Université Pierre & Marie Curie
Master de Mathématiques
Professeur: J.F. Dat

Année 2010-2011
MM014 Théorie des groupes
A. Guilloux

Feuille 6
Corrigé

Théorie des caractères

Solution 1 *D'après l'exercice 4, feuille 5, on a la table des caractères suivante pour* $\mathfrak{S}_3$*.*

$\mathfrak{S}_3$	Id	$(1,2)$	$(1,2,3)$
U	1	1	1
U'	1	-1	1
V	2	0	-1

Solution 2 *Soit G un groupe dont toutes les représentations irréductibles sont de degré 1. Comme la somme des carrés des dimensions des représentations irréductibles de G est égale au cardinal de G, on en déduit que les classes de conjugaisons de G sont toutes réduites à un élément. C'est à dire que G est abélien.*

Solution 3 *Si $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$ sont les valeurs propres (répétées avec multiplicité) de g dans V, alors $(\lambda_i\lambda_j)_{1\leq i<j\leq n}$ sont les valeurs propres de g dans A et $(\lambda_i\lambda_j)_{1\leq i\leq j\leq n}$ sont les valeurs propres de g dans S. On a donc*

$$\chi_A(g) = \sum_{1\leq i<j\leq n} \lambda_i\lambda_j = \frac{1}{2}\left(\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)^2 - \sum_{i=1}^n \lambda_i^2\right) = \frac{\chi_V(g)^2 - \chi(g^2)}{2}$$

et

$$\chi_S(g) = \sum_{1\leq i\leq j\leq n} \lambda_i\lambda_j = \frac{1}{2}\left(\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)^2 + \sum_{i=1}^n \lambda_i^2\right) = \frac{\chi_V(g)^2 + \chi(g^2)}{2}$$

On retrouve bien

$$\chi_{V\otimes V}(g) = \chi_V(g)^2 = \chi_S(g) + \chi_A(g)$$

Solution 4 *Comme $dim(W)=1$ et que G est fini, pour tout élément g de G, $\chi_W(g)$ est une racine de l'unité. En particulier, c'est un nombre complexe de module 1 et $\overline{\chi_W(g)} = \chi_W(g)^{-1}$. On a*

$$\begin{aligned}(\chi_{V\otimes W}, \chi_{V\otimes W}) &= \tfrac{1}{|G|}\textstyle\sum_{g\in G} \chi_V(g)\chi_W(g)\overline{\chi_V(g)\chi_W(g)} \\ &= \tfrac{1}{|G|}\textstyle\sum_{g\in G} \chi_V(g)\chi_W(g)\overline{\chi_V(g)}\chi_W(g)^{-1} \\ &= \tfrac{1}{|G|}\textstyle\sum_{g\in G} \chi_V(g)\overline{\chi_V(g)} \\ &= 1\end{aligned}$$

Donc $V\otimes W$ est irréductible.
Si V et W sont de dimension au moins 2, alors ce n'est plus vrai. Un contre-exemple est donné par la représentation $V\otimes V$ à la question 6 de l'exercice 4, feuille 5.

Solution 5 *Le groupe $\mathfrak{S}_4$ a 5 classes de conjugaisons, de représentants*

$$Id,\ (12),\ (123),\ (1234)\ et\ (12)(34)$$

et de cardinal

$$1,\ 6,\ 8,\ 6\ et\ 3$$

Donc $\mathfrak{S}_4$ a 5 représentations irréductibles. On connaît déjà la représentation triviale U de caractère $(1,1,1,1,1)$ et celle donnée par la signature U' de caractère $(1,-1,1,-1,1)$.
On considère maintenant l'action naturelle de $\mathfrak{S}_4$ sur $\mathbb{C}^4$ (voir exercice 4, feuille 5), dont le caractère est $(4,2,1,0,0)$. Comme le vecteur $(1,1,1,1)$ est invariant par $\mathfrak{S}_4$, U est une sous-représentation de $\mathbb{C}^4$. Soit V une représentation supplémentaire. On calcule

$$\chi_V = \chi_{\mathbb{C}^4} - \chi_U = (3,1,0,-1,-1)$$

et $(\chi_V,\chi_V)=1$. Donc V est une troisième représentation irréductible de $\mathfrak{S}_4$.
D'après l'exercice précédent, $V\otimes U'$ est encore une représentation irréductible de $\mathfrak{S}_4$. On calcule facilement $\chi_{V\otimes U'} = (3,-1,0,1,-1)$, qui n'est égal à aucun caractère déjà calculé, donc on a construit une nouvelle représentation irréductible.
Soit W la représentation irréductible manquante. Comme la somme des carrés des dimensions des représentations irréductibles d'un groupe est égale au cardinal de ce groupe, on a

$$dim(W)^2 = 24-1-1-9-9 = 4$$

donc dim(W) = 2 et $\chi_W = (2, a, b, c, d)$*. Les relations d'orthogonalité entre les colonnes de la table des caractères nous permettent de trouver* $\chi_W = (2, 0, -1, 0, 2)$.
La table des caractères de $\mathfrak{S}_4$ *est donc*

$\mathfrak{S}_4$	Id	$(1\,2)$	$(1\,2\,3)$	$(1\,2\,3\,4)$	$(1\,2)(3\,4)$
U	1	1	1	1	1
U'	1	-1	1	-1	1
V	3	1	0	-1	-1
$V \otimes U'$	3	-1	0	1	-1
W	2	0	-1	0	2

Solution 6 *Le groupe* $\mathfrak{A}_4$ *a 4 classes de conjugaisons, de représentants*

$$Id,\ (123),\ (213)\ et\ (12)(34)$$

et de cardinal

$$1,\ 4,\ 4\ et\ 3$$

Donc $\mathfrak{A}_4$ *a 4 représentations irréductibles.*
Soit H le sous-groupe normal de $\mathfrak{A}_4$ *engendré par* $(12)(34)$.

1. *Soit* $\omega = e^{\frac{2i\pi}{3}}$*. D'après l'exercice 1, feuille 5, le groupe* $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ *a 3 représentations irréductibles* U, U' *et* U''*, toutes de dimension 1. De plus, on connaît leur table de caractères :*

$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$	0	1	2
U	1	1	1
U'	1	ω	ω^2
U''	1	ω^2	ω

Comme $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \simeq \mathfrak{A}_4/H$*, on peut relever les représentations de* $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ *en représentations de* $\mathfrak{A}_4$ *en faisant agir trivialement le sous-groupe* H*. On obtient ainsi 3 représentations de* $\mathfrak{A}_4$ *de dimension 1 de caractères* $(1, 1, 1, 1)$, $(1, \omega, \omega^2, 1)$ *et* $(1, \omega^2, \omega, 1)$*. Par leur caractères, on voit que ces représentations sont distinctes, et comme leur dimension est 1, elles sont forcément irréductibles.*

2. *Il ne reste plus qu'une représentation irréductible* W *de* $\mathfrak{A}_4$ *à trouver. Comme* $dim(W)^2 = 12 - 1 - 1 - 1 = 9$*, on a* $dim(W) = 3$*, et* $\chi_W = (3, a, b, c)$*. Les relations d'orthogonalité entre les colonnes de la table des caractères donnent* $\chi_W = (3, 0, 0, -1)$.
La table des caractères de $\mathfrak{A}_4$ *est donc*

$\mathfrak{A}_4$	Id	$(1\,2\,3)$	$(1\,3\,2)$	$(1\,2)(3\,4)$
U	1	1	1	1
U'	1	ω	ω^2	1
U''	1	ω^2	ω	1
W	3	0	0	-1

3. *Dans $\mathfrak{S}_5$, les cycles (123) et (213) deviennent conjugués. En regardant les tables des caractères de $\mathfrak{S}_4$ et $\mathfrak{A}_4$, on voit que $U_{\mathfrak{S}_4}$ et $U'_{\mathfrak{S}_4}$ donnent $U_{\mathfrak{A}_4}$, que $V_{\mathfrak{S}_4}$ et $V_{\mathfrak{S}_4} \otimes U'_{\mathfrak{S}_4}$ donnent $W_{\mathfrak{A}_4}$ et que $W_{\mathfrak{S}_4}$ donne $U'_{\mathfrak{A}_4} \oplus U''_{\mathfrak{A}_4}$. En particulier, on voit qu'en restreignant les représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_4$ à $\mathfrak{A}_4$, on obtient toutes les représentations irréductibles de $\mathfrak{A}_4$.*

Solution 7 1. *Si $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n_1}$ (resp. $(\mu_j)_{1\leq j\leq n_2}$)sont les valeurs propres, répétées avec multiplicité, de g_1 dans V_1 (resp. g_2 dans V_2), alors $(\lambda_i\mu_j)_{1\leq i\leq n_1,\ 1\leq j\leq n_2}$ sont les valeurs propres de (g_1, g_2) dans $V_1 \oslash V_2$. On a donc*

$$\begin{aligned} \chi_{V_1\oslash V_2}(g_1, g_2) &= \textstyle\sum_{1\leq i\leq n_1, 1\leq j\leq n_2} \lambda_i\mu_j \\ &= \left(\textstyle\sum_{1\leq i\leq n_1} \lambda_i\right)\left(\textstyle\sum_{1\leq j\leq n_2} \mu_j\right) \\ &= \chi_{V_1}(g_1)\chi_{V_2}(g_2) \end{aligned}$$

et donc

$(\chi_{V_1\oslash V_2}, \chi_{V_1\oslash V_2})$

$$\begin{aligned} &= \tfrac{1}{|G_1\times G_2|}\textstyle\sum_{(g_1,g_2)\in G_1\times G_2} \chi_{V_1}(g_1)\chi_{V_2}(g_2)\overline{\chi_{V_1}(g_1)\chi_{V_2}(g_2)} \\ &= \tfrac{1}{|G_1||G_2|}\left(\textstyle\sum_{g_1\in G_1} \chi_{V_1}(g_1)\overline{\chi_{V_1}(g_1)}\right)\left(\textstyle\sum_{g_2\in G_2} \chi_{V_2}(g_2)\overline{\chi_{V_2}(g_2)}\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Donc $V_1 \oslash V_2$ est irréductible.

2. *Puisque le produit est direct, les éléments (g_1, g_2) et (h_1, h_2) sont conjugués dans $G_1 \times G_2$ si et seulement si g_1 et h_1 sont conjugués dans G_1 et g_2 et h_2 sont conjugués dans G_2.*
3. *D'après la question 2, on a $cl(G_1)cl(G_2)$ représentations irréductibles de $G_1\times G_2$. Dans la question 1, on a construit exactement $cl(G_1)cl(G_2)$ représentations irréductibles de $G_1 \times G_2$. Il reste donc à voir qu'elles sont toutes distinctes. Par le même calcul qu'à la question 1, on a*

$$(\chi_{V_1\oslash V_2}, \chi_{W_1\oslash W_2}) = (\chi_{V_1}, \chi_{W_1})(\chi_{V_2}, \chi_{W_2})$$

Donc si $V_1 \neq W_1$ ou $V_2 \neq W_2$, alors les représentations $V_1 \oslash V_2$ et $W_1 \oslash W_2$ sont distinctes.

Solution 8 *Les deux groupes non commutatifs d'ordre 8 sont D_4 et $\mathbb{H}_8$. $D_4 = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rtimes \{\pm1\}$ et on a*

$$(j, \epsilon)(i, \epsilon')(-\epsilon j, \epsilon) = (\epsilon i + j - \epsilon' j, \epsilon')$$

donc D_4 a 5 classes de conjugaison qui sont

$$\{(0,1)\},\ \{(2,1)\},\ \{(1,1),(3,1)\},\ \{(0,-1),(2,1)\},\ \text{et } \{(1,-1),(3,1)\}.$$

Le sous groupe engendré par $(2,1)$ est distingué dans D_4, et son quotient est un groupe d'ordre 4, donc abélien. On trouve donc facilement 4 représentations de dimension 1. L'action naturelle de D_4 sur $\mathbb{R}^2$ (D_4 est le groupe d'isométries du carré !) donne la dernière représentation irréductible.
On obtient la table suivante

D_4	$(0,1)$	$(2,1)$	$(1,1),(3,1)$	$(0,-1),(2,-1)$	$(1,-1),(3,-1)$
U	1	1	1	1	1
U'	1	1	1	-1	-1
U''	1	1	-1	1	-1
U'''	1	1	-1	-1	1
$\mathbb{R}^2$	2	-2	0	0	0

$\mathbb{H}_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ *a 5 classes de conjugaison qui sont*

$$\{1\},\ \{-1\},\ \{\pm i\},\ \{\pm j\}\ \text{et } \{\pm k\}.$$

De même que pour D_4, on trouve facilement 4 représentations distinctes de dimension 1. Pour la dernière, on se rappelle que $\mathbb{H}$, le corps des quaternions, agit sur $\mathbb{C}^2$.
On obtient la table suivante

$\mathbb{H}_8$	1	-1	$\pm i$	$\pm j$	$\pm k$
U	1	1	1	1	1
U'	1	1	1	-1	-1
U''	1	1	-1	1	-1
U'''	1	1	-1	-1	1
$\mathbb{C}^2$	2	-2	0	0	0

On constate que D_4 et H_8, bien que n'étant pas isomorphes, ont la "même" table de caractères. On constate aussi, avec D_4, que les résultats de l'exercice 7 ne s'étendent pas aux produits semi-directs.

Solution 9 *Si $V = \bigoplus V_i^{a_i}$, alors $(\chi_V, \chi_V) = \sum a_i^2$. Donc $(\chi_V, \chi_V) = 2$ si et seulement si seulement deux a_i distincts sont non nuls, et égaux à 1.*

Solution 10 1. *Le vecteur $(1, \ldots, 1)$ est invariant par $\mathfrak{S}_n$ donc*

$$\mathbb{C}^n = U \oplus V$$

2. *Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$. Le vecteur $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_r}$, avec $i_1 < \ldots < i_r$, contribue à $\chi_r(\sigma)$ si et seulement si σ induit une*

permutation de $\{i_1, \ldots, i_r\}$*. De plus, dans ce cas,* $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_r}$ *est un vecteur propre pour* σ *de valeur propre* $sign(\sigma)$*. Donc*

$$\chi_r(\sigma) = \sum_{\substack{B \subset \{1,\ldots,n\} \\ |B| = r}} \epsilon_B(\sigma)$$

On a donc
$(\chi_r(\sigma), \chi_r(\sigma))$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \left(\sum_{\substack{B \subset \{1,\ldots,n\} \\ |B| = r}} \epsilon_B(\sigma) \right)^2$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sum_{\substack{B, C \subset \{1,\ldots,n\} \\ |B| = |C| = r}} \epsilon_B(\sigma)\epsilon_C(\sigma)$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{\substack{B, C \subset \{1,\ldots,n\} \\ |B| = |C| = r}} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \epsilon_B(\sigma)\epsilon_C(\sigma)$$

Pour $B, C \subset \{1, \ldots, n\}$ *avec* $|B| = |C| = r$*, on a* $\epsilon_B(\sigma)\epsilon_C(\sigma) \neq 0$ *si et seulement si* σ *induit une permutation sur* $B \setminus C$*,* $C \setminus B$*,* $B \cap C$ *et* $\{1, \ldots, n\} \setminus (B \cup C)$*. Donc en notant* $l = |B \cap C|$*, on a*
$(\chi_r(\sigma), \chi_r(\sigma))$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{\substack{B, C \subset \{1,\ldots,n\} \\ |B| = |C| = r}} \sum_{a \in \mathfrak{S}_l} \sum_{b \in \mathfrak{S}_{r-l}} \sum_{c \in \mathfrak{S}_{r-l}} \sum_{d \in \mathfrak{S}_{n-2r+l}} sign(a)^2 sign(b) sign(c)$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{\substack{B, C \subset \{1,\ldots,n\} \\ |B| = |C| = r}} l!(n-2r+l)! \left(\sum_{b \in \mathfrak{S}_{r-l}} sign(b) \right) \left(\sum_{c \in \mathfrak{S}_{r-l}} sign(c) \right)$$

Dès que $m \geq 2$*, on a* $[\mathfrak{S}_m : \mathfrak{A}_m] = 2$*, donc*

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} sign(\sigma) = 0$$

Donc il suffit de considérer uniquement les cas $r - l = 0$ ou 1. On a donc

$(\chi_r(\sigma), \chi_r(\sigma))$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{\substack{B \subset \{1,\dots,n\} \\ |B| = r}} r!(n-r)! \; + \; \frac{1}{n!} \sum_{\substack{B, C \subset \{1,\dots,n\} \\ |B| = |C| = r, l = r-1}} (r-1)!(n-r-1)!$$

$$= \frac{1}{n!} C_n^r r!(n-r)! \quad + \quad \frac{1}{n!} C_n^r r(n-r)(r-1)!(n-r-1)! = 2$$

Donc, d'après l'exercice précédent, $\Lambda^r\mathbb{C}^n$ est somme de deux représentations irréductibles de $\mathfrak{S}_n$ si $r \geq 1$.

3. *Comme $\mathbb{C}^n = V \oplus U$ et que $dim(U) = 1$, on a*

$$\begin{aligned} \Lambda^r\mathbb{C}^n &= \bigoplus_{i=0}^r \left(\Lambda^{(r-i)}V \otimes \Lambda^i U\right) \\ &= (\Lambda^r V \otimes U) \oplus \left(\Lambda^{r-1} V \otimes U\right) \\ &= \Lambda^r V \oplus \Lambda^{r-1} V \end{aligned}$$

Comme $\Lambda^0\mathbb{C}^n = U$ qui est irréductible, d'après la question précédente, on montre par récurrence que $\Lambda^r V$ pour $0 \leq r \leq n-1$ est une représentation irréductible de $\mathfrak{S}_n$.

Pour $r = n-1$, on retrouve la représentation donnée par la signature.

4. *Pour $n \leq 3$, on voit qu'on obtient toutes les représentations irréductibles. Dès que $n \geq 4$, alors on a strictement plus que n classes de conjugaison dans $\mathfrak{S}_n$: les classes des k-cycles pour $k = 1, \dots, n$ et, par exemple, la classe de $(12)(34)$.*

Solution 11 1. *On vérifie aisément que $R_S : V \to V$ est un automorphisme de la représentation ρ, car pour tout h, on a $Sh = hS$. En effet, si $h \in G$, on a :*

$$R_S \circ \rho(h) = \sum_{g \in S} \rho(gh) = \sum_{g \in Sh} \rho(g) = \sum_{g \in hS} \rho(g) = \rho(h) \circ R_S.$$

Le rapport de l'homothétie est d fois sa trace. Or le caractère χ_ρ est une fonction centrale, donc il est constant sur S, on le notera $\chi_\rho(S)$. La trace de R_S est donc $\mathrm{Card}(S)\chi_\rho(S)$, et le rapport est $\frac{\mathrm{Card}(S)\chi_\rho(S)}{d}$.

2. *Considérons l'application $S_i \times S_j \to G$ donnée par $l, m \mapsto lm$. Comme S_i et S_j sont stables par conjugaison, l'image aussi, et est donc une union de classe de conjugaison S_k pour k dans un ensemble noté I. De plus, si deux éléments g et $h = \gamma g \gamma^{-1}$ sont dans la même classe de*

conjugaison S_k, $k \in I$, alors ils ont exactement le même nombre $n(k)$ de préimages. En effet, $l, m \in S_i \times S_j$ vérifie $lm = g$ si et seulement si $l', m' = \gamma l \gamma^{-1}, \gamma l \gamma^{-1} \in S_i \times S_j$ vérifie $l'm' = h$.
On peut donc écrire :

$$R_{S_i} R_{S_j} = \sum_{l \in S_i} \sum_{m \in S_j} \rho(lm) = \sum_{k \in I} n(k) \sum_{g \in S_k} \rho(g) = \sum_{k \in I} n(k) R_{S_k}.$$

3. *Considérons les puissances successives de R_S : d'après la question précédente, ce sont toutes des combinaisons linéaires à coefficients entiers des R_{S_k}. Comme il n'y a qu'un nombre fini de classes S_k, il existe un nombre fini de puissances de R_S telles que toutes les autres soient des combinaisons linéaires à coefficients rationnels de celles-là. Notons les $R_S^{n_1}$, ... $R_S^{n_k}$. Toute puissance R_S^n est une combinaison linéaire à coefficients rationnels des $R_S^{n_i}$, mais aussi une combinaison linéaire à coefficients entiers des R_{S_k}. Donc les dénominateurs des coefficients dans la première combinaison linéaire sont uniformément bornés. Autrement dit le groupe engendré par les $R_S^{n_i}$ est d'indice fini dans le groupe engendré par tous les R_S^n. On peut donc rajouter un nombre fini de puissances $R_S^{m_j}$ pour qu'avec les $R_S^{n_i}$ ils engendrent tous les R_S^n. Ainsi si on prend n supérieurs aux n_i et m_j, on peut écrire une combinaison linéaire à coefficients entiers :*

$$R_S^n + \sum_i \alpha_i R_S^{n_i} + \sum_j \beta_j R_S^{m_j} = 0.$$

Cela montre bien que R_S est annulé par un polynôme unitaire à coefficients entiers.

4. *Le rapport de l'homothétie R_S est une valeur propre, donc est annulée par le polynôme annulateur de R_S. Ainsi $\frac{\mathrm{Card}(S)\chi_\rho(S)}{d}$ est un entier algébrique. De plus, si $g \in S$, $\chi_\rho(S) = \chi_\rho(g)$ est la somme des valeurs propres de g, donc une somme de racines de l'unité, donc $\chi_\rho(g)$ est un entier algébrique. Si $Card(S)$ est premier à d, écrivons une relation de Bezout $aCard(S) + bd = 1$. Alors $\frac{\chi_\rho(g)}{d} = a\frac{\mathrm{Card}(S)\chi_\rho(S)}{d} + b\frac{d\chi_\rho(g)}{d}$ est une somme d'entiers algébriques, donc est un entier algébrique.*

5. *On vient de le voir : $\chi_\rho(g)$ est la somme de ses valeurs propres. Comme g est d'ordre fini (c'est un élément de G), toutes ces valeurs propres sont racines de l'unité.*

6. *C'est la conséquence directe des deux dernières questions : dans ces conditions, $\frac{\chi_\rho(g)}{d}$ est un entier algébrique qui est la moyenne des d valeurs propres de $\rho(g)$. Elles sont donc toutes égales et $\rho(g)$ est une homothétie de rapport $\frac{\chi_\rho(g)}{d}$.*

7. *Considérons l'ensemble* χ_i *(*$i = 0 \dots r$*) des caractères irréductibles de* G*, où* $\chi_0 = 1$ *est le caractère de la représentation triviale. En utilisant que les colonnes associées à* e *et* g *de la table des caractère sont orthogonales, on obtient :*

$$\sum_i \chi_i(e)\bar{\chi}_i(g) = 1 + \sum_{i \geq 1} \chi_i(e)\bar{\chi}_i(g) = 0.$$

On en déduit qu'il existe un $i \geq 1$ *tel que* $\chi_i(g)$*. De plus, si* p *divise tous les* $\chi_j(e)$*, alors l'équation précédente se réecrit :*

$$-\frac{1}{p} = \sum_{i \geq 1} \frac{\chi_i(e)}{p}\bar{\chi}_i(g).$$

Le terme de droite est un entier algébrique, pas celui de gauche. Donc il existe bien χ *tel que* $\chi(g)$ *est non-nul et* p *ne divise pas* $\chi(e)$*.*

D'après la question précédente (comme le cardinal de la classe de conjugaison est une puissance de p*, il est premier à* d*), cela montre que si* ρ *a pour caractère* χ_i*,* $\rho(g)$ *est une homothétie.*

8. *Par construction cette représentation est non triviale (elle n'a pas le caractère de la représentation triviale). Soit* N *son noyau. Alors* G/N *est isomorphe à l'image de* ρ*.* $\rho(g)$ *est une homothétie, donc commute à tout le monde. Donc la projection de* g *dans* G/N *est dans le centre de* G/N*.*

9. *On procède par récurrence : on a vu que les groupes d'ordre* p^n *et* q^m *sont (nilpotents donc) résolubles. On sait aussi que, pour* H *distingué dans* G*, si* H *et* G/H *sont résolubles alors* G *l'est. Raisonnons donc par récurrence sur* $N = n+m$*. Pour* $N = 1$*, on a déjà remarqué qu'on connaissait le résultat.*

   La propagation : soit G *de cardinal* $p^n q^m$*, avec* $n + m = N$*. On va construire* g *dans* G *dont la classe de conjugaison sera une puissance de* p*. Soit* S *un* q*-Sylow, et* $g \neq e$ *dans le centre de ce* q*-Sylow (un* q*-groupe a toujours du centre, voir Devoir 1). Le centralisateur* C *de* g *contient* S*, donc est de cardinal* $p^a q^m$*. Or le cardinal de la classe de conjugaison est* $p^n q^m / p^a q^m$*.*

   Considérons donc cet élément $g \neq e$ *dont la classe de conjugaison est de cardinal une puissance de* p*. Si cette classe de conjugaison est réduite à* g*, le centre* Z *de* G *est non-trivial. En appliquant l'hypothèse de récurrence à* G/Z*, qui est d'ordre* $p^r q^s$ *avec* $r + s < N$*, ce groupe est résoluble. Comme* Z *est commutatif donc résoluble, on obtient que* G *est résoluble.*

   Sinon, la question précédente permet de construire N *sous-groupe distingué strict dans tel que* g *se projette dans le centre de* G/N*. On a déjà traité le cas où* g *est dans le centre de* G*, donc on peut supposer*

N non trivial. Mais alors, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à N et G/N : G est encore résoluble.