Université Pierre-et-Marie Curie
Master de mathématiques fondamentales
Cours *Les outils de la géométrie algébrique*
Enseignant : Antoine Ducros
Corrigé de l'examen terminal du 23 octobre 2013

Exercice 1. Soit $\pi : \mathscr{F} \to \widehat{\mathscr{F}}$ le morphisme canonique.

Supposons que π injectif. Soit U un ouvert de X, soit (U_i) un recouvrement ouvert de U et soient s et s' deux sections de $\mathscr{F}$ sur U telles que $s|_{U_i} = s'|_{U_i}$ pour tout i. On a alors $\pi(s)|_{U_i} = \pi(s')|_{U_i}$ pour tout i ; comme $\widehat{\mathscr{F}}$ est un faisceau (et en particulier un préfaisceau séparé), il vient $\pi(s) = \pi(s')$, puis $s = s'$ par injectivité de π. Ainsi, $\mathscr{F}$ est séparé.

Supposons $\mathscr{F}$ séparé. Soient s et s' deux sections de $\mathscr{F}$ sur un ouvert U de X telles que $\pi(s) = \pi(s')$. D'après la construction explicite de π (*cf.* 3.2.10 dans le poly), cela signifie que $s_x = s'_x$ pour tout $x \in U$. Par définition des germes, il existe pour tout $x \in U$ un voisinage ouvert V_x de x dans U tel que $s|_{V_x} = s'|_{V_x}$. Comme les V_x recouvrent U et comme $\mathscr{F}$ est séparé, $s = s'$. Ainsi, π est injective.

Exercice 2.
a) Soit C une des quatre catégories concernées, et soit $\varphi : Y \to X$ une flèche de C.

a) Supposons φ injective, soit Z un objet de C et soient ψ et ψ' deux morphismes de Z dans Y tels que $\varphi \circ \psi = \varphi \circ \psi'$. On a pour tout $z \in Z$ les égalités $\varphi(\psi(z)) = \varphi(\psi'(z))$, et donc $\psi(z) = \psi(z')$ par injectivité de φ. Ainsi $\psi = \psi'$ et φ est un monomorphisme.

b) Supposons φ surjective, soit Z un objet de C et soient ψ et ψ' deux morphismes de X dans Z tels que $\psi \circ \varphi = \psi' \circ \varphi$. Soit $z \in Z$ Par surjectivité de φ il existe $x \in X$ tel que $z = \varphi(x)$. Il vient $\psi(z) = \psi(\varphi(x)) = \psi'(\varphi(x)) = \psi'(x)$. Ainsi $\psi = \psi'$ et φ est un épimorphisme.

c) Soit C une des quatre catégories concernées, soit $\varphi : Y \to X$ un monomorphisme de φ et soient y et y' deux éléments de Y tels que $\varphi(y) = \varphi(y')$.

• Supposons que $\mathsf{C} = \mathsf{Ens}$. Notons ψ l'application de $\{*\}$ dans Y qui envoie $*$ sur y, et ψ' celle qui envoie $*$ sur y'. Les composées $\varphi \circ \psi$ et $\varphi \circ \psi'$ envoyant toutes deux $*$ sur $\varphi(y) = \varphi(y')$, elles coïncident ; puisque φ est un monomorphisme, il vient $\psi = \psi'$ et donc $y = y'$. Ainsi, φ est injective.

• Supposons que $\mathsf{C} = A\text{-}\mathsf{Mod}$. Notons ψ l'unique application A-linéaire de A dans Y qui envoie 1 sur y, et ψ' celle qui envoie 1 sur y'. Les composées $\varphi \circ \psi$ et $\varphi \circ \psi'$ envoyant toutes deux 1 sur $\varphi(y) = \varphi(y')$, elles coïncident ; puisque φ est un monomorphisme, il vient $\psi = \psi'$ et donc $y = y'$. Ainsi, φ est injective.

• Supposons que $\mathsf{C} = \mathsf{Gp}$. Notons ψ l'unique morphisme de groupes de $\mathbb{Z}$ dans Y qui envoie 1 sur y, et ψ' celui qui envoie 1 sur y'. Les composées $\varphi \circ \psi$ et $\varphi \circ \psi'$ envoyant toutes deux 1 sur $\varphi(y) = \varphi(y')$, elles coïncident ; puisque φ est un monomorphisme, il vient $\psi = \psi'$ et donc $y = y'$. Ainsi, φ est injective.

• Supposons que $\mathsf{C} = \mathsf{Ann}$. Notons ψ l'unique morphisme d'anneaux de $\mathbb{Z}[T]$ dans Y qui envoie T sur y, et ψ' celui qui envoie T sur y'. Les composées $\varphi \circ \psi$ et $\varphi \circ \psi'$ envoyant toutes deux T sur $\varphi(y) = \varphi(y')$, elles coïncident ; puisque φ est un monomorphisme, il vient $\psi = \psi'$ et donc $y = y'$. Ainsi, φ est injective.

d) Soit C une des trois catégories concernées, et soit $\varphi : Y \to X$ un épimorphisme de C.

• Supposons que $\mathsf{C} = \mathsf{Ens}$. Notons ψ l'application de X dans $\{0, 1\}$ qui envoie un élément ξ sur 0 s'il appartient à Im φ et sur 1 sinon, et ψ' celle qui envoie tout le monde sur 0. Les composées $\varphi \circ \psi$ et $\varphi \circ \psi'$ coïncident par construction (elles envoient toutes deux tout élément de Y sur 0). Puisque φ est un monomorphisme, il vient $\psi = \psi'$. On a donc $\psi(x) = 0$ pour tout $x \in X$, ce qui veut dire que tout $x \in X$ appartient à Im φ. Ainsi, φ est surjective.

• Supposons que $\mathsf{C} = A\text{-}\mathsf{Mod}$. Notons ψ le morphisme quotient $X \to X/\mathrm{Im}\ \varphi$, et ψ' l'application nulle de X vers $X/\mathrm{Im}\ \varphi$. Les composées $\varphi \circ \psi$ et $\varphi \circ \psi'$ coïncident par construction (elles envoient toutes deux tout élément de Y sur 0). Puisque φ est un monomorphisme, il vient $\psi = \psi'$. On a donc $\psi(x) = 0$ pour tout $x \in X$, ce qui veut dire que tout $x \in X$ appartient à Im φ. Ainsi, φ est surjective.

• Supposons que $\mathsf{C} = \mathsf{Gp}$. Notons ψ et ψ' les deux morphismes canoniques de X vers $X *_{\mathrm{Im}\ \varphi} X$ (*cf.* 1.7.4.3 dans le poly) Les composées $\varphi \circ \psi$ et $\varphi \circ \psi'$ coïncident par construction. Puisque φ est un monomorphisme, il vient $\psi = \psi'$. D'après la description explicite de $X *_{\mathrm{Im}\ \varphi} X$, ceci entraîne que Im $\varphi = X$. Ainsi, φ est surjective.

e) Soit A un anneau, et soit S une partie multiplicative de A ; soit $\varphi : A \to S^{-1}A$ la flèche canonique. Pour tout anneau B, l'application $\psi \mapsto \psi \circ \varphi$ établit une bijection entre $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Ann}}(S^{-1}A, B)$ et le sous-ensemble de $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Ann}}(A, B)$ formé des morphismes qui rendent tout élément de S inversible. En particulier, $\psi \mapsto \psi \circ \varphi$ est injective, ce qui veut dire que φ est un épimorphisme.

Il n'y a plus alors qu'à trouver un couple (A, S) comme ci-dessus tel que $A \to S^{-1}A$ ne soit pas surjective. On peut par exemple prendre $A = \mathbb{Z}$ et $S = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$: la flèche canonique $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ n'est pas surjective.

f) Soit $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ un morphisme de faisceaux sur X. Pour tout $x \in X$ on notera $\varphi_x : \mathscr{F}_x \to \mathscr{G}_x$ l'application induite par φ.

Supposons φ injectif, ce qui veut dire que φ_x est injectif pour tout x. Soient ψ et ψ' deux morphismes d'un faisceau $\mathscr{H}$ vers $\mathscr{F}$ tels que $\varphi \circ \psi = \varphi \circ \psi'$. On a alors $\varphi_x \circ \psi_x = \varphi_x \circ \psi'_x$ pour tout x. Comme φ_x est injectif, c'est d'après a) un monomorphisme d'ensembles ; en conséquence, $\psi_x = \psi'_x$. Ceci valant pour tout x, il vient $\psi = \psi'$ et φ est un monomorphisme.

g) Supposons φ surjectif, ce qui veut dire que φ_x est surjectif pour tout x. Soient ψ et ψ' deux morphismes de $\mathscr{G}$ vers un faisceau $\mathscr{H}$ tels que $\psi \circ \varphi = \psi' \circ \varphi$. On a alors $\psi_x \circ \varphi_x = \psi'_x \circ \varphi_x$ pour tout x. Comme φ_x est surjectif, c'est d'après a) un épimorphisme d'ensembles ; en conséquence, $\psi_x = \psi'_x$. Ceci valant pour tout x, il vient $\psi = \psi'$ et φ est un épimorphisme.

h) Supposons que φ est un monomorphisme. Soit U un ouvert de X et soient s et s' deux sections de $\mathscr{F}$ sur U telles que $\varphi(s) = \varphi(s')$. Soit $\mathscr{H}$ le préfaisceau sur X qui envoie un ouvert V sur $\{*\}$ si $V \subset U$, et sur $\varnothing$ sinon. Soit ψ et ψ les morphismes de préfaisceau de $\mathscr{H}$ vers $\mathscr{F}$ définis respectivement par les formules $* \mapsto s|_V$ et $* \mapsto s'|_V$ sur tout ouvert V contenu dans U (sur un ouvert V non contenu dans U, ils sont forcément tous deux égaux à l'application canonique de $\varnothing$ vers $\mathscr{F}(V)$). Ils induisent deux morphismes $\hat{\psi}$ et $\hat{\psi}'$ de $\widehat{\mathscr{H}}$ vers $\mathscr{F}$. Par construction, les composées $\varphi \circ \psi$ et $\varphi \circ \psi'$ coïncident ; il s'ensuit, par la propriété universelle du faisceau associé, que $\varphi \circ \hat{\psi} = \varphi \circ \hat{\psi}'$. Puisque φ

est un monomorphisme, $\hat{\psi} = \hat{\psi}'$, ce qui implique que $\psi = \psi'$ (là encore, par la propriété universelle du faisceau associé), et donc que $s = s'$.

i) Supposons que φ est un épimorphisme. Soit $x \in X$, soit i l'inclusion de $\{x\}$ dans X et soit $\mathscr{H}$ le faisceau $i_*\underline{\{0,1\}}$ sur X (il envoie un ouvert U sur $\{0\}$ si $x \notin U$, et sur $\{0,1\}$ sinon). Soient ψ et ψ' les morphismes de $\mathscr{G}$ dans $\mathscr{H}$ définis comme suit : si U est un ouvert de X contenant x et si $s \in \mathscr{F}(U)$ alors $\psi(s) = 0$ si $s_x \in \text{Im } \varphi_x$ et $\psi(s) = 1$ sinon, et $\psi'(s) = 0$; si U est un ouvert de X ne contenant pas x et si $s \in \mathscr{F}(U)$ alors $\psi(s) = 0$ et $\psi'(s) = 0$. On a par construction $\psi \circ \varphi = \psi' \circ \varphi$ (les deux envoient toute section s sur 0). Puisque φ est un épimorphisme, $\psi = \psi'$; par définition ceci implique que $\text{Im } \varphi_x = \mathscr{G}_x$ (sinon, il existerait une section de $\mathscr{G}$ sur un voisinage ouvert convenable de x s'envoyant sur 1 par ψ et sur 0 par ψ'). Ainsi, φ_x est surjectif. Ceci valant pour tout x, le morphisme φ est surjectif (au sens des faisceaux).

Exercice 3.

a) Il est clair qu'un corps est artinien, puisqu'il n'a que deux idéaux. Réciproquement, soit A un anneau intègre artinien, et soit a un élément non nul de A. L'ensemble d'idéaux $\{(a^n)\}_n$ admet un plus petit élément, ce qui veut dire que la suite décroissante d'idéaux $((a^n))_n$ est stationnaire. Il existe donc un entier N tel que $(a^N) = (a^{N+1})$. En particulier, $a^N \in (a^{N+1})$ et on peut en conséquence écrire $a^N = ua^{N+1}$ pour un certain $u \in A$. On a dès lors $a^N(1 - ua) = 0$. Comme A est intègre et a non nul, il vient $ua = 1$ et a est inversible. Ainsi, A est un corps.

b) L'injection de M' dans M permet de voir M' comme un sous-module de M.

Supposons M noethérien (resp. artinien). Comme tout sous-module de M' est un sous-module de M, il est clair que M' est noethérien (resp. artinien). Par ailleurs, $L \mapsto L/M'$ établit une bijection d'ensembles ordonnés entre l'ensemble des sous-modules de M contenant M' et celui des sous-module de $M'' = M/M'$; le caractère noethérien (resp. artinien) de M'' en découle aussitôt.

Réciproquement, supposons M' et M'' noethériens (resp. artiniens), et soit E un ensemble non vide de sous-modules de M. Soit F l'ensemble des sous-modules de M'' de la forme $\pi(L)$ avec $L \in E$, où π est la flèche $M \to M''$. L'ensemble F est non vide, il admet donc un élément maximal (resp. minimal) Λ. Soit E' l'ensemble des $L \cap M'$ où L appartient à E et vérifie $\pi(L) = \Lambda$; cet ensemble étant non vide, il admet un élément maximal (resp. minimal) λ. Soit $L \in E$ tel que $\pi(L) = \Lambda$ et $L \cap M' = \lambda$; nous allons montrer qu'il est maximal (resp. minimal).

Soit $L_0 \in E$ un module contenant L (resp. contenu dans L) ; nous allons montrer que $L_0 = L$. On a $\pi(L_0) \supset \Lambda$ (resp. $\pi(L_0) \subset \Lambda$) ce qui implique $\pi(L_0) = \Lambda$ par choix de Λ.

On a $L_0 \cap M' \supset \lambda$ (resp. $L_0 \cap M' \subset \lambda$) et donc $L_0 \cap M' = \lambda$ par choix de λ.

Il suffit maintenant de s'assurer que si R est un sous-module de M et S un sous-module de R tel que $\pi(S) = \pi(R)$ et $S \cap M' = R \cap M'$ alors $R = S$. Donnons-nous donc R et S satisfaisant ces hypothèses, et soit $r \in R$. On a $\pi(r) \in \pi(R) = \pi(S)$; il existe donc $s \in S$ tel que $\pi(r) = \pi(s)$, ce qui signifie que $r - s \in R \cap M' = S \cap M'$. Ainsi, $r - s \in S$ et $r \in S$, ce qui achève la preuve.

c) Si M est un k-espace vectoriel de dimension finie et si E est un ensemble non vide de sous-espaces vectoriels de M, tout élément de E de dimension maximale (resp. minimale) est maximal (resp. minimal), et M est à la fois noethérien et artinien.

Supposons M de dimension infinie. Il possède alors une famille libre dénombrable $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

L'ensemble des sous-espaces vectoriels de M de la forme Vect $(e_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ (pour n variable) n'admet pas d'élément maximal ; l'ensemble des sous-espaces vectoriels de M de la forme Vect $(e_i)_{n\leqslant i}$ (pour n variable) n'admet pas d'élément minimal ; ainsi, M n'est ni noethérien ni artinien.

d) On a pour tout i compris entre 1 et r une suite exacte

$$0 \to \mathfrak{m}_1 \dots \mathfrak{m}_i \hookrightarrow \mathfrak{m}_1 \dots \mathfrak{m}_{i-1} \to \mathfrak{m}_1 \dots \mathfrak{m}_{i-1}/\mathfrak{m}_1 \dots \mathfrak{m}_i \to 0 \ ;$$

lorsque $i = 1$ on trouve simplement la suite $0 \to \mathfrak{m}_1 \to A \to A/\mathfrak{m}_1 \to 0$. Compte-tenu du fait que $\mathfrak{m}_1 \dots \mathfrak{m}_r = \{0\}$ (qui est évidemment noethérien et artinien) une application répétée de la question b) assure que A est noethérien (resp. artinien) si et seulement si $\mathfrak{m}_1 \dots \mathfrak{m}_{i-1}/\mathfrak{m}_1 \dots \mathfrak{m}_i$ est noethérien (resp. artinien) pour tout i.

Fixons i. Le A-module $\mathfrak{m}_1 \dots \mathfrak{m}_{i-1}/\mathfrak{m}_1 \dots \mathfrak{m}_i$ étant annulé par $\mathfrak{m}_i$, c'est un $A/\mathfrak{m}_i$-espace vectoriel, et ses sous-modules sont ses sous-espaces vectoriels. Il résulte alors de c) que $\mathfrak{m}_1 \dots \mathfrak{m}_{i-1}/\mathfrak{m}_1 \dots \mathfrak{m}_i$ est noethérien si et seulement si il est artinien, ce qui achève la démonstration.

Exercice 4.

a) Supposons que F soit non vide. Il admet alors un élément maximal I. Par définition de F, l'idéal I n'est pas premier, ni égal à A (il contiendrait sinon le produit vide d'idéaux premiers). En conséquence, il existe deux éléments a et b de A n'appartenant pas à I tels que $ab \in I$. Comme $a \notin I$, l'idéal $I+(a)$ contient strictement I, et contient donc par maximalité de I un produit fini $\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_r$ d'idéaux premiers. De même, $I + (b)$ contient un produit fini $\mathfrak{q}_1 \dots \mathfrak{q}_s$ d'idéaux premiers. Le produit $(I+(q))(I+(b))$ contient alors $\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_r\mathfrak{q}_1 \dots \mathfrak{q}_s$, mais il est par ailleurs contenu dans I puisque $ab \in I$; ainsi, $I \supset \mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_r\mathfrak{q}_1 \dots \mathfrak{q}_s$, ce qui contredit son appartenance à F.

b) En particulier, l'idéal nul contient un produit $\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_r$ d'idéaux premiers. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de A ; il contient $\{0\}$ et donc $\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_r$. Il contient alors l'un des $\mathfrak{p}_i$: dans le cas contraire, il existerait pour tout i un élément de $\mathfrak{p}_i$ n'appartenant pas à $\mathfrak{p}$, et $\prod x_i$ n'appartiendrait pas à l'idéal premier $\mathfrak{p}$, ce qui est absurde.

La démonstration est pratiquement terminée : soit E' l'ensemble des $\mathfrak{p}_i$ et soit E l'ensemble des idéaux premiers appartenant à E' et minimaux pour l'inclusion. Les idéaux premiers appartenant à E sont alors deux à deux non comparables pour l'inclusion, et comme tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A contient un idéal appartenant à E', il en contient un appartenant à E (prendre un idéal appartenant à E', contenu dans $\mathfrak{p}$, et minimal parmi ceux possédant ces deux propriétés).

Exercice 5.

a) Par hypothèse, tout idéal premier de A est maximal. C'est en particulier le cas des idéaux premiers minimaux $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_r$ de A dont l'existence est assurée par l'exercice 4. Comme tout idéal premier de A contient l'un des $\mathfrak{m}_i$, tout idéal premier de A est égal à l'un des $\mathfrak{m}_i$; les $\mathfrak{m}_i$ sont ainsi exactement les idéaux premiers de A.

b) Comme $\mathfrak{m}_1 \ldots \mathfrak{m}_r$ est contenu dans $\bigcap \mathfrak{m}_i$, donc dans l'intersection de tous les idéaux premiers de A, il est constitué d'éléments nilpotents. Par ailleurs A est noethérien, et $\mathfrak{m}_1 \ldots \mathfrak{m}_r$ possède donc une famille génératrice $(a_1, \ldots, a_s)$ finie. Soit n un entier tel que $a_i^n = 0$ pour tout i, et posons $N = sn+1$. Soit $f \in \mathfrak{m}_1 \ldots \mathfrak{m}_r$; on peut écrire $f = \sum \lambda_i a_i$ avec les λ_i dans A. Lorsqu'on calcule f^N, on obtient une somme de termes de la forme $\lambda \prod a_i^{n_i}$ avec $\sum n_i = N = sn + 1$; en conséquence, l'un au moins des n_i est $> n$, et le terme en question est ainsi nul. On a en conséquence $f^N = 0$, et partant $(\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2 \ldots \mathfrak{m}_r)^N = 0$.

c) L'anneau A est noethérien et satisfait d'après ce qu'on vient de voir les hypothèses de la question d) de l'exercice 3. Il est donc artinien.

Exercice 6.

a) Comme A est artinien, le A-module $A/\mathfrak{p}$ l'est aussi d'après l'exercice 3, question b). Mais les sous-modules de $A/\mathfrak{p}$ sont ses sous-$A/\mathfrak{p}$-modules (ou encore ses idéaux), et $A/\mathfrak{p}$ est donc un anneau artinien. D'après la question a) de l'exercice 3, c'est un corps et $\mathfrak{p}$ est maximal.

b) On a $\mathfrak{m}_1\mathfrak{m}_2 \ldots \mathfrak{m}_r \subset \mathfrak{m}_1 \ldots \mathfrak{m}_{r-1}$. Si l'inclusion n'était pas stricte on aurait égalité, et en particulier $\mathfrak{m}_1 \ldots \mathfrak{m}_{r-1} \subset \mathfrak{m}_r$. Mais comme les $\mathfrak{m}_i$ sont deux à deux distincts, il existe pour tout $i < r$ un élément x_i de $\mathfrak{m}_i$ qui n'appartient pas à $\mathfrak{m}_r$, et le produit des x_i n'appartient pas on plus à $\mathfrak{m}_r$ (celui-ci étant un idéal premier), ce qui est absurde.

S'il existait une suite infinie $(\mathfrak{m}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ d'idéaux maximaux de A, la suite $(\mathfrak{m}_1 \ldots \mathfrak{m}_r)_r$ serait d'après ce qui précède une suite strictement décroissante d'idéaux de A, et $\{\mathfrak{m}_1 \ldots \mathfrak{m}_r\}_r$ ne possèderait pas d'élément minimal, contredisant le caractère artinien de A.

c) La suite $((\mathfrak{m}_1 \ldots \mathfrak{m}_n)^N)_N$ est décroissante ; si elle était strictement décroissante, on aboutirait comme ci-dessus à une contradiction avec le caractère artinien de A. En conséquence, il existe N tel que $(\mathfrak{m}_1 \ldots \mathfrak{m}_n)^N = (\mathfrak{m}_1 \ldots \mathfrak{m}_n)^{N+1}$. Par une récurrence immédiate, on a $(\mathfrak{m}_1 \ldots \mathfrak{m}_r)^{N+p} = (\mathfrak{m}_1 \ldots \mathfrak{m}_r)^N$ pour tout $p \geqslant 0$. En faisant $p = N$, on voit que $P^2 = P$.

d) Si $P \neq \{0\}$ alors comme $P^2 = P$ l'ensemble des idéaux J de A contenus dans P tels que $JP \neq \{0\}$ est non vide ; il admet donc un élément minimal I. Comme $IP \neq \{0\}$ il existe $a \in I$ et $p \in P$ tel que $ap \neq 0$; en conséquence, $(a)P \neq \{0\}$ et $I = (a)$ par minimalité.

On a $(IP)P = IP^2 = IP \neq \{0\}$, et $IP \subset I$. Par minimalité de I, on a $IP = I$.

Le A-module I est de type fini (il est même monogène) et annulé par P. Le lemme de Nakayama assure qu'il existe $p \in P$ tel que $(1+p)I = 0$. L'idéal P est contenu dans tous les idéaux maximaux de A ; en conséquence, $1+p$ n'appartient à aucun idéal maximal de A. Il est de ce fait inversible, ce qui implique que $I = \{0\}$ et contredit le fait que $IP \neq \{0\}$.

On a donc prouvé par l'absurde que $(\mathfrak{m}_1 \ldots \mathfrak{m}_n)^N = P = \{0\}$.

e) L'anneau A est artinien et satisfait d'après ce qu'on vient de voir les hypothèses de la question d) de l'exercice 3. Il est donc noethérien.