Université Pierre & Marie Curie
Master de Mathématiques
Professeur: J.F.Dat

Année 2010-2011
MM014 Théorie des groupes

A.Guilloux

Adresse mail de Antonin Guilloux : aguillou@math.jussieu.fr

Feuille 2

Groupes opérant sur un ensemble

Exercice 1 Soit G un groupe fini d'ordre n, p le plus petit facteur premier de n et H un sous-groupe de G d'indice p. Montrer que H est distingué dans G. On pourra étudier le noyau de l'action de G sur l'ensemble quotient G/H.

Exercice 2

1. Montrer que $\mathcal{S}_n$ contient tous les groupes d'ordre n.
2. Soit H un sous groupe d'indice n de $\mathcal{S}_n$. En faisant agir $\mathcal{S}_n$ sur $\mathcal{S}_n/H$, montrer que H est isomorphe à $\mathcal{S}_{n-1}$. On pourra distinguer le cas $n = 4$.

Groupes abéliens

Exercice 3 Classifier, à isomorphisme près, tous les groupes abéliens d'ordre 15 et 48.

Exercice 4 Trouver les facteurs invariants des groupes

a) $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^3 \times \mathbb{Z}/15\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/30\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/84\mathbb{Z}$,

b)$(\mathbb{Z}/55\mathbb{Z})^*$.

Exercice 5 Groupes d'ordre p^2

Soit p un nombre premier. Un p-groupe est un groupe fini dont l'ordre est une puissance de p.

1. Soit G un groupe tel que le quotient $G/Z(G)$ est cyclique. Montrer que G est commutatif.
2. En faisant agir un p-groupe G sur lui-même par conjugaison, montrer son centre n'est pas trivial.
3. En déduire que tout groupe d'ordre p^2 est commutatif.
4. Montrer que si G est un groupe d'ordre p^2, alors

$$G \simeq \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \qquad ou \qquad G \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}.$$

Produits semi-directs

Exercice 6

a) Montrer que

$$\mathcal{S}_n \simeq \mathcal{A}_n \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$
$$O_n(\mathbb{R}) \simeq SO_n(\mathbb{R}) \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$
$$D_n \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

b) Montrer que le groupe $H_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$, qui n'est pas simple, ne s'écrit pas comme produit semi-direct de sous-groupes non triviaux.

Exercice 7 Soient H et K deux groupes, et φ et φ' deux morphismes de groupes de K dans $Aut(H)$. Montrer que les groupes $H \rtimes_\varphi K$ et $H \rtimes_{\varphi'} K$ sont isomorphes dans les deux cas suivants :

1. il existe un automorphisme σ de K tel que $\varphi' = \varphi \circ \sigma$,
2. il existe un automorphisme σ de H tel que pour tout $k \in K$, $\varphi'(k) = \sigma \circ \varphi(k) \circ \sigma^{-1}$.

Exercice 8

a) Décrire les produits semi-directs $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

b) Décrire les produits semi-directs $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

c) Décrire les produits semi-directs $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, où p et q sont des nombres premiers impairs.

d) Décrire les produits semi-directs $\mathbb{Z}/15\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

e) Soit p un nombre premier impair. Construire un produit semi-direct non trivial $G = \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

f) Soit $V = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ le groupe de Klein. Montrer qu'il existe des produits semi-directs non triviaux $V \rtimes \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et qu'ils sont tous isomorphes.

g) Même question pour $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \rtimes V$.

Exercice 9 Soit p un nombre premier.

1. Montrer que pour tout $n \geq 2$, il existe un produit semi direct non trivial de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ par $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$.
2. Si $p \neq 2$, combien peut-on construire de produits semi directs non-isomorphes de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ par $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$?
3. Que peut on dire pour $p = 2$?

Groupes classiques

Exercice 10 Soit k un corps, et $n \geq 1$ un entier. On note $M_n(k)$ l'anneau des matrices carrées de dimension n à coefficients dans k, $GL_n(k)$ le groupe de ses éléments inversibles, $SL_n(k)$ le sous-groupe de $GL_n(k)$ formé des matrices de déterminant 1. Il existe une application naturelle de k dans $M_n(k)$. On note encore k son image, l'ensemble des matrices scalaires (matrices diagonales dont tous les éléments sont égaux). On note $PGL_n(k)$ le quotient de $GL_n(k)$ par k^* et $PSL_n(k)$ celui de $SL_n(k)$ par $SL_n(k) \cap k^*$.

a) Donner une formule pour le cardinal de chacun de ces groupes quand $k = \mathbb{F}_q$ est un corps fini de cardinal q.

Le groupe k^* agit naturellement sur $k^n \backslash \{0\}$. L'espace quotient de cette action est noté $P^n(k)$. Comme expliqué dans le cours, $PGL_n(k)$ et $PSL_n(k)$ agissent naturellement sur $P^{n-1}(k)$.

b) Donner une formule pour le cardinal de $P^n(\mathbb{F}_q)$. Montrer que l'on a des isomorphismes

$$GL_2(\mathbb{F}_2) \simeq_1 SL_2(\mathbb{F}_2) \simeq_2 PSL_2(\mathbb{F}_2) \simeq_3 PGL_2(\mathbb{F}_2) \simeq_4 \mathcal{S}_3,$$

$$PSL_2(\mathbb{F}_3) \simeq_5 \mathcal{A}_4,$$

$$PGL_2(\mathbb{F}_3) \simeq_6 \mathcal{S}_4,$$

$$SL_2(\mathbb{F}_4) \simeq_7 PSL_2(\mathbb{F}_4) \simeq_8 \mathcal{A}_5 \simeq_9 PSL_2(\mathbb{F}_5),$$

$$PGL_2(\mathbb{F}_5) \simeq_{10} \mathcal{S}_5.$$

On pourra considérer l'action de ces divers groupes sur la droite projective correspondante.

Exercice 11 Soient $n \geq 3$ un entier, et P_n un polygone régulier à n sommets dans $\mathbb{R}^2$ de centre $(0,0)$. Le groupe diédral D_n est le groupe des isométries préservant les sommets de P_n. On note $A_1, A_2, \ldots, A_n$ les sommets de P_n. Soit g un élément de D_n.

1. On suppose que $g(A_1) = A_1$. Que peut on dire de g ?
2. On suppose que $g(A_1) = A_k$, $k \neq 1$. Que peut on dire de g ?
3. Montrer que D_n est engendré par deux éléments, et que son cardinal est $2n$.