Université Pierre-et-Marie Curie
Master de mathématiques fondamentales, cours *Introduction à la théorie des schémas*, corrigé de l'examen de rattrapage du 3 juin 2014.
Enseignant : Antoine Ducros
Durée : 3 heures. *Seuls les documents issus du cours (notes personnelles prises en cours ou en TD, documents disponibles en ligne sur la page d'A. Ducros) sont autorisés. Les calculatrices sont interdites.*

Exercice 1. Soit X le schéma Spec $\mathbb{Z}[T_1, T_2]/(T_1^2 + T_2^2 - 15)$, et soit φ le morphisme canonique de X vers Spec $\mathbb{Z}$. Pour quels point x de Spec $\mathbb{Z}$ le schéma $\varphi^{-1}(x)$ est-il irréductible ? Pour quels points x de Spec $\mathbb{Z}$ le schéma $\varphi^{-1}(x)$ est-il réduit ?

Soit $x \in$ Spec $\mathbb{Z}$. On a

$$\varphi^{-1}(x) \simeq \text{Spec } \kappa(x)[T_1, T_2]/(T_1^2 + T_2^2 - 15(x)).$$

On distingue maintenant différents cas.

Premier cas : $\kappa(x)$ *est de caractéristique différente de 2, et* 15 *ne s'annule pas en* x *(cela signifie que* x *n'est pas l'un des points fermés respectivement associés aux nombres premiers 2, 3 et 5).* Le polynôme $-T^2 + 15(x)$ de $\kappa(x)[T_2]$ est alors ou bien irréductible, ou bien produit de deux polynômes irréductibles *distincts* de degré 1 (parce que la caractéristique est différente de 2 et parce que $15(x) \neq 0$). Il s'ensuit qu'il n'est pas un carré dans $\kappa(x)(T_2)$; en conséquence, $T_2^1 + T_2^2 - 15(x)$ n'a pas de racine dans $\kappa(x)(T_2)$; comme il est de degré 2 en T_1, il est irréductible dans $\kappa(x)(T_2)[T_1]$; étant de plus de contenu 1, il est irréductible dans l'anneau factoriel $\kappa(x)[T_2][T_1]$. Le quotient $\kappa(x)[T_1, T_2]/((T_1^2 + T_2^2 - 15(x))$ est dès lors intègre ; en conséquence, le schéma $\varphi^{-1}(x)$ est irréductible et réduit.

Second cas : le point x *est égal au point* x_2 *associé au nombre premier* 2. La fibre étudiée s'écrit alors

$$\text{Spec } \mathbb{F}_2[T_1, T_2]/(T_1^2 + T_2^2 - 1) = \text{Spec } \mathbb{F}_2[T_1, T_2]/(T_1 + T_2 - 1)^2.$$

Le polynôme $T_1 + T_2 - 1$ de $\mathbb{F}_2[T_1, T_2]$ est irréductible (il est de degré 1), et le quotient $\mathbb{F}_2[T_1 + T_2]/(T_1 + T_2 - 1)$ est donc intègre ; de ce fait, son spectre est dès irréductible.

La flèche quotient $\mathbb{F}_2[T_1, T_2] \to \mathbb{F}_2[T_1, T_2]/(T_1 + T_2 - 1)$ induit une surjection $\mathbb{F}_2[T_1, T_2]/(T_1 + T_2 - 1)^2 \to \mathbb{F}_2[T_1, T_2]/(T_1 + T_2 - 1)$, dont le noyau est engendré par $\overline{T_1 + T_2 - 1}$ qui est nilpotent ; la flèche induite par cette surjection au niveau des spectres est donc un homéomorphisme, ce qui entraîne que Spec $\mathbb{F}_2[T_1, T_2]/(T_1 + T_2 - 1)^2$ est irréductible.

Il n'est pas réduit : en effet, $\overline{T_1 + T_2 - 1}$ est un élément nilpotent de $\mathbb{F}_2[T_1, T_2]/(T_1 + T_2 - 1)^2$ qui n'est pas nul, car par un argument de décomposition en produit d'irréductibles, $T_1 + T_2 - 1$ ne peut pas être multiple de $(T_1 + T_2 - 1)^2$.

Troisième cas : $x = x_3$. La fibre étudiée s'écrit alors

$$\text{Spec } \mathbb{F}_3[T_1, T_2]/(T_1^2 + T_2^2).$$

Comme -1 n'est pas un carré modulo 3, l'élément $-T_2^2$ de $\mathbb{F}_3(T_2)$ n'est pas un carré, et $T_1^2 + T_2^2$ est donc irréductible dans $\mathbb{F}_3(T_2)[T_1]$; étant de contenu 1, c'est un polynôme irréductible de l'anneau factoriel $\mathbb{F}_3[T_2][T_1]$. Le quotient $\mathbb{F}_3[T_1,T_2]/((T_1^2+T_2^2)$ est dès lors intègre ; en conséquence, le schéma Spec $\mathbb{F}_3[T_1,T_2]/(T_1^2+T_2^2)$ est irréductible et réduit.

Quatrième cas : $x = x_5$. La fibre étudiée s'écrit alors

$$\mathrm{Spec}\ \mathbb{F}_5[T_1,T_2]/(T_1^2+T_2^2).$$

Comme $2^2 = 4 = (-1)$ dans $\mathbb{F}_5$, on a

$$\mathbb{F}_5[T_1,T_2]/(T_1^2+T_2^2) = \mathbb{F}_5[T_1,T_2]/(T_1+2T_2)(T_1-2T_2).$$

Les polynômes T_1+2T_2 et T_1-2T_2 sont deux irréductibles distincts de $\mathbb{F}_5[T_1,T_2]$. Il s'ensuit qu'un élément f de $\mathbb{F}_5[T_1,T_2]$ appartient à l'idéal $(T_1^2+T_2^2)$ si et seulement si les exposants de T_1+2T_2 et de T_1-2T_2 dans la décomposition de f en produit de facteurs irréductibles sont strictement positifs.

Il est immédiat que si f^n satisfait cette condition pour un certain $n > 0$ alors f la satisfait aussi ; en conséquence, $\mathbb{F}_5[T_1,T_2]/(T_1^2+T_2^2$ est réduit ; et le schéma Spec $\mathbb{F}_5[T_1,T_2]/(T_1^2+T_2^2)$ est donc lui-même réduit.

Comme $\mathbb{F}_5[T_1,T_2]/(T_1^2+T_2^2)$ est réduit, le schéma Spec $\mathbb{F}_5[T_1,T_2]/(T_1^2+T_2^2)$ est irréductible si et seulement si $\mathbb{F}_5[T_1,T_2]/(T_1^2+T_2^2)$ est intègre. Or il ne l'est pas : en effet $\overline{T_1+2T_2}\cdot\overline{T_1-2T_2}$ est nul dans cet anneau alors que $\overline{T_1+2T_2}$ et $\overline{T_1-2T_2}$ sont tous deux non nuls (par exemple par le critère donné ci-dessus en termes d'exposants dans la décomposition en produit d'irréductibles).

Conclusion. La fibre $\varphi^{-1}(x_2)$ est irréductible mais pas réduite. La fibre $\varphi^{-1}(x_5)$ est réduite, mais pas irréductible. Les autres fibres de φ sont réduites et irréductibles.

Exercice 2. Soit $f \in \mathscr{O}_X(X)$ une fonction dont la restriction à U est nulle. Soit V un ouvert affine non vide de X. Comme X est irréductible et réduit, V est irréductible et $V \cap U$ en est un ouvert non vide. L'anneau $\mathscr{O}_X(V)$ est réduit, et intègre puisque V est irréductible.

Soit η le point générique de X ; il est situé sur $V \cap U$. Puisque $f|_U = 0$, on a $f(\eta) = 0$. Mais $\kappa(\eta)$ s'identifie au corps des fractions de $\mathscr{O}_X(V)$, et l'évaluation $\mathscr{O}_X(V) \to \kappa(\eta)$ est simplement l'*injection* naturelle. On en déduit que l'image de f dans $\mathscr{O}_X(V)$, c'est-à-dire la restriction de f à V, est nulle. Ceci vaut pour tout ouvert affine non vide V de X ; comme X est recouvert par de tels ouverts il vient $f = 0$.

Nous allons donner un contre-exemple dans le cas où X n'est pas réduit. Soit k un corps, et posons $X = \mathrm{Spec}\ k[S,T]/(S^2,ST)$. Topologiquement X s'identifie au fermé $V(S^2,ST) = V(S)$ de $\mathbb{A}^2_k$, qui est lui-même homéomorphe à Spec $k[S,T]/S \simeq$ Spec $k[T]$; en particulier X irréductible et $D(\bar{T})$ en est un ouvert dense.

On vérifie que $(\bar{1},\bar{S},\bar{T},\bar{T}^2,\ldots,\bar{T}^n,\ldots)$ est une base de $k[S,T]/(S^2,ST)$. En particulier, $\bar{S}$ est un élément non nul (et nilpotent d'ordre 2) de $\mathscr{O}_X(X)$; comme $\bar{S}\bar{T} = 0$, la restriction de $\bar{S}$ à l'ouvert dense $D(\bar{T})$ de X est nulle, d'où le contre-exemple requis.

Exercice 3. Soit X le spectre de $\mathbb{F}_p[T]/T^p$. Pour toute $\mathbb{F}_p$-algèbre A, l'ensemble $X(A)$ s'identifie à $\{a \in A, a^p = 0\}$ qui est un sous-groupe de $(A,+)$

(car A est une $\mathbb{F}_p$-algèbre). Ainsi, $X(A)$ hérite de manière naturelle d'une loi de groupe visiblement fonctorielle en A, qui fait de X un $\mathbb{F}_p$-schémas en groupes, manifestement non réduit ($\bar{T}$ est une fonction nilpotente sur X).

Exercice 4. L'espace topologique sous-jacent à un schéma possède une base d'ouverts quasi-compacts. Comme $\mathbb{R}$ est séparé, un ouvert de $\mathbb{R}$ est quasi-compact si et seulement si il est compact. Mais si c'est le cas, cet ouvert est égal à $\mathbb{R}$ ou à $\varnothing$ par connexité, et partant à $\varnothing$ par compacité. Il en résulte que $\mathbb{R}$ ne possède pas de base d'ouverts quasi-compacts, et ne peut dès lors être l'espace sous-jacent à un schéma (affine ou non, peu importe).

L'espace topologique sous-jacent à un schéma affine est quasi-compact ; en conséquence, il ne peut être homéomorphe à $\mathbb{N}$ muni de la topologie discrète.

Par contre, la réunion disjointe d'une quantité dénombrable de copies de $\operatorname{Spec} \mathbb{C}$ est un schéma dont l'espace topologique sous-jacent est homéomorphe à $\mathbb{N}$ muni de la topologie discrète (schéma qui ne peut pas être affine d'après ce qui précède).

Exercice 5. Soit B une $\mathbb{C}$-algèbre. L'ensemble $X(B)$ s'identifie naturellement à

$$\{(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \in B^3 \text{ t.q. } \lambda_0^2 - i\lambda_2 = 0 \text{ et } \lambda_0\lambda_2 + i\lambda_1^3 = 0\}.$$

Soit A une $\mathbb{R}$-algèbre. La $\mathbb{C}$-algèbre $A \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ est un A-module libre de base $(1, i)$. Par ce qui précède, $X(A \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$ s'identifie alors à

$$\{(a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2) \in A^6 \text{ t.q. } (a_0+ib_0)^2-i(a_2+ib_2) = 0 \text{ et } (a_0+ib_0)(a_2+ib_2)+i(a_1+ib_1)^3 = 0\}.$$

En développant et en séparant les parties réelles et imaginaire, on voit que $X(A \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$ s'identifie à l'ensemble des sextuplets $(a_0, \ldots, a_5)$ d'éléments de A tels que

$$\left\{\begin{array}{ccc} a_0^2 - b_0^2 + b_2 & = & 0 \\ 2a_0b_0 - a_2 & = & 0 \\ a_0a_2 - b_0b_2 - 3a_1^2b_1 + b_1^3 & = & 0 \\ a_0b_2 + b_0a_2 + a_1^3 - 3a_1b_1^2 & = & 0 \end{array}\right. ,$$

c'est-à-dire encore à $Y(A)$ où $Y = \operatorname{Spec} \mathbb{R}[U_0, V_0, U_1, V_1, U_2, V_2]/I$ avec

$$I = (U_0^2-V_0^2+V_2, 2U_0V_0-U_2, U_0U_2-V_0V_2-3U_1^2V_1+V_1^3, U_0V_2+V_0U_2+U_1^3-3U_1V_1^2).$$

Autrement dit, le foncteur considéré est représentable par le $\mathbb{R}$-schéma affine Y.

Exercice 6. La suite

$$\{0\} \subsetneq (2) \subsetneq (2, T)$$

est une suite strictement croissante d'idéaux premiers de $\mathbb{Z}[T]$ (le quotient $\mathbb{Z}[T]/(2)$ est l'anneau intègre $\mathbb{F}_2[T]$; le quotient $\mathbb{Z}[T]/(2, T)$ s'identifie à $\mathbb{F}_2[T]/(T)$, c'est-à-dire au corps $\mathbb{F}_2$). La dimension de Krull de $\mathbb{Z}[T]$ (ou de son spectre) est donc au moins égale à 2. Nous allons montrer qu'elle est *exactement* égale à 2.

On sait qu'un fermé irréductible de $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[T]$ est de la forme $\overline{\{\xi\}}$ pour un unique point ξ ; par ailleurs, les points de $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[T]$ sont, d'après l'étude qui en a été faite en cours, de l'un des quatre types suivants, en notant φ le morphisme canonique de Spec $\mathbb{Z}[T]$ vers Spec $\mathbb{Z}$.

Type A. Il s'agit des points fermés ; un point est fermé si et seulement si il appartient à une fibre $\varphi^{-1}(p) \simeq$ Spec $\mathbb{F}_p[T]$ pour un certain nombre premier p, et s'il est fermé dans celle-ci.

Type B'. Il s'agit des points génériques des fibres $\varphi^{-1}(x_p)$, où p parcourt l'ensemble des nombres premiers.

Type B''. Il s'agit des points fermés de la fibre générique $\varphi^{-1}(\eta)$. Si ξ est un tel point, $\overline{\{\xi\}} \cap \varphi^{-1}(\eta) = \{\xi\}$, et pour tout nombre premier p l'intersection $\overline{\{\xi\}} \cap \varphi^{-1}(x_p)$ est un ensemble fini de points fermés de $\varphi^{-1}(x_p)$ – par ailleurs, $\overline{\{\xi\}} \cap \varphi^{-1}(x_p)$ est non vide pour presque tout p.

Type C. Il s'agit du point générique de Spec $\mathbb{Z}[T]$, dont l'adhérence est Spec $\mathbb{Z}[T]$ tout entier.

Si ξ_1 et ξ_2 sont deux points différents de type B' alors $\overline{\{\xi_1\}}$ et $\overline{\{\xi_2\}}$ sont deux fibres de φ en des points fermés différents ; elles sont donc disjointes, et en particulier non comparables pour l'inclusion.

Si ξ_1 et ξ_2 sont deux points différents de type B'' alors $\overline{\{\xi_1\}} \cap \varphi^{-1}(\eta) = \{\xi_1\}$ et $\overline{\{\xi_2\}} \cap \varphi^{-1}(\eta) = \{\xi_2\}$; en conséquence, $\overline{\{\xi_1\}}$ et $\overline{\{\xi_1\}}$ ne sont pas comparables pour l'inclusion.

Si ξ_1 est un point de type B' et ξ_2 un point de type B'' alors $\overline{\{\xi_1\}}$ et $\overline{\{\xi_2\}}$ ne sont pas comparables pour l'inclusion : en effet, $\overline{\{\xi_1\}}$ est égale à $\varphi^{-1}(x_p)$ pour un certain nombre premier p. Comme $\overline{\{\xi_2\}} \cap \varphi^{-1}(x_p)$ est fini, $\overline{\{\xi_1\}}$ n'est pas contenu dans $\overline{\{\xi_2\}}$; et comme $\overline{\{\xi_2\}}$ rencontre presque toutes les fibres de φ, il n'est pas contenu dans $\overline{\{\xi_1\}}$.

Il résulte de ce qui précède qu'une chaîne strictement croissante de fermés irréductibles de Spec $\mathbb{Z}[T]$ contient au plus trois éléments (et que si elle en contient effectivement 3, elle est de la forme $\overline{\{\xi_0\}} \subsetneq \overline{\{\xi_1\}} \subsetneq \overline{\{\xi_2\}}$ où ξ_0 est fermé, ξ_1 est de type B' ou B'', et ξ_2 est le point générique).

Ainsi, la dimension de Spec $\mathbb{Z}[T]$ est bien 2.

Exercice 7.

a) Le quotient $A/(T_1, T_2)$ s'identifie à $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ qui est un corps ; l'idéal en question est donc bien maximal et le corps résiduel $\kappa(x)$ est égal à $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. Le corps résiduel de $\varphi(x)$ se plongeant dans $\kappa(x)$, il est nécessairement lui aussi égal à $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, ce qui prouve que $z := \varphi(x) = x_7$.

On a $\varphi^{-1}(z) \simeq$ Spec $\mathbb{F}_7[T_1, T_2]/T_1T_2$. L'anneau $\mathbb{F}_7[T_1, T_2]/T_1T_2$ est réduit : si $f \in \mathbb{F}_7[T_1, T_2]$ est nilpotent modulo T_1T_2, il existe n tel que f^n soit multiple de T_1T_2, et en considérant la décomposition de f en produit d'irréductibles on voit que f lui-même est déjà multiple de T_1T_2. En conséquence, la fibre $\varphi^{-1}(z)$ est réduite.

On peut identifier Spec $\mathbb{F}_7[T_1, T_2]/T_1T_2$ au fermé de Zariski $\mathsf{V}(T_1T_2)$ de $\mathbb{A}^2_{\mathbb{F}_7}$, et l'on sait d'après le cours que ce fermé a exactement deux composantes irréductibles, à savoir $\mathsf{V}(T_1)$ et $\mathsf{V}(T_2)$.

En conséquent, $\varphi^{-1}(z)$ a deux composantes irréductibles, à savoir

$$D_1 := \mathsf{V}(T_1) \cap \varphi^{-1}(z) \text{ et } D_2 = \mathsf{V}(T_2) \cap \varphi^{-1}(z).$$

Leur intersection est égale à $\mathsf{V}(T_1, T_2) \cap \varphi^{-1}(z) = \{x\}$ (en effet, $\mathsf{V}(T_1, T_2) = \{x\}$ et x est situé sur $\varphi^{-1}(z)$).

b) L'ouvert complémentaire de $\{x\}$ dans X est la réunion de $D(T_1)$ et $D(T_2)$. On a

$$Y \times_X D(T_1) = \text{Proj } A_{(T_1)}[U,V]/(T_1U - T_2V)$$
$$= \text{Proj } A_{(T_1)}[U,V]/(U - T_2T_1^{-1}V) = \text{Proj } A_{(T_1)}[V] \simeq \text{Spec } A_{(T_1)}.$$

Ainsi, $Y \times_X D(T_1) \to D(T_1)$ est un isomorphisme.

On a de même :

$$Y \times_X D(T_2) = \text{Proj } A_{(T_2)}[U,V]/(T_1U - T_2V) = \text{Proj } A_{(T_2)}[U,V]/(T_1T_2^{-1}U - V)$$
$$= \text{Proj } A_{(T_2)}[U] \simeq \text{Spec } A_{(T_2)}.$$

Ainsi, $Y \times_X D(T_2) \to D(T_2)$ est un isomorphisme. Comme le fait d'être un isomorphisme est une propriété locale sur le but, ψ induit bien un isomorphisme $Y \setminus \psi^{-1}(x) \simeq X \setminus \{x\}$.

On a

$$\psi^{-1}(x) \simeq \text{Proj } \kappa(x)[U,V]/(T_1(x)U - T_2(x)V) = \text{Proj } \mathbb{F}_7[U,V]/(0)$$
$$= \text{Proj } \mathbb{F}_7[U,V] \simeq \mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_7}.$$

c) On a $D_1 = \mathsf{V}(T_1) \cap \varphi^{-1}(z) = \mathsf{V}(T_1, 7)$. En conséquence, $\psi^{-1}(D_1)$ est le fermé $\mathsf{V}(T_1, 7)$ de Y. Comme $T_1 = 0$ sur $\psi^{-1}(D_1)$, on a $T_2V = 0$ sur $\psi^{-1}(D_1)$, et ce dernier est donc réunion de deux fermés :

- le fermé $\mathsf{V}(7, T_1, T_2)$, qui n'est autre que l'image réciproque du fermé $\mathsf{V}(7, T_1, T_2)$ de X, c'est-à-dire de $\{x\}$: c'est donc $\psi^{-1}(x)$;
- le fermé $D_1' := \mathsf{V}(7, T_1, V)$, lequel s'identifie à

$$\text{Proj } (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}[T_2])[U] \simeq \text{Spec } \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}[T_2],$$

qui est irréductible.

De même, on montre que $\psi^{-1}(D_2)$ est la réunion de $\psi^{-1}(x)$ et de $D_2' := \mathsf{V}(7, T_2, U)$, lequel s'identifie à

$$\text{Proj } (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}[T_1])[V] \simeq \text{Spec } \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}[T_1],$$

qui est irréductible.

Il reste à étudier les intersections des différents fermés considérés.

Intersection de D_1' et $\psi^{-1}(x)$. Elle est égale à $\mathsf{V}(T_1, T_2, 7, V)$. En tant que fermé de $\psi^{-1}(x) = \mathsf{V}(T_1, T_2, 7) \simeq \text{Proj } \mathbb{F}_7[U,V] \simeq \mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_7}$ elle est égale à $\mathsf{V}(V)$, qui consiste en un point fermé de corps résiduel $\mathbb{F}_7$ (c'est le point à l'infini vis-à-vis de la carte affine $D(V)$, et l'origine vis-à-vis de la carte affine $D(U)$).

Intersection de D_2' et $\psi^{-1}(x)$. Elle est égale à $\mathsf{V}(T_1, T_2, 7, U)$. En tant que fermé de $\psi^{-1}(x) = \mathsf{V}(T_1, T_2, 7) \simeq \text{Proj } \mathbb{F}_7[U,V] \simeq \mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_7}$ elle est égale à $\mathsf{V}(U)$, qui consiste en un point fermé de corps résiduel $\mathbb{F}_7$ (c'est le point à l'infini vis-à-vis de la carte affine $D(U)$, et l'origine vis-à-vis de la carte affine $D(V)$).

Intersection de D_1' et D_2'. Elle est égale à $\mathsf{V}(T_1, T_2, 7, U, V)$. On peut donc l'identifier au fermé de $\psi^{-1}(x) = \mathsf{V}(T_1, T_2, 7) \simeq \text{Proj } \mathbb{F}_7[U,V] \simeq \mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_7}$ défini par les conditions $U = 0$ et $V = 0$, qui est vide.