Université Pierre & Marie Curie
Master de Mathématiques
Professeur: J.F. Dat

Année 2010-2011
MM014 Théorie des groupes
A. Guilloux

Feuille 5
Corrigé

Premiers exercices

Solution 1 *Puisque ρ est l'action naturelle de $GL_n(\mathbb{C})$ sur $\mathbb{C}^n$, ρ est l'identité de $GL_n(\mathbb{C})$ dans $GL_n(\mathbb{C})$.*

1. *Si un sous espace vectoriel V de $\mathbb{C}^n$ est stable par tous les éléments de $GL_n(\mathbb{C})$, alors il est évident que $V = \{0\}$ ou $V = \mathbb{C}^n$, c'est à dire que ρ est irréductible.*
2. *Soit h un élément du centre de $GL_n(\mathbb{C})$. Donc pour tout $M \in GL_n(\mathbb{C})$ on a $\rho(M) \circ h = Mh = hM = h \circ \rho(M)$, donc h est bien un morphisme de la représentation ρ.*
3. *Comme ρ est irréductible, d'après le Lemme de Schur, on a $h = \lambda Id$ avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$, c'est à dire que h est une homothétie.*

Solution 2 *Comme d'habitude, on note $g.x$ pour $\rho(g)(x)$.*

1. *Pour tous $g, h, x \in G$, on a*
$$g.(h.x) = (gh).x = (hg).x = h.(g.x)$$
c'est à dire l'application $\rho(g) : x \mapsto g.x$ est un G-morphisme pour tout $g \in G$.
2. *On suppose que V est une représentation irréductible de G. Si $g \in G$, alors d'après la question précédente et le Lemme de Schur, $\rho(g) = \lambda Id$. De plus, comme $\rho(g) \in GL(V)$, on a $\lambda \neq 0$. Donc tout sous-espace vectoriel de V est stable par G, et est donc une sous-représentation de G. Comme V est irréductible, on a nécessairement $dim(V) = 1$.*
3. *D'après la question précédente, une représentation irréductible de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un morphisme de groupes $\rho : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to GL_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$. Comme tout élément k de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est d'ordre divisant n, l'élément $\rho(k)$ sera aussi d'ordre divisant n, c'est à dire $\rho(k)^n = 1$. Réciproquement, pour toute racine $n^{\text{ème}}$ de l'unité ω, l'application*
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ k & \longmapsto & \omega^k \end{array}$$

est une représentation de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, donc on les obtient toutes ainsi. On voit ainsi que l'espace des représentations irréductibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ peut être munit d'une structure de groupe qui le rend isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Solution 3 *Soit V une représentation irréductible de G. Donc c'est aussi une représentation de H par restriction. Comme H est abélien, V, comme représentation de H, se décompose en somme directe de représentations de H de degré 1. Soit v un vecteur directeur d'une de ces représentations, et soit V' le sous espace vectoriel de V engendré par les vecteurs de la forme $g.v$ pour g parcourant G. Il est clair que $V' \neq \{0\}$ est une sous représentation de V du groupe G, donc $V' = V$. Or, si $g' = gh$ avec $h \in H$, par définition de v, $g'.v$ et $g.v$ sont colinéaires. Donc V' est engendré par $[G : H]$ vecteurs, et est donc de dimension au plus $[G : H]$.*

Solution 4

1. *La signature d'une permutation permet de définir la représentation de dimension 1 suivante (valide pour tout n) :*

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{S}_n & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ \alpha & \longmapsto & sign(\alpha) \end{array}$$

   C'est à dire $\alpha.x = sign(\alpha)x$. la signature n'est pas constante sur $\mathfrak{S}_n$ dès que $n \geq 2$, donc la représentation obtenue n'est pas la représentation triviale.

2. *Le vecteur $(1, 1, 1)$ est invariant pour tout $\alpha \in \mathfrak{S}_3$ donc $Vect(1, 1, 1)$ est une sous-représentation de $\mathfrak{S}_3$, isomorphe à U.*

   Une sous-représentation V supplémentaire est un plan vectoriel de $\mathbb{C}^3$, et a donc pour équation $ax + by + cz = 0$. Pour que V soit invariant par $\mathfrak{S}_3$, il faut que $a = b = c$, et donc V a pour équation $x + y + z = 0$.

3. *Si on trouve une telle base, alors on en déduit que V est irréductible : $\tau|_V$ a deux valeurs propres distinctes, donc $\mathbb{C}v$ et $\mathbb{C}w$ sont les deux seules droites invariantes par τ. Ce sont donc les deux seules sous-représentations possibles. Or, σ échange les deux droites, donc aucune de ces deux droites n'est stable par σ, donc V est irréductible.*

   Pour trouver une telle base, on remarque tout d'abord que τ est d'ordre 3 dans $\mathfrak{S}_3$, et est donc d'ordre divisant 3 dans $GL(V)$. En particulier, ses valeurs propres sont des racines 3ème de l'unité. La deuxième remarque utile pour trouver v et w sans calcul est

$$1 + \omega + \omega^2 = 0.$$

   Ainsi, le vecteur $(1, \omega, \omega^2) \in V$. On voit maintenant facilement qu'on peut prendre

$$v = (\omega, 1, \omega^2) \quad et \quad w = (1, \omega, \omega^2)$$

4. *C'est un simple calcul :*

$$\tau(\sigma(v)) = (\tau\sigma)(v) = (\sigma\tau^2)(v) = \sigma(\tau^2(v)) = \omega^{2i}\sigma(v)$$

5. *On va montrer que toute représentation W de $\mathfrak{S}_3$ contient une sous-représentation isomorphe à U, U' ou V. Ceci entraînera immédiatement que les seuls représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_3$ sont U, U' et V.*

   Soit ω^i une valeur propre de τ, et u un vecteur propre de τ pour ω^i (rappel : u existe car $\mathbb{C}$ est algébriquement clos).
   - *Si $i = 1$, alors d'après la question précédente, $\sigma(u)$ est un vecteur propre de τ pour $\omega^{2i} \neq \omega^i$. Les vecteurs u et $\sigma(u)$ forment donc une base de $Vect(u, \sigma(u))$, qui vérifie les mêmes relations que la base (v, w) de V. Donc $Vect(u, \sigma(u))$ est isomorphe à V.*
   - *Si $i = 2$, on montre de la même manière que V est une sous-représentation de W.*
   - *Si $i = 0$ et $\sigma(u) \neq \pm u$, alors la droite engendrée par $u + \sigma(u)$ (resp. $u - \sigma(u)$) est stable par $\mathfrak{S}_3$ et cette représentation est isomorphe à U (resp. U'). Donc $U \oplus U'$ est une sous-représentation de W.*
   - *Si $i = 0$ et $\sigma(u) = u$, alors $Vect(u)$ est une sous-représentation de $\mathfrak{S}_3$ isomorphe à U.*
   - *Si $i = 0$ et $\sigma(u) = -u$, alors $Vect(u)$ est une sous-représentation de $\mathfrak{S}_3$ isomorphe à U'.*

6. *On reprend la base (v, w) de V construite à la question 3. Une base de $V \otimes V$ est donc $(v \otimes v,\ v \otimes w,\ w \otimes v,\ w \otimes w)$. On a*

$$\tau(v \otimes v) = \omega^2 v \otimes v,\ \ \tau(w \otimes w) = \omega w \otimes w \text{ et } \sigma(v \otimes v) = w \otimes w$$

   donc $Vect(v \otimes v, w \otimes w)$ est une sous-représentation de $V \otimes V$ isomorphe à V.

   On a aussi

$$\tau(v \otimes w) = v \otimes w,\ \ \tau(w \otimes v) = w \otimes v \text{ et } \sigma(v \otimes w) = w \otimes v$$

   d'après la question précédente, $U \oplus U'$ est une sous-représentation de $V \otimes V$. Pour des raisons de dimension, on a donc

$$V \otimes V = V \oplus U \oplus U'$$

   $\Lambda^2 V$ est de dimension 1, de base $v \wedge w$. Comme

$$\tau(v \wedge w) = v \wedge w \text{ et } \sigma(v \wedge w) = w \wedge v = -v \wedge w$$

   on a $\Lambda^2 V = U'$.

   $Sym^2 V$ est de dimension 3, de base (v^2, vw, w^2). On voit qu'on a $Vect(v^2, w^2) \simeq V$ et $Vect(vw) \simeq U$, donc

$$Sym^2 V = V \oplus U$$

On retrouve bien

$$V \otimes V = Sym^2 V \oplus \Lambda^2 V$$

$R[\mathfrak{S}_3]$ *est de dimension 6, de base* $(e_{Id}, e_\sigma, e_\tau, e_{\sigma\tau}, e_{\tau^2}, e_{\sigma\tau^2})$. *On voit alors qu'on a*

$$Vect(\sum_{\alpha \in \mathfrak{S}_3} e_\alpha) \simeq U, \qquad Vect(\sum_{i=1}^{3} e_{\tau^i} - \sum_{i=1}^{3} e_{\sigma\tau^i}) \simeq U',$$

$$Vect(e_\sigma + \omega e_{\sigma\tau} + \omega^2 e_{\sigma\tau^2}, \quad e_{Id} + \omega e_\tau + \omega^2 e_{\tau^2}) \simeq V,$$

$$et \quad Vect(\omega e_{Id} + e_\tau + \omega^2 e_{\tau^2}, \quad \omega e_\sigma + e_{\sigma\tau} + \omega^2 e_{\sigma\tau^2}) \simeq V$$

Donc

$$R[\mathfrak{S}_3] = V^2 \oplus U \oplus U'$$

Solution 5 *Cet exercice est une (re)démonstration du théorème de Maschke.*

1. *Soit W une sous-représentation de V. La forme hermitienne H nous donne un moyen canonique de trouver un supplémentaire de W : on prend son orthogonal. Comme H est invariante par G, on en déduit que $W^\perp$ est une sous-représentation de G par le calcul suivant*

$$\forall g \in G, \forall v \in W, \forall w \in W^\perp, H(v, g.w) = H(g^{-1}.v, w) = 0$$

2. *Soit H_0 une forme hermitienne sur V. Puisque G est fini, on peut définir une forme hermitienne H G-invariante en "moyennant" H_0 par G :*

$$H(v, w) = \sum_{g \in G} H_0(g.v, g.w)$$

Remarque : *Dans une base adéquate, une représentation d'un groupe fini sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel est donc unitaire. En particulier, tous les automorphismes linéaires $v \mapsto g.x$ sont* ***diagonalisables***.

3. *Soient H et H' deux formes hermitiennes G-invariantes sur V. Alors H induit une bijection anti-linéaire*

$$\begin{array}{rccc} \varphi_H : & V & \longrightarrow & V^* \\ & v & \longmapsto & \big(w \to H(w, v)\big) \end{array}$$

De plus, comme H est G-invariante, $\varphi_H(g.v) = g.\varphi_H(v)$. L'application $\varphi_{H'}^{-1} \circ \varphi_H$ est donc un G-automorphisme linéaire de V, donc d'après le Lemme de Schur, $\varphi_{H'}^{-1} \circ \varphi_H = \mu Id$, c'est à dire $H = \mu H'$.