Université Pierre & Marie Curie
Master de Mathématiques
Professeur: J.F.Dat

Année 2010-2011
MM014 Théorie des groupes

A.Guilloux

Adresse mail de Antonin Guilloux : aguillou@math.jussieu.fr

Feuille 3

Sous-groupes finis de SO(3)

Exercice 1 Toute rotation de $\mathbb{R}^3$ différente de l'identité admet un *axe* unique et cet axe traverse la sphère unité en deux points, appelés les *pôles* de la rotation. Soit G un sous-groupe fini de $SO_3(\mathbb{R})$ et n son ordre. On note X l'ensemble des pôles des éléments non triviaux de G.

a) Montrer que X est stable par G. On a donc une action de G sur X.

b) Montrer que pour tout P dans X, le stabilisateur de P dans G est un groupe cyclique d'ordre n_P, où n_P est un diviseur de n.

c) On note

$$Y = \{(g, P) \in G \times X; \quad g \neq Id \text{ et } g(P) = P\}.$$

Calculer de deux façons le cardinal de Y et en déduire une équation

$$2 - \frac{2}{n} = \sum_{i=1}^{h} (1 - \frac{1}{n_i})$$

où les $n_i \geq 2$ sont des diviseurs de n. Montrer que $h < 4$.

d) On suppose $h \leq 1$. Montrer que $G = \{Id\}$ (et $h = 0$).

e) On suppose $h = 2$. Montrer que $G \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

f) On suppose désormais $h = 3$ et que l'on a $2 \leq n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq n$. Montrer que l'on a $n_1 = 2$ et $n_2 = 2$ ou 3.

g) On suppose $n_2 = 2$. Montrer que $G \simeq D_{n/2}$ est un groupe diédral.

h) On suppose désormais $n_2 = 3$. Montrer que $n_3 = 3$ ou 4 ou 5 et que dans ces cas n vaut respectivement 12, 24 ou 60 .

0.1 Groupes résolubles, groupes nilpotents

Exercice 2 Déterminer tous les groupes simples résolubles.

Exercice 3 Pour quels n le groupe $\mathcal{S}_n$ est-il résoluble ? nilpotent ?

Exercice 4 Quels sont les groupes résolubles d'ordre < 60 ? Quels sont les groupes simples d'ordre < 60 ?