{F}(\mathcal{N})) := \bigoplus\nolimits_{-d \leq i \leq 0} \mathrm{Gr}^i\,\mathrm{H}(\mathbb{D}\,\boldsymbol{F}(\mathcal{N}))\,.$$

6.2.3. Le foncteur $\boldsymbol{G} : \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R')$ (contravariant) appliqué à (Eq.21) donne à la suite

$$\mathbf{0} \to \boldsymbol{G}\mathcal{R}_{d,m} \xhookrightarrow{\boldsymbol{G}\pi_{d,m}} \boldsymbol{G}\mathcal{R}_{d,0} \xrightarrow{\boldsymbol{G}\iota_{m-1,0}} \boldsymbol{G}\mathcal{R}_{m-1,0} \to \mathbf{0}\,, \tag{Eq.27}$$

qui est exacte, car scindée. On pose alors pour $i \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{H}(\boldsymbol{G}\Sigma\mathcal{R}_\bullet)_i := \mathrm{im}\big(\mathrm{H}\,\boldsymbol{G}\pi_{d,i} : \mathrm{H}\,\boldsymbol{G}\Sigma\mathcal{R}_{d,i} \longrightarrow \mathrm{H}\,\boldsymbol{G}\Sigma\mathcal{R}_{d,0}\big)$$

d'où la filtration décroissante finie (Eq.28)

$$\boxed{\mathrm{H}(\mathbb{D}\,\boldsymbol{G}\mathcal{N}) = \mathrm{H}(\boldsymbol{G}\Sigma\mathcal{R}_\bullet)_0 \supseteq \cdots \supseteq \mathrm{H}(\boldsymbol{G}\Sigma\mathcal{R}_\bullet)_{d-1} \supseteq \mathrm{H}(\boldsymbol{G}\Sigma\mathcal{R}_\bullet)_d \supseteq \mathbf{0}}$$

et les R'-*mg*'s

$$\mathrm{Gr}^i\,\mathrm{H}(\mathbb{D}\,\boldsymbol{G}(\mathcal{N})) := \frac{\mathrm{H}(\boldsymbol{G}\Sigma\mathcal{R}_\bullet)_i}{\mathrm{H}(\boldsymbol{G}\Sigma\mathcal{R}_\bullet)_{i+1}}\,, \qquad \text{pour } 0 \le i \le d.$$

donnant lieu au R'-module bigradué

$$\mathrm{Gr}\,\mathrm{H}(\mathbb{D}\,\boldsymbol{G}(\mathcal{N})) := \bigoplus\nolimits_{0\le i\le d} \mathrm{Gr}^i\,\mathrm{H}(\mathbb{D}\,\boldsymbol{G}(\mathcal{N}))\,.$$

6.2.4. Théorème. *Soit $\mathcal{N}$ un R-mdg.*

a) *Les filtrations* (Eq.26) *et* (Eq.28) *sont intrinsèques,* i.e. *ne dépendent pas de la résolution projective simultanée ($\mathcal{R}_\bullet \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{N}$) considérée.*

b) *Le foncteur $\boldsymbol{F} : \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R')$ étant covariant,* $\mathrm{Gr}\,\mathrm{H}(\mathbb{D}\,\boldsymbol{F}(\mathcal{N}))$ *est limite d'une suite spectrale* canonique $(\mathbb{E}_r(\boldsymbol{F},\mathcal{N}), d_r)$, *naturelle par rapport à $\boldsymbol{F}$ et à $\mathcal{N}$, de deuxième terme*

$$\mathbb{E}_2^{-p,q}(\boldsymbol{F},\mathcal{N}) = \big[\,\mathbb{L}^p\boldsymbol{F}(\mathrm{H}\,\mathcal{N})\big]^q \Longrightarrow \mathrm{Gr}^{-p}\,\mathrm{H}^{-p+q}(\mathbb{D}\,\boldsymbol{F}(\mathcal{N}))\,.$$

*où $\mathbb{L}^p\boldsymbol{F} : D^-\,\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow D^-\,\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R')$ désigne le p-ième foncteur dérivé à gauche entre catégories dérivées des complexes de R-*mg*'s bornés à droite.*

c) *Le foncteur $\boldsymbol{G}:\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)\rightsquigarrow\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R')$ étant contravariant,* $\mathrm{Gr}\,\mathrm{H}(\mathbb{D}\boldsymbol{G}(\mathcal{N}))$ *est limite d'une suite spectrale* canonique $(\mathbb{E}_r(\boldsymbol{G},\mathcal{N}), d_r)$, *naturelle par rapport à $\boldsymbol{G}$ et à $\mathcal{N}$, de deuxième terme*

$$\mathbb{E}_2^{p,q}(\boldsymbol{G},\mathcal{N}) = \big[\,\mathbb{R}^p\boldsymbol{G}(\mathrm{H}\,\mathcal{N})\big]^q \Longrightarrow \mathrm{Gr}^p\,\mathrm{H}^{p+q}(\mathbb{D}\,\boldsymbol{G}(\mathcal{N}))\,.$$

*où $\mathbb{R}^p\boldsymbol{G} : D^-\,\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow D^+\,\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R')$ désigne les p-ième foncteur dérivé à droite entre catégories dérivées des complexes de R-*mg*'s bornés à droite puis à gauche.*

Démonstration. On raisonne pour le foncteur $\boldsymbol{F} : \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R')$ covariant, le cas de $\boldsymbol{G}$ contravariant étant tout à fait analogue.

Soient $(\mathcal{R}_\bullet \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{N})$ et $(\mathcal{R}'_\bullet \xrightarrow{\epsilon'} \mathcal{N})$ deux résolutions projectives simultanées respectivement associées à des résolutions projectives de R-*mg*'s $P_\bullet \xrightarrow{\pi} \mathrm{H}\,\mathcal{N}$ et $Q_\bullet \xrightarrow{\nu} \mathrm{B}\,\mathcal{N}$, et $P'_\bullet \xrightarrow{\pi'} \mathrm{H}\,\mathcal{N}$. et $Q'_\bullet \xrightarrow{\nu'} \mathrm{B}\,\mathcal{N}$.

La proposition 5.2.5 affirme qu'il existe un morphisme de résolutions

$$\alpha_\bullet : (\mathcal{R}_\bullet, \epsilon_\bullet) \to (\mathcal{R}'_\bullet, \epsilon'_\bullet)$$

relevant $\mathrm{id}_{\mathcal{N}}$ (qui est unique à homotopie près) et telle que le morphisme de complexes

$$\mathrm{H}\,\alpha_\bullet : (\mathrm{H}\,\mathcal{R}_\bullet, \mathrm{H}\,\epsilon_\bullet) \to (\mathrm{H}\,\mathcal{R}'_\bullet, \mathrm{H}\,\epsilon'_\bullet) \tag{$*$}$$

est un morphisme de résolutions de $(P_\bullet \xrightarrow{\pi} \mathrm{H}\,\mathcal{N})$ vers $(P'_\bullet \xrightarrow{\pi'} \mathrm{H}\,\mathcal{N})$ relevant $\mathrm{id}_{\mathrm{H}(\mathcal{N})}$, modulo des identifications canoniques $(\mathrm{H}\,\mathcal{R}_\bullet, \mathrm{H}\,\epsilon_\bullet) = (P_\bullet, \pi_\bullet)$ et $(\mathrm{H}\,\mathcal{R}'_\bullet, \mathrm{H}\,\epsilon'_\bullet) = (P'_\bullet, \pi'_\bullet)$.

Pour chaque $i \in \mathbb{N}$ on a le diagramme commutatif de R-*mdg′s*

$$\begin{tikzcd}
\sum \mathcal{R}_{i,0} \arrow[r, "\iota_{i,0}"] \arrow[d, "\Sigma\,\alpha_{i,0}"'] & \sum \mathcal{R}_\bullet \arrow[r, "\widetilde{\epsilon}_0"] \arrow[d, "\Sigma\,\alpha_\bullet"'] & \mathcal{N} \arrow[d, equal] \\
\sum \mathcal{R}'_{i,0} \arrow[r, "\iota_{i,0}"] & \sum \mathcal{R}'_\bullet \arrow[r, "\widetilde{\epsilon'}_0"] & \mathcal{N}
\end{tikzcd}$$

Dont on déduit, en passant en cohomologie, l'inclusion

$$(\mathrm{H}(\boldsymbol{F} \textstyle\sum \mathcal{R}_\bullet))_i \subseteq (\mathrm{H}(\boldsymbol{F} \textstyle\sum \mathcal{R}'_\bullet))_i\,.$$

et l'assertion (a) résulte, vu les rôles symétriques joués par $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$.

$\boldsymbol{F}\,\mathcal{R}_\bullet$ est un bi-complexe de i-ième colonne $\boldsymbol{F}(\mathcal{E}(Q_i)) \oplus \boldsymbol{F}(\mathcal{F}(P_i))$. La cohomologie de cette colonne est égale à $\boldsymbol{F}(P_i)$ puisque $\mathcal{E}(Q_i)$ est homotope à zéro (*cf.* 2.3.3). Par conséquent, si nous filtrons $\boldsymbol{F}\,\mathcal{R}_\bullet$ par indices des colonnes ([5]), on obtient une filtration régulière de $\sum(\boldsymbol{F}\,\mathcal{R}_\bullet)$ et donc une suite spectrale de premier terme

$$\mathbb{E}_1 = \big(\cdots \longrightarrow \boldsymbol{F}(P_{i+1}) \xrightarrow{\boldsymbol{F}(\pi_{i+1})} \boldsymbol{F}(P_i) \xrightarrow{\boldsymbol{F}(\pi_i)} \cdots \xrightarrow{\boldsymbol{F}(\pi_1)} \boldsymbol{F}(P_0) \to \mathbf{0}\big)$$

et donc

$$\mathbb{E}_2^{-p,q} = [\mathbb{L}^p\,\boldsymbol{F}\,\mathrm{H}(\mathcal{N})]^q \Longrightarrow \mathrm{Gr}^{-p}\,\mathrm{H}^{-p+q}(\mathbb{D}\,\boldsymbol{F}(\mathcal{N}))$$

d'après (Eq.20). L'unicité de cette suite spectrale à partir du terme $\mathbb{E}_2$, résulte alors de l'homotopie $(*)$ dans les remarques préliminaires.

Enfin, la naturalité des suites spectrales vis-à-vis des transformations naturelles de foncteurs et évidente. □

5. aussi appelé « *degré externe* ».

6.3. Morphisme de comparaison entre $\mathbb{L}\,\mathrm{Diff}\,\boldsymbol{F}$ et $\mathbb{D}\,\boldsymbol{F}$

6.3.1. Reprenons les données de 6.1. Soit

$$\boldsymbol{F} : \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R) \to \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R')$$

un foncteur *additif* et covariant commutant aux foncteurs de translation, ou bien contravariant anticommutant aux foncteurs de translation. Le foncteur induit

$$\mathrm{Diff}\,\boldsymbol{F} : \mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R')\,,$$

est additif entre catégories abéliennes qui admet un foncteur dérivé puisque la catégorie $\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ possède suffisamment de projectifs (2.4.1-(c)).

Le foncteur $\boldsymbol{F}$ étant covariant, on a le foncteur dérivé à gauche

$$\mathbb{L}\,\mathrm{Diff}\,\boldsymbol{F} : \mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow D^{-}(\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R'))$$

qui fait correspondre

$$\mathbb{L}\,\mathrm{Diff}\,\boldsymbol{F}(\mathcal{N}) := \mathrm{Diff}\,\boldsymbol{F}(\mathcal{P}_\bullet) \quad \text{et} \quad \mathbb{L}\,\mathrm{Diff}\,\boldsymbol{F}(\alpha) := \mathrm{Diff}\,\boldsymbol{F}(\alpha_\bullet)\,,$$

où $\mathcal{P}_\bullet \twoheadrightarrow \mathcal{N}$ est une résolution projective dans $\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$, et $\alpha_\bullet$ est un relèvement de α (*cf.* 2.4.1).

6.3.2. Nous allons comparer les foncteurs $\mathbb{D}\,\boldsymbol{F}$ et $\mathbb{L}\,\mathrm{Diff}\,\boldsymbol{F}$ à l'aide du foncteur « *R-mdg simple associé* » (*cf.* 2.1)

$$\textstyle\sum : \mathcal{C}^{-}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) \tag{$*$}$$

qui se prolonge naturellement (2.1.2) en un foncteur

$$K\textstyle\sum : K^{-}(\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)) \rightsquigarrow \mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)\,.$$

Lorsque $\dim_{\mathrm{gb}} R < \infty$, nous avons construit dans la preuve de 2.4.1-(d), un relèvement projectif d'un *R-mdg* $\mathcal{N}$ à l'aide de la troncature intelligente en $d := \dim_{\mathrm{gb}}(R)$ d'une résolution projective

$$(\cdots \to \mathcal{P}_m \xrightarrow{\epsilon_m} \cdots \xrightarrow{\epsilon_1} \mathcal{P}_0 \to \mathbf{0}) = \mathcal{P}_\bullet \twoheadrightarrow \mathcal{N}\,,$$

où chaque $\mathrm{o}(\mathcal{P}_i)$ est un *R-mg* projectif. Le morphisme canonique de complexes de *R-mdg*'s

$$\begin{array}{cccccccccccc}
(\mathcal{P}_\bullet, \epsilon_\bullet) & \cdots \longrightarrow & \mathcal{M}_{d+2} & \xrightarrow{\epsilon_{d+2}} & \mathcal{M}_{d+1} & \xrightarrow{\epsilon_{d+1}} & \mathcal{M}_d & \longrightarrow & \mathcal{M}_{d-1} & \longrightarrow & \mathcal{M}_{d-2} & \longrightarrow \cdots \\
\big\downarrow\!\!\!\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \epsilon_{d+1}} & & \| & & \| & & \| & \\
\tau_{\geq d}\mathcal{P}_\bullet & \cdots \longrightarrow & \mathbf{0} & \longrightarrow & \ker(\epsilon_d) & \hookrightarrow & \mathcal{M}_d & \xrightarrow{\epsilon_d} & \mathcal{M}_{d-1} & \xrightarrow{\epsilon_{d-1}} & \mathcal{M}_{d-2} & \xrightarrow{\epsilon_{d-2}} \cdots
\end{array}$$

donne le morphisme de *R-mdg*'s

$$\textstyle\sum \mathbb{L}\,\mathrm{Diff}\,\boldsymbol{F}(\mathcal{N}) = \sum \boldsymbol{F}(\mathcal{P}_\bullet) \xrightarrow{\Phi(\mathcal{N})} \sum \boldsymbol{F}(\tau_{\geq d}(\mathcal{P}_\bullet)) = \boldsymbol{F}(\sum \tau_{\geq d}(\mathcal{P}_\bullet)) = \mathbb{D}\,\boldsymbol{F}(\mathcal{N})\,, \tag{$\diamond$}$$

permettant la comparaison de $\mathbb{L}\,\mathrm{Diff}\,\boldsymbol{F}(\mathcal{N})$ et $\mathbb{D}\,\boldsymbol{F}(\mathcal{N})$.

6.3.3. Ce qui précède s'applique *mutatis mutandis* au foncteur $\boldsymbol{G}$ contravariant, et, conformément aux usages, on notera $\mathbb{R}\,\boldsymbol{G}$ et $\mathbb{R}\,\mathrm{Diff}\,\boldsymbol{G}$ plutôt que $\mathbb{L}\,\boldsymbol{F}$ et $\mathbb{L}\,\mathrm{Diff}\,\boldsymbol{F}$, s'agissant maintenant de foncteurs dérivés à droite. Le morphisme de comparaison $(\diamond)$ s'écrit alors

$$\mathbb{D}\,\boldsymbol{G}(\mathcal{N}) \xrightarrow{\Phi(\mathcal{N})} \textstyle\sum \mathbb{R}\,\mathrm{Diff}\,\boldsymbol{G}(\mathcal{N})\,. \tag{$\diamond'$}$$

6.3.4. Proposition. *On suppose R de dimension globale finie. Soient*

$$\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G} : \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R) \to \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R')$$

des foncteurs additifs, $\boldsymbol{F}$ covariant et commutant aux foncteurs de translation, et $\boldsymbol{G}$ contravariant et anticommutant aux foncteurs de translation.
Pour tout R-mdg $\mathcal{N}$,

a) *Le R-mdg $\sum \mathbb{L}\,\mathrm{Diff}\,\boldsymbol{F}(\mathcal{N})$ est acyclique.*

b) *Si $\boldsymbol{G}$ est exact à gauche, le morphisme naturel*

$$\Phi(\_) : \mathbb{D}\,\boldsymbol{G}(\_) \to \textstyle\sum \mathbb{R}\,\mathrm{Diff}\,\boldsymbol{G}(\_)$$

est un quasi-isomorphisme.

Démonstration

a) Pour calculer $\mathbb{L}\,\mathrm{Diff}\,\boldsymbol{F}(\mathcal{N})$, on prend une résolution $\mathcal{P}_\bullet \overset{\epsilon}{\twoheadrightarrow} \mathcal{N}$ où les $\mathcal{P}_m$ sont des *R-mdg*'s projectifs donc homotopes à zéro (3.2.1-(a)). Il en est donc de même pour $\boldsymbol{F}\,\mathcal{P}_m$, de sorte que le complexe $(\boldsymbol{F}\,\mathcal{P}_\bullet, \boldsymbol{F}\,\epsilon_\bullet)$ est conforme aux hypothèses du théorème d'acyclicité 2.1.4-(b) et donc

$$\textstyle\sum \mathbb{L}\,\mathrm{Diff}\,\mathcal{F}(\mathcal{N}) = \sum \mathrm{Diff}\,\boldsymbol{F}(\mathcal{P}_\bullet) = \text{acyclique}$$

b) On procède comme dans (a) en appliquant le foncteur contravariant $\boldsymbol{G}$ à la résolution projective $(\mathcal{P}_\bullet, \epsilon_\bullet)$.

Les morphismes entre scindages intelligents

$$\begin{tikzcd}
\tau_{>d}\mathcal{P}_\bullet \arrow[d, hook] & \cdots \arrow[r] & \mathcal{P}_{d+2} \arrow[r, two heads, "\epsilon_{d+2}"'] \arrow[d, equal] & \ker(\epsilon_{d+1}) \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathbf{0} \arrow[d] & & & \\
(\mathcal{P}_\bullet, \epsilon_\bullet) \arrow[d, two heads] & \cdots \arrow[r] & \mathcal{P}_{d+2} \arrow[r, "\epsilon_{d+2}"] \arrow[d] & \mathcal{P}_{d+1} \arrow[r, "\epsilon_{d+1}"] \arrow[d, two heads, "\epsilon_{d+1}"] & \mathcal{P}_d \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{P}_{d-1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{P}_{d-2} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \\
\tau_{\leq d}\mathcal{P}_\bullet & \cdots \arrow[r] & \mathbf{0} \arrow[r] & \ker(\epsilon_d) \arrow[r, hook] & \mathcal{P}_d \arrow[r, "\epsilon_d"] & \mathcal{P}_{d-1} \arrow[r, "\epsilon_{d-1}"] & \mathcal{P}_{d-2} \arrow[r, "\epsilon_{d-2}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

donnent lieu à la suite

$$\mathbf{0} \to \boldsymbol{G}(\tau_{\leq d}\mathcal{P}_\bullet) \longrightarrow \boldsymbol{G}\,\mathcal{P}_\bullet \longrightarrow \boldsymbol{G}(\tau_{>d}\mathcal{P}_\bullet) \to \mathbf{0} \tag{$\diamond$}$$

qui est exacte : à gauche puisque $\boldsymbol{G}$ l'est ainsi, et à droite puisque le conoyau du morphisme de droite est $I\!R^1\boldsymbol{G}(\ker(\epsilon_d)) = I\!R^{d+2}\boldsymbol{G}(\mathcal{N}) = 0$ car $\dim_{\mathrm{gb}}(R) = d$. Par ailleurs, le complexe

$$\boldsymbol{G}(\tau_{>d}\mathcal{P}_\bullet) = \big(\mathbf{0} \to \boldsymbol{G}(\ker(\epsilon_{d+1})) \to \boldsymbol{G}(\mathcal{P}_{d+2}) \to \boldsymbol{G}(\mathcal{P}_{d+3}) \to \cdots\big)$$

est exact puisque $\boldsymbol{G}$ est exact à gauche et que sa cohomologie calcule $I\!R^k\boldsymbol{G}(\ker(\epsilon_{d+1})) = I\!R^{k+d+2}\boldsymbol{G}(\mathcal{N}) = 0$, pour les mêmes raisons.

Si nous appliquons maintenant le foncteur $\sum$ à $(\diamond)$, on obtient la suite exacte courte de R-*mdg*'s

$$\mathbf{0} \to \textstyle\sum \boldsymbol{G}(\tau_{\leq d}\mathcal{P}_\bullet) \longrightarrow \textstyle\sum \boldsymbol{G}\,\mathcal{P}_\bullet \longrightarrow \textstyle\sum \boldsymbol{G}(\tau_{>d}\mathcal{P}_\bullet) \to \mathbf{0}$$

où le terme de droite est acyclique d'après 2.1.4-(c).

Le morphisme canonique

$$I\!D\,\boldsymbol{G}(\mathcal{N}) = \textstyle\sum \boldsymbol{G}(\tau_{\leq d}\mathcal{P}_\bullet) \xrightarrow{\Phi(\mathcal{N})} \textstyle\sum \boldsymbol{G}\,\mathcal{P}_\bullet = \textstyle\sum I\!R\,\mathrm{Diff}\,\boldsymbol{G}(\mathcal{N})$$

est bien, par conséquent, un quasi-isomorphisme. □

6.3.5. Remarques

a) Dans le cas du foncteur covariant $\boldsymbol{F}$, le morphisme canonique $(\diamond)$,

$$\Phi(\mathcal{N}) : \textstyle\sum I\!L\,\mathrm{Diff}\,\boldsymbol{F}(\mathcal{N}) \longrightarrow I\!D\,\boldsymbol{F}(\mathcal{N})$$

induit un isomorphisme entre la limite de la suite spectrale associée au bicomplexe $I\!L\,\mathrm{Diff}\,\boldsymbol{F}(\mathcal{N})$ filtré par degrés des *mdg*'s (6), et le gradué de cohomologie de $I\!D\,\boldsymbol{F}(\mathcal{N})$. En effet, le morphisme canonique de complexes $\mathcal{P}_\bullet \twoheadrightarrow \tau_{\leq d}\mathcal{P}_\bullet$ induit un morphisme de **bi**complexes $\boldsymbol{F}\,\mathcal{P}_\bullet \to \boldsymbol{F}\,\tau_{\leq d}\mathcal{P}_\bullet$, d'où le morphisme des suites spectrales associées aux filtrations par le degrés de R-*mdg*'s (degrés internes) :

$$I\!E_r\,\Phi : I\!E_r(\boldsymbol{F}\,\mathcal{P}_\bullet, d_r) \longrightarrow I\!E_r(\boldsymbol{F}\,\tau_{\leq d}\mathcal{P}_\bullet, d_r)\,.$$

Or, les complexes $I\!E_1^k(\boldsymbol{F}\mathcal{P}_\bullet, d_1)$ et $I\!E_1^k(\boldsymbol{F}\tau_{\leq d}\mathcal{P}_\bullet, d_1)$ réalisent $I\!L^k\boldsymbol{F}(\mathrm{o}(\mathcal{N}))$ dans la catégorie dérivée de $\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)$, de sorte que $I\!E_1\,\Phi$ est un quasi-isomorphisme. On en déduit que les morphismes $I\!E_r\,\Phi$ sont des isomorphismes pour tout $r \geq 2$. Maintenant, comme la filtration par degré interne du bicomplexe $\tau_{\leq d}\mathcal{P}_\bullet$ est régulière, ces suites spectrales convergent vers bien vers le gradué de la cohomologie de $I\!D\,\boldsymbol{F}(\mathcal{N})$.

b) Dans le cas du foncteur contravariant $\boldsymbol{G}$, le morphisme naturel de R-*mdg*'s $\Phi(\mathcal{N}) : I\!D\,\boldsymbol{G}(\mathcal{N}) \to \sum I\!R\,\mathrm{Diff}\,\boldsymbol{G}(\mathcal{N})$ est isomorphisme à homotopie près,

6. Appelés « *degrés internes* ».

si et seulement si, le *R-mdg* $\sum \boldsymbol{G}(\tau_{>d}\mathcal{P}_\bullet)$, dont on sait déjà qu'il est acyclique, est aussi homotopiquement nul. Une condition suffisante pour cela, d'après (3.2.1-(a)), est *que les R-mg's* $\mathrm{o}(\boldsymbol{G}\,\mathcal{P}_k)$ *et* $\mathrm{o}(\boldsymbol{G}\,\ker(\epsilon_{d+1}))$ *soeint projectifs* (†). Or, si R est noethérien et que $\mathcal{N}$ est un R-module de type fini, les termes $\mathcal{P}_k$, et donc $\ker(\epsilon_{d+1})$, peuvent être pris projectifs de type fini, donc facteurs directs de R-modules libres de rang fini, et la condition (†) sera satisfaite pour peu que $\boldsymbol{G}(R)$ soit un R'-module projectif. Un cas intéressant est celui du foncteur $\boldsymbol{G}(\_) := \mathrm{Homgr}_R(\_, R)$, où R est un anneau de polynômes à un nombre fini de variables, à coefficiens entiers ou dans un corps. Même dans ce cas, j'ignore au moment d'écrire ces lignes, quelle est la classe d'homotopie de $\sum \boldsymbol{G}(\tau_{>d}\mathcal{P}_\bullet)$ pour $\mathcal{N}$ quelconque.

7. Scindage de *R*-mdgr's

7.1. *R-mdg*'s scindés

7.1.1. Notation. Pour tout *R-mdg* $\mathcal{M} = (M, d_{\mathcal{M}})$, on note $\mathrm{H}\,\mathcal{M}$ sa cohomologie en tant *R-mg*, et on note $\mathcal{H}\,\mathcal{M} := \mathcal{F}(\mathrm{H}\,\mathcal{M}) = (\mathrm{H}\,\mathcal{M}, 0)$ (*cf.* 2.2.1).

7.1.2. Définition. Un *R-mdg* $\mathcal{M}$ est « *scindé* » dans $\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ (resp. dans $\mathbb{K}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ ou $\mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$), s'il y est isomorphe à sa cohomologie, soit :

$$\mathcal{M} \sim \mathcal{H}\,\mathcal{M}\,.$$

7.1.3. Lemme. *Soit $\mathcal{M}$ un R-mdg.*

a) *Si* $\mathrm{o}(\mathcal{M})$ *est projectif, le R-mdg $\mathcal{M}$ est scindé dans* $\mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ *si, et seulement si, il existe un quasi-isomorphisme de R-mdg's* $\mathcal{M} \to \mathcal{H}\,\mathcal{M}$.
b) *Il existe un quasi-isomorphisme de R-mdg's* $\mathcal{H}\,\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ *si, et seulement si, la surjection canonique de R-mg's* $\pi : \mathrm{Z}\,\mathcal{M} \twoheadrightarrow \mathrm{H}\,\mathcal{M}$ *est scindée. En particulier, si* $\mathrm{H}\,\mathcal{M}$ *est projectif, $\mathcal{M}$ est scindé dans* $\mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$.
c) *Si* $\dim_{\mathrm{proj}}(\mathrm{H}\,\mathcal{M}) \leq 1$, *le R-mdg $\mathcal{M}$ est scindé dans* $\mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$.

Démonstration.

a) Si $\pi_1 : \mathcal{Q}_1 \twoheadrightarrow \mathcal{M}$ et $\pi_2 : \mathcal{Q}_2 \twoheadrightarrow \mathcal{H}\,\mathcal{M}$ sont des relèvement projectifs, et si $\alpha : \mathcal{M} \to \mathcal{H}\,\mathcal{M}$ est un isomorphisme dans $\mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$, il existe (3.2.1) un morphisme de R-*mdg*'s $\widetilde{\alpha} : \mathcal{Q}_1 \to \mathcal{Q}_2$ tel que

$$\begin{tikzcd} \mathcal{Q}_1 \arrow[r, two heads, "\pi_1"] \arrow[d, dotted, "\widetilde{\alpha}"'] & \mathcal{M} \arrow[d, "\alpha"] \\ \mathcal{Q}_2 \arrow[r, two heads, "\pi_2"] & \mathcal{H}\,\mathcal{M} \end{tikzcd}$$

est commutatif dans $\mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$. Maintenant, si $\mathrm{o}(\mathcal{M})$ est projectif, on peut prendre $\mathcal{Q}_1 = \mathcal{M}$ et $\pi_1 = \mathrm{id}$, auquel cas $\pi_2 \circ \widetilde{\alpha} : \mathcal{M} \to \mathcal{H}\,\mathcal{M}$ est un quasi-isomorphisme de R-*mdg*'s.

b) Lorsque $\mathrm{H}(\mathcal{M})$ est un R-*mg* projectif, la surjection $\mathrm{Z}\,\mathcal{M} \to \mathrm{H}\,\mathcal{M}$ admet une section $\sigma : \mathrm{H}\,\mathcal{M} \to \mathrm{Z}\,\mathcal{M}$ qui composée à l'inclusion $\mathrm{Z}\,\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}$ donne clairement un quasi-isomorphisme de $\mathcal{H}\,\mathcal{M}$ vers $\mathcal{M}$.

c) Fixons une résolution projective simultanée de longueur finie $\mathcal{R}_\bullet \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{M}$ construite à l'aide de résolutions projectives $\mathbf{0} \to P_1 \xrightarrow{\pi_1} P_0 \to \mathrm{H}\,\mathcal{M} \to \mathbf{0}$ et $Q_\bullet \xrightarrow{\nu} \mathrm{B}\,\mathcal{M}$ de R-*mg*'s. On a $\mathcal{R}_1 = \mathcal{F}(P_1) \oplus \mathcal{E}(Q_1)$ et si $x \in \mathcal{F}(P_1)$, on a $\epsilon_1(x) = (\pi_1(x), y)$ pour un certain cocycle $y \in \mathcal{E}(Q_0)$. En particulier, le complexe de R-*mdg*'s $\mathbf{0} \to \mathcal{F}(P_1) \xrightarrow{\epsilon_1} \mathcal{F}(\epsilon_1(P_1)) \oplus \mathcal{E}(Q_0) \to \mathbf{0}$ est exact. On considère alors le morphisme de complexes de R-*mdg*$'s$

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{0} \arrow[r] & \mathcal{F}(P_1) \oplus \mathbf{0} \arrow[r, "\epsilon_1"] \arrow[d, hook, "\subseteq"] & \mathcal{F}(\epsilon_1(P_1)) \oplus \mathcal{E}(Q_0) \arrow[r] \arrow[d, hook, "\subseteq"] & \mathbf{0} \\ \arrow[r] & \mathcal{R}_2 \arrow[r, "\epsilon_2"] \arrow[d, equal] & \mathcal{F}(P_1) \oplus \mathcal{E}(Q_1) \arrow[r, "\epsilon_1"] \arrow[d, two heads] & \mathcal{F}(P_0) \oplus \mathcal{E}(Q_0) \arrow[r] \arrow[d, two heads] & \mathbf{0} \\ \arrow[r] & \mathcal{R}_2 \arrow[r, "\epsilon_2'"] & \mathcal{R}_1' \arrow[r, "\epsilon_1'"] & \mathcal{R}_0' = \mathcal{F}(\mathrm{H}\,\mathcal{M}) \arrow[r] & \mathbf{0} \end{tikzcd}$$

où la troisième ligne est le quotient des deux premières. Comme la première ligne est exacte, le morphisme de R-*mdg*'s induit $\sum \mathcal{R}_\bullet \to \sum \mathcal{R}'_\bullet$ est un quasi-isomorphisme, de même par ailleurs que l'injection $\mathcal{R}'_0 \subseteq \sum \mathcal{R}'_\bullet$. On a donc les quasi-isomorphismes de R-*mdg*'s

$$\mathcal{H}\,\mathcal{M} = \mathcal{R}'_0 \to \textstyle\sum \mathcal{R}'_\bullet \leftarrow \sum \mathcal{R}_\bullet \to \mathcal{M}$$

et $\mathcal{H}\,\mathcal{M} \sim \mathcal{M}$ dans $\mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$. □

7.1.4. Remarque. Dans l'assertion 7.1.3-(a), l'hypothèse sur la projectivité de $\mathrm{o}(\mathcal{M})$ est nécessaire. En effet, soit $p : M_1 \twoheadrightarrow M_0$ une surjection de R-*mg*'s et soit $\mathcal{M} =: \sum M_\bullet$. On a $\mathrm{H}\,\mathcal{M} = \ker(p)[1]$. Tout morphisme de R-*mdg*'s $\alpha : \mathcal{M} \to \mathcal{H}\,\mathcal{M}$ se factorise à travers $\mathcal{M}/\,\mathrm{B}\,\mathcal{M} = M_1[1]$, et dire que α est un quasi-isomorphisme, équivaut alors à dire que p est scindé, ce qui n'est pas toujours vrai. Le R-*mdg* $\mathcal{M}$ est pourtant scindé dans $\mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ puisque l'inclusion $\ker(p)[1] \subseteq \sum M_\bullet$ est un quasi-isomorphisme, ce qui est aussi conforme à l'assertion (b) du même lemme.

7.1.5. Remarque. Dans le contrexemple précédent, nous pouvons supposer que $\ker(p)$ est projectif, mais pas M_0. Dans ce cas, il existe un quasi-isomorphisme $\mathcal{H}\,\mathcal{M} \to \mathcal{M}$, et il n'existe pas de quasi-isomorphisme $\mathcal{M} \to \mathcal{H}\,\mathcal{M}$. Inversement, si nous considérons une injection $i : N_1 \to N_0$ entre R-*mg*'s projectifs, telle que $\operatorname{coker}(i)$ n'est pas projectif, et si nous posons $\mathcal{N} := \sum N_\bullet$, il existe bien un quasi-isomorphisme $\mathcal{N} \to \mathcal{H}\,\mathcal{N}$, et il n'existe pas de quasi-isomorphisme $\mathcal{H}\,\mathcal{N} \to \mathcal{N}$. Dans les deux cas, la cohomologie est de dimension projective ≤ 1, de sorte que le R-*mdg* $\mathcal{L} := \mathcal{M} \oplus \mathcal{N}$ est scindé dans $I\!\!D\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ d'après 7.1.3-(c), mais il n'existe pas de quasi-isomorphisme de R-*mdg*'s $\mathcal{L} \to \mathcal{H}\,\mathcal{L}$ ni $\mathcal{H}\,\mathcal{L} \to \mathcal{L}$.

7.1.6. $I\!\!D\,\mathbf{Hotgr}^*_R(\langle\mathbf{scindé}\rangle, N)$. Soit N un R-*mg*. La section 3.3.4 introduit le foncteur cohomologique

$$I\!\!D\,\mathrm{Hotgr}^*_R(\_, N) : I\!\!D\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)\,,$$

et donne, pour tout R-*mg* M, un isomorphisme canonique (3.3.5-(a))

$$I\!\!D\,\mathrm{Hotgr}^k_R(\mathcal{F}(M), N) \cong \bigoplus\nolimits_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Extgr}^n_R(M, N[k-n])\,, \quad \forall k \in \mathbb{Z}\,.$$

Nous étudions dans cette partie les conditions de validité de cette identification lorsque l'on remplace $\mathcal{F}(M)$ par un R-*mdg* scindé $\mathcal{M}$.

Soient $\varphi_1, \varphi_2 : \mathcal{M} \to \mathcal{H}\,\mathcal{M}$ deux isomorphismes dans $I\!\!D\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$. Par fonctorialité, on obtient les bijections (φ_1) et (φ_2) :

$$\begin{tikzcd}
I\!\!D\,\mathrm{Hotgr}^*_R(\mathcal{H}\,\mathcal{M}, N) \arrow[dr, "(\varphi_1)"] \arrow[d, dotted, "(\varphi_2)^{-1}\circ(\varphi_1)"] & \\
I\!\!D\,\mathrm{Hotgr}^*_R(\mathcal{H}\,\mathcal{M}, N) \arrow[r, "(\varphi_2)"'] & I\!\!D\,\mathrm{Hotgr}^*_R(\mathcal{M}, N)
\end{tikzcd}$$

et la bijection de transition $(\varphi_2)^{-1} \circ (\varphi_1)$ correspond à l'isomorphisme de la catégorie $I\!\!D\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$

$$\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1} : \mathcal{H}\,\mathcal{M} \to \mathcal{H}\,\mathcal{M}\,.$$

Maintenant, si $(P_\bullet \xrightarrow{\pi} \mathrm{H}\,\mathcal{M})$ est une résolution projective dans $\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)$, la loi de composition naturelle

$$\circ : \mathrm{Hotgr}^a_R(P_{\geq 0}, N) \times \mathrm{Hotgr}^b_R(P_{\geq 0}, P_{\geq 0}) \to \mathrm{Hotgr}^{a+b}_R(P_{\geq 0}, N)\,, \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}\,,$$

montre que l'action de $(\varphi_2)^{-1} \circ (\varphi_1)$ sur $I\!\!D\,\mathrm{Hotgr}^*_R(\mathcal{H}\,\mathcal{M}, N)$ s'identifie à la composition à droite par le morphisme « *de transition* » $\Phi \in \mathrm{Hotgr}^0_R(P_{\geq 0}, P_{\geq 0})$

défini par la composée de relèvements $\widetilde{\varphi}_1 \circ \widetilde{\varphi}_2^{-1}$, autrement dit, on a

$$\begin{cases} \bullet\ \Phi = \widetilde{\varphi}_1 \circ \widetilde{\varphi}_2^{-1} \in \mathrm{Hotgr}^0_R(\mathcal{P}_{\geq 0}, P_{\geq_0})\,,\ \text{et} \\ \bullet\ ((\varphi_2)^{-1} \circ (\varphi_1))(\alpha) = \alpha \circ \Phi\,, \quad \forall \alpha \in \mathrm{Hotgr}^*_R(P_{\geq 0}, N)\,. \end{cases} \tag{Eq.29}$$

Or, d'après 5.2.7 et 3.3.5-(a), nous avons

$$\begin{aligned} \Phi \in\ & \mathrm{Hotgr}^0_R(P_{\geq 0}, P_{\geq 0}) = \mathrm{Hotgr}^0_R(P_{\geq 0}, \mathrm{H}\,\mathcal{M}) \\ & = \mathrm{Homgr}^0_R(\mathrm{H}\,\mathcal{M}, \mathrm{H}\,\mathcal{M}) \oplus \textstyle\bigoplus_{k>0} \mathrm{Extgr}^k_R(\mathrm{H}\,\mathcal{M}, \mathrm{H}\,\mathcal{M}[-k])\,. \end{aligned}$$

ce qui donne la décomposition canonique du morphisme de transition :

$$\Phi = \Phi_0 \oplus \Phi_1 \oplus \Phi_2 \oplus \cdots\,,$$

où la composante $\Phi_k : P_{\geq 0} \to \mathrm{H}\,\mathcal{M}$, qui correspond au facteur appartenant à $\mathrm{Extgr}^k_R(\mathrm{H}\,\mathcal{M}, \mathrm{H}\,\mathcal{M})$, est le morphisme de R-*mdg*'s associé à un certain morphisme de complexes de la forme

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & P_{k+1} \arrow[r, "\epsilon_{k+1}"] \arrow[d] & P_k \arrow[r, "\epsilon_k"] \arrow[d, "\alpha_k"] & P_{k-1} \arrow[r, "\epsilon_{k-1}"] \arrow[d] & \cdots \arrow[r, "\epsilon_1"] & P_0 \arrow[r] & \mathbf{0} \\ & \mathbf{0} \arrow[r] & \mathrm{H}\,\mathcal{M}[-k] \arrow[r] & \mathbf{0} \end{tikzcd}$$

de sorte que l'action de Φ_k en cohomologie est nulle dès que $k > 0$, de plus

$$\Phi_0 \in \mathrm{Hotgr}^0_R(\mathrm{H}\,\mathcal{M}, \mathrm{H}\,\mathcal{M}) \quad \text{coïncide avec} \quad \mathrm{H}\,\Phi : \mathrm{H}\,\mathcal{M} \to \mathrm{H}\,\mathcal{M}\,. \tag{Eq.30}$$

Conclusion. Ces observation montrent que même en exigeant aux isomorphismes $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{H}\,\mathcal{M}$ d'induire l'identité en cohomologie, les morphismes de transition Φ, qui vérifieraient alors $\Phi_0 = \mathrm{id}_{\mathrm{H}\,\mathcal{M}}$, n'ont aucune raison d'être l'identité. Aussi, l'isomorphisme induit par φ :

$$\textstyle\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Extgr}^n_R(\mathrm{H}\,\mathcal{M}, N[k-n]) \xrightarrow[(\varphi)]{\sim} I\!\!D\,\mathrm{Hotgr}^k_R(\mathcal{M}, N)\,, \quad \forall k \in \mathbb{Z}\,.$$

dépend du choix de φ, *i.e.* **n'est pas intrinsèque**.

Cette situation s'arrange par contre dès que l'on passe aux gradués. Donnons-nous une présentation projective $s : \mathcal{Q} \twoheadrightarrow \mathcal{M}$ et des résolutions projectives simultannées $(\mathcal{R}_\bullet \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{M})$ et $(\mathcal{Q}_\bullet \xrightarrow{q} \mathcal{Q})$ compatibles à une résolution projective $(P_\bullet \xrightarrow{\pi} \mathrm{H}\,\mathcal{M})$. Soit $s_\bullet : \mathcal{Q}_\bullet \to \mathcal{R}_\bullet$ un relèvement de s. On a

$$\begin{tikzcd} & \cdots \arrow[rr, "\epsilon_2"] & & \mathcal{R}_1 \arrow[rr, "\epsilon_1"] & & \mathcal{R}_0 \arrow[rr, two heads, "\epsilon_0"] & & \mathcal{M} \\ \cdots \arrow[rr, "q_2"] & & \mathcal{Q}_1 \arrow[ur, "s_1"] \arrow[rr, "q_1"] & & \mathcal{Q}_0 \arrow[ur, "s_0"] \arrow[rr, two heads, "q_0"] & & \mathcal{Q} \arrow[ur, two heads, "s"] \\ & \cdots \arrow[rr, "\pi_2"] & & \mathcal{F}P_1 \arrow[rr, "\pi_1"] & & \mathcal{F}P_0 \arrow[rr, two heads, "\pi_0"] & & \mathcal{H}\,\mathcal{M} \end{tikzcd}$$

Maintenant, pour tout isomorphisme $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{H}\,\mathcal{M}$ de $\mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$, induisant l'identité en cohomologie, il existe un quasi-isomorphisme $\beta : \mathcal{Q} \to \mathcal{H}\,\mathcal{M}$ dans $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ et un relèvement projectif simultané de φ (5.2.6) :

$$\begin{tikzcd}
& \cdots \arrow[rr, "\epsilon_2"] & & \mathcal{R}_1 \arrow[rr, "\epsilon_1"] & & \mathcal{R}_0 \arrow[rr, two heads, "\epsilon_0"] & & \mathcal{M} \arrow[dd, dotted, "\varphi"] \\
\cdots \arrow[rr, "q_2"] & & \mathcal{Q}_1 \arrow[ur, "s_1"] \arrow[dr, dotted, "\beta_1"'] \arrow[rr, "q_1"] & & \mathcal{Q}_0 \arrow[ur, "s_0"] \arrow[dr, dotted, "\beta_0"'] \arrow[rr, two heads, "q_0"] & & \mathcal{Q} \arrow[ur, "s"] \arrow[dr, dotted, "\beta"'] & \\
& \cdots \arrow[rr, "\pi_2"] & & \mathcal{F}P_1 \arrow[rr, "\pi_1"] & & \mathcal{F}P_0 \arrow[rr, two heads, "\pi_0"] & & \mathcal{H}\,\mathcal{M}
\end{tikzcd}$$

où les morphismes

$$s_{\geq 0} : \mathcal{Q}_{\geq 0} \to \mathcal{R}_{\geq 0} \quad \text{et} \quad \beta_{\geq 0} : \mathcal{Q}_{\geq 0} \to \mathcal{F}P_{\geq 0}$$

sont des quasi-isomorphismes dans $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ qui respectent, par construction, les filtrations canoniques des complexes sous-jacents. Mais alors, les termes $\mathbb{E}_2$ des suites spectrales canoniques associées à $\mathrm{Hotgr}^*_R(\mathcal{R}_{\geq 0}, N)$ et $\mathrm{Hotgr}^*_R(\mathcal{F}P_{\geq 0}, N)$ sont *identiques* et les morphismes induits par $(s_\bullet)$ et $(\beta_\bullet)$ sur ces termes sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre [7]. La proposition suivante en découle.

7.1.7. Proposition. *Soit $\mathcal{M}$ un R-mdg scindé et, pour $k \in \mathbb{Z}$, munissons $\mathbb{D}\,\mathrm{Hotgr}^k_R(\mathcal{M}, N)$ et $\mathbb{D}\,\mathrm{Hotgr}^k_R(\mathcal{H}\,\mathcal{M}, N)$ de la filtration canonique 6.2.1. Alors, pour tout isomorphisme $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{H}\,\mathcal{M}$ dans $\mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ induisant l'identité en cohomologie, le morphisme induit*

$$\mathrm{Gr}\,\mathbb{D}\,\mathrm{Hotgr}^k_R(\mathcal{H}\,\mathcal{M}, N) \xrightarrow{\mathrm{Gr}(\varphi)} \mathrm{Gr}\,\mathbb{D}\,\mathrm{Hotgr}^k_R(\mathcal{M}, N)\,, \qquad \forall k \in \mathbb{Z}\,,$$

est une bijection indépendante de φ. En particulier, pour tous $p \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$, on a un isomorphisme canonique naturel de foncteurs

$$\mathrm{Extgr}^p_R(\mathrm{H}(\_), N[k-p]) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Gr}^p\,\mathbb{D}\,\mathrm{Hotgr}^k_R(\_, N)\,,$$

sur la sous-catégorie pleine des R-mdg's scindés de $\mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$.

7.1.8. Remarque. Une autre manière de procéder pour vérifier le caractère intrinsèque du morphisme $\mathrm{Gr}(\varphi)$ dans 7.1.7 consiste à montrer que la filtration canonique de $\mathcal{A} := \mathrm{Hotgr}^*_R(P_{\geq 0}, P_{\geq 0})$ en fait une *R-algèbre graduée filtrée* et que l'action de $\mathcal{A}$ à droite sur $\mathrm{Hotgr}^*_R(P_{\geq 0}, N)$ est bien compatible aux filtrations. On constate ensuite que le gradué de l'isomorphisme de transition Φ dans (Eq.29) n'est autre que l'isomorphisme $\Phi_0 = \mathrm{H}\,\Phi : \mathrm{H}\,\mathcal{M} \to \mathrm{H}\,\mathcal{M}$, d'après la remarque (Eq.30).

7. On pourrait même faire abstraction de la compatibilité des résolutions simultanées par rapport à $(\mathcal{P}_\bullet \to \mathrm{H}\,\mathcal{M})$. Dans ce cas, les termes $\mathbb{E}_1$ des suites spectrales canoniques sont des résolutions projectives de $\mathrm{H}\,\mathcal{M}$ et les morphismes qui les relient sont homotopes à l'identité de sorte que les termes $\mathbb{E}_2$ s'identifient de même.

7.1.9. Suite spectale canonique associée à $\boldsymbol{I\!\!D}\,\mathbf{Hotgr}^*_{\boldsymbol{R}}(\_,\boldsymbol{N})$. En observant que le foncteur

$$\boldsymbol{G}_N(\_) := \mathrm{Homgr}^\bullet_R(\_,N) : \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)$$

est la somme directe $\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{Homgr}^0_R(\_,N[k])[-k]$, l'assertion 6.2.4-(c) pour la suite spectrale canonique associée à $(\boldsymbol{G}_N,\_)$, s'explicite en

$$\begin{array}{ccc} I\!\!E_2^{p,k-p}(\boldsymbol{G}_N,\_) & \Longrightarrow & I\!\!E_\infty^{p,k-p}(\boldsymbol{G}_N,\_) \\ \| & & \| \\ \mathrm{Extgr}^p_R(\mathrm{H}(\_),N[k-p]) & & \mathrm{Gr}^p\, I\!\!D\,\mathrm{Hotgr}^k_R(\_,N)\,, \end{array}$$

et ce *fonctoriellement sur toute la catégorie* $I\!\!D\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$.

Nous verrons dans 7.2.1 que lorsque $\mathcal{M}$ est scindé, cette suite spectale dégénère, on a $I\!\!E_2(\boldsymbol{G}_N,\mathcal{M}) = I\!\!E_\infty(\boldsymbol{G}_N,\mathcal{M})$, ce qui redémontre 7.1.7.

7.2. Critère général de scindage

7.2.1. Théorème. *On suppose R de dimension globale finie. Les conditions suivantes sont équivalentes pour un R-mdg $\mathcal{M}$.*

a) *$\mathcal{M}$ est scindé dans* $I\!\!D\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$.

b) *Pour tous les foncteurs additifs* $\boldsymbol{F},\boldsymbol{G} : \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R) \to \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R')$, *où* $\boldsymbol{F}$ *est covariant et commute aux foncteurs de translation, et où* $\boldsymbol{G}$ *est contravariant et anticommute aux foncteurs de translation, les suites spectrales canoniques 6.2.4-(b) :*

$$\begin{cases} (I\!\!E_r(\boldsymbol{F},\mathcal{M}),d_r) : \ I\!\!E_2^{-p,q} = [I\!\!L^p\boldsymbol{F}(\mathrm{H}\,\mathcal{M})]^q \Longrightarrow \mathrm{Gr}^{-p}\,\mathrm{H}^{-p+q}(I\!\!D\,\boldsymbol{F}(\mathcal{M}))\,, \\ (I\!\!E_r(\boldsymbol{G},\mathcal{M}),d_r) : \ \ I\!\!E_2^{p,q} = [I\!\!R^p\boldsymbol{G}\,\mathrm{H}(\mathcal{M})]^q \Longrightarrow \mathrm{Gr}^{p}\,\mathrm{H}^{p+q}(I\!\!D\,\boldsymbol{G}(\mathcal{M}))\,, \end{cases}$$

sont dégénérées, i.e. $d_r = 0$ *pour tout* $r \geq 2$.

c) *L'assertion* (b) *est vérifiée par* $\boldsymbol{G}(\_) := \mathrm{Homgr}^\bullet_R(\_,\mathrm{H}\,\mathcal{M})$.

d) *L'assertion* (b) *est vérifiée par* $\boldsymbol{G}(\_) := \mathrm{Homgr}^\bullet_R(\_,R)$. (*cf.* 1.2.4)

Démonstration

(a)⇒(b). Soit $\mathcal{R}_\bullet \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{M}$ une résolution projective simultanée de longueur finie compatible à une résolution projective de *R-mg*'s $P_\bullet \xrightarrow{\pi} \mathrm{H}\mathcal{M}$ (*cf.* 5.2.5-(a)).

Supposons dans un premier temps que $\mathrm{o}(\mathcal{M})$ est projectif. Comme $\mathcal{M}$ est supposé scindé, on peut fixer (7.1.3-(a)) un quasi-isomorphisme de *R-mdg*'s

$\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{H}\,\mathcal{M}$. On a donc le diagramme de R-*mdg*'s de lignes exactes

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & \mathcal{R}_1 \arrow[r, "\epsilon_1"] & \mathcal{R}_0 \arrow[r, "\epsilon_0"] & \mathcal{M} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & \mathbf{0} \\ \cdots \arrow[r] & \mathcal{F}P_1 \arrow[r, "\mathcal{F}\pi_1"] & \mathcal{F}P_0 \arrow[r, "\mathcal{F}\pi_0"] & \mathcal{H}\,\mathcal{M} \arrow[r] & \mathbf{0} \end{tikzcd}$$

où l'on remarque que le foncteur « *cocycles* » Z(_) laisse exacte la deuxième ligne. Le morphisme φ se relève donc en un morphisme de résolutions $\varphi_\bullet$.

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & \mathcal{R}_1 \arrow[r, "\epsilon_1"] \arrow[d, "\varphi_1"] & \mathcal{R}_0 \arrow[r, "\epsilon_0"] \arrow[d, "\varphi_0"] & \mathcal{M} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & \mathbf{0} \\ \cdots \arrow[r] & \mathcal{F}P_1 \arrow[r, "\mathcal{F}\pi_1"] & \mathcal{F}P_0 \arrow[r, "\mathcal{F}\pi_0"] & \mathcal{H}\,\mathcal{M} \arrow[r] & \mathbf{0} \end{tikzcd}$$

Maintenant, si $\boldsymbol{F}$ est un foncteur covariant, nous avons

$$\begin{cases} \mathbb{D}\,\boldsymbol{F}(\mathcal{M}) \;=\; \boldsymbol{F}(\Sigma\,\mathcal{R}_\bullet) \;=\; \Sigma\,\boldsymbol{F}\,\mathcal{R}_\bullet\,, \\ \mathbb{D}\,\boldsymbol{F}(\mathcal{H}\,\mathcal{M}) = \boldsymbol{F}(\Sigma\,\mathcal{F}P_\bullet) = \Sigma(\mathbb{L}\,\boldsymbol{F})(\mathrm{H}\,\mathcal{M})\,, \end{cases}$$

et $\boldsymbol{F}\,\varphi_\bullet$ induit un morphisme de complexes de R-*mdg*'s

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & \boldsymbol{F}\,\mathcal{R}_2 \arrow[r, "\boldsymbol{F}\,\epsilon_2"] \arrow[d, "\boldsymbol{F}\,\varphi_2"] & \boldsymbol{F}\,\mathcal{R}_1 \arrow[r, "\boldsymbol{F}\,\epsilon_1"] \arrow[d, "\boldsymbol{F}\,\varphi_1"] & \boldsymbol{F}\,\mathcal{R}_0 \arrow[r] \arrow[d, "\boldsymbol{F}\,\varphi_0"] & \mathbf{0} \\ \cdots \arrow[r] & \mathcal{F}\,\boldsymbol{F}\,P_2 \arrow[r, "\boldsymbol{F}\,\pi_2"] & \mathcal{F}\,\boldsymbol{F}\,P_1 \arrow[r, "\boldsymbol{F}\,\pi_1"] & \mathcal{F}\,\boldsymbol{F}\,P_0 \arrow[r] & \mathbf{0} \end{tikzcd} \tag{$\circ$}$$

d'où un morphisme des suites spectrales associées à la filtration par degré de résolution. Il est alors immédiat de constater que, par construction, $\boldsymbol{F}\,\varphi_\bullet$ induit un isomorphisme sur les termes $(\mathbb{E}_2, d_2)$ $((\mathbb{E}_1, d_1)$ en fait). L'annulation de d_r pour $r \geq 2$, dans la suite spectrale de la deuxième ligne de $(\circ)$ entraîne alors la dégénérescence de la suite spectrale associée à la première ligne, qui n'est autre que la suite spectrale canonique.

Dans le cas où $\mathrm{o}(\mathcal{M})$ n'est pas projectif, on fixé un relèvement projectif $\phi : \mathcal{Q} \twoheadrightarrow \mathcal{M}$ (3.1.1, 3.1.3), des résolutions projectives simultanées $\mathcal{R}_\bullet \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{Q}$ et $\mathcal{L}_\bullet \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}$, associées à une *même* résolution projective de $\mathrm{H}\,\mathcal{Q} = \mathrm{H}\,\mathcal{M}$, et l'on considère le diagramme de R-*mdg*'s de lignes exactes

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & \mathcal{R}_1 \arrow[r, "\epsilon_1"] & \mathcal{R}_0 \arrow[r, "\epsilon_0"] & \mathcal{Q} \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & \mathbf{0} \\ \cdots \arrow[r] & \mathcal{L}_1 \arrow[r, "\pi_1"] & \mathcal{L}_0 \arrow[r, "\pi_0"] & \mathcal{M} \arrow[r] & \mathbf{0} \end{tikzcd}$$

où l'on remarque que le foncteur « *cocycles* » Z(_) laisse exacte la deuxième ligne. Le morphisme ϕ se relève donc en un morphisme de résolutions $\phi_\bullet$

donnant lieu au morphisme de complexes de R-*mdg*'s

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \longrightarrow & \boldsymbol{F}\,\mathcal{R}_2 & \xrightarrow{\boldsymbol{F}\,\epsilon_2} & \boldsymbol{F}\,\mathcal{R}_1 & \xrightarrow{\boldsymbol{F}\,\epsilon_1} & \boldsymbol{F}\,\mathcal{R}_0 & \longrightarrow \mathbf{0} \\
& \downarrow{\scriptstyle \boldsymbol{F}\,\phi_2} & & \downarrow{\scriptstyle \boldsymbol{F}\,\phi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \phi_0} & \\
\cdots \longrightarrow & \boldsymbol{F}\,\mathcal{L}_2 & \xrightarrow{\pi_2} & \boldsymbol{F}\,\mathcal{L}_1 & \xrightarrow{\pi_1} & \boldsymbol{F}\,\mathcal{L}_0 & \longrightarrow \mathbf{0}
\end{array}$$

induisant un isomorphisme sur les termes $\mathbb{E}_2$ des suites spectrales des lignes associées à la filtration par degré de résolution. La dégénérescence de la suites spectrale associée à la première ligne, déjà acquise puisque $\mathrm{o}(\mathcal{Q})$ est projective, entraîne la dégénérescence de la suite spectrale de la deuxième ligne, qui n'est autre que la suite spectrale canonique.

Le cas du foncteur contravariant $\boldsymbol{G}$ se traite de la même manière.

(c)⇒(a). Soit $\mathcal{R}_\bullet \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{M}$ une résolution projective simultanée de longueur finie compatible à une résolution projective de R-*mg*'s $P_\bullet \xrightarrow{\pi} \mathrm{H}\,\mathcal{M}$ (5.2.5-(a)). On a la suite exacte (verticalement) de complexes de R-*mdg*'s (*cf.* 2.1.6)

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\mathcal{R}_0 & & & & & & \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathcal{R}_0 & \longrightarrow & \mathbf{0} \\
{\scriptstyle i}\downarrow & & & & & & \downarrow & & \| & & \downarrow \\
\mathcal{R}_{\geq 0} & \cdots \longrightarrow & \mathcal{R}_3 & \xrightarrow{\epsilon_3} & \mathcal{R}_2 & \xrightarrow{\epsilon_2} & \mathcal{R}_1 & \xrightarrow{\epsilon_1} & \mathcal{R}_0 & \longrightarrow & \mathbf{0} \\
{\scriptstyle p}\downarrow & & \| & & \| & & \| & & \downarrow & & \\
\mathcal{R}_{\geq 1} & \cdots \longrightarrow & \mathcal{R}_3 & \xrightarrow{\epsilon_3} & \mathcal{M}_2 & \xrightarrow{\epsilon_2} & \mathcal{R}_1 & \longrightarrow & \mathbf{0} & &
\end{array} \qquad (\diamond_1)$$

où $\mathcal{R}_{\geq 0} := \sum \mathcal{R}_{\infty,0}$, et $\mathcal{R}_{\geq 1} := \sum \mathcal{R}_{\infty,1}$ (*cf.* 2.1.5), clairement scindée dans la catégorie $\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)$, dont on déduit (4.1.1) le triangle distingué de $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$

$$\mathcal{R}_0 \xrightarrow{i} \mathcal{R}_{\geq 0} \xrightarrow{p} \mathcal{R}_{\geq 1} \xrightarrow{\widetilde{\epsilon}_1} \mathcal{R}_0[1]\,, \qquad (\diamond_2)$$

où $\widetilde{\epsilon}_1 : \mathcal{R}_{\geq 1} \to \mathcal{R}_0[1]$ est le morphisme de connexion de complexes (2.1.6)

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\mathcal{R}_{\geq 0} & \cdots \longrightarrow & \mathcal{R}_3 & \xrightarrow{\epsilon_3} & \mathcal{R}_2 & \xrightarrow{\epsilon_2} & \mathcal{R}_1 & \longrightarrow & \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathbf{0} & \longrightarrow & \cdots \\
\downarrow{\scriptstyle \widetilde{\epsilon}_1} & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \epsilon_1} & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\mathcal{R}_0[1] & \cdots \longrightarrow & \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathcal{R}_0 & \longrightarrow & \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathbf{0} & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

On en déduit le triangle distingué

$$\boldsymbol{G}\,\mathcal{R}_{\geq 1} \xrightarrow{\boldsymbol{G}\,p} \boldsymbol{G}\,\mathcal{R}_{\geq 0} \xrightarrow{\boldsymbol{G}\,i} \boldsymbol{G}\,\mathcal{R}_0 \xrightarrow{\boldsymbol{G}\,\widetilde{\epsilon}_1} \boldsymbol{G}\,\mathcal{R}_{\geq 1}[1]\,, \qquad (\diamond_3)$$

puis la suite longue de cohomologie (1.2.16)

$$\longrightarrow \mathrm{H}^0\,\boldsymbol{G}\,\mathcal{R}_{\geq 1} \xrightarrow{\boldsymbol{G}\,p} \mathrm{H}^0\,\boldsymbol{G}\,\mathcal{R}_{\geq 0} \xrightarrow{\boldsymbol{G}\,i} \mathrm{H}^0\,\boldsymbol{G}\,\mathcal{R}_0 \xrightarrow{\boldsymbol{G}\,\widetilde{\epsilon}_1} \mathrm{H}^0\,\boldsymbol{G}(\mathcal{R}_{\geq 1}[1]) \longrightarrow,$$

et comme $\boldsymbol{G} = \mathrm{Homgr}^*_R(\_, \mathrm{H}\,\mathcal{M})$, on a (1.2.6)

$$\to \mathrm{Hotgr}^0_R(\mathcal{R}_{\geq 1}, \mathrm{H}\,\mathcal{M}) \to \mathrm{Hotgr}^0_R(\mathcal{R}_{\geq 0}, \mathrm{H}\,\mathcal{M}) \to \mathrm{Hotgr}^0_R(\mathcal{R}_0, \mathrm{H}\,\mathcal{M}) \xrightarrow{\boldsymbol{G}\,\widetilde{\epsilon}_1}$$
$$\longrightarrow \mathrm{Hotgr}^1_R(\mathcal{R}_{\geq 1}, \mathrm{H}\,\mathcal{M}) \to$$

dont déduit la suite exacte à gauche

$$\mathbf{0} \to \mathrm{Gr}^0(\mathrm{H}\,\boldsymbol{G}\mathcal{R}_{\geq 0})^0 \hookrightarrow \mathrm{Hotgr}^0_R(\mathcal{R}_0, \mathrm{H}\,\mathcal{M}) \xrightarrow{\boldsymbol{G}\widetilde{\epsilon}_1} \mathrm{Hotgr}^1_R(\mathcal{R}_{\geq 1}, \mathrm{H}\,\mathcal{M}) \to$$

que nous complétons par le diagramme commutatif (**I**), ci-dessous, à l'aide des morphismes 'h' qui font correspondre à un morphisme de *R-mdg*'s le morphisme de *R-mg*'s induit en cohomologie

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{0} \to \mathrm{Gr}^0(\mathrm{H}\,\boldsymbol{G}\mathcal{R}_{\geq 0})^0 & \hookrightarrow & \mathrm{Hotgr}^0_R(\mathcal{R}_0, \mathrm{H}\,\mathcal{M}) & \xrightarrow{\boldsymbol{G}\widetilde{\epsilon}_1} & \mathrm{Hotgr}^1_R(\mathcal{R}_{\geq 1}, \mathrm{H}\,\mathcal{M}) \to \\ {\scriptstyle h}\downarrow{\scriptstyle \phi} & & {\scriptstyle h}\downarrow{\scriptstyle (=)} & (\mathbf{I}) & {\scriptstyle h}\downarrow \qquad (\diamond_4) \\ \mathrm{Homgr}^0_R(\mathrm{H}\,\mathcal{M}, \mathrm{H}\,\mathcal{M}) & \stackrel{\alpha}{\hookrightarrow} & \mathrm{Homgr}^0_R(P_0, \mathrm{H}\,\mathcal{M}) & \xrightarrow{\beta} & \mathrm{Homgr}^0_R(K_0, \mathrm{H}\,\mathcal{M}), \end{array}$$

où $K_0 = \ker(P_0 \xrightarrow{\pi_0} \mathrm{H}\,\mathcal{M})$ (*cf.* 5.2.5-(a)), et où α, β sont les morphismes naturels. On en déduit l'existence de l'injection ϕ qui n'est autre que le morphisme induit par $h : \mathrm{Hotgr}^0_R(\mathcal{R}_{\geq 0}, R) \to \mathrm{Homgr}^0_R(\mathrm{H}\,\mathcal{M}, \mathrm{H}\,\mathcal{M})$ (dont on vérifie aisément que la composition avec $\mathrm{H}\,\boldsymbol{G}p : \mathrm{Hotgr}^0_R(\mathcal{R}_{\geq 1}, R) \to \mathrm{Hotgr}^0_R(\mathcal{R}_{\geq 0}, R)$ est nulle)

Si nous appliquons maintenant le foncteur $\boldsymbol{G} = \mathrm{Homgr}^\bullet_R(\_, \mathrm{H}\,\mathcal{M})$ au diagramme ($\diamond_1$), nous obtenons la suite exacte de complexes de *R-mdg*'s *filtrés par la filtration canonique 6.2.1* :

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathbf{0} & \longrightarrow & \boldsymbol{G}\mathcal{R}_1 & \xrightarrow{\boldsymbol{G}\epsilon_2} & \boldsymbol{G}\mathcal{R}_2 & \xrightarrow{\boldsymbol{G}\epsilon_3} & \\ \downarrow & & \downarrow & & \| & & \| & & \\ \mathbf{0} & \longrightarrow & \boldsymbol{G}\mathcal{R}_0 & \xrightarrow{\boldsymbol{G}\epsilon_1} & \boldsymbol{G}\mathcal{R}_1 & \xrightarrow{\boldsymbol{G}\epsilon_2} & \boldsymbol{G}\mathcal{R}_2 & \xrightarrow{\boldsymbol{G}\epsilon_3} & \\ \downarrow & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \mathbf{0} & \longrightarrow & \boldsymbol{G}\mathcal{R}_0 & \longrightarrow & \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathbf{0} & \longrightarrow & \end{array}$$

de morphisme de *R-mdg*'s simples, la suite exacte scindée de *R-mdg*'s **filtrés**

$$\mathbf{0} \longrightarrow \boldsymbol{G}\mathcal{R}_{\geq 1} \xrightarrow{\boldsymbol{G}p} \boldsymbol{G}\mathcal{R}_{\geq 0} \xrightarrow{\boldsymbol{G}i} \boldsymbol{G}\mathcal{R}_0 \longrightarrow \mathbf{0}$$

dont est issu le triangle distingué ($\diamond_3$) (4.1.1). On se retrouve alors avec la suite de termes $\mathbb{E}_1$ des suites spectrales canoniques correspondantes :

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathbf{0} & \longrightarrow & \mathbb{E}_1^*(\boldsymbol{G}, \mathcal{R}_{\geq 1}) & \longrightarrow & \mathbb{E}_1^*(\boldsymbol{G}, \mathcal{R}_{\geq 0}) & \longrightarrow & \mathbb{E}_1^*(\boldsymbol{G}, \mathcal{R}_0) & \longrightarrow & \mathbf{0} \\ & & \| & & \| & & \| & & \\ \mathbf{0} & \dashrightarrow & \mathrm{Homgr}^*(P_{\geq 1}, \mathrm{H}\,\mathcal{M}) & \dashrightarrow & \mathrm{Homgr}^*(P_{\geq 0}, \mathrm{H}\,\mathcal{M}) & \dashrightarrow & \mathrm{Homgr}^*(P_0, \mathrm{H}\,\mathcal{M}) & \dashrightarrow & \mathbf{0} \end{array}$$

où les morphismes induits (en pointillé) sont les morphismes naturels. On constate que cette suite de *R-mg*'s est exacte (et même scindée) de sorte que les termes $\mathbb{E}_2$ s'organisent suivant la suite exacte longue des $\mathrm{Extgr}(\_, \mathrm{H}\,\mathcal{M})$:

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow \mathbb{E}_2^p(\boldsymbol{G}, \mathcal{R}_{\geq 1}) & \longrightarrow & \mathbb{E}_2^p(\boldsymbol{G}, \mathcal{R}_{\geq 0}) & \longrightarrow & \mathbb{E}_2^p(\boldsymbol{G}, \mathcal{R}_0) \longrightarrow \\ \| & & \| & & \| \\ \dashrightarrow \mathrm{Extgr}_R^p(K_0[1], \mathrm{H}\,\mathcal{M}) & \dashrightarrow & \mathrm{Extgr}_R^p(\mathrm{H}\,\mathcal{M}, \mathrm{H}\,\mathcal{M}) & \dashrightarrow & \mathrm{Extgr}_R^p(P_0, \mathrm{H}\,\mathcal{M}) \dashrightarrow \end{array}$$

dont on extrait

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{E}_2^0(\boldsymbol{G}, \mathcal{R}_{\geq 0}) & \longrightarrow & \mathbb{E}_2^0(\boldsymbol{G}, \mathcal{R}_0) & \longrightarrow & \mathbb{E}_2^1(\boldsymbol{G}, \mathcal{R}_{\geq 1}) & \longrightarrow \\ \| & & \| & & \| \\ \mathrm{Homgr}_R^0(\mathrm{H}\,\mathcal{M}, \mathrm{H}\,\mathcal{M}) & \overset{\alpha}{\hookrightarrow} & \mathrm{Homgr}_R^0(P_0, \mathrm{H}\,\mathcal{M}) & \xrightarrow{\beta} & \mathrm{Homgr}_R^0(K_0, \mathrm{H}\,\mathcal{M}) & \longrightarrow \end{array}$$

où l'on retrouve les morphismes α, β du diagramme $(\diamond_4)$. On en déduit que lorsque la suite spectrale canonique $(\mathbb{E}_r(\boldsymbol{G}, \mathcal{M}), d_r)$ dégénère, on a

$$\mathrm{Gr}^0(\mathrm{H}\,\boldsymbol{G}\,\mathcal{R}_{\geq 0})^0 = \mathbb{E}_\infty^0(\boldsymbol{G}, \mathcal{R}_{\geq 0}) = \mathbb{E}_2^0(\boldsymbol{G}, \mathcal{R}_{\geq 0}) = \mathrm{Homgr}_R^0(\mathrm{H}\,\mathcal{M}, \mathrm{H}\,\mathcal{M})$$

et le morphisme $\phi : \mathrm{Gr}^0(\mathrm{H}\,\boldsymbol{G}\,\mathcal{R}_{\geq 0})^0 \to \mathrm{Homgr}_R^0(\mathrm{H}\,\mathcal{M}, \mathrm{H}\,\mathcal{M})$ de $(\diamond_4)$ est aussi surjectif. Il existe donc un morphisme dans $\mathrm{Hotgr}_R^0(\mathcal{R}_{\geq 0}, \mathrm{H}\,\mathcal{M})$ induisant l'identité en cohomologie. Le *R-mdg* $\mathcal{R}_{\geq 0}$ est donc bien scindé.

(d)⇒(a). Par récurrence sur $\dim_{\mathrm{proj}}(\mathrm{H}\,\mathcal{M})$. Si $\dim_{\mathrm{proj}}(\mathrm{H}\,\mathcal{M}) \leq 1$, le *R-mdg* $\mathcal{M}$ est scindé d'après 7.1.3-(c). Soit maintenant $e > 1$ et supposons avoir établi l'implication (d)⇒(a) lorsque $\dim_{\mathrm{proj}}(\mathrm{H}\,\mathcal{M}) < e$.

Soit $\mathcal{M}$ vérifiant l'hypothèse de (d) et tel que $\dim_{\mathrm{proj}}(\mathrm{H}\,\mathcal{M}) = e$. Fixons une résolution projective simultanée de longueur finie $\mathcal{R}_\bullet \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{M}$ compatible à une résolution projective de *R-mg*'s de longueur *minimale* $P_\bullet \xrightarrow{\pi} \mathrm{H}\,\mathcal{M}$, *i.e.* telle que $P_m = 0$ pour tout $m > \dim_{\mathrm{proj}}(\mathrm{H}\,\mathcal{M})$.

Nous avons la suite exacte courte de *R-mdg*'s

$$\mathbf{0} \to \mathcal{K}_0 \hookrightarrow \mathcal{R}_0 \xrightarrow{\epsilon_0} \mathcal{M} \to \mathbf{0}\,, \tag{Eq.31}$$

où $\mathcal{K}_0 := \ker(\epsilon_0)$. Nous avons la résolution projective simultanée

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{R}_2 \xrightarrow{\epsilon_2} \mathcal{R}_1 \xrightarrow{\epsilon_1} \mathcal{K}_0 \to \mathbf{0} \tag{Eq.32}$$

et la suite exacte courte de *R-mg*'s

$$\mathbf{0} \to K_0 \hookrightarrow P_0 \xrightarrow{\pi_0} \mathrm{H}\,\mathcal{M} \to \mathbf{0} \tag{Eq.33}$$

où $K_0 = \ker(\pi_0) = \mathrm{H}\,\mathcal{K}_0$. On a $\dim_{\mathrm{proj}}(K_0) = \dim_{\mathrm{proj}}(\mathrm{H}\,\mathcal{M}) - 1$, compte tenu de la minimalité de la longueur de la résolution $P_\bullet \xrightarrow{\pi} \mathrm{H}\,\mathcal{M}$.

La suite exacte (verticalement) de complexes de R-*mdg*'s (*cf.* 2.1.6)

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r] & \mathbf{0} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{0} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{R}_0 \arrow[r] \arrow[d, equal, "i_0"'] & \mathbf{0} \arrow[d] \\ {} \arrow[r] & \mathcal{R}_2 \arrow[r, "\epsilon_2"] \arrow[d, equal, "p_2"'] & \mathcal{R}_1 \arrow[r, "\epsilon_1"] \arrow[d, equal, "p_1"'] & \mathcal{R}_0 \arrow[r] \arrow[d, "p_0"'] & \mathbf{0} \\ {} \arrow[r] & \mathcal{R}_2 \arrow[r, "\epsilon_2"] & \mathcal{R}_1 \arrow[r] & \mathbf{0} & \end{tikzcd} \tag{Eq.34}$$

donne la suite exacte courte de R-*mdg*'s,

$$\mathbf{0} \to \mathcal{R}_0 \underset{\rho}{\overset{i}{\rightleftarrows}} \mathcal{R}_{\geq 0} \underset{\sigma}{\overset{p}{\rightleftarrows}} \mathcal{R}_{\geq 1} \to \mathbf{0}\,, \tag{Eq.35}$$

où $\mathcal{R}_{\geq 0} := \sum \mathcal{R}_{\infty,0}$, et $\mathcal{R}_{\geq 1} := \sum \mathcal{R}_{\infty,1}$ (*cf.* 2.1.5), scindée dans $\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)$ par l'inclusion $\sigma : \mathcal{R}_{\geq 1} \subseteq \mathcal{R}_{\geq 0}$ et la projection $\rho : \mathcal{R}_{\geq 0} \twoheadrightarrow \mathrm{coker}(\sigma) = \mathcal{R}_0$. On en déduit (4.1.1) le triangle distingué de $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$

$$\mathcal{R}_0 \xrightarrow{\ i\ } \mathcal{R}_{\geq 0} \xrightarrow{\ p\ } \mathcal{R}_{\geq 1} \xrightarrow{\ \tilde{\epsilon}_1\ } \mathcal{R}_0[1] \longrightarrow\,, \tag{Eq.36}$$

où $\widetilde{\epsilon}_1 : \mathcal{R}_{\geq_1} \to \mathcal{R}_0[1]$ est le morphisme de connexion de complexes (2.1.6)

$$\begin{tikzcd} \mathcal{R}_{\geq 1} \arrow[d, "\widetilde{\epsilon}_1"] & \cdots \arrow[r] & \mathcal{R}_3 \arrow[r, "\epsilon_3"] \arrow[d] & \mathcal{R}_2 \arrow[r, "\epsilon_2"] \arrow[d] & \mathcal{R}_1 \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon_1"] & \mathbf{0} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{0} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\ \mathcal{R}_0[1] & \cdots \arrow[r] & \mathbf{0} \arrow[r] & \mathbf{0} \arrow[r] & \mathcal{R}_0 \arrow[r] & \mathbf{0} \arrow[r] & \mathbf{0} \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Si nous appliquons maintenant un foncteur contravariant $\boldsymbol{G}$ au diagramme (Eq.34), nous obtenons la suite exacte (verticale) de complexes de R-*mdg*'s *filtrés par la filtration canonique 6.2.1* :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{0} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{0} \arrow[r] \arrow[d] & \boldsymbol{G}\mathcal{R}_1 \arrow[r, "\boldsymbol{G}\epsilon_2"] \arrow[d, equal] & \boldsymbol{G}\mathcal{R}_2 \arrow[r, "\boldsymbol{G}\epsilon_3"] \arrow[d, equal] & {} \\ \mathbf{0} \arrow[r] \arrow[d] & \boldsymbol{G}\mathcal{R}_0 \arrow[r, "\boldsymbol{G}\epsilon_1"] \arrow[d, equal] & \boldsymbol{G}\mathcal{R}_1 \arrow[r, "\boldsymbol{G}\epsilon_2"] \arrow[d] & \boldsymbol{G}\mathcal{R}_2 \arrow[r, "\boldsymbol{G}\epsilon_3"] \arrow[d] & {} \\ \mathbf{0} \arrow[r] & \boldsymbol{G}\mathcal{R}_0 \arrow[r] & \mathbf{0} \arrow[r] & \mathbf{0} \arrow[r] & {} \end{tikzcd}$$

la suite exacte des R-*mdg*'s simples associés (scindée dans $\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)$)

$$\mathbf{0} \longrightarrow \boldsymbol{G}\mathcal{R}_{\geq 1} \xhookrightarrow{\ \boldsymbol{G}p\ } \boldsymbol{G}\mathcal{R}_{\geq 0} \xrightarrow{\ \boldsymbol{G}i\ } \!\!\!\!\rightarrow \boldsymbol{G}\mathcal{R}_0 \longrightarrow \mathbf{0}\ ,$$

et le triangle distingué de $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$

$$\boldsymbol{G}\mathcal{R}_{\geq 1} \xrightarrow{\ \boldsymbol{G}p\ } \boldsymbol{G}\mathcal{R}_{\geq 0} \xrightarrow{\ \boldsymbol{G}i\ } \boldsymbol{G}\mathcal{R}_0 \xrightarrow{\ \boldsymbol{G}\widetilde{\epsilon}_1\ } \boldsymbol{G}(\mathcal{R}_{\geq 1}[-1])\,, \tag{Eq.37}$$

où il convient de souligner que les morphismes $\boldsymbol{G}p, \boldsymbol{G}i, \boldsymbol{G}\widetilde{\epsilon}_1$ sont des morphismes de R-*mdg*'s *compatibles aux filtrations canoniques* et induisent donc *des morphismes des suites spectrales canoniques associées.*

Les paragraphes suivants développent la remarque 7.1.9.

Lorsque $\boldsymbol{G} = \mathrm{Homgr}^\bullet_R(\_, N)$, où N est un R-*mg*, le triangle exact (Eq.37) donne, en passant en cohomologie (*cf.* 1.2.16, 1.2.6), la suite exacte longue

$$\longrightarrow \mathrm{Hotgr}^k_R(\mathcal{R}_{\geq 1}, N) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Hotgr}^k_R(\mathcal{R}_{\geq 0}, N) \xrightarrow{\beta} \mathrm{Hotgr}^k_R(\mathcal{R}_0, N) \xrightarrow{\gamma[1]} \longrightarrow \mathrm{Hotgr}^{k+1}_R(\mathcal{R}_{\geq 1}, N) \longrightarrow \qquad \text{(Eq.38)}$$

où $\alpha(\_) := (\_) \circ p$, $\beta(\_) := \beta \circ i$ et $\gamma(\_) = (\_) \circ \tilde{\epsilon}_1$.

Le triangle (Eq.37) donne aussi lieu à la suite exacte courte de termes $I\!E_0$ des suites spectrales canoniques, trivialement scindée dans $\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)$,

$$\mathbf{0} \longrightarrow I\!E_0^{\bullet-1}(\boldsymbol{G}, \mathcal{R}_{\geq 1}) \longrightarrow I\!E_0^\bullet(\boldsymbol{G}, \mathcal{R}_{\geq 0}) \longrightarrow I\!E_0^\bullet(\boldsymbol{G}, \mathcal{R}_0) \longrightarrow \mathbf{0}$$

avec

$$\begin{aligned} I\!E_0^{\bullet-1}(\boldsymbol{G}, \mathcal{R}_{\geq 1}) &= \textstyle\bigoplus_{p\geq 1} \mathrm{Homgr}^*_R(\mathcal{R}_p[p], N) \\ I\!E_0^\bullet(\boldsymbol{G}, \mathcal{R}_{\geq 0}) &= \textstyle\bigoplus_{p\geq 0} \mathrm{Homgr}^*_R(\mathcal{R}_p[p], N) \\ I\!E_0^\bullet(\boldsymbol{G}, \mathcal{R}_0) &= \mathrm{Homgr}^*_R(\mathcal{R}_0, N) \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} I\!E_1^{p-1,q+1}(\boldsymbol{G}, \mathcal{R}_{\geq 1}) &= \textstyle\bigoplus_{p\geq 1} \mathrm{Homgr}^0_R(P_p, N[q]) \\ I\!E_1^{p,q}(\boldsymbol{G}, \mathcal{R}_{\geq 0}) &= \textstyle\bigoplus_{p\geq 0} \mathrm{Homgr}^0_R(P_p, N[q]) \\ I\!E_1^{0,q}(\boldsymbol{G}, \mathcal{R}_0) &= \mathrm{Homgr}^0_R(P_0, N[q]) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} I\!E_2^{p-1,q+1}(\boldsymbol{G}, \mathcal{R}_{\geq 1}) &= \textstyle\bigoplus_{p\geq 1} \mathrm{Extgr}^{p-1}_R(K_0, N[q]) \\ I\!E_2^{p,q}(\boldsymbol{G}, \mathcal{R}_{\geq 0}) &= \textstyle\bigoplus_{p\geq 0} \mathrm{Extgr}^p_R(\mathrm{H}\,\mathcal{M}, N[q]) \\ I\!E_2^{0,q}(\boldsymbol{G}, \mathcal{R}_0) &= \mathrm{Homgr}^0_R(P_0, N[q]) \end{aligned}$$

ce qui montre que la suite longue des termes $I\!E_2$ induite par (Eq.37) est la somme directe des suites exactes longues des $\mathrm{Extgr}(\_, N[q])$ induites par la suite exacte courte (Eq.33), soit

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow I\!E_2^{p-1,q+1}(\boldsymbol{G}, \mathcal{R}_{\geq 1}) & \longrightarrow & I\!E_2^{p,q}(\boldsymbol{G}, \mathcal{R}_{\geq 0}) & \longrightarrow & I\!E_2^{p,q}(\boldsymbol{G}, \mathcal{R}_0) \longrightarrow \\ \| & & \| & & \| \\ \longrightarrow \mathrm{Extgr}^{p-1}_R(K_0, N[q]) & \longrightarrow & \mathrm{Extgr}^p_R(\mathrm{H}\,\mathcal{M}, N[q]) & \longrightarrow & \mathrm{Extgr}^p_R(P_0, N[q]) \longrightarrow \end{array}$$

Par conséquent, lorsque les trois suites spectrales en question dégénèrent, *i.e.* $d_r = 0$ pour $r \geq 2$, on a un isomorphisme naturel des suites exactes longues

$$\begin{array}{ccccccc} \to \mathrm{Gr}^{p-1,q+1}(\mathcal{R}_{\geq 1}, N) & \xrightarrow{\mathrm{Gr}\,\alpha} & \mathrm{Gr}^{p,q}(\mathcal{R}_{\geq 0}, N) & \xrightarrow{\mathrm{Gr}\,\beta} & \mathrm{Gr}^{p,q}(\mathcal{R}_0, N) \xrightarrow{\mathrm{Gr}\,\gamma} \\ \updownarrow\cong & & \updownarrow\cong & & \updownarrow\cong \\ \to \mathrm{Extgr}^{p-1}_R(K_0, N[q]) & \to & \mathrm{Extgr}^p_R(\mathrm{H}\,\mathcal{M}, N[q]) & \to & \mathrm{Extgr}^p_R(P_0, N[q]) \to \end{array} \qquad \text{(Eq.39)}$$

où nous avons noté $\mathrm{Gr}^{a,b}(\_, N) := \mathrm{Gr}^a(\mathrm{Hotgr}^{a+b}_R(\_, N))$, et où, comme précédemment, $\alpha(\_) := (\_) \circ p$, $\beta(\_) := \beta \circ i$, $\gamma(\_) = (\_) \circ \tilde{\epsilon}_1$.

1. – Dégénérescence de la suite spectrale canonique $\mathbb{E}(\boldsymbol{G},\mathcal{K}_0)$.

Dans la construction de la suite spectrale $(\mathbb{E}(\mathcal{C})_r, d(\mathcal{C})_r)$ associée à un R-*mdg* filtré $\mathcal{C}_\star = (C,d)_\star$, on pose (*cf.* [G], §4 p. 77)

$$\begin{cases} Z(\mathcal{C})_r^p := \{\omega \in C_p \mid d\omega \in C_{p+r}\} & \text{et} \\ \mathbb{E}(\mathcal{C})_r^p := \dfrac{Z(\mathcal{C})_r^p}{dZ(\mathcal{C})_{r-1}^{p-r+1} + Z(\mathcal{C})_{r-1}^{p+1}}\,, \end{cases}$$

de sorte que l'annulation de la différentielle $d(\mathcal{C})_r : \mathbb{E}(\mathcal{C})_r \to \mathbb{E}(\mathcal{C})_r$, équivaut à l'inclusion

$$dZ(\mathcal{C})_r^p \subseteq dZ(\mathcal{C})_{r-1}^{p+1} + C_{p+r+1}\,, \quad \forall p \in \mathbb{N}\,.$$

Or, pour tout $m \geq 0$, on a $Z(\mathcal{C}_m)_r^p = Z(\mathcal{C})_r^{m+p}$, de sorte que la condition d'annulation de $d(\mathcal{C}_m)_r : \mathbb{E}(\mathcal{C}_m)_r \to \mathbb{E}(\mathcal{C}_m)_r$ s'écrit

$$dZ(\mathcal{C})_r^{m+p} \subseteq dZ(\mathcal{C})_{r-1}^{m+p+1} + C_{m+p+r+1}\,, \quad \forall p \in \mathbb{N}\,.$$

L'annulation de $d(\mathcal{C}_m)_r$ résulte donc de l'annulation de $d(C)_r$. En particulier, la dégénrescence de suite spectrale canonique $\mathbb{E}(\boldsymbol{G},\mathcal{R}_{\geq 0})$ entraîne celle de $\mathbb{E}(\boldsymbol{G},\mathcal{R}_{\geq 1})$ qui n'est autre que $\mathbb{E}(\boldsymbol{G},\mathcal{K}_0)$ ((Eq.31),(Eq.32)).

2. – Scindage de $\mathcal{K}_0$. De (*1*), du fait que $\dim_{\mathrm{proj}}(K_0) < \dim_{\mathrm{proj}}(\mathcal{M})$ et par hypothèse de récurrence, le R-*mdg* $\mathcal{K}_0$ est scindé dans $\mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$. Fixons un quasi-morphisme de R-*mdg*'s

$$\phi : \mathcal{R}_{\geq 1} \to (K_0[1], 0)\,, \tag{Eq.40}$$

induisant l'identité en cohomologie, donc tel que sa restriction à $P_1 \subseteq \mathcal{R}_1$ est la surjection $\pi_1 : P_1 \twoheadrightarrow K_0$ présente dans la résolution $(P_\bullet \xrightarrow{\pi} \mathrm{H}\,\mathcal{M})$

3. – Dégénérescence de la suite spectrale canonique $\mathbb{E}(\mathrm{Homgr}_R^\bullet(\_,P),\mathcal{M})$. Un R-*mg* projectif P est toujours facteur direct d'un R-*mg* libre L, on a donc $L = P \oplus P'$, d'où une décomposition de foncteurs

$$\mathrm{Homgr}_R^\bullet(\_,L) = \mathrm{Homgr}_R^\bullet(\_,P) \oplus \mathrm{Homgr}_R^\bullet(\_,P')\,,$$

et donc des suites spectrales canoniques

$$\mathbb{E}(\mathrm{Homgr}_R^\bullet(\_,L),\mathcal{M}) = \mathbb{E}(\mathrm{Homgr}_R^\bullet(\_,P),\mathcal{M}) \oplus \mathbb{E}(\mathrm{Homgr}_R^\bullet(\_,P'),\mathcal{M})\,.$$

Ainsi, la dégénérescence de $\mathbb{E}(\mathrm{Homgr}_R^\bullet(\_,R),\mathcal{M})$ implique la dégénérescence de $\mathbb{E}(\mathrm{Homgr}_R^\bullet(\_,L),\mathcal{M})$, qui implique celle des deux autres.

3. – Scindage de $\mathcal{R}_{\geq 0}$.

• *Conservation de degrés.* Le morphisme de *R-mdg*'s $p : \mathcal{R}_{\geq 0} \to \mathcal{R}_{\geq 1}$ respecte les filtrations canoniques en introduisant un décalage d'une unité, on a, de ce fait, un morphisme naturel

$$\operatorname{Gr}^{*} \operatorname{Hotgr}_{R}(\mathcal{R}_{\geq 1}, N) \to \operatorname{Gr}^{*+1} \operatorname{Hotgr}_{R}(\mathcal{R}_{\geq 0}, N)\,. \qquad \text{(Eq.41)}$$

Il s'ensuit que si $\alpha : \mathcal{R}_{\geq 1} \to N$ est un morphisme de *R-mdg*'s, on a

$$\deg \operatorname{Gr}(\alpha \circ p) \geq \deg \operatorname{Gr}(\alpha) + 1\,.$$

Le rapport précis entre les degrés de α et $\alpha \circ p$ est un ingrédiant important dans la suite, et c'est là que l'hypothèse de dégénérescence des suites spectrales joue un rôle déterminant. Voici l'énoncé dont on aura besoin.

Lemme. Pour tout R-mg projectif P, le morphisme (Eq.41) *est tel que*

- $\operatorname{Gr}^{0} \operatorname{Hotgr}^{1}_{R}(\mathcal{R}_{\geq 1}, P) \twoheadrightarrow \operatorname{Gr}^{1} \operatorname{Hotgr}^{1}_{R}(\mathcal{R}_{\geq 0}, P)$ *est surjectif ;*
- $\operatorname{Gr}^{i} \operatorname{Hotgr}^{1}_{R}(\mathcal{R}_{\geq 1}, P) \xrightarrow{\cong} \operatorname{Gr}^{i+1} \operatorname{Hotgr}^{1}_{R}(\mathcal{R}_{\geq 0}, P)$ *est bijectif* $\forall i > 0$.

Par conséquent, pour tout morphisme de R-mdg's $\alpha : R_{\geq 1} \to P$ vérifiant $\deg \operatorname{Gr}(\alpha) > 0$, *on a*

$$\deg \operatorname{Gr}(\alpha \circ p) = \deg \operatorname{Gr}(\alpha) + 1\,.$$

Preuve. L'explicitation des suites (Eq.39) en degré total $p + q = 1$ donne :

$$\begin{array}{ccccccc}
\operatorname{Gr}^{0,1}(\mathcal{R}_0[1], P) & \xrightarrow{\operatorname{Gr}\gamma} & \bigoplus\limits_{p+q=1} \operatorname{Gr}^{p-1,q+1}(\mathcal{R}_{\geq 1}, P) & \xrightarrow{\operatorname{Gr}\alpha} & \bigoplus\limits_{p+q=1} \operatorname{Gr}^{p,q}(\mathcal{R}_{\geq 0}, P) & \xrightarrow{\operatorname{Gr}\beta} & \\
\updownarrow{\scriptstyle\cong} & & \updownarrow{\scriptstyle\cong} & & \updownarrow{\scriptstyle\cong} & & \\
\operatorname{Homgr}^{0}_{R}(P_0, P[0]) & \longrightarrow & \bigoplus\limits_{p+q=1} \operatorname{Extgr}^{p-1}_{R}(K_0, P[q]) & \longrightarrow & \bigoplus\limits_{p+q=1} \operatorname{Extgr}^{p}_{R}(\operatorname{H}\mathcal{M}, P[q]) & \longrightarrow & \\
\| & & \| & & \| & & \text{(Eq.42)} \\
\mathbf{0} & & \mathbf{0} & & \operatorname{Homgr}^{0}_{R}(\operatorname{H}\mathcal{M}, P[1]) & & \\
\oplus & & \oplus & & \oplus & & \\
\operatorname{Homgr}^{0}_{R}(P_0, P[0]) & \xrightarrow{(\gamma)_1} & \operatorname{Homgr}^{0}_{R}(K_0, P[0]) & \xrightarrow{(\alpha)_1} \!\!\!\!\!\rightarrow & \operatorname{Extgr}^{1}_{R}(\operatorname{H}\mathcal{M}, P[0]) & & \\
\oplus & & \oplus & & \oplus & & \\
\mathbf{0} & \xrightarrow{(\gamma)_2} & \operatorname{Extgr}^{1}_{R}(K_0, P[-1]) & \xrightarrow[\cong]{(\alpha)_2} & \operatorname{Extgr}^{2}_{R}(\operatorname{H}\mathcal{M}, P[-1]) & & \\
\oplus & & \oplus & & \oplus & & \\
\mathbf{0} & \xrightarrow{(\gamma)_3} & \operatorname{Extgr}^{2}_{R}(K_0, P[-2]) & \xrightarrow[\cong]{(\alpha)_3} & \operatorname{Extgr}^{3}_{R}(\operatorname{H}\mathcal{M}, P[-2]) & & \\
\oplus & & \oplus & & \oplus & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

et le lemme résulte de l'inspection de la colonne des morphismes (α). □

• *Première étape.* L'idée pour vérifier que $\mathcal{R}_{\geq 0}$ est scindé consiste à montrer qu'il existe dans $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ un diagramme commutatif (**I**)

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{R}_{\geq 1} \arrow[r, "\widetilde{\epsilon}_1"] \arrow[d, "\mathrm{q.i.}"', "\phi"] & \mathcal{R}_0[1] \arrow[r, dotted] \arrow[d, "\mathrm{q.i.}"', "\psi"] & \hat{\boldsymbol{c}}(\widetilde{\epsilon}_1) = \mathcal{R}_{\geq 0}[1] \arrow[d, dotted, "\mathrm{q.i.}"', "\varphi"] & \\
K_0[1] \arrow[r, hook, "j", "\subseteq"'] & P_0[1] \arrow[r, dotted] & \hat{\boldsymbol{c}}(j) \arrow[r, "\lambda", "\mathrm{q.i.}"'] & \mathrm{H}\,\mathcal{M}[1]
\end{tikzcd} \quad (\mathbf{I}) \tag{Eq.43}$$

où ϕ et ψ sont des quasi-isomorphismes. Les propiétés des catégories triangulées garantissent alors l'existence d'un quasi-isomorphisme $\varphi : \hat{\boldsymbol{c}}(\widetilde{\epsilon}_1) \to \hat{\boldsymbol{c}}(j)$ dans $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$. Or, on a $\hat{\boldsymbol{c}}(\widetilde{\epsilon}_1) = \mathcal{R}_{\geq 0}[1]$, et l'application $\lambda : \hat{\boldsymbol{c}}(j) \to \mathrm{H}\,\mathcal{M}[1]$ qui fait correspondre $(x, y) \mapsto x(\mathrm{mod}\ K_0)$ est bien un quasi-isomorphisme. La composée $(\lambda \circ \varphi)[-1] : \mathcal{R}_{\geq 0} \to \mathcal{H}\,\mathcal{M}$ est alors le quasi-isomorphisme cherché.

• *Deuxième étape.* Plaçons-nous dans $\mathbb{K}\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ et considérons le diagramme (non commutatif)

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{R}_0 \arrow[r, "i"] & \mathcal{R}_{\geq 0} \arrow[r, "p"] \arrow[dr, dotted, "\beta"'] & \mathcal{R}_{\geq 1} \arrow[r, "\widetilde{\epsilon}_1"] \arrow[d, dotted, shift right=2, "\delta"'] \arrow[d, shift left=2, "\phi"] \arrow[dr, "\alpha"] & \mathcal{R}_0[1] \arrow[r, "i{[1]}"] \arrow[d, "\psi"] & \mathcal{R}_{\geq 0}[1] & \\
& (\mathbf{I}) & K_0[1] \arrow[r, "j", "\subseteq"'] & P_0[1] \arrow[r, two heads, "q"] & \hat{\boldsymbol{c}}(j) \arrow[r] & K_0[2]
\end{tikzcd}$$

où

- les lignes sont des triangle distingués ;
- le morphisme $\phi : \mathcal{R}_{\geq 1} \to K_0[1]$ est le quasi-isomorphisme (Eq.40) ;
- le morphisme $\psi : \mathcal{R}_0[1] = \mathcal{E}(Q_0)[1] \oplus \mathcal{F}(P_0)[1] \to P_0[1]$, est le morphisme nul sur $\mathcal{E}(Q_0)[1]$ et l'identité sur $\mathcal{F}(P_0)[1]$;
- le morphisme $\alpha : \mathcal{R}_{\geq 1} \to \mathcal{P}_0[1]$ est la différence

$$\alpha := \psi \circ \widetilde{\epsilon}_1 - j \circ \phi\,.$$

Si $\alpha = 0$, les remarques de la première étape s'appliquent et l'implication (d)⇒(a) est prouvée. Autrement, on remarque que

$$q \circ (\alpha \circ p) = q \circ \psi \circ (\widetilde{\epsilon}_1 \circ p) - (q \circ j) \circ \phi \circ p = 0$$

de sorte qu'il existe $\beta : \mathcal{R}_{\geq 0} \to K_0[1]$ vérifiant $j \circ \beta = \alpha \circ p$. Or, l'action de β en cohomologie est nulle puisque

$$\mathrm{H}(j) \circ \mathrm{H}(\beta) = \mathrm{H}(j \circ \beta) = \mathrm{H}(\alpha \circ p)$$

où $\mathrm{H}(j)$ est injective. On en déduit l'annulation de $\beta \circ i$ puisque ce morphisme, élément de $\mathrm{Hotgr}^0_R(\mathcal{R}_0, P_0[1])$ est entièrement déterminé par son action en cohomologie d'après l'égalité d'adjonction (2.2.2) :

$$\mathrm{Hotgr}^0_R(\mathcal{R}_0, N) = \mathrm{Hotgr}^0_R(\mathcal{F}(P_0), N) = \mathrm{Homgr}^0_R(P_0, N) = \mathrm{Homgr}^0_R(\mathrm{H}(\mathcal{R}_0), N)$$

pour tout *R-mg* N. On conclut qu'il existe $\delta : \mathcal{R}_{\geq 1} \to K_0[1]$ tel que $\beta = \delta \circ p$

Montrons que $\mathrm{H}(\delta)=0$.

Comme $\mathrm{H}(j)$ est injective, il suffit de monter que $\mathrm{H}(j\circ\delta)=0$, autrement dit, que $\deg \mathrm{Gr}(j\circ\delta)>0$

Maintenant, on aura $\deg \mathrm{Gr}(\delta)>0$ si, et seulement si, l'action de δ en cohomologie est nulle, et , si, et seulement si, l'action de $j\circ\delta\in \mathrm{Homgr}(\mathcal{R}_{\geq 1},P_0[1])$ est nulle en cohomologie

On note

$$\phi' := j\circ\phi \quad \text{et} \quad \widetilde{\phi}' := \phi'\circ p\,.$$

Supposons $\widetilde{\phi}'=0$. Alors, grâce au fait que $\mathrm{Hotgr}_R(\_,P_0[1])$ est un foncteur cohomologique, il existe $\psi:\mathcal{R}_0[1]\to P_0[1]$ rendant $(\mathbf{I})$ commutatif, autrement dit, tel que l'on a $\phi'=\psi\circ\widetilde{\epsilon}_1=\gamma(\psi)$ dans **??**. Par ailleurs, comme $\mathcal{R}_{\geq 1}$ et $\mathcal{R}_0$ sont scindés, $\mathrm{Gr}^0(\gamma)$ se lit dans son action en cohomologie (*cf.* 7.1.7), *i.e.* il correspond au morphisme de restriction $\mathrm{Homgr}^0_R(P_0,P_0)\to \mathrm{Homgr}^0_R(K_0,P_0)$. Or, $\mathrm{Gr}^0(\phi')$ s'identifie à l'inclusion $K_0\subseteq P_0$ qui est bien la restriction de $\mathrm{id}:P_0\to P_0$. On peut donc prendre ψ dans $(\mathbf{I})$, tel qu'il induit l'identité en cohomologie. Le scindage de $\mathcal{R}_{\geq 0}$ en découle alors d'après la première étape.

Nous sommes ainsi ramenés à prouver, sachant que $\mathcal{R}_{\geq 1}$ est scindé, que

> *Il existe un morphisme $\varPhi:\mathcal{R}_{\geq 1}\to K_0[1]$ induisant l'identité en cohomologie, et tel que la composée*
> $$\widetilde{\varPhi}' := (j\circ\varPhi)\circ p \in \mathrm{Hotgr}^1_R(\mathcal{R}_{\geq 0},P_0) \tag{Eq.44}$$
> *est nulle.*

Nous allons construire un tel $\varPhi$ en modifiant un quasi-isomorphisme donné $\phi\in\mathrm{Hotgr}^0(\mathcal{R}_{\geq 1},K_0[1])$ dont on suppose qu'il induit l'identité en cohomologie. Nous avons

$$\phi\in \mathrm{Hotgr}^1(\mathcal{R}_{\geq 1},K_0)=\textstyle\bigoplus_{\ell\geq 1}\mathrm{Extgr}^{\ell-1}_R(K_0,K_0[1-\ell])\,, \tag{Eq.45}$$

ce qui donne la décomposition, indexée par $\ell\geq 1$,

$$\phi=\phi_1\oplus\phi_2\oplus\cdots\,,\quad \text{avec}\ \begin{cases}\phi_\ell\in\mathrm{Extgr}^{\ell-1}_R(K_0,K_0[1-\ell]) \text{ et}\\ \phi_1=\mathrm{id}_{K_0}\end{cases} \tag{Eq.46}$$

On notera comme précédemment $\phi' := j\circ\phi$, et $\widetilde{\phi}' := \phi'\circ p$.

Nous avons muni $\mathrm{Hotgr}^1_R(\mathcal{R}_{\geq 0}, P_0)$ d'une filtration finie

$$\mathrm{Hotgr}^1_R(\mathcal{R}_{\geq 0}, P_0)_0 \supseteq \mathrm{Hotgr}^1_R(\mathcal{R}_{\geq 0}, P_0)_1 \supseteq \mathrm{Hotgr}^1_R(\mathcal{R}_{\geq 0}, P_0)_2 \supseteq \cdots$$

et l'hypothèse de dégénérescence sur $\mathcal{R}_{\geq 0}$ donne les identifications (Eq.39)

$$\begin{cases} \mathrm{Gr}^0(\mathrm{Hotgr}^1_R(\mathcal{R}_{\geq 0}, P_0)) = \mathrm{Homgr}^0_R(\mathrm{H}\,\mathcal{M}, P_1)\,, \\ \mathrm{Gr}^j(\mathrm{Hotgr}^1_R(\mathcal{R}_{\geq 0}, P_0)) = \mathrm{Extgr}^\ell_R(\mathrm{H}\,\mathcal{M}, P_0[1-\ell])\,, \quad \forall \ell > 0. \end{cases}$$

On voit alors, à l'aide de (Eq.42), que lorsque $\widetilde{\phi}' \neq 0$, le degré de $\mathrm{Gr}(\widetilde{\phi}')$ est nécessairement ≥ 2. En effet, on a

$$\phi' = j \circ \phi \in \mathrm{Homgr}^1(\mathcal{R}_{\geq 1}, P_0) = \textstyle\bigoplus_{\ell \geq 1} \mathrm{Extgr}^{\ell-1}_R(K_0, P_0[1-\ell])\,,$$

d'où la décomposition, indexée par $\ell \geq 1$,

$$\phi' = \phi'_1 \oplus \phi'_2 \oplus \cdots\,, \quad \text{avec } \phi'_\ell \in \mathrm{Extgr}^{\ell-1}_R(K_0, P_0[1-\ell])\,, \tag{Eq.47}$$

dont le rapport avec la décomposition (Eq.46) est donné par

$$\phi'_\ell = j^\ell_*(K_0)(\phi_\ell)\,, \tag{Eq.48}$$

où

$$j^\ell_*(K_0) : \mathrm{Extgr}^{\ell-1}_R(K_0, K_0[1-\ell]) \to \mathrm{Extgr}^{\ell-1}_R(K_0, P_0[1-\ell])$$

est le morphisme naturel d'extensions induit par l'inclusion $j : K_0 \subseteq P_0$.

Dans la décomposition (Eq.47), l'élément ϕ'_1 est l'inclusion canonique $K_0 \subseteq P_0$, image par $(\gamma)_1$ de $\mathrm{id} : P_0 \to P_0$. Comme les colonnes de gauche des diagrammes **??** et (Eq.42) coïncident, on conclut que $(\alpha)_1(\phi'_1) = 0$. Le gradué de $\widetilde{\phi}' = \phi' \circ p$ est de degré ≥ 2, plus précisément, si l'on note

$$e := \inf\{\ell \geq 2 \mid \phi'_\ell \neq 0\}\,,$$

on a

$$\mathrm{Gr}\,\widetilde{\phi}' = (\alpha)_e(\phi'_e) \neq 0\,. \tag{Eq.49}$$

Soit maintenant $\xi_e \in \mathrm{Hotgr}^1_R(\mathcal{R}_{\geq 1}, K_0)$ tel que dans sa décomposition (Eq.45), on a $(\xi_e)_e = \phi_e$. Notons

$$\xi'_e = j \circ \xi_e \text{ et } \widetilde{\xi}'_e := \xi'_e \circ p\,.$$

Alors

a) Le morphisme ξ_e provient d'un morphisme de complexes de R-*mdg*'s

$$\begin{array}{ccccccccc} \xrightarrow{\epsilon_e+2} \mathcal{R}_{e+1} & \xrightarrow{\epsilon_{e+1}} & \mathcal{R}_e & \xrightarrow{\epsilon_e} & \mathcal{R}_{e-1} & \xrightarrow{\epsilon_e-1} \cdots \xrightarrow{\epsilon_1} \mathcal{R}_1 \to 0 \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow & \\ \mathbf{0} & \longrightarrow & K_0[1-e] & \longrightarrow & \mathbf{0} & \end{array}$$

et il induit clairement 0 en cohomologie pour peu que $e \geq 2$.

b) On a $(\xi'_e)_e = \phi'_e$, par construction d'après (Eq.48), et par (Eq.49)

$$\mathrm{Gr}\,\widetilde{\xi'_e} = (\alpha)_e(\xi'_e)_e = (\alpha)_e(\phi'_e) = \mathrm{Gr}\,\widetilde{\phi'}\,.$$

Par conséquent, le morphisme

$$\phi - \xi_e \in \mathrm{Hotgr}^1_R(\mathcal{R}_{\geq 1}, K_0)$$

est un quasi-isomorphisme induisant l'identité en cohomologie et tel que

$$\deg \mathrm{Gr}\,(\widetilde{\phi' - \xi'_e}) > e\,.$$

L'itération de ce procédé permet de montrer que l'élément

$$\Phi := \phi - \textstyle\sum_{\ell\geq 2}\xi_\ell \in \mathrm{Hotgr}^1_R(\mathcal{R}_{\geq 1}, K_0)$$

réponds aux demandes (Eq.44), ce qui termine la preuve du théorème.

7.2.2. Remarque. La preuve de (c)⇒(a) qui précède, montre aussi que le morphisme $\beta : \sum\mathcal{R}_\bullet \to \boldsymbol{h}\mathcal{M}$ induit un quasi-morphisme $\tilde\beta : \mathcal{M} \to \boldsymbol{h}\mathcal{M}$ si, et seulement si, $\beta\circ\epsilon_1 = 0$. Or $\epsilon_1(x_1, 0) = (\pi_1(x_1), D_{\mathcal{E}}(y'_0))$, et on a bien $\beta\epsilon_1(\mathcal{F}(P_1)) = 0$. L'existence de $\tilde\beta$ équivaut donc à la condition d'annulation

$$\beta\epsilon_1(\mathcal{E}(Q_1)) = 0\,. \tag{$\star$}$$

Dans le contrexemple 7.1.4, où $\mathcal{M} = \sum(p : M_1 \twoheadrightarrow \mathcal{M}_0)$, supposons M_1 et $H = \ker(p)$ tous les deux projectifs. On a alors la résolution projective simultanée :

$$\mathbf{0} \to \mathcal{E}(H) \xrightarrow{\epsilon_1} \mathcal{F}(H)\oplus\mathcal{E}(M_1) \xrightarrow{\epsilon_0} \mathcal{M} \to \mathbf{0}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
H & \xrightarrow{\epsilon_{1,1}} & \mathbf{0} & \oplus & M_1 & \xrightarrow{p} & M_2 \\
\| & & \uparrow & & \| & & {\scriptstyle p}\uparrow \\
H & \xrightarrow{\epsilon_{1,0}} & H & \oplus & M_1 & \xrightarrow{\epsilon_{0,0}} & M_1
\end{array}$$

avec $\epsilon_{0,0}(h,y) = h+y$, $\epsilon_{1,0}(h) = (-h,h)$ et $\epsilon_{1,1}(h) = (0,h)$. On a alors, l'égalité

$$\frac{\sum\mathcal{R}_\bullet}{\mathrm{B}\sum\mathcal{R}_\bullet} = \frac{H}{\mathbf{0}} \oplus \frac{H\oplus(H\oplus M_1)}{\{(h,-h,h)\}} \oplus \frac{M_2}{M_2} \cong H\oplus(H\oplus M_1)$$

et le morphisme $\beta : \sum\mathcal{R}_\bullet \to H$ provient de la projection $H\oplus(H\oplus M_1) \twoheadrightarrow H$, qui fait correspondre $(x,h,y)\mapsto h$. On y voit pourquoi la condition d'annulation $(\star)$ ne peut être vérifiée.

7.2.3. Corollaire. *Soit $\mathcal{M}$ un R-mdg. Pour tout relèvement projectif simultané (5.1.9-(a))*

$$\mathcal{R} = \mathcal{E}(Q) \oplus \mathcal{F}(P) \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{M}$$

compatible à des relèvements projectifs R-mg's $P \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} \mathrm{H}\,\mathcal{M}$ et $Q \overset{\nu}{\twoheadrightarrow} \mathrm{B}\,\mathcal{M}$, notons $\mathcal{K} := \ker(\epsilon) \hookrightarrow \mathcal{R}$ et $K := \ker(\pi) \hookrightarrow P$ les noyaux respectifs. On a ainsi le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{K} \arrow[r, hook] & \mathcal{R}_0 = \mathcal{E}(Q) \oplus \mathcal{F}(P) \arrow[d, two heads, "p_2"] \arrow[dr, two heads, "\mu"] & \\
K \arrow[r, hook] & P \arrow[r, two heads, "\pi_0"] & \mathrm{H}\,\mathcal{M}
\end{tikzcd}$$

où $\mu : \mathcal{E}(Q) \oplus \mathcal{F}(P) \to \mathrm{H}\,\mathcal{M}$ est le morphisme de R-mdg's $\mu(x, y) = \pi_0(y)$.
Les assertions suivantes sont alors équivalentes :

a) *$\mathcal{M}$ est scindé dans $\mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$.*

b) *$\mathcal{K}$ est scindé dans $\mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ et la composée $\mathcal{K} \hookrightarrow \mathcal{R} \overset{\mu}{\twoheadrightarrow} \mathrm{H}\,\mathcal{M}$ est homotope à 0.*

Démonstration. □

7.2.4. Remarque. Soit $(\mathcal{R}_{\geq 0} \xrightarrow{\epsilon} \mathcal{M})$ une résolution projective simultanée (pas nécessairement de longueur finie). L'itération de 7.2.3 montre alors que lorsque $\mathcal{M}$ est scindé tous les $\mathcal{K}_i := \ker(\epsilon_i)$ le sont aussi.

7.3. Scindage et anneaux héréditaires

7.3.1. Proposition. *Tout R-mdg est scindé dans $\mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ si, et seulement si, l'anneau R est héréditaire* [8].

Démonstration. D'après la proposition 5.2.5-(a), tout *R-mdg* $\mathcal{M}$ admet une résolution projective simultanée de longueur majorée par $\dim_{\mathrm{gb}}(R)$. Lorsque R est héréditaire, $\dim_{\mathrm{gb}}(R) \leq 1$, et le terme $(\mathbb{E}_2, d_2)$ de la suite spectrale canonique associée à $\mathcal{M}$ et un foncteur $\boldsymbol{F}$ (6.2.4-(b)), possède au plus deux colonnes de sorte que $d_r = 0$ pour tout $r \geq 2$. La suite spectrale est dégénérée et alors $\mathcal{M}$ est scindé dans $\mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$ par 7.2.1-(b).

Réciproquement, soit N un sous-*R-mg* d'un *R-mg* projectif Q. Fixons un relèvement projectif $\beta : P \twoheadrightarrow N$ de N dans $\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)$. Notons $\mathcal{M} := (P \oplus Q, d)$ le *R-mdg* avec $d(x, y) := (0, \beta(x))$. Comme $\mathrm{o}(\mathcal{M})$ est projectif, le fait que $\mathcal{M}$ est scindé dans $\mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(R)$, équivaut à l'existence d'un morphisme de *R-mdg*'s $\alpha : \mathcal{M} \to \mathcal{F}(\boldsymbol{h}\mathcal{M})$ qui est un quasi-isomorphisme (7.1.3-(a)). Comme

8. Un anneau est dit « *héréditaire* » lorsque tout sous-module d'un module projectif est lui-même projectif. Dans un anneau héréditaire, tout module admet une résolution projective de longueur ≤ 1, donc $\dim_{\mathrm{gb}}(R) \leq 1$.

la différentielle de $\mathcal{F}(\boldsymbol{h}\mathcal{M})$ est nulle, on déduit la suite de morphismes de R-*mg*'s

$$\begin{tikzcd} \mathbf{0} \arrow[r] & \mathcal{F}(\boldsymbol{h}\mathcal{M}) = \dfrac{\mathrm{Z}\,\mathcal{M}}{\mathrm{B}\,\mathcal{M}} \arrow[r, hook] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}"] & \dfrac{\mathcal{M}}{\mathrm{B}\,\mathcal{M}} \arrow[r, two heads, "\bar{\alpha}"] & \mathcal{F}(\boldsymbol{h}\mathcal{M}) \arrow[r] & \mathbf{0} \end{tikzcd}$$

où $\bar{\alpha}$ est le morphisme induit par α. Or, $\mathcal{M} = P \oplus Q$, $\mathrm{Z}\,\mathcal{M} := \ker(\beta) \oplus Q$ et $\mathrm{B}\,\mathcal{M} = \mathbf{0} \oplus \mathrm{im}(\beta)$, et la suite précédente s'écrit aussi

$$\begin{tikzcd} \mathbf{0} \arrow[r] & \ker(\beta) \oplus \dfrac{Q}{\mathrm{im}(\beta)} \arrow[r, hook, "i\oplus\mathrm{id}"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}"] & P \oplus \dfrac{Q}{\mathrm{im}(\beta)} \arrow[r, two heads, "\bar{\alpha}"] & \ker(\beta) \oplus \dfrac{Q}{\mathrm{im}(\beta)} \arrow[r] & \mathbf{0} \end{tikzcd}$$

On en déduit que $\ker(\beta)$ est facteur direct de P et donc N est projectif. $\square$

7.3.2. Remarque. Un cas particulièrement important d'application de la proposition précédente (mais aussi de 7.1.3-(c)) est celui où $R = k[X]$ est l'anneau des polynômes à une variable et coefficients dans un corps. Dans le contexte de la cohomologie $\mathbb{S}^1$-équivariante que nous abordons dans la section suivante, la proposition dit que les complexes des formes différentielles $\mathbb{S}^1$-équivariantes sont scindés.

8. Cohomologie équivariante

8.1. Formes différentielles équivariantes

8.1.1. Les anneaux gradués $\boldsymbol{R(\mathfrak{g})}$ et $\boldsymbol{S_{\mathfrak{g}}}$. Soit $\boldsymbol{G}$ un groupe de Lie réel, compact et connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. On note $R(\mathfrak{g})$ l'algèbre des fonctions réelles polynomiales sur $\mathfrak{g}$, puis $S_{\mathfrak{g}} := R(\mathfrak{g})^{\boldsymbol{G}}$ la sous-algèbre des fonctions $\boldsymbol{G}$-invariantes. On munit $R(\mathfrak{g})$ et $S_{\mathfrak{g}}$ de la graduation qui assigne à une forme linéaire sur $\mathfrak{g}$ le degré 2. On rappelle le résultat classique suivant.

8.1.2. Proposition. *$R(\mathfrak{g})$ et $S_{\mathfrak{g}}$ sont de dimension globale finie.*

8.1.3. Les $\boldsymbol{S_{\mathfrak{g}}}$-*mdg*'s $\boldsymbol{\Omega_G(X)}$ et $\boldsymbol{\Omega_{G,c}(X)}$. Les complexes des formes différentielles équivariantes sont les $S_{\mathfrak{g}}$-*mg*'s

$$\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X}) := \big(R(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{R}} \Omega(\boldsymbol{X})\big)^{\boldsymbol{G}}, \quad \Omega_{\boldsymbol{G},\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) := \big(R(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{R}} \Omega_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})\big)^{\boldsymbol{G}},$$

où $\boldsymbol{X}$ est une $\boldsymbol{G}$-variété différentiable et $\Omega(\boldsymbol{X})$ (resp. $\Omega_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})$) désigne le complexe des formes différentielles (resp. à support compact) sur $\boldsymbol{X}$, munis de la

« *différentielle équivariante* »

$$d_{\boldsymbol{G}}\big(\omega(X)\big) = d\omega(X) + c(X)\omega(X)\,, \tag{Eq.50}$$

où X est une variable qui dénote un élément de $\mathfrak{g}$, et $c(X)$ désigne la contraction par le champ de vecteurs ξ_X associé à l'action du groupe à un paramètre $\exp(tX)$ sur $\boldsymbol{X}$.

On note $H_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X}) := \boldsymbol{h}(\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X}), d_{\boldsymbol{G}})$ (resp. $H_{\boldsymbol{G},c}(\boldsymbol{X}) := \boldsymbol{h}(\Omega_{\boldsymbol{G},\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}), d_{\boldsymbol{G}})$) le $S_{\mathfrak{g}}$-*mg* de cohomologie équivariante (resp. à support compact).

Comme $H_{\boldsymbol{G}}(\bullet) = S_{\mathfrak{g}}$, on notera désormais $H_{\boldsymbol{G}}$, l'anneau gradué $S_{\mathfrak{g}}$.

8.1.4. Proposition

a) *$\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X})$ et $\Omega_{\boldsymbol{G},\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})$ sont des $H_{\boldsymbol{G}}$-mg's libres.*

b) *$(\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X}), d_{\boldsymbol{G}})$ et $(\Omega_{\boldsymbol{G},\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}), d_{\boldsymbol{G}})$ sont des $H_{\boldsymbol{G}}$-mdg's*

Démonstration. On sait que l'on a $R(\mathfrak{g}) = H_{\boldsymbol{G}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{H}$ où $\mathfrak{H}$ désigne l'espace des polynômes harmoniques sur $\mathfrak{g}$ (*cf.* [D], §**8** pp. 277-). Par conséquent,

$$\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X}) := H_{\boldsymbol{G}} \otimes_{\mathbb{R}} \big(\mathfrak{H} \otimes_{\mathbb{R}} \Omega(\boldsymbol{X})\big)^{\boldsymbol{G}}\,, \quad \Omega_{\boldsymbol{G},\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}) := H_{\boldsymbol{G}} \otimes_{\mathbb{R}} \big(\mathfrak{H} \otimes_{\mathbb{R}} \Omega_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})\big)^{\boldsymbol{G}}\,.$$

L'assertion (b) est classique. □

8.1.5. Suite spectrale de Leray-Serre. Les bi-modules $H_{\boldsymbol{G}} \otimes \Omega(\boldsymbol{X})$ et $H_{\boldsymbol{G}} \otimes \Omega_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})$ ont des bi-graduations du premier quadrant. Un tenseur $P \otimes \omega$, avec P et ω homogènes, $\deg(P) = a$ et $\deg(\omega) = b$, est dit de « *degré total* » $a + b$, de « *degré forme différentielle* » b, et de « *degré complémentaire* » a. La filtration par degré complémentaire, *i.e.* $\Omega_{\boldsymbol{G},?}(\boldsymbol{X})_m := H_{\boldsymbol{G}}^{\geq m} \otimes \Omega_?(\boldsymbol{X})$ est une filtration décroissante $H_{\boldsymbol{G}}$-graduée, *i.e.* elle vérifie

$$H_{\boldsymbol{G}}^a \cdot (\Omega_{\boldsymbol{G},?}(\boldsymbol{X}))_m \subseteq (\Omega_{\boldsymbol{G},?}(\boldsymbol{X}))_{a+m}\,,$$

et c'est aussi une filtration régulière des complexes des formes différentielles, elle fournit donc des suites spectrales convergentes de terme $\mathbb{E}_2$

$$\begin{cases} \mathbb{E}_2^{p,q} := H_{\boldsymbol{G}}^p \otimes H_?^q(\boldsymbol{X}) \\ d_2(P \otimes \omega) := \sum_i P e_i^\vee \otimes c(e_i)\omega \end{cases}$$

où $\{e_i\}$ est une base de $\mathfrak{g}$ de base duale $\{e_i^\vee\}$. Les différents termes $(\mathbb{E}_r, d_r)$ de cette suite spectrale son naturellement munis d'une structure R-*mdg*, en particulier d_2 est entièrement déterminée par son action sur $\mathbf{1} \otimes H_?(\boldsymbol{X})$.

8.2. Le cas où $\boldsymbol{G} = \mathbb{S}^1$

D'après la remarque 7.3.2, lorsque $\boldsymbol{G} = \mathbb{S}^1$, l'anneau $H_{\boldsymbol{G}}$ est héréditaire et l'on peut appliquer 7.3.1. En particulier, la proposition suivante est vérifiée.

8.2.1. Proposition. *Les assertions suivantes sont équivalentes.*

a) *Le morphisme canonique* $H_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X}) \to H(\boldsymbol{X})$ (*resp.* $H_{\boldsymbol{G},c}(\boldsymbol{X}) \to H_c(\boldsymbol{X})$) *est surjectif.*

b) *La suite spectrale de Leray-Serre* $\mathbb{E}_2 = H_{\boldsymbol{G}} \otimes H(\boldsymbol{X})$ (resp. $H_{\boldsymbol{G}} \otimes H_c(\boldsymbol{X})$) *est dégénérée,* i.e. $d_r = 0$ *pour* $r \geq 2$.

c) $H_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X})$ (resp. $H_{\boldsymbol{G},c}(\boldsymbol{X})$) *est libre dans* $\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(H_{\boldsymbol{G}})$.

Démonstration. La preuve est la même pour $\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X})$ et pour $\Omega_{\boldsymbol{G},c}(\boldsymbol{X})$.

(a)⇒(b) Soit $\varphi : \Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X}) \to H_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X})$ un isomorphisme de $\mathbb{D}\,\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(H_{\boldsymbol{G}})$. Comme $\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X})$ est libre (8.1.4-(a)), φ se réalise à partir d'un morphisme surjectif de $H_{\boldsymbol{G}}$-*mdg*'s $\phi : \Omega_{\boldsymbol{G},c}(\boldsymbol{X}) \twoheadrightarrow H_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X})$. Le morphisme ϕ projette alors la filtration par degrés complémentaires de $\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X})$ (8.1.5), en une filtration régulière de $H_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X})$, de sorte qu'il induit un morphisme de suites spectrales convergentes dont l'action sur le second terme $\mathbb{E}_2(\phi) : H_{\boldsymbol{G}} \otimes H(\boldsymbol{X}) \to H_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X})$ composée au morphisme canonique $\nu : H_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X}) \to H(X)$, fait correspondre $P \otimes [\omega] \mapsto P(0)[\omega]$. On a donc la factorisation de id : $H(\boldsymbol{X}) \to H(\boldsymbol{X})$,

$$\begin{tikzcd} H(\boldsymbol{X}) \arrow[r, "\mathbf{1}\otimes(\_)"] \arrow[rrr, bend right, "\mathrm{id}"'] & H_{\boldsymbol{G}} \otimes H(\boldsymbol{X}) \arrow[r, "\mathbb{E}_2(\phi)"] & H_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X}) \arrow[r, "\nu"] & H(\boldsymbol{X}) \end{tikzcd}, \tag{$*$}$$

le morphisme ν est surjectif, et $H(\boldsymbol{X})$ est facteur direct de $H_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X})$.

On en déduit l'annulation de d_2 (car déterminée sur $\mathbf{1} \otimes H(\boldsymbol{X})$), mais alors $\mathbb{E}_3 = \mathbb{E}_2 = H_{\boldsymbol{G}} \otimes H(\boldsymbol{X})$ et d_3, étant $H_{\boldsymbol{G}}$-linéaire, est entièrement déterminée sur $\mathbf{1} \otimes H(\boldsymbol{X})$. La factorisation $(*)$ est donc aussi valable sur $\mathbb{E}_3$, et $d_3 = 0$. L'annulation des d_r, pour $r \geq 4$, résulte pareillement.

(b)⇒(c) Si la suite spectrale de Leray-Serre est dégénérée, on a bien $\mathrm{Gr}(H_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X})) = H_{\boldsymbol{G}} \otimes_{\mathbb{R}} H(\boldsymbol{X})$ et comme la filtration par degré complémentaire est une filtration $H_{\boldsymbol{G}}$-graduée, la liberté de $H_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X})$ équivaut à celle de $\mathrm{Gr}(H_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X}))$, et on a un isomorphisme de $H_{\boldsymbol{G}}$-*mg*'s $H_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X}) \sim H_{\boldsymbol{G}} \otimes H(\boldsymbol{X})$

(c)⇒(a) Si $\boldsymbol{h}(\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X}))$ est libre, la suite spectrale canonique 6.2.4-(b) est dégénérée car concentrée sur une seule colonne, et $\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X})$ est scindé d'après le critère général de scindage 7.2.1. □

8.3. Un critère de dualité équivariante lorsque $\boldsymbol{G} = \mathbb{S}^1$

8.3.1. Nous appliquons les considérations du §**1** à l'anneau gradué $R = H_{\boldsymbol{G}}$. Les complexes de formes différentielles équivariantes sont des exemples de $H_{\boldsymbol{G}}$-*mdg*'s, et le « *morphisme de dualité de Poincaré équivariante* »

$$\mathbb{D}_{\boldsymbol{G},\boldsymbol{X}} : (\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X}), d_{\boldsymbol{G}})[d_{\boldsymbol{X}}] \to \mathrm{Homgr}^{\bullet}_{H_{\boldsymbol{G}}}\big((\Omega_{\boldsymbol{G},\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}), d_{\boldsymbol{G}}), (H_{\boldsymbol{G}}, 0)\big) \qquad (\diamond)$$

est un morphisme dans la catégorie $\mathrm{Diff}^{\mathrm{gr}}(H_{\boldsymbol{G}})$ et lorsque $\boldsymbol{X}$ est orientable c'est aussi un quasi-isomorphisme d'après le théorème de dualité de Poincaré équivariante.

8.3.2. Le foncteur

$$\boldsymbol{F}(\_) := \mathrm{Homgr}^{*}_{H_{\boldsymbol{G}}}(\_, H_{\boldsymbol{G}}) : \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(H_{\boldsymbol{G}}) \rightsquigarrow \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(H_{\boldsymbol{G}}),$$

introduit dans 1.2.4, est un foncteur additif contravariant et exact à gauche, notons $\mathbb{R}\,\boldsymbol{F}(\_) : D^{-}(\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)) \rightsquigarrow D(\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R))$ son dérivé à droite.

Maintenant, si M est un $H_{\boldsymbol{G}}$-*mg*, on fixe une résolution projective $Q_{\bullet} \twoheadrightarrow M$ de longueur *finie* dans $\mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)$, possible car $H_{\boldsymbol{G}}$ est de dimension globale finie. La donnée du complexe

$$\mathbf{0} \to \mathrm{Homgr}^{*}_{H_{\boldsymbol{G}}}(Q_0, H_{\boldsymbol{G}})) \to \mathrm{Homgr}^{*}_{H_{\boldsymbol{G}}}(Q_1, H_{\boldsymbol{G}})) \to \mathrm{Homgr}^{*}_{H_{\boldsymbol{G}}}(Q_2, H_{\boldsymbol{G}})) \to \cdots$$

équivaut alors à celle du $H_{\boldsymbol{G}}$-*mdg* $(\mathrm{Homgr}^{\bullet}_{H_{\boldsymbol{G}}}(\Sigma\, Q_{\bullet}, H_{\boldsymbol{G}}), D_{\bullet})$ (*loc.cit.*), car

$$\begin{aligned}\Sigma(\mathrm{Homgr}^{*}_{H_{\boldsymbol{G}}}(Q_{\bullet}, H_{\boldsymbol{G}})) &:= \textstyle\bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{Homgr}^{*}_{H_{\boldsymbol{G}}}(Q_k, H_{\boldsymbol{G}})[-k]\\ &= \textstyle\bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{Homgr}^{*}_{H_{\boldsymbol{G}}}(Q_k[k], H_{\boldsymbol{G}})\\ &= \mathrm{Homgr}^{*}_{H_{\boldsymbol{G}}}(\Sigma\, Q_{\bullet}, H_{\boldsymbol{G}})\end{aligned}$$

et puisque la somme porte sur un nombre *fini* de termes. On a donc

$$\Sigma\, \mathbb{R}\,\boldsymbol{F}(M) \cong \mathrm{Diff}\,\boldsymbol{F}(\Sigma\, Q_{\bullet}) = \mathbb{D}\,\boldsymbol{F}(M, 0)\,. \qquad (\diamond)$$

Le passage en cohomologie donne

$$\mathbb{R}^k\boldsymbol{F}(M) = \boldsymbol{h}^k(\mathrm{Homgr}^{*}_{H_{\boldsymbol{G}}}(Q_{\bullet}, H_{\boldsymbol{G}})) =: \mathrm{Extgr}^{*,k}_{H_{\boldsymbol{G}}}(M, H_{\boldsymbol{G}}) \in \mathrm{Mod}^{\mathrm{gr}}(R)$$

où l'indice de cohomologie 'k' est relatif au degré '$\bullet$' de la résolution.

La cohomologie $\boldsymbol{h}(\mathbb{R}\,\boldsymbol{F}(M)) := \mathbb{R}^{\bullet}\boldsymbol{F}(M)$ est donc bigraduée et l'on note

$$\mathbf{tot}\,\mathbb{R}^{\bullet}\boldsymbol{F}(M) := \textstyle\bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{R}^k\boldsymbol{F}(M)$$

muni de l'ordre total, *i.e.* si $x \in (\mathbb{R}^k\boldsymbol{F}(M))^{\ell}$, on pose $\deg(x) = k + \ell$ (9). L'isomorphisme $(\diamond)$ donne alors

$$\mathbf{tot}\,\mathrm{Extgr}^{*,\bullet}_{H_{\boldsymbol{G}}}(M, H_{\boldsymbol{G}}) = \boldsymbol{h}(\mathbb{D}\,\boldsymbol{F}(M, 0))\,. \qquad (*)$$

9. Dans le cas d'un foncteur $\boldsymbol{F}$ covariant, l'ordre total aurait été $k - \ell$.

D'autre part, on dispose des isomorphismes canoniques

$$\boldsymbol{h}(\mathbb{D}\,\boldsymbol{F}(H_{\boldsymbol{G},c}(\boldsymbol{X}),0)) \underset{1}{\cong} \boldsymbol{h}(\mathbb{D}\,\boldsymbol{F}(\Omega_{\boldsymbol{G},\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}),d_{\boldsymbol{G}})) \underset{2}{\cong} \boldsymbol{h}(\mathrm{Diff}\,\boldsymbol{F}(\Omega_{\boldsymbol{G},\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}),d_{\boldsymbol{G}}))$$

où $\cong_1$ est donné par le théorème de scindage 7.2.1 et 7.3.1, et $\cong_2$ puisque $\Omega_{\boldsymbol{G},\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})$ est un $H_{\boldsymbol{G}}$-*mg* libre. On a donc

$$\boldsymbol{h}(\mathrm{Homgr}^{\bullet}_{H_{\boldsymbol{G}}}((\Omega_{\boldsymbol{G},\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}),d_{\boldsymbol{G}}),(H_{\boldsymbol{G}},0))) \cong \mathbf{tot}\,\mathrm{Extgr}^{*,\bullet}_{H_{\boldsymbol{G}}}(H_{\boldsymbol{G},\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}),H_{\boldsymbol{G}})\,,$$

d'après $(*)$ où $M = H_{\boldsymbol{G},c}(\boldsymbol{X})$ ([10]). Cet isomorphisme, composé à celui induit par $\mathbb{D}_{\boldsymbol{G},\boldsymbol{X}}$ dans (8.3.1), donne alors l'isomorphisme

$$\boxed{H_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X})[d_{\boldsymbol{X}}] \cong \mathbf{tot}\,\mathrm{Extgr}^{*,\bullet}_{H_{\boldsymbol{G}}}(H_{\boldsymbol{G},c}(\boldsymbol{X}),H_{\boldsymbol{G}})}$$

Ces remarques constituent l'essentiel de la preuve du théorème suivant.

8.3.3. Théorème. *Soit $\boldsymbol{G} = \mathbb{S}^1$ et soit $\boldsymbol{X}$ une $\boldsymbol{G}$-variété différentielle orientable. Le morphisme de dualité de Poincaré équivariante*

$$\mathbb{D}_{\boldsymbol{G},\boldsymbol{X}} : (\Omega_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X}),d_{\boldsymbol{G}})[d_{\boldsymbol{X}}] \to (\mathrm{Homgr}^{\bullet}_{H_{\boldsymbol{G}}}(\Omega_{\boldsymbol{G},\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}),H_{\boldsymbol{G}}),D_{\bullet})$$

induit un isomorphisme canonique de $H_{\boldsymbol{G}}$-mg's

$$\mathcal{D}_{\boldsymbol{G},\boldsymbol{X}} : H_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X})[d_{\boldsymbol{X}}] \to \mathbf{tot}\,\mathrm{Extgr}^{*,\bullet}_{H_{\boldsymbol{G}}}(H_{\boldsymbol{G},\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}),H_{\boldsymbol{G}})\,.$$

En particulier, lorsque la cohomologie de de Rham $\boldsymbol{X}$ est de dimension finie, le morphisme :

$$H_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X})[d_{\boldsymbol{X}}] \to \mathrm{Homgr}^{*}_{H_{\boldsymbol{G}}}(H_{\boldsymbol{G},c}(\boldsymbol{X}),H_{\boldsymbol{G}})\,,$$

induit par $\mathbb{D}_{\boldsymbol{G},\boldsymbol{X}}$, est bijectif si, et seulement si, $H_{\boldsymbol{G}}(\boldsymbol{X})$ est $H_{\boldsymbol{G}}$-libre.

Démonstration. La première partie du théorème à déjà été justifiée. Pour la seconde, la nécessité de la condition est claire puisque tout $H_{\boldsymbol{G}}$-*mg* projectif est libre ([11]), et la suffisance résulte de l'isomorphisme $\mathcal{D}_{\boldsymbol{G},\boldsymbol{X}}$ moyennant le fait que pour tout $H_{\boldsymbol{G}}$-*mg* M de type fini, le $H_{\boldsymbol{G}}$-*mg* $\mathrm{Extgr}^{*,k}_{H_{\boldsymbol{G}}}(M,H_{\boldsymbol{G}})$ est de torsion dès que $k > 0$.

En effet, notons $\boldsymbol{I}$ le $H_{\boldsymbol{G}}$-module gradué $S^{-1}H_{\boldsymbol{G}}$ où S est le système multiplicatif constitué des éléments homogènes non nuls de $H_{\boldsymbol{G}}$. Le $H_{\boldsymbol{G}}$-*mg* $\boldsymbol{I}$ est

10. Cet isomorphisme est bien sûr le même que celui de l'assertion 6.2.4-(b) que nous aurions pu aussi bien invoquer.
11. *Cf.* [J] corollaire du théorème 6.21, p. 386.

plat et a la propriété de tuer tout $H_{\boldsymbol{G}}$-*mg* de torsion. On a

$$\mathrm{Homgr}^*_{H_G}(M, H_{\boldsymbol{G}}) \otimes \boldsymbol{I} = \mathrm{Homgr}^*_{H_G}(M, \boldsymbol{I})$$

pour tout $H_{\boldsymbol{G}}$-module gradué de type fini M, car $\boldsymbol{I}$ est plat. On a donc

$$\mathbb{R}\,\mathrm{Homgr}^*_{H_G}(M, H_{\boldsymbol{G}}) \otimes \boldsymbol{I} = \mathbb{R}\,\mathrm{Homgr}^*_{H_G}(M, \boldsymbol{I}) \qquad (*)$$

grâce à la nœthérianité de $H_{\boldsymbol{G}}$.

Or, le foncteur $\mathrm{Homgr}^*_{H_G}(\_, \boldsymbol{I})$ est exact. En effet, il suffit pour cela de vérifier que pour toute suite exacte courte de $H_{\boldsymbol{G}}$-modules gradués

$$\mathbf{0} \to M \longrightarrow N \xrightarrow{\pi} \frac{H_{\boldsymbol{G}}}{(P_1, \ldots, P_r)}[d] \to \mathbf{0}$$

où les $\mathcal{P}_i$ sont homogènes et non nuls, tout morphisme gradué $\lambda : M \to \boldsymbol{I}$ (de degré 0 suffit), admet un prolongement à N. Or, si $m \in N$ est tel que $\pi(m) = \overline{1}$, l'élément $\lambda(P_i\, m) \in \boldsymbol{I}$ est bien défini pour $i = 1, \ldots, r$, et l'on a trivialement

$$P_j \lambda(P_i\, m) = P_i \lambda(P_j\, m) \in \boldsymbol{I}\,,$$

en particulier, l'élément

$$\lambda(m) := \frac{\lambda(P_i\, m)}{P_i} = \frac{\lambda(P_j\, m)}{P_j} \in \boldsymbol{I}$$

est bien défini et prolonge bien le morphisme λ à N tout entier.

Par conséquent, si $k > 0$ on a

$$\mathrm{Extgr}^{*;k}_{H_G}(N, H_{\boldsymbol{G}}) \otimes \boldsymbol{I} = \mathbb{R}^k\, \mathrm{Homgr}^*_{H_G}(M, \boldsymbol{I}) = 0\,,$$

d'après $(*)$, et tous les éléments de $\mathrm{Extgr}^{*,+}_{H_G}(M, H_{\boldsymbol{G}})$ sont de $H_{\boldsymbol{G}}$-torsion. □

Références

[D] J. Dixmier. "Enveloping algebras". Revised reprint of the 1977 translation. Graduate Studies in Mathematics, 11. AMS, 1996.

[G] R. Godement. *Topologie algébrique et théorie des faisceaux.* Troisième édition revue et corrigée. Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, XIII. Actualités Scientifiques et Industrielles, No. 1252. Hermann, Paris, (1973).

[H] R. Hartshorne. Residues and duality. Lecture notes of a seminar on the work of A. Grothendieck, given at Harvard 1963/64. With an appendix by P. Deligne. Lecture Notes in Mathematics, No. 20 Springer-Verlag, Berlin-New York 1966.

[J] N. Jacobson. "*Basic algebra. II*". Second edition. W. H. Freeman and Company, New York, 1989

[M] John C. Moore. *Algebre homologique et homologie des espaces classifiants*, Seminaire H. Cartan–J. C. Moore, 12ème année (1959/60) exposé 7, pp. 1–37.