Université Pierre & Marie Curie — Année 2011-2012
Master de Mathématiques — MM014 Théorie des groupes
Professeur: A. Ducros — M. Florence

Feuille 6

Théorie des caractères

Exercice 1 Écrire la table des caractères de $\mathcal{S}_3$.

Exercice 2 Montrer que tout groupe non commutatif admet une représentation irréductible de dimension > 1.

Exercice 3 Soit V une représentation d'un groupe G. On note S la représentation $Sym^2(V)$ et A la représentation $\Lambda^2 V$. Montrer que pour tout g dans G,

$$\chi_S(g) = \frac{\chi_V(g)^2 + \chi(g^2)}{2} \ et \ \chi_A(g) = \frac{\chi_V(g)^2 - \chi(g^2)}{2}.$$

En particulier, vérifier que l'on a bien $\chi_{V\otimes V} = \chi_S + \chi_A$.

Exercice 4 Soient V et W deux représentations irréductibles d'un groupe fini G. On suppose de plus que W est de dimension 1. Montrer alors que $V \otimes W$ est irréductible.
Est-ce toujours vrai si V et W sont de dimension au moins 2 ?

Exercice 5 Écrire la table des caractères de $\mathcal{S}_4$.

Exercice 6 On étudie ici les représentations de $\mathcal{A}_4$.

1. En utilisant la table des caractères de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, montrer qu'il existe 3 représentations distinctes de dimension 1 de $\mathcal{A}_4$.
2. Écrire la table des caractères de $\mathcal{A}_4$.
3. On considère les représentations de $\mathcal{S}_4$ et leurs restrictions à $\mathcal{A}_4$. Quelles sont celles qui restent irréductibles ? Quelles représentations de $\mathcal{S}_4$ non isomorphes deviennent isomorphes lorsqu'on les restreints à $\mathcal{A}_4$? Quelles sont les représentations de $\mathcal{A}_4$ ainsi obtenues ?

Exercice 7 Soient deux groupes G_1 et G_2. On étudie ici les représentations irréductibles du groupe produit $G_1 \times G_2$.

1. Si V_1 est une représentation de G_1 et V_2 est une représentation de G_2, on définit la représentation de $G_1 \times G_2$ dans $V_1 \otimes V_2$ suivante, notée $V_1 \oslash V_2$
$$(g_1, g_2).v_1 \otimes v_2 = (g_1.v_1) \otimes (g_2.v_2)$$
Montrer que si V_1 et V_2 sont irréductibles, alors $V_1 \oslash V_2$ l'est aussi.
2. On note $cl(G)$ le nombre de classes de conjugaison d'un groupe G. Montrer que $cl(G_1 \times G_2) = cl(G_1)cl(G_2)$.
3. Montrer que toute représentation irréductible de $G_1 \times G_2$ est de la forme $V_1 \oslash V_2$ où V_1 est une représentation irréductible de G_1 et V_2 est une représentation irréductible de G_2.

Exercice 8 Écrire la table des caractères des deux groupes non commutatifs d'ordre 8.

Exercice 9 Montrer que si V est une représentation d'un groupe fini vérifiant $(\chi_V, \chi_V) = 2$, alors V est somme de deux représentations irréductibles.

Exercice 10 Le but de cet exercice est d'exhiber n représentations irréductibles du groupe symétrique $\mathcal{S}_n$.
On considère l'action naturelle de $\mathcal{S}_n$ sur $\mathbb{C}^n$. On note χ_r le caractère de la représentation $\Lambda^k \mathbb{C}^n$.

1. Montrer que $\mathbb{C}^n = V \oplus U$ où U est la représentation triviale de $\mathcal{S}_n$.
2. Pour $B \subset \{1, \dots, n\}$, on pose pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$
$$\epsilon_B(\sigma) = \left\{ \begin{array}{rcl} 0 & si & \sigma(B) \neq B \\ sign(\sigma|_B) & si & \sigma(B) = B \end{array} \right.$$
Montrer que pour σ dans $\mathcal{S}_n$,
$$\chi_r(\sigma) = \sum_{\substack{B \subset \{1, \dots, n\} \\ |B| = r}} \epsilon_B(\sigma)$$
En déduire, par un calcul soigneux, que
$$(\chi_r, \chi_r) = 2 \quad si \ r \geq 1$$
3. Montrer que $\Lambda^r \mathbb{C}^n = \Lambda^r V \oplus \Lambda^{r-1} V$. En déduire que toutes les représentations $\Lambda^r V$ pour $0 \leq r \leq n-1$ sont des représentations irréductibles de $\mathcal{S}_n$.
A quoi correspond la représentation $\Lambda^{n-1} V$?
4. Montrer que pour $n \leq 3$, on obtient ainsi toutes les représentations de $\mathcal{S}_n$, mais que ce n'est plus le cas si $n \geq 4$.

Exercice 11 On étudie ici une application de la théorie des caractères. Soit ρ, V une représentation irréductible sur $\mathbb{C}$ de degré d d'un groupe fini G. Soit S une classe de conjugaison dans G.

1. Montrer que l'endomorphisme $R_S = \sum_{g \in S} \rho(g)$ est une homothétie, et déterminer son rapport en fonction de la valeur caractère χ_ρ sur les éléments de S, du cardinal de S et de d.
2. Montrer que si on note S_i les classes d'homothéties de G, alors un produit $R_{S_i} R_{S_j}$ est une combinaison linéaire à coefficients entiers des R_{S_k}.
3. En déduire que R_S admet un polynôme annulateur unitaire à coefficients entiers.
4. En déduire que, si $\mathrm{Card}(S)$ est premier à d, alors $\frac{\chi_\rho(g)}{d}$ est un entier algébrique. (On pourra utiliser que $\chi_\rho(g)$est un entier algébrique).
5. Montrer que ce dernier nombre est aussi de la forme $a = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^{d} \lambda_i$, où les λ_i sont des racines de l'unité.

   On admettra qu'un tel nombre a est soit nul, soit $a = \lambda_1 = \ldots = \lambda_n$.
6. Montrer que si $\chi_\rho(g)$ n'est pas nul, et que le cardinal de sa classe de conjugaison est premier à d, alors $\rho(g)$ est une homothétie.
7. Soit $g \neq e$ dans G. On suppose que le cardinal de la classe de conjugaison de g est une puissance de p. Montrer alors qu'il existe un caractère irréductible non trivial tel que $\chi(g)$ est non nul et p ne divise pas $\chi(e)$. En déduire que si ρ a pour caractère χ, $\rho(s)$ est une homothétie.
8. Montrer que cette dernière représentation ρ est non triviale. Soit N son noyau. Montrer que l'image de g dans G/N est dans le centre de G/N.
9. Montrer que tout groupe d'ordre $p^n q^m$ est résoluble (théorème de Burnside).