Université Pierre & Marie Curie
Master de Mathématiques
Professeur: J.F. Dat

Année 2010-2011
MM014 Théorie des groupes

A. Guilloux

Feuille 4
Corrigé

Sous-groupes finis de $SO(3)$

Solution 1

a) Si P est un pôle de la rotation non triviale $r \in G$ et si $g \in G$, alors $grg^{-1}(g(P)) = g(P)$, et $g(P)$ est un pôle de la rotation non triviale $grg^{-1} \in G$.

b) Les rotations qui admettent P pour pôle forment un groupe isomorphe au groupe $SO_2(\mathbb{R})$ des rotations du plan perpendiculaire à l'axe passant par P. Ce dernier groupe est isomorphe à $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et tous ses sous-groupes finis sont cycliques. L'intersection de ce groupe avec G a un ordre n_P qui est un diviseur de n. Par définition d'un pôle, on a $n_P > 1$.

c) Chacune des $n-1$ rotations non triviales de G a exactement 2 pôles, donc $|Y| = 2n-2$. D'autre part, si on fixe P, il y a $n_P - 1$ rotations non triviales qui l'admettent pour pôle. Mais l'orbite de P sous l'action de G a n/n_P éléments, donc si on regroupe les éléments de l'orbite de P, on trouve $(n/n_P)(n_P-1)$ couples en tout. En prenant un représentant dans chacune des h orbites, on trouve $|Y| = \sum_{i=1}^{h}(n/n_i)(n_i-1)$, ce qui, après division par n, donne la relation annoncée. Comme chacun des termes de la somme vaut au moins $1/2$ et le terme de gauche est < 2, on a $h < 4$.

d) Si $h = 0$, il n'y a pas de pôle et $G = \{e\}$. Si $h = 1$, le terme de gauche vaut au moins 1 et celui de droite est < 1, une contradiction.

e) L'équation devient $2/n = 1/n_1 + 1/n_2$ et $2 = d_1 + d_2$, où les $d_i = n/n_i$ sont des entiers naturels non nuls. On en déduit $d_1 = d_2 = 1$, $n_1 = n_2 = n$. Si P est un pôle de l'orbite 1, tous les éléments de G l'admettent pour pôle. On a vu au b) que cela entraînait que G est cyclique. Il y a en tout 2 pôles.

f) L'équation devient

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} - 1.$$

Si l'on avait $n_1 \geq 3$, le second membre serait ≤ 0, donc $n_1 = 2$ et

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} - \frac{1}{2}$$

ce qui implique de la même façon $n_2 < 4$.

g) Il vient $2/n = 1/n_3$. Si P est un pôle de la troisième orbite, son stabilisateur est un groupe H cyclique d'ordre $n/2$, l'orbite est formée de P et de $-P$ et les autres pôles sont dans le plan $\mathcal{P}$ orthogonal à l'axe passant par P. Chaque orbite forme un polygone régulier à $n/2$ sommets dans $\mathcal{P}$. Tous les éléments de G laissent stable le plan $\mathcal{P}$. Ils induisent n transformations orthogonales de ce plan laissant stable ces polygones. On retrouve la description de $D_{n/2}$ du cours.

h) Il vient $2/n = 1/n_3 - 1/6$, donc $n_3 < 6$. Comme on a déjà $n_3 \geq n_2 = 3$, le calcul est simple.

On peut montrer (assez facilement) que dans les deux premier cas G est isomorphe à $\mathcal{A}_4$ (respectivement $\mathcal{S}_4$) et est formé des rotations laissant fixe un tétraèdre régulier (respectivement un cube). On peut montrer (plus difficilement) que dans le troisième cas, $G \simeq \mathcal{A}_5$ et est formé des rotations laissant fixe un dodécaèdre régulier.

Groupes résolubles, groupes nilpotents

Solution 2 *Un groupe G est résoluble si il existe un entier n tel que $D^n(G) = \{1\}$, où $D^n(G)$ est le $n^{\text{ème}}$ groupe des commutateurs de G. Soit G un groupe simple. Le groupe $D(G) = D^1(G)$ est toujours distingué dans G, donc comme G est simple, $D(G) = G$ ou $D(G) = \{1\}$.*

Si $D(G) = G$, alors $D^n(G) = G$ pour tout n, et donc G n'est pas résoluble.

Si $D(G) = \{1\}$, cela signifie que G est commutatif. Soit $x \in G\backslash\{1\}$. Alors le groupe engendré par x est un sous groupe distingué de G non réduit à $\{1\}$, donc comme G est simple, $G =< x >$, et donc $G = \mathbb{Z}$ ou $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Mais si $G = \mathbb{Z}$ ou si n n'est pas premier, on sait que G a des sous groupes propres non triviaux et donc n'est pas simple. Donc $G = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec p premier.

Réciproquement, tout groupe abélien est résoluble puisque $D(G) = \{1\}$.

Donc les groupes résolubles simples sont exactement les groupes (cycliques) d'ordre premier.

Solution 3 *On rappelle la définition d'un groupe nilpotent. On pose $C^0(G) = G$ et $C^i(G) = [G, C^{i-1}(G)]$ pour $i \geq 1$. La suite $C^0(G) \supset C^1(G) \supset \dots\dots$ est appelée suite centrale descendante de G. Un groupe G est nilpotent si $C^i(G) = \{1\}$ pour i assez grand.*

On a montré à l'exercice 10 de la feuille 1 que le groupe $\mathcal{A}_n$ est simple pour $n \geq 5$. Comme $\mathcal{A}_n$ est commutatif seulement pour $n \leq 3$, d'après l'exercice précédent, $\mathcal{A}_n$ n'est pas résoluble pour $n \geq 5$. Tout sous groupe d'un groupe résoluble est résoluble, donc $\mathcal{S}_n$ n'est pas résoluble pour $n \geq 5$.

$\mathcal{S}_2 = \{1, (12)\} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est un groupe commutatif et est donc nilpotent (donc résoluble).

Soient $n \geq 3$, $\tau = (12) \in \mathcal{S}_n$ et $\sigma = (123) \in \mathcal{A}_n$. On a

$$\tau\sigma\tau^{-1}\sigma^{-1} = (123)$$

donc $[\mathcal{S}_n : \mathcal{S}_n]$ et $[\mathcal{S}_n : \mathcal{A}_n]$ sont deux sous groupes distingués de $\mathcal{A}_n$ contenant un 3-cycle. D'après l'exercice 10 de la feuille 1, cela implique que $[\mathcal{S}_n : \mathcal{S}_n] = \mathcal{A}_n$ et $[\mathcal{S}_n : \mathcal{A}_n] = \mathcal{A}_n$, c'est à dire que $\mathcal{S}_n$ n'est pas nilpotent pour $n \geq 3$.

On utilise dans la suite la propriété suivante : si H est un sous groupe normal de G, alors si H et G/H sont résolubles, alors G est résoluble. En particulier, on va montrer que $\mathcal{A}_3$ et $\mathcal{A}_4$ sont résolubles, ce qui entraînera que $\mathcal{S}_3$ et $\mathcal{S}_4$ sont résolubles.

$\mathcal{A}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ est abélien, donc est nilpotent (donc résoluble). En particulier, $\mathcal{S}_3$ est résoluble.

Soit $V = \{Id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$. Tout groupe commutatif est résoluble et comme $V = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est un sous groupe distingué de $\mathcal{A}_4$ et que $\mathcal{A}_4/V = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, on a que $\mathcal{A}_4$ est résoluble, donc $\mathcal{S}_4$ est aussi résoluble.

Remarque : *On a $C^0(\mathcal{A}_4) = [\mathcal{A}_4 : \mathcal{A}_4] = V$ et $C^1(\mathcal{A}_4) = [\mathcal{A}_4 : V] = \{Id\}$ ou V. Comme*

$$(123)(12)(34)(321)(12)(34) = (13)(24)$$

$C^1(\mathcal{A}_4) = V = C^i(\mathcal{A}_4)$ pour $i \geq 1$et $\mathcal{A}_4$ n'est pas nilpotent.

Solution 4 *On va abondamment utiliser dans la suite la propriété suivante : si G est un groupe fini non simple, et si tout groupe d'ordre strictement inférieur à G est résoluble, alors G est résoluble. Cette propriété est une conséquence immédiate de la propriété suivante, déjà utilisée : si H est un sous groupe normal de G, et si H et G/H sont résolubles, alors G est résoluble.*

On va montrer maintenant que tout groupe d'ordre strictement inférieur à 60 est résoluble. D'après l'exercice 4, on peut donc affirmer que les groupes simples d'ordre $<$ 60 sont les groupes d'ordre premier. Comme $\mathcal{A}_4$ est d'ordre 60 et n'est pas résoluble, c'est le meilleurs énoncé général de ce type que l'on *puisse espérer obtenir. La preuve est résumée dans les tableaux suivants :*

$\lvert G\rvert$	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
argument	$G = \{1\}$	$\lvert G\rvert = p$	$\lvert G\rvert = p$	$\lvert G\rvert = p^i$	$\lvert G\rvert = p$	$\lvert G\rvert = pq$

$\lvert G\rvert$	7	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
argument	$\lvert G\rvert = p$	$\lvert G\rvert = p^i$	$\lvert G\rvert = p^i$	$\lvert G\rvert = pq$	$\lvert G\rvert = p$	$\lvert G\rvert = p^2q$

$\lvert G\rvert$	**13**	**14**	**15**	16	**17**	**18**
argument	$\lvert G\rvert = p$	$\lvert G\rvert = pq$	$\lvert G\rvert = pq$	$\lvert G\rvert = p^i$	$\lvert G\rvert = p$	$\lvert G\rvert = p^2q$

$\lvert G\rvert$	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**
argument	$\lvert G\rvert = p$	$\lvert G\rvert = p^2q$	$\lvert G\rvert = pq$	$\lvert G\rvert = pq$	$\lvert G\rvert = p$	$G \to \mathcal{S}_3$

$\lvert G\rvert$	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
argument	$\lvert G\rvert = p^i$	$\lvert G\rvert = pq$	$\lvert G\rvert = p^i$	$\lvert G\rvert = p^2q$	$\lvert G\rvert = p$	*exo* 7 *feuille* 2

$\lvert G\rvert$	**31**	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**
argument	$\lvert G\rvert = p$	$\lvert G\rvert = p^i$	$\lvert G\rvert = pq$	$\lvert G\rvert = pq$	$\lvert G\rvert = pq$	$G \to \mathcal{S}_4$

$\lvert G\rvert$	**37**	**38**	**39**	**40**	**41**	**42**
argument	$\lvert G\rvert = p$	$\lvert G\rvert = pq$	$\lvert G\rvert = pq$	$n_5 = 1$	$\lvert G\rvert = p$	$n_7 = 1$

$\lvert G\rvert$	**43**	**44**	**45**	**46**	**47**	**48**
argument	$\lvert G\rvert = p$	$\lvert G\rvert = p^2q$	$\lvert G\rvert = p^2q$	$\lvert G\rvert = pq$	$\lvert G\rvert = p$	$G \to \mathcal{S}_3$

$\lvert G\rvert$	**49**	**50**	**51**	**52**	53	**54**
argument	$\lvert G\rvert = p^i$	$\lvert G\rvert = p^2q$	$\lvert G\rvert = pq$	$\lvert G\rvert = p^2q$	$\lvert G\rvert = p$	$n_3 = 1$

$\lvert G\rvert$	**55**	**56**	**57**	**58**	**59**	**60**
argument	$\lvert G\rvert = pq$	$n_7 = 1$ *ou* $n_2 = 1$	$\lvert G\rvert = pq$	$\lvert G\rvert = pq$	$\lvert G\rvert = p$	$\mathcal{A}_4$

Tout groupe d'ordre premier est cyclique, donc résoluble.

Tout p-groupe est nilpotent, donc résoluble (c'est une conséquence immédiate du fait que le centre d'un p-groupe est non trivial).

D'après l'exercice 6 de la feuille 2, tous les groupes d'ordre pq *et* p^2q

avec p et q deux nombres premiers distincts ne sont pas simples, et donc résolubles.

Il reste à étudier un peu plus précisément les cas où $|G| = 24, 30, 36, 40, 42, 48, 54$ *et* 56.

On a vu à l'exercice 7 de la feuille 2 qu'un groupe d'ordre 30 n'est pas simple, et donc résoluble.

Si $|G| = 2^n 3$ *avec* $n \geq 3$, *on va montrer que* G *n'est pas simple, ce qui traitera les cas* $|G| = 24$ *et* 48. *D'après le Théorème de Sylow,* $n_2 = 1$ *ou* 3. *Si* $n_2 = 3$, *alors en faisant agir* G *par conjugaison sur l'ensemble des 2-Sylow de* G, *on obtient un morphisme de groupe non trivial* $G \to \mathcal{S}_3$. *Pour des raisons de cardinal, ce morphisme ne peut pas être injectif, donc* G *n'est pas simple.*

Si $|G| = 36 = 2^2 \times 3^2$, *alors* $n_3 = 1$ *ou* 4. *Si* $n_3 = 4$, *alors en faisant agir* G *par conjugaison sur l'ensemble des 3-Sylow de* G, *on obtient un morphisme de groupe non trivial* $G \to \mathcal{S}_4$, *qui ne peut pas être injectif pour des raisons de cardinal. Donc* G *n'est pas simple.*

Si $|G| = 40 = 2^3 \times 5$, *alors* $n_5 = 1$ *donc* G *n'est pas simple.*

Si $|G| = 42 = 2 \times 3 \times 7$, *alors* $n_7 = 1$ *donc* G *n'est pas simple.*

Si $|G| = 54 = 2 \times 3^3$, *alors* $n_3 = 1$ *donc* G *n'est pas simple.*

Si $|G| = 56 = 2^3 \times 7$, *alors* $n_7 = 1$ *ou* 8. *Si* $n_7 = 8$, *alors* G *contient* $8(7-1) = 48$ *éléments d'ordre* 7, *et donc* G *a au plus* $56 - 1 - 48 = 7$ *éléments d'ordre pair, c'est à dire* $n_2 = 1$. *Donc dans tous les cas,* G *n'est pas simple.*