Université Paris 6
Année universitaire 2009-2010
Cours de *Géométrie affine et euclidienne* (LM 323)
Examen terminal le 3 juin 2010 ; durée : 2 heures. Les documents et calculatrices sont interdits. *Barème indicatif sur 80 : ex. 1, 15 points ; ex. 2, 15 points ; ex. 3, 30 points ; ex. 4, 20 points.*

Exercice 1. Démonstration de cours. Soit k un corps, soit $\mathcal{E}$ un espace affine sur k et soit E son espace directeur. Soit f une application affine de $\mathcal{E}$ dans lui-même et soit $\overrightarrow{f}$ l'application linéaire associée. Montrez que si $\overrightarrow{f}-\mathrm{Id}$ est bijective, alors f a un et un seul point fixe.

Exercice 2. Soit f l'application affine de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ donnée par les formules

$$(x, y, z, t) \mapsto (x + y + 1, x + z - t + 2, x + 3y - 2z + 2t - 1).$$

Décrire l'image de f par une ou plusieurs équations cartésiennes (on notera (u, v, w) les coordonnées de l'espace d'arrivée $\mathbb{R}^3$).

Exercice 3. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension > 0 et soit E son espace directeur. On appelle *similitude* de E toute application linéaire de E dans E de la forme $h \circ u$ où h est une homothétie vectorielle et où u est une isométrie vectorielle.

i) Montrez que si s est une similitude de E il existe un unique couple (λ, u) où λ est un réel *strictement positif* et u une isométrie de E tel que $E = h_\lambda \circ u$, où h_λ est l'homothétie de rapport λ ; on dira que λ est le *rapport* de la similitude s, et que s est *directe* (resp. *indirecte*) si u est directe (resp. indirecte).

iii) Soit σ une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$ dont l'application linéaire associée s est une similitude de rapport différent de 1. Montrez que σ a un unique point fixe dans $\mathcal{E}$, que l'on appellera son *centre* .

iv) On suppose que $\mathcal{E}$ est un plan affine ; on fixe un repère $\mathcal{R} := (O, e_1, e_2)$ de $\mathcal{E}$ avec (e_1, e_2) orthonormée. Soit A le point de coordonnées $(1, 1)$ dans $\mathcal{R}$; soit D la droite d'équation $y = 1$ dans $\mathcal{R}$. On appelle f l'homothétie de centre A et de rapport -2, et g la réflexion glissée d'axe D et de vecteur $(3, 0)$. Donnez les formules qui décrivent f, g et $f \circ g$ dans $\mathcal{R}$.

Expliquez brièvement pourquoi l'application linéaire associée à $f \circ g$ est une similitude dont le rapport est un réel différent de 1, que l'on déterminera ; est-elle directe ou indirecte ? Déterminez les coordonnées du centre de $f \circ g$ dans le repère $\mathcal{R}$.

v) On ne suppose plus que la dimension de E est 2. Soit s une application linéaire de E dans E. Si s est une similitude, montrez qu'elle préserve l'orthogonalité (c'est-à-dire que si u et v sont deux vecteurs orthogonaux de E alors $s(u)$ et $s(v)$ sont orthogonaux). Réciproquement, montrez que si s est une application linéaire bijective de E dans E préservant l'orthogonalité, alors s est une similitude. *Indication : on pourra commencer par montrer que si $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une BON de E alors $s(e_1), s(e_2), \ldots, s(e_n)$ ont tous même norme.*

Exercice 4. Traiter **au choix** l'un des deux exercices suivants.

Premier exercice. Soit $\mathcal{E}$ un plan affine réel et soit E son espace directeur. Soit (u, v) une base de E.

i) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ montrez qu'il existe au plus un produit scalaire $< \mid >$ sur E tel que $< u|u >=< v|v >= 1$ et $< u|v >= \lambda$.

ii) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe un produit scalaire comme ci-dessus ; montrez que $-1 < \lambda < 1$.

iii) Réciproquement, si $-1 < \lambda < 1$ montrez qu'il existe un produit scalaire comme ci-dessus ; *indication : le définir par la seule formule possible en coordonnées dans la base (u, v), et vérifier que l'on obtient ainsi effectivement un produit scalaire.*

iv) Soient a et b deux réels non nuls ; posons $w = au + bv$. Donnez une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour qu'il existe un produit scalaire sur E pour lequel u, v et w sont tous trois unitaires.

v) Soient A, B et C trois points affinement indépendants de $\mathcal{E}$ et soit O un point de $\mathcal{E}$ dont les coordonnées barycentriques α, β et γ dans le repère affine (ABC) sont toutes trois non nulles. Donnez une condition nécessaire sur α, β et γ pour qu'il existe un produit scalaire sur E relativement auquel O soit le centre du cercle circonscrit à (ABC) (c'est-à-dire encore l'intersection de ses médiatrices). Donnez un exemple explicite de triplet (α, β, γ) avec α, β et γ tous trois non nuls pour lequel *il n'existe pas* de produit scalaire sur E relativement auquel O soit le centre du cercle circonscrit à (ABC).

Second exercice. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien de dimension 3 et soient $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ trois droites affines deux à deux distinctes, concourantes mais non coplanaires de $\mathcal{E}$. Soit $\mathcal{P}$ le plan affine de $\mathcal{E}$ engendré par $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

i) Soit ρ une rotation de $\mathcal{E}$ différente de l'identité et soit Δ son axe. Soit M un point de $\mathcal{E}$ situé en dehors de Δ ; montrez que Δ est contenu dans le plan médiateur du segment $[M; \rho(M)]$.

ii) Soient P et Q deux points distincts de $\mathcal{E}$ et soit Δ une droite incluse dans le plan médiateur de $[PQ]$. Montrer qu'il existe une unique rotation ρ de $\mathcal{E}$ d'axe Δ telle que $\rho(P) = Q$.

iii) Montrer qu'il existe un unique triplet de rotations (ρ_1, ρ_2, ρ_3), d'axes respectifs $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$, toutes trois distinctes de Id, et telles que $\rho_3 = \rho_2 \circ \rho_1$.

iv) Lorsque $\mathcal{E} = \mathbb{R}^3$ et $\mathcal{D}_1 = \mathbb{R}(1, 0, 0)$, $\mathcal{D}_2 = \mathbb{R}(0, 1, 0)$ et $\mathcal{D}_3 = \mathbb{R}(0, 0, 1)$, déterminez explicitement (ρ_1, ρ_2, ρ_3). *Remarque : cette question peut être traitée indépendamment des trois précédentes.*