Université Pierre & Marie Curie
Master de Mathématiques
Professeur: J.F.Dat

Année 2010-2011
MM014 Théorie des groupes
A.Guilloux

Adresse mail de Antonin Guilloux : aguillou@math.jussieu.fr

Feuille 5

Représentations

Dans toute la suite, on étudie les représentations des groupes finis dans des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels.

Premiers exercices

Exercice 1 Le but de cet exercice est de montrer que le centre du groupe $GL_n(\mathbb{C})$ est le groupe des homothéties H. Une représentation ρ du groupe $GL_n(\mathbb{C})$ est donnée par son action naturelle sur $\mathbb{C}^n$.

1. Montrer que la représentation ρ est irréductible.
2. Montrer que tout élément du centre de $GL_n(\mathbb{C})$ est un morphisme de la représentation ρ.
3. Conclure en utilisant le Lemme de Schur.

Exercice 2 Soit G un groupe abélien.

1. Si $\rho : G \to GL(V)$ est une représentation de G, montrer que tout élément g de G définit un G-morphisme $V \to V$.
2. En déduire que toute représentation irréductible de G est de dimension 1.
3. Donner toutes les représentations irréductibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Exercice 3 Soit H un sous groupe commutatif d'un groupe fini G. Montrer que toute représentation irréductible de G est de dimension au plus $[G : H]$.
Indication : si V est un représentation irréductible de G, c'est aussi une représentation de H. On pourra considérer la représentation de G engendrée par une sous représentation de H de dimension 1.

Exercice 4 On suppose dans cet exercice qu'on ignore tout de la théorie des caractères, et on se propose d'étudier les représentations de $\mathcal{S}_3$. On note $\tau = (123)$ et $\sigma = (12)$. $\mathcal{S}_3$ est alors engendré par τ et σ avec la relation $\sigma\tau = \tau^2\sigma$.
On note U la représentation triviale de $\mathcal{S}_3$ et $\omega = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

1. Montrer que la signature permet de définir une autre représentation U' de degré 1 de $\mathcal{S}_3$ qui n'est pas triviale.
2. Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{C}^3$. Le groupe $\mathcal{S}_3$ agit naturellement sur $\mathbb{C}^3$ par $\alpha.e_i = e_{\alpha(i)}$. Montrer que U est une sous-représentation de $\mathbb{C}^3$ et trouver uns sous-représentation supplémentaire V.
3. Montrer que V est irréductible et admet une base (v, w) satisfaisant

$$\tau.v = \omega v,\ \sigma.v = w,\ \tau.w = \omega^2 w\ et\ \sigma.w = v$$

4. Soit W une représentation de $\mathcal{S}_3$. Montrer que si v est un vecteur propre de τ pour la valeur propre ω^i, alors $\sigma(v)$ est un vecteur propre de τ pour la valeur propre ω^{2i}.
5. En déduire que U, U' et V sont les seules représentations irréductibles de $\mathcal{S}_3$.
6. Décomposer $V \otimes V$, $Sym^2 V$, $\Lambda^2 V$ et $R[\mathcal{S}_3]$ (la représentation régulière de $\mathcal{S}_3$).

Exercice 5 Soit V une représentation de degré fini d'un groupe G (non nécessairement fini).

1. On suppose qu'il existe une forme hermitienne H sur V invariante par G, c'est à dire

$$H(u, v) = H(g.u, g.v)\quad \forall u, v \in V,\ \forall g \in G$$

Montrer que toute sous-représentation de V admet une sous-représentation supplémentaire.

2. Montrer que si G est fini, alors il existe toujours une telle forme hermitienne G-invariante.
3. On suppose V irréductible. Montrer que deux formes hermitiennes G-invariantes sont multiples l'une de l'autre (c'est à dire $H_1 = \mu H_2$).