Université Paris 6
Année universitaire 2012-2013
Corrigé de l'examen terminal du cours *Introduction à la théorie des schémas*, le 8 janvier 2013

I. Anneaux absolument plats.

1)

1a) Supposons $B = A/I$ et soit f une application A-linéaire de N vers M. Soit $n \in N$ et soit $b \in B$. On a $b = \overline{a}$ pour un certain $a \in A$. Dès lors

$$f(bn) = f(\overline{a}n) = f(an) = af(n) = \overline{a}f(n) = bf(n),$$

par A-linéarité de f. Ainsi f est B-linéaire.

Supposons $B = S^{-1}A$ et soit f une application A-linéaire de N vers M. Soit $n \in N$, et soit $b \in B$. Écrivons $b = a/s$ avec $a \in A$ et $s \in S$. On a alors $sbn = an$. Ainsi, $af(n) = f(an) = f(sbn) = sf(bn)$ car f est A-linéaire. Il vient $(a/s)f(n) = f(bn)$, c'est-à-dire $f(bn) = bf(n)$, ce qu'il fallait démontrer.

1b) Soit L un B-module. Il résulte de ce qui précède qu'une application A-linéaire de N dans L est la même chose qu'une application B-linéaire de N dans L. Ainsi, les B-modules N et $N \otimes_A B$ satisfont la même propriété universelle et sont donc canoniquement isomorphes.

Si N et M sont deux B-modules on a

$$N \otimes_A M \simeq (N \otimes_A B) \otimes_B M \simeq N \otimes_B M$$

(le dernier isomorphisme résultant de ce qui précède).

1c) Soit $L \hookrightarrow L'$ une injection B-linéaire. Comme $M \otimes_A L \simeq M \otimes_B L$, et de même avec L', et comme M est A-plat, la flèche naturelle $M \otimes_B L \to M \otimes_B L'$ est injective. Ainsi, M est B-plat.

2)

2a) Supposons que A soit absolument plat et soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A. Soit M un $A_\mathfrak{p}$-module. Comme A est absolument plat, le module M est A-plat, et est donc $A_\mathfrak{p}$-plat d'après 1c), que l'on peut appliquer grâce au deuxième exemple de 1a) (celui où $B = S^{-1}A$). Ainsi, $A_\mathfrak{p}$ est absolument plat.

Réciproquement, supposons que $A_\mathfrak{p}$ soit absolument plat pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A. Soit M un A-module et soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A. Comme $A_\mathfrak{p}$ est absolument plat, le $A_\mathfrak{p}$-module $M_\mathfrak{p}$ est plat. Ceci valant pour tout $\mathfrak{p}$, il résulte d'un exercice vu en TD que M est A-plat.

2b) i)$\Rightarrow$ii) est évident. Supposons que ii) soit vraie, et soit a un élément de A. L'injection $aA \hookrightarrow A$ reste injective après tensorisation par $A/\mathfrak{m}$. Mais comme a appartient à $\mathfrak{m}$, son image dans $A/\mathfrak{m}$ est nul. Il s'ensuit que $a \in \mathfrak{m}(aA)$. Ainsi $aA = \mathfrak{m}(aA)$; par le lemme de Nakayama, $aA = 0$ et a est nul. En conséquence $\mathfrak{m} = 0$.

Si iii) est vraie alors A est un corps, et tous les A-modules sont plats d'après le cours.

2c) Il résulte de 2a) que i) est vrai si et seulement si pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A l'anneau local $A_\mathfrak{p}$ est absolument plat ; et d'après 2b), ce dernier fait revient à dire que $A_\mathfrak{p}$ est un corps. Ainsi, i) $\iff$ ii).

Supposons que ii) soit vrai. Comme les localisés de A en ses idéaux premiers sont tous réduits, l'anneau A est réduit (vu en TD). Par ailleurs si $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$ sont deux idéaux premiers de A avec $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ alors $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{q}}$ est un idéal premier du corps $A_{\mathfrak{q}}$; il est donc nul, c'est-à-dire qu'il coïncide avec $\mathfrak{q}A_{\mathfrak{q}}$. Il s'ensuit que $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$; ainsi, tout idéal premier de A est maximal.

Supposons que iii) soit vrai et soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A. Comme tout idéal premier est maximal, $\mathfrak{p}$ ne contient strictement aucun autre idéal premier de A. En conséquence, $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ est l'unique idéal premier de $A_{\mathfrak{p}}$. C'est donc l'ensemble des nilpotents de $A_{\mathfrak{p}}$. Mais comme A est réduit, $A_{\mathfrak{p}}$ est réduit (là encore, *cf.* les TD) ; en conséquence $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} = 0$, et $A_{\mathfrak{p}}$ est un corps, d'où ii), ce qui termine la preuve.

3) Soit A un anneau absolument plat et soit X son spectre.

3a) Comme A est absolument plat, l'anneau local $\mathscr{O}_{X,x}$ coïncide avec son corps résiduel $\kappa(x)$ (d'après 2c)). Ainsi, si $f(x) = 0$ alors f est nulle dans $\mathscr{O}_{X,x}$, ce qui veut dire que f est nulle au voisinage de x.

3b) Comme x et y correspondent à deux idéaux premiers différents de A, il existe $f \in A$ qui s'annule en l'un et pas en l'autre. Le lieu d'inversibilité de f est un ouvert de X comme sur tout schéma, et son lieu des zéros est un ouvert de X d'après 3a). Si $f(x) = 0$ on peut alors prendre pour U le lieu des zéros de f et pour V son lieu d'inversibilité ; si c'est en y que f s'annule, on échange les définitions de U et V.

3c) Écrivons X comme la réunion disjointe des ouverts $\mathsf{V}(f)$ et $D(f)$ et définissons g comme la fonction qui vaut $1/f$ sur $D(f)$ et 0 sur $\mathsf{V}(f)$ (une telle g existe puisque $\mathscr{O}_X$ est un faisceau). On a $1 - gf = 0$ sur $D(f)$, et $f = 0$ sur $\mathsf{V}(f)$ d'après 3a). Il vient $f(1 - gf) = 0$.

4) Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A et soit $a \in \mathfrak{p}A\mathfrak{p}$. On peut écrire $a = f/s$ avec $s \in A \setminus \mathfrak{p}$ et $f \in \mathfrak{p}$. Par hypothèse, il existe g tel que $f(1 - fg) = 0$. Comme $f \in \mathfrak{p}$, l'élément $1 - fg$ de $A_{\mathfrak{p}}$ est inversible ; dès lors, $f = 0$ dans $A_{\mathfrak{p}}$. On a *a fortiori* $a = 0$, et $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ est nul. Ainsi, $A_{\mathfrak{p}}$ est un corps, et comme ceci vaut pour tout $\mathfrak{p}$ l'anneau A est absolument plat d'après 2c).

5) Supposons A_{red} absolument plat. Dans ce cas, SpecA, qui est canoniquement homéomorphe à $\mathrm{SpecA_{red}}$, est séparé d'après 3b). Étant par ailleurs quasi-compact, il est compact. Tout ouvert affine de Spec A étant quasi-compact, il est compact (puisque séparé) ; ainsi, Spec A possède une base d'ouverts compacts.

ll est clair que ii)⇒iii)⇒iv). Enfin, si iv) est vraie alors tous les points de Spec A_{red} sont fermés aussi (puisqu'il est homéomorphe à Spec A). Autrement dit, tous les idéaux premiers de A_{red} sont maximaux. Comme A_{red} est réduit, il est absolument plat en vertu de 2c). Ainsi, i) est vrai.

6) *Quelques exemples.*

6a) Soit $f \in A$. Comme f est localement constante, son lieu des zéros U est ouvert, et il en va de même de son lieu d'invisibilité V ; on a $X = U \coprod V$. Soit g la fonction localement constante de X dans K qui vaut $1/f$ sur V et (par exemple) 0 sur U. On a alors $f(1 - gf) = 0$; il s'ensuit en vertu de 4) que A est absolument plat.

Si $x \in X$, le noyau de la surjection $f \mapsto f(x)$ de A dans K est un idéal maximal de A. On a ainsi construit une application π de X vers Spec A, qui est continue : par construction, l'image réciproque de l'ouvert $D(f)$ de Spec A est le lieu d'inversibilité de f sur X. Comme X et Spec A sont compacts (pour Spec A, cela résulte d'après 5) du fait que A est absolument plat) il suffit pour conclure de montrer que π est bijective.

L'application π est injective. Soient x et y deux points distincts de X. Comme X possède une base d'ouverts compacts, il existe un ouvert compact U de X contenant x et ne contenant pas y. Comme U est compact, $X\backslash U$ est ouvert et la fonction f qui vaut 1 sur U et 0 sur $X\backslash U$ appartient à A. Par construction, f appartient à l'idéal $\pi(y)$ mais pas à l'idéal $\pi(x)$. Ainsi, $\pi(x) \neq \pi(y)$ et π est injective.

L'application π est surjective. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A. Comme A est absolument plat l'idéal $\mathfrak{p}$ est maximal d'après 2c). Il s'agit de montrer qu'il est égal à $\pi(x)$ pour un certain $x \in X$; par maximalité, il suffit de montrer qu'il existe x tel que $\mathfrak{p} \subset \pi(x)$.

On raisonne par l'absurde. On suppose donc que pour tout $x \in X$ il existe $f_x \in \mathfrak{p}$ telle que $f_x(x) \neq 0$; dans ce cas, f_x est égale à une constante non nulle λ_x sur un voisinage ouvert compact V_x de x. Par compacité, on peut recouvrir X par une famille finie $V_1, \ldots, V_n$ d'ouverts compacts, tels que la propriété suivante soit satisfaite : pour tout i, il existe $f_i \in \mathfrak{p}$ et $\lambda_i \in K^*$ tels que $f_{i|_{V_i}} = \lambda_i$.

La propriété reste vraie si on raffine le recouvrement. On peut donc, quitte à remplacer (V_i) par la famille des $(\bigcap_{i \in I V_i} \setminus \bigcup_{i \notin I} V_i)_{I \subset \{1,\ldots,n\}, I \neq \emptyset}$ (ce sont encore des ouverts compacts), supposer les V_i deux à deux disjoints.

Soit $g_i \in A$ la fonction valant $1/\lambda_i$ sur V_i et 0 ailleurs. Par construction, on a $(g_i f_i)_{|V_i} = 1$ et $(g_i f_i)_{|X\backslash V_i} = 0$. Comme $\mathfrak{p}$ est un idéal, la fonction $\sum g_i f_i$ appartient à $\mathfrak{p}$. Mais $\sum f_i g_i = 1$, et l'on aboutit ainsi à une contradiction qui achève la preuve.

6b) Soit $f = (f_i) \in \prod A_i$. Comme chacun des A_i est absolument plat, il existe pour tout i un élément $g_i \in A_i$ tel que $f_i(1 - g_i f_i) = 0$ (d'après 3c). Si l'on pose $g = (g_i)$ on a alors $f(1 - gf) = 0$; il résulte dès lors de 4) que $\prod A_i$ est absolument plat.

II. Éclatement de Spec $\mathbb{Z}[T]$.

1) 1a) Soit $P \in \mathbb{Z}[T]$. Écrivons $P = a_0 + \sum a_i (T-1)^i$, où les a_i appartiennent à $\mathbb{Z}$. Le polynôme P appartient à $\mathfrak{m}$ si et seulement si a_0 est pair, donc si et seulement si $P(1)$ est pair. Ainsi, $\mathfrak{m}$ apparaît comme le noyau de la surjection $P \mapsto \overline{P(1)}$ de $\mathbb{Z}[T]$ dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. On en déduit que $\mathfrak{m}$ est un idéal maximal, et que le point x correspondant a pour corps résiduel $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

1b) On peut écrire $X\backslash\{x\}$ comme la réunion des deux ouverts affines $D(T-1)$ et $D(2)$ de X. L'anneau des fonctions de $D(T-1)$ est le sous-anneau de $\mathbb{Q}(T)$ formé des fractions qui peuvent se mettre sous la forme $P/(T-1)^i$ avec $P \in \mathbb{Z}[T]$ et $i \geqslant 0$; l'anneau des fonctions de $D(2)$ est le sous-anneau de $\mathbb{Q}(T)$ formé des fractions qui peuvent se mettre sous la forme $P/2^i$ avec $P \in \mathbb{Z}[T]$ et $i \geqslant 0$. Si f est une fonction sur $D(T-1)$ et si g est une fonction sur $D(2)$ alors f et g coïncident sur $D(T-1) \cap D(2) = D(2(T-1))$ si et seulement si elles coïncident comme éléments de $\mathbb{Q}(T)$. Ainsi, l'anneau $\mathscr{O}_X(X \setminus \{x\})$ est égal au sous-anneau de $\mathbb{Q}(T)$ formé des fractions qui peuvent s'écrire à la fois sous la forme $P/2^i$ et sous la forme $Q/(T-1)^j$. En considérant l'écriture d'une telle fraction sous forme irréductible, et en remarquant que 2 et $T-1$ sont des irréductibles non associés de l'anneau factoriel $\mathbb{Z}[T]$, on voit que $\mathscr{O}_X(X \setminus \{x\}) = \mathbb{Z}[T]$.

On dispose d'un morphisme de

$$X \setminus \{x\} \to \text{Spec } \mathscr{O}_X(X \setminus \{x\}) = \text{Spec } \mathbb{Z}[T] = X$$

qui par sa construction même (il envoie un point sur le noyau de l'évaluation correspondante) n'est autre, au niveau ensembliste, que l'inclusion. Comme cette inclusion n'est pas surjective (le point x n'est pas dans l'image) ce morphisme n'est pas un isomorphisme et $X \setminus \{x\}$ n'est pas affine.

1c) Il suffit de le vérifier localement sur $X \setminus \{x\}$. Soit donc X' l'un des deux ouverts affines $D(T-1)$ ou $D(2)$ et soit B son anneau des fonctions. On a

$$Y \times_X X' = \text{Proj } B[U,V]/((T-1)U - 2V).$$

Si $X' = D(T-1)$ alors $T-1$ est inversible dans B et

$$B[U,V]/((T-1)U - 2V) \simeq B[V]$$

(*via* $U \mapsto 2/(T-1)V$). Si $X' = D(2)$ alors 2 est inversible dans B et

$$B[U,V]/((T-1)U - 2V) \simeq B[U]$$

(*via* $V \mapsto (T-1)U/2$). Dans les deux cas, $Y \times_X X' \simeq \text{Proj } B[W] \simeq \text{Spec } B = X'$, ce qu'il fallait démontrer.

1d) On a $\kappa(x) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, et $(T-1)(x) = 2(x) = 0$. Par conséquent,

$$\pi^{-1}(x) \simeq \text{Proj } \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[U,V] = \mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}.$$

Ainsi, $\pi^{-1}(x)$ est isomorphe à la droite projective sur le corps $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. C'est un schéma de dimension 1.

1e) Si l'on note ρ' le morphisme $X \to \text{Spec } \mathbb{Z}$ alors $\rho = \rho' \circ \pi$. Comme π est d'après 1c) un isomorphisme au-dessus de $X \setminus \{x\}$ et *a fortiori* au-dessus de $D(2)$, on a $\rho^{-1}(\zeta) \simeq (\rho')^{-1}(\zeta) \simeq \text{Spec } \kappa(\zeta)[T]$ pour tout $\zeta \in \text{Spec } \mathbb{Z} - \{x_2\}$.

Quant à $\rho^{-1}(x_2)$, il s'identifie à $\text{Proj } \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[T][U,V]/((T-1)U)$, et donc est (ensemblistement) égal au fermé

$$\mathsf{V}(2) \cap (\mathsf{V}(T-1) \cup \mathsf{V}(U)) = \mathsf{V}(2, T-1) \cup \mathsf{V}(2, U)$$

de Y. Le fermé $\mathsf{V}(2, T-1)$ de Y est par définition égal à $\pi^{-1}(x)$ et est donc irréductible (on a vu au 1d) qu'il s'identifie à la droite projective sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$).

Quant au fermé $\mathsf{V}(2, U)$, il s'identifie topologiquement à

$$\text{Proj } \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[T][V] \simeq \text{Spec } \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[T]\ ;$$

il est donc irréductible, puisqu'homéomorphe à la droite affine sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

L'intersection de ces deux fermés peut se décrire, au choix :

- comme le fermé $\mathsf{V}(T-1)$ de $\text{Spec } \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[T]$, qui est simplement le $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-point d'équation $T = 1$;

- ou comme le fermé $\mathsf{V}(U)$ de $\pi^{-1}(x) \simeq \text{Proj } \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[U,V]$ (qui bien entendu est lui aussi un point de corps résiduel $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$).

Ainsi $\rho^{-1}(x_2)$ a deux composantes irréductibles se rencontrant en un point fermé de corps résiduel $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

2)

2a) Par définition, l'idéal $\mathfrak{m}$ est l'image de l'application A-linéaire de $A \oplus A$ dans A qui envoie (a, b) sur $(T-1)a + 2b$. On dispose donc d'une surjection

$$q : (a, b) \mapsto (T-1)a + 2b$$

de $A \oplus A$ vers $\mathfrak{m}$.

Soit i l'application $a \mapsto (-2a, (T-1)a)$ de A dans $A \oplus A$. Elle est clairement injective puisque A est intègre. Montrons que $i(A) = \operatorname{Ker} q$.

L'inclusion $i(A) \subset \operatorname{Ker} q$ est évidente. Réciproquement, soit $(a, b) \in A \oplus A$ tel que $(T-1)a + 2b = 0$. Comme 2 et $T-1$ sont premiers entre eux dans l'anneau factoriel A, le lemme de Gauß assure que $(T-1)$ divise b et que 2 divise a. Si l'on écrit $b = (T-1)b'$ et $a = 2a'$ l'égalité $(T-1)a + 2b = 0$ assure que $a' = -b'$, et (a, b) est ainsi égal à $i(b')$.

2b) L'anneau B est égal à $\mathbb{Z}[T][u]/((T-1)u-2)$. Le quotient $B/(T-1)$ est donc isomorphe à $\mathbb{Z}[u]/2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[u]$ qui est non nul. Ainsi, $T-1$ n'est pas inversible dans B.

Dans l'anneau B, on a $(T-1)u = 2$. Ainsi, $q_B(u, -1) = 0$; *a fortiori*, $j_B \circ q_B(u, -1) = 0$. Par ailleurs, comme $T-1$ n'est pas inversible dans B, l'élément (-1) de B n'est pas multiple de $T-1$; il s'ensuit que $(u, -1)$ n'appartient pas à l'image de i_B. En conséquence, la flèche $(B \oplus B)/i_B(B) \to B$ n'est pas injective.

L'exactitude à droite du produit tensoriel assure que

$$B \xrightarrow{i_B} B \oplus B \xrightarrow{q_B} \mathfrak{m} \otimes_A B \longrightarrow 0$$

est exacte. Ainsi, $\mathfrak{m} \otimes_A B \simeq (B \oplus B)/i_B(B)$. Par ce qu'on vient de voir, la flèche naturelle $\mathfrak{m} \otimes_A B \to B$, déduite de l'injection $\mathfrak{m} \hookrightarrow A$, n'est pas injective. On en déduit que B n'est pas plat sur A.

3) 3a) On sait d'après le cours que $\overline{\{\xi\}} = \mathsf{V}(T^2-5)$ (parce que ce dernier polynôme est de contenu égal à 1). La structure de sous-schéma fermé correspondant à cette description est donnée par l'anneau $\mathbb{Z}[T]/(T^2-5)$ qui est intègre, et en particulier réduit, car T^2-5 est irréductible dans $\mathbb{Z}[T]$ (parce qu'il est de contenu 1 et est irréductible dans $\mathbb{Q}[T]$, par exemple parce qu'il est de degré 2 et sans racine dans $\mathbb{Q}$). Cette structure est donc la structure réduite sur $\overline{\{\xi\}}$; autrement dit, l'anneau des fonctions de Z est $\mathbb{Z}[T]/(T^2-5)$.

3b) La fibre Z_p de Z en x_p est le $\mathbb{F}_p$-schéma $\operatorname{Spec} \mathbb{F}_p[T]/(T^2-5)$. L'anneau $\mathbb{F}_p[T]/(T^2-5)$ est non nul (c'est un $\mathbb{F}_p$-ev de dimension 2), ce qui implique que $Z_p \neq \emptyset$.

On distingue maintenant différents cas.

• Si $p = 2$ alors $Z_2 = \operatorname{Spec} \mathbb{F}_2[T]/(T^2-1) = \mathbb{F}_2[T]/(T-1)^2$; elle n'est donc pas réduite. Ensemblistement, elle est définie par les conditions $2 = 0$ et $T^2 - 5 = 0$, soit encore $2 = 0$ et $T - 1 = 0$ (puisque $T^2 = 5 \iff T = 1$ en caractéristique 2). Elle est donc égale au singleton $\{x\}$.

• Si $p = 5$ alors $Z_5 = \operatorname{Spec} \mathbb{F}_5[T]/T^2$. Elle n'est pas réduite et consiste en un point (puisque $\mathbb{F}_5[T]/T^2$ a un seul idéal premier, à savoir T) ; ensemblistement, ce point est décrit par les équations $5 = 0$ et $T = 0$. Son corps résiduel est $\mathbb{F}_5$.

• Si $p \neq 2, p \neq 5$ et si 5 n'est pas un carré modulo p alors $T^2 - 5$ est irréductible dans $\mathbb{F}_p[T]$, et le quotient $\mathbb{F}_p[T]/(T^2-5)$ est dès lors un corps (de cardinal p^2). La fibre Z_p est ainsi un singleton ; elle est réduite, et le corps résiduel de son unique point est de cardinal p^2.

• Si $p \neq 2, p \neq 5$ et si 5 est un carré modulo p alors T^2-5 s'écrit $(T-a)(T-b)$ dans $\mathbb{F}_p[T]$ avec $a \neq b$. Le quotient

$$\mathbb{F}_p[T]/(T^2-5) = \mathbb{F}_p[T]/(T-a)(T-b) \simeq \mathbb{F}_p[T]/(T-a) \times \mathbb{F}_p[T]/(T-b) \simeq \mathbb{F}_p \times \mathbb{F}_p$$

est réduit. Il a deux idéaux premiers, à savoir $(T-a)$ et $(T-b)$, et les corps quotients correspondants sont tous deux isomorphes à $\mathbb{F}_p$. Ainsi, Z_p est réduite ; elle possède deux points, tous deux de corps résiduel $\mathbb{F}_p$.

3c) Le fermé Z' s'identifie à Proj C, où

$$C = \mathbb{Z}[T][U,V]/(T^2-5, (T-1)U - 2V).$$

On a dans C l'égalité $(T-1)U = 2V$. En l'élevant au carré, on obtient

$$(T-1)^2U^2 = 4V^2,$$

soit encore

$$(T^2 - 2T + 1)U^2 = 4V^2.$$

Comme $T^2 = 5$ dans C il vient

$$(6-2T)U^2 = 4V^2,$$

puis

$$2(3-T)U^2 = 4V^2$$

et finalement

$$2(2-(T-1))U^2 = 4V^2.$$

En multipliant par U de part et d'autre on obtient

$$2(2U - (T-1)U)U^2 = 4UV^2,$$

ce que l'on récrit

$$2(2U-2V)U^2 = 4UV^2,$$

ou encore

$$4U(V^2 + UV - U^2) = 0,$$

ce qu'on souhaitait établir.

On peut donc écrire Z' (ensemblistement) comme la réunion de $Z' \cap \mathsf{V}(2)$, de $Z' \cap \mathsf{V}(U)$, et de $Z' \cap \mathsf{V}(V^2+UV-U^2)$. Nous allons étudier chacun de ces termes.

• Le fermé $Z' \cap \mathsf{V}(2)$ de Y est son fermé d'équations $2 = 0$ et $T^2 = 5$ soit encore $2 = 0$ et $T = 1$ (car $T^2 = 5 \iff T = 1$ dans tout corps de caractéristique 2) ; c'est donc $\pi^{-1}(x)$.

• Le fermé $Z' \cap \mathsf{V}(U)$ de Y est son fermé d'équations $U = 0$ et $T^2 = 5$. Comme on a $(T-1)U - 2V = 0$ sur Y, on a $2V = 0$ sur $Z' \cap \mathsf{V}(U)$; et comme U et V ne peuvent s'annuler simultanément sur Y, on a finalement $2 = 0$ en tout point de $Z' \cap \mathsf{V}(U)$; ainsi, $Z' \cap \mathsf{V}(U) \subset Z' \cap \mathsf{V}(2) = \pi^{-1}(x)$.

• Le fermé $Z' \cap \mathsf{V}(V^2 + UV - U^2)$. Nous allons tout d'abord montrer qu'il coïncide avec le fermé $\mathsf{V}(V^2 + UV - U^2)$ de Y ; il suffit de s'assurer qu'on a bien l'inclusion $\mathsf{V}(V^2 + UV - U^2) \subset Z'$.

Soit donc y un point en lequel $V^2 + UV - U^2$ s'annule. Comme V et U ne peuvent s'annuler simultanément en y, on a $U(y) \neq 0$; si l'on pose $v = V/U$, on obtient une fonction bien définie au voisinage de y et telle que $v(y)^2 + v(y) - 1 = 0$. On a par ailleurs, l'égalité $(T - 1)U = 2V$. On a donc $2v(y) = (T(y) - 1)$.

Supposons que 2 ne s'annule pas en y. On a alors

$$(T(y) - 1)^2/4 + (T(y) - 1)/2 - 1 = 0,$$

ce qui après développement conduit à l'égalité $T(y)^2 - 5 = 0$.

Supposons que 2 s'annule en y. On a alors dans ce cas $T(y) = 1$, d'où l'égalité $T(y)^2 - 5 = T(y)^2 - 1 = 0$.

Ainsi y appartient dans tous les cas à $\mathsf{V}(T^2 - 5) = Z'$.

Soit Z'' le fermé $\mathsf{V}(V^2 + UV - V^2)$ de Y. Il reste à s'assurer qu'il est irréductible. On a vu ci-dessus que $Z'' \subset D(U)$. En notant v la fonction V/U, l'ouvert affine $D(U)$ de Y a pour anneau de fonctions $\mathbb{Z}[T, v]/((T-1)-2v) \simeq \mathbb{Z}[v]$ (envoyer T sur $1 + 2v$) ; le fermé $Z'' = Z'' \cap D(U)$ de $D(U)$ s'identifie alors à $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[v]/(v^2 + v - 1)$. Comme $v^2 + v - 1$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[v]$ (il est de contenu 1, de degré 2 et sans racine rationnelle), on voit que Z'' est irréductible.

3d) L'anneau intègre $\mathbb{Z}[v]/(v^2 + v - 1)$ est en particulier réduit. L'homéomorphisme $Z'' \simeq \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[v]/(v^2 + v - 1)$ mentionné ci-dessus induit donc la structure réduite sur Z''.

Le morphisme naturel $Z'' \to Z'$ est induit d'après les calculs précédents par le morphisme d'anneaux $\mathbb{Z}[T]/(T^2-5) \to \mathbb{Z}[v]/(v^2+v-1)$ qui envoie T sur $1+2v$. Comme $\mathbb{Z}[v]/(v^2 + v - 1)$ est fini sur $\mathbb{Z}$, il l'est *a fortiori* sur $\mathbb{Z}[T]/(T^2 - 5)$, et $Z'' \to Z'$ est donc un morphisme fini.

Comme x est l'unique antécédent de x_2 sur Z (question 3b), l'ouvert $Z \setminus \{x\}$ de Z n'est autre que $D(2)$, et $\varphi^{-1}(Z \setminus \{x\}) \to Z \setminus \{x\}$ est donc induit par le morphisme d'anneaux $\mathbb{Z}[1/2][T]/(T^2 - 5) \to \mathbb{Z}[1/2][v]/(v^2 + v - 1)$ qui envoie T sur $1 + 2v$; mais ce morphisme est bijectif, sa réciproque étant donnée par la formule $v \mapsto (T-1)/2$. Ainsi, φ induit un isomorphisme $\varphi^{-1}(Z \setminus \{x\}) \simeq Z \setminus \{x\}$.

Comme x est le lieu d'annulation de 2 sur Z, la fibre $\varphi^{-1}(x)$ est précisément le lieu d'annulation de 2 sur Z'' ; c'est donc exactement l'intersection de Z'' avec $\mathsf{V}(2) \cap Z'$, c'est-à-dire avec $\pi^{-1}(x)$ (voir 3c).

Déterminons plus précisément la structure du schéma $\varphi^{-1}(x)$. Il s'identifie au spectre de $\mathbb{Z}[v]/(v^2 + v - 1) \otimes_{\mathbb{Z}[T]/(T^2-5)} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Ce dernier anneau est une $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-algèbre engendrée par un élément annulant le polynôme $v^2 + v - 1$. Comme celui-ci est irréductible, cette $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-algèbre est nécessairement un corps à quatre éléments.

Ainsi $\varphi^{-1}(x)$ est réduit et consiste en un point fermé, dont le corps résiduel a quatre éléments.

3e) L'anneau S des fonctions sur Z'' est un module fini sur l'anneau R des fonctions sur Z. Si le morphisme $Z'' \to Z$ était plat, le R-module de présentation finie S possèderait d'après ce qu'on a vu en cours la propriété suivante : *pour tout idéal premier* $\mathfrak{p}$ *de* R*, le module* $S_{\mathfrak{p}}$ *est libre de rang fini.* Appliquons ça à l'idéal maximal $\mathfrak{p}$ correspondant à x et soit r le rang correspondant.

Ce rang r est d'une part égal à la dimension du $\kappa(x)$-espace vectoriel

$$S \otimes_R \kappa(x) = S_{\mathfrak{p}} \otimes_{R_{\mathfrak{p}}} \kappa(x),$$

qui vaut 2 d'après le 3d) (le corps $\kappa(x)$ est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, et $S \otimes_R \kappa(x)$ est un corps à quatre éléments) ; il est d'autre part égal à la dimension du K-espace vectoriel $S \otimes_R K = S_{\mathfrak{p}} \otimes_{R_{\mathfrak{p}}} K$, où K est le corps des fractions de R. Mais $S \otimes_R K \simeq S_2 \otimes_{R_2} K \simeq K$, car $R_2 \simeq S_2$ d'après 3d). Ainsi $r = 1$, et on aboutit à une contradiction. En conséquence, $Z'' \to Z$ n'est pas plat.