Université Pierre & Marie Curie
Master de Mathématiques
Professeur: J.F.Dat

Année 2010-2011
MM014 Théorie des groupes

A.Guilloux

Adresse mail de Antonin Guilloux : aguillou@math.jussieu.fr

Feuille 3

Groupes de transformations de polyèdres

Exercice 1 Montrer que le groupe des isométries du tétraèdre régulier est isomorphe à $\mathcal{S}_4$. Etudier l'action sur les doites reliant le milieu de deux arètes opposées et en déduire un morphisme surjectif du groupe du tétraèdre sur $\mathcal{S}_3$. Montrer que son noyau est le sous-groupe distingué non-trivial de $\mathcal{A}_4$.

Exercice 2 Montrer que le groupe des isométries *directes* du cube régulier est isomorphe à $\mathcal{S}_4$ en étudiant l'action sur l'ensemble des 4 grandes diagonales.

Théorèmes de Sylow

Exercice 3 Soient p et q deux nombres premiers distincts.

a) Déterminer à isomorphisme près tous les groupes d'ordre pq. On pourra supposer $p < q$, considérer un q-Sylow et montrer que le groupe est un produit semi-direct.

b) Montrer qu'un groupe d'ordre p^2q n'est jamais simple. On pourra montrer qu'il y a un seul p-Sylow ou un seul q-Sylow.

Exercice 4 Soit G un groupe d'ordre 30, P_3 un 3-Sylow et P_5 un 5-Sylow de G

a) Montrer que soit P_3 soit P_5 est distingué.

b) Montrer qu'en fait P_3 et P_5 sont distingués et que $N = P_3P_5$ est cyclique.

c) En utilisant l'exercice 14 de la feuille 1, montrer qu'il y a exactement quatre groupes d'ordre 30 non isomorphes deux à deux :

$$\mathbb{Z}/30\mathbb{Z} \quad D_{15} \quad \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times D_5 \quad \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times D_3$$

Exercice 5 Soit G un groupe d'ordre 255, et S_3, S_5, S_{17} un 3-Sylow (respectivement 5-Sylow, 17-Sylow) de G.

a) Montrer que S_{17} est normal dans G. On pose $H = S_5S_{17}$.

b) Montrer que H est un sous-groupe normal de G et que S_5 est normal dans H. En déduire que S_5 est normal dans G.

c) Montrer que G est cyclique.

Exercice 6 Le but de cet exercice est de montrer qu'il n'existe pas de groupe simple d'ordre 540. Soit donc G un groupe d'ordre 540, S_5 un 5-Sylow de G, et N_5 le normalisateur de S_5 dans G.

a) Montrer que le nombre n_5 de 5-Sylows de G est soit 1, soit a, soit b, où a et b sont des entiers ($a < b$) que l'on déterminera. Quel est l'indice de N_5 dans G ?

b) On suppose dans cette question $n_5 = a$. En considérant l'action de G sur G/N_5, définir un homomorphisme de de G dans $\mathcal{S}_a$. Montrer que G n'est pas simple.

c) On suppose désormais $n_5 = b$. Montrer que N_5 est cyclique. Montrer que deux éléments distincts de S_5 ne sont jamais conjugués.

d) Soient $\{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ un système de représentants dans G des éléments de G/S_5. Montrer que pour tout $g \in G$, il existe une permutation $\tau \in \mathcal{S}_k$ et des éléments $s_i \in S_5$ pour $1 \leq i \leq k$ tels que $gy_i = y_{\tau(i)}s_i$. On pose $\varphi(g) = \prod_{i=1}^{k} s_i$. Montrer que φ est un homomorphisme de G dans S_5.

e) Montrer que φ ne dépend pas du choix des y_i.

f) Pour tout $u \in S_5$ et tout $y \notin S_5$, montrer qu'il existe un entier $r \geq 1$ tel que $u^r y \in yS_5$ mais $u^j y \notin yS_5$ pour $j < r$. En utilisant cette propriété, construire un système de représentant de G/S_5 et montrer que $\varphi(u) = u^{108}$. En déduire que φ est surjectif.

g) Conclure.

Exercice 7 Soit p un nombre premier, $r \geq 0$ un entier, et G un groupe d'ordre $12p^r$. On va montrer que si G est simple, alors $p = 5$, $r = 1$ et $G \simeq \mathcal{A}_5$.
Dans tout l'exercice, pour p un nombre premier, on notera S_p un p-Sylow de G et n_p le nombre de p-Sylow de G. En particulier, on a $S_p \lhd G \Leftrightarrow n_p = 1$.

a) Le cas $r = 0$. Donner la liste des groupes de cardinal 12. On suppose désormais $r \geq 1$.

b) Le cas $p = 2$. Soit S_2 un 2-Sylow de G. Montrer que si S_2 n'est pas distingué, il existe un morphisme non trivial (c'est à dire dont le noyau n'est pas G tout entier) de G dans $\mathcal{S}_3$. Conclure.

c) Le cas $p = 3$. Montrer que si S_3 n'est pas distingué,il existe un morphisme non trivial de G dans $\mathcal{S}_4$. Conclure.

d) Le cas $p = 5$. Montrer que si G est simple, on a $r = 1$. Soit H le centralisateur d'un élément d'ordre 2. Montrer que H a 12 ou 4 éléments.
Si H a 12 éléments, montrer que G est isomorphe à un sous-groupe de $\mathcal{S}_5$ et conclure.
Si H a 4 éléments, montrer que les 2-Sylow de G sont "disjoints" deux à deux et que $n_2 = 15$ est impossible. Calculer n_5 dans ce cas et conclure.

e) Le cas $p = 11$. Montrer que si G est simple on a $r = 1$. Compter les éléments de chaque ordre et montrer que S_2 est normal.

f) Conclure dans le cas général.