Université Paris 6
Année universitaire 2012-2013
Cours *Les outils de la géométrie algébrique* (Master 2).
Algèbre commutative, étude des modules projectifs.

On fixe un anneau commutatif unitaire A.

1) Soit M un A-module. Montrez que les assertions suivantes sont équivalentes.

   i) Pour tout morphisme surjectif $f : P \to N$ entre A-modules et tout morphisme $g : M \to N$, il existe un morphisme $s : M \to P$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "s"'] \arrow[d, "g"] \\ P \arrow[r, "f"] & N \end{tikzcd}$$

   commute.

   ii) Il existe un A-module M' et un A-module *libre* L tel que $L \simeq M \oplus M'$.

   Lorsqu'elles sont satisfaites, on dit que M est *projectif.*

2) Soit M un A-module de type fini. Montrez qu'il suffit, pour qu'il soit projectif, que i) soit satisfaite en se limitant aux A-modules P de type fini. Si c'est le cas, montrez que le module L de la condition ii) peut être choisi de rang fini ; en déduire que M est de présentation finie.
3) Supposons A local d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ et soit M un A-module projectif de type fini. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille d'éléments de M telle que $(\overline{e_i})_i$ soit une base du $A/\mathfrak{m}$-espace vectoriel $(A/\mathfrak{m})\otimes_A M$. Soit f le morphisme de A^n vers M qui envoie (λ_i) sur $\sum \lambda_i e_i$. Montrez que f est un isomorphisme.
4) On ne suppose plus que A est local. Soient M et N deux A-modules et soit S une partie multiplicative de A. Montrez qu'il existe un morphisme naturel
$$S^{-1}\mathrm{Hom}_A(M, N) \to \mathrm{Hom}_{S^{-1}A}(S^{-1}M, S^{-1}N)$$
qui est un isomorphisme lorsque M et N sont de présentation finie. En déduire que s'il existe un idéal premier $\mathfrak{p}$ de A tel que les $A_{\mathfrak{p}}$-modules $M_{\mathfrak{p}}$ et $N_{\mathfrak{p}}$ soient isomorphes, il existe $f \in A \setminus \mathfrak{p}$ tel que les A_f-modules N_f et M_f soient isomorphes.
5) Soit $f : N \to M$ un morphisme de A-modules. Montrez que f est surjectif si et seulement si $f_{\mathfrak{p}} : N_{\mathfrak{p}} \to M_{\mathfrak{p}}$ est surjectif pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A.
6) Soit M un A-module de présentation finie. Montrez que les assertions suivantes sont équivalentes :

   i) le module M est projectif ;

   ii) il existe une famille finie (f_i) d'éléments de A telle que $\sum f_i = 1$ et, pour tout i, un entier n_i tel que le A_{f_i}-module M_{f_i} soit isomorphe à $A_{f_i}^{n_i}$.